

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория физики высоких энергий

На правах рукописи

Специальность: 01.04.16. - "Физика атомного ядра и элементарных
частиц"

АПАРИН

Алексей Андреевич

СКЕЙЛИНГОВЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ
В РОЖДЕНИИ КУМУЛЯТИВНЫХ ЧАСТИЦ
И ЧАСТИЦ С БОЛЬШИМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ
В ПРОТОН ЯДЕРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ
ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -

доктор физико-математических наук

Токарев М.В.

Дубна - 2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Кумулятивный эффект и масштабная инвариантность в физике частиц	17
1.1 Кумулятивный эффект	17
1.2 Скейлинги в физике высоких энергий	26
2 z-скейлинг как метод анализа инклюзивных спектров	38
2.1 Принципы построения z скейлинга	38
2.2 Скейлинговая переменная z	42
2.3 Скейлинговая функция $\Psi(z)$ и ее свойства	46
3 Спектры заряженных адронов в некумулятивной области p_A столкновений	47
3.1 Спектры рождения адронов с большими поперечными импульсами .	47
3.2 Скейлинг в рождении адронов с большими поперечными импульсами	50
3.3 A -зависимость z -скейлинга	51
4 Скейлинг в кумулятивном рождении адронов в $p+A$ столкновениях	54
4.1 Кинематика рождения частиц в $p + A$ столкновениях	54
4.2 Рождение заряженных адронов в $p + A$ столкновениях при малых p_T во ФНАЛ	55
4.3 Рождение заряженных адронов в $p + A$ столкновениях при малых p_T на $U70$	62
4.4 Рождение заряженных адронов в $p + A$ столкновениях при больших p_T на $U70$	68

5	Спектры рождения пионов в глубоко-кумулятивной области в $p+A$ столкновениях	73
5.1	Форма импульсных спектров рождения частиц	74
5.2	Форма $\Psi(z)$ и функция распределения Цаллиса	76
6	Предложение для эксперимента с фиксированной мишенью на установке STAR	87
6.1	Кинематика изучаемых процессов	88
6.2	Обобщенная модель z -скейлинга	91
6.3	Кинематика кумулятивного рождения в эксперименте с фиксированной мишенью	92
	Заключение и выводы	96
	ПРИЛОЖЕНИЕ А	99
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б	102
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	107

ВВЕДЕНИЕ

Эксперименты с тяжелыми ионами на коллайдере релятивистских тяжелых ионов (Relativistic Heavy Ion Collider, RHIC) в Брукхэйвенской национальной лаборатории (BNL) представили убедительные доказательства существования нового состояния ядерной материи, которое по своим свойствам больше напоминает идеальную жидкость, чем идеальный газ кварков и глюонов [1, 2]. Наиболее яркими закономерностями рождения частиц являются подавление выходов частиц с большими поперечными импульсами p_T , описываемое ядерным модификационным фактором R_{AA} [3], большими значениями прямого и эллиптического потоков, скейлинговым поведением эллиптического потока, нормированного на число конститuentных кварков: v_2/n_q , и усилением корреляций выходов частиц при больших $\Delta\eta$ и $\Delta\phi$ (ridge effect) [4]. Одной из основных целей программ по физике тяжелых ионов на действующих ускорителях RHIC [5, 6], SPS (Супер Протонный Синхротрон, Super Proton Synchrotron) [7] и LHC (Большой Адронный Коллайдер, Large Hadron Collider) [8] является поиск явных указаний на существование фазового перехода и критической точки (КТ) в ядерной материи. В этих экспериментах создаются условия для образования нового состояния ядерного вещества, исследуются его свойства и на основе полученных результатов устанавливаются свойства системы, образующейся в столкновениях ядер при больших плотностях энергии и температурах в рамках теории Квантовой Хромодинамики (КХД).

Важным шагом при изучении нового состояния ядерной материи и понимания фазовой диаграммы КХД является систематический анализ рождения частиц как функции энергии и центральности столкновения, типа частиц и их характеристик. Предполагая, что система находится в состоянии термодинамического равновесия, температура и барионный химический потенциал могут быть определены в рамках статистической модели [9]. Поиск возможного положения критической точки $\{T_c, \mu_c\}$ может быть проведен при изменении энергии столкновения. Программы

энергетического сканирования в области $\sqrt{s_{NN}} = 7 - 200$ ГэВ, предложенные коллаборациями NA61 на SPS [10] и STAR и PHENIX на RHIC [11], ставят своей целью именно такой поиск. Расширенные программы исследования фазовой диаграммы ядерной материи будут осуществляться также на строящихся в настоящее время ускорительных комплексах NICA (ОИЯИ, Россия) и FAIR (GSI, Германия) в области энергий $\sqrt{s_{NN}} \approx 2 - 11$ ГэВ [12, 13].

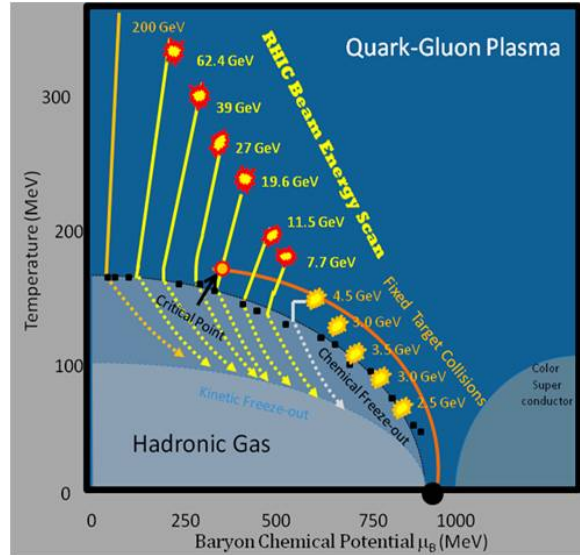


Рис. 1: Схематическое представление фазовой диаграммы ядерной материи. Расчеты, сделанные в КХД на решетке, предсказывают нахождение КТ в интервале $250 < \mu_B < 450$ МэВ. Черные квадраты - точки химического вымерзания, рассчитанные на основе данных существующих тяжелоионных экспериментов в рамках статистического подхода. Желтые кривые - вероятные траектории при различных энергиях RHIC.

На рисунке 1 представлена фазовая диаграмма ядерной материи в виде зависимости температуры от барионного химического потенциала. Показаны вероятные расположения фазовых границ и положение критической точки. Следует отметить, что эта диаграмма имеет условный вид, потому что значения температуры и химического потенциала не измеряются прямо в эксперименте. Они получаются косвенно в результате анализа данных по отношениям выходов частиц, например, π^-/π^+ , K^-/K^+ , p^-/p^+ , K^-/π^- , p^-/π^- . Предполагается также, что система частиц, образующаяся в столкновениях тяжелых ионов, находится в состоянии термоди-

намического равновесия - при этом условии возможно проводить анализ данных в рамках равновесного термодинамического подхода

Несмотря на огромный прогресс КХД, точное положение границ перехода адронный газ - сильновзаимодействующая Кварк-Глюонная Плазма (сКГП) и наличие гипотетической КТ в терминах T и μ_B до сих пор теоретически не установлено. Таким образом, цель экспериментальных и теоретических исследований - поиск убедительных доказательств существования фазовых переходов в ядерной материи при данных условиях. Теория предсказывает несколько сигнатур фазового перехода первого рода и существования КТ [14]. Большинство из них сводится к усилению флуктуаций при пересечении фазовой границы и зависимости их от энергии столкновения $\sqrt{s_{NN}}$, когда энергия приближается к области вблизи КТ по μ_B . Однако теория не предсказывает величину этих флуктуаций и вероятность их появления в конечном адронном состоянии. Влияние жестких процессов на сигнатуры КТ также требует дополнительного детального изучения. При этом, фазовый переход первого рода и критическая точка обладают разным набором характерных сигнатур. Для поиска КТ наибольший интерес представляют поиски флуктуаций таких величин как барионный и электрический заряды системы и ее странность. Стандартные отклонения этих величин в теории вычисляются из вторых и четвертых производных логарифма парциальных функций КХД (χ_2 и χ_4). Экспериментально эти величины могут быть получены из флуктуаций поперечного импульса $\langle p_T \rangle$, отношений выходов частиц K/π , p/π и K/p , коэффициента эллиптического потока v_2 . Исследования флуктуаций $\langle p_T \rangle$ возможно проводить только на детекторах 4 π -геометрии, потому что в противном случае эффект от КТ будет "замазан" другими эффектами, такими как флуктуации от эллиптического потока. Вычисление $\langle p_T \rangle$ проводится двумя способами - событийно и в смешанных событиях. Полученные результаты показывают [15], что корреляционные функции $\langle \Delta p_{T,i} \Delta p_{T,j} \rangle$ значительны для всех энергий и не сводятся к случайным корреляциям. При этом величина флуктуаций больше, чем предсказывают расчеты с использованием Монте Карло генератора HIJING.

На рисунке 2 показана зависимость отношения K/π выходов частиц и античастиц от энергии столкновения. Данные, полученные на STAR в рамках программы энергетического сканирования (красные символы), хорошо согласуются с результатами, полученными в других экспериментах. Видна и общая тенденция монотон-

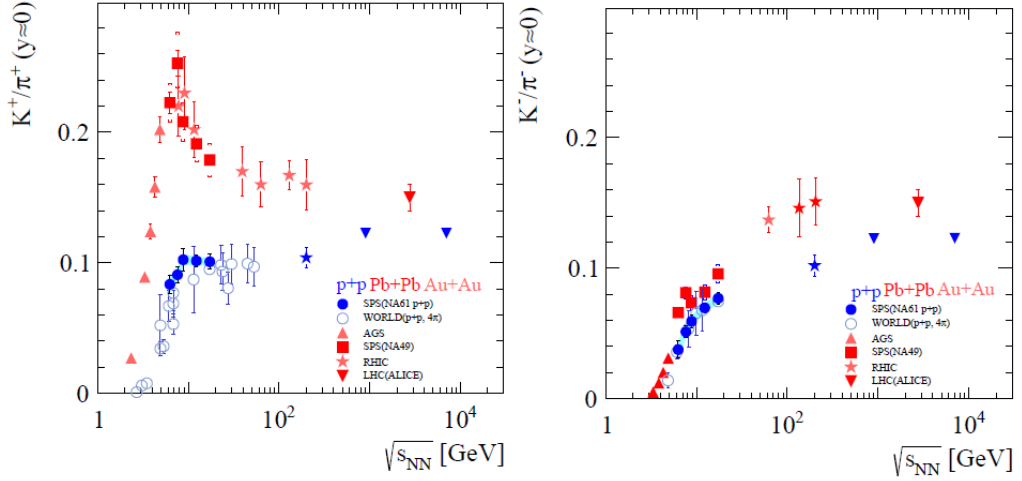


Рис. 2: Энергетическая зависимость отношения выходов K/π .

ного роста этого отношения с энергией для отрицательно заряженных частиц и наличие пика при $\sqrt{s_{NN}} = 6.5$ ГэВ для положительно заряженных. При больших энергиях отношение K^+/π^+ монотонно падает и при $\sqrt{s_{NN}} > 100$ ГэВ наблюдается указание о выходе на плато. Модель статистической адронизации [16] корректно описывает поведение отношения K^+/π^+ при высоких энергиях, но недооценивает величину отношения при низких. Пока не ясно, связано ли это с влиянием КТ или с несовершенством модели. Корреляции между странностью и барионным числом чувствительны к состоянию материи, образовавшейся при столкновении тяжелых ионов. В системе свободных кварков и глюонов странность переносится кварками s и \bar{s} , которые несут дробный барионный заряд $1/3$. В адронном газе странность в основном переносится каонами, для которых барионный заряд равен 0. При переходе от газа адронов к сКГП, ожидается изменение величины корреляций барионный заряд - странность, что и подтверждается последними КХД расчетами [17]. Так как обе величины сохраняются, то флуктуация должна наблюдаться также и в конечном состоянии, выражаясь в различии отношения выходов K/p .

Фазовый переход первого рода имеет другой набор характерных сигнатур. Наибольший интерес здесь может представлять изучение различных параметров эллиптического потока. Коэффициент эллиптического потока $v_2 = \langle \cos(2\varphi) \rangle$ частиц относительно угла плоскости реакции при энергиях Программы Энергетического Сканирования (BES) на RHIC [18, 19] имеет тенденцию монотонно возрастать с ростом энергии столкновения. Предполагается, что такое поведение определяется внутренними характеристиками гидродинамической системы: уравнением состоя-

ния, вязкостью, количеством степеней свободы и т. д. Однако v_2 является интегральной величиной, поэтому для лучшего понимания процессов, происходящих в плотной ядерной среде, предпочтительно исследовать поведение производных от v_2 величин. Например, зависимость v_2/ϵ (ϵ - эксцентриситет начального состояния) от плотности множественности заряженных частиц показывает [20] интересную особенность. Данные для различных ядер и энергий столкновения ложатся на одну кривую, при этом только для максимальных плотностей множественности, достижимых в центральных столкновениях при максимальных энергиях RHIC, эта кривая достигает гидродинамического предела эллиптического потока. Такие результаты ставят вопрос о допустимости использования уравнения гидродинамики при описании столкновений при более низких энергиях. В настоящее время ведется активная работа по улучшению гидродинамических теорий. Прямым указанием на фазовый переход является "коллапс" протонного эллиптического потока v_2 . Впервые о таком поведении v_2 при энергии столкновения $\sqrt{s_{NN}} = 8.77$ ГэВ заявила коллаборация NA49 [21]. Однако, после проведения повторных измерений и улучшения метода выделения v_2 , результат не был подтвержден. ПЭС позволит провести подобные измерения на большей статистике и с улучшенной систематикой. Другим указанием на фазовый переход является изменение формы спектров заряженных частиц в зависимости от энергии столкновения и центральности. Полученные результаты анализа спектров частиц, образующихся в столкновениях ядер при разных энергиях, позволили в рамках статистической модели [22] определить термодинамические характеристики состояния вещества, находящегося в состоянии термодинамического равновесия. Такими характеристиками являются температура, химический барионный потенциал и скорость потока ядерной материи.

Как видно из всего вышесказанного, переход от адронных к кварк-глюонным степеням свободы вблизи фазовой границы или критической точки должен приводить к возникновению характерных наблюдаемых эффектов - сигнатур фазового перехода. Такими сигнатурами могут быть: появление или изменение корреляций между наблюдаемыми, возрастание флуктуаций, появление разрывов в поведении некоторых наблюдаемых величин, характеризующих свойства ядерной среды.

Данная работа посвящена поиску сигнатур фазового перехода в процессах инклюзивного рождения кумулятивных частиц в протон-ядерных столкновениях. При

анализе экспериментальных данных по инклюзивным спектрам использовался метод z скейлинга [23, 24, 25]. z скейлинг как метод анализа рождения адронов, струй и прямых фотонов был предложен в лаборатории высоких энергий объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ). В рамках этого метода спектры описываются безразмерной функцией, зависящей от одной безразмерной переменной - параметра подобия z . Как скейлинговая функция, так и параметр подобия выражаются через измеряемые физические величины. Ранее этот метод был успешно применен для описания инклюзивных спектров рождения адронов, прямых фотонов и струй в протон-протонных и протон-ядерных столкновениях в некумулятивной области [26, 27, 28]. В работах [29, 30] было предложено использовать метод z -скейлинга для поиска сигнатур фазового перехода в ядерной материи. В качестве таких сигнатур предлагается использовать резкое изменение модельных параметров теории.

Актуальность изучаемых задач

Поиск новых симметрий и скейлинговых закономерностей всегда был предметом интенсивных исследований при изучении взаимодействий частиц и ядер высоких энергий. Как правило, их открытия (калибровочная инвариантность, скейлинги Бьеркена, Фейнмана, Кобы-Нильсена-Олесена, правила кваркового счета, кумулятивное рождение и др.) способствовали выявлению новых свойств взаимодействий и структуры частиц, а также существенному продвижению в развитии теории сильных взаимодействий. Установленные закономерности позволили вычислить различные характеристики процессов (сечения, структурные функции, распределения по множественности и др.) в новых кинематических областях, тем самым продемонстрировали предсказательную силу существующих теорий. Нарушения симметрий и отклонения от скейлингового поведения соответствующих характеристик, наблюдаемые в новых экспериментально-исследованных кинематических областях, рассматриваются, как правило, как проявления новых физических закономерностей. В дальнейшем они изучаются и составляют основу для последующего развития более общей теории.

Одним из основных методов исследования ядерной материи и свойств среды, образующейся при взаимодействии адронов и ядер является поиск нарушения закономерностей, установленных для частиц с большими поперечными импульсами и

струй в элементарных лептон-адронных и адрон-адронных взаимодействиях. Струи представляют собой коллимированные в пространстве и времени потоки высокоэнергетических частиц. Считается, что они являются результатом взаимодействия элементарных конstituентов (кварков и глюонов) с их последующим превращением в реальные частицы.

Одна из новых закономерностей в рождении заряженных адронов с большими поперечными импульсами при взаимодействии (анти-) протонов и ядер при высоких энергиях получила название z скейлинга [23, 24]. Проверка установленных свойств z скейлинга, их изучение при рождении нейтральных мезонов и струй в $p(\bar{p}) + p$ взаимодействиях, а также поиск новых закономерностей в рамках этой теории представляет значительный интерес, так как нацелены на детальное исследование и проверку новых явлений в физике высоких энергий (самоподобие и фрактальность структуры адронов и ядер; взаимодействия их конstituентов на малых масштабах; процесса фрагментации), предсказательной силы КХД, а также на установление дополнительных ограничений на модели рождения адронов.

Изучение свойств z -скейлинга в $p + A$ и $A + A$ взаимодействиях проводится с целью выявления особенностей образования частиц в сложных системах и изучения влияния ядерной среды на процесс формирования частиц. Нарушение z скейлинга при высоких энергиях предлагается рассматривать как указание на возможность существования новых физических процессов или закономерностей, таких как фазовые переходы в адронной и ядерной материи, структурность кварков, фрактальность пространства и времени, новые виды взаимодействий. Все перечисленное выше свидетельствует о том, что задачи поставленные и решаемые в диссертации актуальны.

Цель исследования

Целью исследования является:

- Проверка принципа самоподобия в кумулятивном рождении пионов в протон-ядерных соударениях при энергиях У70 (ИФВЭ) и протонного синхротрона (ФНАЛ).
- Построение скейлинговой функции $\Psi(z)$ и параметра подобия z для рождения адронов в кумулятивной области $p + A$ столкновений в экспериментах с фиксированной мишенью на ускорителях У70 (ИТЭФ) и протонного синхротрона

(ФНАЛ).

- Проверка скейлинговых закономерностей кумулятивного рождения пионов и заряженных адронов при высокой энергии - угловая, энергетическая и A зависимости функции $\Psi(z)$.
- Сравнение спектров рождения пионов в импульсном и z представлениях в некумулятивной и кумулятивной областях. Проверка универсальности формы функции $\Psi(z)$ и аддитивности фрактальной размерности ядер.
- Предсказание импульсных спектров рождения пионов в $p + A$ столкновениях в глубоко-кумулятивной области.
- Поиск сигнатур фазовых переходов в плотной ядерной материи в экспериментах с фиксированной мишенью на ускорителях У70 (ИТЭФ) и протонного синхротрона (ФНАЛ).
- Использование метода z -скейлинга для кинематической оценки эксперимента с фиксированной мишенью на детекторе STAR, с целью установления наиболее подходящей для поиска сигнатур фазовых переходов в ядерной материи кинематики эксперимента.

Научная новизна

В работе впервые в рамках z скейлинга проведен систематический анализ данных по инклюзивному рождению заряженных частиц в $p + A$ столкновениях при высоких энергиях в кумулятивной области при малых и больших поперечных импульсах. Проверена гипотеза самоподобия в кумулятивном рождении пионов и расширена область применимости метода с целью поиска сигнатур фазовых переходов в ядерной материи.

- Впервые построена скейлинговая функция $\Psi(z)$ и параметр подобия z для рождения π мезонов в кумулятивной области в $p + A$ взаимодействиях при энергиях У70 и протонного синхротрона ФНАЛ.

- Впервые изучены свойства z -скейлинга в кумулятивном рождении заряженных пионов в протон-ядерных взаимодействиях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 6 - 28.2$ ГэВ. Установлены энергетическая, угловая и A зависимости скейлинговой функции $\Psi(z)$ в широкой области значений параметра подобия z . Получено подтверждение са-

моподобия рождения пионов в исследованной кумулятивной области с большими поперечными импульсами.

- Впервые на основе скейлинговых свойств функции $\Psi(z)$, установленных для рождения пионов в $p + A$ столкновениях в кумулятивной и некумулятивной областях, предсказаны импульсные спектры пионов π^\pm с большими p_T в глубоко-кумулятивной области при энергиях U70 и протонного синхротрона ФНАЛ.

- Сформулированы критерии поиска новых явлений в кумулятивных процессах с большими p_T : нарушение закона аддитивности или резкое изменение фрактальной размерности ядер δ_A .

- Предложена аналитическая зависимость скейлинговой функции $\Psi(z)$ на основе универсальности ее формы в кумулятивной и некумулятивной областях $p + A$ взаимодействий.

Научно-практическая ценность работы

- На примере закономерностей в рождении пионов в $p + A$ взаимодействиях, показана важность использования самоподобия как фундаментального физического принципа для поиска новых закономерностей в физике высоких энергий в $p + A$ взаимодействиях.

- Создан комплекс программ для расчета и исследования свойств скейлинговой функции $\Psi(z)$ и параметра подобия z для рождения π^\pm мезонов в $p + A$ взаимодействиях в кумулятивной и некумулятивной областях.

- Предсказаны импульсные спектры π^\pm мезонов в $p + A$ взаимодействиях в глубоко-кумулятивной области при энергиях U70 и протонного синхротрона ФНАЛ, которые могут быть использованы для планирования новых экспериментов.

- Предложена сигнатура появления новых физических закономерностей при рождении кумулятивных частиц в рамках метода z -скейлинга.

- Расширена область применимости метода z -скейлинга при описании рождения кумулятивных и некумулятивных пионов в $p + A$ столкновениях при энергиях U70 и протонного синхротрона ФНАЛ.

- Показана принципиальная возможность применения метода z -скейлинга для анализа экспериментальных данных и планирования новых экспериментов по рождению адронов в кумулятивной и некумулятивной областях с целью поиска сигнатур фазовых переходов в ядерной материи.

Защищаемые положения

На защиту выносятся следующие положения:

- Результаты анализа экспериментальных данных ИФВЭ и ФНАЛ по кумулятивному рождению пионов и заряженных адронов в $p + A$ столкновениях: свойства z -скейлинга в рождении заряженных адронов в $p + A$ столкновениях в кумулятивной области (энергетическая, угловая независимость и степенное поведение скейлинговой функции при больших значениях параметра подобия z , зависимость Ψ и z от номера атомного ядра A), свидетельствующие о самоподобии рождения пионов в ядерной среде в некумулятивной и кумулятивной областях.
- Процедура построения скейлинговой функции $\Psi(z)$ для рождения π^\pm мезонов и неидентифицированных адронов в $p + A$ взаимодействиях в широкой области кинематических переменных.
- Предсказание импульсных спектров рождения π мезонов и неидентифицированных адронов в $p + A$ столкновениях в глубоко-кумулятивной области при энергиях U70 и Тэватрона.
- Предложение об использовании z скейлинга как метода поиска новых физических закономерностей при кумулятивном рождении частиц, образующихся в адрон-ядерных взаимодействиях при высоких энергиях.

Апробация работы

Результаты работы неоднократно докладывались на российских и международных научных конференциях и научных семинарах:

1. XVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов-2011, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. Исследование поведения заряженных частиц в тяжелоионных столкновениях: $Au + Au$ при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9,2$ ГэВ, 2011.
2. XXI International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems, ОИЯИ, Дубна, Россия. Self-similarity of high- p_T hadron production in pA collisions, 2012.
3. XVI конференция молодых учёных и специалистов ОМУС-2012, ОИЯИ, Дубна, Россия. Оценка потерь энергии в $Au - Au$ столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ ГэВ, 2012.

4. XVI Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow State University, Moscow, Russia. Self-similarity of high- p_T cumulative hadron production in pA collisions, 2013.
5. Hadron Structure '13, Institute of Physics, Slovak Academy of Sciences, Tatranske Matliare, Slovakia. z -Scaling of cumulative hadron production in pA collisions at high energies, 2013.
6. Научный семинар в Лаборатории Физики Высоких Энергий ОИЯИ, Дубна, Россия. О самоподобии рождения кумулятивных частиц в pA взаимодействиях при высоких энергиях, 2013.
7. 18 Международная научная конференция молодых ученых и специалистов (ОМУС-2014), ОИЯИ, Дубна, Россия. Scaling features of cumulative charged particle production in pA collisions at high energies, 2014.
8. The 2014 European School of High-Energy Physics (ESHEP2014), CERN Geneva, JINR Dubna, Garderen, Netherlands 2014.
9. Quark Matter 2014, XXIV International Conference on Ultrarelativistic Nucleus-Nucleus Collisions, Darmstadt, Germany. Cumulative Particle Production in $p + A$ Collisions and z -Scaling, 2014.
10. XXII International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems, Dubna, Russia. Self-similarity of high- p_T hadron production in pA collisions, 2014.
11. Hadron Structure '15, Institute of Physics, Slovak Academy of Sciences, Horny Smokovec, Slovakia. Cumulative hadron production in pA collisions in the framework of z -scaling, 2015.
12. XVII Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow State University, Moscow, Russia. On possibility to study hard cumulative processes in a fixed target experiment at STAR, 2015.
13. V конференция молодых ученых и специалистов Алушта-2016, Алушта, Россия. Скейлинговые закономерности в рождении кумулятивных частиц и частиц с большими поперечными импульсами в протон ядерных столкновениях при высоких энергиях, 2016

Основные публикации по результатам исследования

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of high- p_T hadron production in pA collisions, PoS (Baldin-ISHEPP-XXI), 067, 2012.
2. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, z -Scaling of cumulative hadron production in pA collisions at high energies, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, 245, 149-152, 2013.
3. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of low- p_T cumulative pion production in proton-nucleus collisions at high energies, Phys.Part.Nucl.Lett. 11, 2, 91-100, 2014.
4. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of high- p_T cumulative hadron production in $p+A$ collisions at high energies at U70, Phys.Part.Nucl.Lett. 11, 4, 381-390, 2014.
5. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of low- p_T cumulative pion production in proton-nucleus collisions at U70, Phys.Part.Nucl.Lett. 11, 4, 391-403, Phys.Part. Nucl.Lett. 11 6, 818 2014.
6. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of cumulative hadron production in pA collisions at low- and high- p_T , PoS (Baldin-ISHEPP-XXI), 039, 2014.
7. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, I. Zborovsky, Fractal structure of hadrons in processes with polarized protons at SPD NICA (Proposal for experiment), Phys.Part.Nucl.Lett. 12, 1, 48-58, 2015.
8. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, I. Zborovsky, Self-similarity of hard cumulative processes in fixed target experiment for BES-II at STAR, Phys.Part.Nucl.Lett. 12, 2, 221-229, 2015.
9. A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Cumulative hadron production in pA collisions in the framework of z -scaling, Int. J. Mod. Phys. Conference Series **39**, 1560110, 2015.

Личный вклад автора диссертации

Автор внес определяющий вклад в получение результатов анализа импульсных спектров рождения кумулятивных адронов в $p + A$ столкновениях, полученных группами Г. Лексина, Л. Золина и В. Гапиенко на протонном синхротроне ФНАЛ и

ускорителе U70 ИФВЭ. Им написаны программы на ROOT для анализа спектров в рамках метода z -скейлинга. Автор активно участвовал в обсуждении результатов исследований, подготовке и написании статей в реферируемые журналы и представлении результатов на конференциях и семинарах.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, двух приложений и списка использованной литературы (содержит 172 наименования). Содержит 29 рисунков и 4 таблицы.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы, формулируются цели и задачи диссертационной работы, описывается научная новизна и научно-практическая ценность работы. Приводятся основные защищаемые положения, список публикаций по теме исследования и апробации диссертационной работы. В конце приведено краткое содержание работы.

В первой главе содержится краткий обзор литературы по проблематике масштабной инвариантности и кумулятивных процессов в физике высоких энергий. Дано определение кумулятивных процессов и приведен способ их выделения из набора фоновых событий. Рассматриваются основные виды "скейлингового" поведения, установленные в физике элементарных частиц, эксперименты по их открытию и границы их применимости.

Во второй главе приведен общий формализм метода z скейлинга для анализа инклюзивных спектров рождения адронов в столкновениях адронов и ядра. Дано описание подхода и его связь с фундаментальными физическими принципами (самоподобия, локальности и фрактальности), заложенными в основу метода z скейлинга. Приведена процедура построения скейлинговой переменной z и скейлинговой функции $\Psi(z)$. Рассматриваются их свойства и их физическая интерпретация.

В третьей главе описаны основные результаты анализа спектров рождения пионов и заряженных адронов в $p + A$ столкновениях, полученных на ускорителях ФНАЛ и U70 группами Д. Кронина, Дж. Джаффе, Р. Суляева. Приведены данные по зависимости функции $\Psi(z)$ от атомного номера ядра мишени в этих экспериментах.

В четвертой главе приведены результаты анализа данных кумулятивного рождения частиц в экспериментах на ускорителях ФНАЛ и U70 проведенных группами

Г. Лексина, Л. Золина и В. Гапиенко. Данные приведены в двух видах: зависимости сечения от импульса и зависимости функции Ψ от переменной z . Описаны найденные закономерности в z -представлении спектров - самоподобие формы скейлинговой кривой.

В пятой главе сделано предсказание поведения импульсных спектров заряженных адронов на основе универсальности формы скейлинговой функции $\Psi(z)$. Приведены значения фитирующих параметров.

В шестой главе сформулировано предложение к проведению исследования поведения частиц, рожденных от фрагментации мишени, в эксперименте с фиксированной мишенью на детекторе STAR. Приведены расчеты кинематических характеристик рождения вторичных частиц при различных начальных условиях. Приведено расширение модели z -скейлинга на случай столкновения тяжелых ионов. Показано преимущество изучения рождения кумулятивных частиц в заднюю полусферу с целью поиска сигнатур фазовых переходов.

В заключении сформулированы основные физические и методические результаты диссертационной работы.

Глава 1

Кумулятивный эффект и масштабная инвариантность в физике частиц

Исследование кумулятивного рождения частиц в протон-ядерных и ядро-ядерных столкновениях имеет длительную историю. Впервые подобная концепция была предложена в работах А.М. Балдина и В.С. Ставинского [31]-[45]. Здесь и далее под кумулятивной мы будем понимать кинематическую область, запрещенную при свободных нуклон-нуклонных столкновениях. Данное определение формально отличается от предложенного А.М. Балдиным, однако, ему не противоречит. В таких столкновениях энергия вторичной частицы выше максимально возможной для протон-протонного столкновения. Из этого следует, что кумулятивная область может быть достигнута только в столкновениях с участием ядер. Мы предполагаем, что такая область обладает плотностью энергии оптимальной для поиска эффектов фазового перехода.

1.1 Кумулятивный эффект

В 1971 году А.М. Балдин высказал гипотезу [31], что спектры вторичных частиц высоких энергий при столкновении релятивистских ядер определяются локальными свойствами адронной материи, а не геометрическими свойствами сталкивающихся объектов (форм-факторами). Это означало распространение масштабной инвариантности на столкновения релятивистских ядер. В то время уже было известно,

что масштабная инвариантность выполняется не только в электрон - протонных столкновениях (скейлинг Бьеркена) [46, 48], но и в рождении адронов с большими x_F (фейнмановский скейлинг) [47]. Одним из объяснений было то, что при очень высоких энергиях динамика взаимодействия не чувствительна к размерным параметрам, таким как масса и энергия частиц, а внутриадронная материя ведет себя как однородная, сплошная среда. Поэтому было естественно предположить, что при взаимодействиях ядер высоких энергий, возможны флуктуации ядерной плотности, нуклоны сливаются в одну "каплю", т.е. ведут себя как однородная, сплошная среда, для которой геометрические характеристики несущественны. В рамках таких представлений сечение кумулятивного рождения частицы представляется в виде:

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \sum_{N_{min}}^A P_N f_N(x_N), \quad (1.1)$$

где P_N - вероятность образования кластера из N нуклонов в ядре, $f_N(x_N)$ функция распределения N -частичных кластеров в ядре по переменной x_N . Величина N_{min} определяется энергией и углом вылета инклюзивной частицы. Она и называется кумулятивным числом $Q \equiv N_{min}$. При больших энергиях взаимодействия, в системе покоя фрагментирующего ядра:

$$N_{min} \approx (E_c - P_c \cos \theta_c)/m, \quad (1.2)$$

где θ_c - угол между направлением полета инклюзивной частицы и снаряда, а индекс c - указывает на принадлежность величины инклюзивной частице. Предположение о локальном характере взаимодействия, т. е. о концентрации массы мишени $N_{min}m_N$ в малом объеме и лежит в основе кумулятивного эффекта - масштабнo-инвариантного поведения спектров частиц за пределами кинематики нуклон-нуклонного взаимодействия. Из гипотезы о локальности взаимодействия, или несущественности корреляций в пространстве быстрот при $\Delta y > 2$, следуют свойства предельной фрагментации ядер и эффекта кумуляции: масштабная инвариантность сечений, факторизация сечений, приводящая к независимости распределений фрагментов от сорта частицы-снаряда и предельная фрагментация в столкновениях ядер, начиная с некоторой энергии.

В работе [32] рассмотрены две модели для биномиального распределения коэффициентов $P_N = \frac{A!}{N!(A-N)!} p^N (1-p)^{A-N}$. Они отличаются выбором вероятности единичного столкновения p :

1. p - вероятность попадания N нуклонов в объем $V = 4\pi r^3/3$: $p = (r/r_0)^3 A^{-1}$

2. p - вероятность попадания в "трубку" радиусом r и длиной $L = 4r_0A^{-1/3}/3$:
 $p = (r/r_0)^2 A^{-2/3}$.

В первом случае возникает объемная флуктуация плотности. При этом возникает приближенная независимость ρ от атомного номера A фрагментирующего ядра. Во втором случае мишень как бы сама собирает отдельные нуклоны в объем когерентности, перемешивая адронную материю отдельных нуклонов в единую систему. В этом случае возникает нетривиальная A -зависимость. В обоих случаях P_N хорошо аппроксимируется распределением Пуассона с $\langle N \rangle = pA$

$$P_N(N) = (\langle N \rangle^N / N!) \exp(-\langle N \rangle) \quad (1.3)$$

Различие проявляется в значении $\langle N \rangle$ - для случая объемной флуктуации (V -модель):

$$\langle N \rangle = (r/r_0)^3; \quad (1.4)$$

для случая "плоской" флуктуации (S -модель):

$$\langle N \rangle = (r/r_0)^2 A^{1/3} \quad (1.5)$$

Если предположить, что $\langle N \rangle \ll 1$, то сечение инклюзивного процесса может быть представлено в следующем виде:

для V -модели

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} \approx \frac{4}{3} r_0^3 A \frac{\langle N \rangle^{N_{min}}}{N_{min}!} \exp(-\langle N \rangle) f(x_{N_{min}}) = G_V(N_{min}) A \quad (1.6)$$

для S -модели

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} \approx G_S(N_{min}) A^{2/3} A^{N_{min}/3} \quad (1.7)$$

Точный вид функции $f(x)$ для нуклон-нуклонного взаимодействия устанавливается из эксперимента. Учитывая однозначную связь 1.2, это позволяет предсказать угловую и энергетическую зависимости сечения рождения кумулятивных частиц.

В работе [34] впервые получено экспериментальное подтверждение гипотезы А.М. Балдина о масштабно-инвариантных свойствах ядерной среды и локальном характере кумулятивного рождения адронов.

Таким образом, гипотеза Балдина состоит в следующем:

1. Механизм взаимодействия сложных систем типа атомных ядер следует принципу масштабной инвариантности.

2. Наиболее характерные черты инклюзивных спектров вторичных частиц определяются не форм-факторами сталкивающихся объектов, а локальными свойствами адронной (ядерной) среды.

1.1.1 Кумулятивное число

Рассмотрим некоторые способы построения масштабной переменной, предложенные В.С. Ставинским для описания рождения кумулятивных частиц и частиц с большими поперечными импульсами. Несмотря на то, что использовались различные способы построения такой переменной за ней закрепилось обобщенное название - кумулятивное число Q . Это безразмерная величина, основным свойством которой является область изменения. При определенном выборе кинематических переменных для инклюзивного рождения частицы в нуклон-нуклонных столкновениях кумулятивное число изменяется в пределах $0 < Q < 1$. В протон-ядерных взаимодействиях пределы изменения существенно увеличиваются $0 < Q < A$, где A - атомный номер ядра. Кинематическую область, соответствующую $1 < Q < A$, принято называть кумулятивной, а частицы, рождающиеся в этой области, - кумулятивными частицами.

