

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем им. В.П. Джелепова

Научно-экспериментальный отдел встречных пучков

На правах рукописи

УГЛОВ Евгений Дмитриевич

**Систематическое описание четырех-бозонных
процессов в Стандартной Модели на однопетлевом
уровне**

Специальность 01.04.16 —

физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук Калиновская Л.В.

кандидат физико-математических наук Бондаренко С.Г.

Дубна – 2017

Оглавление

Введение	1
Глава 1. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ (КЭД) в среде SANC	13
1.1 Наблюдаемые и обозначения	13
1.2 Ковариантная амплитуда	15
1.3 Спиральные амплитуды	20
1.4 Дерево процессов и предвычисления	22
1.5 Стандартные SANC FORTRAN модули	23
1.6 Дифференциальное сечение	29
Глава 2. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$	31
2.1 Ковариантная амплитуда	31
2.2 Спиральные амплитуды	33
2.3 Дерево процессов в системе SANC	36
2.4 Дифференциальное сечение и сравнение	38
Глава 3. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и распада $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$	40
3.1 Мультиканальный подход	41
3.2 Спиральные амплитуды	45
3.3 Сечение рассеяния и ширина распада	50
Глава 4. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$	54
4.1 Ковариантная амплитуда	54
4.2 Спиральные амплитуды	55
4.3 Численные сравнения	58
4.4 Поляризация физика	61
Глава 5. Компьютерные продукты системы SANC	65
5.1 Домашняя страница проекта SANC	65
5.2 Стандартный пакет SANC FORTRAN для вычислений	66

5.3	Генератор диаграмм и амплитуд SANC2	68
Глава 6.	Вычисление процесса $f\bar{f} \rightarrow W\gamma$	70
6.1	Ковариантные и спиральные амплитуды	70
6.2	Сечение рассеяния	72
6.3	Вычисление J-функций	74
6.4	Топологии T_2, T_4	80
6.5	Топологии T_1, T_3	85
6.6	Топологии $T_6, T_{6'}$	89
6.7	Свободные от массовых сингулярностей комбинации D_0, C_0 .	93
6.8	Численные результаты	94
	Заключение	100
	Список иллюстраций	101
	Литература	103

Список обозначений

В работе используются следующие обозначения:

ОИЯИ — Объединенный институт ядерных исследований, Россия

CERN — Европейская организация ядерных исследований, Швейцария

LHC — Большой адронный коллайдер в CERN

CMS — коллаборация Компактный мюонный соленоид в CERN

ATLAS — коллаборация Тороидальный аппарат на LHC в CERN

CT-PPS — коллаборация CMS высокоточный протонный спектрометр

AFP — коллаборация прямая физика на ATLAS

LEP — Большой электрон-позитронный коллайдер в CERN

DESY — Национальный немецкий исследовательский центр, Германия

HERA — Адронно-электронный кольцевой ускоритель в DESY

Fermilab — Национальная ускорительная лаборатория им. Э. Ферми, США

Tevatron — Кольцевой коллайдер в Fermilab

ILC — Международный линейный коллайдер

CLIC — Компактный линейный коллайдер

КЕК — Национальная исследовательская организация, Япония

JLC — Японская коллаборация по физике и детекторам на ILC в КЕК

SANC — поддержка вычислений для экспериментов на коллайдерах, ОИЯИ

PW — Теория чистослабых взаимодействий

ПВ — Пассарино–Вельтман

СМ — Стандартная Модель

КЭД — Квантовая электродинамика

КХД — Квантовая хромодинамика

ЭС — Теория электрослабых взаимодействий

СЦМ — Система центра масс

ФФ \mathcal{F}_i — скалярные форм-факторы

СА — спиральные амплитуды

Введение

В настоящий момент в CERN работает Большой адронный коллайдер (LHC), который сталкивает между собой протоны [1]. Энергия соударения настолько велика, что в конечном состоянии образуются новые частицы, которые позволяют нам исследовать материю на самых малых расстояниях и масштабах. Протоны в ускорителе циркулируют сгустками с более миллиардом частиц. Когда два сгустка фокусируются магнитами друг на друга в центре детекторов, таких как CMS и ATLAS, происходит соударение порядка 30 протонов. Остальные частицы пролетают дальше в ускорительное кольцо до следующего соударения.

Более частое событие с протонами немного другое. Если два протона пролетают близко друг от друга в различных направлениях, то из каждой частицы излучаются фотоны, которые могут сталкиваться между собой и рождать новые частицы.

При этом два первоначальных протона остаются практически невзаимодействующими, продолжая свой путь в ускорительном кольце LHC. Взаимодействие излученной пары фотонов отнимает лишь часть энергии протонов, заставляя их слегка отклониться от начальной траектории. Идентифицируя отклоненные протоны, можно определить, было ли такое взаимодействие фотонов. Данная схема эффективно превращает LHC в фотонный коллайдер. Также возможно взаимодействие протонов через обмен парой глюонов, что представляет интерес для КХД физики.

Идея мечения рассеянных протонов была предложена на предыдущих коллайдерах, а также на стадии LHC в 2012 и 2015 годах на низкоэнергетичных пучках. Предложение исследовать данный тип физики с помощью экспериментов CMS и ATLAS на LHC впервые высказано много лет назад, но проект под именем FP420 не был реализован.

Новый проект называется CMS-TOTEM – точный протонный спектрометр (CT-PPS), цель которого в настоящее время сделать возможным изучение фотон-фотонной физики на LHC при номинальной светимости. В то время как CMS является универсальным детектором для физики LHC, CT-PPS использует два набора детекторов, расположенных в 200 метрах от точки взаимодействия в CMS для измерения протонов, рассеянных в прямом направлении. Параллельный проект называется "Прямая физика на ATLAS" (AFP), который разрабатывается в коллаборации. Оба проекта нацелены на реализацию и сбор данных в течение 2017 года во время сеансов LHC для протон-протонных соударений.

Несмотря на электрическую нейтральность фотонов, Стандартная Модель (СМ) позволяет взаимодействовать двум фотонам через обмен виртуальными заряженными частицами. Возможны несколько конечных состояний, включая пару фотонов. Процесс рассеяния света на свете хорошо известен со времен развития квантовой электродинамики (КЭД) и косвенно проверялся в нескольких экспериментах, но первые прямые наблюдения были зафиксированы в прошлом году в эксперименте ATLAS при измерении столкновения ионов свинца при низкой светимости [2, 3]. Так как вероятность излучения фотонов пропорциональна квадрату электрического заряда частицы, сечение рассеяния при столкновениях ионов свинца значительно выше, чем при протон-протонных соударениях. Изучая события с двумя фотонами в отсутствие других частиц в центральной части детектора, а также используя кинематические ограничения для подавления фоновых событий, была получена инвариантная масса двух фотонов в диапазоне до 10 ГэВ. Измеренное сечение рассеяния соответствовало предсказаниям КЭД, результат в эксперименте ATLAS значимых отклонений в низкоэнергетическом диапазоне масс, как и ранее ожидалось, не зафиксировал.

Однако, в экспериментах CT-PPS и AFP соударения протонов с высокой светимостью позволяют исследовать большую область масс - в диапазоне

между 300 ГэВ и 2 ТэВ в случае СТ-PPS. Мечение протонов возможно из-за наблюдения высокоэнергетичных систем в центральной области, при этом протоны теряют достаточно много энергии чтобы отклониться в СТ-PPS детектор. Изучение взаимодействия фотонов в данной области может предоставить косвенные новые данные об электрослабом (ЭС) взаимодействии, в частности четырех-точечной константе взаимодействия, предсказанной в СМ. При данном взаимодействии два фотона аннигилируют через соударение и рождаются два W -бозона, производящих четыре частицы в той же точке. Отклонение от предсказаний СМ будет указывать на новую физику. Аналогично, как наблюдение отклонения в четырехчастичном взаимодействии в теории бета-распада Ферми в 1930 году в последующем привело к открытию W -бозона через 50 лет.

Имея потенциал в исследовании новой физики, фотон-фотонные коллайдеры являются объектом определенного интереса уже в течение нескольких десятилетий. Например, фотон-фотонные соударения изучались на Большом электрон-позитронном коллайдере LEP в CERN, в то время как исследования на HERA в DESY и Tevatron в Fermilab сосредотачивались на взаимодействиях протонов путем обмена глюонами для изучения квантовой хромодинамики КХД в непертурбативном режиме. На LHC получены пучки с гораздо большей энергией и светимостью, чем на LEP, но ценой соударения частиц, не являющихся элементарными. Поэтому, единичные взаимодействия между глюонами и кварками не имеют строго определенную энергию, а продукты взаимодействия включают в себя остатки от двух протонов, делая тем самым физический анализ более сложным в общем случае.

Два замечания по порядку при рассмотрении проекта ILC. Во-первых, мы рассматриваем только высокоэнергетичные фотонные коллайдеры со светимостями, представляющими реальный интерес для физики элементарных частиц. В то время как известны эксперименты для низкоэнергетичного рассеяния света на свете. В 1928-30 гг. Вавилов исследовал рассеяние

видимых фотонов от двух ламп. Затем, проходили эксперименты с фотонами от лазеров, но они также провалились из-за очень маленького сечения рассеяния фотона на фотоне при низкой энергии. Существовали идеи использовать синхротронное излучение, тормозное излучение фотонов, и даже ядерный взрыв для изучения фотон-фотонного взаимодействия. Фотоны тормозного излучения действительно могут быть достаточно высокоэнергетичными, но идея их соударения сложна в реализации на практике, более вероятны соударения виртуальных фотонов в накопительном кольце при большой светимости.

Во-вторых, хорошо известно, что при соударениях в электрон-позитронном линейном коллайдере электроны и позитроны излучают жесткие фотоны, примерно один такой фотон на электрон. Таким образом, совместно с позитрон-электронном коллайдером мы бесплатно получаем фотон-фотонный коллайдер с высокой светимостью и довольно большой энергией (обычно несколько процентов от энергии пучка, но может быть и выше). При очень большой энергии средняя энергия такого фотона тормозного излучения составляет 25% от энергии электрона. В 1988 году Бланкенбеклер и Дрелл рассматривали предложение использовать такой фотон-фотонный коллайдер в режиме квантового тормозного излучения. Недостатки данного метода следующие: необходимо иметь мультитевный линейный коллайдер (или коллайдер с очень маленьким размером пучка). Светимость также ограничена нестабильностью соударения пучков, спектр фотонов достаточно широк, и в сильном поле сталкивающегося пучка, фотоны будут рождать электрон-позитронные пары. Фотонный коллайдер, основанный на обратном рассеянии Комптона, вносит вклад в изучение низкоэнергетичной части спектра светимости фотон-фотонного взаимодействия и учитывается во всех моделированиях.

Возможность добавить моды фотон-фотон и фотон-электронных соударений для высокоэнергетичного электрон-позитронного линейного кол-

лайдера увеличивает общую стоимость проекта на малую долю. Хотя светимость фотон-фотонной моды в высокоэнергетичной части спектра будет в 3-5 раз меньше, чем светимость электрон-позитронной моды, сечение рассеяния света на свете обычно при равных условиях больше на фактор 5-10 и, таким образом, интересные события могут появляться чаще, чем в электрон-позитронных соударениях. Более того, дальнейшее увеличение достигнутой светимости фотон-фотонной моды может в будущем составлять тот же порядок, что и для основной моды. Так как фотон прямо взаимодействует со всеми фундаментальными заряженными частицами – лептонами, кварками, W -бозонами, суперсимметричными частицами и так далее – фотонный коллайдер предоставляет возможность исследовать каждый аспект СМ и за ней. Кроме того, фотоны могут взаимодействовать и с нейтральными частицами (глюонами, Z -бозоном, бозоном Хиггса и так далее) через петлевую боксовскую диаграмму с заряженными частицами в пропагаторах [4–8].

Компактный линейный коллайдер (CLIC) является проектируемой мультитэвной высокоэнергетичной линейной машиной для электрон-позитронных соударений. Для оптимального использования его физического потенциала, CLIC проектируется для постройки и функционирования поэтапно с тремя стадиями наращивания энергии в системе центра масс от нескольких ГэВ до 3 ТэВ. Первая стадия будет сосредоточена на высокоточной проверке Стандартной Модели, в частности измерений свойств бозона Хиггса и топ кварка. Следующая стадия будет сосредоточена на измерениях редких процессов с бозоном Хиггса, такие как поиск новой физики, и высокоточных измерениях для следующей стадии по проверке состояний, открытых на LHC или самом CLIC. В концептуальном дизайн-отчете CLIC в 2012 году был представлен полностью оптимизированный 3 ТэВ коллайдер, в то время как низкоэнергетичная стадия была разработана с меньшим уровнем проработки деталей. Оптимизированные стадии сценария предпо-

лагают три основных этапа по энергии в системе центра масс, а именно 380 ГэВ, 1.5 ТэВ и 3 ТэВ, реализация которых займет 22 года.

Физический потенциал линейного коллайдера значительно расширяется в случае использования поляризованных пучков. Данное требование для CLIC является обязательным, так как имеются два заряженных пучка и средние токи в пучке меньше, чем в низкоэнергетичных и низкочастотных машинах.

Пучок поляризованных электронов с 80% поляризацией может быть получен с помощью фотоинжектора SLC-типа. Хотя создание интенсивного поляризованного пучка позитронов и более сложная задача, рассеяние Комптона на высокомоощном лазерном луче может являться источником позитронов с 60-80% поляризацией. Экспериментальные разработки и прототипирование поляризованного позитронного источника, основанного на рассеянии Комптона, проводились в КЕК для JLC проекта. Данная схема позволяет использовать преимущество быстроразвивающейся лазерной технологии. Геометрия транспортировочных линий пучка на CLIC и накопительного кольца выбираются таким образом, чтобы сохранялась поляризация пучка, аналогично проекту SLC. Отсутствует значительная деполяризация по пути к точке соударения.

При соударении пучков из-за тормозного излучения и эффекта сильных полей при 3 ТэВ около 7% эффективной поляризации будет потеряно. Около половины данных потерь происходит из-за спиновой прецессии, вторая половина – из-за излучения при перевороте спина. Далее, данный пучок ускоряется до больших энергий и, таким образом, на стадию ускорения не влияет требование высокой светимости при поляризации. Поэтому подразумевается установка двух комптоновских полариметров с разных частей детектора. Измерение с точностью 0.5% для входящего пучка будет сравнимо в полученным на SLC и ожидаемых в дизайнах других проектов. Достижение подобного разрешения для высокоэнергетичного пучка является

сверхзадачей. Более подробно о поляризации пучка при 3 ТэВ в системе центра масс можно найти по первоисточнику.

Мода фотонных соударений рассматривалась во всех проектах линейных ускорителей CLIC. Диапазон энергий от 0.5 до 1 ТэВ идеально подходит для рассеяния света на свете с технической точки зрения: длина волны лазера должна быть около 1 мкм, то есть в области самых мощных твердотельных лазеров, и поэтому эффекты соударений не будут ограничивать светимость фотон-фотонной моды. В мультитэвной области энергий ситуация более сложная: эффекты соударений с рождением когерентной пары при рассеянии света на свете будут значительны, что может повлиять на конечную светимость. Оптимальная длина волны лазера увеличивается пропорционально выбранной энергии. В добавок, требуемая энергия вспышки лазера увеличивается из-за нелинейного Комптоновского рассеяния. Опция фотонного коллайдера на 3 ТэВ основывается на лазере с длиной волны 4-6 мкм, как показали недавние исследования. [9, 10].

Предложенный проект Международного линейного ускорителя (ILC) хорошо подходит для изучения физики за пределами СМ и точного предсказания структуры данной физики. Исследования могут быть более эффективными при использовании поляризованных пучков как электронов, так и позитронов. При данной опции показаны преимущества путем соответствующего анализа реакции при различных физических сценариях. Результат показывает, что использование поляризованного позитронного пучка при соответствующей экспериментальной среде и оборудовании линейного ускорителя, позволяет улучшить потенциал поиска новых частиц и определения их динамических свойств, что открывает дорогу к изучению СМ [11].

Рассеяние света на свете является одним из самых фундаментальных процессов. Он происходит через однопетлевую диаграмму типа бокс, содержащую заряженные частицы. Первый результат в КЭД для низкоэнергетического предела этого процесса был получен Эйлером [12]. Затем Карплус

и Неймен [13] нашли решения в КЭД в общем, но сложном виде. Сечение рассеяния для данного процесса в высокоэнергетическом пределе КЭД было вычислено Ахиезером [14]. В настоящее время имеются вычисления $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ процесса для ЭС СМ [15–18] и даже двухпетлевые поправки в КХД и КЭД [19].

SANC – компьютерная система полуавтоматических вычислений наблюдаемых и псевдонаблюдаемых величин для различных процессов взаимодействия элементарных частиц в СМ "от лагранжиана СМ до распределения событий" на однопетлевом уровне точности для существующих и будущих ускорителей частиц — Tevatron, LHC, ILC, CLIC, мюонных фабрик и других. Для более детального изучения доступных к расчету процессов в системе SANC имеется описание системы в статье [20, 21], а также на нашем сайте в ОИЯИ [22].

Работа, представленная в диссертации, заключается в систематическом внедрении четырех-бозонных процессов в среду SANC на однопетлевом уровне точности в СМ.

