

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи
УДК 531.19

ГРИГОРЬЕВ СЕРГЕЙ ЮРЬЕВИЧ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ
В МОДЕЛЯХ СВОБОДНЫХ ФЕРМИОНОВ

01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2009

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики
им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
профессор В.Б. Приезжев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Н.Е. Савицкая
кандидат физико-математических наук
А.М. Поволоцкий

Ведущая организация: Физический институт имени П.Н. Лебедева
Российской Академии Наук

Защита состоится “___” _____ 2009 г. в ___ ч. ___ мин.
на заседании диссертационного совета Д 720.001.01 в Лаборатории
теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института
ядерных исследований, 141980, г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-
Кюри, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛТФ ОИЯИ.

Автореферат разослан “___” _____ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук

А.Б. Арбузов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы.

Вычисление таких величин как параметр порядка, теплоемкость, средняя энергия можно свести к вычислениям различных корреляционных функций, что придает значимость таким вычислениям. Особый интерес представляют системы вблизи критической области, где парные корреляционные функции ведут себя следующим образом:

$$\langle X(0)X(r) \rangle \sim \frac{1}{r^\alpha} \exp\left(-\frac{r}{\xi(r)}\right) \quad (1)$$

где $\xi(r)$ - корреляционная длина, характеризующая размер флуктуаций, которая расходуется, т.е. $\xi \rightarrow \infty$, при приближении к критической точке, что приводит к чисто степенной зависимости. При этом возникают крупномасштабные флуктуации, которые приводят к сингулярностям термодинамических функций. Степенное поведение наблюдаемых величин и корреляционных функций свидетельствует о масштабной инвариантности равновесной статистической системы в критической точке. За последнее время стало ясно, что область критических явлений описывает также широкий спектр динамических систем с большим числом степеней свободы. Изучение систем, находящихся вдали от равновесия показали, что флуктуации физических величин также являются самоподобными в широкой области значения физических параметров. Выяснилось, что интенсивности землетрясений, светимости квазаров, силы тока в электрических цепях, колебания индексов на фондовых рынках подчиняются тем же степенным законам, что и флуктуации физических величин в критической точке. Детали микроскопических состояний оказываются несущественными и характер критических особенностей термодинамических функций определяется степенной зависимостью с универсальными показателями α , которые называют критическими индексами.

В последние десятилетия разрабатывался мощный аппарат конформной теории поля (КТП), позволяющий вычислять точно

критические индексы для степенных корреляционных функций. Предполагается, что конформная теория поля может обобщить большой класс статистических моделей, если знать соответствие между статистической моделью и некоторой (минимальной) моделью конформной теории поля. Построение этого обобщения оказалось успешным, и со временем внимание научного сообщества переключилось на исследование логарифмической конформной теории поля (ЛКТП), после открытия систем, у которых в степенных корреляционных функциях есть логарифмические поправки. Математический аппарат логарифмической конформной теории поля также получил значительное развитие, однако для того, чтобы наглядно понять смысл результатов этой теории нужна простая и наглядная модель в статистической механике. Среди всех существующих моделей статистической физики, пожалуй, самой плодотворной для изучения логарифмической конформной теории поля является модель песочной кучи (Abelian sandpile model, ASM), поскольку в ней можно найти логарифмические корреляционные функции явно, используя комбинаторные методы. Точнее говоря, логарифмические зависимости можно исследовать в модели покрывающих деревьев и её обобщении - модели покрывающих паутин, к которым можно свести ASM вместе с моделью димеров, моделью плотных полимеров, эйлеровскими блужданиями и т.д. Дополнительным аргументом в пользу необходимости исследовать статистические модели и сопоставлять их с предсказаниями конформной теории поля является тот факт, что в КТП и ЛКТП используется ряд предположений, в частности, о соответствии между физическими величинами в статистических моделях и операторными полями в теории поля, гипотеза алгебры локальных полей, замкнутость этой алгебры. Более того, в моделях ЛКТП существуют операторы, для которых не до конца ясна физическая интерпретация. И, наконец, интересным является вопрос о самой природе возникновения логарифмической зависимости в корреляционных функциях.

Ключевым элементом для установления связи между решеточными моделями и конформной теорией поля является конформный заряд. Если известно значение конформного заряда, который параметризуется

двумя взаимно простыми числами, мы знаем какая минимальная модель описывает систему. Значение конформного заряда в соответствующей статистической модели можно определить из выделения в свободной энергии так называемой энергии Казимира. Для построенной в диссертации модели покрывающих сетей на цилиндре исследуется как добавление дополнительных циклов вокруг цилиндра изменяет энергию Казимира.