Масштабная переменная Ставинского

Исходя из основной идеи кумулятивного рождения частиц в работе [40] предложен способ построения и получена новая масштабная переменная x_A , связанная с распределением конstituентов по массе фрагментирующего ядра, взаимодействие с которыми приводит к образованию кумулятивной частицы. Выражение для процесса инклюзивного рождения частицы m_1 при взаимодействии адрона M_1 и ядра M_2 запишется в форме

$$(M_1) + (x_2 M_2) \rightarrow m_1 + (M_1 + x_2 M_2 + m_2). \quad (1.8)$$

Закон сохранения 4-импульса для подпроцесса, описывающего взаимодействие бесструктурной частицы (лептона, адрона) (M_1) с кластером, имеющим массу $X_A m$, в ядре запишется в виде:

$$(P_1 + x_2 P_2 - p)^2 = (M_1 + x_2 M_2 + m_2)^2. \quad (1.9)$$

Импульсы и массы сталкивающихся и рожденной частиц обозначены символами

P_1, P_2, p и M_1, M_2, m_1 , соответственно. Параметр m_2 , имеющий размерность массы, определяется законами сохранения (электрического заряда, барионного числа, странности и т. д.). Решение этого уравнения для x_2 имеет вид:

$$x_2 = \frac{P_1 p + M_1 m_2}{P_1 P_2 - P_2 p - M_1 M_2 - m_2 M_2}. \quad (1.10)$$

Эта переменная является безразмерной величиной. Она выражается через скалярные произведения 4-мерных импульсов частиц и их массы, т.е. является Лоренц-инвариантной величиной. Для удобства дальнейшего изложения, введено обозначение $X_A \equiv x_2 \cdot A$ (A - атомный номер ядра). Переменные x_2 и X_A изменяются в пределах: $0 < x_2 < 1$, $0 < X_A < A$. В пределе больших энергий налетающей частицы и пренебрегая массовыми поправками, нетрудно видеть, что переменная X_A сходна с масштабной переменной Бьеркеновского скейлинга для процесса глубоконеупругого рассеяния электрона на нуклоне. Отличие состоит в том, что в качестве протона выступает ядерный кластер. Частицы "адронной струи" ($m_2 + x_2 M_2$) - фрагменты мишени, а $X_A m_N$ - фрагментирующая масса. При $X_A > 1$ фрагментирующую массу называют кумулирующей массой, сам процесс рождения частиц - кумуляцией, а рожденную частицу - кумулятивной частицей. Такая терминология введена, чтобы подчеркнуть локальный характер взаимодействия налетающей частицы с ядерным кластером [31].

В более общем виде локальный процесс кумуляции описывается бинарной реакцией [37]:

$$(x_1 M_1) + (x_2 M_2) \rightarrow m_1 + (x_1 M_1 + x_2 M_2 + m_2). \quad (1.11)$$

Как отмечено в работе, для рождения кумулятивной частицы от фрагментации покоящегося ядра в заднюю полусферу вклад от фрагментации налетающей частицы дает небольшую поправку к величине x_2 .

В дальнейшем параметр x_1 считался свободным параметром, значение которого следует находить из экспериментальных данных по инклюзивным сечениям, предполагая равенство величин x_2 для различных углов регистрации частиц и их продольных импульсов, для которых равны сечения их образования. Дополнительный параметр, введенный таким образом, отождествлялся "формально" со скоростью "излучающего кластера".

При этом вводилась дополнительная величина - "тормозящая сила", которая соответствовала взаимодействию с тормозящей массой $X_T \equiv N_T m_T$ перед "высвечиванием" частиц кластера. Скорость кластера в этом случае уменьшается. Найденные

значения величин X_A и X_T использовались для построения эффективного кумулятивного числа $\tilde{X} = X_A + X_T$. Эта величина \tilde{X}_A использовалась как масштабная переменная при параметризации инклюзивных сечений рождения пионов и каонов единой экспоненциальной функцией

$$\frac{E d^3\sigma}{A dp^3} = \frac{\sigma_{in}}{\langle \tilde{X}_A \rangle} \cdot e^{-\tilde{X}_A/\langle \tilde{X}_A \rangle}, \quad (1.12)$$

где $\sigma_{in} = 25$ мб. Установлено, в частности, что все экспериментальные данные по инклюзивным сечениям рождения частиц π^\pm , K^\pm , p при углах 90° , 150° , 168° , 180° и импульсах $100 - 1000$ МэВ/с при взаимодействии протонов с энергией 8.9 ГэВ с ядрами свинца подчиняются единой зависимости от эффективного кумулятивного числа \tilde{X}_A .

Как обобщающий результат был сформулирован сценарий кумулятивного рождения: при взаимодействии снаряда с мишенью массы $X_A m_N$ образуется фрагментирующее возбужденное адронное состояние, заключенное в малом объеме, которое "высвечивает" пионы. Прилетающие к этому объекту "холодные" нуклоны "выталакиваются" из ядра как фрагменты.

Гипотеза Ставинского о минимальном взаимодействии

В работе [41] предложена идея совместного описания процессов с большими поперечными импульсами и кумулятивного рождения частиц. Она сводится к введению нового аргумента - минимальной энергии, необходимой для рождения инклюзивной частицы в столкновениях первичных конститuentов. Идея основывалась на соображении, что в реакциях с большими p_T первичные частицы взаимодействуют с малым эффективным X , и их полная энергия оказывается небольшой по порядку величины $(x_1 P_1 + x_2 P_2)^2 \simeq (4E_T^2)^2$ (E_T - поперечная энергия инклюзивной частицы). В реакциях кумулятивного типа 4-импульс кварка фрагментирующего ядра оказывается большим, так что эти величины одного порядка. Таким образом, изменение сечений на много порядков величины может быть связано с ростом одного и того же аргумента - энергии взаимодействия первичных конститuentов.

В инклюзивной реакции рождения частицы m_1 при взаимодействии частиц M_1 и M_2 выделяется эксклюзивный подпроцесс 1.11, законы сохранения которого определяют минимальные доли x_1 и x_2 , при которых еще возможно рождение частицы m_1 с 4-импульсом p . Масса m_2 обеспечивает выполнение законов сохранения кван-

товых чисел. Закон сохранения для подпроцесса запишется в следующем виде:

$$(x_1 P_1 + x_2 P_2 - p)^2 = (x_1 M_1 + x_2 M_2 + m_2)^2. \quad (1.13)$$

Величина x_2 зависит от x_1 : $x_2 = (Ax_1 + B)/(x_1 - C)$, где A , B , C выражаются через скалярные произведения 4-векторов и массы частиц: $A = (P_1 p + M_1 m_2)/(P_1 P_2 - M_1 M_2)$, $2BA = (m_2^2 - m_1^2)/(P_1 P_2 - M_1 M_2)$, $C = (P_2 p + M_2 m_2)/(P_1 P_2 - M_1 M_2)$.

Таким образом, величина S (квадрат полной энергии сталкивающихся конститuentов) зависит только от x_1

$$S = (x_1 P_1 + x_2(x_1) P_2 - p)^2. \quad (1.14)$$

Она принимает минимальное значение S_{min} при некотором x_1 , определяемом видом зависимости $x_2(x_1)$. Таким образом, введенная переменная $S_{min}^{1/2}$ имеет смысл минимальной энергии конституентного подпроцесса. Она использовалась для анализа экспериментальных данных [41] по инклюзивным сечениям процессов с большими поперечными импульсами и кумулятивных процессов.

Минимизированное экономичное взаимодействие

Описание инклюзивных сечений рождения частиц (пионов и каонов) универсальной функцией показало [38], что для рождения пионов инклюзивное сечение при фиксированном значении \tilde{X}_A не зависит от атомного номера ядра A , т.е. имеет A -зависимость объемного типа. Эта закономерность была установлена для $A > 20$ и $1 < \tilde{X}_A < 3$, т.е. в кумулятивной области. Сходная A -зависимость была установлена для рождения частиц в $p + A$ взаимодействиях с большими поперечными импульсами (эксперимент Д. Кронина)[140]. Идентичность этой зависимости указывала на общность этих процессов в смысле гипотезы о локальности взаимодействия. Поэтому в работе [39] предложена идея экономичного взаимодействия, согласно которой инклюзивное сечение рождения частиц в экстремальных условиях - либо кумулятивного рождения, либо с большими поперечными импульсами, зависит от минимально возможной полной энергией сталкивающихся конститuentов. Она определяется формулой:

$$S^{1/2} = (x_1^2 M_1^2 + x_2^2 M_2^2 + m_1^2 + 2x_1 x_2 P_1 P_2 - 2x_1 P_1 p - 2x_2 P_2 p)^{1/2}, \quad (1.15)$$

где P_1 , P_2 , p и M_1 , M_2 , m_1 - импульсы и массы сталкивающихся и рожденной частиц, соответственно. Условие минимальности означает наличие экстремума функ-

ции $S(x_1, x_2)$ при фиксированных значениях кинематических параметров и дополнительном условии (закон сохранения для подпроцесса 1.9), накладывающем ограничения на x_1 и x_2

$$dS(x_1^*)/dx_1|_{x_2^*=x_2(x_1^*)} = 0. \quad (1.16)$$

Найденные значения величин x_1^* и x_2^* определяют кумулятивное число X_A^* и минимальную энергию $S_{min}^{1/2} \equiv S^{1/2}(x_1^*, x_2^*)$ необходимую для рождения данной инклюзивной частицы при столкновении точечноподобных кластеров с массами $x_1^*m_N$ и $x_2^*m_N$. Предложенная процедура, представляется более естественной, чем обсуждаемая выше, в которой значение одного из параметров фиксировалось дополнительными условиями, накладываемыми на экспериментальные сечения. Переменная X_A^* по построению является безразмерной и Лоренц-инвариантной величиной, и может рассматриваться в качестве масштабной переменной. Выражение $X_A^* = S_{min}^{1/2}/m_N$ позволяет использовать X_A^* в качестве аргумента функции, которая параметризует динамическую величину, характеризующую процесс рождения инклюзивной частицы при взаимодействии сталкивающихся объектов (протонов, ядер). В качестве такой величины, как правило, используется инвариантное дифференциальное сечение рождения изучаемой частицы $Ed^3\sigma/dp^3$. Поскольку эта величина является размерной, то неизбежно при таком подходе появляется размерный параметр, требующий определения, например, из условия нормировки (1.12) на полное неупругое сечение.

Расширенная масштабная переменная Литвиненко

В работе [42] предложен феноменологический подход к описанию кумулятивного рождения в ядро-ядерных столкновениях. Он базируется на расширении понятия масштабной переменной (кумулятивного числа) с учетом наличия флуктонов в сталкивающихся ядрах. Предполагается, что вероятность нахождения флуктонной конфигурации при столкновении ядер описывается экспоненциальной функцией $\sim \exp[(-x_1 + x_2)/\bar{X}_S]$ с параметром наклона \bar{X}_S . В этом случае инклюзивное сечение рождения кумулятивной частицы описывается следующей формулой:

$$Ed^3\sigma/dp^3 = C_S(\theta) \cdot \exp(-X_S/\bar{X}_S). \quad (1.17)$$

Здесь вводится обобщенная масштабная переменная X_S как сумма долей 4-импульсов сталкивающихся ядер $X_S = x_1 + x_2(x_1)$. Нормировочный множитель $C_S(\theta)$ описыва-

ет угловую зависимость сечения. Условие экстремума накладывается на величину X_S

$$\frac{dX_S}{dx_1|_{x_2(x_1^S)}} = 0, \quad (1.18)$$

а не на $S_{min}^{1/2}$ как в подходе В.С. Ставинского. Условие (1.18) позволяет определить значения x_1^S и x_2^S переменных x_1 и x_2 , которые дают минимальное значение X_{min}^S , необходимое для рождения кумулятивной частицы с заданным значениям импульса и угла вылета θ . Анализ данных по кумулятивному рождению [43, 144, 145] показал зависимость от энергии столкновения параметра наклона \bar{X}_S и нового представления инвариантного инклюзивного сечения как функции масштабной переменной X_S .

Параметризация Балдина для кумулятивного и подпорогового рождения

В работе [44] предложена параметризация для единого описания инклюзивных сечений кумулятивного и подпорогового рождения адронов и легких ядер в столкновениях протонов и ядер

$$Ed^3\sigma/dp^3 = C_1 A_1^{\alpha(X_1)} A_2^{\alpha(X_2)} f(\Pi). \quad (1.19)$$

Здесь C_1 - переменная, определяющая размерность и нормировку сечения, A_1, A_2 - атомные веса сталкивающихся ядер, $\alpha(X_{1,2})$ функция, определяемая из эксперимента и описывающая A -зависимость сечения, $f(\Pi)$ - функция, определяемая из экспериментальных данных и зависящая от безразмерного параметра Π

$$\Pi = 0.5(X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\gamma_{12})^{1/2}, \quad (1.20)$$

где $\gamma_{i,j} = u_i u_j = P_i P_j / M_i M_j$ Лоренц-фактор относительного движения сталкивающихся частиц. Величины X_1 и X_2 доли 4-импульсов сталкивающихся частиц находятся из минимизации Π при условии выполнения закона сохранения импульса для элементарного подпроцесса. С точностью до размерного параметра (массы нуклона m) параметр Π совпадает с величиной минимальной энергии $S_{min}^{1/2}$, введенной В.С. Ставинским. В работе установлена A -зависимость сечения, которая может быть описана функцией вида $\alpha = 1/3 + X/3$. Окончательное выражение для единой параметризации сечений кумулятивного и подпорогового рождения частиц представлено в форме

$$Ed^3\sigma/dp^3 = C_1 A_1^{(1+X_1)/3} A_2^{(1+X_2)/3} \exp(-\Pi/C_2), \quad (1.21)$$

где константы C_1 и C_2 равны $C_2 = 0.125 \pm 0.005$, $C_1 = 1.9 \cdot 10^4$ для тяжелых ядер $A > 20$ и $C_1 = 2.7 \cdot 10^3$ для протонов и легких ядер с $A < 10$. Значение константы C_1 для легких ядер $A = 5 - 20$ требует дальнейшего уточнения.

1.2 Скейлинги в физике высоких энергий

В данном разделе кратко представлено описание наиболее известных скейлинговых закономерностей, экспериментально установленных во взаимодействиях частиц (лептонов, адронов) и ядер высоких энергий. Описаны области их применимости, связанные с классом изучаемых явлений. Их физическая интерпретация сыграла существенную роль как для развития теории, так и для последующих экспериментальных исследований. Отклонения от известных скейлингов могут использоваться в качестве указания на существование новых физических закономерностей и являются стимулом для дальнейшего развития теоретических моделей.

Бьеркеновский скейлинг

При изучении процессов глубоко-неупругого электрон-протонного рассеяния $e^- + p$, группой физиков из Стэнфордского Центра Линейного Ускорителя (СЛАК), Массачусетского Технологического Института (МТИ) и Калифорнийского Технологического Института (КалТех) была открыта динамическая закономерность, известная в литературе как Бьеркеновский скейлинг [46]. Она заключается в том, что в определенной области кинематических переменных протонные структурные функции W_1 и W_2 не зависят от переданного импульса $q^2 = -Q^2$, а являются функциями только безразмерной переменной $x = Q^2/2M\nu$ (M - масса нуклона, $\nu = E - E'$ - энергия, переданная электроном протону). В борновском приближении процесс глубоко-неупругого $e^- + p$ рассеяния происходит в результате обмена одним виртуальным фотоном. Сечение процесса выражается через структурные функции W_1 и W_2 , соответствующие двум возможным поляризационным состояниям (поперечному и продольному) промежуточного фотона. В общем случае функции $W_1(\nu, q^2)$ и $W_2(\nu, q^2)$ должны зависеть от квадрата переданного импульса q^2 и потери энергии рассеянным электроном ν . Бьеркен предположил, что при стремлении к бесконечности q^2 и ν и конечных значениях их отношения, величины $\nu W_2(\nu, q^2)$ и $2MW_1(\nu, q^2)$ (где M - масса протона), становятся функциями всего одной переменной

$\omega = 2M\nu/q^2$, т.е.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty, q^2 \rightarrow \infty} 2MW_1(\nu, q^2) \rightarrow F_1(\omega), \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty, q^2 \rightarrow \infty} \nu W_2(\nu, q^2) \rightarrow F_2(\omega). \quad (1.22)$$

Структурные функции экспериментально определяются из дифференциального сечения рассеяния неполяризованных электронов на неполяризованных нуклонах при детектировании только рассеянных электронов. Так как величина ω является безразмерной, то не существует масштаба массы или длины; отсюда возник термин "масштабная инвариантность". Экспериментальные данные демонстрировали скейлинг νW_2 и $2MW_1$ по переменным - квадрату переданного импульса $Q^2 > 2 \text{ ГэВ}^2$ и массе нерегистрируемой системы осколков мишени $W > 2.6 \text{ ГэВ}$ (где $W^2 = 2M(E - E') + M^2 - q^2$) в пределах экспериментальных ошибок.

Физическая интерпретация Бьеркеновского скейлинга была дана Р. Фейнманом в партонной модели [47]. В этой модели предполагается, что протон состоит из невзаимодействующих точно-подобных объектов, названных партонами. В протоне имеющем импульс P импульсы партонов описываются функциями распределения $f(x)$, где x - доля импульса протона уносимая партоном ($0 < x < 1$). В системе бесконечного импульса протона виртуальный фотон, испущенный электроном, "видит" партоны и некогерентно на них рассеивается. При этом, партоны не взаимодействуют друг с другом в течение времени обмена виртуальным фотоном. Предполагая, что один партон упруго рассеивается, поглощая передаваемый 4-импульс q от рассеянного электрона, определяется величина x ($x = Q^2/2M\nu = 1/\omega$) - доля импульса протона, уносимая партоном. Таким образом, переменная ω является величиной, обратной доле импульса x "выбитого" партона [48]. Дальнейшие эксперименты [49]-[51] по рассеянию электронов на водородной и дейтериевой мишенях с увеличенной статисткой показали, что структурные функции нейтрона и дейтрона обнаруживают такое же скейлинговое поведение для данных в области Q^2 от 2 до 20 ГэВ^2 . Таким образом, экспериментальные данные по глубоко-неупругому рассеянию электронов на протонах и дейтронах подтвердили наличие Бьеркеновского скейлинга и привели к заключению о существовании точно-подобной заряженной структуры в нуклоне и необычное поведение взаимодействия партонов (ослабление) с увеличением переданного импульса Q^2 .

Открытие КХД и асимптотической свободы

Необычные скейлинговые закономерности, установленные при изучении глубоко-неупругого лептон-протонного рассеяния привели к созданию новой теории - Квантовой Хромодинамики (КХД) [52]-[55], обладающей свойством асимптотической свободы - уменьшение константы взаимодействия с увеличением переданного импульса. Это свойство отражало характерное поведение структурных функций в партонной модели. Теория КХД является неабелевой полевой теорией взаимодействия кварков и глюонов. Она удовлетворяет принципу калибровочной инвариантности для группы $SU(3)$ нового квантового числа - цвета. В рамках этой теории протон состоит из кварков, взаимодействующих посредством обмена глюонами. Существует три цветных кварка и восемь глюонов - переносчиков цвета. При больших переданных импульсах теория обладает "асимптотической свободой", а при малых "конфайнментом". Как полевая теория КХД включает наряду с валентными кварками бесконечное число так называемых морских кварков и глюонов. Необычным свойством природы, до сих пор не установленным в рамках теории КХД, является "цветовой конфайнмент" (color confinement). Это свойство связано с тем, что все экспериментально известные адроны (мезоны и барионы) являются безцветными, а кварки и глюоны в теории КХД обладают цветовым зарядом.

Бьеркеновский скейлинг теоретически получают в КХД, используя метод операторного разложения (ОРЕ) [56]-[60] совместно с ренормгрупповым анализом [61]-[64] и свойством неабелевых теорий - асимптотической свободой [65]. В соответствии с теоретическими вычислениями, Бьеркеновский скейлинг является приближенным. Поиск и исследование нарушения Бьеркеновского скейлинга явилось дальнейшим шагом на пути установления новых физических явлений и дальнейшей проверки теории.

Приближенный Бьеркеновский скейлинг. Скейлинги по переменным Блума-Гилмана, Вейцмана, Нахтмана и светового конуса

Как было отмечено ранее, Бьеркеновский скейлинг является приближенным. Первое экспериментальное указание на то, что структурные функции в области $Q^2 \sim 1 - 20 \text{ ГэВ}^2$ отклоняются от "партонного" скейлинга, было получено в эксперименте по рассеянию мюонов на нуклонах, выполненному в Батавии при двух энергиях 56 и 150 ГэВ [66]. Подобные эффекты наблюдались также в рассеянии

электронов [67] и мюонов на водороде и дейтерии [68]. В этих экспериментах нарушение скейлинга проявлялось в том, что по мере увеличения переданного импульса Q^2 значения структурных функций увеличивались при малых x ($x < 0.2$) и уменьшались при больших x ($x > 0.2$). Такое поведение структурных функций качественно объяснялось взаимодействием кварков. Если значение x велико, то при увеличении передаваемого импульса кварк может диссоциировать на кварк с долей импульса $x' < x$ и глюон с долей импульса $x - x'$. Это приводит к сдвигу кваркового распределения в сторону малых x . При очень малых x , рост числа глюонов приводит к образованию кварк-антикварковых пар в области малых x . Один из образовавшихся кварков может поглотить фотон, что приведет к росту структурной функции в этой области.

В КХД нарушение Бьеркеновского скейлинга связано с Q^2 - эволюцией функций распределения глюонов и кварков [69], соответствующей логарифмическому отклонению, получаемому методом ренормгруппы [70], эффектом, связанным с учетом масс конститuentов и мишени [71, 72], описываемых ξ -скейлингом [73] и влиянию поперечного импульса кварков внутри нуклона и конечности размера нуклона, которые соответствуют степенным поправкам [74, 75, 76]. С теоретической точки зрения, важное значение имели измерения отклонений от скейлинга как в области больших, так и малых x . Ранние экспериментальные измерения структурных функций, проведенные в SLAC [51], показывали логарифмическое нарушение скейлинга. Однако, анализ экспериментальных данных, полученных коллаборациями EMC (European Muon Collaboration) [77, 78] и CDHS (CERN-Dortmund-Heidelberg-Saclay) [79, 80], показал степенное отклонение от скейлинга [81, 82]. Применения новых скейлинговых переменных (переменная Нахтманна $\xi = 2x/(1 + \sqrt{1 + 4x^2m_N^2/Q^2})$ [73], Блума-Гилмана $x' = Q^2/(2M\nu + M^2)$ [83, 84], Вейцмана ($x_W = (Q^2 + m^2)/(2M\nu + M^2)$ [85, 86]) было не достаточно для воспроизведения такого степенного поведения экспериментальных данных. Кроме того, переменные x' и x_W не имеют ясного теоретического смысла, а структурные функции, выраженные через переменную Нахтманна, имеют неустойчивое поведение [87, 88] при $x \rightarrow 1$.

В работе [89] была введена, новая скейлинговая переменная x_p (переменная светового конуса), которая в определенных приближениях воспроизводит переменные Нахтманна, Блума-Гилмана и Вейцмана. Переменная x_p учитывает высшие поряд-

ки коэффициентных функций при низших твистах (метод ОРЕ), но не учитывает вклад высших твистов. Таким образом она может быть использована для разделения логарифмической и степенной зависимостей структурных функций [89]. Такое разделение важно для получения точного значения величины масштаба Λ в КХД из эксперимента [90].

Таким образом, нарушение скейлинга в лептон-нуклонных взаимодействиях является хорошо установленным экспериментальным фактом и считается одним из подтверждений КХД, связанным с описанием эволюции структурных функций различными уравнениями (Докшицера-Грибова-Липатова-Альтарелли-Паризи (ДГЛАП), Балицкого-Фадинова-Кураева-Липатова (БФКЛ), Катани-Чиофалони-Фиорани-Маркезини (КЧФМ)). Следует отметить, что эти уравнения являются приближенными версиями уравнений Янга-Миллса. Измерение отклонений от скейлингового поведения структурных функций дает информацию о природе межкварковых сил, обусловленных обменами виртуальными векторными частицами - глюонами, описывает их эволюцию и устанавливает ограничения на применимость приближенных подходов.

Фейнмановский скейлинг и гипотеза предельной фрагментации Янга

При изучении адрон-адронных взаимодействий были выдвинуты гипотезы, связанные с закономерностями, наблюдаемыми в рождении частиц в процессах при высоких энергиях. Это гипотеза Р.Фейнмана о масштабной инвариантности (Фейнмановский скейлинг) [47] и гипотеза предельной фрагментации Янга [91], которые способствовали интенсивному исследованию инклюзивных процессов. Гипотеза масштабной инвариантности предполагает, что инклюзивное сечение рождения частицы $E d^3\sigma/dp^3 = f(s, p_\perp, p_\parallel)$, зависящее от масштабных переменных - энергии столкновения \sqrt{s} и импульса инклюзивной частицы (p_\perp, p_\parallel) , при высоких энергиях становится функцией только двух переменных - скейлинговой переменной $x_F = p_\parallel/p_\parallel^{max}$ и поперечного импульса p_\perp , т.е. $E d^3\sigma/dp^3 = f(x_F, p_\perp)$. Также предполагается, что в области $x \approx 0$ и $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ сечение будет зависеть только от p_\perp :

$$\lim_{s \rightarrow \infty, x \rightarrow 0} f'(s, x_F, p_\perp) \rightarrow f(p_\perp) \quad (1.23)$$

Таким образом, при больших энергиях инклюзивные распределения не зависят явно от энергии, а определяются переменными x_F и p_\perp . Физический смысл масштабной инвариантности данных процессов состоит в том, что вероятность рождения

инклюзивной частицы с определенным значением продольного импульса p_{\parallel} при разных энергиях столкновения является универсальной функцией от переменной $x_F = p_{\parallel}/p_{\parallel}^{max}$.

При столкновениях адронов и ядер высоких энергий, частицы образованные от фрагментации снаряда и мишени в лабораторной системе координат могут быть разделены на две группы. У частиц одной группы скорости увеличиваются, а у другой - слабо растут с увеличением энергии столкновения, приближаясь к предельному значению, определяемому законом сохранения 4-импульса. Эти частицы являются фрагментами мишени. При стремлении энергии столкновения к бесконечности, их сечения стремятся к предельному значению. Суммарные квантовые числа фрагментов мишени те же самые, что и у частицы-мишени. Приближение к предельному значению тем медленнее, чем больше число частиц. В этом суть гипотезы предельной фрагментации Янга. Аналогичное утверждение справедливо и для рождения частиц в антилабораторной системе координат. В этом случае рассматриваются фрагменты пучка. В области фрагментации ($|x| \geq 2m_{\perp}/\sqrt{s}$, где $m_{\perp}^2 = m^2 + p_{\perp}^2$) гипотеза Фейнмана эквивалентна гипотезе Янга. В интерпретации Р. Фейнмана [92] предельная фрагментация состоит в том, что после взаимодействия двух адронов наблюдаются частицы с теми же кинематическими характеристиками, которые они имели виртуально в адроне, до взаимодействия.

Экспериментальное изучение масштабной инвариантности (Фейнмановского скейлинга) проводилось на ускорителях Дубны, Серпухова, Батавии и ЦЕРНа. Уже первые экспериментальные данные, полученные в Серпухове [93], [94] и ЦЕРНе [95], показали, что в области фрагментации ($|x| \geq 2m_{\perp}/\sqrt{s}$, $p_{\perp} \leq 1$ ГэВ/с) имеет место масштабная инвариантность при $E \geq 10$ ГэВ для $p+p$ взаимодействий. Дальнейшие исследования этих процессов при энергиях протонов в лабораторной системе от 400 до 2000 ГэВ в ЦЕРНе [96] подтвердили справедливость масштабной инвариантности в области фрагментации. Таким образом, продольные импульсы вторичных частиц растут пропорционально энергии столкновения. Другими словами во фрагментационной области сильные взаимодействия оказались масштабно-инвариантными. Однако, было установлено, что область применимости Фейнмановского скейлинга ограничена. Нарушение Фейнмановского скейлинга было установлено в центральной области ($|x| \leq 2m_{\perp}/\sqrt{s}$) [96], а также во взаимодействиях адронов с ядрами атомов воздуха при энергии больше 10^3 ТэВ (по данным широких атмосферных

ливней) [97].

Скейлинг по переменной x_T

Зависимость функции $G(x_T) = \sqrt{s}^{n(x_T, \sqrt{s})} \times Ed^3\sigma/dp^3$ от переменной $x_T = 2p_T/\sqrt{s}$ в области поперечных импульсов $p_T > 1$ ГэВ/с показало скейлинговое поведение для рождения заряженных адронов в $p + p$ столкновениях в диапазоне энергий от 23 ГэВ до 1800 ГэВ. Такое поведение сечений объясняется вкладом процесса жесткого рассеяния партонов в рождение частиц с большими поперечными импульсами. Исследование $Au + Au$ столкновений на RHIC показало, что значение параметра $n(x_T, \sqrt{s}) = 6.3$ справедливо как для $p + p$, так и для периферических $Au + Au$ взаимодействий [98]. В центральных $Au + Au$ столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 200$ ГэВ было обнаружено увеличение данного параметра, что связывается с различными физическими процессами происходящими в среде (перерассеяние, потери энергии и др.).

Скейлинг по радиальной переменной $x_R = E^*/E_{max}^*$

В связи с различными теоретическими подходами к интерпретации данных по множественному рождению частиц используются различные наборы переменных для описания инклюзивных процессов. Инвариантное сечение рождения инклюзивной частицы $Ed^3\sigma/dp^3$ в адрон-адронных взаимодействиях ($h + h \rightarrow h + X$) в общем случае зависит от трех переменных, одной из которой является s . В качестве двух других могут быть использованы поперечный импульс p_\perp и радиальная переменная $x_R = E^*/E_{max}^*$. Измерения инвариантных сечений рождения адронов (p , \bar{p} , K^+ , K^- , π^+ , π^-) в $p + p$ взаимодействиях при различных фиксированных значениях p_\perp в диапазоне $0.25 < p_\perp < 1.5$ ГэВ/с и различных значениях энергии столкновения 100, 200 и 400 ГэВ от переменной x_R в области $0.05 < x_R < 1.0$ были проведены во ФНАЛ [99]. Анализ экспериментальных данных показал, что инклюзивные сечения не зависят от энергии столкновения, т.е. наблюдается так называемый радиальный скейлинг. Сечение описывается степенным законом $B_h(1 - x_R)^{n_h}$. Величина n_h зависит от вида адрона и практически постоянна при изменении поперечного импульса p_\perp . Было установлено, что спектры K^- и \bar{p} имеют меньший наклон по

сравнению с π^+ , K^+ , p при малых p_{\perp} . Это показывает, что инклюзивные сечения частиц зависят от структуры участвующих адронов. Поведение спектров было описано при использовании функций фрагментации, предложенных Р. Фейнманом и Р. Филдом [100].

P-KNO-скейлинг и его модификации

При изучении процесса множественного рождения в адрон-адронных взаимодействиях было установлено, что вероятность рождения n частиц $P_n(s)$ пропорциональна функции $\psi(n/\langle n \rangle)$, зависящей от отношения $n/\langle n \rangle$ и удовлетворяющей условию нормировки:

$$P_n(s) = \frac{1}{\langle n \rangle} \psi(n/\langle n \rangle), \quad \int_0^{\infty} \psi(Z) dZ = \int_0^{\infty} Z \psi(Z) dZ = 1, \quad (1.24)$$

где $\langle n \rangle$ средняя множественность при данной энергии. Установленная закономерность получила название КНО скейлинга (Кобы - Нильсена - Олесена) [101]. Проверка КНО-скейлинга при анализе данных по множественному рождению частиц в $p + p$ взаимодействиях при энергии от 20 – 300 ГэВ [102]-[104] показала, что КНО скейлинг выполняется приближенно и при меньших энергиях.

В работах А.М. Полякова [105, 106] была предложена гипотеза об асимптотической масштабной инвариантности множественного рождения адронов в e^+e^- аннигиляции. Приведено обоснование применимости гипотезы подобия в сильных взаимодействиях. В работе показано, что непосредственным следствием этой гипотезы являются степенные асимптотики амплитуд при очень больших импульсах и далеко от массовой поверхности. Такие асимптотики согласуются с условиями унитарности и аналитичности амплитуд. Отмечено, что асимптотики функций Грина при больших импульсах означают, что в теории существует инвариантность относительно изменения пространственно-временного масштаба, проявляющаяся на очень малых расстояниях. Для количественного анализа сильных взаимодействий наряду с гипотезой подобия требуются динамические уравнения, основанные на условиях унитарности и аналитичности. Соединение этих трех гипотез (унитарности, аналитичности и самоподобия) в рамках применения их к сильным взаимодействиям составляет основу для построения теории, предложенной в работе. Полученные формулы для полных сечений множественного образования частиц и множественности на основе этой теории были подтверждены в e^+e^- аннигиляции и в pp столкнове-

ниях, получив название КНО скейлинга [101].

В 1977 г. А.И. Голохвастов показал, что применение скейлинговой переменной Кобы-Нильсена-Олесена к распределениям по множественности с $\langle n \rangle \sim 1$ математически не эквивалентно ее применению к распределениям с $\langle n \rangle \gg 1$ [107, 108]. Им была получена обобщенная формула

$$P_n = \int_{nZ_0}^{(n+1)Z_0} \psi(Z) dZ, \quad (1.25)$$

которая при $\langle n \rangle \sim 1$ совпадет с исходной. В этом случае функция $\psi(Z)$ остается универсальной во всем экспериментально исследованном диапазоне энергий. В работе [109] были представлены результаты экспериментальной проверки обобщенного скейлинга Голохвастова-Кобы-Нильсена-Олесена в диапазоне энергий ISR и Sp̄pS. Они показали, что данное обобщение дает хорошее описание экспериментальных данных до множественностей не превышающих 40 частиц ($n_{ch} < 40$).

Правила кваркового счета

Масштабная инвариантность (или скейлинговое поведение) используется для предсказания поведения электромагнитных форм-факторов адронов при больших переданных импульсах. Эти величины зависят от числа валентных кварков, составляющих эти адроны. Эта закономерность установленная Матвеевым-Мурадяном-Тавхелидзе и Бродским-Фарар получила название правил кваркового счета [112]-[115]. Для случая двухчастичных реакций ($a + b \rightarrow c + d$) правила кваркового счета определяют энергетическую зависимость дифференциальных сечений рассеяния на большие углы при высоких энергиях столкновений и фиксированном угле ϑ , а также поведение формфакторов адронов $F_a(t)$ при больших передачах импульса $t = q^2$

$$\frac{d\sigma}{dt}(a + b \rightarrow c + d) \sim \frac{f(\vartheta)}{s^{n_a+n_b+n_c+n_d-2}}, \quad F_a(t) \sim \frac{1}{|t|^{n_a-1}}, \quad (1.26)$$

где n_i - число элементарных составляющих (кварков, антикварков) частиц (адронов, лептонов), участвующих в реакции. Например, сечения упругого протон-протонного, пион-протонного и пион-пионного рассеяния на фиксированный угол падают как $\sim s^{-10}$, $\sim s^{-8}$ и $\sim s^{-6}$, соответственно. Упругие формфакторы пиона, протона и дейтрона убывают с ростом переданного импульса как $\sim t^{-1}$, $\sim t^{-2}$ и $\sim t^{-5}$, соответственно. Правила кваркового счета используются также для определения асимптотик партонных распределений по переменной x при $x \rightarrow 1$

($f_i^h|_{x \rightarrow 1} \sim (1-x)^n$), а также для предсказания степенного убывания сечения реакции инклюзивного образования адронов с большими поперечными импульсами ($Ed^3\sigma/dp^3 \sim p_T^{-4}$). Следует отметить, что правила кваркового счета не учитывают логарифмических поправок, существование которых предсказывается квантовой хромодинамикой в рамках теории возмущений.

В экспериментах CEBAF [116] исследование процесса $\gamma + d \rightarrow p + n$ показали выход сечения на асимптотический режим $d\sigma/dt \sim s^{-11}$, предсказываемый кварковым счетом. Анализ Ю.Н. Узикова [117] сечений процесса $d + d \rightarrow {}^3\text{He} + n$ и $d + d \rightarrow {}^3\text{H} + p$ показал степенное поведение $d\sigma/dt \sim s^{-22}$.

Таким образом не только электромагнитные форм-факторы адронов (p, n, D, π), и бинарные адронные реакции ($a + b \rightarrow c + d$), но также и бинарные процессы с участием малонуклонных систем демонстрируют степенное поведение, подтверждая ПКС (правила кваркового счета) или свойство однородности соответствующих функций при масштабных преобразованиях [118].

NCQ-скейлинг

Поиск нового состояния ядерной материи, состоящего из свободных кварков и глюонов, в последние десятилетия стал предметом пристального теоретического и экспериментального изучения. В работах [119]-[123] был предложен метод анализа коллективного поведения адронов, рождающихся в столкновениях тяжелых ионов при высоких энергиях, который позволяет получить важную информацию о конститuentaх и уравнении состояния системы на ранних стадиях столкновения. В экспериментах на коллайдере RHIC [124] подобный анализ эллиптического потока v_2 , наряду с анализом факторов ядерной модификации $R_{AA,CP}$, для идентифицированных частиц позволил сделать вывод, что образование наблюдаемых адронов должно происходить от "коалесценции" и "рекомбинации" тяжелых кварков [125]-[128]. В основе подобных представлений лежит наблюдающийся в эксперименте скейлинг по количеству валентных кварков (Number of Constituent Quarks, NCQ-скейлинг). Суть данного явления заключается в характерном поведении эллиптического потока v_2 барионов и мезонов, рожденных в столкновениях тяжелых ионов. Такие столкновения пространственно неоднородны, степень неоднородности тем выше, чем меньше центральность (область перекрытия) события. В гидродинамическом под-

ходе с локальным остыванием начальная пространственная неоднородность приводит к финальной неоднородности в азимутальном распределении по импульсу. Эллиптическим потоком v_2 называется второй коэффициент разложения Фурье:

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{d^2 N}{2\pi p_t dp_t dy} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n \cos(n(\phi - \Psi_r))\right), \quad (1.27)$$

где Ψ_r - означает плоскость реакции. Экспериментально он определяется из измерений импульсов конечных частиц.