Следует отметить, что полученные строительные блоки и процедуры предвычислений для диаграмм типа бокс в теории КЭД и ЭС (как $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$, $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [18]) являются первыми шагами в создании окружения для внедрения подобных четырех-бозонных процессов в СМ (как $\gamma\gamma \rightarrow ZH$, $gg \rightarrow \gamma\gamma$, $gg \rightarrow ZZ$, $gg \rightarrow W^+W^-$ и других).

Целью данной работы является обеспечение теоретической поддержки в анализе данных и фонов на LHC и будущих ускорителях ILC, CLIC для изучения Хиггс-бозона и Новой физики в столкновениях бозонов при $\gamma\gamma$ -моде.

Для достижения поставленной цели требовалось решение следующих **задач**: разработка вычислительной среды для аналитических и численных расчетов в рамках системы SANC четырех-бозонных процессов; выполнение расчета на однопетлевом уровне точности в рамках СМ следующих четырех-

бозонных процессов: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$, $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$, а также процесса $u\bar{d} \rightarrow W^+\gamma$ и других; создание аналитических и фортанных модулей, реализующих результаты вычислений форм-факторов, спиральных амплитуд, сечений, включение их в пакет для внешних пользователей.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Разработана и реализована вычислительная среда процедур в системе SANC для расчета спиральных амплитуд, сечений процессов и ширин распадов четырех-бозонной физики в Стандартной Модели.
2. Получены аналитические выражения на однопетлевом уровне точности в мультиканальном подходе для спиральных амплитуд, сечений процессов и ширин распадов следующих процессов: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$, $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$.
3. Созданы автономные аналитические и фортанные модули вычисления сечений и ширины распада четырех-бозонных процессов для получения численных результатов и тщательного сравнения с другими программными продуктами и литературой.
4. Реализовано вычисление процесса $u\bar{d} \rightarrow W^+\gamma$ на партонном уровне, найден общий метод вычисления вспомогательных функций J типа Пассарино–Вельтмана.

Научная новизна и практическая значимость.

Впервые предложен единый подход к расчету четырех-бозонных процессов в СМ на однопетлевом уровне точности, основанный на полуавтоматических символьных вычислениях на языке FORM; впервые применен мультиканальный подход к вычислениям однопетлевых электрослабых поправок указанных процессов; предложен систематический подход для вычислений вспомогательных функций, типа D-функции Пассарино–Вельтмана (ПВ), удобных для анализа природы инфракрасных и массовых сингулярностей однопетлевых амплитуд при расчете однопетлевых поправок процесса $u\bar{d} \rightarrow W\gamma$; реализована концепция стандартных модулей, как

основного экспортного программного продукта системы SANC, с вычислением спиральных амплитуд, сечений и ширины распада, подготовленных к использованию в Монте–Карло генераторах. Существующий подход дает возможность использовать результаты исследования при анализе данных поляризационных экспериментов.

Результаты исследования имеют актуальное прикладное значение как для LHC, так и для физики будущих ускорителей ILC и CLIC. Разработанные стандартные SANC модули предполагаются к использованию коллаборацией ATLAS для оценки теоретической неопределенности на однопетлевом уровне точности в прямых наблюдениях процесса рассеяния света на свете на собранной статистике в тяжелоионной моде на ускорителе LHC для поиска Новой физики с учетом эффектов поляризации. Также высокоточные измерения с поляризованными пучками на будущих линейных e^+e^- коллайдерах ILC и CLIC потребуют современной теоретической поддержки, которая начинает создаваться.

Достоверность полученных результатов обеспечивается выбранным подходом к вычислению сечений рассматриваемых процессов в рамках Стандартной Модели с учетом однопетлевых поправок по теории возмущений, контролем сокращения калибровочных параметров и технических расходимостей, сравнением с имеющимися в литературе расчетами. Сделанные предсказания во всех случаях были весьма консервативны и осторожны.

В части сравнения предсказаний с реальными экспериментальными данными имеются опубликованные первые результаты эксперимента и обработки на КЭД уровне коллаборацией ATLAS, показывающие хорошее согласие с предсказаниями в рамках Стандартной Модели. Это позволяет считать выбранный инструментарий, в частности схемы учета неопределенностей при вычислении сечений, вполне адекватным рассматриваемым задачам.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международной конференции CALS-2006 (Дубна, июль 2006); междуна-

родных школах-совещаниях Гельмгольца (Дубна, июль 2009, июль 2012); рабочем совещании по физической программе ATLAS (Дубна, февраль 2016).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 10-02-01030, 12-02-91526-CERN_a.

Личный вклад. Автор был лидером разработки кода фортранных модулей четырех-бозонных процессов, принимал непосредственное участие в разработке среды аналитических процедур и кода аналитических расчетов на языке FORM для четырех-бозонного сектора системы SANC, создал библиотеку вспомогательных функций для численных расчетов, принимал участие в сравнении полученных результатов с имеющимися в литературе.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 6 печатных изданиях, входящих в список рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения.

Во Введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Глава 1 посвящена классическому подходу вычислений процессов Стандартной Модели на однопетлевом уровне точности в системе SANC на примере процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ (КЭД вклад).

В главе 2 приводятся результаты вычисления процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в СМ: явное выражение ковариантной амплитуды, спиральных амплитуд, а также дифференциальное сечение и сравнение данных величин.

В главе 3 описывается мультиканальный подход в вычислениях петлевых диаграмм на примере внедрения процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и распада $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$, а также приводятся спиральные амплитуды и численное сравнение для сечений и ширины распада.

Вычисления аналогичных величин для процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ отражены в главе 4 с учетом эффектов поляризационной физики.

В главе 5 описываются основные компьютерные продукты системы SANC, подробно приводятся структура и опции стандартного пакета SANC FORTRAN для вычислений наблюдаемых четырех-бозонных процессов. Кратко описывается генератор SANC2 однопетлевых диаграмм и амплитуд в CM, созданный для упрощения вычислений и имеющий статус для внутреннего пользования.

Глава 6 посвящена описанию вычисления процесса $f\bar{f} \rightarrow W\gamma(H)$ с нахождением аналитических выражений для мастер-интегралов с помощью вычисления вспомогательных J -функции для различных топологий диаграмм. Приводятся численные результаты сравнения.

В Заключении приведены основные результаты работы.

Полный объем диссертации **107** страниц текста с **33** рисунками и **3** таблицами. Список литературы содержит **44** наименований.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научным руководителям Л.В. Калиновской и С.Г. Бондаренко, под руководством и при поддержке которых была проведена данная работа. Благодарит Д.Ю. Бардина за обучение передовому опыту вычислений и бесценную возможность участия в проекте SANC. Признателен членам группы SANC: А.Б. Арбузову, П. Христовой, В.А. Колесникову, А.А. Сапронову и Р.Р. Садыкову за помощь в работе; соавторам А. Андонову и В. фон Шлиппе за полезные дискуссии. Безмерно благодарен Т.В. Тетеревой, А.Г. Ольшевскому и Г.Д. Ширкову, определившим научную карьеру и выбор направления применения своих сил.

Автор выражает глубочайшую благодарность своим родителям и жене за их безграничное терпение и поддержку, без которых данная работа не увидела бы свет.

Глава 1. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ (КЭД) в среде SANC

В данной главе описывается процедура внедрения процессов СМ в рабочую среду системы SANC от аналитического выражения амплитуды до численных результатов для наблюдаемых на примере процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ (КЭД часть) [23, 24] через фермионную петлю. При вычислении процессов учитываются ненулевые массы петлевых частиц.

В разделах обсуждаются обозначения и общие выражения для сечения, диаграммы процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ и ковариантные амплитуды в виде тензорных структур и форм-факторы, затем спиральные амплитуды в подходе [20, 25] и их явные выражения для рассеяния света на свете в общем (массивном) и предельном (безмассовом) расчетах.

Далее кратко описывается стратегия предвычисления, положение данного процесса в дереве процессов системы SANC, внедрение аналитических результатов и концепция SANC модулей.

Дополнительно представлены выражения для частных случаев специальных ПВ функций D_0 , C_0 , и B_0 [26] (а также [27]), которые необходимы вычисления рассеяния света на свете через массивные или безмассовые петлевые частицы.

1.1. Наблюдаемые и обозначения

Четырех-импульсы входящих фотонов обозначаются p_1 и p_2 , для исходящих — p_3 и p_4 . Амплитуды вычисляются для рассеяния реальных фотонов, то есть лежащих на массовой поверхности:

$$p_1^2 = 0, p_2^2 = 0, p_3^2 = 0, p_4^2 = 0.$$

Закон сохранения четырех-импульсов гласит:

$$p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0.$$

Переменные Мандельштама выражаются в виде (заметим, что в системе SANC используется метрика Паули):

$$\begin{aligned} s &= -(p_1 + p_2)^2 = -2p_1 \cdot p_2, & t &= -(p_1 - p_3)^2 = 2p_1 \cdot p_3, \\ u &= -(p_1 - p_4)^2 = 2p_1 \cdot p_4, & s + t + u &= 0. \end{aligned}$$

Для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ сечение рассеяния имеет вид:

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{j} |\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma}|^2 d\Phi^{(2)},$$

где $j = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2}$ – поток, $\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma}$ – ковариантная амплитуда процесса и $d\Phi^{(2)}$ – двухчастичный фазовый объем:

$$d\Phi^{(2)} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^4 p_3 \delta(p_3^2)}{(2\pi)^3} \frac{d^4 p_4 \delta(p_4^2)}{(2\pi)^3}.$$

Дифференциальное сечение рассеяния равно:

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{1}{128\pi s} |\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma}|^2 d\cos\theta,$$

где $s = 4\omega^2$, ω – энергия фотонов и θ – угол рассеяния в системе центра масс (далее – СЦМ).

Чтобы получить сечение рассеяния для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в аналитическом виде необходимо вычислить точную форму мастер-интегралов, B_0 , C_0 , D_0 – скалярных ПВ функций [26, 27] – для определенного набора параметров. В D_0 и C_0 функциях имеется коллинеарная расходимость, но дифференциальное сечение рассеяния свободно от массовых расходимостей, которые полностью сокращаются в общей сумме всех членов. A_0 и B_0 функции содержат ультрафиолетовые расходимости, которые полностью сокращаются в общей сумме вкладов диаграмм типа бокс. При вычислении данного процесса мы также столкнулись с проблемой расходимостей из-за углового обрезания, но они не физические и полностью сокращаются.

1.2. Ковариантная амплитуда

Ковариантная однопетлевая амплитуда получается в результате прямых стандартных вычислений всех диаграмм, вносящих вклад в данный процесс на древесном (борновском) и однопетлевом уровне.

Ковариантная амплитуда представляет из себя определенный базис, составленный из строковых выражений матриц Дирака и/или структур из импульсов внешних частиц, умноженные на вектор поляризации векторных бозонов $\epsilon(p)$, если они имеются. Амплитуда также содержит кинематические факторы и константы связи и параметризуется на определенное число форм-факторов, которые обозначаются как \mathcal{F}_i , в общем случае с индексом i , обозначающем соответствующую структуру. Число \mathcal{F}_i равно числу независимых структур.

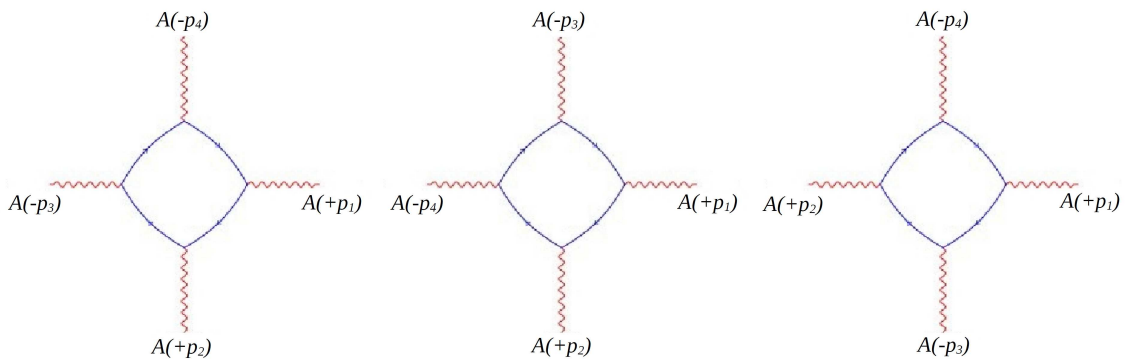


Рис. 1.1: КЭД диаграммы процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$.

Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в квантовой теории поля появляется благодаря нелинейным эффектам взаимодействия с вакуумом, поэтому данный процесс не имеет древесного или борновского уровня вычислений. Соответствующие диаграммы появляются на однопетлевом уровне и в КЭД соответствуют диаграммам типа бокс с четырьмя внутренними фермионами одинаковой массы. Число различных диаграмм (или топологий) равно шести. Но три из них отличаются от других только ориентацией потока внутреннего пет-

левого фермиона, и вносят одинаковый вклад, дающий фактор два в амплитуду. Таким образом, только три топологии (st , su , и ut -канал) остаются для вычислений и относятся к простым перестановкам внешних фотонов в диаграммах, показанных на Рис.1.1: su канал получается из st канала вращением $p_3 \leftrightarrow p_4$, а ut канал — вращением $p_2 \leftrightarrow p_3$. Сумма этих фермионных диаграмм калибровочно инвариантна для каждого поколения частиц.

В терминах Лоренцевских структур имеем:

$$\mathcal{A}_{\gamma\gamma\rightarrow\gamma\gamma} = \sum_{i=1}^{43} \mathcal{F}_i^{\text{fermions}}(s, t, u) T_i^{\alpha\beta\mu\nu},$$

где \mathcal{F}_i нормализуются на соответствующий фактор для фермионных частей $C^{\text{fermions}} = 8\alpha^2 Q_f^4 N_c$, α — константа тонкой структуры, Q_f — заряд заряженной частицы в петле в единицах заряда электрона e , N_c — число цветов для данного фермиона, $T_i^{\alpha\beta\mu\nu}$ — тензорные структуры, определяемые с помощью вспомогательных строк τ_j , представленных далее. Вне массовой поверхности получаем базис из 43 элементов, но для реальных фотонов на массовой поверхности остаются только 10 первых структур.

Таким образом, получаем минимальный набор тензорных структур для ковариантной амплитуды. Она может быть записана в простой форме с помощью скалярных ФФ \mathcal{F}_i . Вся зависимость от массы и других параметров включена в эти ФФ \mathcal{F}_i . Важно отметить, что каждый базовый элемент $T_i^{\alpha\beta\mu\nu}$, $i = 1 \div 43$ тензорной структуры с Лоренцевскими индексами четырёхжды поперечен по каждому внешнему фотону:

$$T_i^{\alpha\beta\mu\nu} p_\alpha = T_i^{\alpha\beta\mu\nu} p_\beta = T_i^{\alpha\beta\mu\nu} p_\mu = T_i^{\alpha\beta\mu\nu} p_\nu = 0.$$

ФФ \mathcal{F}_i — скалярные коэффициенты при каждой базисной структуре ковариантной амплитуды — проекция амплитуды на полное выражение базиса $T_i^{\alpha\beta\mu\nu}$. Они представляют собой некоторую комбинацию скалярных ПВ функций A_0, B_0, C_0, D_0 [26], и зависят от инвариантов s, t, u , а также от

масс фермионов и бозонов. При этом они не содержат ультрафиолетовых (УФ) полюсов.

Число слагаемых в \mathcal{F}_i равно тысячам в случае ненулевых масс петлевых частиц, но данное число значительно сокращается при нулевом пределе масс фермионов. Полный ответ для \mathcal{F}_i можно найти в системе SANC с помощью клиентской части, доступной на сервере [22].

