ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи
УДК 531.19

ОСЬКИН АНДРЕЙ ФЕДОРОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СПИНОВЫХ ЦЕПОЧЕК ТИПА XXZ В ПОДХОДЕ АЛГЕБР ГЕККЕ

Специальность: 01.04.02 – Теоретическая физика

автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 2009

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, А.П. Исаев
Научный консультант:
доктор физико-математических наук, С.З. Пакуляк

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Б. Приезжев
кандидат физико-математических наук Н.З.Иоргов

Ведущая организация:
Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Защита состоится " 24 " июня 2009 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 720.001.01 при Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, 141980, г. Дубна, Московская область, ул. Жолио-Кюри, 6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛТФ ОИЯИ.

Автореферат разослан " 22 " мая 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук А.Б. Арбузов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы.

Одной из важных задач современной математической физики является исследование интегрируемых систем. Конечномерными интегрируемыми системами как правило называются гамильтоновы системы, в которых число коммутирующих интегралов движения равно числу степеней свободы. В случае бесконечномерных полевых гамильтоновых систем интегрируемость впервые исследовалась Л.Д. Фадеевым и В.Е. Захаровым при изучении уравнений КдВ.

Исторически интерес к интегрируемым моделям возник при исследовании теории $XXX_{1/2}$ спиновой цепочки Гейзенберга и модели Изинга. Когда квантовая теория начала своё развитие и добилась первых успехов, то модель Изинга, являясь классической, была признана неудовлетворительной. В 1928 году Гейзенберг предложил квантовую спиновую модель, в которой классический спин модели Изинга, принимающий только два возможных состояния, был заменён на матрицы Паули, соответствующие спину 1/2. Одномерная версия этой модели имеющая название спиновая цепочка Гейзенберга была решена Бете в 1931, при помощи конструкции ныне известной, как Бете анзац.

В течение долгого времени после этого теория интегрируемых систем не развивалась, до тех пор, пока Онсагер не нашёл в 1944 году решение модели Изинга. Это решение имело огромное значение для статистических моделей, в частности для понимания физики критических явлений. Следствием этого решения явилось появление в 50-х годах большого числа работ по точно решаемым моделям, которые вскоре включили в себя работу Бете и в скором времени интегрируемые системы стали объектом пристального внимания физиков и математиков.

В частности, в теории поля одним из наиболее известных примеров интегрируемой модели является уравнение Sine-Gordon

$$\Box\varphi + m^2 \sin\varphi = 0,$$

для скалярного поля $\varphi(x,t)$, которое полагается релятивистским и нелинейным.

Как хорошо известно, проблемы теоретико-полевых моделей со взаимодействием связаны с наличием расходимостей и необходимо вводить регуляризации. Дискретизация пространства, или другими словами, переход к решёточным моделям, является одним из способов такой регуляризации. Этот подход сводит полевую модель в конечном объёме к системе с конечным числом степеней свободы.

В начале 80-ых годов, в основном благодаря работе Изергина и Корепина, было осознано, что интегрируемые полевые модели связаны с решёточными интегрируемыми моделями, которые в некоторых случаях могут быть интерпретированы как модели квантовых спиновых цепочек. Другими применениями моделей спиновых цепочек в современных теориях поля, являются вычисления аномальных размерностей композитных полей в $N = 4$ суперсимметричных теориях Янг-Миллса и при изучении высокоэнергетического предела теорий КХД.

Возвращаясь к статистическим теориям, стоит упомянуть такие модели, как ассиметричные процессы с исключением, которые физически можно рассматривать, как стохастическую систему частиц, совершающих скачки в соседние узлы по таким правилам, что две частицы не могут находиться в одном узле и не могут обогнать друг друга, и находящуюся под влиянием внешнего поля, которое движет частицы в некотором выделенном направлении. Динамику данной системы описывает гамильтониан $XXZ_{1/2}$ анизотропной модели Гейзенберга, имеющий вид

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} s_i^x s_{i+1}^x + s_i^y s_{i+1}^y + \frac{q+q^{-1}}{2} s_i^z s_{i+1}^z + \frac{q-q^{-1}}{4}(s_1^z - s_n^z),$$

где q формальный параметр, суммирование берётся по n узлам цепочки, а s^x, s^y, s^z – матрицами Паули.