Важной гипотезой в конформной теории поля является гипотеза о существовании такого набора “базисных” взаимнолокальных полей, что любые флуктуирующие величины, взятые в различных пространственных точках, можно разложить по этому базису. Это так называемые операторные разложения. В ЛКТП операторные разложения содержат логарифмическую сингулярность. В диссертации будет показано, что для вычисления логарифмических поправок нужно рассматривать нелокальные решеточные объекты. Мы покажем, что логарифмическая зависимость обусловлена нелокальностью корреляционных функций и двухкомпонентностью покрывающих деревьев.

Комбинаторные исследования модели покрывающих деревьев, покрывающих сетей и ASM оказались плодотворными благодаря свободно-фермионным свойствам. В статистической механике понятие свободных фермионов вводится не столь непосредственно. Около пятидесяти лет назад С. Fan и F. Y. Wu ввели модель свободных фермионов как одну из вершинных моделей, удовлетворяющей некоторым условиям на веса вершин. Модель свободных фермионов важна тем, что она является точно-решаемой моделью. Иногда решение становится нетривиальным, как, например, вычисление вероятности выживания аннигилирующих частиц на одномерной решетке в виде кольца, поскольку в этой задаче плотность частиц фиксирована и частицы продолжают взаимодействовать друг с другом даже в пределе больших времен.

Цель работы.

- 1) Исследовать вероятность выживания случайного блуждания произвольного числа броуновских частиц на одномерной решетке при условии аннигиляции встретившихся частиц.
- 2) Исследование соответствия между решеточными моделями статистической физики и моделями логарифмической конформной теории поля.
- 3) Исследование методов перечисления непересекающихся траекторий изолированных контуров на двумерной решетке.

Научная новизна и практическая ценность.

Впервые получено точное аналитическое выражение для вероятности выживания произвольного числа аннигилирующих частиц на одномерной решетке с периодическими граничными условиями из заданных начальных координат в заданные конечные координаты. Решение полезно для математической интерпретации явлений смачивания, плавления и фазового перехода из соизмеримой в несоизмеримую фазу.

Логарифмическая конформная теория поля предсказывает поведение двухточечных корреляционных функций для абелевой модели песка на плоскости. Поскольку результаты ЛКТП опираются на ряд допущений, например, задание операторов в ЛКТП, соответствующих физическим величинам в статистических моделях, актуальной задачей является получение этих корреляционных функций независимым комбинаторным способом. Более того, абелева модель песка - это первый пример, где логарифмические двухточечные корреляционные функции можно вычислить явно.

Важным результатом в диссертации является открытие полного соответствия универсальной части обобщенной функции $\bar{Z}_N^{(\mu, \nu)}(q, \omega)$ для различных комбинаций граничных условий в модели покрывающих паутин на цилиндре с конечными характеристиками симплектических фермионов. Этот факт позволяет интерпретировать модель симплектических

фермионов как конформную полевую модель покрывающих сетей на цилиндре. Дальнейшая интерпретация триплетной W алгебры в терминах покрывающих сетей, до сих пор остается актуальной открытой проблемой.

Полученные в диссертации корреляционные функции для двухкомпонентного дерева с тремя путями в одной компоненте вблизи границы полуплоскости вместе с корреляциями на плоскости могут сыграть полезную роль в развитии ЛКТП, поскольку их можно анализировать комбинаторными методами без громоздких выкладок и получать логарифмические поправки к корреляционным функциям.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

- На одномерной решетке из L вершин с периодическими граничными условиями рассмотрена динамика произвольного конечного числа $p < L$ частиц, когда в каждый дискретный момент времени частицы делают с вероятностью ω_{+1} шаг направо и с вероятностью ω_{-1} шаг влево. Впервые получено выражение для вероятности перехода этих частиц из заданных начальных координат в заданные конечные координаты за конечное число шагов M , при условии что они не разу не встретятся.
- Исследована модель покрывающих сетей на цилиндре с закрытыми, открытыми и комбинированными граничными условиями на краях цилиндра. Построена производящая функция для этой модели. Произведена оценка ведущих членов в разложении свободной энергии в пределе большого радиуса цилиндра и произведено сравнение результатов с предсказаниями логарифмической конформной теории поля. Показано, что наличие циклов изменяет член в разложении свободной энергии, соответствующей энергии Казимира в соответствии с конформными весами, перечисленными в таблице Каца. Показано, что производящая функция, построенная для конечной решетки с различными граничными условиями совпадает с характеристиками, вычисленными в различных модулях

алгебры симплектических фермионов. Мы сопоставили открытые и закрытые граничные условия с модулями, образованными соответственно целыми и полуцелыми модами фермионов.