В безмассовом пределе имеем следующий вид ФФ \mathcal{F}_i :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \frac{4}{3} \left(\frac{3i\pi}{s^2} + \frac{i\pi}{st} + \frac{i\pi}{su} + \frac{\pi^2 ut}{2s^4} - \frac{3\pi^2}{4s^2} + \frac{1}{s^2} \right) + \frac{4}{3} \left(-\frac{ut}{s^4} + \frac{3}{2s^2} \right) l_t l_u \\
&+ \frac{4}{3} \left(-\frac{3i\pi}{2s^2} - \frac{4i\pi}{su} - \frac{i\pi}{u^2} - \frac{t}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{su} \right) l_t \\
&+ \frac{4}{3} \left(-\frac{3i\pi}{2s^2} - \frac{4i\pi}{st} - \frac{i\pi}{t^2} - \frac{u}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{st} \right) l_u \\
&- \frac{2}{3} \left(-\frac{ut}{s^4} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{su} + \frac{1}{u^2} \right) l_t^2 - \frac{2}{3} \left(-\frac{ut}{s^4} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{st} + \frac{1}{t^2} \right) l_u^2, \\
\mathcal{F}_2 &= \frac{4}{3} \left(\frac{i\pi}{st} + \frac{i\pi}{su} - \frac{i\pi u}{t^3} - \frac{2i\pi}{t^2} - \frac{\pi^2}{2s^2} - \frac{2\pi^2}{st} - \frac{3\pi^2}{4t^2} + \frac{1}{t^2} \right) \\
&+ \frac{4}{3} \left(\frac{4i\pi}{st} + \frac{4i\pi}{su} - \frac{3i\pi}{2t^2} - \frac{i\pi}{u^2} + \frac{1}{su} - \frac{3}{t^2} \right) l_t \\
&+ \frac{4}{3} \left(\frac{i\pi su}{t^4} - \frac{3i\pi}{2t^2} + \frac{1}{st} - \frac{u}{t^3} + \frac{1}{t^2} \right) l_u + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{st} + \frac{3}{2t^2} \right) l_t l_u \\
&- \frac{2}{3} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{4}{su} + \frac{3}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right) l_t^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{st} + \frac{u^2}{t^4} + \frac{u}{t^3} + \frac{3}{t^2} \right) l_u^2, \\
\mathcal{F}_3 &= \frac{4}{3} \left(\frac{i\pi}{st} + \frac{i\pi}{su} - \frac{i\pi t}{u^3} - \frac{2i\pi}{u^2} - \frac{\pi^2}{2s^2} - \frac{2\pi^2}{su} - \frac{3\pi^2}{4u^2} + \frac{1}{u^2} \right) \\
&+ \frac{4}{3} \left(\frac{4i\pi}{st} + \frac{4i\pi}{su} - \frac{3i\pi}{2u^2} - \frac{i\pi}{t^2} + \frac{1}{st} - \frac{3}{u^2} \right) l_u + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{su} + \frac{3}{2u^2} \right) l_t l_u \\
&+ \frac{4}{3} \left(-\frac{i\pi t}{u^3} - \frac{i\pi t^2}{u^4} - \frac{3i\pi}{2u^2} + \frac{1}{su} - \frac{t}{u^3} + \frac{1}{u^2} \right) l_t \\
&- \frac{2}{3} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{4}{st} + \frac{3}{u^2} + \frac{1}{t^2} \right) l_u^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{4}{su} + \frac{t^2}{u^4} + \frac{t}{u^3} + \frac{3}{u^2} \right) l_t^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_5 &= -\frac{4}{3} \left(\frac{3i\pi}{s^2} + \frac{2i\pi}{st} + \frac{2i\pi}{su} + \frac{\pi^2 t^2}{2s^4} + \frac{\pi^2 t}{2s^3} - \frac{1}{s^2} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{t^2}{s^4} + \frac{t}{s^3} \right) l_t l_u \\
&\quad + \frac{4}{3} \left(\frac{3i\pi}{2s^2} + \frac{7i\pi}{2su} + \frac{2i\pi}{u^2} - \frac{t}{s^3} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{su} \right) l_t \\
&\quad + \frac{4}{3} \left(\frac{3i\pi}{2s^2} + \frac{7i\pi}{2st} + \frac{2i\pi}{t^2} + \frac{t}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{st} \right) l_u \\
&\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{t^2}{s^4} + \frac{t}{s^3} - \frac{3}{2s^2} - \frac{7}{2su} - \frac{2}{u^2} \right) l_t^2 \\
&\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{t^2}{s^4} + \frac{t}{s^3} - \frac{3}{2s^2} - \frac{7}{2st} - \frac{2}{t^2} \right) l_u^2, \\
\mathcal{F}_7 &= -\frac{4}{3} \left(\frac{i\pi}{st} + \frac{i\pi}{su} + \frac{2i\pi}{u^2} + \frac{\pi^2 t}{s^3} + \frac{3\pi^2}{4s^2} - \frac{1}{su} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{2t}{s^3} + \frac{3}{2s^2} \right) l_t l_u \\
&\quad - \frac{4}{3} \left(\frac{2i\pi t}{u^3} + \frac{3i\pi}{2u^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{su} + \frac{2}{u^2} \right) l_t - \frac{4}{3} \left(\frac{t}{s^3} + \frac{3}{4s^2} + \frac{t}{u^3} + \frac{3}{4u^2} \right) l_t^2 \\
&\quad + \frac{4}{3} \left(\frac{i\pi}{t^2} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{st} \right) l_u - \frac{4}{3} \left(\frac{t}{s^3} + \frac{3}{4s^2} - \frac{1}{2t^2} \right) l_u^2, \\
\mathcal{F}_9 &= -\frac{4}{3} \left(\frac{2i\pi}{st} + \frac{2i\pi}{su} + \frac{i\pi}{u^2} - \frac{\pi^2 t}{s^3} + \frac{3\pi^2}{4s^2} + \frac{3\pi^2}{4su} + \frac{1}{su} \right) \\
&\quad + \frac{4}{3} \left(-\frac{2t}{s^3} + \frac{3}{2s^2} + \frac{3}{2su} \right) l_t l_u - \frac{4}{3} \left(-\frac{t}{s^3} + \frac{3}{4s^2} + \frac{3}{4st} + \frac{3}{2su} - \frac{1}{t^2} \right) l_u^2 \\
&\quad - \frac{4}{3} \left(\frac{3i\pi}{2st} + \frac{3i\pi}{2su} - \frac{2i\pi}{t^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{st} + \frac{3}{su} \right) l_u \\
&\quad - \frac{4}{3} \left(-\frac{t}{s^3} + \frac{3}{4s^2} + \frac{3}{4su} + \frac{t}{2u^3} \right) l_t^2 + \frac{4}{3} \left(-\frac{i\pi t}{u^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{su} - \frac{1}{u^2} \right) l_t, \\
\mathcal{F}_{10} &= 4 \left(\frac{i\pi}{s^2} + \frac{i\pi}{st} + \frac{i\pi}{su} - \frac{\pi^2 t^2}{2s^4} - \frac{\pi^2 t}{2s^3} - \frac{\pi^2}{4s^2} - \frac{2}{s^2} \right) \\
&\quad - 4 \left(\frac{i\pi}{2s^2} + \frac{i\pi}{su} + \frac{i\pi}{u^2} + \frac{t}{s^3} - \frac{1}{su} \right) l_t - 4 \left(\frac{i\pi}{2s^2} + \frac{i\pi}{st} + \frac{i\pi}{t^2} + \frac{u}{s^3} - \frac{1}{st} \right) l_u \\
&\quad + 4 \left(\frac{t^2}{s^4} + \frac{t}{s^3} + \frac{1}{2s^2} \right) l_t l_u - 2 \left(\frac{t^2}{s^4} + \frac{t}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{su} + \frac{1}{u^2} \right) l_t^2 \\
&\quad - 2 \left(\frac{t^2}{s^4} + \frac{t}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{st} + \frac{1}{t^2} \right) l_u^2,
\end{aligned}$$

где

$$l_t = \ln \left(-\frac{t}{s} \right), \quad l_u = \ln \left(-\frac{u}{s} \right).$$

Также имеются соотношения между ФФ \mathcal{F}_i (даже в массивном случае):

$$\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_5, \quad \mathcal{F}_6 = \frac{u^2}{t^2} \mathcal{F}_7, \quad \mathcal{F}_8 = \mathcal{F}_9.$$

Другие ФФ \mathcal{F}_i (а именно 11-43) не нулевые, но они не вносят вклад, потому что соответствующие базисные структуры при нахождении фотонов на массовой поверхности удовлетворяют соотношению Варда: $k_i \epsilon_i(k_i) = 0$.

Для получения компактной формы тензорных структур для амплитуды мы выбираем 14 простых тензорных строк:

$$\begin{aligned} \tau_1^{ij} &= p^{1i} p^{2j} + \frac{s}{2} \delta^{ij}, \tau_2^{ij} = p^{3i} p^{4j} + \frac{s}{2} \delta^{ij}, \tau_3^{ij} = p^{2i} p^{3j} + \frac{t}{2} \delta^{ij}, \\ \tau_4^{ij} &= p^{1i} p^{4j} + \frac{t}{2} \delta^{ij}, \tau_5^{ij} = p^{1i} p^{3j} + \frac{u}{2} \delta^{ij}, \tau_6^{ij} = p^{4i} p^{2j} + \frac{u}{2} \delta^{ij}, \\ \tau_7^i &= p^{1i} - \frac{t}{u} p^{2i}, \tau_8^i = p^{1i} - \frac{u}{t} p^{2i}, \tau_9^i = p^{1i} - \frac{s}{t} p^{3i}, \\ \tau_{10}^i &= p^{2i} - \frac{s}{u} p^{3i}, \tau_{11}^i = p^{4i}, \tau_{12}^i = p^{3i}, \tau_{13}^i = p^{2i}, \tau_{14}^i = p^{1i}. \end{aligned}$$

Тогда полный базис $T_i^{\alpha\beta\mu\nu}$ может быть представлен в краткой форме с помощью данных вспомогательных строк τ_j :

$$\begin{aligned}
T_1^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\alpha\beta} \tau_2^{\mu\nu}, T_2^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_3^{\beta\nu} \tau_4^{\alpha\mu}, T_3^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_5^{\alpha\nu} \tau_6^{\beta\mu}, T_4^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_1^{\alpha\beta} \tau_7^{\mu} \tau_8^{\nu}, \\
T_5^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\mu\nu} \tau_9^{\beta} \tau_{10}^{\alpha}, T_6^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_3^{\beta\nu} \tau_7^{\mu} \tau_{10}^{\alpha}, T_7^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_4^{\alpha\mu} \tau_8^{\nu} \tau_9^{\beta}, T_8^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_5^{\alpha\nu} \tau_7^{\mu} \tau_9^{\beta}, \\
T_9^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_6^{\beta\mu} \tau_8^{\nu} \tau_{10}^{\alpha}, T_{10}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_7^{\mu} \tau_8^{\nu} \tau_9^{\beta} \tau_{10}^{\alpha}, T_{11}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_1^{\alpha\beta} \tau_7^{\mu} \tau_1^{\nu}, T_{12}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_2^{\mu\nu} \tau_9^{\beta} \tau_{14}^{\alpha}, \\
T_{13}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_3^{\beta\nu} \tau_7^{\mu} \tau_{14}^{\alpha}, T_{14}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_4^{\alpha\mu} \tau_8^{\nu} \tau_{13}^{\beta}, T_{15}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_5^{\alpha\nu} \tau_7^{\mu} \tau_{13}^{\beta}, T_{16}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_6^{\beta\mu} \tau_8^{\nu} \tau_{14}^{\alpha}, \\
T_{17}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\alpha\beta} \tau_{11}^{\mu} \tau_8^{\nu}, T_{18}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_2^{\mu\nu} \tau_{13}^{\beta} \tau_{10}^{\alpha}, T_{19}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_3^{\beta\nu} \tau_{11}^{\mu} \tau_{10}^{\alpha}, T_{20}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_4^{\alpha\mu} \tau_{12}^{\nu} \tau_9^{\beta}, \\
T_{21}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_5^{\alpha\nu} \tau_{11}^{\mu} \tau_9^{\beta}, T_{22}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_6^{\beta\mu} \tau_{12}^{\nu} \tau_{10}^{\alpha}, T_{23}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_1^{\alpha\beta} \tau_{11}^{\mu} \tau_{12}^{\nu}, T_{24}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_2^{\mu\nu} \tau_{13}^{\beta} \tau_{14}^{\alpha}, \\
T_{25}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_3^{\beta\nu} \tau_{11}^{\mu} \tau_{14}^{\alpha}, T_{26}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_4^{\alpha\mu} \tau_{12}^{\nu} \tau_{13}^{\beta}, T_{27}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_5^{\alpha\nu} \tau_{11}^{\mu} \tau_{13}^{\beta}, T_{28}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_6^{\beta\mu} \tau_{12}^{\nu} \tau_{14}^{\alpha}, \\
T_{29}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_7^{\mu} \tau_8^{\nu} \tau_{13}^{\beta} \tau_{14}^{\alpha}, T_{30}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_7^{\mu} \tau_9^{\beta} \tau_{12}^{\nu} \tau_{14}^{\alpha}, T_{31}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_7^{\mu} \tau_{10}^{\nu} \tau_{12}^{\beta} \tau_{13}^{\alpha}, \\
T_{32}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_8^{\nu} \tau_9^{\beta} \tau_{11}^{\mu} \tau_{14}^{\alpha}, T_{33}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_8^{\nu} \tau_{10}^{\alpha} \tau_{13}^{\beta} \tau_{11}^{\mu}, T_{34}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_9^{\beta} \tau_{10}^{\alpha} \tau_{11}^{\mu} \tau_{12}^{\nu}, \\
T_{35}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_7^{\mu} \tau_8^{\nu} \tau_9^{\beta} \tau_{14}^{\alpha}, T_{36}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_7^{\mu} \tau_8^{\nu} \tau_{10}^{\alpha} \tau_{13}^{\beta}, T_{37}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_7^{\mu} \tau_9^{\beta} \tau_{10}^{\alpha} \tau_{12}^{\nu}, \\
T_{38}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_8^{\nu} \tau_9^{\beta} \tau_{10}^{\alpha} \tau_{11}^{\mu}, T_{39}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_{11}^{\mu} \tau_{12}^{\nu} \tau_{13}^{\beta} \tau_{10}^{\alpha}, T_{40}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_{11}^{\mu} \tau_{12}^{\nu} \tau_{14}^{\alpha} \tau_9^{\beta}, \\
T_{41}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_{11}^{\mu} \tau_{13}^{\beta} \tau_{14}^{\alpha} \tau_8^{\nu}, T_{42}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_{12}^{\nu} \tau_{13}^{\beta} \tau_{14}^{\alpha} \tau_7^{\mu}, T_{43}^{\alpha\beta\mu\nu} = \tau_{11}^{\mu} \tau_{12}^{\nu}
\end{aligned}$$

1.3. Спиральные амплитуды

В системе SANC используется подход спиральных амплитуд [20, 25].

В выражении для ковариантных амплитуд, как показано выше, имеются тензорные структуры и набор скалярных ФФ \mathcal{F}_i . Для вычисления наблюдаемых величин, таких как сечение рассеяния, необходимо квадрировать амплитуду, вычислять в общем виде произведение Дираковских спиноров и перемножать Лоренцевские индексы с векторами поляризации. В стандартном подходе вычисляют квадрат амплитуды для каждой диаграммы и их интерференции. Это приводит к огромному числу членов конечного выражения.

В подходе спиральных амплитуд мы также получаем тензорные структуры и ФФ \mathcal{F}_i . Но на следующем шаге вычислений выражение проецируется

на базис соответствующей спиральности и в результате получаем неинтерферируемые амплитуды, так как каждая из них характеризуется своим различным набором квантовых чисел – спиральностями. Данным способом мы можем разделить вычисления Дираковских спиноров, если они необходимы, и умножение Лоренцевских индексов от вычислений скалярных ФФ \mathcal{F}_i . Более того, мы можем это сделать до квадрирования амплитуды. Таким образом, мы получаем сокращение времени вычислений (меньше количество членов благодаря нулевой интерференции) и больший пошаговый контроль.

Для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ общее число СА равно 16 и соответствует различным комбинациям проекций спина внешних частиц. Имеем 4 фотона с двумя возможностями поляризации $'+'$ и $'-'$, тогда общее число СА равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. СА являются скалярными выражениями, которые представляются с помощью 10 ФФ \mathcal{F}_i при фотонах на массовой поверхности. Результат применения процедуры TRACENHelicity.prc:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{++++} &= \mathcal{H}_{----} = \\
&\quad \frac{1}{4} \left[s^2 \mathcal{F}_1 + t^2 \mathcal{F}_2 + u^2 \mathcal{F}_3 + 2s^2 \mathcal{F}_5 + 2su\mathcal{F}_7 - 2su\mathcal{F}_9 + s^2 \mathcal{F}_{10} \right], \\
\mathcal{H}_{++++-} &= \mathcal{H}_{++-+-} = \mathcal{H}_{+--+} = \mathcal{H}_{-+++} = \mathcal{H}_{----+} = \mathcal{H}_{---+-} = \\
\mathcal{H}_{-+--} &= \mathcal{H}_{+---} = \frac{1}{4} \left[-s^2 \mathcal{F}_5 - su\mathcal{F}_7 + su\mathcal{F}_9 - s^2 \mathcal{F}_{10} \right], \\
\mathcal{H}_{+--+} &= \mathcal{H}_{-+-+} = \frac{1}{4} \left[u^2 \mathcal{F}_3 - 2su\mathcal{F}_9 + s^2 \mathcal{F}_{10} \right], \\
\mathcal{H}_{+---+} &= \mathcal{H}_{-++-} = \frac{1}{4} \left[t^2 \mathcal{F}_2 + 2su\mathcal{F}_7 + s^2 \mathcal{F}_{10} \right], \\
\mathcal{H}_{++--} &= \mathcal{H}_{--++} = \frac{1}{4} s^2 \left[\mathcal{F}_1 + 2\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_{10} \right].
\end{aligned}$$

Отметим, что наблюдаются пять независимых СА, в том время как в случае безмассового предела для фермиона в петле имеем 4 независимых

СА, которые выражаются в компактной форме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{++--} = \mathcal{H}_{--++} &= -1 + \left(\frac{t-u}{s}\right)(l_u - l_t) - \left(\frac{1}{2} - \frac{ut}{s^2}\right)(l_u l_t + \pi^2), \\
\mathcal{H}_{+--+} = \mathcal{H}_{-+-+} &= -1 - i\pi \left(\frac{t-s}{u}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{st}{u^2}\right)l_t^2 \\
&\quad - \left[(1 + i\pi) \left(\frac{t-s}{u}\right) + 2i\pi \left(\frac{t}{u}\right)^2 \right] l_t, \\
\mathcal{H}_{+---} = \mathcal{H}_{-+++} &= -1 - i\pi \left(\frac{u-s}{t}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{su}{t^2}\right)l_u^2 \\
&\quad - \left[(1 + i\pi) \left(\frac{u-s}{t}\right) + 2i\pi \left(\frac{u}{t}\right)^2 \right] l_u.
\end{aligned}$$

Все другие СА равны +1.