Исследования, проведенные при высоких энергиях на детекторе STAR на RHIC [129]-[131], продемонстрировали упорядочение по массе величин v_2 при значении поперечного импульса $p_T < 2$ ГэВ/с и отношение потоков для мезонов и барионов $v_2^{meson}/v_2^{barion} = 2/3$ при значениях $2 < p_T < 6$. Подобное поведение эллиптического потока и называется NCQ-скейлингом. Наравне с другими наблюдаемыми закономерностями, NCQ-скейлинг позволил сделать вывод, что система, образованная при столкновениях тяжелых ионов обладает кварк-глюонными степенями свободы. Для небольших значений v_2 параметры эллиптического потока системы кварков (а и б) и полученного от их коалесценции мезона связаны соотношением:

$$v_2^M(p_T) = v_2^a(x_a p_T) + v_2^b(x_b p_T), \quad (1.28)$$

с фиксированными долями импульса x_a , x_b ($x_a + x_b = 1$). Для барионов ситуация аналогична.

В событии, когда валентные кварки (а и б) обладали одинаковым потоком v_2 до адронизации уравнение 1.28 ведет к NCQ-скейлингу, обнаруженному в эксперименте:

$$v_2^h(p_T^h) = n v_2^q(p_T^h/n), \quad (1.29)$$

где $n = 2(3)$ для мезонов (барионов). Все мезоны следуют единой зависимости $v_2(p_T)$, то же верно для барионов. Обе зависимости связаны соотношением:

$$\frac{v_2^{barion}(p_T/3)}{3} = \frac{v_2^{meson}(p_T/2)}{2} (= v_2^q(p_T)). \quad (1.30)$$

Функциональный вид зависимости v_2 от числа валентных кварков может быть представлен в виде ([132] и ссылки в ней):

$$f_{v_2}(n) = \frac{an}{1 + e^{-(p_T/n-b)/c}} - dn, \quad (1.31)$$

где a , b , c , d - некоторые коэффициенты, а n - число валентных кварков.

Как показано выше, значение эллиптического потока сильно зависит от состояния системы, образованной в начале столкновения, что позволяет использовать

возможное отклонение от NCQ-скейлинга как указание на фазовый переход от партоновых к адронным степеням свободы в ядерных столкновениях. Анализ данных ПЭС, проведенной на детекторе STAR на RHIC в 2010, 2011 и 2014 годах, показал возможное отклонение от NCQ-скейлинга при минимальных энергиях ПЭС [132]-[134]. Однако, накопленной на данный момент статистики недостаточно для однозначного заключения о нарушении или сохранении NCQ-скейлинга в столкновениях тяжелых ионов при энергиях $\sqrt{s} = 7.7 - 39$ ГэВ. Исследования в этой энергетической области будут проводиться во время второго этапа ПЭС на RHIC и на будущих экспериментах на ускорителях NICA, FAIR.

Выводы: Представлен краткий обзор скейлинговых закономерностей, экспериментально установленных в столкновениях частиц высоких энергий. В определенной области кинематических переменных (большие энергии и большие переданные импульсы, большие множественности), безразмерные переменные, позволяют значительно упростить описание характеристик процессов (сечений, форм-факторов, ...) и продемонстрировать масштабную инвариантность - физический принцип, отражающий симметрию взаимодействия и образования частиц и локальные свойства адронной (ядерной) среды. Как видно из данной главы, поиск и изучение скейлинговых закономерностей в физике высоких энергий играет важную роль. Масштабная инвариантность позволяет упростить описание физических законов, а ее нарушение указывает на наличие новых физических эффектов.

Особое внимание было уделено гипотезе А.М. Балдина о масштабной инвариантности взаимодействия сложных систем (ядер). Она нашла убедительное экспериментальное подтверждение в кумулятивном эффекте - явлении рождения частиц в кинематической области, запрещенной для свободных нуклон-нуклонных взаимодействий.

Глава 2

z -скейлинг как метод анализа инклюзивных спектров

В данном разделе представлено описание метода z -скейлинга, использованного для анализа экспериментальных данных по инклюзивным спектрам рождения частиц. При построении z -скейлинга в качестве базовых концептов использовались три фундаментальных принципа: локальность, самоподобие и фрактальность структуры адронов и ядер, механизма взаимодействия их конstituентов и механизма фрагментации конstituентов в реальные частицы - адроны.

2.1 Принципы построения z скейлинга

В рамках данной работы, для описания процессов инклюзивного рождения частиц, был использован метод z -скейлинга, разработанный в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ [23, 24, 25]. Основная идея данного метода базируется на предположении В. Ставинского [35], что при высокой энергии столкновений адронов или ядер с импульсами P_1 , P_2 для описания поведения инклюзивной частицы, рожденной в процессе: $P_1 + P_2 \rightarrow p + X$, возможно использовать динамические характеристики элементарного конституентного подпроцесса. Для него выполняется закон сохранения энергии, а импульсы конституентов выражаются в терминах долей импульсов сталкивающихся объектов. На рисунке 2.1 схематично представлен такой подпроцесс.

$$(x_1 M_1) + (x_2 M_2) \rightarrow m_1 + (x_1 M_1 + x_2 M_2 + m_2). \quad (2.1)$$

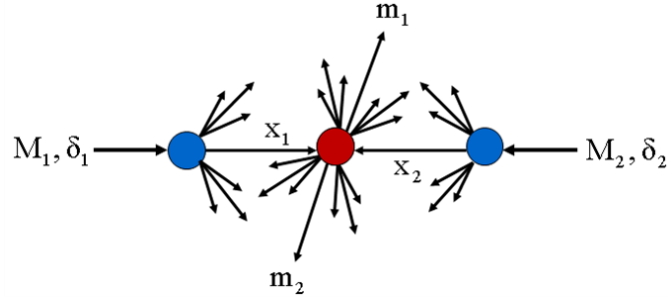


Рис. 2.1: Элементарный подпроцесс взаимодействия конstituентов.

Здесь использованы следующие обозначения:

P_1 - полный четырехмерный импульс налетающей частицы.

x_1 - доля четырехмерного импульса, переносимая конstituентом налетающей частицы.

M_1 - масса налетающей частицы.

δ_1 - параметр теории (фрактальная размерность), характеризующий внутреннюю структуру налетающей частицы.

P_2 - полный четырехмерный импульс частицы-мишени.

x_2 - доля четырехмерного импульса, переносимая конstituентом частицы-мишени.

M_2 - масса частицы-мишени.

δ_2 - параметр теории (фрактальная размерность), характеризующий внутреннюю структуру частицы-мишени.

m_1 - масса инклюзивной частицы.

p - полный четырехмерный импульс инклюзивной частицы.

m_2 - параметр, равный массе системы отдачи, при которой выполняются все внутренние законы сохранения (электрического и барионного заряда, изоспина, странности и т. д.).

Предполагается, что для рассматриваемого инклюзивного процесса (рис. 2.1) на уровне конstituентов выполняется закон сохранения импульса, записанный в виде:

$$(x_1 P_1 + x_2 P_2 - p)^2 = M_X^2, \quad (2.2)$$

где $M_X = (x_1 M_1 + x_2 M_2 + m_2)$ масса нерегистрируемой системы. Уравнение 2.2 означает, что масса нерегистрируемой системы должна быть минимально необходимой для рождения инклюзивной частицы с массой m_1 , при данном значении параметра m_2 , что обеспечивает выполнение аддитивных законов сохранения, связанных с внутренними степенями свободы (электрический заряд, барионный заряд, стран-

ность и др.). Закон сохранения ограничивает область изменения долей импульсов x_1 и x_2 сталкивающихся частиц, уносимых конститuentами $0 < x_1, x_2 < 1$. Предельный случай $x_1 = 1$ означает, что весь импульс налетающей частицы P_1 будет уноситься взаимодействующим партном 1. В системе центра масс конститuentов их энергия столкновения определяется выражением:

$$\hat{s}^{1/2} = \sqrt{(x_1 P_1 + x_2 P_2)^2} \quad (2.3)$$

Тогда сечение бинарного подпроцесса, необходимого для рождения инклюзивной частицы выражается через минимальную энергию $\hat{s}_{min}^{1/2}$, которая необходима для образования частицы с массой m_1 и 4-импульсом p при столкновении конститuentов с долями импульсов x_1 и x_2 :

$$d\hat{\sigma}/dt \sim 1/\hat{s}_{min}^2(x_1, x_2) \quad (2.4)$$

Уравнение 2.2 выражает локальность как взаимодействия адронов и ядер на уровне конститuentов так и образования инклюзивной частицы.

Принцип подобия при взаимодействии адронов предполагает, что взаимодействия конститuentов на различных масштабах, определяемых энергией столкновения и поперечным импульсом рожденной частицы, подобны друг другу. Это означает возможность описания характеристик инклюзивного процесса и подпроцесса в терминах безразмерных величин, выражаемых через измеряемые экспериментально физические величины (импульсы, энергии и массы частиц). Такими безразмерными величинами являются доли импульсов x_1 и x_2 . Они используются для построения параметра подобия (скейлинговой переменной) z . Величина z является комбинацией кинематических (энергий, импульсов и масс частиц) и динамической (плотности множественности) переменных, описывающих процесс. Одно и то же значение величины z может достигаться при совершенно различных, но вполне определенных комбинациях значений кинематических переменных. Это и означает подобие рождения частиц в столкновениях адронов и ядер в разных кинематических областях на уровне взаимодействия их конститuentов. В теории z -скейлинга роль динамической характеристики, описывающей процесс рождения инклюзивной частицы, играет безразмерная скейлинговая функция $\Psi(z)$. Она зависит только от одной переменной - параметра подобия z .

Принцип фрактальности при взаимодействии частиц или ядер высоких энергий и больших передачах импульса означает наличие структуры на всех масштабах.

С точки зрения эксперимента, имеются ограничения на масштаб, связанные с разрешением установки. Самоподобие внутренней структура частиц, взаимодействия их конstituентов и механизма фрагментации в широкой области кинематических переменных, связанных с масштабом (т. е. p_T и \sqrt{s}), на котором происходит подпроцесс, и означает фрактальность рождения частицы. В этом случае параметр подобия обладает свойством фрактальной меры и описывается степенным законом [135]. Параметр подобия z является безразмерной комбинацией величин, характеризующих рождение частицы в инклюзивной реакции $P_1 + P_2 \rightarrow p + X$ при больших энергиях, строится как фрактальная мера и определяется следующим выражением:

$$z = z_0 \Omega^{-1}(x_1, x_2), \quad (2.5)$$

где величина Ω^{-1} имеет смысл разрешения подпроцесса в данном инклюзивном процессе

$$\Omega(x_1, x_2) = (1 - x_1)^{\delta_1} (1 - x_2)^{\delta_2}. \quad (2.6)$$

Подробное описание величины z_0 дано в следующем разделе. Величина $\Omega^{-1}(x_1, x_2)$ описывает разрешение, при котором элементарный подпроцесс взаимодействия конstituентов может быть выделен из рассматриваемого инклюзивного процесса. Величины δ_1 и δ_2 являются параметрами теории и интерпретируются как фрактальные размерности сталкивающихся объектов (адронов или ядер). Величина $\Omega(x_1, x_2)$ связывает кинематические (x_1, x_2) и структурные (δ_1, δ_2) характеристики взаимодействия. Скейлинговая переменная z , определенная в виде (2.5), обладает свойством фрактальной меры соответствующего инклюзивного процесса. Таким образом, построение переменной z существенно основано на применении принципа фрактальности к взаимодействию конstituентов.

При описании инклюзивного рождения частиц в столкновениях адронов и ядер чаще всего используют величину инвариантного сечения $E d^3\sigma/dp^3$, которое в общем случае зависит от трех динамических переменных (энергии и центральности столкновения и импульса рожденной частицы). Поэтому наиболее прямым представлением данных является зависимость инвариантного сечения от поперечного импульса p_T регистрируемой частицы при фиксированных значениях энергии \sqrt{s} и центральности или плотности множественности $(dN/d\eta)$ для данного класса событий.

Метод z -скейлинга предполагает, что взаимодействие конstituентов является локальным и самоподобным, что дает возможность использовать для описания

процесса инклюзивного рождения частиц безразмерную функцию $\Psi(z)$. Ее связь с переменной z задается выражением:

$$\Psi(z) \equiv \frac{1}{N\sigma_{in}} \frac{d\sigma}{dz}. \quad (2.7)$$

Здесь σ_{in} - полное неупругое сечение реакции, а N - число частиц в реакции (средняя множественность). Как будет показано в следующем разделе, функция Ψ может быть выражена в следующем виде:

$$\Psi(z) = -\frac{\pi s}{(dN/d\eta)\sigma_{in}} J^{-1} E \frac{d^3\sigma}{dp^3} \quad (2.8)$$

Здесь $E d^3\sigma/dp^3$ - инвариантное сечение, $dN/d\eta$ - плотность множественности как функция энергии столкновения в с.д.м. реакции, \sqrt{s} и псевдобыстроты η , σ_{in} - полное неупругое сечение взаимодействия, J - якобиан перехода от переменных $\{p_z, p_T\}$ к переменным $\{\eta, z\}$. Значение этих параметров будет более подробно объяснено позднее в этой главе. Процедура замены переменных и перехода к новому z представлению инвариантных сечений подробно описана в следующих разделах этой главы.

2.2 Скейлинговая переменная z

Рассмотрим процедуру построения скейлинговой переменной z более подробно.

Элементарное партон-партонное столкновение рассматривается как бинарный процесс, удовлетворяющий закону сохранения 4-импульса в котором происходит рождение инклюзивной частицы с массой m_1 и импульсом p (2.2). Выражение (2.2) приводится к виду:

$$x_1 x_2 - x_1 \lambda_2 - x_2 \lambda_1 = \lambda_0, \quad (2.9)$$

где величины $\lambda_i = \lambda_i(P_1, P_2, p, M_1, M_2, m_2)$ ($i = 0, 1, 2$) зависят от импульсов и масс частиц:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(P_2 p) + M_2 m_2}{(P_1 P_2) - M_1 M_2}, & \lambda_2 &= \frac{(P_1 p) + M_1 m_2}{(P_1 P_2) - M_1 M_2}, \\ \lambda_0 &= \frac{0.5(m_2^2 - m_1^2)}{(P_1 P_2) - M_1 M_2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Переменная $z = z_0 \Omega^{-1}(x_1, x_2)$ строится как фрактальная мера. Она представляет собой произведение двух величин: z_0 , которая учитывает динамические характеристики процесса, и $\Omega^{-1}(x_1, x_2) = (1 - x_1)^{-\delta_1} (1 - x_2)^{-\delta_2}$, которая определяет модельное поведение переменной z и имеет смысл разрешения подпроцесса.

С учетом выше сказанного, величины x_1 и x_2 определяются из условия минимизации разрешения $\Omega^{-1}(x_1, x_2)$ при котором столкновение партонов может быть выделено из рассматриваемого процесса. Это требование сводится к одновременному выполнению условий (2.9) и (2.11)

$$d\Omega(x_1, x_2)/dx_1|_{x_2=x_2(x_1)} = 0. \quad (2.11)$$

Удобно использовать $\lambda - \chi$ разложение величин x_1 и x_2

$$x_1 = \lambda_1 + \chi_1, \quad x_2 = \lambda_2 + \chi_2, \quad (2.12)$$

где

$$\chi_1 = \sqrt{\mu_1^2 + \omega_1^2} - \omega_1, \quad \chi_2 = \sqrt{\mu_2^2 + \omega_2^2} + \omega_2. \quad (2.13)$$

Здесь используются следующие выражения для $\mu_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$

$$\mu_1^2 = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0)\alpha \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_2}, \quad \mu_2^2 = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0)\alpha \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1}. \quad (2.14)$$

$$\omega_1 = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0) \frac{\alpha - 1}{2(1 - \lambda_2)}, \quad \omega_2 = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0) \frac{\alpha - 1}{2\alpha(1 - \lambda_1)}. \quad (2.15)$$

Параметр $\alpha = \delta_1/\delta_2$ представляет собой отношение фрактальных размерностей δ_1 и δ_2 . Таким образом величины x_1 и x_2 являются функциями переменных $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \delta_1, \delta_2$. В случае рассмотрения протон-ядерного взаимодействия, переменные с индексом 1 и 2 относятся к протону и ядру, соответственно, а величина α соответствует атомному номеру ядра A . Такой выбор подтверждается анализом экспериментальных данных [25] и отражает аддитивный закон для фрактальной размерности ядра $\delta_A = A\delta_N$.

Конечная часть, z_0 , определяется поперечной энергией элементарного подпроцесса $\sqrt{\hat{s}_\perp}$ и экспериментально измеряемой плотностью множественности частиц $dN_{ch}/d\eta$ при $\eta = 0$:

$$z_0 = \frac{\sqrt{\hat{s}_\perp}}{m(dN/d\eta)|_{\eta=0}}. \quad (2.16)$$

Массовый параметр m положен равным массе нуклона. Поперечная энергия элементарного подпроцесса (2.1) представима в виде:

$$\hat{s}_\perp^{1/2} = \hat{s}_\lambda^{1/2} + \hat{s}_\chi^{1/2} - m_1 - (M_1x_1 + M_2x_2 + m_2). \quad (2.17)$$

Она состоит из двух частей,

$$\hat{s}_\lambda^{1/2} = \sqrt{(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)^2}, \quad \hat{s}_\chi^{1/2} = \sqrt{(\chi_1P_1 + \chi_2P_2)^2}, \quad (2.18)$$

которые представляют энергию необходимую для рождения инклюзивной частицы и системы отдачи.

Уравнение (2.9) удовлетворяет закону сохранения 4-импульса во всем фазовом пространстве. Переменные $x_{1,2}$ равны единице при достижении границы фазового пространства. Из условия $x_i \leq 1$ получаем следующее соотношение $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_0 \leq 1$. Данное неравенство соответствует пороговому условию

$$(M_1 + M_2 + m_2)^2 + E^2 - m_1^2 \leq (\sqrt{s_A} - E)^2, \quad (2.19)$$

где, $\sqrt{s_A}$ - энергия реакции в системе центра масс, а E - энергия рожденной инклюзивной частицы. Неравенство (2.19) является кинематическим ограничением на максимальную энергию E инклюзивной частицы m_1 в системе центра масс реакции (2.1).

Как было отмечено ранее, фрактальность при взаимодействиях частиц и ядер высоких энергий означает, что внутренняя структура сталкивающихся объектов и их взаимодействий проявляет самоподобие на любых масштабах. Величина $\Omega(x_1, x_2)$ как функция x_1 и x_2 имеет степенную зависимость, определяемую параметрами δ_1 и δ_2 . Последние характеризуют внутренние свойства сталкивающихся объектов. В этой схеме адрон-адронные, адрон-ядерные и ядро-ядерные взаимодействия рассматриваются как взаимодействия двух фракталов, а величина z имеет смысл параметра подобия. Параметры δ_1 и δ_2 трактуются как фрактальные размерности сталкивающихся объектов. В качестве примера можно рассмотреть величину $\Omega = V^\delta$, характеризующую взаимодействие симметричных ($\delta_1 = \delta_2$) сталкивающихся систем, где $V = (1 - x_1)(1 - x_2)$. Величина Ω определяет часть фазового пространства $\{x_1, x_2\}$, соответствующую тем взаимодействиям конститuentов, в которых рождается инклюзивная частица с массой m_1 и импульсом p . Полное фазовое пространство определяется условием $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. Выражения и кинематическое ограничение на величины x_1 и x_2 (2.9) получаются из закона сохранения энергии бинарного партон-партонного процесса, приводящего к образованию рассматриваемой частицы. В рассматриваемом подходе параметр δ описывает фрактальную структуру сталкивающихся объектов и применим для описания любых объектов имеющих структуру. Этот вывод основан на инвариантности величины Ω относительно одновременного масштабного преобразования лоренц-инвариантных

величин x_1, x_2 и мультипликативного преобразования фрактальной размерности δ :

$$\Omega = [(1 - x_1)(1 - x_2)]^\delta = [(1 - \bar{x}_1)(1 - \bar{x}_2)]^{\bar{\delta}}. \quad (2.20)$$

Таким образом, преобразование $\{x_i, \delta\} \rightarrow \{\bar{x}_i, \bar{\delta}\}$ позволяет описывать взаимодействия на любых масштабах.

Можно дать и другую интерпретацию переменной z . Механизм образования адрона рассматривается как динамический процесс "конструирования" сложных фракталов (адронов, струй, γ квантов) из элементарных фрактальных блоков (взаимодействующих конститuentов). Размер структуры блоков зависит от энергии столкновения и поперечных импульсов рожденных объектов. Величина z пропорциональна количеству шагов необходимых для построения сложных объектов (фракталов) из элементарных блоков. Это позволяет рассматривать ее как длину формирования фрактала, на которой проявляются свойства фрактальной меры. Таким образом, переменная z может быть интерпретирована как длина формирования частицы. Следует заметить, что форма переменной z (2.5), (2.6), (2.16), определяет область ее изменения, 0 и ∞ . Эти значения масштабно независимы и кинематически доступны при любых энергиях. Приведенные выше рассуждения не содержат ограничений на тип взаимодействующих объектов и применимы для описания адрон-адронных, адрон-ядерных и ядро-ядерных взаимодействий. Уравнение (2.2), описывающее закон сохранения 4-импульса в элементарном подпроцессе и следующие из него соотношение между долями импульса x_1 и x_2 (2.9), инвариантно относительно масштабного преобразования:

$$\lambda_{1,2} \rightarrow \rho_{1,2}\lambda_{1,2}, \quad x_{1,2} \rightarrow \rho_{1,2}x_{1,2}, \quad \lambda_0 \rightarrow \rho_1\rho_2\lambda_0. \quad (2.21)$$

Масштабные параметры $\rho_{1,2}$ выбираются в соответствии с типом взаимодействия. Так для описания $p + p$ взаимодействий используют $\rho_1 = 1, \rho_2 = 1$, а для описания $p + A$ взаимодействия используют $\rho_1 = 1, \rho_2 = A$ (A - атомный номер мишени). Для ядро-ядерных взаимодействий $\rho_1 = A_1, \rho_2 = A_2$. Такое масштабное преобразование позволяет рассматривать столкновение сложных объектов в терминах соответствующего подпроцесса взаимодействия элементарных конститuentов. Таким образом в данном разделе приведено определение переменной z через экспериментально измеряемую плотность множественности частиц в центральной области $\rho(s) \equiv dN_{ch}/d\eta|_{\eta=0}(s)$. Рассмотрены фрактальные свойства скейлинговой переменной z . Показано, что z является фрактальной мерой соответствующего ин-

клюдивного процесса и может быть интерпретирована как длина формирования частицы.

2.3 Скейлинговая функция $\Psi(z)$ и ее свойства

Предполагая, что взаимодействия конститунтов являются самоподобными, концепция z -скейлинга описывает процесс инклюдивного рождения частицы безразмерной функцией $\Psi(z)$ (2.8), зависящей от одной переменной z . Этот принцип используется для построения преобразования от одних переменных $\{p_z, p_T\}$ к другим $\{z, \eta\}$ и позволяет выразить скейлинговую функцию $\Psi(z)$ через инвариантное сечение $Ed^3\sigma/dp^3$ и среднюю плотность множественности частиц $\rho(s, \eta) \equiv dN/d\eta$

$$\Psi(z) = -\frac{\pi s_A}{(dN/d\eta)\sigma_{in}} J^{-1} E \frac{d^3\sigma}{dp^3}. \quad (2.22)$$

Здесь s_A - энергия столкновения в системе центра масс, σ_{in} - полное неупругое сечение взаимодействия, J - якобиан перехода

$$J = \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} \frac{\partial z}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} \quad (2.23)$$

от переменных $\{y, z\}$ к $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Вывод данного выражения и определение величины J через импульсы и массы сталкивающихся и инклюдивной частиц приведены в Приложении А. Условие нормировки для функции $\Psi(z)$:

$$\int_0^\infty \Psi(z) dz = 1 \quad (2.24)$$

позволяет интерпретировать функцию $\Psi(z)$ как плотность вероятности образования частицы в конечном состоянии с данным значением величины z .

Таким образом в данном разделе дано определение скейлинговой функции $\Psi(z)$ через инклюдивное сечение рождения частицы $Ed^3\sigma/dp^3$, полное неупругое сечение σ_{in} и среднюю плотность множественности $dN/d\eta$. Функция $\Psi(z)$ интерпретируется как плотность вероятности образования частицы с данным значением параметра подобия z .

Выводы: в главе приведено описание метода z -скейлинга, показана его применимость для анализа рождения инклюдивных частиц с целью поиска сигнатур фазовых переходов в ядерной материи.

Глава 3

Спектры заряженных адронов в некумулятивной области p_A СТОЛКНОВЕНИЙ

Изучение закономерностей рождения частиц в протон-ядерных столкновениях является важным шагом при исследовании свойств ядерной материи при экстремальных условиях. В отличие от протон-протонных столкновений в pA столкновениях эффекты ядерной среды проявляются явным образом, однако влияние фоновых процессов не так велико как при ядро-ядерных столкновениях.

3.1 Спектры рождения адронов с большими поперечными импульсами

Измерения сечений идентифицированных адронов с большими поперечными импульсами p_T проводились в нескольких экспериментах на фиксированной мишени во ФНАЛ (Национальная Лаборатория им. Энрико Ферми) [140, 141, 142] и ИФВЭ (Институт Физики Высоких Энергий) [143].

Эксперименты на выведенном пучке Тэватрона во ФНАЛ при энергии $p_{lab} = 200, 300$ и 400 ГэВ/с [140, 141] были проведены группой под руководством Д. Крони-на. Измерялась зависимость сечений рождения π^\pm , K^\pm , \bar{p} от импульса для разных видов ядер-мишеней H , D , Be , Ti и W . Область поперечного импульса, доступная для анализа составила $0.77 < p_T < 6.91$ ГэВ/с. Угол вылета частиц составлял

$\theta_{lab} \approx 4, 5^\circ$, что соответствовало $\theta_{cmsNN} = 90^\circ$ в системе центра масс NN .

Эксперименты на выведенном пучке Тэватрона, проведенные группой под руководством Д. Джаффе во ФНАЛ при энергии $p_{lab} = 400$ и 800 ГэВ/с [142] позволили получить инвариантные сечения $Ed^3\sigma/dp^3$ для π^\pm , K^\pm , p^\pm в pp и pD столкновениях. Поперечный импульс изменялся в пределах $p_T = 4.0 - 10.0$ ГэВ/с и угле вылета $\theta_{lab} = 4, 5^\circ$ что соответствовало углу $\theta_{cmsNN} \simeq 90^\circ$ в системе центра масс.

Данные с ускорителя U70 [143] были получены в эксперименте с фиксированной мишенью при импульсе налетающего протона $p_{lab} = 70$ ГэВ/с на ядрах D , C , Al , Cu , Sn , и Pb группой под руководством Р. Суляева. Инклюзивные частицы регистрировались в пределах $p_T = 0.99 - 4.65$ ГэВ/с под углом $\theta_{lab} \approx 9^\circ$ что соответствовало $\theta_{cmsNN} \approx 90^\circ$ в системе центра масс.

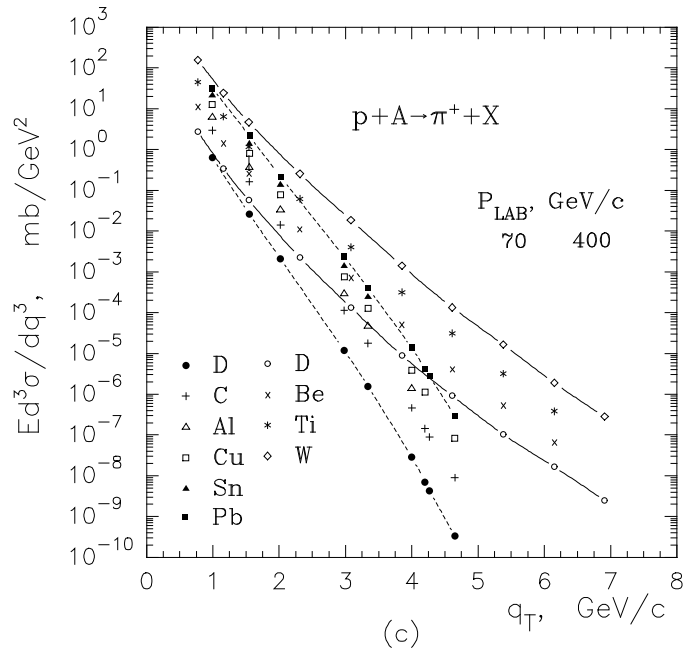


Рис. 3.1: Зависимость инклюзивного сечения положительно заряженных пионов π^+ рожденных в pA столкновениях при двух импульсах налетающего протона $p_L = 70, 400$ ГэВ/с от поперечного импульса [25]. Сплошные и пунктирные линии нарисованы для удобства сравнения спектров и соответствуют данным pD , pW и pD , pPb соответственно.

В работе [25] проведен подробный анализ этих данных в рамках теории z -скейлинга. Здесь мы остановимся кратко на основных закономерностях этих данных, важных для дальнейшего анализа.

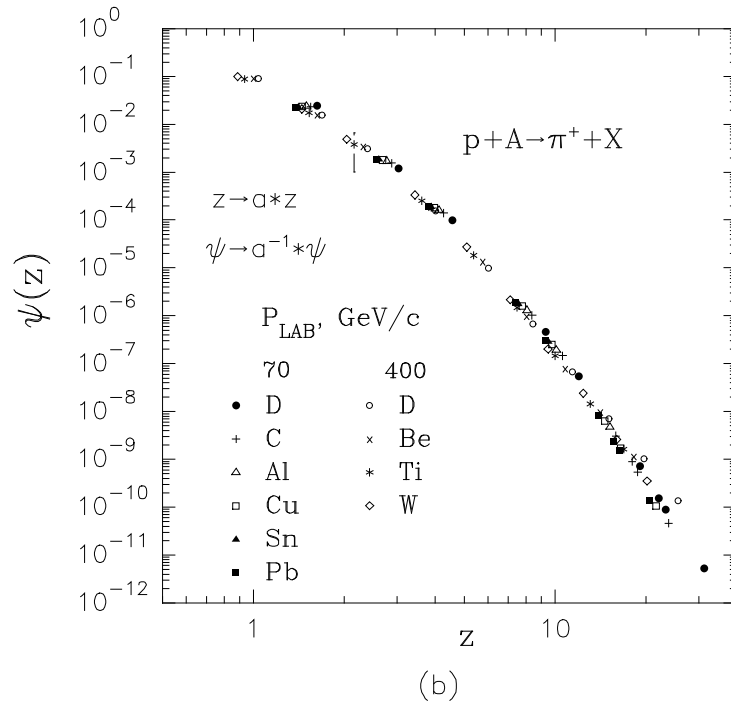
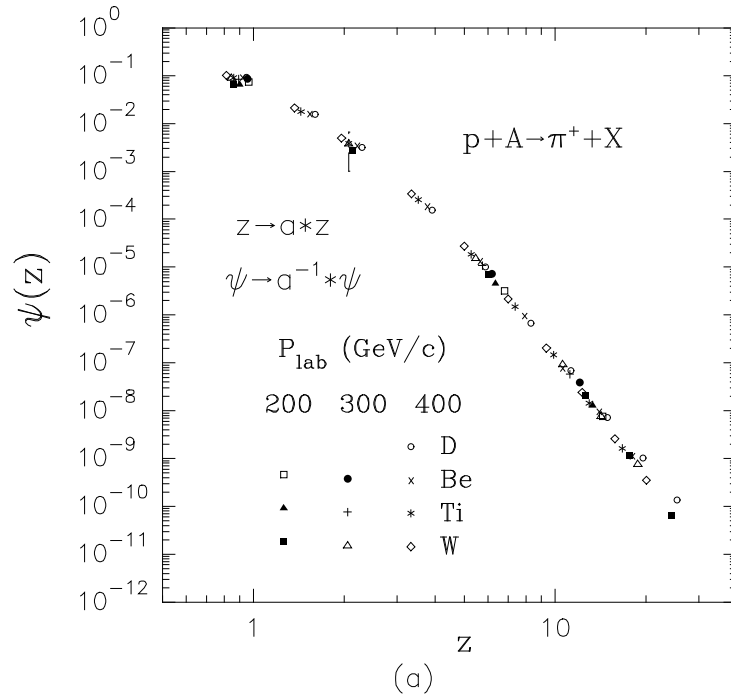


Рис. 3.2: Спектры положительно заряженных пионов π^+ рожденных в pA столкновениях при импульсах налетающего протона $p_L = 200, 300, 400$ ГэВ/с а) и $p_L = 70, 400$ ГэВ/с б) и $\theta_{NN} \approx 90^\circ$ в зависимости от полного импульса в z -представлении.

На Рис. 3.1 показаны инвариантные дифференциальные сечения рождения π^+ мезонов в $p + A$ взаимодействиях при импульсах налетающего протона $p_{lab} = 70$ и 400 ГэВ/с в области углов $\theta_{cms} \simeq 90^\circ$. В экспериментах использовались различные ядерные мишени, от дейтерия (D) до свинца (Pb). Импульсные спектры демонстрируют сильную зависимость от энергии столкновения, которая усиливается с ростом поперечного импульса. Так при импульсе инклюзивной частицы 4 ГэВ/с даже на ядре дейтерия сечения отличаются более чем на два порядка. Сходная закономерность наблюдается и для более тяжелых ядер. Спектры явно демонстрируют степенное поведение при высоких энергиях. При меньшей энергии ($\sqrt{s} = 11.5$ ГэВ/с) "хвосты" спектров, чувствуют приближение кинематической границы для нуклон-нуклонного рассеяния. С уменьшением поперечных импульсов зависимость сечений от энергии столкновения также уменьшается. Отметим, что сходные закономерности наблюдаются для всех типов регистрируемых частиц.

3.2 Скейлинг в рождении адронов с большими поперечными импульсами

В этом разделе приведены z -представления инвариантных инклюзивных сечений, полученных группами Д. Кронина, Р. Суляева и Д. Джаффе. В данной работе они используются в качестве референсных. На Рис.3.2 показана зависимость функции Ψ от переменной z для π^+ и π^- мезонов, рожденных в $p + A$ взаимодействиях при различных энергиях столкновения и типах ядер-мишеней. Видно, что все экспериментальные точки ложатся на одну универсальную кривую. В области больших z , поведение функции $\Psi(z)$ можно аппроксимировать степенной зависимостью вида $\Psi(z) \sim z^{-\beta}$. В области малых z наблюдается отклонение от степенного режима, характеризуемое уменьшением параметра наклона β . Для каждого ядра было получено z -представление сечений. Для учета A -зависимости скейлинговых функций было использовано масштабное преобразование $z \rightarrow \alpha z$, $\Psi \rightarrow \alpha^{-1}\Psi$.

Однако, несмотря на достаточно высокие импульсы инклюзивных частиц, ни в одном из экспериментов не была достигнута граница кумулятивного рождения. Это связано с тем, что при исследовании частиц вылетающих в переднюю полусферу, кинематическая граница кумулятивного рождения располагается значительно дальше, чем для частиц вылетающих в заднюю полусферу в лабораторной системе.

Приведенные данные были ранее проанализированы в рамках модели z -скейлинга

и в данной работе использовались в качестве образца для сравнения. Результаты этих экспериментов были использованы для проверки установленных свойств z -скейлинга в столкновениях протонов с ядрами. Как видно из графиков 3.2, экспериментальные точки лежат в области больших z , где поведение функции $\Psi(z)$ можно аппроксимировать степенной зависимостью вида $\Psi(z) \sim z^{-\beta}$.

3.3 A -зависимость z -скейлинга

При сравнении результатов рождения частиц на разных ядрах-мишенях необходимо было учитывать зависимость сечений, а следовательно и функции Ψ , и параметра подобия z от массового номера ядра A . Подробно данная процедура описана в работе [25]. Для каждого ядра строилась функция $\Psi(z)$ (2.8) с нормировочным параметром $\sigma_{in}^{pA}/\sigma_{in}^{pp}$ вместо σ_{in} . Величина σ_{in}^{pA} - полное неупругое сечение $p + A$ взаимодействия [136]. Для построения функции $\Psi(z)$ необходимо знать величину $\rho_A(s, \eta) \equiv dN/d\eta(s, \eta)$ средней плотности множественности вторичных частиц, рожденных в $p + A$ столкновении. Она была получена из данных Монте-Карло моделирования в генераторе HIJING [137, 138] для разных типов ядер ($A = 27 - 197$) и параметризована в форме:

$$\rho_A(s) \simeq 0.67 \cdot A^{0.18} \cdot s^{0.105}, \quad A \geq 2. \quad (3.1)$$

На рисунке 3.3 показана зависимость параметра преобразования α от массового числа A . Символы (\circ, Δ) обозначают величину α при которой различные функции совпадают между собой. На рисунке 3.4 та же зависимость представлена в логарифмическом масштабе. В этом случае явно видна степенная зависимость $\alpha(A)$. Из фита был явно установлен вид этой зависимости $\alpha = 0.914 \cdot A^{0.15}$

Полученные таким образом скейлинговые функции демонстрируют независимость от энергии столкновения и угла вылета вторичных частиц. Для сравнения функции $\Psi(z)$ для различных типов ядра мишени использовалось масштабное преобразование

$$z \rightarrow \alpha(A) \cdot z, \quad \Psi \rightarrow \alpha^{-1}(A) \cdot \Psi \quad (3.2)$$

Справедливость подобного подхода была проверена на различных экспериментальных данных в протон-ядерных столкновениях при различных энергиях [25]. При описании данных использовался аддитивный закон для фрактальных размерностей ядер $\delta_A = A\delta_N$ и была установлена универсальность формы функции $\Psi(z)$.