- Подробно исследованы конфигурации покрывающих деревьев необходимых для вычисления вероятностей P_i , $i = 1, 2, 3, 4$ в Абелевой модели sandpile и парных корреляционных функций $P_{1i}(r) - P_1 P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Численные оценки полученных выражений хорошо согласуются с предсказаниями логарифмической конформной теории поля.
- Получены корреляционные зависимости в двухкомпонентном покрывающем дереве с тремя длинными путями в одной компоненте на двумерной бесконечной решетке на полуплоскости (это конфигурации, которые представляют из себя пример Θ -графа, для которого исследовано асимптотическое поведение). Пути соединяют локальную окрестность одной вершины на фиксированном расстоянии r от границы и локальную границу другой свободной вершины, находящейся на расстоянии s от фиксированной вершины. Получены асимптотические выражения корреляционных функций, в зависимости от s и r .

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук, 2005, Москва-Долгопрудный.
- X конференция молодых ученых и специалистов 2006, ОИЯИ, Дубна.
- 43rd Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics of the University of Wroclaw, Ladek Zdroj, Poland, 2008

- International Colloquium on Integrable Systems and Quantum symmetries (ISQS-17) 2008, Praha, Czech Republic.
- XIII конференция молодых ученых и специалистов 2009, ОИЯИ, Дубна.
- Сессия Программно-консультативного комитета по физике конденсированных среды, Дубна, ОИЯИ, 25 - 26 июня,
- Семинар отдела “Статистическая механика” Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, Дубна..

Публикации.

По материалам диссертации опубликованы 4 работы в реферируемых журналах из списка ВАК и 2 работы в трудах конференций.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем диссертации 101 страница машинописного текста, включая 31 рисунок и список литературы из 81 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен краткий обзор исследования свободных фермионных моделей. Там же по главам кратко описаны основные результаты, полученные в данной диссертации.

В первой главе “Случайное блуждание аннигилирующих частиц” рассмотрена задача о перечислении непересекающихся траекторий, известная также как случайное блуждание аннигилирующих частиц по одномерной решетке. Сперва доказана теорема Фишера для вероятности достижения конечного состояния p частиц за произвольное число n шагов на бесконечной прямой, при условии что частицы не встречаются. Теорема доказана методом математической индукции:

показывается справедливость утверждения для одного шага, затем, полагая справедливость утверждения для произвольного n -го шага, доказывается общая теорема для $n + 1$ -го шага. Далее, выражение для вероятности перехода обобщается на случай одномерной решетки в виде кольца, где также сформулирована соответствующая теорема, которая доказывается методом математической индукции.

Во второй главе “*Покрывающие деревья с замкнутыми циклами на цилиндре*” вычисляется производящая функция модели покрывающих сетей на конечной цилиндрической решетке. Производится оценка ведущих членов в разложении свободной энергии в пределе большого радиуса цилиндра и производится сравнение результатов с предсказаниями логарифмической конформной теории поля. Показано, что наличие циклов, изменяет член в разложении свободной энергии, соответствующий энергии Казимира в соответствии с конформными весами, перечисленными в таблице Каца.

Проводится сравнение модели покрывающих сетей с примером точно-решаемой логарифмической модели с конформными граничными условиями – моделью плотных полимеров в критической точке (critical dense polymers) с определенным типом дефектов на полосе. Аналитические вычисления в разделах второй главы сводятся к стандартным детерминантным выражениям для моделей свободных фермионов с последующим анализом, где используется формула Эйлера-Маклорена. В завершение второй главы показывается, что производящая функция, построенная для конечной решетки с различными граничными условиями совпадает с характеристиками, вычисленными в различных модулях алгебры симплектических фермионов. Сопоставляются открытые и закрытые граничные условия с модулями, образованными соответственно целыми и полуцелыми модами фермионов.