Все соотношения между СА получаются благодаря С, Р, Т-инвариантности. Более того, имеется также соотношение из-за кросс-симметрии:

$$\mathcal{H}_{+---}(s, t, u) = \mathcal{H}_{-+-+}(s, u, t),$$

но данный факт не означает уменьшение числа независимых СА.

1.4. Дерево процессов и предвычисления

В данном разделе кратко описываются аналитические модули для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$.

Для диаграмм типа бокс в системе SANC идея предвычислений становится жизненно необходимой [20]. Вычисления ряда диаграмм для некоторых процессов занимает так много времени, что внешние пользователи системы должны отказаться от повторения предвычислений в системе SANC. Более того, многообразие диаграмм типа бокс требует классификации. В зависимости от типа внешних линий (f для фермионов и b для бозонов), мы различаем три больших класса диаграмм типа бокс: $ffff$, $ffbb$, и $bbbb$.

Сумма вкладов фермионных петель диаграмм типа бокс образуют калибровочно инвариантное и ультрафиолетово конечное выражение в след-

ствие поперечности по импульсам каждого внешнего фотона. Это также справедливо и для бозонной суммы. Поэтому мы можем разделить вклады в КЭД и ЭС частей процесса при аналитических вычислениях.

Файл предвычислений AAAA Vox (на дереве процессов в системе SANC на Рис.1.2 из клиента SANC с сайта [22]) содержит последовательные процедуры вычисления ковариантной амплитуды. На данном этапе мы предполагаем, что все частицы входящие (обозначены как p) и фотоны находятся вне массовой поверхности. Поэтому данные результаты могут быть использованы в других процессах, где необходимы данные строительные блоки.

Когда вычислялся процесс $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ (ветка 4A КЭД процессов), использовался несколько раз строительный блок с заменой входящих импульсов p соответствующими кинематическими импульсами верного знака, и вычислялись ФФ \mathcal{F}_i в модуле AA->AA (FF). Затем спиральные амплитуды в модуле AA->AA (HA) и в конце — аналитические выражения для дифференциального и интегрального сечения рассеяния в модуле AA->AA (XS) для КЭД процесса.

1.5. Стандартные SANC FORTRAN модули

Представим концепцию пакетов SANC модулей.

В системе SANC имеется возможность экспорта аналитических результатов для численных вычислений [20]. Более того, имеются средства для проверки внедрения данных Стандартных SANC FORTRAN модулей (далее — SSFM) [21] — интеграторы для данных процессов основаны на алгоритме VEGAS [28].

Для процесса рассеяния света на свете (КЭД часть) модули SSFM включены в пакет sanc_4A_v1.00 (Рис.1.3), который доступен для скачивания на странице [22].

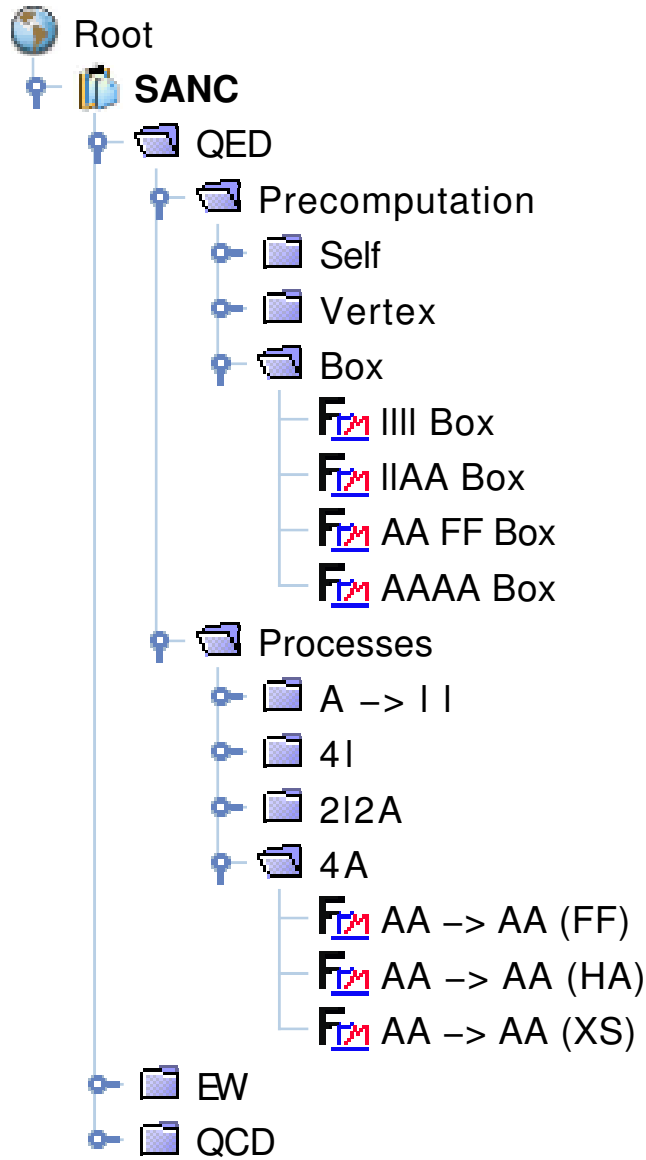


Рис. 1.2: Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в КЭД дереве

В пакет включена библиотека, где представлены аналитические выражения для ПВ-функций и ряда специальных интегралов. Для примера, приведем часть из них.

Функция B_0 для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ имеет вид:

$$B_0(Q^2; M, M) = \frac{1}{\epsilon} + 2 - \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \beta \ln\left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1}\right),$$

где

$$\beta^2 = 1 - \frac{4\widetilde{M}^2}{Q^2}, \quad \widetilde{M}^2 = M^2 - i\epsilon.$$

SANC Modules.

SANC NC package (Neutral Current processes modules).

The previous versions of SANC NC package you can find in [SANC Archives](#).

➤ [29/07/2009 SANC NC v1.21 package](#) (356 Kb tgz-file) [\[last stable version\]](#)

In v1.21 package some bugs in the EW part are fixed. Details are in the file CHANGES.

➤ [13/02/2008 SANC NC v1.10 package](#) (300 Kb tgz-file) [\[stable version\]](#)

In v1.10 package the f1f1HZ processes are added. For description of the f1f1HZ processes please refer to the paper D. Bardin et al., Comput. Phys. Comm. 177 (2007) 738-756. Details are in the file CHANGES.

This package is intended for calculation of the 1-loop radiative correction to Drell-Yan Neutral Current processes at partonic level. For a Technical Description of this module please refer to the paper Eur. Phys. J. C54 (2008) 451.

SANC CC package (Charged Current processes modules).

The previous versions of SANC CC package you can find in [SANC Archives](#).

➤ [16/06/2009 SANC CC v1.30 package](#) (236 Kb tgz-file) [\[last stable version\]](#)

In v1.30 package the modules for new processes are added. Details are in the file CHANGES.

➤ [05/12/2008 SANC CC v1.20 package](#) (160 Kb tgz-file) [\[stable version\]](#)

In v1.20 package the modules for new processes are added. Details are in the file CHANGES.

➤ [28/10/2008 SANC CC v1.11 package](#) (131 Kb tgz-file) [\[stable version\]](#)

In v1.11 package some bugs in the QCD soft-virtual part are fixed. Details are in the file CHANGES.

This package is intended for calculation of the 1-loop radiative correction to Drell-Yan Charged Current processes at partonic level, see A. Arbuzov et al., Eur. Phys. J. C46 (2006) 407.

SANC 4A package.

➤ [19/11/2009 SANC 4A v1.00 package](#) (21 Kb tgz-file) [\[last stable version\]](#)

This package is intended for calculation of the 1-loop full EW correction to light-by-light scattering processes, see D. Bardin et al., "Light-by-light scattering in SANC", hep-ph/0611188.

Рис. 1.3: Сайт SANC для скачивания модулей [22].

В безмассовом случае фермионных масс $M \rightarrow 0$, получаем:

$$\begin{aligned} B_0(s; M, M) &= \frac{1}{\bar{\epsilon}} + 2 - \left[\ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - i\pi \right], \\ B_0(t; M, M) &= \frac{1}{\bar{\epsilon}} + 2 - \left[l_t + \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right], \\ B_0(u; M, M) &= \frac{1}{\bar{\epsilon}} + 2 - \left[l_u + \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

C_0 функция имеет вид:

$$C_0(0, 0, Q^2; M, M, M) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(Q^2 y - Q^2 xy + \widetilde{M}^2 \right)^{-1}.$$

После вычислений:

$$C_0(0, 0, Q^2; M, M, M) = -\frac{1}{Q^2} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{1}{x_1} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1}{x_2} \right) \right],$$

где $x_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm \beta)$.

Для $M \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} C_0(0, 0, s; M, M, M) &= -\frac{1}{2s} \left[\ln \left(\frac{M^2}{s} \right) + i\pi \right]^2, \\ C_0(0, 0, t; M, M, M) &= -\frac{1}{2t} \left[\ln \left(\frac{M^2}{s} \right) - l_t \right]^2, \\ C_0(0, 0, u; M, M, M) &= -\frac{1}{2u} \left[\ln \left(\frac{M^2}{s} \right) - l_u \right]^2. \end{aligned}$$

D_0 функция имеет вид:

$$D_0(0, 0, 0, 0, Q^2, P^2; M, M, M, M) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \left((Q^2 + P^2) xz - P^2 xy - Q^2 yz + P^2 y - P^2 z + \widetilde{M}^2 \right)^{-2}.$$

Окончательный ответ имеет вид:

$$\begin{aligned} D_0(0, 0, 0, 0, Q^2, P^2; M, M, M, M) &= -\frac{2}{stA_3} \left\{ \right. \\ &+ \text{Li}_2 \left(\frac{1 + A_3}{A_1 + A_3} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{A_{33}}{A_{13}} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1 + A_3}{A_2 + A_3} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{A_{33}}{A_{23}} \right) \\ &- \text{Li}_2 \left(-\frac{A_{33}}{A_1 + A_3} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{A_{33}}{A_2 + A_3} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{A_{13}}{1 + A_3} \right) \\ &- \text{Li}_2 \left(-\frac{A_{23}}{1 + A_3} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{A_{13}}{1 + A_3} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{A_{23}}{1 + A_3} \right) \\ &\left. - 2\zeta(2) + 2i\pi \ln \left(1 + \frac{1}{A_3} \right) \theta(-\text{Im}(A_1 + A_3)) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{1 - \frac{4\widetilde{M}^2}{Q^2}}, \quad A_2 = \sqrt{1 - \frac{4\widetilde{M}^2}{P^2}}, \quad A_3 = \sqrt{1 - \frac{4\widetilde{M}^2(Q^2 + P^2)}{Q^2 P^2}}, \\ A_{33} &= \frac{4\widetilde{M}^2(Q^2 + P^2)}{Q^2 P^2(1 + A_3)}, \quad A_{23} = \frac{4\widetilde{M}^2}{Q^2(A_2 + A_3)}, \quad A_{13} = \frac{4\widetilde{M}^2}{P^2(A_1 + A_3)}; \end{aligned}$$

$\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Для $M \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
D_0(0, 0, 0, 0, s, t; M, M, M, M) &= \\
\frac{2}{st} \left[\ln^2 \left(-\frac{M^2}{t} \right) + \ln \left(-\frac{M^2}{t} \right) l_t - \frac{\pi^2}{2} + i\pi \ln \left(-\frac{M^2}{t} \right) \right], \\
D_0(0, 0, 0, 0, u, t; M, M, M, M) &= \\
\frac{2}{ut} \left[\ln^2 \left(\frac{M^2}{s} \right) - \ln \left(\frac{M^2}{s} \right) (l_t + l_u) - \frac{\pi^2}{2} + l_t l_u \right], \\
D_0(0, 0, 0, 0, s, u; M, M, M, M) &= \\
\frac{2}{su} \left[\ln^2 \left(-\frac{M^2}{u} \right) + \ln \left(-\frac{M^2}{u} \right) l_u - \frac{\pi^2}{2} + i\pi \ln \left(-\frac{M^2}{u} \right) \right].
\end{aligned}$$

Для вычисления полного сечения рассеяния необходимо проинтегрировать дифференциальное сечение по углу θ . При подстановке $x = \cos \theta$, получаем:

$$\frac{t}{s} = -\frac{1+x}{2}, \quad \frac{u}{s} = -\frac{1-x}{2}, \quad -1 < x < +1.$$

Приведем ниже таблицу интегралов, которые вычислены аналитически для рассматриваемого процесса:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{+1} \ln(x) \ln^3(1-x) [-2 + 8x - 16x^2 + 16x^3 - 8x^4] dx = \\
& \quad -\frac{1}{75} \left(\frac{229351664}{108000} - \frac{14\pi^4}{3} - \frac{18989\pi^2}{180} - 494\zeta(3) \right), \\
& \int_{-1}^{+1} \ln^3(1-x) \left[\frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \ln(1-x) \left(\frac{2}{x^4} - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^2} \right) \right] dx = \\
& \quad -\frac{8\pi^2}{3} + \frac{32\pi^4}{45} + 24\zeta(3), \\
& \int_{-1}^{+1} \ln^2(x) \ln^2(1-x) \left[\frac{1}{2} - 2x + 4x^2 - 4x^3 + 2x^4 \right] dx = \\
& \quad +\frac{1}{225} \left(-\frac{12239\pi^2}{180} + \frac{430069869}{324000} - 494\zeta(3) - \frac{7\pi^4}{12} \right), \\
& \int_{-1}^{+1} \ln(x) \ln^2(1-x) [6 - 24x + 36x^2 - 24x^3] dx = -\frac{5\pi^2}{6} + \frac{1253}{144}, \\
& \int_{-1}^{+1} \ln^4(1-x) [1 - 2x + 4x^2 - 4x^3 + 2x^4] dx = \frac{184815041}{8100000}, \\
& \int_{-1}^{+1} \ln^3(1-x) [-4 + 8x - 12x^2 + 8x^3] dx = \frac{331}{144}, \\
& \int_{-1}^{+1} \ln(x) \ln(1-x) \left[4 - 12x + 12x^2 + \pi^2(1-2x)^2 + 4\pi^2x^2(1-x)^2 \right] dx = \\
& \quad +\frac{1}{9} \left(35 + \frac{7739\pi^2}{1500} - \frac{7\pi^4}{10} \right), \\
& \int_{-1}^{+1} \ln^2(1-x) (8 - 12x + 12x^2 + \pi^2(3 - 4x + 8x^2 - 8x^3 + 4x^4)) dx = \\
& \quad \frac{1}{9} \left(125 + \frac{72989\pi^2}{1500} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{+1} \ln^2(1-x) \left[\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right] dx + \int_{-1}^{+1} \ln(1-x) \left[\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} \right] dx \\
& + \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right] dx = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2\pi^2}{3} \right), \\
& \int_{-1}^{+1} \ln(1-x) \left[\frac{4}{x} - 4 + 4x + \pi^2 \left(\frac{8}{x} - 3 + 4x - 6x^2 + 4x^3 \right) \right] dx = \\
& \quad 1 + \frac{11\pi^2}{12} - \frac{4\pi^4}{3}, \\
& \int_{-1}^{+1} \left[\pi^2 (3 - 2x + 2x^2) + 8 + \pi^4 \left(\frac{1}{4} - x + 2x^2 - 2x^3 + x^4 \right) \right] dx = \\
& \quad \frac{7\pi^4}{60} + \frac{8\pi^2}{3} + 8, \\
& \int_{-1}^{+1} \ln^4(1-x) \frac{1}{x} dx = 24\zeta(5), \quad \int_{-1}^{+1} \ln^3(1-x) \frac{1}{x} dx = -\frac{\pi^4}{15}, \\
& \int_{-1}^{+1} \ln^2(1-x) \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi^2}{3}, \quad \int_{-1}^{+1} \ln^2(1-x) \frac{1}{x} dx = 2\zeta(3).
\end{aligned}$$

1.6. Дифференциальное сечение

Дифференциальное сечение для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ (КЭД части) имеет вид:

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{e^8}{8\pi\omega^2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{H}_{\text{spins}}|^2 d\cos\theta,$$

где ω частота фотона, θ угол рассеяния в СЦМ и СА выражены с помощью ФФ \mathcal{F}_i . Все промежуточные расчеты можно найти в системе SANC, доступной на сервере [22].

Для проверки аналитических результатов мы вычислили полное сечение для КЭД части в безмассовом пределе. После вычитаний в спиральных

амплитудах и интегрирования по углу рассеяния, получаем:

$$\sigma_{\gamma\gamma\rightarrow\gamma\gamma}^{\text{QED}} = \frac{e^8}{2\pi\omega^2} \left(\frac{108}{5} + \frac{13}{2}\pi^2 - 8\pi^2\zeta(3) + \frac{148}{225}\pi^4 - 24\zeta(5) \right).$$

Данный результат сравнивался с [14], достигнуто полное согласие. Предел для КЭД частей спиральных амплитуд сравнивался отдельно для каждой с [19], и также получено полное согласие. Выражения с учетом масс частиц для спиральных амплитуд КЭД части сравнивались с [16] и [17].