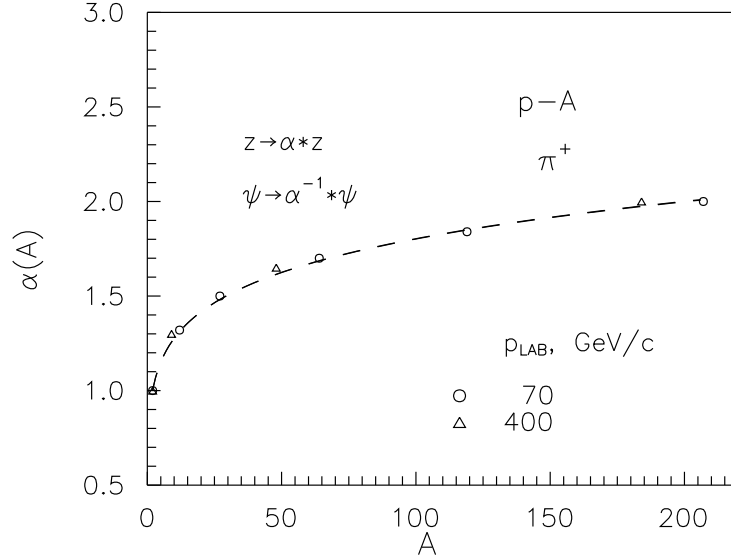


Рис. 3.3: A -зависимость параметра масштабного преобразования α . A -зависимость полного неупругого сечения σ_{in}^{pA} [136].

Она интерпретировалась как эффект самоподобного влияния ядерной среды на механизм образования частиц с большими поперечными импульсами.

В работах [24, 25, 139] проанализированы экспериментальные данные по рождению заряженных частиц (π^\pm , K^\pm и \bar{p}) в $p + A$ столкновениях, при импульсе налетающего протона от 70 до 800 ГэВ/с [140]-[143]. Данные включали результаты измерений инвариантных сечений $E d^3\sigma/dp^3$ рождения адронов для различных мишеней (H , D , C , Al , Cu , Sn , Pb , Be , Ti , W) в области поперечных импульсов до $p_T < 12$ ГэВ/с. Средняя плотность множественности была получена с использованием Монте-Карло генераторов для изучаемых процессов. Результаты анализа показали наличие энергетической независимости скейлинговой функции $\Psi_A(z)$. Таким образом было показано, что переменная z является параметром подобия для рождения частиц в $p + p$ и $p + A$ взаимодействиях при больших поперечных импульсах в центральной области псевдобыстрот $|\eta| \simeq 0$.

Выводы: в главе представлен обзор некоторых результатов анализа инклюзивных спектров рождения пионов в $p + A$ взаимодействиях при высоких энергиях ($p_L = 70$ и 400 ГэВ/с) и больших поперечных импульсах, полученных во ФНАЛ и ИФВЭ, в рамках модели z -скейлинга, подтверждающих самоподобие рождения адронов. Продемонстрированы свойства z -скейлинга для рождения пионов в $p + A$ столкновениях: энергетическая и A -зависимость скейлинговой функции $\Psi(z)$, аддитивность фрактальной размерности ядер.

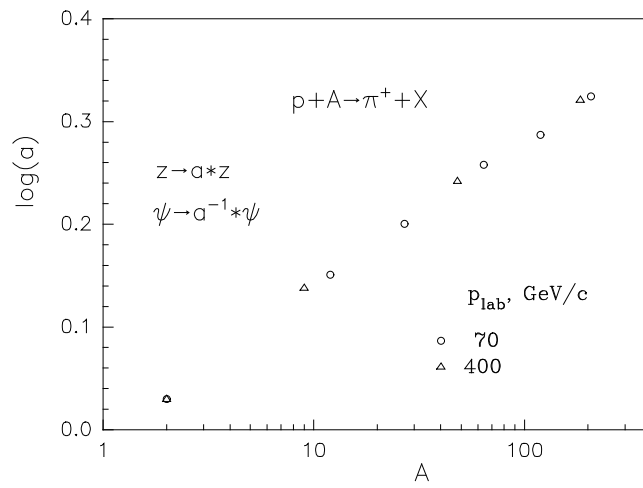


Рис. 3.4: A -зависимость параметра масштабного преобразования α в логарифмическом представлении.

Глава 4

Скейлинг в кумулятивном рождении адронов в $p + A$ столкновениях

В данном разделе приведены результаты анализа экспериментальных данных по инклюзивным спектрам заряженных частиц, рожденных в протон-ядерных столкновениях. Особое внимание было уделено рождению частиц в кумулятивной области - особой кинематической области, доступной только в столкновениях с участием ядер. Граница области кумулятивного рождения определялась из закона сохранения 4-импульса в реакции: $(P_1 + P_2 - p)^2 = M_x^2$ при условии минимума массы отдачи M_x .

4.1 Кинематика рождения частиц в $p + A$ столкновениях

Рассмотрим процесс столкновения частиц с 4-импульсами P_1 и P_2 , и массой M_1 и M_2 с рождением инклюзивной частицы с импульсом p и массой m . Квадрат энергии столкновения равен $s = (P_1 + P_2)^2$. Кинематическая граница области кумулятивного рождения определяется из закона сохранения 4-импульса в реакции:

$$(P_1 + P_2 - p)^2 = M_X^2 \quad (4.1)$$

при условии, что инвариантная масса M_X нерегистрируемой системы минимальна и хотя бы одна из сталкивающихся частиц - ядро. Это уравнение должно также учитывать законы сохранения аддитивных величин таких, как барионное число, электрический заряд, странность и др. С учетом вышесказанного, уравнение (4.1) в системе покоя частицы 1 запишется в виде:

$$M_1^2 + M_2^2 + m_1^2 + 2(\sqrt{M_1^2 + \vec{P}_1^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})M_2 - 2|\vec{P}_1||\vec{p}| \cos(\theta) = M_X^2 \quad (4.2)$$

Так для рождения π^+ мезона в $p + p$ столкновении $M_1 = m_p$, $M_2 = m_p$, $m = m_\pi$, а нерегистрируемая масса равна $M_X = m_p + m_n$, для рождения π^- мезона - $M_X = m_p + m_p + m_\pi$. Для протон-ядерных соударений $M_1 = m_p$, а M_2 равна массе ядра-мишени.

Решение уравнения (4.2), т.е. значение импульса $p = p(\theta)$ для различных значений угла вылета (θ) регистрируемой частицы и определяет кинематическую границу рассматриваемой реакции. На рис. 4.1 показаны кинематические границы для процесса $p + A \rightarrow \pi^- + X$ при импульсе протона $p_L = 50$ и 400 ГэВ/с в лабораторной системе и ядер $A = p, D, C, Al$.

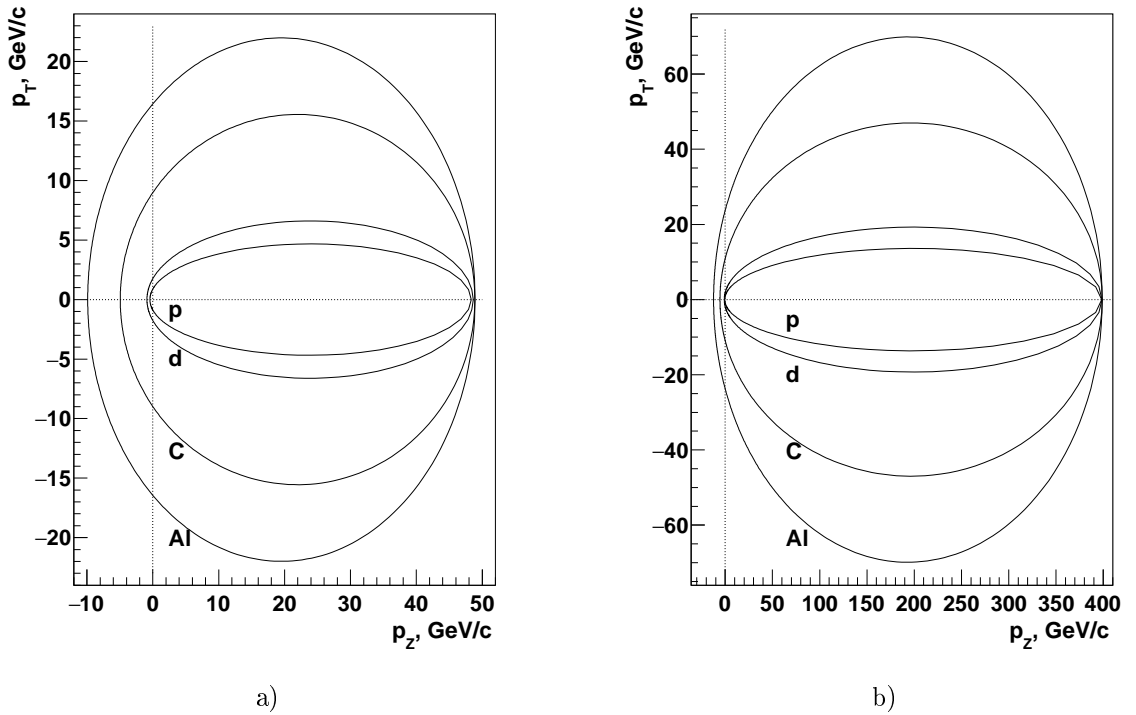
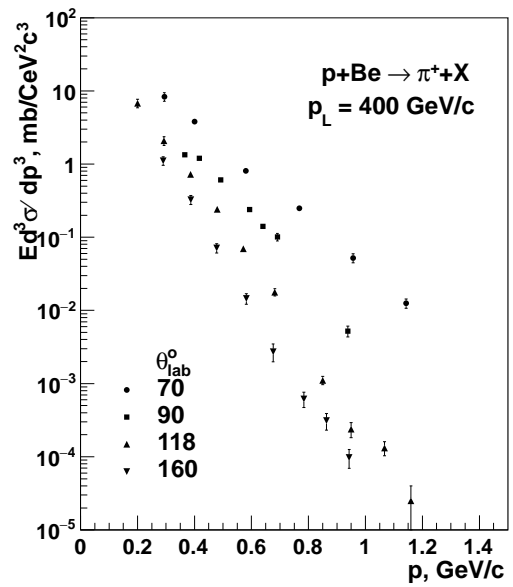
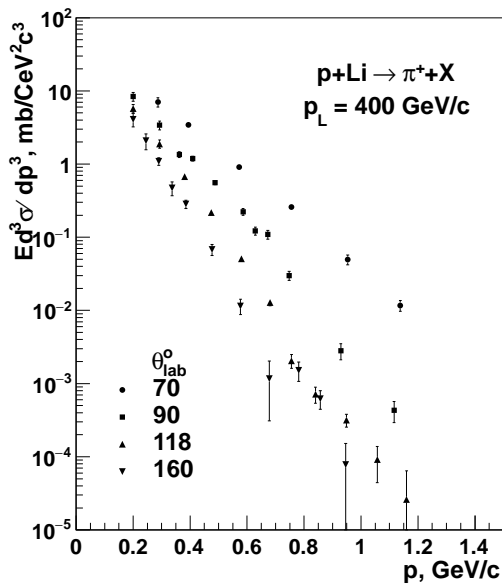


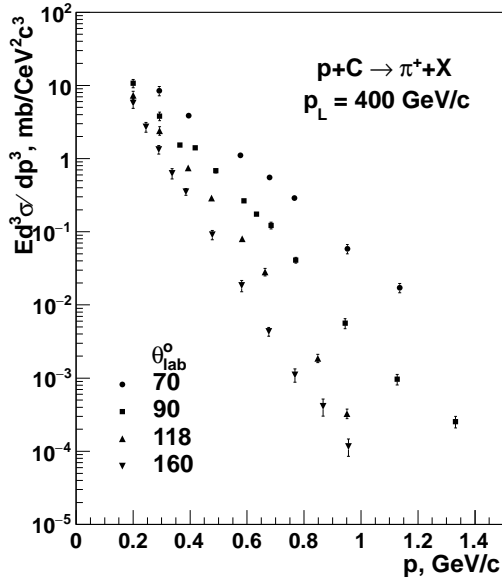
Рис. 4.1: Кинематические границы для различных ядер при импульсе протона $p_L = 50$ а) и 400 б) ГэВ/с

4.2 Рождение заряженных адронов в $p + A$ столкновениях при малых p_T во ФНАЛ

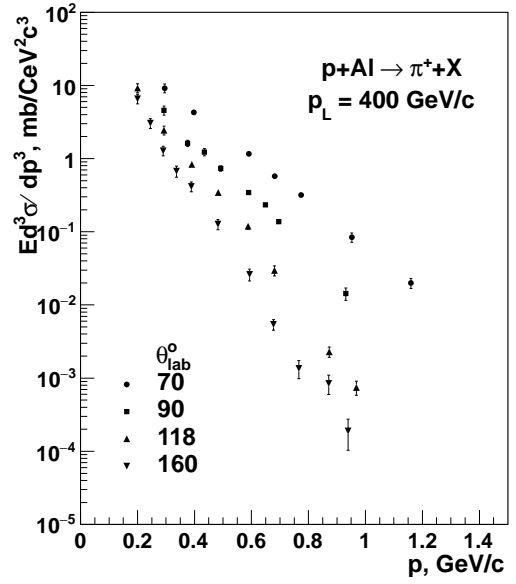
Данные были получены в эксперименте с фиксированной мишенью на выведенном пучке Теватрона (ФНАЛ, Батавия) [144]. Протоны с импульсом $p_L = 400$ ГэВ/с налетали на неподвижную ядерную мишень. Всего использовались шесть разных

видов ядер-мишеней (Li , Be , C , Al , Cu , Ta) для каждой из которых регистрировались инклюзивные частицы, вылетающие под четырьмя углами в лабораторной системе $\theta = 70^\circ$, 90° , 118° и 160° . На рисунке 4.2 представлены графики инклюзивных сечений рождения положительно заряженных пионов π^+ в зависимости от полного импульса частицы для различных ядер и углов вылета θ_{lab} . Полный импульс инклюзивных частиц находился в пределах $0.20 < p < 1.25$. Видна сильная зависимость сечений от угла вылета пиона во всем диапазоне импульсов. Эта зависимость усиливается с ростом p и отличие сечений при $\theta_{lab} = 90^\circ$ и 160° достигает 2-3 порядков при $p \simeq 1.2$ ГэВ.

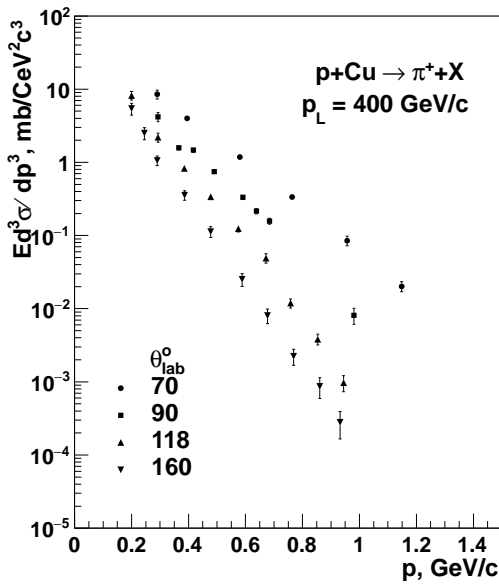




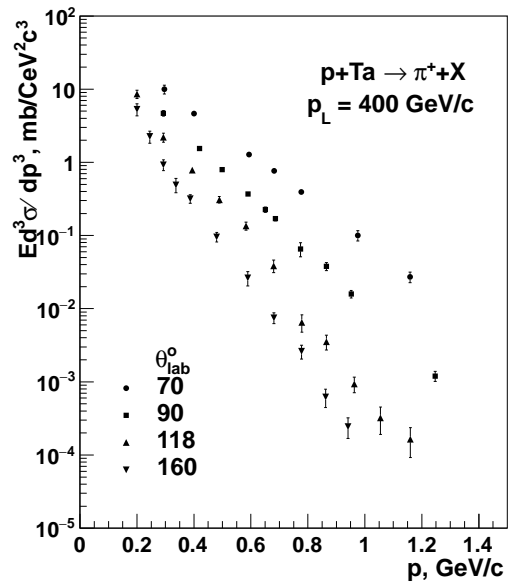
c)



d)



e)



f)

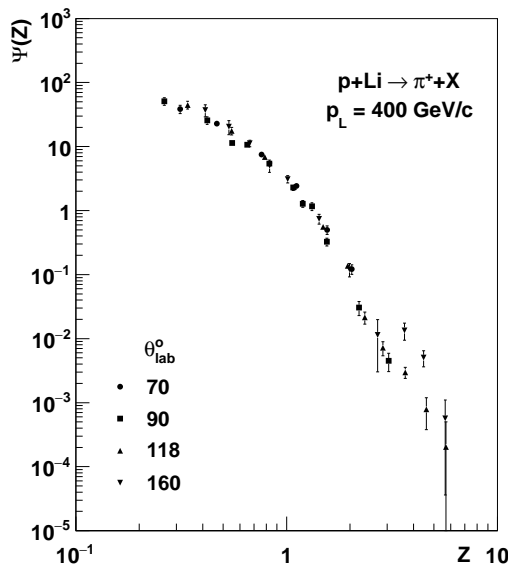
Рис. 4.2: Спектры положительно заряженных пионов π^+ , рожденных в $p + A$ столкновениях при импульсе налетающего протона $p_L = 400$ ГэВ/с и угле вылета $\theta_{lab} = 70^\circ, 90^\circ, 118^\circ$ и 160° в зависимости от полного импульса для разных ядерных мишеней. Экспериментальные точки взяты из работы [144].

Данные спектры были использованы для построения скейлинговой функции

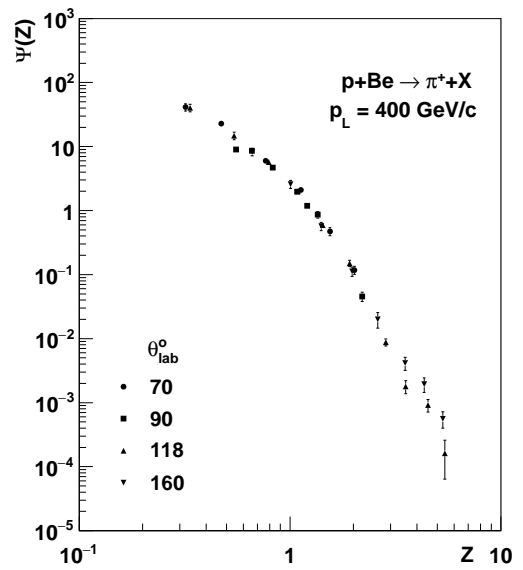
Ψ по описанной выше процедуре (2.8) с нормировочным фактором $\sigma_{in}^{pA}/\sigma_{in}^{pp}$ вместо σ_{in} . σ_{in}^{pA} - полное неупругое сечение протон-ядерного взаимодействия. Для сравнения результатов на различных ядрах-мишенях применялось преобразование (3.2). Явный вид зависимости был установлен ранее в работе [25] и задается формулой $\alpha(A) = 0.914 \cdot A^{0.15}$.

На графиках 4.3 показаны экспериментальные спектры в z -представлении. Видно, что в пределах экспериментальных ошибок, данные описываются единой скейлинговой кривой для различных углов вылета. Также установлено совпадение формы кривой для различных ядер мишени. Форма $\Psi(z)$ может быть восстановлена, принимая во внимание угловую зависимость плотности множественности. При этом, необходимо отметить отсутствие экспериментальных данных по угловой зависимости функции $\rho(s, A, \eta)$. Она была установлена из сравнения фита кумулятивных и некумулятивных данных в z -представлении между собой.

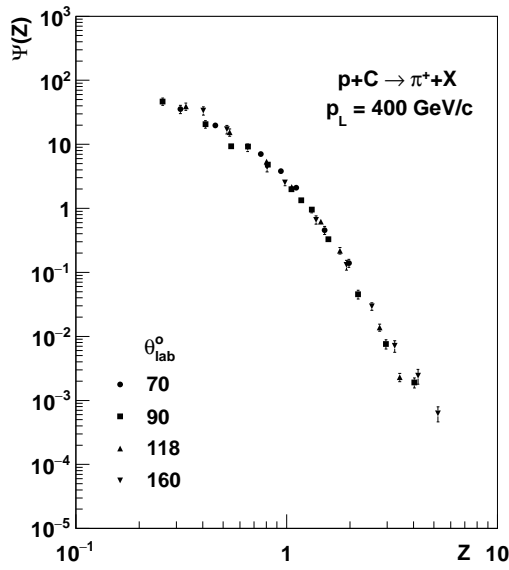
В таблице 4.1 представлены значения угловых коэффициентов для всех типов мишеней и углов вылета. Видно, что они растут с увеличением массового номера ядра и уменьшаются с ростом угла вылета.



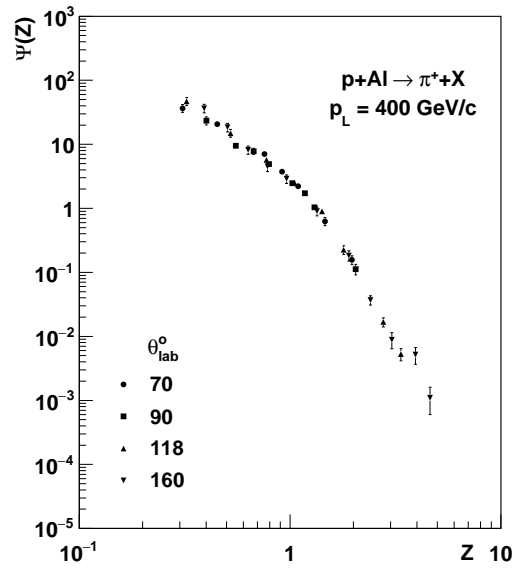
a)



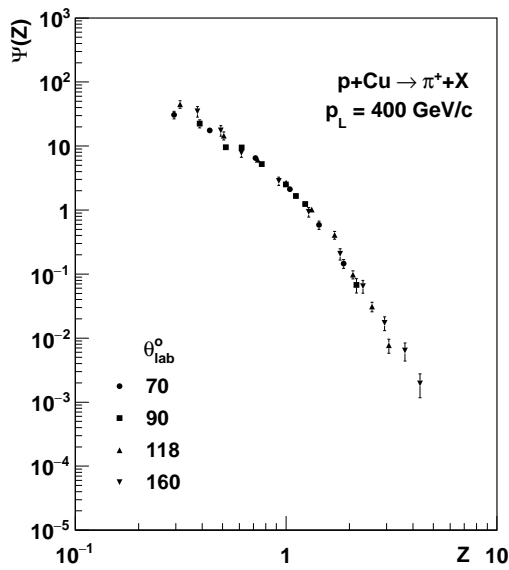
b)



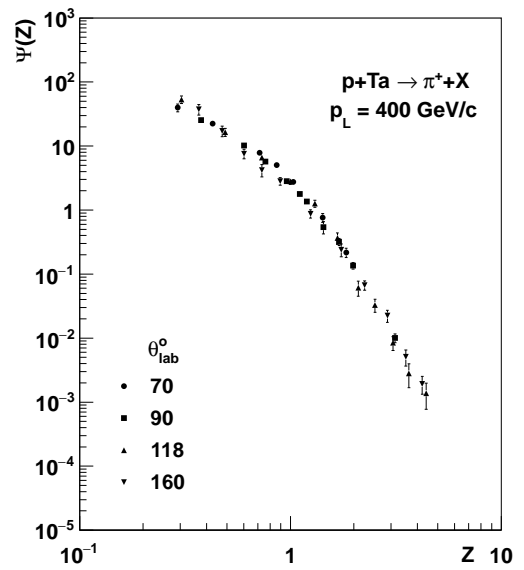
c)



d)



e)



f)

Рис. 4.3: Спектры положительно заряженных пионов π^+ в z-представлении.

4.2.1 Кинематика подпроцесса в переменных x_1 , x_2 и z – p график

На Рис. 4.4 представлена зависимость величин x_1 и x_2 от импульса p в зависимости от типа ядра мишени для рождения пионов в $p + A$ взаимодействиях при

Таблица 4.1: Коэффициенты угловой зависимости для разных типов ядер-мишеней

A	Li	Be	C	Al	Cu	Ta
θ_{lab}						
70°	0.30	0.35	0.43	0.52	0.67	0.80
90°	0.25	0.33	0.38	0.46	0.52	0.67
118°	0.22	0.30	0.35	0.42	0.46	0.53
160°	0.20	0.29	0.34	0.41	0.42	0.50

$p_L = 400$ ГэВ/с и двух углах вылета $\theta = 70^\circ$ и 160° . Величина x_1 соответствует фрагментации налетающего протона, а x_2 - фрагментации ядра. Их значения ограничены кинематическими условиями: $0 < x_1, x_2 \leq 1$. Используется условие нормировки долей импульсов: x_1 на импульс налетающего нуклона и x_2 - на импульс ядра. Величины x_1 и x_2 увеличиваются с ростом импульса и угла вылета регистрируемой частицы. Для фрагментации ядра кумулятивная область соответствует диапазону изменения $x_2 > 1/A$, а некумулятивная - $x_2 < 1/A$.

На Рис. 4.5 показана зависимость скейлинговой переменной z от импульса p для различных значений угла вылета инклюзивной частицы θ_{lab} . Полученная $z - p$ зависимость позволяет наилучшим образом выбрать кинематическую область для проверки степенного закона для $\Psi(z)$. Видно, что сечение чувствительно к импульсу в области больших значений p . Так, уменьшение величины сечения достигает одиннадцати порядков при изменении импульса p от 1 до 1.7 ГэВ/с при угле вылета $\theta_{lab} = 90^\circ$.

Дополнительная информация о свойствах взаимодействия конstituентов может быть получена в протон-ядерных столкновениях. Ожидается, что такая информация позволит прояснить характер перехода от адронных к кварк-глюонным степеням свободы в ядерной среде на различных масштабах. Предполагается, что модификация элементарного подпроцесса будет выражена сильнее в кумулятивной области. Она может быть достигнута как в экспериментах на коллайдерах в центральной области быстрот, так и при рождении частиц в заднюю полусферу при фрагментации ядер в экспериментах с фиксированной мишенью. Поскольку в рамках z -скейлинга обе величины - скейлинговая функция Ψ и параметр подобия z являются безразмерными Лоренц-инвариантными величинами, то имеется возможность изучения режимов рождения частиц с большими и малыми попереч-

ными импульсами в рамках единого подхода - z скейлинга.

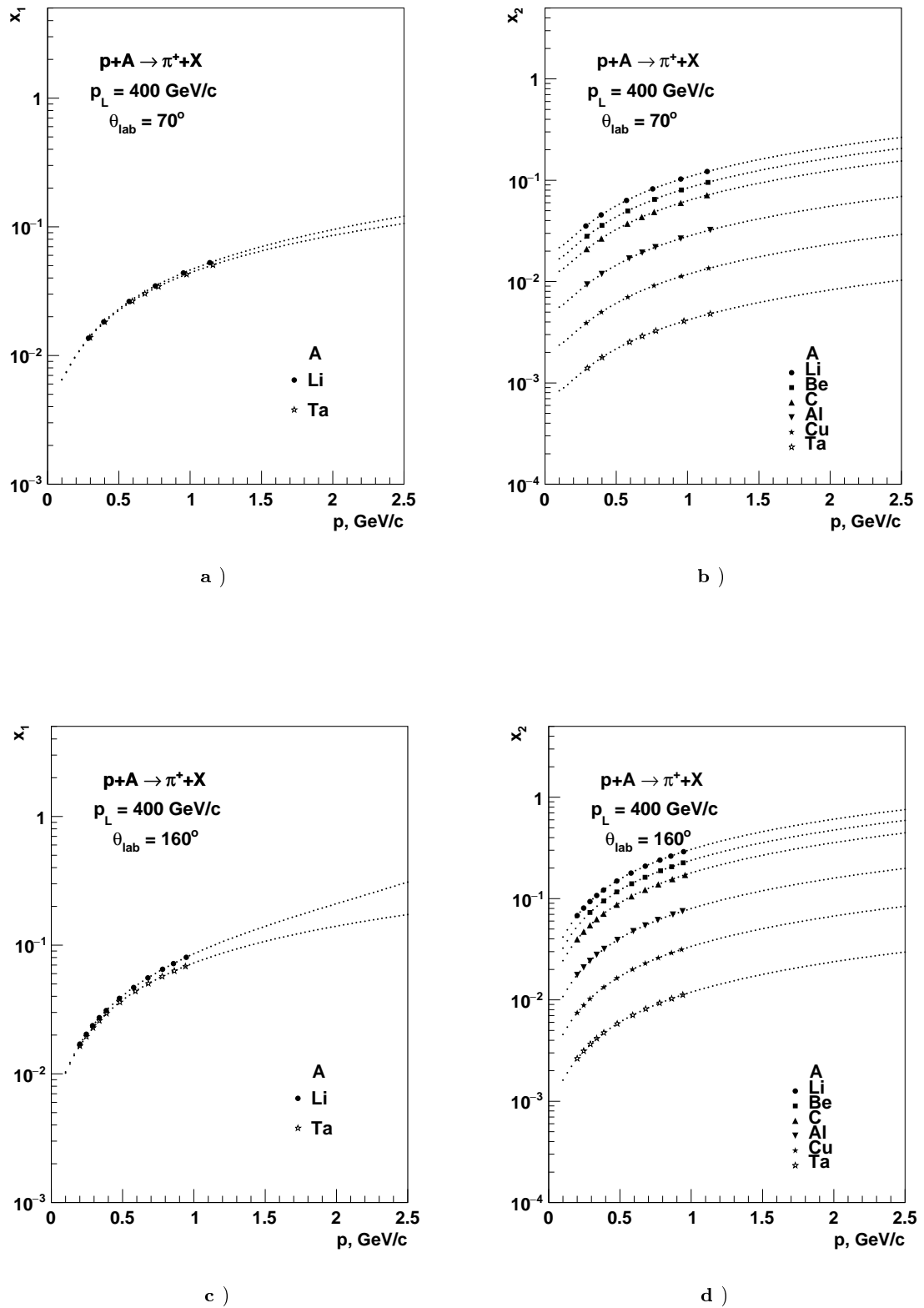


Рис. 4.4: Зависимость величин x_1 (а, с) и x_2 (b, d) от импульса p для рождения пионов с различными типами ядер-мишеней при $p_L = 400$ ГэВ/с и $\theta_{lab} = 70^\circ$ и 160° .

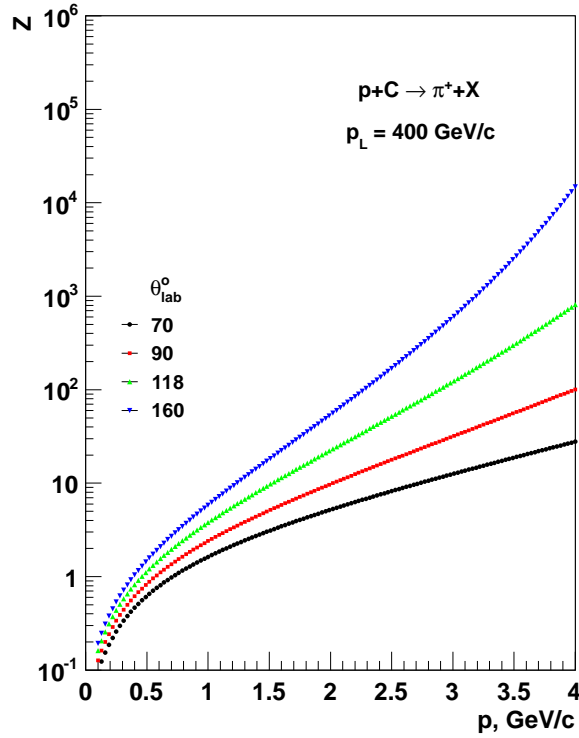


Рис. 4.5: Зависимость параметра подбора z от импульса инклюзивной частицы p при рождении пионов в $p + A$ столкновениях при импульсе налетающего протона $p_L = 400$ ГэВ/с и углах регистрации инклюзивной частицы $\theta_{lab} = 70^\circ, 90^\circ, 118^\circ$ и 160° .

4.3 Рождение заряженных адронов в $p+A$ столкновениях при малых p_T на У70

Данные были набраны в эксперименте с фиксированной мишенью на ускорителе У70 (ИФВЭ, Протвино) [145] в Протвино. Измерения проводились на внутренней мишени протонного синхротрона У70 при двух импульсах налетающего протона $p_L = 15 - 20$ и $p_L = 53 - 64$ ГэВ/с, условно названные нами "низкий" и "высокий" соответственно. Протон налетал на мишень, представлявшую собой тонкую фольгу из соответствующего материала, после чего регистрировался вылет частиц (пионов, каонов, протонов) под углом 159° в лабораторной системе координат. Рождение положительно заряженных пионов было исследовано на трех видах ядерных мишеней (Be, C, Al), рождение отрицательно заряженных - на шести ($Be, C, Al,$

Ti , Mo , W). На графиках 4.6 показаны сечения рождения положительно (а, с) и отрицательно заряженных пионов (b, d).

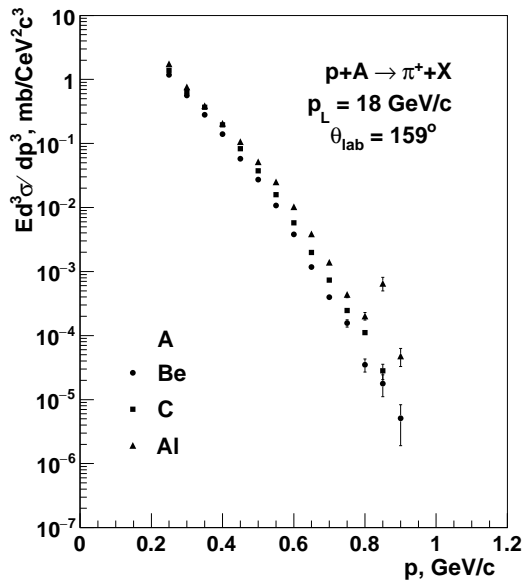
Из него видно, что спектры пионов демонстрируют схожее поведение для различных ядер мишеней. В работе [145] отмечено, что зависимость сечений от импульса хорошо аппроксимируется экспоненциальной зависимостью вида $\sim \exp(-T/T_0)$, где T - кинетическая энергия регистрируемой частицы $T_0 > 0.35$ ГэВ, что чуть выше порога рождения пионов при квазисвободном нуклон-нуклонном взаимодействии. Значение параметра T_0 слабо меняется с 0.45 до 0.55 ГэВ при изменении атомного номера ядра с 9 до 184. Полный импульс инклюзивных пионов лежит в диапазоне $p = 0.3 - 0.9$ ГэВ/с, при этом поперечный импульс p_T не превышает 0.35 ГэВ/с.

Экспериментальные данные по сечениям были пересчитаны в z -представление по описанной выше процедуре. Результаты представлены на рисунке 4.7. Из графиков видно, что данные для положительных и отрицательных пионов, рожденных на разных мишенях, с высокой точностью описываются одной кривой. Для построения этой кривой использовались коэффициенты угловой зависимости, которые приведены в таблице 4.2. Как видно из графиков, экспериментальные точки в z -представлении покрывают обе характерные области скейлинговой кривой: насыщение ($z < 1$) и степенное поведение ($z > 4$), что позволяет проверить асимптотическое поведение функции $\Psi(z)$.

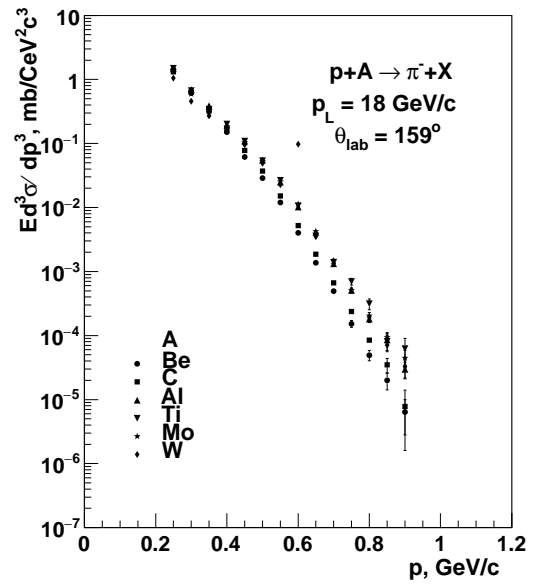
Как видно из графика 4.7 функция $\Psi(z)$ остается гладкой, несмотря на переход в кумулятивный режим рождения частиц. Сохраняется степенная зависимость вида $\Psi(z) \sim z^{-\beta}$ при $z > 4$.

Условие нормировки функции $\Psi(z)$ должно учитывать угловую зависимость плотности множественности. Ввиду отсутствия экспериментальных данных по угловой зависимости для изучаемого процесса, была использована параметризация для функции $\rho(s, \eta, A)$ в виде $\rho(s, \eta, A) = \rho(s, A) \cdot \chi(\theta_{lab}, A)$. Значения $\chi(\theta_{lab}, A)$ фиксируются для каждого ядра, так чтобы воспроизвести форму "референсной" кривой для каждого ядра во всей области изменения z . Совершенно не очевидно заранее, что такая процедура будет успешной.