В третьей главе “*Абелева модель песка*” рассмотрена модель самоорганизованной критичности ASM (Abelian sandpile model). Показано, что рекуррентные конфигурации в модели песочной кучи находятся во взаимнооднозначном соответствии с конфигурациями покрывающих деревьев. Благодаря этому соответствию задача о вычислении высоты

$h_i = 1, 2, 3, 4$ в некоторой вершине i в модели песка сводится к задаче о перечислении покрывающих деревьев, у которых вершина i среди соседних вершин имеет ровно $h_i - 1$ предшественников. Число покрывающих деревьев соответствует детерминанту соответствующей матрицы Лапласа Δ . Фиксацию числа предшественников можно осуществить изменяя решетку – удаляя или добавляя дополнительные ребра с некоторыми весами, для чего нужно модифицировать матрицу Лапласа. Если Δ' - модифицированная матрица Лапласа, то выражение $\det \Delta' / \det \Delta = \det [I + (\Delta' - \Delta)\Delta^{-1}]$ позволяет вычислять отношение числа покрывающих деревьев с фиксированным числом предшественников к общему числу покрывающих деревьев, и найти соответствующие вероятности. В третьей главе диссертации подробно исследованы конфигурации покрывающих деревьев необходимых для вычисления вероятностей P_h высот $h = 1, 2, 3, 4$ и парных корреляционных функций $P_{1a}(r) - P_1 P_a$, $a = 2, 3, 4$. Среди этих конфигураций есть локальные, для учета которых достаточно проводить изменения решетки в локальной области и нелокальные - Θ -графы, для учета которых вводятся дополнительные ребра, связывающие нелокальные области. Для всех локальных конфигураций приведены точные аналитические выражения и асимптотики. Для Θ -графов приведены точные аналитические матричные выражения (матрицы перечислены в приложении 2), с последующим численным и асимптотическим анализом. В приложении 1) описана асимптотика решеточной функции Грина Δ^{-1} , для больших расстояний и произвольных углов.

В четвертой главе *“Корреляционные функции двухкомпонентного покрывающего дерева с тремя длинными путями в одной компоненте”* проводится исследование нелокального объекта – Θ -графа на плоскости и полуплоскости с открытыми и закрытыми граничными условиями. В этой главе определено, что Θ -граф - это двухкомпонентное покрывающее дерево, где одна компонента содержит три непересекающихся произвольных пути. Эти пути соединяют окрестность некоторой фиксированной вершины j_0 , находящейся на расстоянии r от границы полуплоскости, с локальной окрестностью другой вершины t_0 ,

находящейся на расстоянии s от вершины j_0 . К этим путям прикреплены ветки покрывающих деревьев, так что ветви вместе с путями целиком образуют одну компоненту покрывающего дерева, которая окружена другой компонентой. В этой главе вычисляется отношение числа конфигураций, содержащих Θ -граф, к общему числу покрывающих деревьев на плоскости и полуплоскости и асимптотическое разложение этого отношения для случаев $r \gg s \gg 1$ и $s \gg r \gg 1$. Вычисления проводятся при помощи введения на решетке трех дополнительных ребер с бесконечно большим весом – “мостов”, т.е. построение модифицированного лапласиана Δ' и исследования отношения $\det \Delta' / \det \Delta$.

В заключении кратко сформулированы полученные в диссертации результаты, которые и выносятся на защиту.

По теме диссертации опубликованы следующие работы

1. *Случайное блуждание аннигилирующих частиц по кольцу*,
С.Ю. Григорьев, В.Б. Приезжев,
Теоретическая и Математическая Физика, 146, 488-498, (2007).
2. *Pair correlations in sandpile model: a check of logarithmic conformal field theory*,
V.S. Pogosyan, S.Y. Grigorev, V.B. Priezzhev and P. Ruelle ,
Physics Letters B **659**, 768-772, (2008).
3. *Two-dimensional spanning webs as (1,2) logarithmic minimal model* ,
J.G. Brankov, S.Y. Grigorev, V.B. Priezzhev, and I.Y. Tipunin,
Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, (2008),
P11017, (18 pp.).
4. *Three-leg correlations in the two-component spanning tree on the upper half-plane*,
S.Y. Grigorev, V.S. Pogosyan, V.B. Priezzhev,
Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, (2009),
P09008, (14 pp.).
5. *Применение теоремы Кургоффа и принципа включения-исключения*,
С.Ю. Григорьев,
Труды XLVIII научной конференции "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук" часть II (общая и прикладная физика) , (25-26 ноября 2005 года, Долгопрудный-Москва), 141-143.
6. *Вычисление корреляционных функций в модели Sandpile*,
С.Ю. Григорьев,
Труды X научной конференции молодых ученых и специалистов 2006, Дубна-2006, 162-164.