Глава 2. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

В данной главе описывается внедрение процесса СМ $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ через фермионную [23] и бозонную петли [29] и соответствующие модули предвычислений в рабочей среде системы SANC. Вычисления этого процесса учитывают ненулевые массы петлевых частиц.

В разделах приводятся выражения для сечения, диаграммы процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ (СМ), ковариантные амплитуды в виде тензорных структур, затем спиральные амплитуды в подходе [20, 25].

Также представлены численные результаты и их сравнение с имеющимися в литературе расчетами.

2.1. Ковариантная амплитуда

Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в КЭД приведено в предыдущей главе. Далее будет описано вычисление ЭС части процесса и интерференционные компоненты в СМ.

В ЭС бозонном секторе мы имеем три типа диаграмм, классифицируемых следующим образом: топологии типа бокс, топологии типа пинч, и топологии типа рыба (показаны на Рис.2.1). Имеются также три канала для каждой топологии (st , su , и ut -каналы как в КЭД), с внутренними петлевыми частицами W^+ , W^- , ϕ^+ , ϕ^- , и X^+ , X^- (бозоны и госты) в R_ξ калибровочной теории. Как для фермионной части мы должны выбрать положительный или отрицательный заряд бозонов и гостей X^+ , X^- , появляющихся в качестве петлевых частиц и умножить результат вычислений на фактор два, чтобы убрать двойной счет диаграмм, которые отличаются друг от друга только ориентацией потока заряженной частицы в петле.

Таким образом, получаются три структуры (три канала, комбинаторный фактор равен единице) для диаграмм типа бокс; двенадцать структур

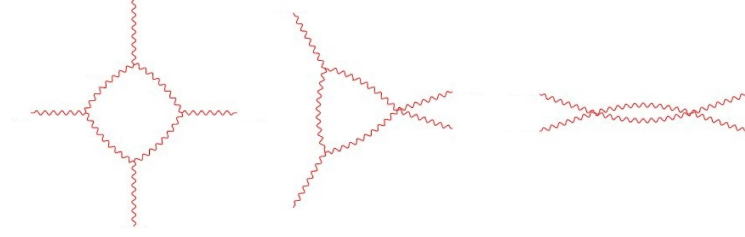


Рис. 2.1: ЭС диаграммы процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$: топологии типа бокс, типа пинч, типа рыба.

(три канала в каждом из четырех соответствующих топологий, комбинаторный фактор равен $\frac{1}{2}$) для диаграмм типа пинч; и шесть структур (три канала для двух соответствующих комбинаций пропагаторов — прямого и обратного, комбинаторный фактор равен $\frac{1}{4}$) для диаграмм типа рыба — каждая из них является суммой соответствующих наборов диаграмм с петлевыми частицами.

Полная ковариантная амплитуда фотонов вне массовой поверхности ($p_i \epsilon_i \neq 0$) с соответствующими комбинаторными факторами может быть представлена в виде суммы бозонных вкладов, минус фермионных и гостовских частей. В терминах Лоренцевских структур имеем:

$$\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma} = \sum_{i=1}^{43} \left[\mathcal{F}_i^{\text{bosons}}(s, t, u) - \mathcal{F}_i^{\text{fermions}}(s, t, u) \right] T_i^{\alpha\beta\mu\nu},$$

где \mathcal{F}_i нормализуются на соответствующий фактор для фермионных и бозонных частей

$$C^{\text{fermions}} = 8\alpha^2 Q_f^4 N_c, \quad C^{\text{bosons}} = 12\alpha^2,$$

α — константа тонкой структуры, Q_f — заряд заряженной частицы в петле в единицах заряда электрона e , N_c — число цветов для данного фермиона, $T_i^{\alpha\beta\mu\nu}$ — тензорные структуры, определяемые с помощью вспомогательных строк τ_j , представленные ранее. Как и в КЭД вычислениях для фотонов вне массовой поверхности получаем базис из 43 элементов, но для реальных фотонов на массовой поверхности остаются только 10 первых структур.

2.2. Спиральные амплитуды

В подходе спиральных амплитуд также как и для КЭД вычислений получаем тензорные структуры и ФФ \mathcal{F}_i , причем получаем интерференционные члены между КЭД и ЭС частями в пределах одного набора квантовых чисел – спиральностей.

Для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\gamma\gamma\rightarrow\gamma\gamma} &= \sum_{\text{spins}} \left[C^{\text{bosons}} \times \mathcal{H}_{\text{spins}}^{\text{bosons}} + C^{\text{fermions}} \times \mathcal{H}_{\text{spins}}^{\text{fermions}} \right], \\ |\mathcal{A}_{\gamma\gamma\rightarrow\gamma\gamma}|^2 &= \sum_{\text{spins}} \left[C_{\text{bosons}}^2 |\mathcal{H}_{\text{spins}}^{\text{bosons}}|^2 + C_{\text{fermions}}^2 |\mathcal{H}_{\text{spins}}^{\text{fermions}}|^2 \right. \\ &\quad \left. + C^{\text{bosons}} C^{\text{fermions}} \left(\mathcal{H}_{\text{spins}}^{*\text{bosons}} \times \mathcal{H}_{\text{spins}}^{\text{fermions}} + \mathcal{H}_{\text{spins}}^{\text{bosons}} \times \mathcal{H}_{\text{spins}}^{*\text{fermions}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что общее число спиральных амплитуд для данного процесса равно 16 и как для КЭД части определяется различными комбинациями проекций спинов внешних частиц. Спиральные амплитуды – скалярные выражения с факторами C^{fermions} для фермионных и C^{bosons} для бозонных вкладов.

Для бозонной части получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{++++}^{\text{bosons}} &= \mathcal{H}_{----}^{\text{bosons}} = -1 + \frac{u-t}{s} \left[B_0(u; M_W, M_W) - B_0(t; M_W, M_W) \right] \\ &\quad + \left(\frac{4M_W^2}{s} + 2 \left(\frac{tu}{s^2} - \frac{4}{3} \right) \right) \left(uC_0(0, 0, u; M_W, M_W, M_W) \right. \\ &\quad \left. + tC_0(0, 0, t; M_W, M_W, M_W) \right) - \left(2M_W^2 s \left(\frac{M_W^2}{s} - \frac{4}{3} \right) + \frac{2s^2}{3} \right) \left(\right. \\ &\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \right. \\ &\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; M_W, M_W, M_W, M_W) \right. \\ &\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \right) \\ &\quad - tu \left(\frac{4M_W^2}{s} + \frac{tu}{s^2} - \frac{4}{3} \right) D_0(0, 0, 0, 0, u, t; M_W, M_W, M_W, M_W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{++++}^{\text{bosons}} &= \mathcal{H}_{----++}^{\text{bosons}} = 1 - 2M_W^4 \left(\right. \\
&\quad + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \\
&\quad + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; M_W, M_W, M_W, M_W) \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \right), \\
\mathcal{H}_{++++}^{\text{bosons}} &= \mathcal{H}_{++++}^{\text{bosons}} = \mathcal{H}_{+--+}^{\text{bosons}} = \mathcal{H}_{-+++}^{\text{bosons}} = \mathcal{H}_{----+}^{\text{bosons}} = \mathcal{H}_{---+-}^{\text{bosons}} = \\
\mathcal{H}_{-+-}^{\text{bosons}} &= \mathcal{H}_{+----}^{\text{bosons}} = 1 - M_W^2 \left(s^2 + t^2 + u^2 \right) \left(\frac{1}{ut} C_0(0, 0, s; M_W, M_W, M_W) \right. \\
&\quad + \frac{1}{su} C_0(0, 0, t; M_W, M_W, M_W) + \frac{1}{st} C_0(0, 0, u; M_W, M_W, M_W) \left. \right) \\
&\quad - M_W^2 \left(\left(2M_W^2 + \frac{st}{u} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \right. \\
&\quad + \left(2M_W^2 + \frac{su}{t} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, u; M_W, M_W, M_W, M_W) \\
&\quad \left. + \left(2M_W^2 + \frac{ut}{s} \right) D_0(0, 0, 0, 0, u, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \right), \\
\mathcal{H}_{+----}^{\text{bosons}} &= \mathcal{H}_{-+++}^{\text{bosons}} = -1 + \frac{s-t}{u} \left[B_0(s; M_W, M_W) - B_0(t; M_W, M_W) \right] \\
&\quad + \left(\frac{4M_W^2}{u} + 2 \left(\frac{ts}{u^2} - \frac{4}{3} \right) \right) \left(s C_0(0, 0, s; M_W, M_W, M_W) \right. \\
&\quad + t C_0(0, 0, t; M_W, M_W, M_W) \left. \right) - \left(2M_W^2 u \left(\frac{M_W^2}{u} - \frac{4}{3} \right) + \frac{2u^2}{3} \right) \left(\right. \\
&\quad + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \\
&\quad + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; M_W, M_W, M_W, M_W) \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \right) \\
&\quad - ts \left(\frac{4M_W^2}{u} + \frac{ts}{u^2} - \frac{4}{3} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, t; M_W, M_W, M_W, M_W), \\
\mathcal{H}_{+----}^{\text{bosons}} &= \mathcal{H}_{-+++}^{\text{bosons}} = -1 + \frac{u-s}{t} \left[B_0(u; M_W, M_W) - B_0(s; M_W, M_W) \right] \\
&\quad + \left(\frac{4M_W^2}{t} + 2 \left(\frac{su}{t^2} - \frac{4}{3} \right) \right) \left(u C_0(0, 0, u; M_W, M_W, M_W) \right. \\
&\quad + s C_0(0, 0, s; M_W, M_W, M_W) \left. \right) - \left(2M_W^2 t \left(\frac{M_W^2}{t} - \frac{4}{3} \right) + \frac{2t^2}{3} \right) \left(\right. \\
&\quad + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \\
&\quad + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; M_W, M_W, M_W, M_W) \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; M_W, M_W, M_W, M_W) \right) \\
&\quad - su \left(\frac{4M_W^2}{t} + \frac{su}{t^2} - \frac{4}{3} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, u; M_W, M_W, M_W, M_W).
\end{aligned}$$

Аналитический ответ для скалярных ПВ функций A_0, B_0, C_0, D_0 [26] представлен ранее.

Для фермионной части получаем схожий ответ с результатом для бозонного вклада при учете соответствующей массы частицы и обратного знака, а также имеется различие в сохраняющих спиральность частях амплитуды ("++++" и "+-+-" перестановки), а не сохраняющие спиральность ("++--") одинаковы:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{++++}^{\text{fermions}} &= \mathcal{H}_{----}^{\text{fermions}} = 1 - \frac{u-t}{s} \left[B_0(u; m_f, m_f) - B_0(t; m_f, m_f) \right] \\
&\quad - \left(\frac{4m_f^2}{s} + 2 \left(\frac{tu}{s^2} - \frac{1}{2} \right) \right) \left(uC_0(0, 0, u; m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + tC_0(0, 0, t; m_f, m_f, m_f) \right) + 2m_f^2 s \left(\frac{m_f^2}{s} - \frac{1}{2} \right) \left(\right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right) \\
&\quad + tu \left(\frac{4m_f^2}{s} + \frac{tu}{s^2} - \frac{1}{2} \right) D_0(0, 0, 0, 0, u, t; m_f, m_f, m_f, m_f), \\
\mathcal{H}_{++--}^{\text{fermions}} &= \mathcal{H}_{--++}^{\text{fermions}} = -1 + 2m_f^4 \left(\right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right), \\
\mathcal{H}_{+++-}^{\text{fermions}} &= \mathcal{H}_{+-+-}^{\text{fermions}} = \mathcal{H}_{-++-}^{\text{fermions}} = \mathcal{H}_{-+-+}^{\text{fermions}} = \mathcal{H}_{-+--}^{\text{fermions}} = \mathcal{H}_{-+-+}^{\text{fermions}} = \\
\mathcal{H}_{-+--}^{\text{fermions}} &= \mathcal{H}_{+---}^{\text{fermions}} = -1 + m_f^2 \left(s^2 + t^2 + u^2 \right) \left(\frac{1}{ut} C_0(0, 0, s; m_f, m_f, m_f) + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{su} C_0(0, 0, t; m_f, m_f, m_f) + \frac{1}{st} C_0(0, 0, u; m_f, m_f, m_f) \right) + \\
&\quad m_f^2 \left(\left(2m_f^2 + \frac{st}{u} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, t; m_f, m_f, m_f, m_f) + \right. \\
&\quad \left(2m_f^2 + \frac{su}{t} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, u; m_f, m_f, m_f, m_f) + \\
&\quad \left. \left(2m_f^2 + \frac{ut}{s} \right) D_0(0, 0, 0, 0, u, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{+---+}^{\text{fermions}} &= \mathcal{H}_{-++-}^{\text{fermions}} = 1 - \frac{s-t}{u} \left[B_0(s; m_f, m_f) - B_0(t; m_f, m_f) \right] \\
&\quad - \left(\frac{4m_f^2}{u} + 2 \left(\frac{ts}{u^2} - \frac{1}{2} \right) \right) \left(sC_0(0, 0, s; m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + tC_0(0, 0, t; m_f, m_f, m_f) \right) + 2m_f^2 u \left(\frac{m_f^2}{u} - \frac{1}{2} \right) \left(\right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right) \\
&\quad + ts \left(\frac{4m_f^2}{u} + \frac{ts}{u^2} - \frac{1}{2} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, t; m_f, m_f, m_f, m_f), \\
\mathcal{H}_{+--+}^{\text{fermions}} &= \mathcal{H}_{-+-+}^{\text{fermions}} = 1 - \frac{u-s}{t} \left[B_0(u; m_f, m_f) - B_0(s; m_f, m_f) \right] \\
&\quad - \left(\frac{4m_f^2}{t} + 2 \left(\frac{su}{t^2} - \frac{1}{2} \right) \right) \left(uC_0(0, 0, u; m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + sC_0(0, 0, s; m_f, m_f, m_f) \right) + 2m_f^2 t \left(\frac{m_f^2}{t} - \frac{1}{2} \right) \left(\right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, u, t; m_f, m_f, m_f, m_f) \right. \\
&\quad \left. + D_0(0, 0, 0, 0, s, u; m_f, m_f, m_f, m_f) \right) \\
&\quad + su \left(\frac{4m_f^2}{t} + \frac{su}{t^2} - \frac{1}{2} \right) D_0(0, 0, 0, 0, s, u; m_f, m_f, m_f, m_f).
\end{aligned}$$

2.3. Дерево процессов в системе SANC

Сумма вкладов фермионных петель диаграмм типа бокс образуют калибровочно инвариантное и ультрафиолетово конечное выражение в следствии соотношения Варда. Это также справедливо и для бозонной суммы. Поэтому мы можем разделить вклады в КЭД и ЭС частей процесса при аналитических вычислениях.

Файлы предвычислений AAAA Box, AAAA pinch, AAAA fish (на дереве процессов в системе SANC на Рис.2.2 из клиента SANC с сайта [22]) содержат

последовательные процедуры вычисления ковариантной амплитуды для соответствующих диаграмм.

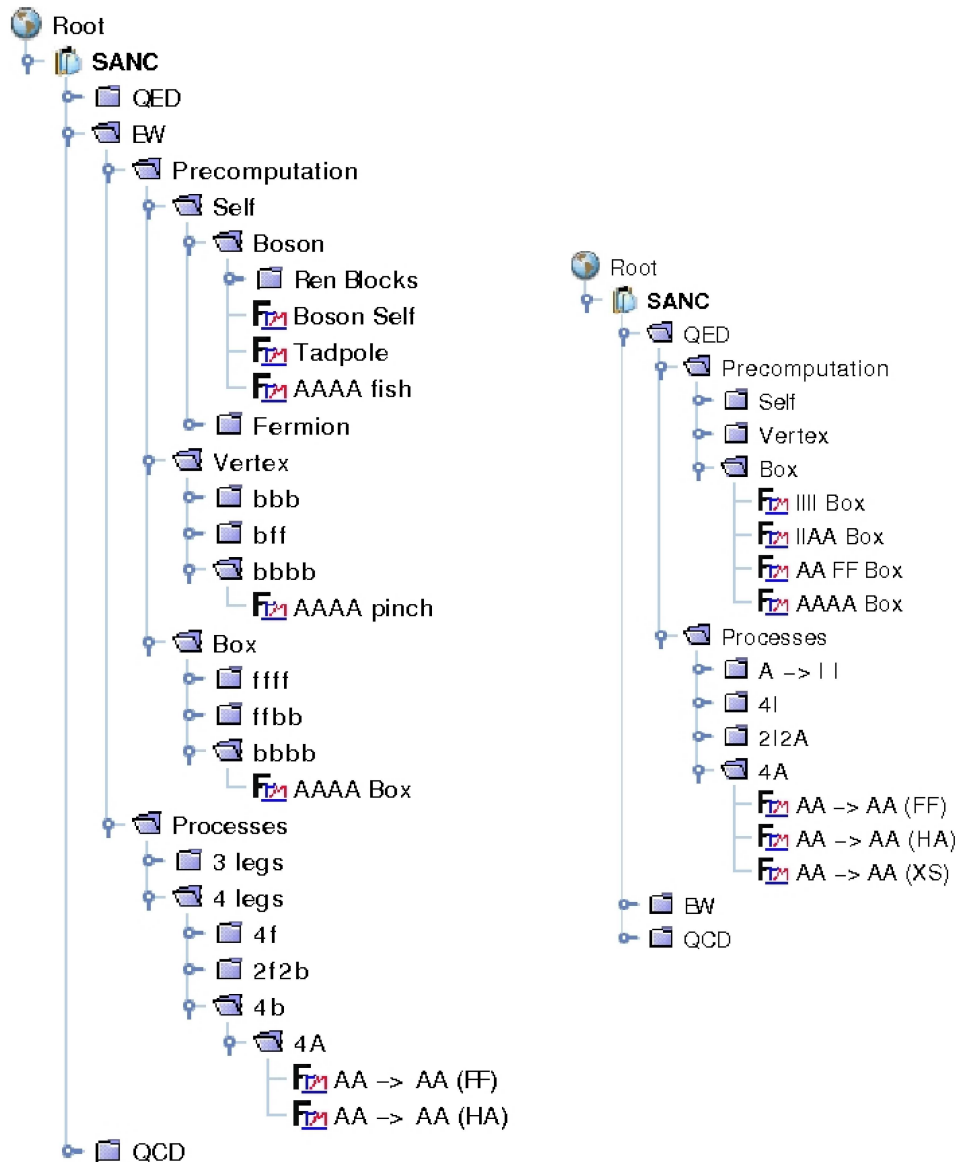


Рис. 2.2: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ на дереве процессов в системе SANC.

Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ заключалось в последовательном использовании предвычисленных выражений для AA- \rightarrow AA КЭД и ЭС процессов, с заменой входящих импульсов p соответствующими кинематическими импульсами верного знака, и вычислялись ФФ \mathcal{F}_i в модуле AA- \rightarrow AA (FF), спиральные амплитуды в модуле AA- \rightarrow AA (HA). Для ЭС части использовался численный подход для получения сечения.

2.4. Дифференциальное сечение и сравнение

Численные результаты для аналитических выражений КЭД, слабой и полной ЭС частей, полученные с помощью модулей SSFM в пакете sanc_4A_v1.00 для сечения рассеяния, сравнивались с [16] (Рис.2.3).

Параметры: $\cos\theta < \cos\pi/6$ — обрезания; $M_W = 80.22$ GeV; $m_t = 120$ GeV; $\alpha = 1/137.036$; другие фермионы безмассовые.

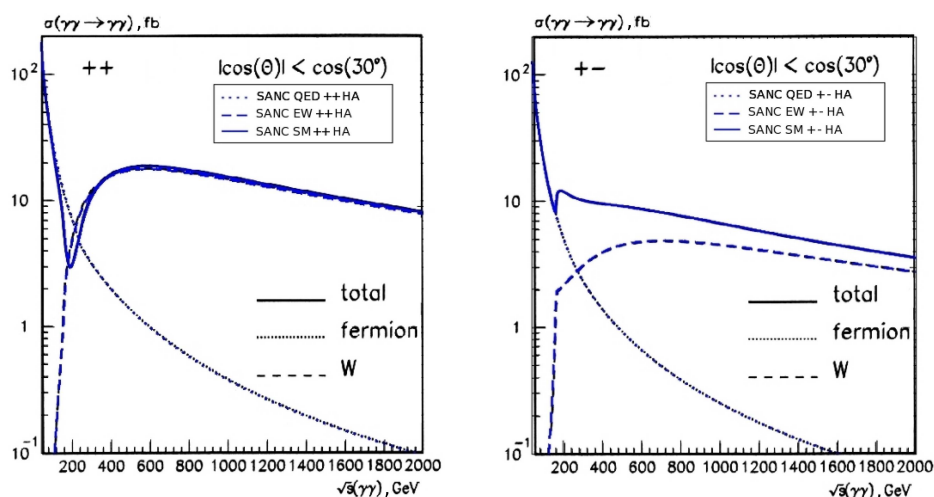


Рис. 2.3: Сечение рассеяния для $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ SANC ("++" и "+-") [16].

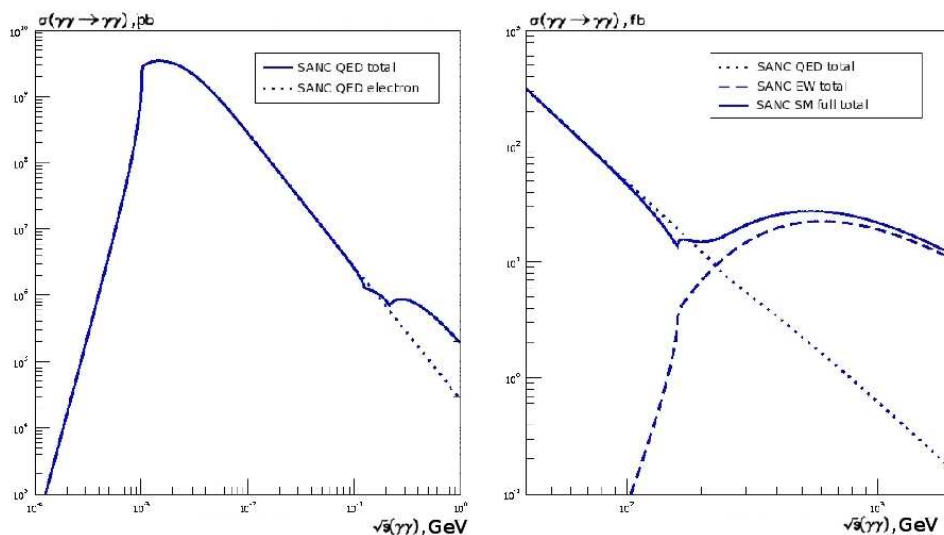


Рис. 2.4: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ SANC полное сечение рассеяния.

В соответствии с [17] сумма по спиральностям для сечения рассеяния вычислялась в диапазоне по энергии от МэВ до ГэВ (Рис.2.4) с параметрами:

$$\alpha = 1/128;$$

$$\cos \theta < \cos \pi/6;$$

$$M_W = 80.22 \text{ GeV};$$

$$m_e = 0.51099892 \text{ MeV}, \quad m_\mu = 0.105658369 \text{ GeV}, \quad m_\tau = 1.77699 \text{ GeV};$$

$$m_u = 0.062 \text{ GeV}, \quad m_c = 1.50 \text{ GeV}, \quad m_t = 120.0 \text{ GeV};$$

$$m_d = 0.083 \text{ GeV}, \quad m_s = 0.215 \text{ GeV}, \quad m_b = 4.7 \text{ GeV}.$$

Глава 3. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и распада $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

В данной главе описывается внедрение в систему SANC [20–22] процесса рассеяния

$$\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z,$$

([30–32]) и распада

$$Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma,$$

([18, 33]) в СМ на однопетлевом уровне точности в R_ξ -калибровке с учетом всех масс частиц (Z -бозона и других виртуальных частиц).

Процессы интересны тем, что вычисление сечения рассеяния и ширины распада включает в себя расчет только петлевых диаграмм и не содержит диаграмм на древесном уровне или диаграмм тормозного излучения. Вычисления раскрывают мультиканальный подход, реализуемый в системе SANC в секторе четырех-бозонной физики [23, 29], когда все внешние частицы считаются входящими, и идет расчет процесса аннигиляции в вакуум $Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0$.

Приводятся ковариантные амплитуды однопетлевых диаграмм в терминах Лоренцевых структур на основе базиса и скалярных ФФ \mathcal{F}_i , обсуждается вид выражений и доказывается нулевой вклад аксиальной части фермионных однопетлевых диаграмм.

Показаны спиральные амплитуды для различных каналов, формулы для сечений рассеяния и ширины распада соответственно, сравнение с имеющимися данными из литературы.

3.1. Мультиканальный подход

В системе SANC основной концепцией аналитических вычислений является подход предвычислений строительных блоков в вакуум, а именно диаграмм, в которых все внешние частицы считаются входящими и не лежащими на массовой поверхности.

Эти строительные блоки в последствии могут быть использованы как элементы вычислений для реальных процессов в соответствующих каналах с помощью вращения импульсов внешних частиц и замены квадратов импульсов на квадраты масс. Рассмотрим данную концепцию на примере процесса $Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0$.

Процесс на однопетлевом уровне точности описывается двумя блоками диаграмм с фермионными и бозонными пропагаторами соответственно. Их вычисление может быть произведено независимо.

Набор бозонных диаграмм состоит из трех диаграмм типа боксы (Рис.3.1a), шести треугольных диаграмм типа пинчей (Рис.3.1b), и трех диаграмм типа рыба — собственные энергии (Рис.3.1c).

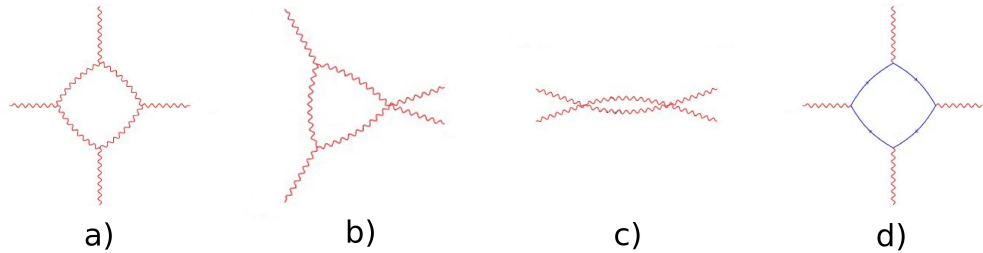


Рис. 3.1: Диаграммы процесса $Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0$.

Набор бозонных диаграмм состоит только из трех диаграмм типа бокс (Рис.3.1d). Каждая диаграмма характеризуется различным порядком 4-х импульсов входящих частиц — p_4 для Z -бозона и p_1, p_2, p_3 для фотонов соответственно.

Выражение для амплитуды может быть представлено в виде суммы произведения Лоренцевских структур и соответствующих скалярных ФФ \mathcal{F}_i [27], содержащих функции Пассарино–Вельтмана [26].

В терминах Лоренцевских структур можно записать выражение для ковариантной амплитуды процесса $Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0$ в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0} = 4e^4 Q_f^4 \sum_{i=1}^{14} \left[\mathcal{F}_i^{\text{bosons}}(s, t, u) + \mathcal{F}_i^{\text{fermions}}(s, t, u) \right] T_i^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Необходимо всего 7 простых тензорных строк для описания тензорной структуры ковариантных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$:

$$\begin{aligned} \tau_1^{ij} &= p^{1i} p^{2j} + \frac{s}{2} \delta^{ij}, & \tau_2^{ij} &= p^{2i} p^{3j} + \frac{t}{2} \delta^{ij}, & \tau_3^{ij} &= p^{1i} p^{3j} + \frac{u}{2} \delta^{ij}, \\ \tau_4^{ij} &= p^{1i} \left(p^{1j} - \frac{s}{t} p^{3j} \right), & \tau_5^{ij} &= p^{2i} \left(p^{2j} - \frac{s}{u} p^{3j} \right), \\ \tau_6^{ij} &= p^{1i} \left(p^{1j} - \frac{u}{t} p^{2j} \right), & \tau_7^{ij} &= p^{2i} \left(p^{2j} - \frac{t}{u} p^{1j} \right). \end{aligned}$$

Тензор четвертого ранга после исключения p_4 по закону сохранения импульсов и применения условий физической поперечности и нулевой массы фотонов: ($p_{1\alpha} = p_{2\beta} = p_{3\nu} = 0$ и $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = 0$), представим в виде:

$$\begin{aligned} T_1^{\alpha\beta\mu\nu} &= \left(\tau_1^{\beta\nu} - \frac{t}{u} \tau_4^{\nu\beta} \right) \delta^{\alpha\mu} - \left(\tau_1^{\mu\nu} + \frac{t}{u} \tau_1^{\nu\mu} \right) \delta^{\alpha\beta} + \left(\frac{t}{u} \tau_3^{\beta\alpha} + \frac{s+u}{u} \tau_2^{\alpha\beta} \right) \delta^{\mu\nu} \\ &+ \frac{t}{u} \left(\tau_1^{\beta\mu} + \tau_4^{\mu\beta} \right) \delta^{\alpha\nu} + \left(\frac{s}{u} \tau_2^{\nu\alpha} - \tau_7^{\alpha\nu} \right) \delta^{\beta\mu} - \left(\frac{s}{u} \tau_2^{\mu\alpha} + \tau_2^{\alpha\mu} \right) \delta^{\beta\nu} + \frac{s-t}{2} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} \\ &+ \frac{t}{2u} \left((s+u) \delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\nu} - s \delta^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu} \right), & T_2^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\tau_1^{\beta\alpha} \tau_3^{\nu\mu}, & T_3^{\alpha\beta\mu\nu} &= -\frac{t}{u} \tau_1^{\beta\alpha} \tau_6^{\mu\nu}, \\ T_4^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\alpha} \left(\frac{t}{u} \tau_6^{\mu\nu} - \tau_2^{\nu\mu} \right), & T_5^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\mu\alpha} \tau_3^{\nu\beta} - \frac{t}{2} \left(\tau_6^{\beta\nu} \delta^{\alpha\mu} - \tau_6^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} \right), \\ T_6^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\nu\alpha} \tau_2^{\mu\beta} - \frac{u}{2} \left(\tau_5^{\nu\alpha} \delta^{\beta\mu} - \tau_5^{\mu\alpha} \delta^{\beta\nu} \right), & T_7^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\nu\beta} \tau_1^{\mu\alpha}, \\ T_8^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\nu\beta} \tau_5^{\mu\alpha}, & T_9^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_3^{\nu\alpha} \tau_4^{\mu\beta}, & T_{10}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_3^{\nu\alpha} \tau_1^{\beta\mu}, \\ T_{11}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_3^{\mu\alpha} \tau_1^{\beta\nu} + \frac{t}{2} \left(\tau_4^{\mu\beta} \delta^{\alpha\nu} - \tau_4^{\nu\beta} \delta^{\alpha\mu} \right), & T_{13}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\mu\beta} \tau_3^{\nu\alpha}, \\ T_{12}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\nu\alpha} \tau_1^{\beta\mu} + \frac{u}{2} \left(\tau_6^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} - \tau_6^{\alpha\nu} \delta^{\beta\mu} \right), & T_{14}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\nu\beta} \tau_3^{\mu\alpha}. \end{aligned}$$

Файлы предвычислений AAAZ Box, AAAZ pinch, AAAZ fish на дереве процессов SANC (Рис.3.2 из SANC клиента [22]) содержат последовательность процедур для вычислений ковариантной амплитуды.

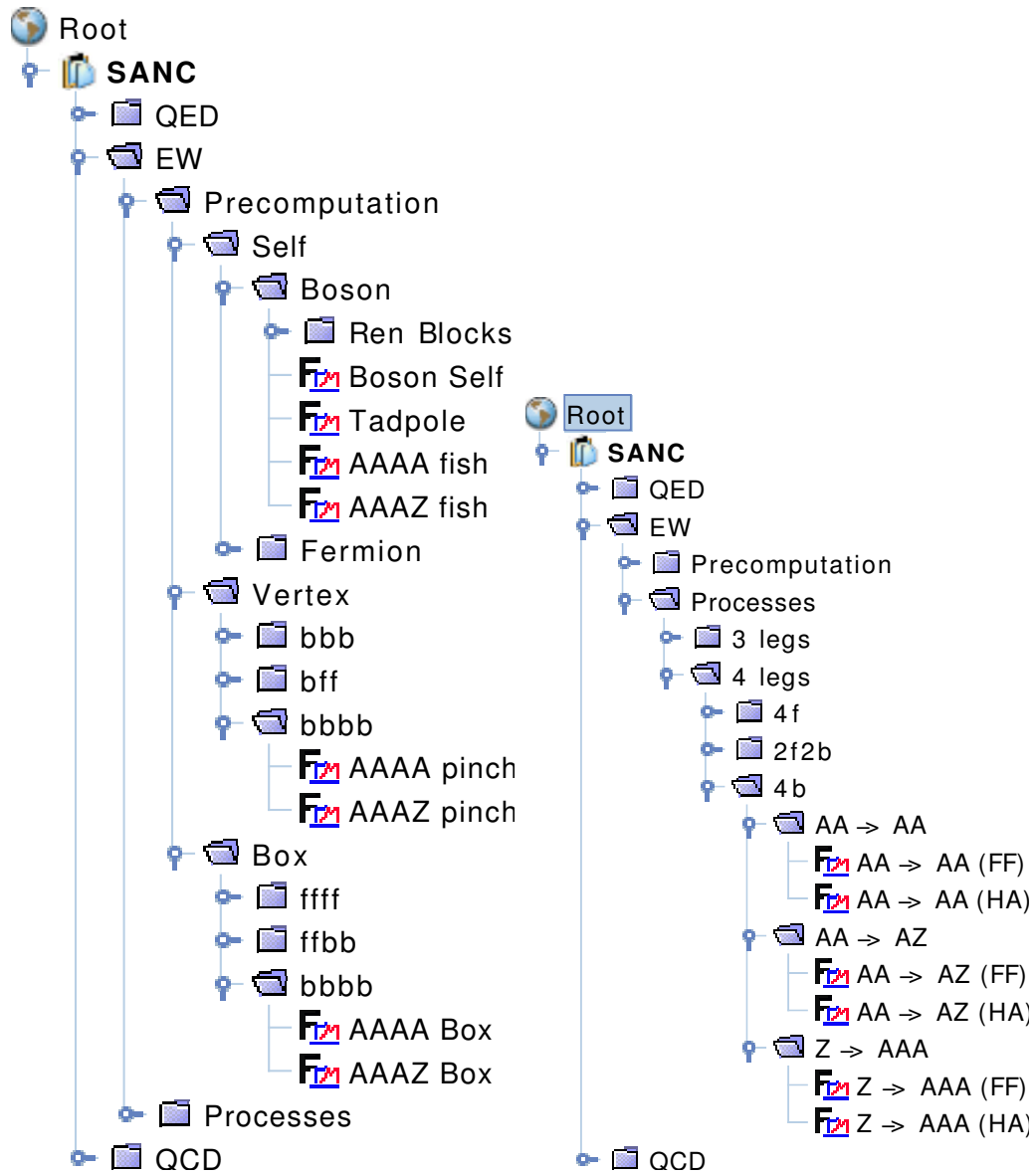


Рис. 3.2: $Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0$ на дереве процессов SANC.