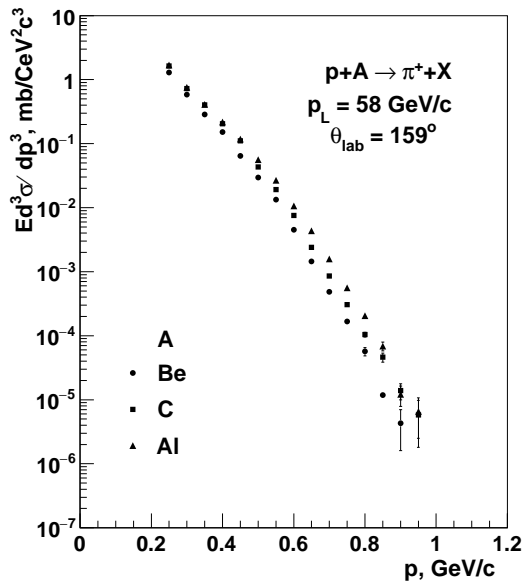
Результаты анализа угловой зависимости приведены в таблице 4.2. Было установлено, что величина χ уменьшается с ростом атомного номера A . Следует отметить, что условие нормировки $\Psi(z)$ только в одной точке z позволяет воспроизвести форму функции во всем диапазоне изменения переменной z . Полученный результат



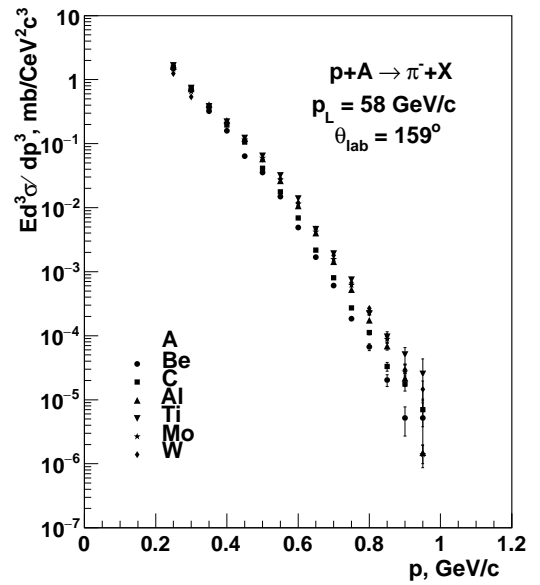
a)



b)

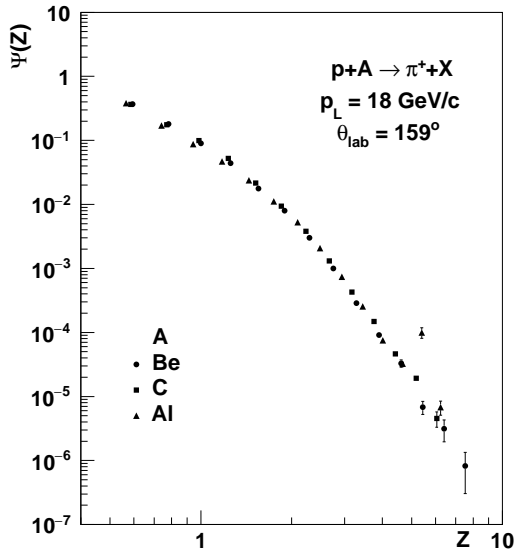


c)

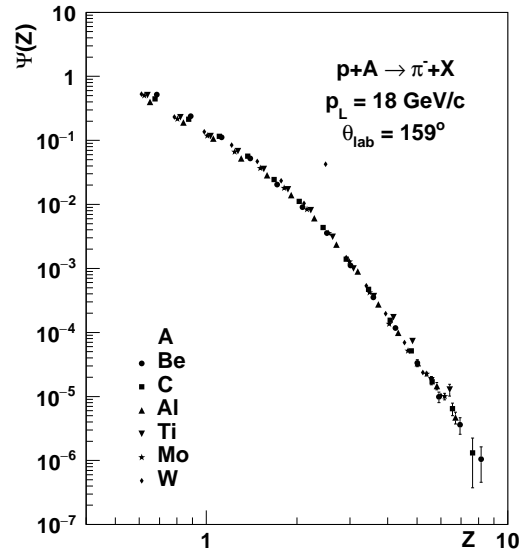


d)

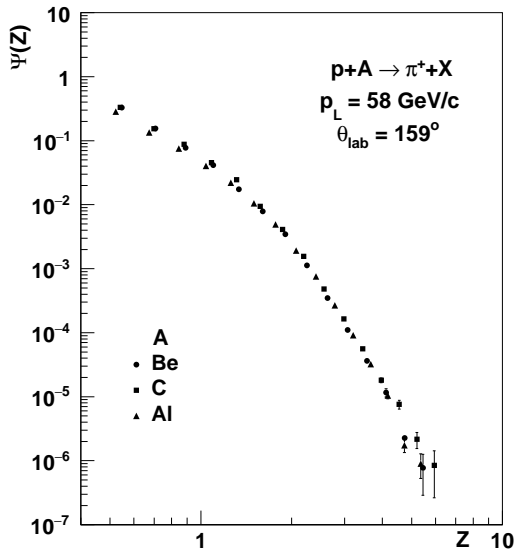
Рис. 4.6: Инклюзивные дифференциальные сечения рождения пионов, заряженных положительно π^+ (а, с) и отрицательно π^- (b, d), рожденных в $p + A$ столкновениях при двух импульсах налетающего протона $p_L = 18, 58 \text{ ГэВ}/c$ и угле вылета $\theta_{lab} = 159^\circ$ в зависимости от полного импульса. Экспериментальные точки взяты из работы [145].



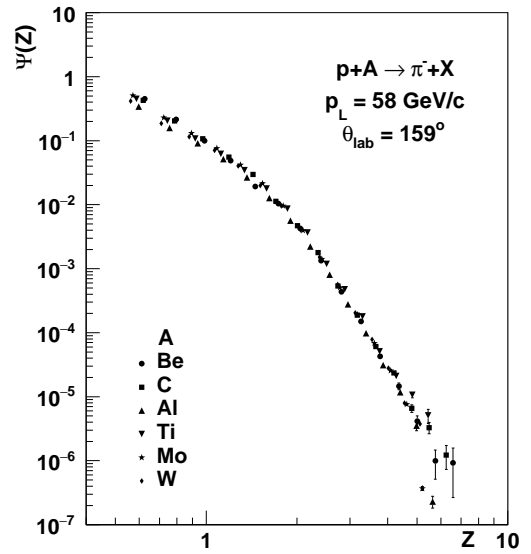
a)



b)



c)



d)

Рис. 4.7: Скейлинговая функция $\Psi(z)$ рождения пионов, заряженных положительно π^+ (a, c) и отрицательно π^- (b, d) рожденных в $p + A$ столкновениях при двух импульсах налетающего протона $p_L = 18, 58 \text{ ГэВ}/c$ и угле вылета $\theta_{lab} = 159^\circ$ в зависимости от параметра подобия z .

подтверждает гипотезу об универсальности формы скейлинговой функции.

Таблица 4.2: Коэффициенты угловой зависимости для разных типов ядер-мишеней

A	Be	C	Al	Ti	Mo	W
$p_L = 18 \text{ ГэВ}/c$						
π^+	1	1	0.74			
π^-	1	0.90	0.72	0.47	0.38	0.26
$p_L = 58 \text{ ГэВ}/c$						
π^+	1	1	0.67			
π^-	1	0.88	0.63	0.35	0.19	0.16

4.3.1 Кинематика подпроцесса в переменных x_1 , x_2

Зависимость долей импульсов x_1 , x_2 сталкивающихся частиц, переносимых взаимодействующими конститuentами от энергии столкновения, атомного номера ядра, импульса и угла вылета инклюзивной частицы позволяет анализировать кинематику конститuentного процесса в терминах безразмерных переменных, что, с учетом скейлингового поведения $\Psi(z)$, соответствует самоподобию рождения инклюзивной частицы на различных масштабах.

Зависимость величин x_1 и x_2 от импульса инклюзивной частицы p для рождения π^- мезонов в $p + A$ столкновениях при импульсе протона $p_L = 18, 58 \text{ ГэВ}/c$ и угле регистрации инклюзивной частицы $\theta_{lab} = 159^\circ$ показаны на рисунке 4.8. Фрагментация протона и ядра описывается переменными x_1 и x_2 , соответственно. Области изменения этих величин определены кинематическими условиями и соответствуют диапазонам: $0 < x_1, x_2 \leq 1$. Доли x_1 , x_2 увеличиваются с ростом импульса инклюзивной частицы p . Новый режим рождения адронов ожидается в глубококумулятивной области $x_2 \gg 1/A$. Имеющиеся экспериментальные данные по инклюзивным сечениям, полученные при других энергиях и больших поперечных импульсах, охватывают область изменения параметра подобия z вплоть до 20 в некумулятивной области. Поэтому область $z > 10$ или $p > 1 \text{ ГэВ}/c$ представляет повышенный интерес для детального исследования.

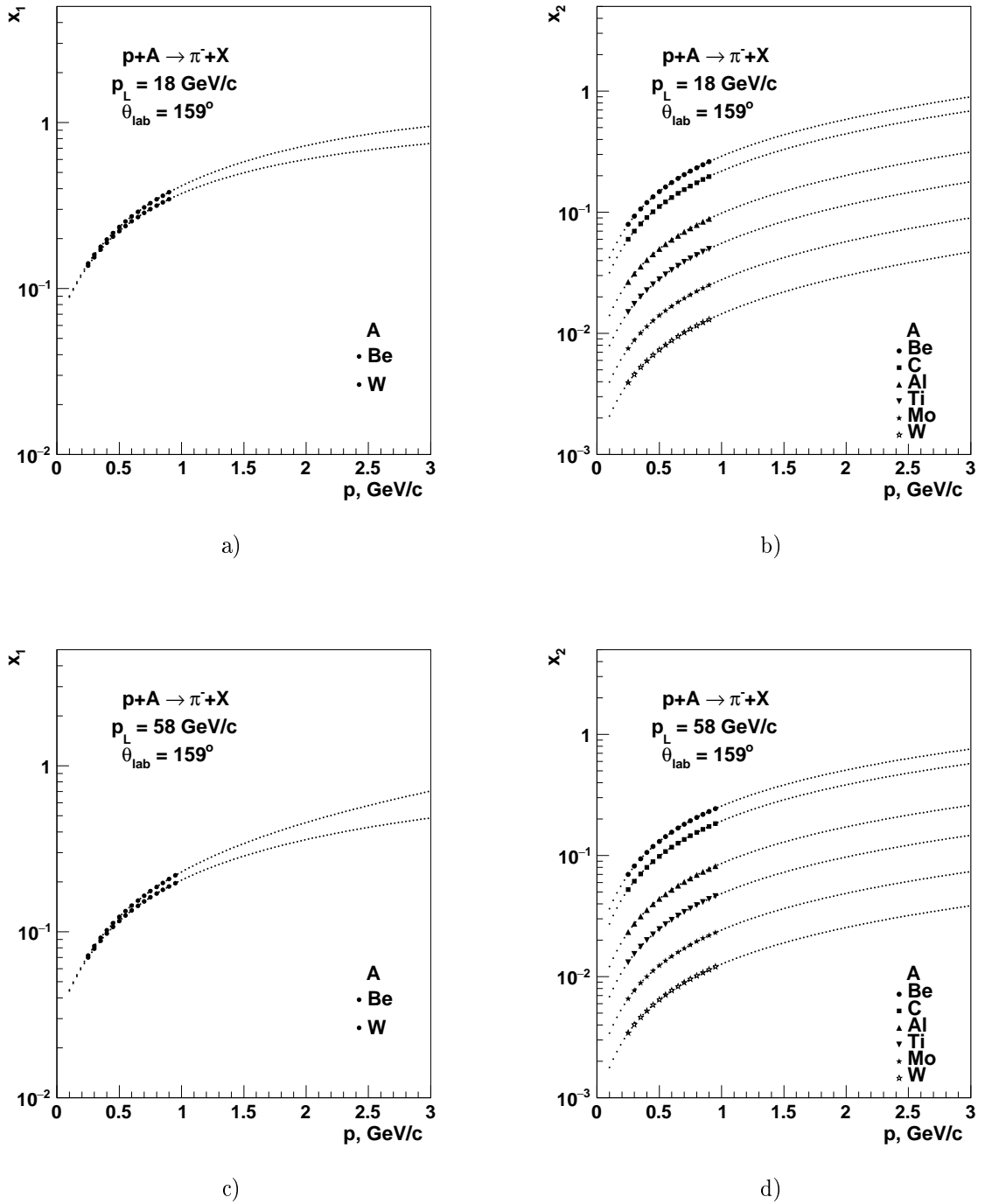


Рис. 4.8: Зависимость долей x_1 и x_2 от импульса инклюзивной частицы p для рождения π^- мезонов в $p + A$ столкновениях при импульсе протона $p_L = 18, 58$ ГэВ/с и угле регистрации частицы $\theta_{lab} = 159^\circ$.

В эксперименте [145] максимальное значение импульса p частицы, вылетающей в заднюю полусферу, не превышало 1. ГэВ/с. При этом падение сечения в измеренном диапазоне достигало пяти порядков. Полученные результаты 4.7 подтверждают

универсальность формы скейлинговой функции $\Psi(z)$ и указывают на степенной режим поведения $\Psi(z)$ при $z > 4$.

4.4 Рождение заряженных адронов в $p+A$ столкновениях при больших p_T на У70

Экспериментальные данные были набраны в первом сеансе работы установки СПИН на ускорителе У70 (Протвино) [146]. Они существенно расширяют кинематический диапазон измерений проведенных другими группами, так как предоставляют данные по кумулятивному рождению заряженных частиц с большими поперечными импульсами. Протоны с импульсом $p_L = 50$ ГэВ/с налетали на мишень, после чего регистрировался вылет заряженных частиц под углом $\theta_{lab} = 35^\circ$ [146]. Для анализа доступны спектры в области $0.4 < p_T < 3.8$ ГэВ/с на четырех видах ядер-мишеней C , Al , Cu и W . На графике 4.9 представлены данные [146] по инклюзивным сечениям рождения положительно h^+ (а) и отрицательно h^- (б) заряженных адронов в зависимости от поперечного импульса p_T . Кумулятивная область соответствовала значениям поперечного импульса регистрируемого адрона $p_T > 2.5$ ГэВ/с. Из рис. 4.9 видно, что с ростом p_T сечения сильно падают для всех ядер. Отличие в значениях сечений достигает семи порядков при изменении импульса от $p_T = 0.5$ до 3.5 ГэВ/с. Из сравнения графиков можно установить различие выходов положительно и отрицательно заряженных частиц.

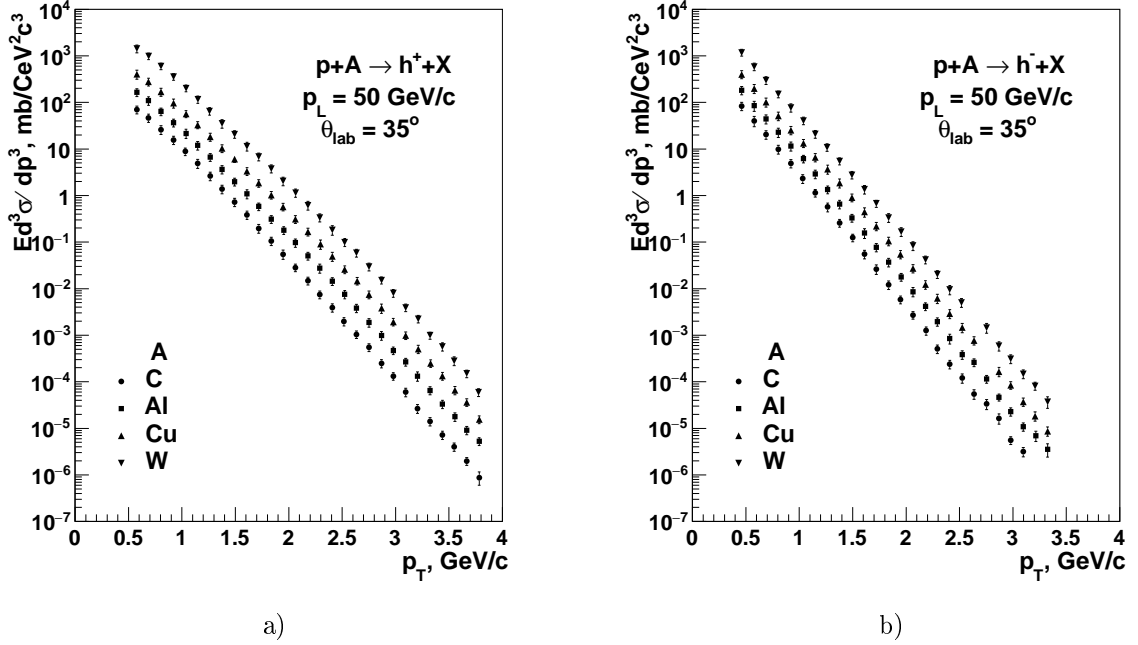


Рис. 4.9: Спектры положительно (а) и отрицательно (б) заряженных адронов, рожденных в $p + A$ столкновениях с ядерной мишенью при импульсе налетающего протона $p_L = 50$ ГэВ/с и угле вылета $\theta_{lab} = 35^\circ$ в зависимости от поперечного импульса инклюзивной частицы. Экспериментальные точки взяты из работы [146].

Экспериментальные данные по сечениям были пересчитаны в z -представление по описанной выше процедуре. Результаты представлены на графике 4.10. Из графика видно, что данные для положительных и отрицательных адронов, рожденных на разных мишенях, с высокой точностью описываются одной кривой. Угловая часть, описываемая фактором $\chi(\theta_{lab}, A)$, фиксировалась из условий нормировки функции в одной точке z . Найдены значения χ при $\theta_{lab} = 35^\circ$ приведены в таблице 4.3. Несмотря на обоснованность используемой процедуры, прямые измерения угловой зависимости плотности множественности заряженных адронов для данной энергии и различных ядер представляют значительный интерес для проверки z -скейлинга в более широком кинематическом диапазоне.

Полученные результаты подтверждают универсальность и энергетическую независимость формы скейлинговой функции, а также закон аддитивности для фрактальной размерности ядер в рождении адронов в $p + A$ столкновениях при больших поперечных импульсах в кумулятивной и некумулятивной областях.

Таблица 4.3: Коэффициенты угловой зависимости для разных типов ядер-мишеней

A	C	Al	Cu	W
h^+	1	1.5	2.5	4.4
h^-	1	1.3	1.9	3.2

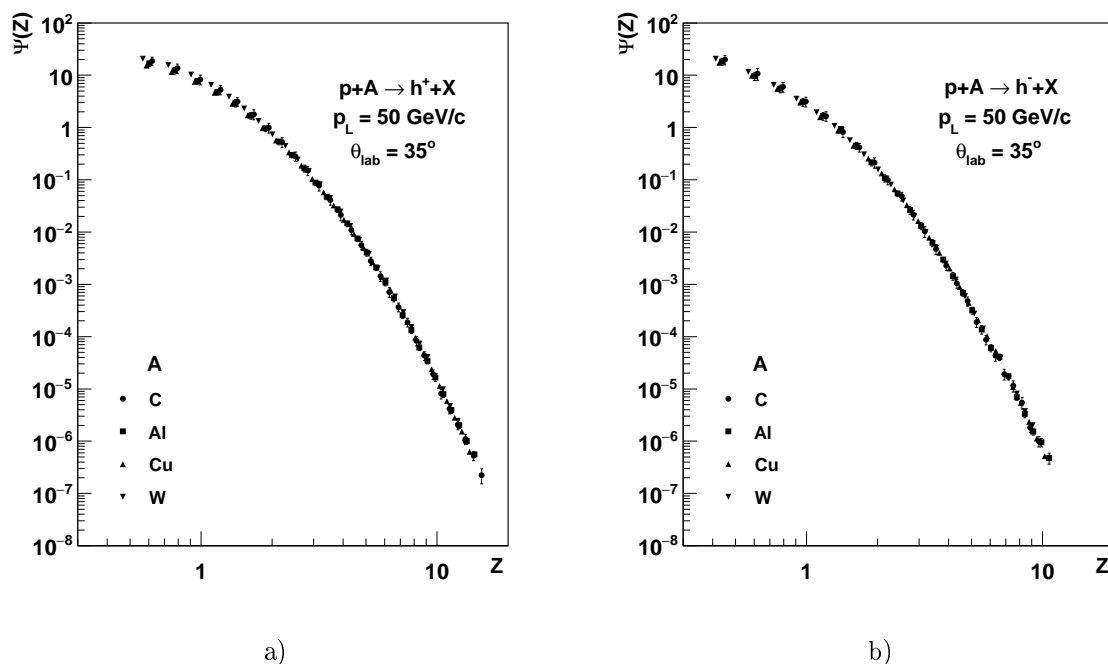


Рис. 4.10: Спектры положительно (а) и отрицательно (б) заряженных адронов в z -представлении. Экспериментальные точки взяты из работы [146].

4.4.1 Кинематика подпроцесса в переменных x_1, x_2

В рамках развиваемого подхода кинематика подпроцесса при рождении инклюзивной частицы в $p + A$ взаимодействиях описывается в терминах долей импульсов x_1 и x_2 , уносимых конститuentами. Самоподобие $p + A$ взаимодействия на уровне конститuentов проявляется в том, что все величины характеризующие этот процесс являются безразмерными. Постоянство фрактальных размерностей протона δ и ядра δ_A дает основание считать постоянным и механизм их взаимодействия на измеренных масштабах. Можно предположить, что изменение этой структуры, т.е. изменением типа конститuentов, будет сопровождаться и изменением вида взаимодействия. Поэтому продвижение в область $x_1, x_2 \rightarrow 1$ представляет значительный интерес, так как связано экстремальными условиями, при которых может существовать ядерная материя.

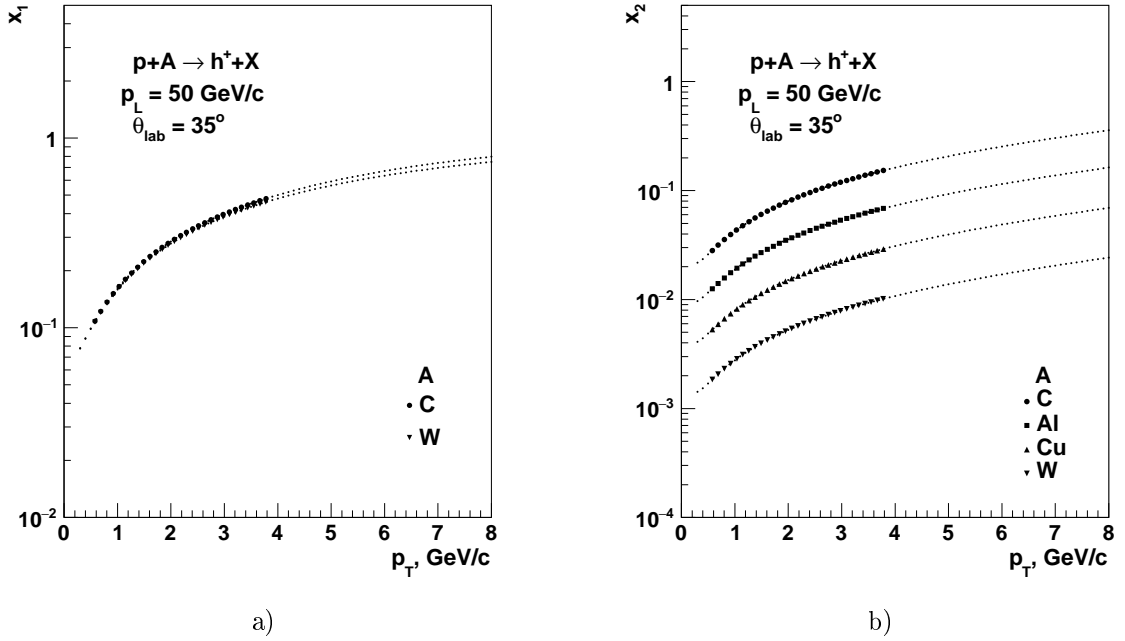


Рис. 4.11: Зависимость долей x_1 (a) и x_2 (b) от импульса p_T для рождения отрицательно заряженных адронов h^+ в $p + A$ столкновениях при импульсе протона $p_L = 50$ ГэВ/с и угле регистрации инклюзивной частицы $\theta_{lab} = 35^\circ$.

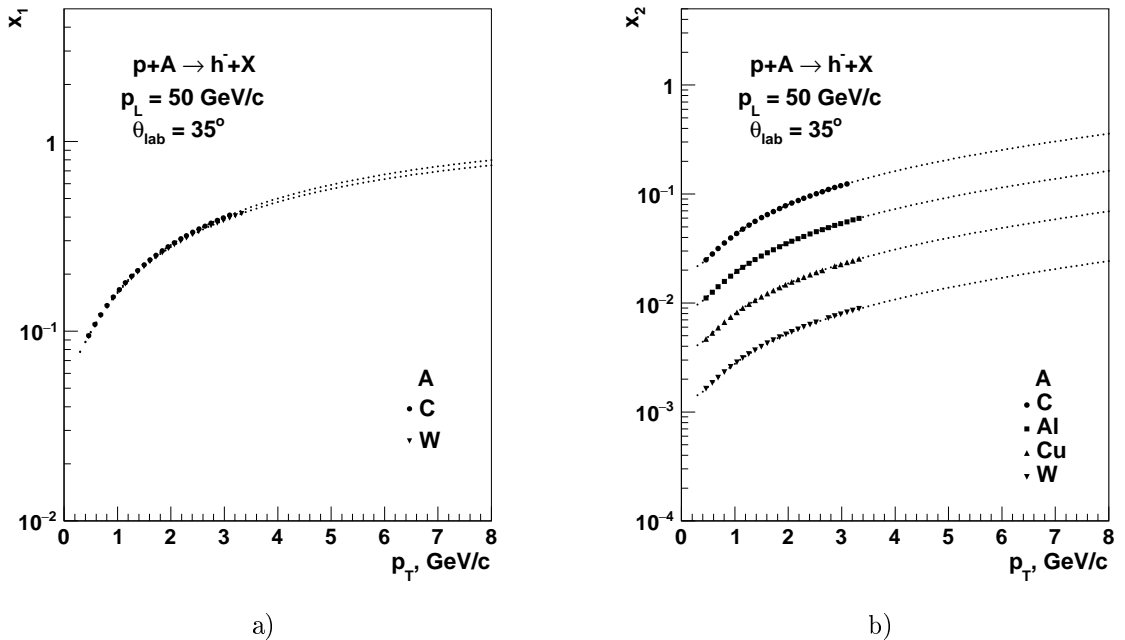


Рис. 4.12: Зависимость долей x_1 (a) и x_2 (b) от импульса p_T для рождения положительно заряженных адронов h^- в $p + A$ столкновениях при импульсе протона $p_L = 50$ ГэВ/с и угле регистрации инклюзивной частицы $\theta_{lab} = 35^\circ$.

На графиках 4.11 и 4.12 показана зависимость величин x_1 (а) и x_2 (б) от поперечного импульса p_T для рождения положительно h^+ и отрицательно h^- заряженных адронов в $p + A$ столкновениях при импульсе налетающего протона $p_L = 50$ ГэВ/с и угле регистрации инклюзивной частицы $\theta_{lab} = 35^\circ$. Из рис. 4.11 и 4.12 видно, что доли x_1 и x_2 увеличиваются с ростом импульса частицы. Некумулятивная область соответствует диапазону $x_2 < 1/A$.

Выводы: В рамках метода z -скейлинга были проанализированы три набора экспериментальных данных по кумулятивному рождению заряженных частиц в столкновениях протонов с ядрами при импульсах налетающих протонов $p_L = 18, 50, 58$ и 400 ГэВ/с и углах регистрации инклюзивных частиц $\theta_{lab} = 35^\circ, 70^\circ, 90^\circ, 118^\circ, 159^\circ$ и 160° на различных ядрах-мишенях. Для каждого набора данных была построена скейлинговая функция $\Psi(z)$ для этих взаимодействий. Она интерпретируется как плотность вероятности рождения инклюзивной частицы с определенным значением параметра подобия z . Параметр подобия обладает свойством фрактальной меры. Параметры модели δ_1, δ_2 имеют смысл фрактальных размерностей сталкивающихся частиц (протона и ядра). Ожидалось, что в некумулятивной и кумулятивной областях механизм рождения частиц будет отличаться, что могло проявиться в различии фрактальных размерностей δ_A для ядер и в изменении поведения скейлинговой функции в области больших z . Результаты проведенного исследования по проверке z -скейлинга на основе анализа экспериментальных данных по инклюзивным сечениям рождения заряженных адронов в $p + A$ столкновениях не выявили сигнатур фазовых переходов в данной кинематической области.

Глава 5

Спектры рождения пионов в глубоко-кумулятивной области в $p + A$ столкновениях

Результаты исследований инклюзивных спектров рождения адронов в $p + A$ взаимодействиях в кумулятивной области, полученные в экспериментах группами Г.А. Лексина [144], Л.С. Золина [145] и В.А. Гапиенко [146], и их сравнение с результатами измерений дифференциальных сечений по рождению адронов с большими поперечными импульсами в некумулятивной области, полученными в экспериментах групп Д. Кронины [140], Р. Суляева [143] и Д. Джаффе [142] подтвердили универсальность формы скейлинговой функции $\Psi(z)$ в широком диапазоне изменений кинематических переменных. Поэтому имеется возможность, как было продемонстрировано в предыдущих разделах работы, использовать полученную кривую для расчетов сечений рождения частиц при других кинематических условиях. С практической точки зрения задача сводится к выбору формы фитирующей функции, которая бы наиболее точно воспроизводила особенности установленной зависимости $\Psi(z)$: асимптотическое поведение при малых ($z \rightarrow 0$) и больших ($z \rightarrow \infty$) значениях параметра подобия. Эти асимптотики соответствуют постоянным значениям параметра наклона $\beta = -d \lg \Psi / d \lg z$.

5.1 Форма импульсных спектров рождения частиц

Для описания инклюзивных спектров рождения частиц популярны различные распределения:

степенной закон

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \frac{\sigma_{in}}{\pi} \frac{dN}{dy}(\eta) \frac{2(n-1)(n-2)}{(n-3)^2 \langle p_T \rangle^2} \left(1 + \frac{2p_T}{\langle p_T \rangle (n-3)}\right)^{-n} \quad (5.1)$$

функция Леви

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \frac{\sigma_{in}}{\pi} \frac{dN}{dy}(\eta) \frac{(n-1)(n-2)}{2nT[m_1(n-2) + nT]} \left(1 + \frac{m_T - m_1}{nT}\right)^{-n} \quad (5.2)$$

экспоненциальная функция

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \frac{\sigma_{in}}{\pi} \frac{dN}{dy}(\eta) \frac{1}{2T(m_1 + T)} \exp\left[-\frac{m_T - m_1}{T}\right] \quad (5.3)$$

функция Больцмана

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = \frac{\sigma_{in}}{\pi} \frac{dN}{dy}(\eta) \frac{m_T}{2T(m_1^2 + 2m_1T + 2T^2)} \exp\left[-\frac{m_T - m_1}{T}\right]. \quad (5.4)$$

Некоторым параметрам придается физический смысл: p_T - поперечный импульс, $\langle p_T \rangle$ - средний поперечный импульс, m_1 - масса регистрируемой частицы, $m_T = \sqrt{m_1^2 + p_T^2}$ - поперечная масса, T - температура.

В целой серии работ [152]-[154] для описания спектров рождения различных частиц (π , K , K_S^0 , \bar{p} , Λ , ϕ , ...) в протон-протонных и протон-ядерных взаимодействиях в широком диапазоне энергий и центральностей столкновения (SPS, RHIC, LHC), поперечных импульсов используется функция распределения Цаллиса [155]-[159] в виде:

$$E \frac{d^3N}{dp^3} = gV E \frac{1}{(2\pi)^3} \left[1 + (q-1) \frac{E - \mu}{T}\right]^{-q/(q-1)}. \quad (5.5)$$

В этом выражении T , μ , V , g являются свободными параметрами, которые находятся из фита экспериментальных сечений. Им придается смысл температуры, химического потенциала, объема и фактора вырождения. Исследуя зависимость этих параметров от энергии столкновения - $q(s)$, $V(s)$, $T(s)$, $\mu(s)$, и аппроксимируя эту зависимость в экспериментально доступном диапазоне гладкими функциями, предсказываются выходы частиц при более высоких энергиях.

Столкновения протонов и ядер высоких энергий сопровождаются множественным рождением частиц. Для описания многочастичных систем основным методом

является термодинамический подход. В рамках этого подхода понятие энтропии, введенное Клаузиусом, сыграло фундаментальную роль в дальнейшем развитии как классической, так и квантовой термодинамики многочастичных систем. Больцман показал, что энтропия выражается через вероятности микроканонических конфигураций системы. Выраженная в форме $S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$, она известна как энтропия Больцмана-Гиббса. Здесь k - постоянная Больцмана, p_i вероятности, соответствующие W микроскопическим конфигурациям, и $\sum_{i=1}^W p_i = 1$. Она составила основу для статистической механики Больцмана-Гиббса. Важным свойством этой энтропии для системы, состоящей из вероятностно-независимых подсистем (например, двух A и B), является ее аддитивность, т.е. $S_{BG}(A + B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B)$. В случае, если система состоит из большого числа N одинаковых независимых или не сильно скоррелированных подсистем, то аддитивность гарантирует, что энтропия является экстенсивной, т.е. $S_{BG}(N) \propto N$ при $N \gg 1$. Для системы, состоящей из N сильно скоррелированных подсистем, это свойство не выполняется. Оно не совместимо с базовыми предположениями классической термодинамики.

Одним из важных результатов, полученных на RHIC и подтвержденных на LHC в рождении адронов (π , K , ϕ , ...) в столкновениях тяжелых ионов, является поведение фактора ядерной модификации в зависимости от поперечного импульса регистрируемой частицы [160], [161]. Было установлено, что отношение выходов частиц в центральных ядро-ядерных столкновениях и в протон-протонных соударениях, при больших ($p_T > 4$ ГэВ/с) поперечных импульсах подавлено примерно в пять раз. Эта закономерность получила название "гашение струй" (jet quenching). Эта и другие закономерности (скейлинг в поведении эллиптического потока, $\Delta\phi - \Delta\eta$ корреляции (ridge effect), отношения выходов частиц и античастиц, барионов и мезонов, ...) привели к заключению, что в центральных столкновениях ядер образуется многочастичная сильновзаимодействующая система, по своим свойствам больше напоминающая идеальную жидкость, чем разреженный, слабовзаимодействующий газ кварков и глюонов. Поэтому обоснованность применения термодинамики, в которой присутствует аддитивность энтропии, вызывает сомнения для описания таких систем.

В оригинальной работе К. Цаллиса [155] (см. приложение Б) было предложено обобщение статистики Больцмана-Гиббса для описания систем, в которых отсутствует аддитивность энтропии. Это обобщение связано с введением новой формы

энтропии или энтропии Цаллиса $S_q = k(1 - \sum_{i=1}^W p_i^q)/(q-1)$. Для значений параметра $q \neq 1$ энтропия S_q неаддитивна. Установлено, что для некоторого множества значений q_{ent} , энтропия неаддитивна, но сохраняется ее экстенсивность, т.е. $S_q^{ent}(N) \propto N$ при $N \gg 1$ и применимость выражений классической термодинамики обоснована. Выражение для S_q переходит в выражение для энтропии Больцмана-Гиббса при $q \rightarrow 1$ и $S_1 \equiv S_{BG}$. Для достаточно сложных систем, в которых могут существовать сильные корреляции, экстенсивность нарушена при любых возможных значениях q , характеризующих эти системы.

Хорошо известно, что общие концепции при описании критических явлений связаны с такими понятиями как "скейлинг" и "универсальность". Скейлинг означает, что поведение системы вблизи критической точки проявляет свойство самоподобия, т. е. инвариантно по отношению к масштабным преобразованиям. Термодинамические потенциалы являются однородными функциями безразмерных величин, которые являются параметрами подобия. Универсальность означает, что достаточно различные системы вблизи критической точки проявляют сходное поведение, т. е. характеризуются одними критическими показателями. Поиск фазовых переходов в ядерной материи предполагает, что основные закономерности поведения многочастичных систем должны проявиться и в рождении частиц в столкновениях с участием ядер. Поэтому подход, основанный на теории z -скейлинга, представляется адекватным для поиска сигнатур фазовых переходов и критической точки в $p+A$ столкновениях. Считается, что переход от адронных к кварк-глюонным степеням свободы вблизи критической точки должен сопровождаться большими флуктуациями, корреляциями и резкими изменениями некоторых физических величин, характеризующих систему. Кроме того, в описании процесса взаимодействия протонов и ядер должны присутствовать элементы, связанные с термодинамическими понятиями, например, функции распределения.

5.2 Форма $\Psi(z)$ и функция распределения Цаллиса

Одной из особенностей z -скейлинга является универсальность формы скейлинговой функции $\Psi(z)$. Это свойство было установлено для рождения адронов в $p+A$ столкновениях при высоких энергиях, как в некумулятивной [25], так и в кумулятивной [147]-[150] областях для заряженных адронов в $p+A$ столкновениях и работе [151] для $p+p$ столкновений. Она трактуется как самоподобие процесса адронизации.

Практическая ценность универсальности формы скейлинговой функции заключается в возможности проводить расчеты инклюзивных спектров рождения адронов как в той кинематической области, в которой проводились измерения, так и в области, которая пока не доступна для экспериментальных исследований.