Одним из методов исследования таких гамильтоновых систем является квантовый метод обратной задачи рассеяния, и связанный с ним алгебраический анзац Бете. Алгебраический анзац Бете, развивающий подход Бете, был разработан Л.Д. Фаддеевым и его школой. Использование анзаца Бете позволяет достигнуть множества интересных результатов, однако, помимо квантового метода обратной задачи рассеяния существует интерес к альтернативным формам изучения подобных квантовых гамильтоновых систем.

Это связано с тем, что при изучении конкретных систем не так просто определить, являются ли они интегрируемыми или нет. Некоторую информацию, которая позволяет ответить на этот вопрос, можно получить используя алгебраические свойства локальных матриц взаимодействия. В частном случае, если ввести $\hat{R}$ матрицу вида

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q-q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

которая действует в пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2}$, и определить оператор $\hat{R}_i$ действующий на $i, i+1$ узлах спиновой цепочки, то как было показано в работах Джимбо этот оператор удовлетворяет соотношениям алгебры Гекке

$$\begin{aligned} \hat{R}_i \hat{R}_j &= \hat{R}_j \hat{R}_i, \qquad |i-j| \geqslant 2, \\ \hat{R}_i \hat{R}_{i+1} \hat{R}_i &= \hat{R}_{i+1} \hat{R}_i \hat{R}_{i+1}, \\ (\hat{R}_i - q)(\hat{R}_i + q^{-1}) &= 0, \end{aligned}$$

которые показывают, что матрицы $\hat{R}_i$ реализуют некоторое представление алгебры Гекке. Данное матричное представление позволяет переписать гамильтониан $XXZ_{1/2}$ модели с открытыми граничными условиями в следующей простой форме

$$H = \sum_i \hat{R}_i.$$

Можно сформулировать более общую задачу поиска спектра для различных представлений специального элемента алгебры Гекке, который имеет ту же форму

$$H = \sum_i T_i,$$

где T_i образущие алгебры Гекке. Важным следствием данного наблюдения является следующее утверждение: любой стохастический процесс описываемый суммой локальных матриц взаимодействия, удовлетворяющих соотношениям алгебры Гекке, является интегрируемым процессом. Более того, любое представление ρ алгебры Гекке даёт интегрируемую систему, типа стохастического порцесса, с гамильтонианом $\rho(H)$. Таким образом важной задачей является исследование спектра гамильтониана алгебры Гекке в различных её представлениях. Данная задача очевидно сводится к изучению спектра неприводимых представлений.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является построение спектра гамильтониана цепочки Гекке,обобщающего гамильтониан $XXZ_{1/2}$ квантовой спиновой цепочки, для различных неприводимых представлений алгебр Гекке A типа, а также детальное исследование самих алгебр Гекке для случая q не являющегося корнем из единицы.

Научная новизна и практическая ценность.

Был разработан и применен для конкретных вычислений метод поиска спектра гамильтониана для некоторых специальных представлений. Получены условия для выражения неприводимых представлений алгебры Гекке одного вида через ограничения тензорных произведений неприводимых представлений другого вида, что позволяет ввести на некоторых представлениях алгебры Гекке конструкцию аналогичную конструкции коумножения. Тем самым возникает возможность вычислять спектры гамильтониана цепочки Гекке для более сложных представлений, что даёт возможность рассматривать новые интегрируемые спиновые и стохастические модели.

Полученное представление идемпотентов алгебры Гекке в виде произведения бакстеризованных элементов даёт простую конструкцию процедуры слияния. Результатом этого является, в частности, возможность получения новых решений для алгебраического аналога уравнений отражений. Также появляется возможность записать соотношения для элементов алгебры Гекке, которые в R-матричном представлении совпадают с TQ

уравнениями Бакстера, что в свою очередь позволит получать спектры гамильтонианов различных физических моделей на основе аналитического анзаца Бете.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на:

1. Международном совещании “Суперсимметрии и квантовые симметрии”, 2007, ОИЯИ, г.Дубна;
2. XVI International Colloquium on Integrable Systems (ISQS-16), Prague, 2007;
3. семинарах темы “Современная математическая физика”, ЛТФ, ОИЯИ, г.Дубна;
4. XIII конференции молодых учёных и специалистов, 2009, ОИЯИ, г. Дубна.