Полученные при таком подходе скалярные ФФ \mathcal{F}_i могут быть использованы для любого реального канала после соответствующей перестановки своих аргументов s, t, u .

Точное выражение ФФ \mathcal{F}_i для бозонной и фермионной частей здесь не приводится из-за большого количества слагаемых. Полный ответ для ФФ \mathcal{F}_i можно найти в пакетах, которые доступны для скачивания на домашней

странице системы SANC. Отметим, что выражение для амплитуды бозонных диаграмм похоже на выражение для амплитуды фермионных диаграмм за исключением конкретного вида представления ФФ \mathcal{F}_i .

В Лоренцевскую структуру выражения амплитуды аксиального взаимодействия Z -бозона с фермионами $g_{Af}^Z \epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}$ не дает вклада из-за зарядовой симметрии. Данное сокращение может наблюдаться аналитически при вычислении полного набора диаграмм и применения соотношения Шоутена:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu_1? \mu_2? \mu_3? \mu_4?} \delta_{\mu_5? \mu_6?} &= \epsilon_{\mu_5 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \delta_{\mu_1 \mu_6} + \epsilon_{\mu_1 \mu_5 \mu_3 \mu_4} \delta_{\mu_2 \mu_6} \\ &+ \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_5 \mu_4} \delta_{\mu_3 \mu_6} + \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_5} \delta_{\mu_4 \mu_6}, \end{aligned}$$

где $\mu_i?$ обозначает *любой* индекс.

Применяя последовательно шаг за шагом основное соотношение, умноженное на определенное число четырех импульсов, получаем аналитический ноль. Было обнаружено всего 5 наборов применяемых соотношений с различными левыми частями.

- Набор $\epsilon_{p_1 p_2 p_3 \alpha?} \delta_{\mu_5? \mu_6?}$ имеет 4 члена:

$$\epsilon_{p_1 p_2 p_3 \alpha} \delta_{\mu_5?, \mu_6?}, \quad \epsilon_{p_1 p_2 p_3 \beta} \delta_{\alpha \mu_5?}, \quad \epsilon_{p_1 p_2 p_3 \beta} \delta_{\nu \mu_6?}, \quad \epsilon_{p_1 p_2 p_3 \mu} \delta_{\nu \mu_6?}.$$

- Набор $\epsilon_{p_1?, p_2?, \alpha?, \beta?} \delta_{\mu?, \nu?}$ имеет 3 члена:

$$\epsilon_{p_1? p_2? \alpha \beta} \delta_{\mu \nu}, \quad \epsilon_{p_1? p_2? \alpha \nu} \delta_{\mu \beta}, \quad \epsilon_{p_1? p_2? \mu \nu} \delta_{\alpha \beta}.$$

- Набор $\epsilon_{p_i, p_j, \alpha?, \nu?} \mathcal{P}_{k\mu?}$ имеет 11 членов для каждой из трех групп

(первая для $i, j = 1, 2$, вторая $i, j = 1, 3$ и заключительная $i, j = 3, 2$):

$$\epsilon_{p_i p_j \alpha? \nu} \mathcal{P}3\beta, \quad \epsilon_{p_i p_j \alpha? \mu} \mathcal{P}3\beta, \quad \epsilon_{p_i p_j \beta? \nu} \mathcal{P}3\alpha,$$

$$\epsilon_{p_i p_j \alpha \nu} \mathcal{P}1\mu \mathcal{P}3\beta, \quad \epsilon_{p_i p_j \alpha \mu} \mathcal{P}1\nu \mathcal{P}3\beta, \quad \epsilon_{p_i p_j \beta \mu} \mathcal{P}2\nu \mathcal{P}3\alpha, \quad \epsilon_{p_i p_j \beta \nu} \mathcal{P}2\mu \mathcal{P}3\alpha,$$

$$\epsilon_{p_i p_j \beta \nu?} \mathcal{P}2\alpha, \quad \epsilon_{p_i p_j \alpha \nu?} \mathcal{P}1\beta, \quad \epsilon_{p_i p_j \mu \nu} \mathcal{P}1\beta, \quad \epsilon_{p_i p_j \beta \nu?} \mathcal{P}2\alpha,$$

- Набор $\epsilon_{p_i, ?, ?, ?} \mathcal{P}_{k\mu?}$ имеет 3 члена также в каждой из трех групп (для

$$i = 1, 2, 3): \quad \epsilon_{p_i \beta \mu \nu} \mathcal{P}3\alpha, \quad \epsilon_{p_i \beta \mu \nu} \mathcal{P}2\alpha, \quad \epsilon_{p_i \alpha \mu \nu} \mathcal{P}1\beta.$$

Процедура полагания частиц на массовую поверхность вызывалась последовательно к применению соотношений Шоутена.

3.2. Спиральные амплитуды

При внедрении любого процесса в систему вычисляются строительные блоки аннигиляции в вакуум, а затем в данных блоках несколько раз заменяются входящие импульсы p соответствующими кинематическими импульсами с правильными знаками.

Ковариантная амплитуда канала $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ может быть получена из строительного блока аннигиляции в вакуум при следующей замене четырех импульсов:

$$p_1 \rightarrow p_1,$$

$$p_2 \rightarrow p_2,$$

$$p_3 \rightarrow -p_3,$$

$$p_4 \rightarrow -p_4,$$

для распада $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ получаем:

$$p_1 \rightarrow -p_1,$$

$$p_2 \rightarrow -p_2,$$

$$p_3 \rightarrow -p_3,$$

$$p_4 \rightarrow p_4.$$

Далее из амплитуды вычисляются ФФ \mathcal{F}_i с помощью модуля $AA \rightarrow AZ$ (FF), $Z \rightarrow AAA$ (FF), затем спиральные амплитуды с помощью модуля $AA \rightarrow AZ$ (HA), $Z \rightarrow AAA$ (HA) и наконец — аналитическое выражение для дифференциального сечения и полное сечение рассеяния процесса в `sanc_4b_v1.00` пакете.

Отметим, что подход спиральных амплитуд в системе SANC применяется для компактного представления результатов и эффективной реализации численного кода. При таком подходе Лоренцевская структура классического

выражения умножается на поляризационные вектора, и получается ортогональный набор конечных скалярных выражений, представленных в виде ФФ \mathcal{F}_i — спиральных амплитуд [25].

- Спиральные амплитуды для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$

Рассмотрим соответствующие спиральные амплитуды для процесса реакции

$$\gamma(p_1, \lambda_1) + \gamma(p_2, \lambda_2) \longrightarrow \gamma(p_3, \lambda_3) + Z(p_4, \lambda_4),$$

где λ_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) — спиральности внешних частиц.

Общее число спиральных амплитуд для данного процесса равно 12. Это соответствует числу различных комбинаций проекций спинов внешних частиц.

Набор спиральных амплитуд, обозначаемых $\mathcal{H}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, для данного процесса имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{--+-} &= \mathcal{H}_{++++} = \frac{1}{4} \frac{s^2 t}{u+t} (\mathcal{F}_4 - \mathcal{F}_3), \\ \mathcal{H}_{--+0} &= -\mathcal{H}_{++-0} = k \frac{s}{u+t} \left[\frac{(st - uM_Z^2)}{u} \mathcal{F}_3 + \frac{s(u-t)}{u} \mathcal{F}_4 + (u+t)(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{12}) \right], \\ \mathcal{H}_{+--0} &= -\mathcal{H}_{-++0} = -k \frac{t}{u+t} \left[-4 \frac{M_Z^2}{u} \mathcal{F}_1 - (s + M_Z^2)(\mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_{12}) - \frac{(tM_Z^2 - su)}{u} \mathcal{F}_8 - (u+t)\mathcal{F}_{14} \right], \\ \mathcal{H}_{-+-0} &= -\mathcal{H}_{+-+0} = -\frac{k}{u+t} \left[-4M_Z^2 \mathcal{F}_1 - u(s + M_Z^2)(\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_{10} + \mathcal{F}_{11}) + u \frac{(st - uM_Z^2)}{t} \mathcal{F}_9 - u(u+t)\mathcal{F}_{13} \right], \\ \mathcal{H}_{-+++} &= \mathcal{H}_{+---} = \frac{1}{4} \frac{t}{u+t} \left[-2M_Z^2 \mathcal{F}_1 - su(\mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_{12}) - st\mathcal{F}_8 - u(u+t)\mathcal{F}_{14} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{-+--+} &= \mathcal{H}_{+----} = \frac{1}{4} \frac{su}{u+t} \left[-2\mathcal{F}_1 + u(-\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{10} - \mathcal{F}_{11}) \right], \\
\mathcal{H}_{+----} &= \mathcal{H}_{-+--+} = \frac{1}{4} \frac{tu}{u+t} \left[\right. \\
&\quad \left. -2\frac{M_Z^2}{u}\mathcal{F}_1 - s\mathcal{F}_5 - \frac{su}{t}\mathcal{F}_9 - s(\mathcal{F}_{10} + \mathcal{F}_{11}) - (u+t)\mathcal{F}_{13} \right], \\
\mathcal{H}_{----+} &= \mathcal{H}_{++--} = \frac{1}{4} s \left[-2\frac{u+t}{u}\mathcal{F}_1 + u\mathcal{F}_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{st}{u+t}\mathcal{F}_3 - t\frac{s-u-t}{u+t}\mathcal{F}_4 - u(\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_{11}) - t(\mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_{12}) \right], \\
\mathcal{H}_{----+} &= \mathcal{H}_{++++-} = \frac{1}{4} \frac{st}{u+t} \left[s(-\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4) + u(\mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_{10} \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{12}) - t\mathcal{F}_8 - \frac{u^2}{t}\mathcal{F}_9 - \frac{u(u+t)}{s}(\mathcal{F}_{13} + \mathcal{F}_{14}) \right], \\
\mathcal{H}_{-+--+} &= \mathcal{H}_{+----} = \frac{1}{2} \frac{st^2}{u(u+t)} \left[-2\mathcal{F}_1 + u(-\mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_8 - \mathcal{F}_{12}) \right], \\
\mathcal{H}_{----0} &= -\mathcal{H}_{++++0} = \frac{k}{u+t} \left[(u+t)(s\mathcal{F}_2 - u\mathcal{F}_{13} + t\mathcal{F}_{14}) \right. \\
&\quad \left. - (uM_Z^2 - st) \left(\frac{s}{u}\mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_5 + \frac{u}{t}\mathcal{F}_9 + \mathcal{F}_{11} \right) - \frac{s^2}{u}(t-u)\mathcal{F}_4 \right. \\
&\quad \left. - (su - tM_Z^2) \left(\mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_{12} + \frac{t}{u}\mathcal{F}_8 \right) - (s + M_Z^2)(-t\mathcal{F}_7 + u\mathcal{F}_{10}) \right], \\
\mathcal{H}_{----} &= \mathcal{H}_{++++} = \frac{1}{4} \frac{s}{u+t} \left[u(u+t)\mathcal{F}_2 + st\mathcal{F}_3 + t(u+t-s)\mathcal{F}_4 \right. \\
&\quad \left. + tu(-\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{12}) + t^2(\mathcal{F}_8 - \mathcal{F}_7) + u^2(\mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{10}) \right],
\end{aligned}$$

где коэффициент:

$$k = \frac{\sqrt{2} \sqrt{stu}}{8 M_Z},$$

- Спиральные амплитуды для канала распада $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

Рассмотрим спиральные амплитуды для канала распада Z -бозона:

$$Z(p_4, \lambda_4) \longrightarrow \gamma(p_1, \lambda_1) + \gamma(p_2, \lambda_2) + \gamma(p_3, \lambda_3)$$

где $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — спиральности внешних частиц.

Общее число спиральных амплитуд также равно 12. Таким образом, для процесса распада получаем следующий набор амплитуд, схожих с процессом реакции:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{+++++} &= \mathcal{H}_{-----} = -\frac{1}{4}t \left\{ \frac{s}{u+t} \left[s(\mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_4) - u(\mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_7) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + t\mathcal{F}_8 + \frac{u^2}{t}\mathcal{F}_9 + u(\mathcal{F}_{10} + \mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{12}) \right] + u(\mathcal{F}_{13} + \mathcal{F}_{14}) \right\}, \\
\mathcal{H}_{+++0} &= \mathcal{H}_{---0} = ik \left\{ +s\mathcal{F}_2 + s \left(s\frac{K_f}{u} - 1 \right) \mathcal{F}_3 - s^2\frac{K_f}{u}\mathcal{F}_4 \right. \\
&\quad - (sK_f - u) \left(\mathcal{F}_5 - \frac{u}{t}\mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{11} \right) + (sK_f + t) \left(\mathcal{F}_6 + \frac{t}{u}\mathcal{F}_8 - \mathcal{F}_{12} \right) \\
&\quad \left. + t \left(\frac{2s}{u+t} + 1 \right) \mathcal{F}_7 + (s(K_f - 1) - u) \mathcal{F}_{10} - u\mathcal{F}_{13} + t\mathcal{F}_{14} \right\}, \\
\mathcal{H}_{++++-} &= \mathcal{H}_{----+} = \frac{1}{4} \frac{s}{u+t} \left\{ -u(u+t)\mathcal{F}_2 - t \left[s\mathcal{F}_3 - (2s - M_z^2) \mathcal{F}_4 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - u(\mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{12}) \right] + t^2(\mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_8) - u^2(\mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{10}) \right\}, \\
\mathcal{H}_{++++-} &= \mathcal{H}_{---+-} = \frac{1}{4}s \left\{ \frac{2(u+t)}{u}\mathcal{F}_1 \right. \\
&\quad \left. - t \left[\frac{s}{u+t}\mathcal{F}_3 + \left(1 - \frac{s}{u+t} \right) \mathcal{F}_4 - \mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_{12} \right] - u(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_5 - \mathcal{F}_{11}) \right\}, \\
\mathcal{H}_{+++0} &= \mathcal{H}_{--+0} = ik s \left[\left(s\frac{K_f}{u} - 1 \right) \mathcal{F}_3 \right. \\
&\quad \left. - s\frac{K_f}{u}\mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6 - \mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{12} \right], \\
\mathcal{H}_{+++--} &= \mathcal{H}_{---++} = -\frac{1}{4} (s)^2 \frac{t}{u+t} (\mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_4), \\
\mathcal{H}_{-+--+} &= \mathcal{H}_{+-+--} = \frac{1}{4} \frac{su}{u+t} [-2\mathcal{F}_1 - u(\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_{10} - \mathcal{F}_9 + \mathcal{F}_{11})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{+-+0} = \mathcal{H}_{-+-0} &= i \frac{k}{(u+t)} \left\{ 4M_z^2 \mathcal{F}_1 + u \left[(M_z^2 + s) (\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_{10} + \mathcal{F}_{11}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{t} (ts - M_z^2 u) \mathcal{F}_9 + (u+t) \mathcal{F}_{13} \right] \right\}, \\
\mathcal{H}_{+--+} = \mathcal{H}_{-+-+} &= \frac{1}{4} \frac{st}{u+t} \left\{ \right. \\
&\quad \left. \frac{2M_z^2}{s} \mathcal{F}_1 + u \left[\mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_{10} + \mathcal{F}_{11} + \frac{u+t}{s} \mathcal{F}_{13} + \frac{u}{t} \mathcal{F}_9 \right] \right\}, \\
\mathcal{H}_{+---} = \mathcal{H}_{-+++} &= \frac{1}{4} \frac{t}{u+t} \left\{ \right. \\
&\quad \left. \left[2M_z^2 \mathcal{F}_1 + s [t\mathcal{F}_8 + u(\mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_{12})] \right] + tu\mathcal{F}_{14} \right\}, \\
\mathcal{H}_{+--0} = \mathcal{H}_{-++0} &= ik \frac{t}{(u+t)} \left\{ -\frac{4M_z^2}{u} \mathcal{F}_1 - (s + M_z^2) [\mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_{12}] \right. \\
&\quad \left. + \left(s - \frac{M_z^2 t}{u} \right) \mathcal{F}_8 - (u+t) \mathcal{F}_{14} \right\}, \\
\mathcal{H}_{-+++} = \mathcal{H}_{+----} &= -\frac{1}{4} \frac{st^2}{u+t} \left(\mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_8 + \mathcal{F}_{12} + \frac{2}{u} \mathcal{F}_1 \right).
\end{aligned}$$

где коэффициенты:

$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{t-u}{u+t}, \\
k &= \frac{\sqrt{2} \sqrt{stu}}{8 M_z}, \\
\lambda &= s(s - 4M_z^2).
\end{aligned}$$

Представлены выражения для спиральных амплитуд бозонной и фермионной частей при соответствующей подстановке $\Phi\Phi \mathcal{F}_i$ для обоих каналов процесса. Данный результат полностью согласуется с вычислениями из литературы [18, 30–33] (с точностью до замены тривиальных опечаток).