В ходе анализа было обнаружено, что наилучшей функцией для описания спектров в z -представлении является функция Цаллиса [155]-[159]. Эта функция уже использовалась при фитировании экспериментальных спектров инклюзивных частиц полученных на LHC и RHIC. Анализ спектров рождения частиц в $p+p$ и $p+A$ столкновениях на LHC показал [162], что значение величины q несколько превышает единицу, 1.12-1.16, а T попадает в диапазон 75-83 МэВ. В данной работе был использован следующий вид функции Цаллиса для аппроксимации скейлинговой функции $\Psi(z)$:

$$\Psi(z) = C \cdot \left[1 + \frac{(q-1) \cdot z}{T} \right]^{1/(1-q)}. \quad (5.6)$$

В этом случае ее асимптотическое поведение определяется как: $\Psi(z) \rightarrow C$ при $z \rightarrow 0$ и $\Psi(z) \rightarrow z^{1/(1-q)}$ при $z \rightarrow \infty$. Все параметры данной фитирующей функции являются безразмерными. Следуя процедуре, предложенной в работах [147]-[149], фитирование проводится при двух свободных параметрах C и T и фиксированном значении q равном 1.080. Это значение было получено из фита данных некумулятивно-го рождения [140]-[143]. Данный параметр отвечает за асимптотическое поведение функции и, как видно из приложения Б, является "мерой неаддитивности" термодинамической системы. Резкое изменение данного параметра является указанием на наличие критических явлений в описываемых системах. Значения параметров фита функцией Цаллиса данных по кумулятивному рождению [144]-[146] приведены в таблице 5.1. Параметр q , определяющий асимптотическое поведение $\Psi(z)$, определяется значениями фрактальных размерностей протона δ и ядра $\delta_A = A\delta$. Поэтому, резкие изменения δ или аддитивного закона для δ_A , рассматриваемые как указание на наличие фазового перехода, несомненно проявятся и в изменении значения параметра q . Физическая интерпретация безразмерного параметра T как "безразмерной температуры" не столь очевидна.

Зависимость функции $\Psi(z)$ была использована для установления параметров фита. За основу были взяты данные сечений реакции pD при импульсах налетающего протона $p_L = 70, 400$ ГэВ/с в z -представлении. На рисунке 5.1 представлены результаты. Как видно из графика 5.1 а), экспериментальные точки некумулятив-

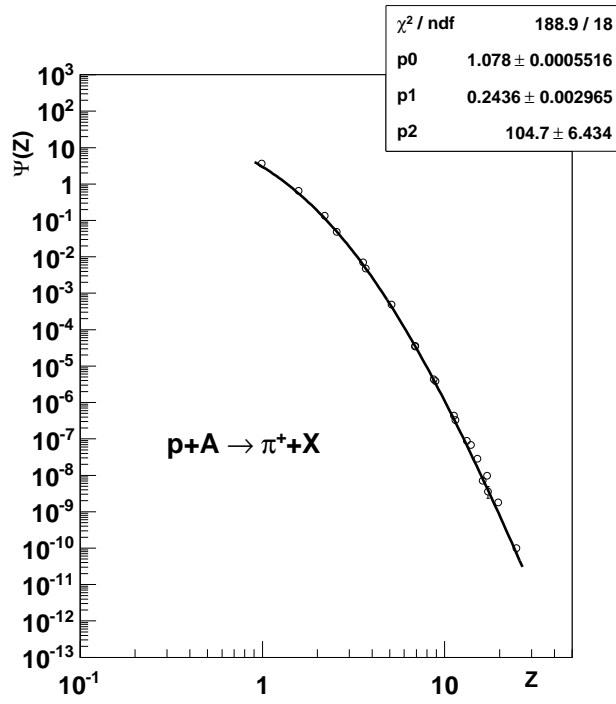
ного рождения пионов не вполне позволяют установить асимптотическое поведение в области малых z . В связи с этим было решено скомбинировать данные с данными кумулятивного рождения пионов в реакции $pGa \rightarrow \pi^+ + X$ при $p_L = 400$ ГэВ/с из эксперимента [144]. Использование именно танталовой мишени обусловлено наименьшими статистическими ошибками. Таким образом параметр q , отвечающий за асимптотическое поведение функции, был фиксирован на значении 1.080.

Полученная в результате фита комбинированных данных параметризация $\Psi(z)$ в виде q -экспоненты Цаллиса была использована для экстраполяции скейлинговой функции в более широкий интервал z и для расчета инклюзивных сечений рождения частиц в $p + A$ столкновениях для расширенной кинематики экспериментов Г. Лексина, Л. Золина и В. Гапиенко. Результаты предсказательных расчетов дают оценки сечений рождения пионов в глубоко-кумулятивной области. Поскольку расчеты инклюзивных спектров сделаны с параметрами модели, которые подтверждали универсальность формы $\Psi(z)$ и закон аддитивности для фрактальной размерности ядра $\delta_A = A\delta$, то возможное отклонение от предсказанного поведения инклюзивных сечений могло бы свидетельствовать о новых эффектах, например, фазовых переходах, проявляющихся при рождении адронов в сжатой ядерной материи.

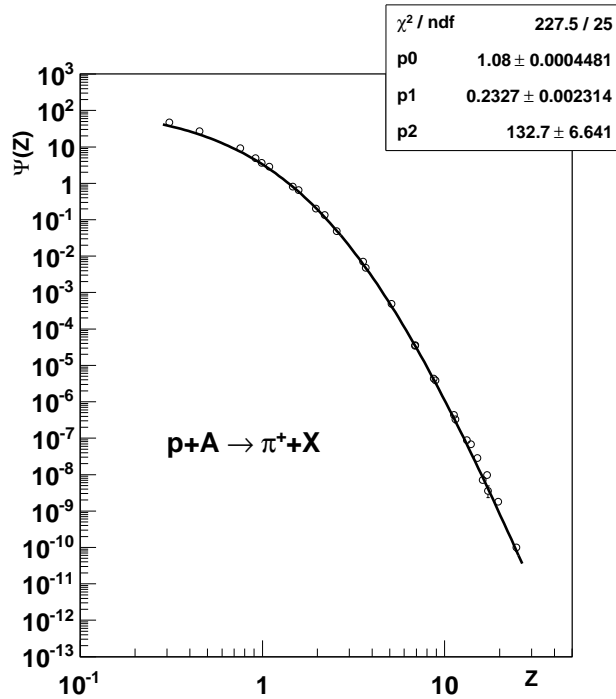
Таблица 5.1: Значения параметров фитирующей функции для различных экспериментальных данных.

адрон	π^-	π^+	h^-	h^+
$p_L = 18$, ГэВ/с	$T = 0.247$, $C = 5.6$	$T = 0.237$, $C = 3.5$		
$p_L = 50$, ГэВ/с			$T = 0.219$, $C = 143$	$T = 0.301$, $C = 155$
$p_L = 58$, ГэВ/с	$T = 0.185$, $C = 9.2$	$T = 0.166$, $C = 7.3$		
$p_L = 400$, ГэВ/с		$T = 0.232$, $C = 133$		

После того, как для каждого набора данных были получены оптимальные значения параметров функции Цаллиса, стало возможным продлить функцию на область за пределами экспериментальных данных. Основным интерес здесь представляла область больших z , в которой ожидается большая степень кумуляции ядерной материи. Далее, был сделан обратный пересчет зависимости $\Psi(z)$ в зависимость $Ed^3\sigma/dp^3$ от p_T (или p). Результат представлен на графиках 5.2, 5.3 и 5.4 в ви-



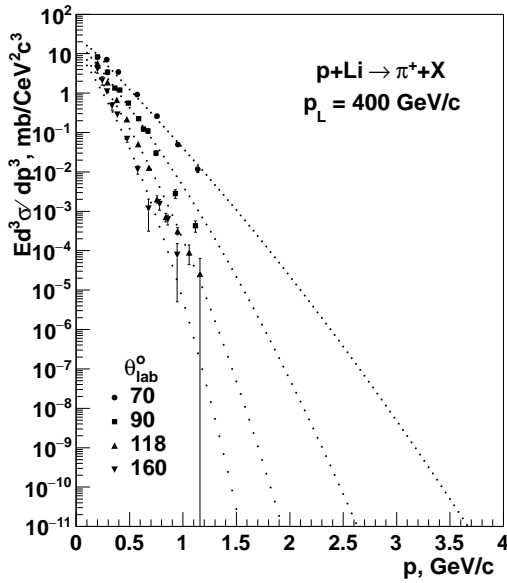
a)



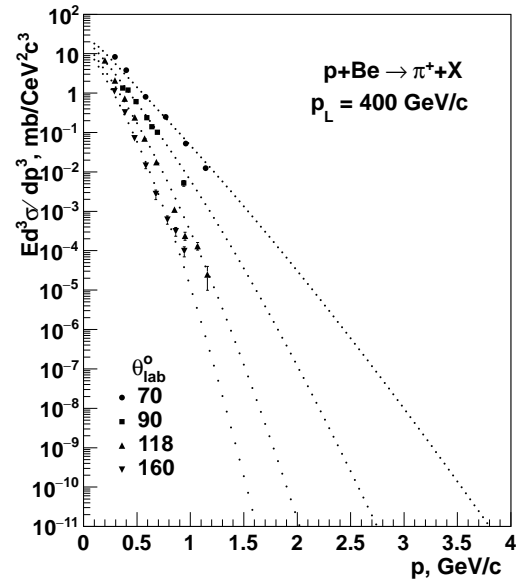
b)

Рис. 5.1: Фит данных рождения инклюзивных частиц в реакции $pD \rightarrow \pi^+ + X$ при импульсах налетающего протона $p_L = 70, 400$ ГэВ/с в некумулятивной области а) и фит комбинированных данных $pD \rightarrow \pi^+ + X$ и $pTa \rightarrow \pi^+ + X$ при импульсах налетающего протона $p_L = 70, 400$ ГэВ/с б).

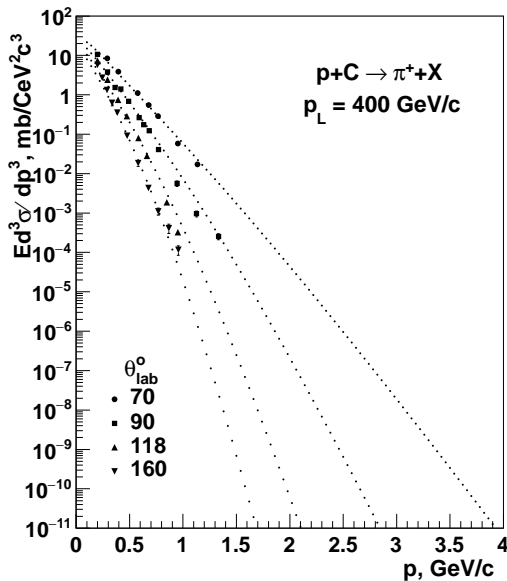
де пунктирной кривой, наложенной на экспериментальные точки. Следует особо отметить, что предсказание поведения сечений рождения инклюзивных частиц в $p + A$ столкновениях сделано в предположении **отсутствия** критических явлений в рассмотренной кинематической области. Таким образом, отклонение от предсказанного поведения инклюзивных сечений является сильным указанием на наличие неучтенных эффектов, в частности, фазового перехода.



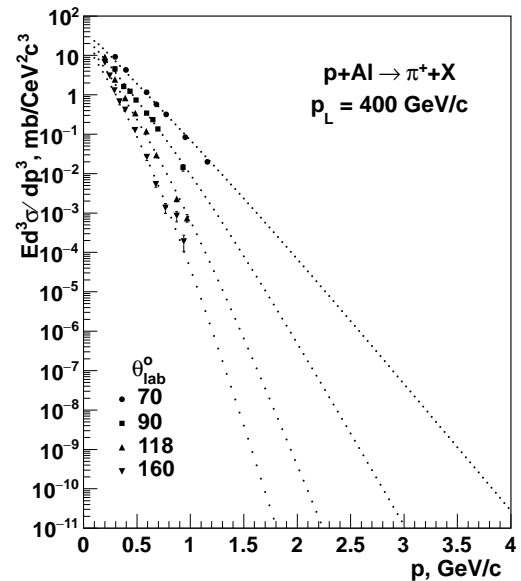
a)



b)



c)



d)

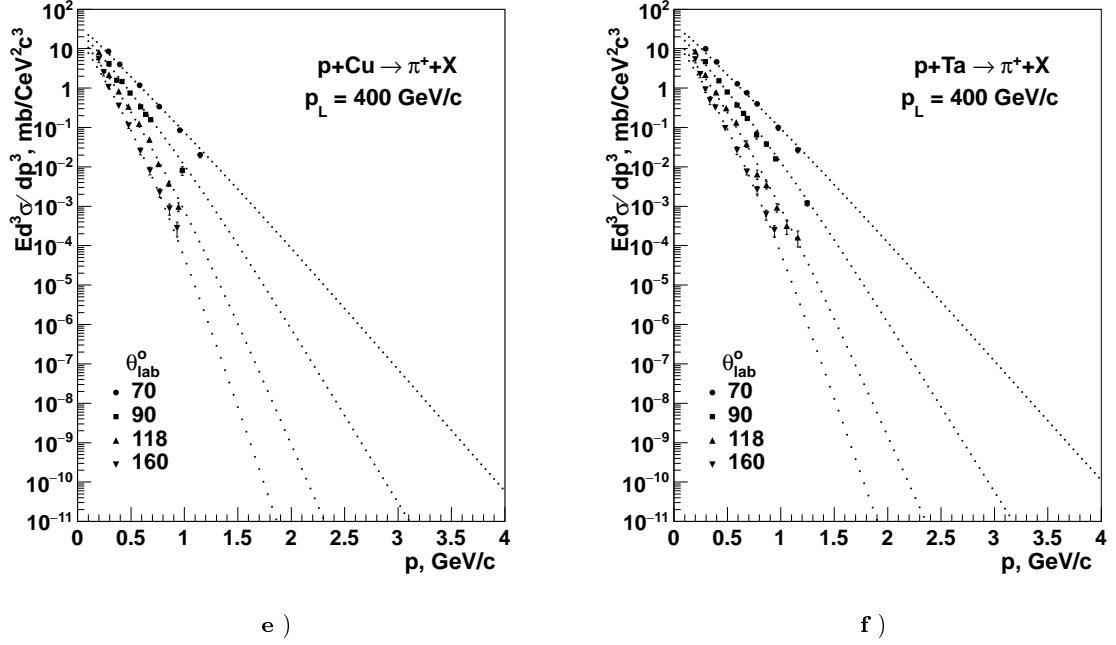
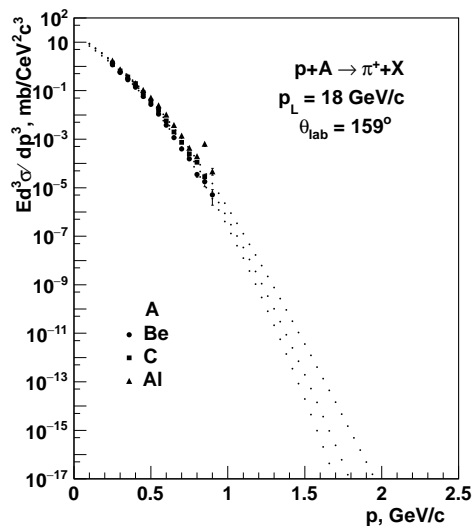


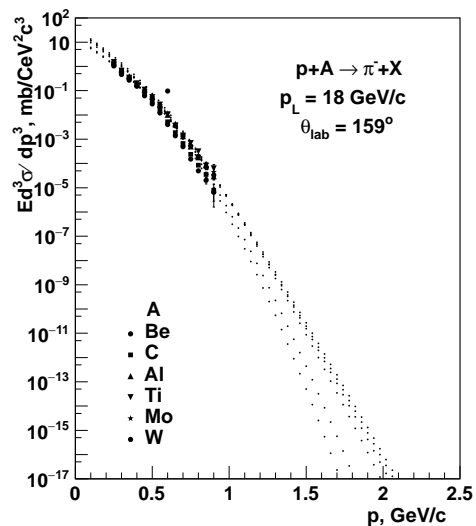
Рис. 5.2: Спектры положительно заряженных пионов π^+ для глубококумулятивного рождения, посчитанные на основе z -скейлинга для эксперимента Лексина

На графиках 5.5, 5.6 и 5.7 приведено отношение экспериментальных сечений к полученным на основе модели z -скейлинга. Видно, что, даже без учета ошибок, это отношение не превышает значение 2.

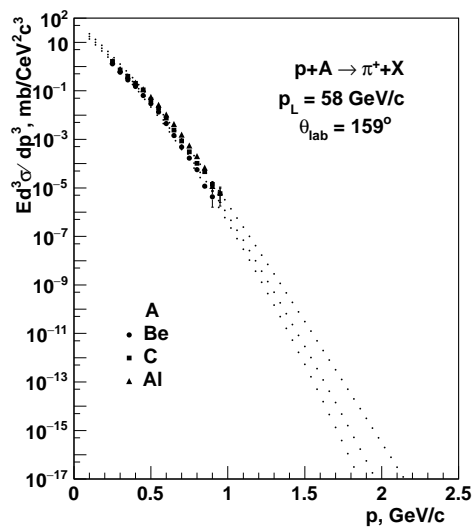
Выводы: Предложена процедура параметризации скейлинговой функции $\Psi(z)$ на основе анализа комбинированного набора экспериментальных данных по инклюзивным сечениям, соответствующим рождению частиц в $p + A$ столкновениях в кумулятивной и некумулятивной областях с большими и малыми поперечными импульсами. Получена параметризация скейлинговой функции $\Psi(z)$ в виде функции распределения Цаллиса и отмечена связь параметра неаддитивности энтропии q с фрактальными размерностями протона и ядра. Проведены предсказательные расчеты скейлинговой функции в широкой области значений переменной z , представляющие интерес для проверки асимптотического поведения $\Psi(z)$ при малых и больших z . Также сделано предсказание зависимости сечений от импульсов инклюзивных частиц для расширенной области импульсов в кинематике исследованных экспериментов.



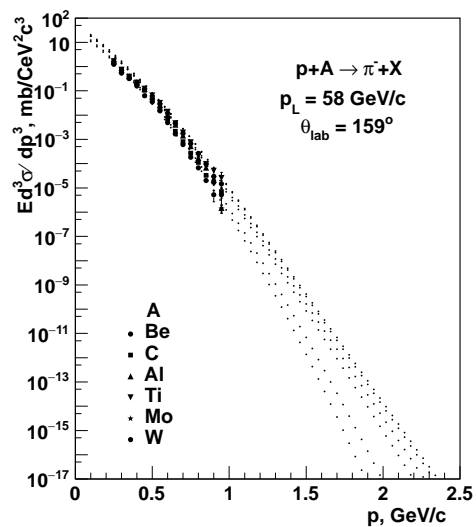
a)



b)



c)



d)

Рис. 5.3: Спектры пионов заряженных положительно π^+ а), с) и отрицательно π^- б), д) для глубоко-кумулятивного рождения, посчитанные на основе z -скейлинга для эксперимента Золина.

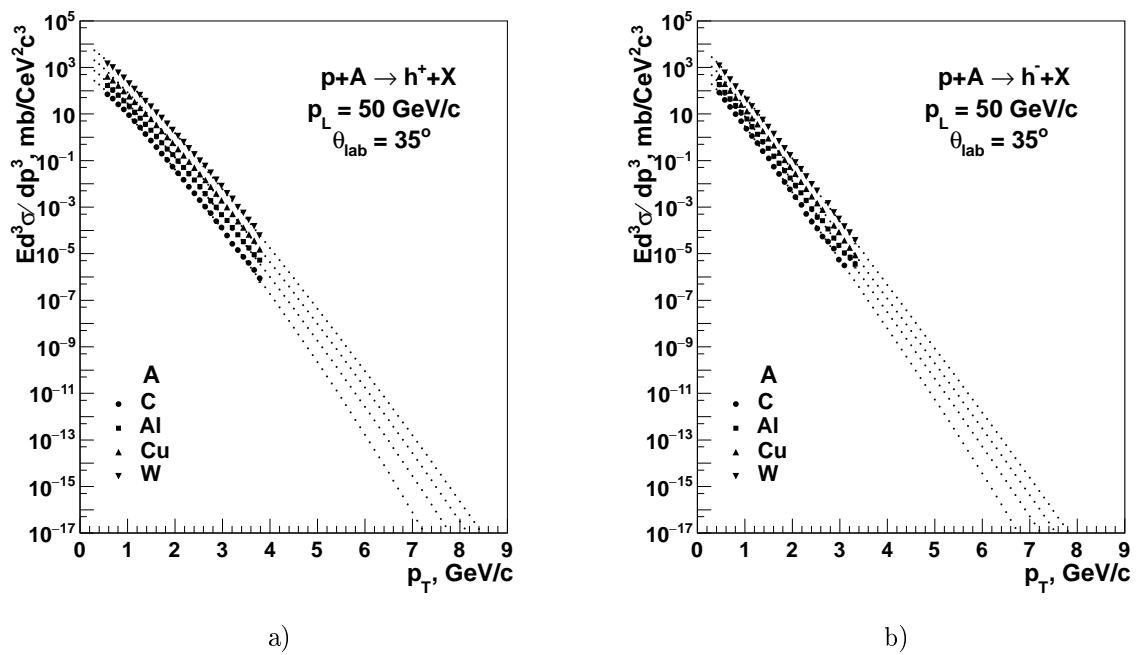
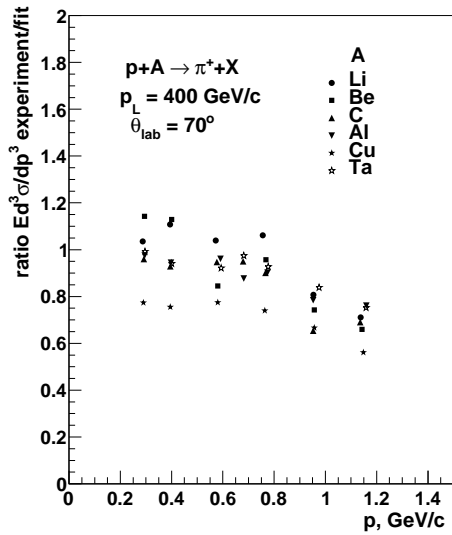
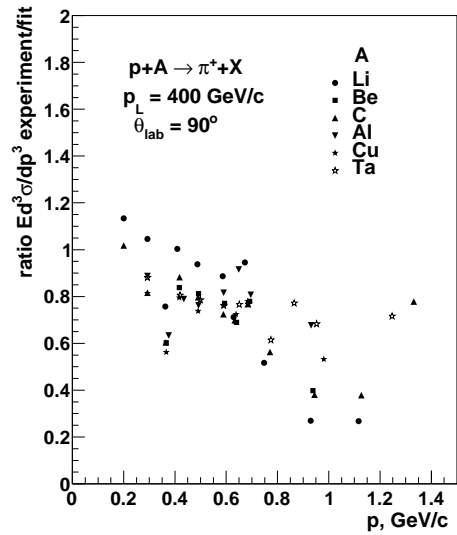


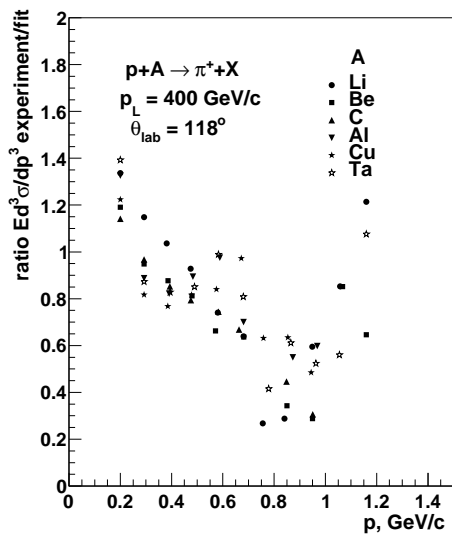
Рис. 5.4: Спектры положительно (а) и отрицательно (б) заряженных адронов с предсказанием поведения на глубоко-кумулятивную область, посчитанные на основе z -скейлинга для эксперимента Гапиенко.



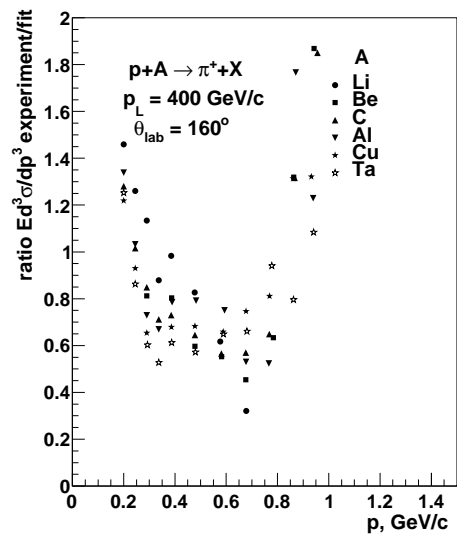
a)



b)

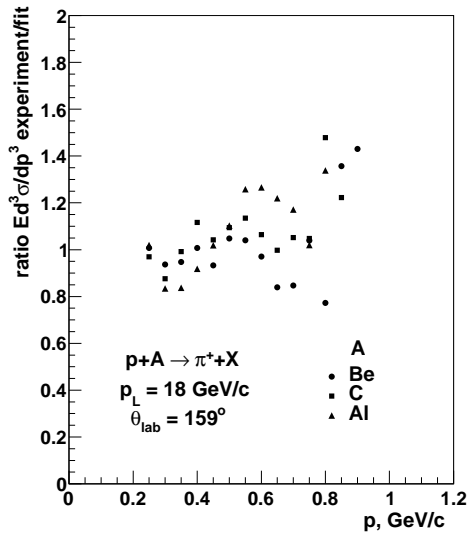


c)

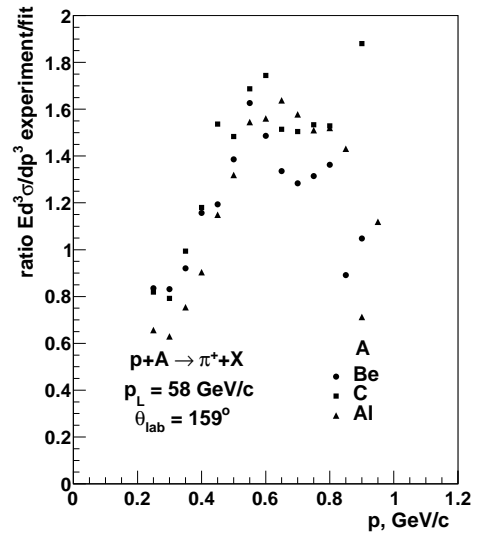


d)

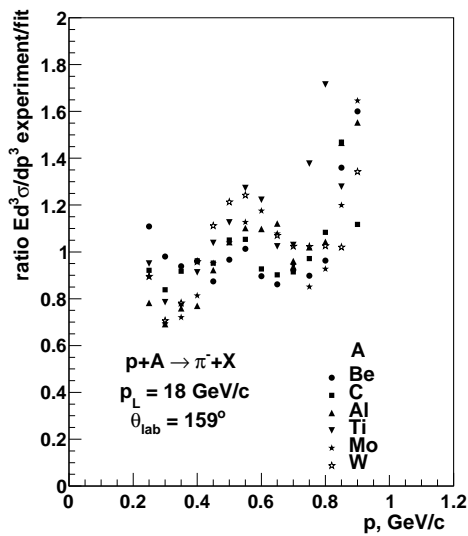
Рис. 5.5: Отношения сечений рождения пионов, полученных в эксперименте группой Лексина, к полученным на основании метода z -скейлинга.



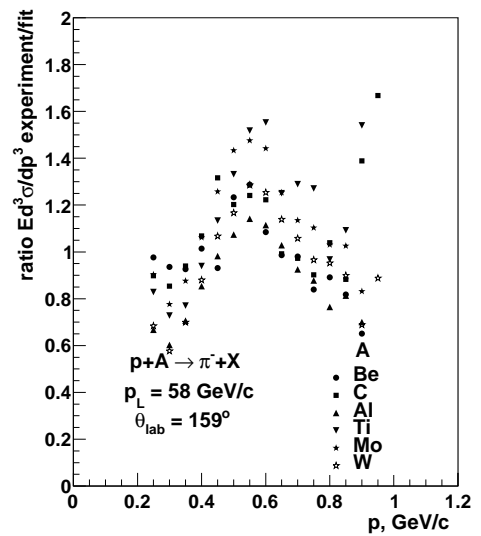
a)



b)

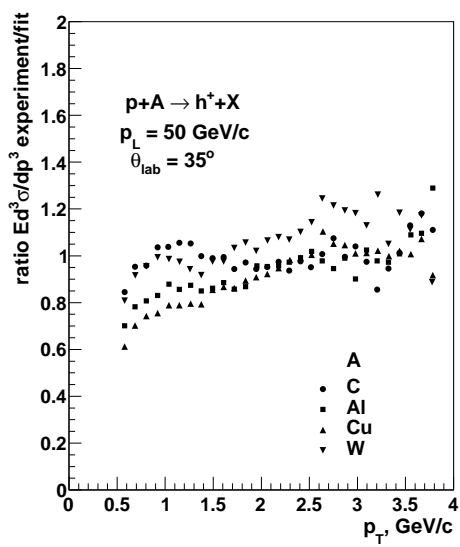


c)

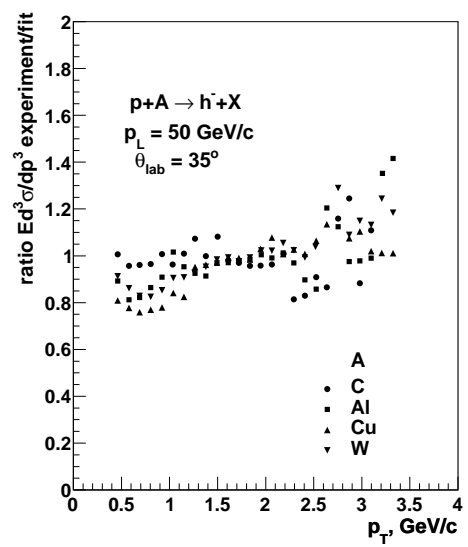


d)

Рис. 5.6: Отношения сечений рождения пионов, полученных в эксперименте группой Золина, к полученным на основании метода z -скейлинга.



a)



b)

Рис. 5.7: Отношения сечений рождения пионов, полученных в эксперименте группой Гапиенко, к полученным на основании метода z -скейлинга.

Глава 6

Предложение для эксперимента с фиксированной мишенью на установке STAR

Исследования, направленные на изучение фазовой диаграммы ядерной материи, т.е. определение фазовых границ, наличия критической точки, типов фазовых переходов на RHIC, привели к необходимости выполнить специальную программу - программу энергетического сканирования [18, 19, 163, 164]. Цель этой программы - используя возможности коллайдера RHIC по изменению энергии и характера столкновения ядер на первом этапе (BES-I), установить области, в которых проявляются сигнатуры фазовых переходов и положения критической точки, а затем, на втором этапе (BES-II), провести более прецизионное изучение свойств ядерной материи в этих областях, тем самым определив все характерные особенности фазовой диаграммы в переменных температура-химический барионный потенциал $T - \mu_B$. Такая информация необходима для понимания и описания свойств ядерного вещества в рамках теории КХД. Первый этап программы энергетического сканирования [18] закончился набором данных в столкновениях ядер золота при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 7.7, 11.5, 14.5, 19.6, 27$ и 39 ГэВ. Второй этап этой программы запланирован на 2018-2019 г. [163].

В работах [165]-[168] был проведен анализ инклюзивных спектров рождения адронов в $p + p$ и $Au + Au$ столкновениях на RHIC в рамках теории z -скейлинга. Результаты анализа не дали значимых указаний на существование сигнатур фазовых переходов и критической точки. Вместе с тем, были получены оценки потерь

энергии конститuentов в зависимости от энергии и центральности столкновения и поперечного импульса инклюзивной частицы. Импульсные спектры рождения частиц в этих работах не охватывали кумулятивную область. Даже при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ ГэВ выход в кумулятивную область затруднен в связи с возможностями детектора STAR по определению импульсов частиц при больших p_T . Во время первого этапа ПЭС на STAR были успешно проведены измерения спектров пионов в моде с фиксированной мишенью [18]. Эти пилотные эксперименты показали принципиальную возможность расширить ПЭС до энергии $\sqrt{s_{NN}} = 3.5$ ГэВ. В моде с фиксированной мишенью частицы регистрируются в диапазоне углов $\theta_{lab} < 90^\circ$. На установке STAR появилась возможность изучения нового класса событий в моде с фиксированной мишенью - это рождение адронов в кумулятивной области при фрагментации мишени [168]. В данном разделе рассматривается возможность изучения рождения заряженных пионов в $Au + Au$ столкновениях в эксперименте с фиксированной мишенью в кумулятивной области. Такая постановка эксперимента существенно расширяет область для поиска сигнатур фазовых переходов при рождении адронов в сжатой ядерной материи.

6.1 Кинематика изучаемых процессов

Как было отмечено ранее, одной из возможностей постановки эксперимента с фиксированной мишенью на установке STAR, спроектированной для работы в коллайдерной моде, является использование одного из пучков ускорителя и мишени расположенной в концевой части детектора. Кроме очевидного увеличения светимости при низких энергиях столкновений, подобный эксперимент предпочтителен для изучения кумулятивных процессов. На рис. 6.1 показаны схематически две принципиальные возможности изучения инклюзивных процессов с фиксированной мишенью - рождение частиц в переднюю (а) и заднюю (б) полусферы при взаимодействии частицы с импульсом P_1 с покоящейся мишенью P_2 . В первом случае изучаются частицы рожденные от фрагментации налетающего ядра, во-втором - частицы от фрагментации мишени.

На рис. 6.2 показаны кинематические границы для рождения пионов в $p + p$, $p + Au$ и $Au + Au$ взаимодействиях при различных энергиях столкновения $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 19.5$ ГэВ, вылетающих на большие углы в коллайдерной моде. В дальнейшем мы рассматриваем случай рождения частиц, образующихся при фрагментации мишени

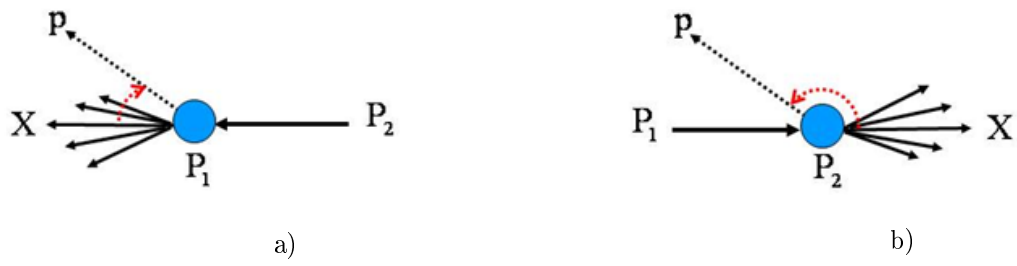
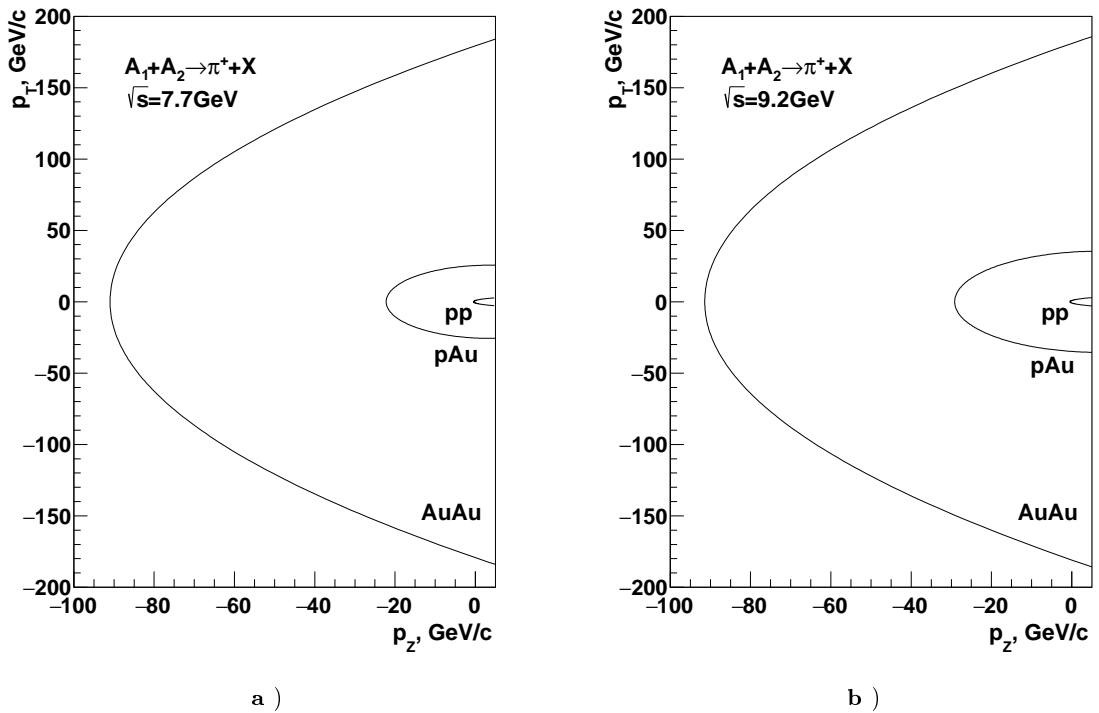


Рис. 6.1: Схема рождения инклюзивных частиц в переднюю а) и заднюю б) полушеры при взаимодействии налетающей частицы с импульсом P_1 и мишени с импульсом P_2 и вылетающих в заднюю полушферу на большие углы $90^\circ < \theta_{lab} < 180^\circ$.