Публикации.

Диссертация написана по материалам 4 работ.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Общий объем диссертации 112 страниц машинописного текста, включая список литературы из 59 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении представлен краткий обзор основных работ и результатов по теме интегрируемых систем и алгебр Гекке. Там же кратко описаны основные результаты, составляющие данную диссертацию.

В первой главе – *"Аффинные группы кос"* – описывается теория групп кос, соответствующих аффинным и неаффинным графам Дынкина. Для случая групп кос A типа излагается конструкция так называемого "элементарного гомоморфизма" (соответствующий английский термин "evaluation homomorphism" не имеет более адекватного перевода на русский язык), при помощи которого удаётся систематически описать свойства специальных объектов соответствующей алгебры Гекке, которые называются элементами Юциса-Мёрфи и были выведены Диппером и Джеймсом при обобщении результатов Юциса и Мёрфи для симметрической группы.

Группа кос соответствующая неафинному графу Дынкина A типа порождается набором образующих $T_1, \ldots, T_n$, которые удовлетворяют соотношениям

$$T_i T_j = T_j T_i, \qquad |i-j| \geqslant 2,$$
$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}.$$

Элементы Юциса-Мёрфи определяются при этом из следующих реккурентных соотношений

$$y_1 = 1, \qquad\qquad y_{i+1} = T_i y_i T_i.$$

Основная идея построения элементарного гомоморфизма заключается в том, что в аффинной группе кос удаётся выполнить одновременно несколько условий. Сама по себе аффинная группа кос (вообще говоря расширенная, но в тексте для упрощения это слово будем опускать) может быть определена несколькими разными эквивалентными способами. С одной стороны она определяется набором образующих $\{T_0, \ldots, T_n\}$, которые удовлетворяют соотношениям кос, и элементами $\pi \in \Omega$, где Ω фундаментальная группа данной алгебры Ли, или, другими словами, группа автоморфизмов соответствующего аффинного графа Дынкина. С другой стороны, для аффинных групп кос естественным образом определяется подгруппа сдвигов Y, изоморфная решётке ковесов, и аффинная группа кос описывается в этом случае элементами подгруппы сдвигов и образующими $\{T_1, \ldots, T_n\}$, которые сами по себе являются образующими уже неаффинной группы кос. Так как подгруппа Y является образом решётки ковесов, то тем самым она играет важную роль в теории представлений групп кос и соответствующих аффинных алгебр Гекке. Поскольку это два различных описания одной и той же аффинной алгебры, то между ними существует связь, которая описывается при помощи понятия длины. Это построение в случае аффинных групп является всего лишь расширением классического понятия и потому многие теоремы переносятся практически без изменений. С использованием конструкции длины в случае A серии для ковеса соответствующего старшему ковесу антифундаментального представления получается выражение вида $Y^{b_n} = \pi_n T_1 T_2 \ldots T_n$, где $\pi_n T_0 = T_n \pi_n$. Однако, с другой стороны, в неаффинной группе кос, существует внутренний автоморфизм, порождаемый элементом $X = T_n \ldots T_1$ который действует схожим образом. Наивно можно сказать, что существует гомоморфизм аффинной группы кос на неаффинную группу с использованием отождествления $\pi \mapsto X$. Это не совсем точно, так как данное отображение не является корректно определённым, однако, как оказывается в дальнейшем, неточность, которая допускается при таком отождествлении не является существенной. С учётом этого замечания получается, что элементу Y^{b_n} соответствует некоторый элемент Юциса-Мёрфи. Рассматривая другие ковеса, и используя то же отображение, для неаффинной алгебры Гекке получается всё семейство операторов Юциса-Мёрфи, которые, таким образом являются образом решётки ковесов и наследуют её свойства. А именно, они образуют максимальную коммутативную подгруппу, а также в последующем с их помощью описывается теория представлений соответствующей алгебры Гекке. Другой подход к вычислению элементарного гомоморфизма уже в алгебрах Гекке, связан с использованием квантовых групп и был описан в работе И. Чередника.