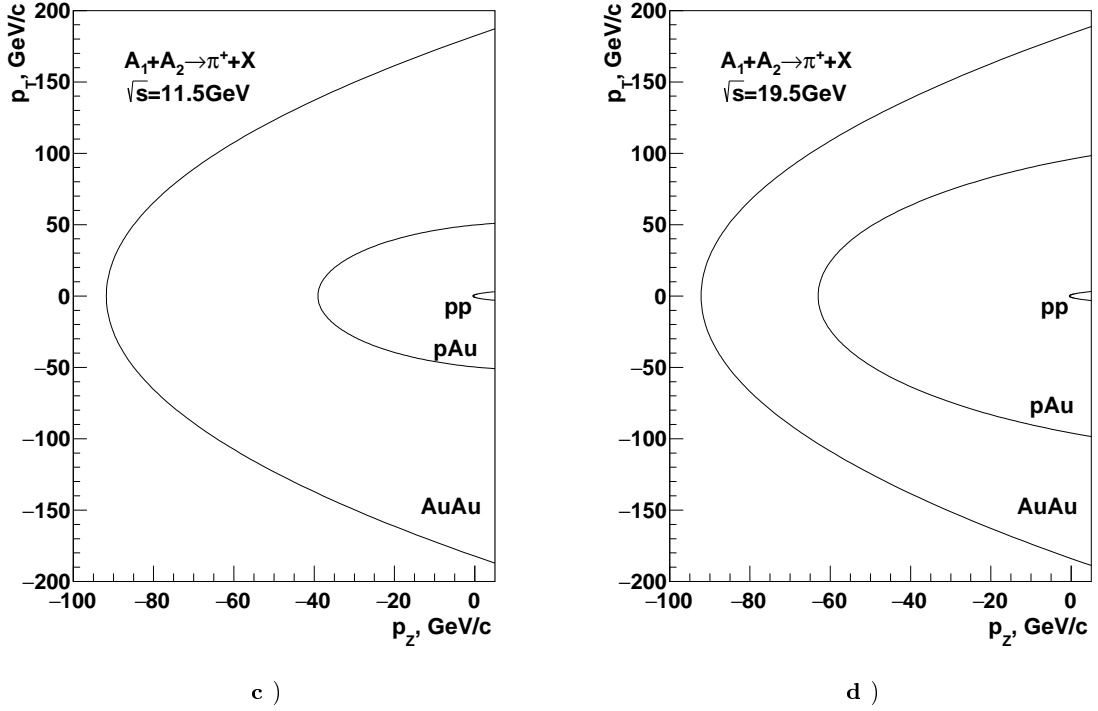


Рис. 6.2: Кинематические границы рождения положительно заряженных пионов в заднюю полусферу в столкновениях различных ядер при энергиях первой фазы энергетического сканирования на STAR при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 7.7, 9.2, 11.5, 19.5$.

Были построены кинематические границы для различных энергий столкновения и различных сталкивающихся ядер (рис. 6.2). Граница области $p + p$ столкновений определяет границу кумулятивного рождения частиц. Область между линиями $p + p$ и $p + d$ соответствует однократной куммуляции. Между $p + d$ и $d + d$ - двойной, и так далее. Было установлено, что импульс инклюзивной частицы в заднюю полусферу при стремлении энергии к бесконечности ограничен. Например, для пионов в $d + d$ столкновениях импульс стремится к $p_{max} = (M_d^2 - m_\pi^2)/2M_d$. Зависимость максимального импульса от атомного номера для тяжелых ядер может быть представлена в виде $p_{max} \approx Am_N/2$. Предполагается, что на соответствующей кинематической границе ядро полностью сжато и ведет себя как частица с размерами нуклона и массой всего ядра. Даже при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ ГэВ в центральной области псевдобыстрот $\eta \simeq 0$ практически невозможно достичь кумулятивной области. Энергетическая зависимость кинематических границ в диапазоне энергии столкновений $\sqrt{s_{NN}} = 7.7 - 19.6$ ГэВ достаточно слабая.

6.2 Обобщенная модель z -скейлинга

В работах [26, 27, 151, 168] предложен расширенный вариант формализма z -скейлинга для анализа инклюзивных спектров при высоких энергиях (Tevatron и RHIC) и показано его обобщение для ядро-ядерных столкновений. Основная причина обобщения была связана с тем обстоятельством, что при взаимодействии ядер высоких энергий существенную роль играет центральность столкновения и следовательно имеет место более сложная, чем в $p + p$ и $p + A$ взаимодействиях зависимость фрагментации от ядерной среды. В расширенной модели параметр подобия определяется следующим выражением:

$$z = z_0 \Omega^{-1}, \quad (6.1)$$

что совпадает с определением (2.5), однако величины z_0 и Ω определяются следующим образом:

$$z_0 = \frac{\sqrt{s_{\perp}}}{m_N (dN/d\eta|_{\eta=0})^c}, \quad (6.2)$$

$$\Omega(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1 - x_1)^{\delta_1} (1 - x_2)^{\delta_2} (1 - y_1)^{\epsilon_F} (1 - y_2)^{\epsilon_F}, \quad (6.3)$$

В этих выражениях введены дополнительные модельные параметры c , ϵ и величины y_1, y_2 . Параметр c имеет смысл "теплоемкости среды", образованной в столкновении ядер, а ϵ_F - фрактальной размерности процесса фрагментации. В элементарном подпроцессе выполняется закон сохранения 4-импульса:

$$(x_1 P_1 + x_2 P_2 - p/y_1)^2 = M_X^2, \quad (6.4)$$

где $M_X = (x_1 M_1 + x_2 M_2 + m_2/y_2)^2$ масса нерегистрируемой системы для подпроцесса. Взаимодействующие конститuenty обладают долями импульса x_1, x_2 от полных импульсов сталкивающихся объектов P_1, P_2 ; y_1, y_2 - доли импульса рожденных конститuentов, которые получают инклюзивная частица и система отдачи соответственно. Эти доли определяются из условия максимума величины $\Omega(x_1, x_2, y_1, y_2)$ (6.3), которое соответствует максимально достижимому разрешению подпроцесса при данных кинематических условиях. Все свойства z -скейлинга, описанные в главе 2, справедливы также и в этом случае. Структура сталкивающихся объектов описывается параметрами δ_1, δ_2 и предполагается, что формирование инклюзивной частицы и системы отдачи описывается одним параметром ϵ_F . Доли импульса x_1, x_2 могут быть представлены в виде:

$$x_1 = \lambda_1 + \chi_1 \quad x_2 = \lambda_2 + \chi_2, \quad (6.5)$$

где $\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}(y_1, y_2)$ и $\chi_{1,2} = \chi_{1,2}(y_1, y_2)$ однозначные функции y_1, y_2 . Это позволяет записать уравнение 6.3 в виде функции:

$$\Omega(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2), y_1, y_2) = F(y_1, y_2) \quad (6.6)$$

зависящей только от двух переменных y_1, y_2 . В работе [151] показано, что у данной функции существует единственный максимум в допустимой кинематической области. Скейлинговая функция $\Psi(z)$ определяется в этом случае также, как описано в главе 2 (2.22):

$$\Psi(z) = -\frac{\pi s}{(dN/d\eta)\sigma_{in}} J^{-1} E \frac{d^3\sigma}{dp^3}. \quad (6.7)$$

и удовлетворяет условию нормировки (2.24)

$$\int_0^\infty \Psi(z) dz = 1. \quad (6.8)$$

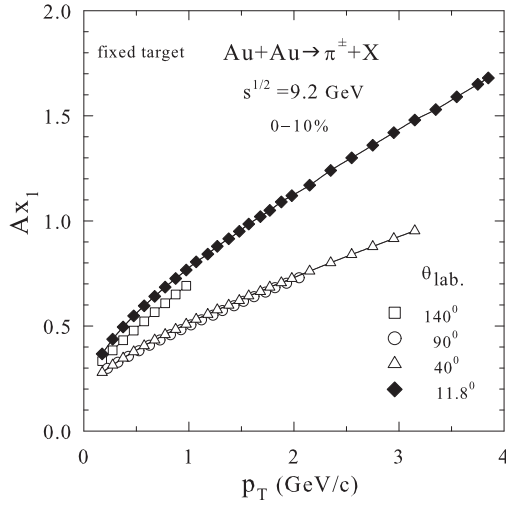
Физический смысл функции $\Psi(z)$ как плотности вероятности рождения частицы с заданным значением параметра подобия z сохраняется.

6.3 Кинематика кумулятивного рождения в эксперименте с фиксированной мишенью

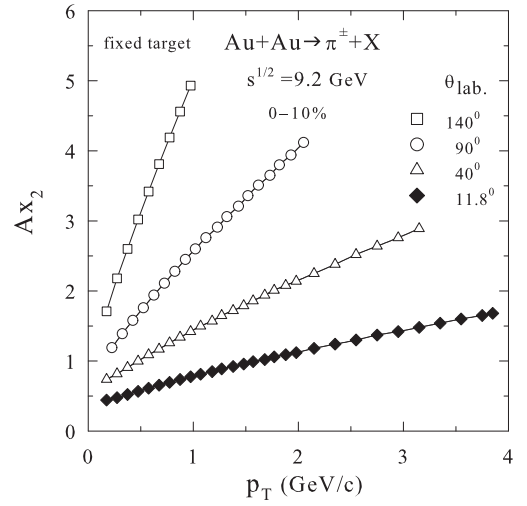
Возможность описания инклюзивных спектров адронов в $A+A$ столкновениях универсальной скейлинговой функцией $\Psi(z)$ накладывает ограничения на модельные параметры s , δ и ϵ_F . Предполагается, что резкие изменения фрактальных размерностей δ , ϵ_F и "удельной теплоемкости" s являются сигнатурами новых эффектов, например фазовых переходов. Однако, такое поведение модельных параметров, может быть "смазано" потерями энергии конститuentов в образующейся ядерной среде, особенно в центральных соударениях ядер. Рост ϵ_F с увеличением центральности соударения соответствует увеличению потерь энергии. Рост потерь энергии затрудняет поиск положения критической точки. Частично эту проблему можно обойти, переходя в кумулятивную область $x_1 A_1, x_2 A_2 > 1$. Это соответствует кумулятивному рождению частиц с большими поперечными импульсами. В рамках z -скейлинга предсказывается зависимость потерь энергии конститuenta от энергии и центральности столкновения, поперечного импульса, типа частицы [168]-[170]. Предполагается, что переход в кумулятивную область при фиксированной центральности является существенным условием для поиска фазовых переходов и положения критической точки.

Кумулятивная область $x_1 A_1, x_2 A_2 > 1$ достижима только при относительно низких энергиях. Уменьшение потерь энергии с увеличением поперечного импульса p_T значительно при низких энергиях в центральной области псевдобыстрот $x_1 A_1 \simeq x_2 A_2 > 1$ [171]. Кумулятивная область достижима также при фрагментации мишени $x_1 A_1 > 1, x_2 A_2 < 1$ или пучка $x_1 A_1 < 1, x_2 A_2 > 1$. Необходимые для рождения кумулятивных частиц в заднюю полусферу (фрагментация мишени) импульсы значительно меньше, чем при фрагментации в переднюю полусферу. В первом случае фон от фрагментации пучка уменьшается с ростом энергии. Это обстоятельство является основным преимуществом для изучения редких процессов - кумулятивного рождения в заднюю полусферу с большими поперечными импульсами, что принципиально возможно в программе энергетического сканирования на RHIC.

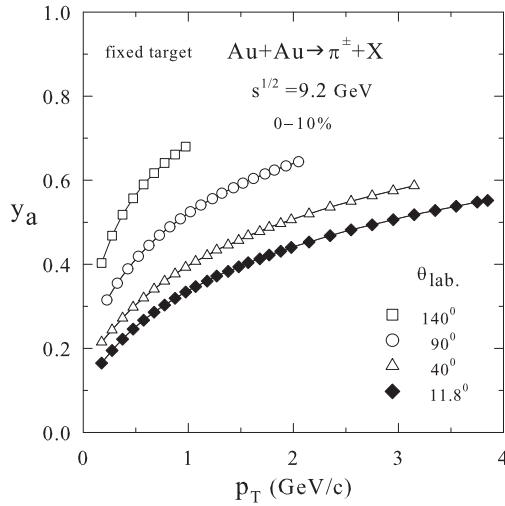
На рис. 6.3 показана зависимость долей импульсов x_1, x_2, y_1 и неригистрируемой массы M_X от поперечного импульса пиона, образующегося в центральных ($0-10\%$) столкновениях ионов золота при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$ ГэВ и углах $\theta_{lab} = 11.8^\circ - 140^\circ$. В этих расчетах используются значения фрактальных размерностей и "удельной теплоемкости", найденные в работе [168]. Угол в лабораторной системе $\theta_{lab} = 11.8^\circ$ соответствует $\theta_{cms} = 90^\circ$ в системе центра масс нуклон-нуклонного столкновения. Как видно из рис. 6.3 (а, б) доли импульсов x_1 и x_2 увеличиваются с ростом поперечного импульса p_T . Область двойной кумуляции соответствует диапазонам $x_1 A_1 > 1$ и $x_2 A_2 > 1$. Эта область достижима при $p_T \simeq 2$ ГэВ/с и $\theta_{lab} = 11.8^\circ$ в коллайдерной моде. Кумулятивные числа в этой симметричной кинематике равны друг другу. Кумуляция мишени (частица 2) увеличивается с ростом θ_{lab} . Поэтому мода с фиксированной мишенью наиболее подходит для изучения сильно сжатой ядерной материи (кумуляция мишени), особенно при рождении частиц при больших углах.



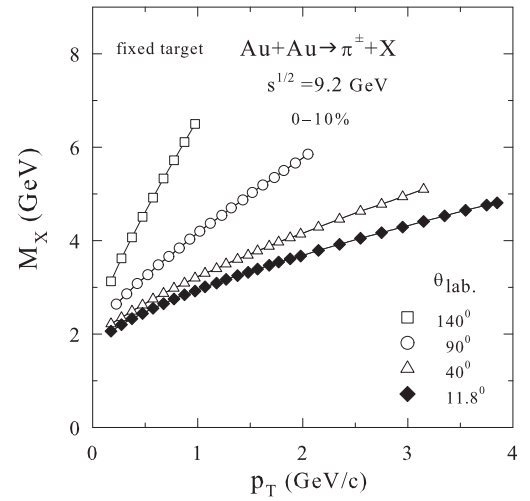
a)



b)



c)



d)

Рис. 6.3: Зависимость долей импульсов x_1 , x_2 , y_a и неригистрируемой массы M_X от поперечного импульса пиона, образующегося в центральных 0 – 10% столкновениях ионов золота при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$ ГэВ и углах $\theta_{lab} = 11.8^\circ - 140^\circ$.

Увеличение доли y_1 с ростом p_T явно видно из рис. 6.3 (c). Это значит, что потери энергии $\Delta E/E = 1 - y_1$ конstituента уменьшаются с увеличением как p_T , так и θ_{lab} . При импульсе $p_T = 1$ ГэВ/с относительные потери энергии для углов $\theta_{lab} = 11.8^\circ$ и 140° составляют 70% и 30%, соответственно. Таким образом, большая кумуляция ядра мишени с малыми потерями энергии в жесткой кумулятивной области

при рождении частиц в заднюю полусферу наиболее предпочтительна для поиска сигнатур фазовых переходов в сжатой ядерной материи. На рис. 6.3 (d) показана зависимость нерегистрируемой массы M_X (масса системы отдачи) от поперечного импульса p_T инклюзивной частицы. Как видно из этого рисунка чем больше p_T , тем сильнее кумуляция ядра мишени и больше масса системы отдачи. Дополнительный отбор событий по множественности может быть также использован для контроля свойств среды, в которой происходит рождение частиц.

Ожидается, что при переходе в кумулятивную область для инклюзивной частицы, рождение которой сопровождается высокой множественностью, может произойти дополнительная селекция событий с высокой плотностью ядерной материи. Уменьшение потерь энергии совместно с дополнительным сжатием ядерной материи может обеспечить более точную локализацию критической точки и пролить свет на структуру фазовой диаграммы.

Выводы: На основе свойств z -скейлинга дано предложение использовать жесткие кумулятивные процессы рождения частиц в столкновениях тяжелых ионов на установке STAR во второй фазе программы энергетического сканирования в эксперименте с фиксированной мишенью с целью поиска сигнатур фазовых переходов. Представлены зависимости кинематических границ (на плоскости $\{p_z, p_T\}$) реакции рождения пионов в $Au + Au$ взаимодействиях при различных энергиях столкновения. Показано, что отбор событий с рождением пионов с большими поперечными импульсами $p_T > 1$ ГэВ/с в $Au + Au$ столкновениях с фиксированной мишенью при $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$ ГэВ в заднюю полусферу $\theta_{lab} > 140^\circ$, обеспечивает высокую кумуляцию ядра-мишени ($Ax_2 > 5$). Поэтому поиск сигнатур фазовых переходов представляется предпочтительным в кумулятивных процессах в области фрагментации мишени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Основные результаты диссертационной работы:

1. Проведен систематический анализ экспериментальных данных по кумулятивному рождению заряженных адронов в столкновениях протонов и ядер, полученных группами Г. Лексина (ФНАЛ), Л. Золина и В. Гапиенко (ИФВЭ), в инклюзивных реакциях с ядрами Li , Be , C , Al , Cu , Mo , Ti , Ta , W в широком диапазоне импульсов налетающего протона ($p_L = 18 - 400$ ГэВ/с) и углов вылета инклюзивной частицы ($\theta_{lab} = 35^\circ - 160^\circ$), в рамках метода z -скейлинга.
2. Построена скейлинговая функция $\Psi(z)$ для процесса рождения инклюзивных пионов и заряженных адронов в $p + A$ взаимодействиях в кумулятивной области. Функция $\Psi(z)$ интерпретируется как плотность вероятности рождения инклюзивной частицы с определенным значением параметра подобия z . Параметры модели δ_1 , δ_2 интерпретируются как фрактальные размерности сталкивающихся частиц (протона и ядра).
3. Установлено самоподобие кумулятивного рождения пионов и заряженных адронов в столкновениях протонов с различными ядрами (Li , Be , C , Al , Cu , Mo , Ti , Ta , W) в диапазоне импульсов налетающего протона ($p_L = 18 - 400$ ГэВ/с) в области больших и малых поперечных импульсов. Подтверждены закон аддитивности фрактальной размерности ядер и степенная асимптотика скейлинговой функции при больших значениях параметра подобия ($z > 4$).
4. Проведено сравнение данных по инклюзивным сечениям рождения кумулятивных пионов и заряженных адронов в $p + A$ столкновениях при малых и больших поперечных импульсах, полученных группами Г. Лексина (ФНАЛ), Л. Золина и В. Гапиенко (ИФВЭ), с данными по сечениям рождения адронов с большими поперечными импульсами, полученными группами Д. Кронина, Д. Джаффе (ФНАЛ) и Р. Суляева (ИФВЭ), и установлено совпадение форм

скейлинговой функции $\Psi(z)$ в области их перекрытия, при кумулятивном и некумулятивном рождении.

5. Подтвержден микроскопический сценарий рождения адронов в кумулятивной и некумулятивной областях в $p + A$ взаимодействиях на уровне конститuentов. Установлены зависимости долей импульса x_1, x_2 от полного импульса налетающего протона и ядра-мишени, а также инклюзивной частицы, для различных ядер.
6. Получено подтверждение гипотезы о том, что z -скейлинг отражает фундаментальные принципы - локальность, фрактальность и самоподобие в рождении кумулятивных пионов и заряженных адронов при взаимодействии протонов и ядер.
7. На основе результатов проведенного исследования по проверке z -скейлинга в рождении кумулятивных пионов и заряженных адронов в столкновениях протонов и ядер ($Li - W$) в диапазоне импульсов налетающего протона ($p_L = 18 - 400$ ГэВ/с) с большими и малыми поперечными импульсами не обнаружено сигнатур фазовых переходов в исследованной кинематической области.
8. На основе установленной зависимости параметра подобия z от импульса инклюзивной частицы, рожденной в $p + A$ столкновениях в заданной кинематике экспериментов Г. Лексина, Л. Золина и В. Гапиенко, определены области предпочтительные для поиска сигнатур фазовых переходов в ядерной материи.
9. В результате анализа комбинированного набора экспериментальных данных по инклюзивным сечениям, соответствующих рождению частиц в $p + A$ столкновениях в кумулятивной и некумулятивной областях с большими и малыми поперечными импульсами получена параметризация скейлинговой функции $\Psi(z)$ в виде функции распределения Цаллиса.
10. На основе установленных свойств z -скейлинга проведены предсказательные расчеты инвариантных сечений рождения пионов и заряженных адронов в $p + A$ столкновениях при импульсах протона $p_L = 18 - 400$ ГэВ/с для различных ядер-мишеней ($Li, Be, C, Al, Cu, Mo, Ti, Ta, W$) и углов вылета инклюзивной частицы ($\theta_{lab} = 35^\circ - 160^\circ$) в глубоко-кумулятивной области.
11. Предложено использовать жесткие кумулятивные процессы рождения адронов

в $Au + Au$ столкновениях во второй фазе программы энергетического сканирования на RHIC в эксперименте с фиксированной мишенью с целью поиска сигнатур фазовых переходов. Получены оценки потерь энергии конstituента при рождении инклюзивной частицы, в центральных $Au + Au$ столкновениях при энергии столкновения $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$ ГэВ в зависимости от поперечного импульса и угла вылета регистрируемой частицы. Показано, что отбор событий с рождением пионов с большими поперечными импульсами $p_T > 1$ ГэВ/с в $Au + Au$ столкновениях с фиксированной мишенью при $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$ ГэВ в заднюю полушару $\theta_{lab} > 140^\circ$, обеспечивает высокую кумуляцию ($Ax_2 > 5$) ядра-мишени с малыми потерями ($\Delta E/E < 30\%$) энергии конstituентов. Предполагается, что именно в этой области наиболее предпочтительны поиски ярких сигнатур фазовых переходов и критической точки в ядерной материи. Такими сигнатурами являются скачки фрактальных размерностей ядер и "теплоемкости среды".

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Инвариантное дифференциальное сечение рождения адронов (струй) нормируется следующим образом

$$\int E \frac{d^3\sigma}{dp^3} d\eta d^2p_{\perp} = \sigma_{inl} \langle N \rangle, \quad (\text{A.1})$$

где σ_{inl} - полное неупругое сечение процесса, $\langle N \rangle$ - средняя множественность частиц. Предполагается, что инклюзивное сечение является решением уравнения (2.8) как функция единственной скейлинговой переменной $z = z(\lambda_1, \lambda_2)$. Другой независимой переменной, выражаемой через λ_1 и λ_2 , является быстрота $y = 1/2 \ln(\lambda_2/\lambda_1)$ в системе центра масс NN . При высоких энергиях и больших поперечных импульсах y связана с псевдобыстротой η следующим выражением $y = \eta - 1/2 \ln A$. Учитывая данные определения, сечение выражается через переменные λ_1 и λ_2 следующим образом:

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}{[(P_1 P_2) - M_1 M_2]^2} \frac{d^2\sigma}{d\lambda_1 d\lambda_2}. \quad (\text{A.2})$$

Пренебрегая массовыми членами, это выражение может быть приведено к виду

$$E \frac{d^3\sigma}{dp^3} = -\frac{1}{\pi s_A} \frac{d^2\sigma}{d\lambda_1 d\lambda_2}. \quad (\text{A.3})$$

Здесь введены обозначения: A - атомный номер ядра-мишени в случае адрон-ядерного взаимодействия, а s_A - квадрат энергии в системе центра масс соответствующего столкновения.

Используя оба набора независимых переменных и, учитывая сделанное приближение, получим выражение

$$\int \frac{d^2\sigma}{dz dy} dy dz = \int \frac{d^2\sigma}{d\lambda_1 d\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 = \sigma_{inl} \int \rho_A(\eta) \psi(z) d\eta dz = \sigma_{inl} \langle N \rangle, \quad (\text{A.4})$$

где $\rho_A(\eta) \equiv d \langle N \rangle / d\eta$ является средней плотностью множественности частиц, рожденных в столкновении. Функция $\Psi(z)$, входящая в выражение (A.4), удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{z_{min}}^{\infty} \Psi(z) dz = 1. \quad (\text{A.5})$$

В соответствии с выбором переменной z (2.5), минимальное значение z равно нулю. Учитывая уравнение (A.4), получим зависимость скейлинговой функции Ψ от экспериментально измеряемого инклюзивного сечения и средней плотности множественности $dN/d\eta(s, \eta)$ (2.22)

$$\Psi(z) = -\frac{\pi s_A}{(dN/d\eta)\sigma_{in}} J^{-1} E \frac{d^3\sigma}{dp^3}.$$

Функция $\Psi(z)$ выражается через соответствующий якобиан перехода $J = (\partial y/\partial\lambda_1)(\partial z/\partial\lambda_2) - (\partial y/\partial\lambda_2)(\partial z/\partial\lambda_1)$. Определение переменной z и необходимых для ее расчета величин даны в формулах (2.5) - (2.18). Ниже представлены выражения для частных производных переменной z .

$$\begin{aligned} \Omega\rho(s)\frac{\partial z}{\partial\lambda_1} &= [\lambda_1 M_1^2 + \lambda_2(P_1 P_2)]\hat{s}_\lambda^{-1/2} + \\ &+ \left[\chi_1 \frac{\partial\chi_1}{\partial\lambda_1} M_1^2 + \chi_2 \frac{\partial\chi_2}{\partial\lambda_1} M_2^2 + \lambda_2(P_1 P_2) \right] \hat{s}_\chi^{-1/2} + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial\chi_1}{\partial\lambda_1} \right) \left(\frac{\delta_1 \hat{s}_\perp}{1-x_1} - M_1 \right) + \frac{\partial\chi_2}{\partial\lambda_1} \left(\frac{\delta_2 \hat{s}_\perp}{1-x_2} - M_2 \right), \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned} \Omega\rho(s)\frac{\partial z}{\partial\lambda_2} &= [\lambda_2 M_2^2 + \lambda_1(P_1 P_2)]\hat{s}_\lambda^{-1/2} + \\ &+ \left[\chi_1 \frac{\partial\chi_1}{\partial\lambda_2} M_1^2 + \chi_2 \frac{\partial\chi_2}{\partial\lambda_2} M_2^2 + \lambda_1(P_1 P_2) \right] \hat{s}_\chi^{-1/2} + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial\chi_2}{\partial\lambda_2} \right) \left(\frac{\delta_2 \hat{s}_\perp}{1-x_2} - M_2 \right) + \frac{\partial\chi_1}{\partial\lambda_2} \left(\frac{\delta_1 \hat{s}_\perp}{1-x_1} - M_1 \right). \end{aligned} \quad (A.7)$$

Частные производные χ_i удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi_1}{\partial\lambda_j} &= (\chi_1 + \omega_1)^{-1} \left(\mu_1 \frac{\partial\mu_1}{\partial\lambda_j} - \chi_1 \frac{\partial\omega_1}{\partial\lambda_j} \right), \\ \frac{\partial\chi_2}{\partial\lambda_j} &= (\chi_2 + \omega_2)^{-1} \left(\mu_2 \frac{\partial\mu_2}{\partial\lambda_j} + \chi_2 \frac{\partial\omega_2}{\partial\lambda_j} \right). \end{aligned} \quad (A.8)$$

Частные производные ω_i выражаются через величины λ_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega_1}{\partial\lambda_1} &= \frac{(\alpha-1)\lambda_2}{2(1-\lambda_2)}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\lambda_2} = \frac{(\alpha-1)(\lambda_1+\lambda_0)}{2(1-\lambda_2)^2}, \\ \frac{\partial\omega_2}{\partial\lambda_1} &= \frac{(\alpha-1)(\lambda_2+\lambda_0)}{2\alpha(1-\lambda_1)^2}, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial\lambda_2} = \frac{(\alpha-1)\lambda_1}{2\alpha(1-\lambda_1)}. \end{aligned} \quad (A.9)$$

Частные производные μ_i могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mu_1}{\partial\lambda_1} &= \frac{\alpha(\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0)}{2\mu_1(1-\lambda_2)}, \quad \frac{\partial\mu_1}{\partial\lambda_2} = \frac{\alpha(\lambda_1 + \lambda_0)(1-\lambda_1)}{2\mu_1(1-\lambda_2)^2}, \\ \frac{\partial\mu_2}{\partial\lambda_1} &= \frac{(\lambda_2 + \lambda_0)(1-\lambda_2)}{2\alpha\mu_2(1-\lambda_1)^2}, \quad \frac{\partial\mu_2}{\partial\lambda_2} = \frac{\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0}{2\alpha\mu_2(1-\lambda_1)}. \end{aligned} \quad (A.10)$$

Если рассматривать центральную область столкновений ($\eta \simeq 0$), большие поперечные импульсы инклюзивной частицы ($p_{\perp} \gg m_1$) и пренебречь массами сталкивающихся частиц, то получим выражение для z

$$z = \frac{2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\sqrt{s_A}}{\Omega\rho(s)}, \quad \lambda_0 \sim 0. \quad (\text{A.11})$$

Рассматривая предел $\alpha = \delta_1/\delta_2 \rightarrow \infty$ и соответствующие предельные значения величин $x_1 \rightarrow 1$, $x_2 \rightarrow (\lambda_2 + \lambda_0)/(1 - \lambda_1)$, $\Omega \rightarrow m(1 - x)^\delta$, получим более простое выражение для частных производных

$$\begin{aligned} \Omega\rho(s)\frac{\partial z}{\partial\lambda_1} &= \frac{x}{1 - \lambda_1} + \left(\frac{\delta\hat{s}_{\perp}}{1 - x} - M_2\right) + [\lambda_1 M_1^2 + \lambda_2(P_1 P_2)] \hat{s}_{\lambda}^{-1/2} + \\ &+ \left[(\lambda_1 - 1)M_1^2 + \frac{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0)}{(1 - \lambda_1)^2} x M_2^2 + \lambda_2(P_1 P_2)\right] \hat{s}_{\chi}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \Omega\rho(s)\frac{\partial z}{\partial\lambda_2} &= \frac{1}{1 - \lambda_1} + \left(\frac{\delta\hat{s}_{\perp}}{1 - x} - M_2\right) + [\lambda_2 M_2^2 + \lambda_1(P_1 P_2)] \hat{s}_{\lambda}^{-1/2} + \\ &+ \left[\frac{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0)}{(1 - \lambda_1)^2} \lambda_1 M_2^2 + \lambda_1(P_1 P_2)\right] \hat{s}_{\chi}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В последнее время в различных областях физики получили распространение идеи фрактальности. В рамках таких теорий часто используются величины p_i^q , где p_i представляет вероятность соответствующего события, а q – некоторое вещественное число. Таким образом, становится возможным обобщение теории Больцмана-Гиббса. В частности, Константино Цаллис вводит понятие обобщенной энтропии следующим образом [155]:

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1} \quad (q \in \mathfrak{R}) \quad (\text{Б.1})$$

где k – произвольная положительная константа, и $\sum_{i=1}^W p_i = 1$. Это позволяет установить, что:

$$S_1 \equiv \lim_{q \rightarrow 1} S_q = k \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i \exp [(q - 1) \ln p_i]}{q - 1} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i \quad (\text{Б.2})$$

при $q \rightarrow 1$ энтропия Цаллиса переходит в классическую энтропию Больцмана-Гиббса. Также можно представить S_q в виде:

$$S_q = \frac{k}{q - 1} \sum_{i=1}^W p_i (1 - p_i^{q-1}) \quad (\text{Б.3})$$

после чего становится очевидно, что $S_q \geq 0$ для любых p_i и q . Она обнуляется при $W = 1, \forall q$, также при $W > 1, q > 0$ и в случае, если вероятность одного события равна 1 (и исчезающе мала для всех остальных событий).

Если рассматривать экстремумы S_q при условии $\sum_{i=1}^W p_i = 1$, то, введя параметр Лагранжа, легко заметить, что S_q имеет экстремумы *при всех* значениях q в случае *равновероятных* событий $p_i = 1/W, \forall i$ и следовательно:

$$S_q = k \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (\text{Б.4})$$

Отсюда моментально получаем $S_1 = k \ln W$ - знаменитое выражение Больцмана. Из уравнения Б.4 следует, что S_q расходится при $q \leq 1$ и выходит на плато $S_q = k/(q-1)$ при $q > 1$ в пределе $W \rightarrow \infty$. Можно доказать, что экстремум, полученный для ур. Б.4 является максимумом (минимумом) для $q > 0$ ($q < 0$). Для $q = 0$ $S_0(\{p_i\}) = k(W-1) \{p_i\}$. Наконец из ур. Б.4 следует:

$$S_q/k = \frac{e^{(1-q)S_1/k} - 1}{1 - q} \quad (\text{Б.5})$$

Рассмотрим теперь две независимые системы A и B с ансамблями возможных исходов $\Omega^A \equiv \{1, 2, \dots, i, \dots, W_A\}$ и $\Omega^B \equiv \{1, 2, \dots, j, \dots, W_B\}$, соответственно, и вероятностями подобных исходов $\{p_i^A\}$, $\{p_j^B\}$. Если предположить $A \cup B$, тогда ансамбль возможных исходов будет $\Omega^{A \cup B} \equiv \{(1, 1), (1, 2), \dots, (i, j), \dots, (W_A, W_B)\}$; и вероятность каждого исхода: $p_{ij}^{A \cup B}$. Если системы независимы, получим $p_{ij}^{A \cup B} = p_i^A p_j^B$, $\forall (i, j)$, следовательно:

$$\sum_{i,j}^{W_A W_B} (p_{ij}^{A \cup B})^q = \left[\sum_{i=1}^{W_A} (p_i^A)^q \right] \left[\sum_{j=1}^{W_B} (p_j^B)^q \right] \quad (\text{Б.6})$$

и следовательно (из ур. Б.1):

$$\bar{S}_q^{A \cup B} = \bar{S}_q^A + \bar{S}_q^B \quad (\text{аддитивность}), \quad (\text{Б.7})$$

где

$$\bar{S}_q \equiv k \frac{\ln [1 + (1 - q)S_q/k]}{1 - q} \quad (\text{Б.8})$$

В пределе $q \rightarrow 1$, ур. Б.7 переходит в $\bar{S}_1^{A \cup B} = \bar{S}_1^A + \bar{S}_1^B$, таким образом получается стандартная аддитивность энтропии двух независимых систем. Произвольные q и \bar{S}_q воспроизводят энтропию Реньи[172]. Для случая скоррелированных систем (т.е. $p_{ij}^{A \cup B}$ не равна $\sum_{i=1}^{W_A} (p_{ij}^{A \cup B}) \sum_{j=1}^{W_B} (p_{ij}^{A \cup B})$ для любых (i, j)) полезно определить

$$\Gamma_q(\{p_{ij}^{A \cup B}\}) \equiv \bar{S}_q^{A \cup B}(\{p_{ij}^{A \cup B}\}) - \bar{S}_q^A \left(\left\{ \sum_{j=1}^{W_B} p_{ij}^{A \cup B} \right\} \right) - \bar{S}_q^B \left(\left\{ \sum_{i=1}^{W_A} p_{ij}^{A \cup B} \right\} \right) \quad (\text{Б.9})$$

Из ур. Б.7 очевидно, что для независимых систем (без корреляций) $\Gamma_q = 0$, $\forall q$. Для произвольной и фиксированной вероятности $\{p_{ij}^{A \cup B}\}$, при условии корреляций, можно доказать, что $\Gamma_1 < 0$ (субаддитивность стандартной энтропии скоррелированных систем) и $\Gamma_0 = 0$. Для произвольных значений q , Γ_q обладает огромной чувствительностью к $\{p_{ij}^{A \cup B}\}$ и может быть как положительной, так и отрицательной,

для случаев $q \gg 1$, $q \ll -1$, и обычно обладает более чем одним экстремумом. Систематическое изучение зависимости компьютерными методами показывает, что в общем случае Γ_q изменяется непрерывно с q , но не демонстрирует никаких особых закономерностей кроме $\Gamma_0 = 0$ и $\Gamma_1 \leq 0$. Когда $\{p_{ij}^{A \cup B}\}$ постепенно приближается к исчезновению корреляций, Γ_q постепенно выполаживается, пока, наконец, не достигнет $\Gamma_q = 0$, $\forall q$.

Рассмотрим асимптотическое поведение S_q при условии $\sum_{i=1}^W p_i = 1$

$$\sum_{i=1}^W p_i \epsilon_i = U_q \quad (\text{Б.10})$$

где $\{\epsilon_i\}$ и U_q известные реальные числа (одно и то же значение ϵ_i может соответствовать более чем одному возможному исходу); обозначим их как *обобщенный спектр* и *обобщенная внутренняя энергия* соответственно. Введем параметры Лагранжа α и β и определим величину

$$\phi_q \equiv S_q/k + \alpha \sum_{k=1}^W p_i - \alpha\beta(q-1) \sum_{i=1}^W p_i \epsilon_i \quad (\text{Б.11})$$

таким образом для последующего удобства. Если потребовать $\partial\phi_q/\partial p_i = 0$, $\forall i$, получим $p_i \propto [1 - \beta(q-1)\epsilon_i]^{1/(q-1)}$; следовательно

$$p_i = \frac{[1 - \beta(q-1)\epsilon_i]^{1/(q-1)}}{Z_q}, \quad (\text{Б.12})$$

где

$$Z_q \equiv \sum_{l=1}^W [1 - \beta(q-1)\epsilon_l]^{1/(q-1)} \quad (\text{Б.13})$$

Отсюда сразу следует, что в пределе $q \rightarrow 1$ выражения приобретают вид

$$p_i = e^{-\beta\epsilon_i}/Z_1, \quad (\text{Б.14})$$

где

$$Z_1 \equiv \sum_{l=1}^W e^{-\beta\epsilon_l} \quad (\text{Б.15})$$

Также, можно показать, что другой способ получить распределение по степенному закону ур. Б.12 рассмотреть асимптотическое поведение S_q (или эквивалентно \bar{S}_q) при условии $\sum_{i=1}^W p_i^q \epsilon_i = U_q$ (вместо ур. Б.10).

Если A и B две независимые системы с вероятностями (спектром) $\{p_i^A\}$ ($\{\epsilon_i^A\}$) и $\{p_j^B\}$ ($\{\epsilon_j^B\}$), соответственно, то вероятность, отвечающая $A \cup B$, будет $p_{ij}^{A \cup B} = p_i^A p_j^B$, $\forall(i, j)$. Это требует выполнения соотношения

$$1 - \beta(q-1)\epsilon_{ij}^{A \cup B} = [1 - \beta(q-1)\epsilon_i^A] [1 - \beta(q-1)\epsilon_j^B] \quad (\text{Б.16})$$

или, что то же самое,

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{A \cup B} = \bar{\epsilon}_i^A + \bar{\epsilon}_j^B, \quad (\text{Б.17})$$

где

$$\bar{\epsilon} \equiv \frac{\ln [1 + \beta(1 - q)\epsilon]}{\beta(1 - q)} \quad (\text{Б.18})$$

В пределе $q \rightarrow 1$ (и/или $\beta \rightarrow 0$) ур. Б.17 переходит в $\epsilon_{ij}^{A \cup B} = \epsilon_i^A + \epsilon_j^B$, что показывает аддитивность энергии в классическом случае. Свойство Б.17 совместно с факторизацией вероятностей в Б.10 приводит к

$$\bar{U}_q^{A \cup B} = \bar{U}_q^A + \bar{U}_q^B, \quad (\text{Б.19})$$

где

$$\bar{U}_q \equiv \frac{\ln [1 + \beta(1 - q)U_q]}{\beta(1 - q)} \quad (\text{Б.20})$$

В пределе $q \rightarrow 1$ (и/или $\beta \rightarrow 0$) ур. Б.19 переходит в $U_q^{A \cup B} = U_q^A + U_q^B$, что показывает аддитивность внутренней энергии для независимых систем в классическом случае.

Рассмотрим основные характеристики распределения Б.12. Во-первых, распределение инвариантно при преобразовании:

$$[1 - \beta(q - 1)\epsilon_i] \rightarrow [1 - \beta(q - 1)\epsilon_i] [1 - \beta(q - 1)\epsilon_0] \quad (\text{Б.21})$$

для любых наперед заданных фиксированных реальных чисел l, ϵ_0 . Другими словами, распределение Б.12 инвариантно относительно $\bar{\epsilon}_l = \bar{\epsilon}_l + \bar{\epsilon}_0$ (что является тривиальным следствием того, что распределение может быть записано в виде $p_i \propto \exp(-\beta\bar{\epsilon}_i)$). В случае $\beta(q - 1) \rightarrow 0$ получается хорошо известная инвариантность статистики Больцмана-Гиббса относительно непрерывных переносов в энергетическом спектре. Отметим, что при $q > 1$, $p_i = 0$ для всех уровней u которых $\epsilon_i \geq 1/[\beta(q - 1)]$ ($\epsilon_i \leq -1/[|\beta|(q - 1)]$) $\beta > 0$ ($\beta < 0$) т.е. положительные (отрицательные) "температуры". Отметим, что при $q < 1$ уровни с $\epsilon_i \leq -1/[\beta(1 - q)]$ ($\epsilon_i \geq 1/[|\beta|(1 - q)]$) при $\beta > 0$ ($\beta < 0$) оказываются сильно заселены, что явно напоминает конденсат Бозе-Эйнштейна.

Лучше понять необычные свойства данной статистики поможет следующая ситуация. Предположим $q > 1, \beta > 0$ и $\{\epsilon_i\}$ такие, что $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \dots < \epsilon_W$ (W даже может меняться). Когда $1/\beta$ превосходит $(q - 1)\epsilon_W$ все уровни имеют конечную вероятность заселения; когда $(q - 1)\epsilon_{W-1} < 1/\beta < (q - 1)\epsilon_W$ получаем

$p_1 > p_2 > p_{W-1} > p_W = 0$. Вероятность заселения последовательно исчезает при уменьшении $1/\beta$. Таким образом, приходим к случаю $(q-1)\epsilon_1 < 1/\beta < (q-1)\epsilon_2$ при котором $p_1 = 1$. В конечном итоге, температуры $1/\beta$ в интервале $[0, (q-1)\epsilon_1]$ оказываются физически недостижимыми, обобщая недостижимость $1/\beta = 0$ в стандартной термодинамике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Adcox *et al.*, (PHENIX Collab.), Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration, *Nucl. Phys.* **A757**, 184 (2005).
- [2] B. B. Back *et al.*, (PHOBOS Collab.), The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC, *Nucl. Phys.* **A757**, 28 (2005).
- [3] B. I. Abelev *et al.* (STAR collab.), Energy dependence of π^\pm , p and anti-p transverse momentum spectra for Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 62.4$ and 200-GeV, *Phys. Lett.* **B655** 104 (2007).
- [4] M. Aggarwal *et al.* (STAR collab.), An Experimental Exploration of the QCD Phase Diagram: The Search for the Critical Point and the Onset of De-confinement, *arXiv:1007.2613* (2010)
- [5] I. Arsene *et al.*, (BRAHMS Collab.), Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment, *Nucl. Phys.* **A757**, 1 (2005).
- [6] J. Adams *et al.*, (STAR Collab.), Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions, *Nucl. Phys.* **A757**, 102 (2005).
- [7] M. Gazdzicki *et al.*, (NA49 and NA61/SHINE Collab.), NA49/NA61: results and plans on beam energy and system size scan at the CERN SPS, *J. Phys.* **G38** 124024 (2011).
- M. Szuba, (NA61/SHINE Collab.), The Old New Frontier: Studying the CERN-SPS Energy Range with NA61/SHINE, International Conference on New Frontiers in Physics, 10-16 June, 2012, Kolymbari, Crete, Greece; *arXiv:1209.5936*.
- [8] F. Carminati, (Ed.) *et al.* (ALICE Collab.), ALICE: Physics performance report, volume I, *J. Phys.* **G30** 1517 (2004).
- G. Alessandro, (Ed.) *et al.* (ALICE Collab.), ALICE: Physics performance report, volume II, *J. Phys.* **G32** 1295 (2006).
- J. Stachel, (ALICE Collab.), Overview of ALICE results, LHC Days in Split, October 1-6, 2012, Split, Croatia <http://lhc2012.fesb.hr/>
- J. Stachel, (ALICE Collab.), Recent Results from Heavy Ion Collisions at the LHC, ICHEP2012, 4-11 July 2012, Melbourne, Australia <http://www.ichep2012.com.au/>

- ATLAS in Pb+Pb Collisions at the LHC, 8th International Workshop on High pT Physics at LHC, 21-24 October 2012, Wuhan, China <http://conf.ccnu.edu.cn/hpt2012/>
- A. Milov, (ATLAS Collab.), Heavy ion results from the ATLAS experiment, Xth Quark Confinement and the Hadron Spectrum, Munchen, Germany, 8-12 October 2012; <http://www.conf.de/>
- R G. De Cassagnac, (CMS Collab.), Overview of CMS heavy ions results, LHC Days in Split, October 1-6, 2012, Split, Croatia <http://lhc2012.fesb.hr/>
- [9] B. I. Abelev *et al.* (STAR collab.), Systematic Measurements of Identified Particle Spectra in pp, d^+ Au and Au+Au Collisions from STAR, *Phys. Rev.* **C79** 034909 (2009).
- [10] M. Gazdzicki *et al.* (NA61/SHINE collab.), Ion Program of Na61/Shine at the CERN SPS, *J. Phys.* **G36** 064039 (2009).
- [11] B. Abelev *et al.* (STAR collab.), Identified particle production, azimuthal anisotropy, and interferometry measurements in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 9.2$ - GeV, *Phys. Rev.* **C81** 024911 (2010).
- [12] (CBM Collab.), CBM Progress Report (2014) ISBN 978-3-9815227-2-3.
- [13] (NICA Collab.), MPD Conceptual Design Report (2014)
- [14] M. Gazdzicki, M. I. Gorenstein, and S. Mrowczynski, Fluctuations and deconfinement phase transition in nucleus nucleus collisions, *Phys. Lett.* **B585**, 115, (2004).
- [15] J. Adams *et al.*, (STAR collab.), Incident energy dependence of pt correlations at RHIC, *Phys. Rev.* **C72**, 044902, (2005).
- [16] C. Alt *et al.*, (NA49 collab.), Energy dependence of particle ratio fluctuations in central Pb + Pb collisions from $\sqrt{s_{NN}} = 6.3$ -GeV to 17.3-GeV, *Phys. Rev.* **C79**, 044910, (2009).
- [17] M. Cheng *et al.*, Baryon Number, Strangeness and Electric Charge Fluctuations in QCD at High Temperature, *Phys. Rev.* **D79**, 074505, (2009).
- [18] (STAR collab.) Studying the Phase Diagram of QCD Matter at RHIC, A STAR white paper summarizing the current understanding and describing future plans, (2014). SN0598.
- [19] M. M. Aggarwal *et al.* (STAR Collab.), An Experimental Exploration of the QCD Phase Diagram: The Search for the Critical Point and the Onset of Deconfinement, (2010). arXiv:1007.2613 [nucl-ex]
- [20] S. A. Voloshin, A. M. Poskanzer and R. Snellings, Collective phenomena in non-central nuclear collisions, arXiv:0809.2949 [nucl-ex]., (2008).
- [21] C. Alt *et al.* (NA49 collab.), Directed and elliptic flow of charged pions and protons in Pb+Pb collisions at 40-A-GeV and 158-A-GeV, *Phys. Rev.* **C68**, 034903, (2003).

- [22] J. Cleymans and H. Satz, Thermal hadron production in high-energy heavy ion collisions, *Z. Phys.* **C57**, 135 (1993).
- [23] I. Zborovský, Yu. A. Panebratsev, M. V. Tokarev, G. P. Škoro, Z scaling in hadron hadron collisions at high-energies, *Phys. Rev.* **D54**, 5548 (1996).
- [24] I. Zborovský, Yu. A. Panebratsev, M. V. Tokarev, G. P. Škoro, Z scaling in proton nucleus collisions at high-energies, *Phys. Rev.* **C59**, 2227 (1999). JINR Preprint E2-98-250, Dubna, (1998).
- [25] M. V. Tokarev, I. Zborovský, Yu. A. Panebratsev, G. P. Škoro, Scaling features of hadron production in pi-p and pi-A collisions at high p_T , *Int. J. Mod. Phys.* **A16**, 1281 (2001). JINR Preprint E2-99-113, Dubna, (1999);
- [26] M. V. Tokarev, z scaling at RHIC, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **3**, 7 (2006).
- [27] M. V. Tokarev, z -scaling in heavy ion collisions at the RHIC, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **4**, 403 (2007).
- [28] M. V. Tokarev, O. V. Rogachevski, T. G. Dedovich, Scaling features of π^0 meson production in high-energy pp collisions, *J. Phys.* **G26**, 1671 (2000).
- [29] M. V. Tokarev, I. Zborovský, Self-similarity of high $p(T)$ hadron production in cumulative processes and violation of discrete symmetries at small scales (suggestion for experiment), *Phys. Part. Nucl. Lett.* **7**, 160 (2010).
- [30] M. V. Tokarev, I. Zborovský, A. Kechechyan, A. Alakhverdyants, Search for signatures of phase transition and critical point in heavy-ion collisions, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **8**, 533 (2011).
- [31] А. М. Балдин, *Краткие сообщения по физике* **1**, 35 (1971).
А. М. Балдин *и др.*, Наблюдение пионов высокой энергии при столкновении релятивистских дейтронов с ядрами, Препринт ОИЯИ Р1-5819, Дубна, (1971).
- [32] А. М. Балдин, Физика релятивистских ядер, *Sov. J. Part. Nucl.* **8**, 429 (1977).
- [33] А. М. Балдин, *и др.*, Кумуляция легких ядер, JINR Preprint P1-11168, Dubna, (1977).
- [34] А. М. Балдин, *и др.*, Кумулятивное мезообразование, *ЯФ* **18**, 10 (1973).
- [35] В. С. Ставинский, Предельная фрагментация ядер - кумулятивный эффект (эксперимент), *Sov. J. Part. Nucl.* **10**, 949 (1979).
- [36] В. С. Ставинский, Единый алгоритм вычисления инклюзивных сечений рождения частиц с большими поперечными импульсами и адронов кумулятивного типа, Краткие сообщения ОИЯИ **18**, 5 (1986).
- [37] В. С. Ставинский, Масштабная переменная кумулятивных процессов, Препринт ОИЯИ Р2-80-767, Дубна, (1980).

- [38] В. С. Ставинский, Препринт ОИЯИ P2-9528, Дубна, (1976).
- [39] Н. Гиордэнеску, В. С. Ставинский, Препринт ОИЯИ P2-81-369, 1-10, Дубна, (1981).
- [40] В. С. Ставинский, Единый алгоритм вычисления инклюзивных сечений рождения частиц с большими поперечными импульсами и адронов кумулятивного типа, Краткие сообщения ОИЯИ №18-86, 5-17, (1986).
- [41] В. С. Ставинский, Препринт ОИЯИ P1-80-23, Дубна, (1980).
- [42] A. G.Litvininko, A. I. Malakhov, P. I. Zarubin, Scale variable for description of cumulative particle production in nucleus-nucleus collisions, JINR Rapid Communications N1(58)-93 (1993).
- [43] A. M. Baldin et al., JINR Preprint E1-82-472, Dubna, (1982).
- [44] А.А.Балдин, *Phys. At. Nucl.* **56 3**, 385 (1993).
 А.А.Балдин, Antimatter production in relativistic nuclear collisions, JINR Rapid Communications N4(78)-96 (1996)
- [45] G. A. Leksin, Methods for investigating nuclear matter under the conditions characteristic of its transition to quark gluon plasma, *Phys. Atom. Nucl.* **65**, 1985 (2002). [*Yad. Fiz.* **65**, 2042 (2002).]
- [46] J. D. Bjorken, Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum, *Phys. Rev.* **179**, 1547 (1968).
- [47] R. P. Feynman Very high-energy collisions of hadrons, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415 (1969).
- [48] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon, *Phys. Rev.* **185**, 1975 (1969).
- [49] T. Gehrmann, R. G. Roberts and M. R. Whalley, A compilation of structure functions in deep inelastic scattering, *J. Phys.* **G25**, A1 (1999).
- [50] R. G. Roberts and M. R. Whalley, A Compilation of structure functions in deep inelastic scattering, *J. Phys.* **G17**, D1 (1991).
- [51] S. I. Alekhin, Combined analysis of SLAC-BCDMS-NMC data at high x: $\alpha(s)$ and high twists, hep-ph/9907350.
- [52] D. J. Gross, F. Wilczek, Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [53] D. J. Gross, F. Wilczek, Asymptotically Free Gauge Theories, *Phys. Rev.* **D8**, 3633 (1973).
- [54] H. D. Politzer, Asymptotic Freedom: An Approach to Strong Interactions, *Phys. Rep.* **14**, 129 (1974).
- [55] H. D. Politzer, Reliable perturbative results for strong interactions, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).

- [56] K. Wilson, Nonlagrangian models of current algebra, *Phys. Rev.* **179**, 1499 (1969).
- [57] B. L. Ioffe, Space-time picture of photon and neutrino scattering and electroproduction cross-section asymptotics, *Phys. Lett.* **B30**, 123 (1969).
- [58] Y. Frishman, Operator products at almost light like distances, *Ann. Phys.* **66**, 373 (1971).
- [59] R. A. Brandt and G. Preparata, Operator product expansions near the light cone, *Nucl. Phys.* **B27**, 541 (1971).
- [60] N. Christ, B. Hasslacher and A. Mueller, Light cone behavior of perturbation theory, *Phys. Rev.* **D6**, 3543 (1972).
- [61] M. Gell-Mann and F. Low, Quantum electrodynamics at small distances, *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954).
- [62] D. M. Tow, Some predictions of the amati-bertocchi-fubini-stanghellini-tonin multiperipheral model, *Phys. Rev.* **D2**, 154 (1970).
- [63] K. Symanzik, Small distance behavior in field theory and power counting, *Comm. Mass. Phys.* **18**, 227 (1970).
- [64] K. Wilson, The Renormalization Group and Strong Interactions, *Phys. Rev.* **D3**, 1818 (1971).
- [65] D. Gross and F. Wilczek, Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [66] D. J. Fox, *et al.*, Test of Scale Invariance in High-Energy Muon Scattering, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1504 (1974).
- [67] E. M. Riordan, *et al.*, Extraction of the Structure Functions and $R = \sigma_L / \sigma_T$ from Deep Inelastic $e p$ and $e d$ Cross-Sections, SLAC-PUB-1634, (1975).
- [68] H. L. Anderson, *et al.*, Measurement of Nucleon Structure Function in Muon Scattering at 147-GeV/c, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 4, (1976).
- [69] G. Altarelli and G. Parisi, Asymptotic Freedom in Parton Language, *Nucl. Phys.* **B126** 298, (1977).
- [70] H. Georgi and H. D. Politzer Electroproduction scaling in an asymptotically free theory of strong interactions, *Phys. Rev.* **D9**, 416, (1974).
- [71] H. Georgi and H. D. Politzer, Precocious Scaling, Rescaling and ξ Scaling, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1281, (1976)
- [72] H. Georgi and H. D. Politzer, Freedom at Moderate Energies: Masses in Color Dynamics, *Phys. Rev.* **D14**, 1829 (1976).
- [73] O. Nachtmann, Positivity constraints for anomalous dimensions, *Nucl. Phys.* **B63**, 237 (1973).

- [74] R. M. Barnett, D. Schlatter and L. Trentadue, Evidence for Large X Corrections in QCD, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1659 (1981).
- [75] D. W. Duke and R. G. Roberts, Deep Inelastic Scattering and Asymptotic Freedom: A Detailed Analysis and Confrontation, *Nucl. Phys.* **B166**, 243 (1980).
- [76] F. Eisele, M. Gluck, E. Hoffman and E. Reya, Limits On Higher Twist Contributions To Deep Inelastic Scattering, *Phys. Rev.* **D26**, 41 (1982).
- [77] J. J. Aubert *et al.* (European Muon Collab.), Measurement of the nucleon structure function F_2 in muon - iron interactions at 120-GeV, 250-GeV and 280-GeV, *Phys. Lett.* **B105**, 322, (1981).
- [78] J. J. Aubert *et al.* (European Muon Collab.), Measurement of the proton structure function F_2 in muon - hydrogen interactions at 120-GeV and 280-GeV, *Phys. Lett.* **B105**, 315 (1981).
- [79] H. Abramowicz *et al.*, Tests of QCD and Nonasymptotically Free Theories of the Strong Interaction by an Analysis of the Nucleon Structure Functions $X_f(3)$, $F(2)$, and \bar{q} , *Report CERN-EP/82-23*.
- [80] H. Abramowicz *et al.*, Determination of the Gluon Distribution in the Nucleon from Deep Inelastic Neutrino Scattering, *Report CERN-EP/81-168*.
- [81] R. M. Barnett, Possible Evidence for Substantial Nonperturbative Quantum Chromodynamic Effects, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1657, (1982).
- [82] R. M. Barnett, The Nature of Nonperturbative Effects in Lepton - Nucleon Scattering, *Phys. Rev.* **D27**, 98, (1983). SLAC-PUB-2953
- [83] E. D. Bloom and F. J. Gilman, Scaling, Duality, and the Behavior of Resonances in Inelastic electron-Proton Scattering, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1140 (1970).
- [84] E. D. Bloom and F. J. Gilman, Scaling and the Behavior of Nucleon Resonances in Inelastic electron-Nucleon Scattering, *Phys. Rev.* **D4**, 2901 (1971). SLAC-PUB-0942
- [85] V. Rittenberg and H. R. Rubinstein, Scaling and duality in electro- and photoproduction, *Phys. Lett.* **B35**, 50 (1971).
- [86] F. W. Brasse, *et al.*, Analysis of photo and electroproduction data against $\omega(w)$, *Nucl. Phys.* **B39**, 421 (1972).
- [87] A. De Rujula, H. Georgi and H. D. Politzer, Trouble with xi Scaling?, *Phys. Rev.* **D15**, 2495 (1977).
- [88] A. De Rujula, H. Georgi, H. D. Politzer, Demythification of Electroproduction, Local Duality and Precocious Scaling, *Annals Phys.* **103**, 315 (1977).
- [89] B. Q. Ma, Modification of Impulse Approximation and Scaling Variables, *Phys. Lett.* **B176**, 179 (1986).

- [90] S. J. Brodsky, Hadronic And Nuclear Phenomena In Quantum Chromodynamics, *Proceeding of the VIII Summer School in Nuclear and Particle Physics*, Launceston, Tasmania, edited by R. Delbourgo and J.R. Fox, 173 (1987). SLAC-PUB-4342.
- [91] J. Benecke, T. T. Chou, C. N. Yang and E. Yen, Hypothesis of Limiting Fragmentation in High-Energy Collisions, *Phys. Rev.* **188**, 2159 (1969).
- [92] Р. Фейнман, *Взаимодействие фотонов с адронами*, Москва, Мир, (1975).
- [93] Yu. V. Bushnin *et al.*, Negative particle production at the 70 gev ihep accelerator, *Phys. Lett.* **B29**, 48 (1969).
- [94] Yu. V. Bushnin *et al.*, Total cross-sections of π^- , K^- , and \bar{p} on protons and deuterons in the momentum range 20-65 gev/c, *Phys. Lett.* **B30**, 506 (1969).
- [95] D. B. Smith, J. A. Anderson and R. J. Sprafka, Momentum spectra of charged pions produced in proton proton interactions between 13 and 28.5 gev/c, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1064 (1969).
- [96] D. R. Morrison Recent Results from Serpukhov, CERN-D.PH.II-PHYS-74-31. (1974).
- [97] Н. Н. Калмыков и Г. Б. Христиансен, Нарушение масштабной инвариантности в адронных взаимодействиях при сверхвысоких энергиях, *Письма в ЖЭТФ* **23 10**, 595 (1976).
- [98] *Formal Report* BNL-73847-2005.
- [99] J. R. Johnson, *et al.*, Inclusive Charged Hadron Production in 100-GeV to 400-GeV p p Collisions, *Phys. Rev.* **D17**, 1292 (1978).
- [100] R. D. Field and R. P. Feynman, Quark Elastic Scattering as a Source of High Transverse Momentum Mesons, *Phys. Rev.* **D15**, 2590 (1977).
- [101] Z. Koba, H. B. Nielsen and P. Olesen, Scaling of multiplicity distributions in high-energy hadron collisions, *Nucl. Phys.* **B40**, 317 (1971).
- [102] P. Slattery, Evidence for the Onset of Semiinclusive Scaling in Proton Proton Collisions in the 50-GeV/c - 300-GeV/c Momentum Range, *Phys. Rev. Lett* **29**, 1624 (1972).
- [103] P. Slattery, Evidence for the Systematic Behavior of Charged Prong Multiplicity Distributions in High-Energy Proton Proton Collisions, *Phys. Rev.* **D7**, 2073 (1973).
- [104] A. Wroblewski, Multiplicity distributions in proton proton collisions, *Acta Phys. Polon.* **B4**, 857 (1973).
- [105] А.М. Поляков, Гипотеза самоподобия в сильных взаимодействиях I. Множественное рождение адронов в e^+e^- аннигиляции, *ЖЭТФ* **59 2**, 542 (1971).
- [106] А.М. Поляков, Гипотеза самоподобия в сильных взаимодействиях II. Каскадное рождение адронов и их энергетическое распределение в e^+e^- аннигиляции, *ЖЭТФ* **60 5**, 1572 (1971).

- [107] A. I. Golokhvastov, A Possible Generalization of the Concept of Similarity of Multiplicity Distributions for Nonasymptotic Energies, *Sov. J. Nucl. Phys.* **27**, 430 (1978).
- [108] A. I. Golokhvastov, On Energy Dependence of Negative Particle Multiplicity in p p Interactions, *Yad. Fiz.* **30**, 253, (1979).
- [109] R. Szwed and G. Wroshna New ISR and SPS Collider Multiplicity Data and the Golokhvastov Generalization of the KNO Scaling, *Report CERN-EP/85-43* (1985).
- [110] D. Sobszynska *et al.*, XVII International Cosmic Rays Conferences, Lodz, July (2000).
- [111] R. Henzi and P. Valin, On Elastic Proton Proton Diffraction Scattering and Its Energy Dependence, *Nucl. Phys.* **B148**, 513 (1979).
- [112] V. A. Matveev, R. M. Muradyan and A. N. Tavkhelidze, *Part. Nuclei* **2**, 7 (1971).
- [113] V. A. Matveev, R. M. Muradyan and A. N. Tavkhelidze, Automodelity in strong interactions, *Lett. Nuovo Cim.* **5**, 907 (1972).
- [114] V. A. Matveev, R. M. Muradyan and A. N. Tavkhelidze, Automodellism in the large - angle elastic scattering and structure of hadrons, *Lett. Nuovo Cim.* **7**, 719 (1973).
- [115] S. J. Brodsky and G. R. Farrar, Scaling Laws at Large Transverse Momentum, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1153 (1973).
- [116] F. Ronchetti, Complete Angular Distributions of the $\gamma d \rightarrow pn$ Reaction in the Few GeV Region,
- [117] Y. N. Uzikov, Indication of asymptotic scaling in the reactions $dd \rightarrow p\text{-}^3\text{H}$, $dd \rightarrow n\text{-}^3\text{He}$ and $pd \rightarrow pd$, *JETP Lett.* **81**, 303 (2005). *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **81**, 387 (2005).]
- [118] M. Diehl, Generalized parton distributions, *Phys. Rept.* **388**, 41 (2003). [hep-ph/0307382].
- [119] H. Stöcker and W. Greiner, High-Energy Heavy Ion Collisions: Probing the Equation of State of Highly Excited Hadronic Matter, *Phys. Rept.* **137**, 277 (1986).
- [120] H. Sorge, Elliptical flow: A Signature for early pressure in ultrarelativistic nucleus-nucleus collisions, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2309 (1997).
- [121] J.-Y. Ollitrault, Anisotropy as a signature of transverse collective flow, *Phys. Rev.* **D46**, 229 (1992).
- [122] X. Zhu, M. Bleicher and H. Stöcker, Elliptic flow analysis at RHIC: Fluctuations vs. non-flow effects, *Phys. Rev.* **C72**, 064911 (2005). [arXiv:nucl-th/0509081].
- [123] S. Mrowczynski and E. V. Shuryak, Elliptic flow fluctuations, *Acta Phys. Polon.* **B34**, 4241 (2003). [arXiv:nucl-th/0208052].
- [124] J. Adams *et al.* (STAR Collab.), Particle type dependence of azimuthal anisotropy and nuclear modification of particle production in Au + Au collisions at $s_{NN}^{1/2} = 200\text{-GeV}$, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 052302 (2004).

- [125] S. A. Bass et al., Reaction dynamics in Pb + Pb at the CERN/SPS: From partonic degrees of freedom to freezeout, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **42**, 313 (1999). [arXiv:nucl-th/9810077].
- [126] D. Molnar and S. Voloshin, Elliptic flow at large transverse momenta from quark coalescence, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 092301 (2003).
- [127] R. J. Fries, Hadron correlations from recombination and fragmentation, *J. Phys.* **G31**, S379 (2005).
- [128] R. C. Hwa and C. B. Yang, Recombination of shower partons in fragmentation processes, *Phys. Rev.* **C70**, 024904 (2004).
- [129] C. Adler *et al.* (STAR Collab.), Identified particle elliptic flow in Au + Au collisions at $s_{(NN)}^{(1/2)} = 130$ -GeV, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 182301 (2001).
- [130] J. Adams *et al.* (STAR Collab.), Particle type dependence of azimuthal anisotropy and nuclear modification of particle production in Au + Au collisions at $s_{(NN)}^{(1/2)} = 200$ -GeV, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 052302 (2004).
- [131] J. Adams *et al.* (STAR Collab.), Multi-strange baryon elliptic flow in Au + Au collisions at $s_{(NN)}^{(1/2)} = 200$ -GeV, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 122301 (2005).
- [132] L. Adamczyk *et al.* (STAR Collab.), Elliptic flow of identified hadrons in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ -62.4 GeV, *Phys. Rev.* **C88**, 014902 (2013).
- [133] M. M. Aggarwal *et al.* (STAR Collab.), An Experimental Exploration of the QCD Phase Diagram: The Search for the Critical Point and the Onset of De-confinement, arXiv:1007.2613 [nucl-ex].
- [134] J. C. Dunlop, M. A. Lisa and P. Sorensen, Constituent quark scaling violation due to baryon number transport, *Phys. Rev.* **C84**, 044914 (2011).
- [135] L. Nottale, Fractal space-time and microphysics: Towards a theory of scale relativity, *Singapore, Singapore: World Scientific* (1993).
- [136] J. Carroll *et al.*, Absorption Cross-Sections of π^{+-} , K^{+-} , p and anti- p on Nuclei Between 60-GeV/c and 280-GeV/c, *Phys. Lett.* **B80**, 319 (1979).
- [137] X. N. Wang and M. Gyulassy, HIJING: A Monte Carlo model for multiple jet production in p , p A and A A collisions, *Phys. Rev.* **D44**, 3501 (1991).
- [138] X. N. Wang and M. Gyulassy, A Systematic study of particle production in $p + p$ (anti- p) collisions via the HIJING model, *Phys. Rev.* **D45**, 844 (1992).
- [139] I. Zborovsky, M. V. Tokarev, Yu. A. Panebratsev and G. P. Škoro, Z scaling in proton - nucleus collisions at high-energies, JINR Preprint E2-97-24, Dubna (1997).

- [140] J. W. Cronin *et al.*, Production of Hadrons with Large Transverse Momentum at 200-GeV, 300-GeV, and 400-GeV, *Phys. Rev.* **D11**, 3105 (1975).
- [141] D. Antreasyan *et al.*, Production of Hadrons at Large Transverse Momentum in 200-GeV, 300-GeV and 400-GeV p p and p n Collisions, *Phys. Rev.* **D19**, 764 (1979).
- [142] D. Jaffe *et al.*, High Transverse Momentum Single Hadron Production in *pp* and *pd* Collisions at $s^{1/2} = 27.4$ -GeV and $s^{1/2} = 38.8$ -GeV, *Phys. Rev.* **D40**, 2777 (1989).
- [143] V.V. Abramov *et al.*, Pion Pair Production With Symmetrical Momenta In The Transverse Momentum Range $0.5\text{-gev}/c \leq P(t) \leq 2.0\text{-gev}/c$ In P P Collisions At 70-gev, *Pizma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 621 (1981).
- V.V. Abramov *et al.*, Hadron Production at Transverse Momenta From 0.5-GeV Up to 2.2-GeV/c in Proton Proton Collisions at 70-GeV, *Sov. J. Nucl. Phys.*, **31** 484 (1980). [*Nucl. Phys.* **B173**, 348 (1980).]
- V.V. Abramov *et al.*, Large Transverse Momentum Inclusive Hadron Production In P P Collisions At 70-gev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **41**, 700 (1985).
- [144] N. A. Nikiforov *et al.*, Backward Production Of Pions And Kaons In The Interaction Of 400-gev Protons With Nuclei, *Phys. Rev.* **C22**, 700 (1980).
- [145] O. P. Gavrishchuk, N. S. Moroz, V. P. Peresedov, L. S. Zolin, I. M. Belyaev and V. V. Lobanov, Charged pion backward production in 15-GeV - 65-GeV proton nucleus collisions, *Nucl. Phys.* **A523**, 589 (1991).
- I. M. Belyaev, O. P. Gavrishchuk, L. S. Zolin and V. F. Peresedov, Cumulative production of pions and kaons in proton - nucleus interactions at energies from 15-GeV to 65-GeV, *Phys. Atom. Nucl.* **56**, 1378 (1993) [*Yad. Fiz.* **56**, 135 (1993)].
- [146] V. V. Ammosov *et al.*, Measurement of the yields of positively charged particles at an angle of 35° in proton interactions with nuclear targets at an energy of 50 GeV, *Phys. Atom. Nucl.* **76**, 1213 (2013). [*Yad. Fiz.* **76**, 275 (2013)].
- [147] A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of low- p_T cumulative pion production in proton-nucleus collisions at high energies, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **11 2**, 91 (2014).
- [148] A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of high- p_T cumulative hadron production in p + A collisions at high energies at U70, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **11 4** 381 (2014).
- [149] A. A. Aparin, M. V. Tokarev, Self-similarity of Low- p_T cumulative pion production in proton-nucleus collisions at U70, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **11 4**, 391 (2014). Erratum: [*Phys. Part. Nucl. Lett.* **11 6**, 818 (2014)].
- [150] A. A. Aparin, M. V. Tokarev Cumulative hadron production in pA collisions in the framework of z -scaling, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **39**, 1560110 (2015).

- [151] M. V. Tokarev, I. Zborovský New properties of z -scaling: Flavor independence and saturation at low z , *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 1417 (2009).
- [152] Z. Tang, Y. Xu, L. Ruan, G. van Buren, F. Wang and Z. Xu, Spectra and radial flow at RHIC with Tsallis statistics in a Blast-Wave description, *Phys. Rev. C* **79**, 051901 (2009).
- [153] S. Chatrchyan *et al.* (CMS Collab.), Study of the inclusive production of charged pions, kaons, and protons in pp collisions at $\sqrt{s} = 0.9, 2.76, \text{ and } 7$ TeV, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2164 (2012).
- [154] S. Chatrchyan *et al.* (CMS Collab.), Study of the production of charged pions, kaons, and protons in pPb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV, *Eur. Phys. J. C* **74** **6**, 2847 (2014).
- [155] C. Tsallis, Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics, *J. Statist. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [156] C. Tsallis, R. S. Mendes and A. R. Plastino, The Role of constraints within generalized nonextensive statistics, *Physica A* **261**, 534 (1998).
- [157] C. Tsallis, Nonadditive entropy: The Concept and its use, *Eur. Phys. J. A* **40**, 257 (2009). [arXiv:0812.4370 [physics.data-an]].
- [158] J. Cleymans and D. Worku, The Tsallis Distribution in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 0.9$ TeV at the LHC, *J. Phys. G* **39**, 025006 (2012). [arXiv:1110.5526 [hep-ph]].
- [159] J. Cleymans and D. Worku, Relativistic Thermodynamics: Transverse Momentum Distributions in High-Energy Physics, *Eur. Phys. J. A* **48**, 160 (2012). [arXiv:1203.4343 [hep-ph]].
- [160] Y. p. Liu, Z. Qu, N. Xu and P. f. Zhuang, J/psi Transverse Momentum Distribution in High Energy Nuclear Collisions at RHIC, *Phys. Lett. B* **678**, 72 (2009). [arXiv:0901.2757 [nucl-th]].
- [161] L. Adamczyk *et al.* [STAR Collaboration], Suppression of Υ production in d+Au and Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}=200$ GeV, *Phys. Lett. B* **735**, 127 (2014). Erratum: [*Phys. Lett. B* **743**, 537 (2015).] [arXiv:1312.3675 [nucl-ex]].
- [162] J. Cleymans, G. I. Lykasov, A. S. Parvan, A. S. Sorin, O. V. Teryaev and D. Worku, Systematic properties of the Tsallis Distribution: Energy Dependence of Parameters in High-Energy p-p Collisions, *Phys. Lett. B* **723**, 351 (2013).
- [163] K. Meehan Results from Fixed Target Collisions at STAR, Quark Matter 2015 - XXV international conference on ultrarelativistic heavy-ion collisions, Kobe, Japan, Sep. 27 - Oct. 3, (2015).
- [164] (PHENIX Collab.) The PHENIX Experiment at RHIC, Decadal Plan 2011–2020. Brookhaven National Laboratory.
- [165] M. V. Tokarev, z -Scaling at RHIC, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **3**, 7 (2006).
- [166] M. V. Tokarev and I. Zborovský Self-similarity of pion production in AA collisions at RHIC, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **7** **3**, 171 (2010).

- [167] M. V. Tokarev, (on behalf of STAR Collab.), Self-similarity of negative particle production from the Beam Energy Scan Program at STAR, *Int. J. Mod. Phys.: Conference Series* **39**, 1560103 (2015)
- [168] M. V. Tokarev and I. Zborovský Energy scan in heavy-ion collisions and search for a critical point, *Phys. At. Nucl.* **75**, 700 (2012)
- [169] M. V. Tokarev and I. Zborovský Self-similarity of high pT hadron production in cumulative processes and violation of discrete symmetries at small scales (suggestion for experiment), *Phys. Part. Nucl. Lett.* **7**, 160 (2010).
- [170] M. V. Tokarev *et al.* Search for signatures of phase transition and critical point in heavy-ion collisions *Phys. Part. Nucl. Lett.* **8**, 533 (2011).
- [171] A. A. Aparin, M. V. Tokarev, I. Zborovský, Self-similarity of hard cumulative processes in fixed target experiment for BES-II at STAR, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **12 2**, 221 (2015).
- [172] A. Renyi *Probability Theory (North-Holland) (1970)*.