Во второй главе – *“Алгебра Гекке и её представления”* – определяются алгебры Гекке и, при помощи введённых элементов Юциса-Мёрфи y_i, строится их теория представления. Данная теория, в силу причин упомянутых выше, оказывается связанной с теорией представления алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$. Поэтому в обеих теориях используется сходный язык, а именно язык диаграмм Юнга. Все возможные представления алгебр Гекке при этом описываются окрашенным графом Юнга, в вершинах которого стоят диаграммы Юнга. Каждой диаграмме Юнга при этом ставится в соответствие набор стандартных таблиц Юнга T, которые связаны со специальными элементами E_T алгебры Гекке, называющихся идемпотентами, то есть удовлетворяющих соотношениям $E_T^2 = E_T$. Идемпотенты обладают рядом свойств, вопервых они являются собственными “векторами” элементов Юциса-Мёрфи $y_i E_T = E_T y_i = c_i E_T$, где c_i – “содержимое” клетки с координатами (n, m), $c_i = q^{2(n-m)}$. Во-вторых, идемпотенты можно записать как функции этих же элементов Юциса-Мёрфи. Более того, существует альтернативная форма их записи через бакстеризованные элементы

$$T_i(x, y) = \frac{T_i\, y - T_i^{-1}\, x}{y - x}, \qquad x, y \in \mathbb{C},$$

которая исследуется в диссертации и является обобщением аналогичной конструкции для симметрической группы.

Юцисом было замечено, что примитивные идемпотенты симметрической группы, могут быть получены как некоторый предел функции многих переменных специального вида, с рациональными коэффициентами и со значениями в симметрической группе. Точка в которой берётся предел определяется содержимым соответствующих клеток заданной таблицы Юнга, для которой ищется идемпотент. Эта функция имеет вид

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Big(1 - \frac{(i\ j)}{u_i - u_j}\Big),$$

где $u_1, \ldots, u_n$ являются комплексными переменными и произведение вычисляется в групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ с лексикографическим упорядочиванием по парам (i, j).

Сходная конструкция, называемая "процедура слияния" (оригинальный английский термин "fusion procedure"), была разработана Чередником и полное доказательство было впервые дано Назаровым. Позднее эта конструкция была построена для случая алгебр Гекке, в частности Граймом была использована версия основанная на главных крюках разбиения. Однако Молевым недавно было найдено гораздо более простая версия доказательства этой конструкции в случае симметрической группы. В диссертации было построено обобщение этого доказательства для алгебр Гекке, что позволило получить простую конструкцию слияния. А именно, для произвольной стандартной таблицы Юнга T диаграммы $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, соответствующий идемпотент E_T, получается в результате последовательного вычисления функции

$$E_T = F(\lambda)\, Y_1(c_1; u_2) \ldots Y_{n-1}(c_1, c_2, \ldots c_{n-1}; u_n)\big|_{u_2=c_2}\big|_{u_3=c_3} \ldots \big|_{u_n=c_n},$$

где

$$Y_k(c_1, c_2, \ldots, c_k; u) = T_{\omega_k}\, T_k(c_1, u) T_{k-1}(c_2, u) \ldots T_1(c_k, u)\, T^{-1}_{\omega_{k+1}},$$
$$T_{\omega_k} = (T_1 \ldots T_{i-2}\, T_{i-1})(T_1 \ldots T_{i-2}) \cdots (T_1\, T_2)\, T_1,\ i = 2, \ldots, n.$$

Нормировочный коэффициент $F(\lambda)$ вычисляется в процессе построения идемпотентов. С одной стороны, он равен

$$F(\lambda) = q^{n(\lambda') - n(\lambda)} \prod_{\alpha \in \lambda} \frac{1}{(h_\alpha)_q},$$

где произведение берётся по всем клеткам $\alpha = (i, j)$ диаграммы λ, диаграмма $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_l)$ является сопряжённой к λ. Крюк h_α определяется как $h_\alpha = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, q-число $(m)_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$, число $n(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} (i-1)\, \lambda_i$.

С другой стороны, этот нормировочный коэффициент оказывается связанным с так называемой *q-размерностью* стандартных таблиц и следом Окнеану-Маркова от соответствующих идемпотентов.

В третьей главе – *"Алгебра Гекке и интегрируемые модели"* – вычисляется спектр гамильтониана цепочки Гекке, для случая специальных представлений алгебр Гекке, соответствующих диаграммам Юнга углового типа. Исходно в данной главе описывается конструкция специальных элементов алгебры Гекке аналогичных матрицам монодромии Склянина. Полученные операторные матрицы монодромии являются производящими функциями семейства коммутирующих элементов алгебры Гекке, одним из которых и является собственно гамильтониан цепочки Гекке. Данная коммутативная подалгебра называется подалгеброй Бете. Тем самым устанавливается связь между интегрируемыми моделями связанными с XXZ моделями исследованными Бете и интегрируемыми системами, описываемыми гамильтонианами подалгебры Бете. В результате, задача исследования спектра гамильтониана сводится к исследованию собственных значений соответствующих элементов подалгебры Бете в различных неприводимых представлениях.

Собственно построение спектра гамильтониана цепочки Гекке для представлений, соответствующих угловым диаграммам, состоит из двух частей. Вначале производится вычисление спектра для представлений соответствующих угловым диаграммам простейшего типа, а именно диаграммам вида $\{k, 1\}$, то есть состоящих из двух рядов, причём во втором ряду находится лишь одна клетка. Далее, более сложные представления строятся из простейших как антисимметризация их тензорных произведений. Вообще говоря, алгебра Гекке не является биалгеброй и поэтому, в общем случае, коумножение в ней не определено. Это значит, что процедура тензорного произведения двух представлений алгебры Гекке не приводит к новому представлению. Однако, в работе формулируется общий результат, который указывает условия при которых данную процедуру провести можно. В частности удаётся построить представления соответствующие произвольной диаграмме Юнга углового типа, и указать коумножение для образующих алгебры Гекке в данном представлении. В силу указанной конструкции, спектр гамильтониана $H_{(k,l)}$ получается как сумма собственных значений гамильтонианов соответствующих угловым диаграммам типа $\{k,1\}$ и равен

$$\mathrm{Spec}(H_{(k,l)}) = \{\sum_{i=1}^{l} 2\cos\frac{\pi m_i}{k+l+1}, 1 \leqslant m_1 < m_2 \dots < m_l \leqslant k+l\}.$$

Данный результат является спектром свободных фермионов

В заключении кратко сформулированы полученные в диссертации результаты, которые и выносятся на защиту.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

- Для гамильтониана цепочки Гекке получен точный спектр энергии, в случае неприводимых представлений алгебр Гекке A типа, соответствующих угловым диаграммам Юнга.

- Для алгебр Гекке A типа получены условия, при которых одни представления, можно выражать через специальные комбинации тензорных произведений других представлений.

- Для примитивных идемпотентов алгебры Гекке (квантовых аналогов симметризаторов Юнга) получены их факторизованные формы, записанные в терминах решений уравнения Янга-Бакстера, записанные в терминах образующих алгебры Гекке.

- Для указанной формы примитивных идемпотентов вычислены выражения для нормировочных коэффициентов, которые выражаются через q-размерности неприводимых представлений групп $SU_q(N)$.

<u>По теме диссертации опубликованы следующие работы</u>

1. A.P.Isaev, A.F.Oskin, *"Open Hecke Chains and free fermions"*, Czechoslovak Journal of Physics, **56** (2006), 1197

2. A.P.Isaev, O.V.Ogievetsky, A.F.Oskin, *"Open Hecke chains for corner type representations"*, Proceedings of International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries"(SQS'07), Dubna 2008, E2-2008-83, 217

3. A.P.Isaev, O.V.Ogievetsky, A.F.Oskin, *"Chain models on Hecke algebra for corner type representations"*, Reports on Math.Ph., **61** (2008), 311

4. A.P.Isaev, A.I.Molev, A.F.Oskin, *"On the idempotents of Hecke algebras"*, Letters in Math.Ph., **85**, (2008), 79