3.3. Сечение рассеяния и ширина распада

Сечение рассеяния для реакции $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ вычисляется по следующей формуле:

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z} = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2}} |\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z}|^2 d\Phi^{(2)},$$

где $\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z}$ — ковариантная амплитуда процесса и $d\Phi^{(2)}$ — двухчастичный фазовый объем:

$$d\Phi^{(2)} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^4 p_3 \delta(p_3^2)}{(2\pi)^3} \frac{d^4 p_4 \delta(p_4^2)}{(2\pi)^3}.$$

Для дифференциального сечения получаем:

$$d\sigma_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z} = \frac{1}{32\pi s} \left(1 - \frac{M_Z^2}{s}\right) |\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z}|^2 d\cos\theta,$$

где θ — угол рассеяния Z -бозона в СЦМ.

Ширина распада Z -бозона вычисляется по следующей формуле:

$$\Gamma_Z = \frac{1}{3!384\pi^3 M_Z^3} \int |\mathcal{A}_{Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma}|^2 ds dt du \times \delta(M_Z^2 - s - t - u).$$

Для сравнения результатов [18, 30–33] вычисления для сечения рассеяния реакции $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ и ширины распада $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ производились при следующем наборе параметров:

$$\alpha = 1/128;$$

$$\pi/6 < \theta < 5\pi/6;$$

$$M_W = 80.22 \text{ GeV};$$

$$M_Z = 91.173 \text{ GeV};$$

$$m_e = 0.1 \text{ GeV}, \quad m_\mu = 0.1 \text{ GeV}, \quad m_\tau = 0.1 \text{ GeV};$$

$$m_u = 0.1 \text{ GeV}, \quad m_c = 0.1 \text{ GeV}, \quad m_t = 120.0 \text{ GeV};$$

$$m_d = 0.1 \text{ GeV}, \quad m_s = 0.1 \text{ GeV}, \quad m_b = 5.0 \text{ GeV}.$$

Численные результаты для реакции $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ сравнивались покомпонентно для бозонного, фермионного вклада и их интерференции с учетом различной поляризации Z -бозона и начальных фотонов (“++” — Рис.3.3, “+-” — Рис.3.4) в диапазоне энергии от 100 ГэВ до 2 ТэВ.

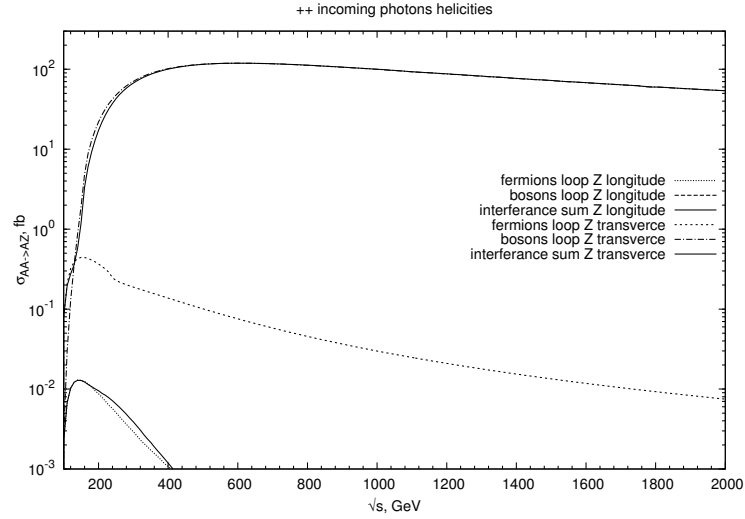


Рис. 3.3: Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при “++” поляризации начальных фотонов (стандартный набор параметров).

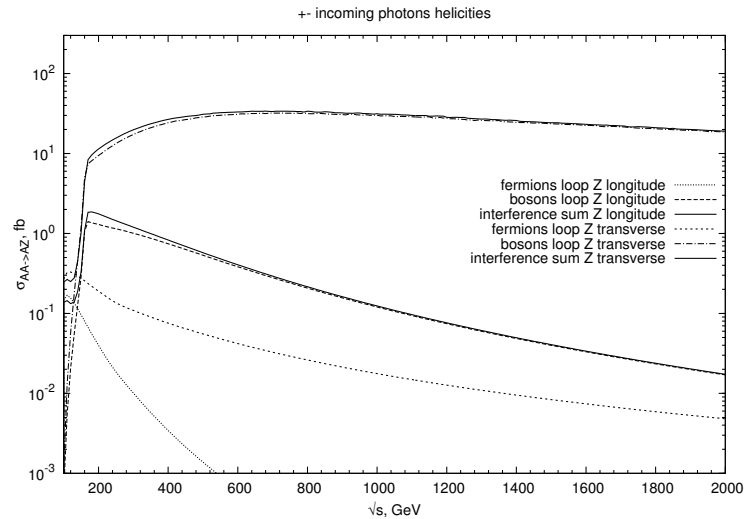


Рис. 3.4: Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при “+-” поляризации начальных фотонов (стандартный набор параметров).

При точном выборе параметров в соответствии с приведенным набором сравнение всех вкладов и сечений дает точное совпадение, продемонстрированное на рисунках.

При вычислении ширины распада Γ_Z исследовалась зависимость от параметров обрезания (по углу θ_{cut} и энергии фотонов \sqrt{s}_{cut}) в большом диапазоне значений (Рис.3.5). Найдено широкое плато стабильности, подтверждающее согласие с данными [33] при одинаковом наборе параметров.

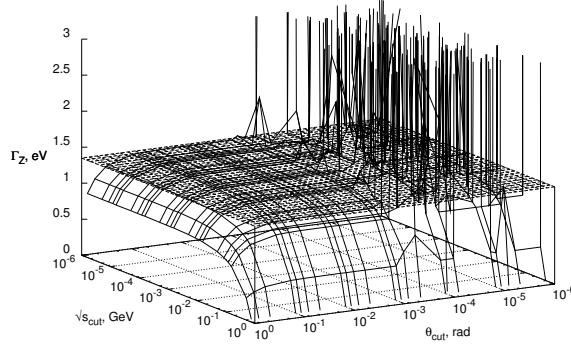


Рис. 3.5: Ширина распада $Z \rightarrow \gamma\gamma$ — плато стабильности.

Также были вычислены дифференциальные сечения рассеяния для реакции $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ с стандартным набором параметров PDG2012 [34] (“++” — Рис.3.6, “+-” — Рис.3.7) в диапазоне энергии от 100 ГэВ до 2 ТэВ. Порог рождения топ-кварка переместился на соответствующую величину для фермионного вклада, а все распределение уменьшилось в два раза из-за изменений масс бозонов.

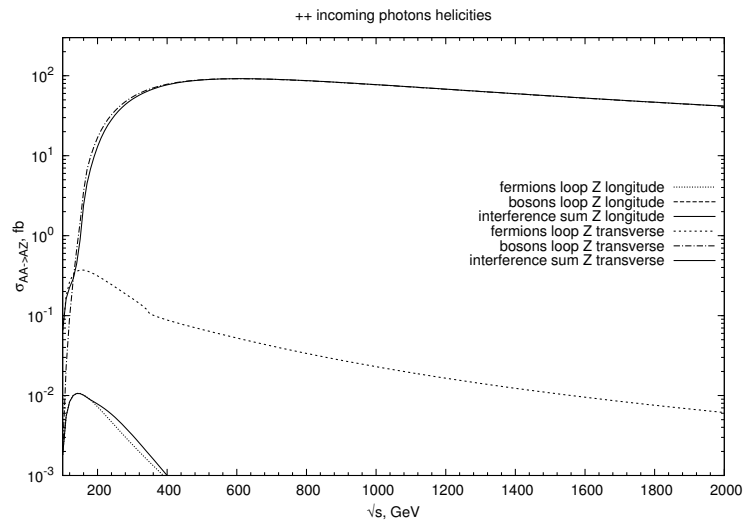


Рис. 3.6: Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при “++” поляризации начальных фотонов (PDG2012 параметры [34]).

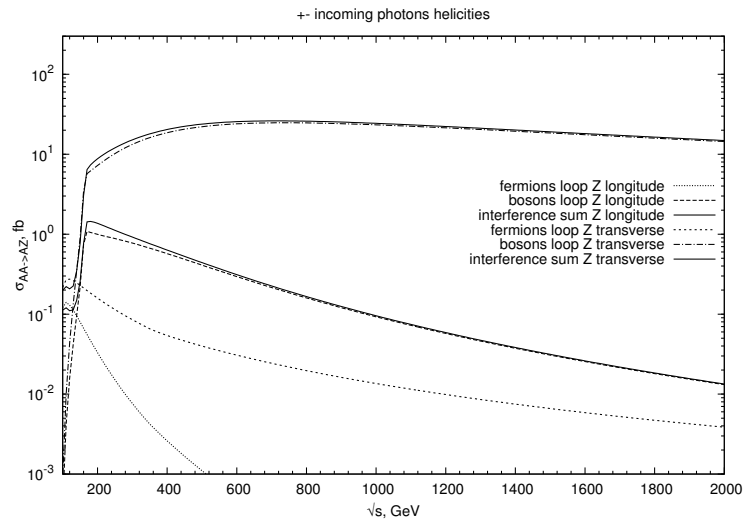


Рис. 3.7: Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при ”+ -” поляризации начальных фотонов (PDG2012 параметры [34]).

С помощью пакета `sanc_4b_v1.00`, доступного для скачивания [22], можно получить численные результаты для различного набора параметров.

Глава 4. Вычисление процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$

В данной главе приводятся результаты вычисления процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [35] согласно подходу предыдущих расчетов с учетом поляризационной физики. Показаны ковариантные и спиральные амплитуды, дифференциальные сечения рассеяния, сравнение результатов с имеющимися в литературе данными.

4.1. Ковариантная амплитуда

Ковариантная амплитуда процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ равна:

$$\mathcal{A}_{\gamma\gamma \rightarrow ZZ} = 4e^4 Q_f^4 \sum_{i=1}^{20} [\mathcal{F}_i^{\text{bosons}}(s, t, u) + \mathcal{F}_i^{\text{fermions}}(s, t, u)] T_i^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Для описания тензорной структуры ковариантной амплитуды процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ найдены пять простых тензорных строк:

$$\begin{aligned} \tau_1^{ij} &= p^{1i} p^{2j} + \frac{1}{2} s \delta^{ij}, & \tau_2^{ij} &= p^{2i} p^{3j} - \frac{1}{2} (M_Z^2 - t) \delta^{ij}, \\ \tau_3^{ij} &= p^{1i} p^{3j} - \frac{1}{2} (M_Z^2 - u) \delta^{ij}, & \tau_4^i &= p^{3i} + \frac{M_Z^2 - t}{s} p^{1i}, & \tau_5^i &= p^{3i} + \frac{M_Z^2 - u}{s} p^{2i}. \end{aligned}$$

Получаем тензорный базис:

$$\begin{aligned} T_1^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\alpha} p^{1\mu} p^{1\nu}, & T_2^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\nu} \tau_1^{\mu\alpha}, & T_3^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\nu} \tau_3^{\mu\alpha}, \\ T_4^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\mu} \tau_1^{\nu\alpha}, & T_5^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\mu} \tau_3^{\nu\alpha}, & T_6^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\alpha} p^{2\mu} p^{2\nu}, \\ T_7^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} p^{2\mu} \left(2p^{2\nu} \tau_3^{\beta\alpha} + s \delta^{\beta\nu} \tau_5^\alpha \right), & T_8^{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2} p^{1\mu} \left(2p^{1\nu} \tau_2^{\alpha\beta} + s \delta^{\alpha\nu} \tau_4^\beta \right), \\ T_9^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_3^{\nu\alpha} p^{1\mu} \tau_4^\beta, & T_{10}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\mu\alpha} \tau_2^{\nu\beta}, & T_{11}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\nu\beta} \tau_3^{\mu\alpha}, \\ T_{12}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\nu\alpha} \tau_2^{\mu\beta}, & T_{13}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\mu\beta} \tau_3^{\nu\alpha}, & T_{14}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_2^{\nu\beta} p^{2\mu} \tau_5^\alpha, \\ T_{15}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \delta^{\alpha\beta} p^{1\mu} p^{2\nu} - \delta^{\alpha\mu} p^{1\beta} p^{2\nu} - \delta^{\beta\nu} \tau_1^{\mu\alpha}, \\ T_{16}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \delta^{\alpha\beta} p^{1\nu} p^{2\mu} - \delta^{\alpha\nu} p^{1\beta} p^{2\mu} - \delta^{\beta\mu} \tau_1^{\nu\alpha}, \\ T_{17}^{\alpha\beta\mu\nu} &= (\delta^{\alpha\mu} p^{1\nu} - \delta^{\alpha\nu} p^{1\mu}) \tau_4^\beta, & T_{18}^{\alpha\beta\mu\nu} &= (\delta^{\beta\mu} p^{2\nu} - \delta^{\beta\nu} p^{2\mu}) \tau_5^\alpha, \\ T_{19}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \tau_1^{\beta\alpha} \delta^{\mu\nu}, & T_{20}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \delta^{\mu\nu} \left(\frac{M_Z^2 - t}{s} \tau_3^{\alpha\beta} + \tau_5^\alpha p^{3\beta} \right). \end{aligned}$$

Выражения для ФФ \mathcal{F}_i фермионного и бозонного вкладов данного процесса приведены в пакете, доступном для скачивания на домашней странице системы SANC [22].

4.2. Спиральные амплитуды

В системе SANC спиральные амплитуды для процесса получаются с помощью процедуры `TRACENHelicity.prc`. Описание основных процедур SANC приведено в [29].

Приведем спиральные амплитуды для процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$:

$$\gamma(p_1, \lambda_1) + \gamma(p_2, \lambda_2) \longrightarrow Z(p_3, \lambda_3) + Z(p_4, \lambda_4),$$

где λ_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) — спиральности внешних частиц.

Общее число спиральных амплитуд для данного процесса равно 36.

Имеются соотношения между спиральными амплитудами благодаря четности и Бозе симметриям:

$$\mathcal{H}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s, t, u, \lambda) = \mathcal{H}_{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\lambda_4}(s, t, u, \lambda).$$

$$\mathcal{H}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s, t, u, \lambda) = \mathcal{H}_{\lambda_2\lambda_1\lambda_4\lambda_3}(s, t, u, \lambda).$$

Данные соотношения группируют амплитуды в 10 наборов:

$$\text{Набор 1 : } \mathcal{H}_{++++}, \mathcal{H}_{++--}, \mathcal{H}_{--++}, \mathcal{H}_{----}$$

$$\text{Набор 2 : } \mathcal{H}_{+++--}, \mathcal{H}_{++--+}, \mathcal{H}_{---+-}, \mathcal{H}_{----+}$$

$$\text{Набор 3 : } \mathcal{H}_{+---+}, \mathcal{H}_{+----}, \mathcal{H}_{-+++}, \mathcal{H}_{-+---}$$

$$\text{Набор 4 : } \mathcal{H}_{+--+}, \mathcal{H}_{+---+}, \mathcal{H}_{-++-}, \mathcal{H}_{-+--+}$$

$$\text{Набор 5 : } \mathcal{H}_{-+00}, \mathcal{H}_{+-00}$$

$$\text{Набор 6 : } \mathcal{H}_{--00}, \mathcal{H}_{++00}$$

$$\text{Набор 7a : } \mathcal{H}_{+++0}, \mathcal{H}_{++-0}, \mathcal{H}_{--+0}, \mathcal{H}_{---0}$$

$$\text{Набор 7b : } \mathcal{H}_{++0+}, \mathcal{H}_{++0-}, \mathcal{H}_{--0+}, \mathcal{H}_{--0-}$$

$$\text{Набор 8a : } \mathcal{H}_{+-0+}, \mathcal{H}_{+-0-}, \mathcal{H}_{-+0+}, \mathcal{H}_{-+0-}$$

$$\text{Набор 8b : } \mathcal{H}_{+-+0}, \mathcal{H}_{+--0}, \mathcal{H}_{-++0}, \mathcal{H}_{-+-0}$$

Наконец, благодаря преобразованию четности и соответствующему вращению вокруг u -оси, получаем сокращение числа независимых спиральных амплитуд до восьми:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{++--}(s, t, u, \lambda) &= \mathcal{H}_{++++}(s, t, u, -\lambda), \\ \mathcal{H}_{+--+}(s, t, u, \lambda) &= \mathcal{H}_{+--+}(s, t, u, -\lambda), \\ \mathcal{H}_{++-0}(s, t, u, \lambda) &= -\mathcal{H}_{++++0}(s, t, u, -\lambda), \\ \mathcal{H}_{+--0}(s, t, u, \lambda) &= -\mathcal{H}_{+--+0}(s, t, u, -\lambda).\end{aligned}$$

В сравнении с [18] получен аналитический ноль между всеми спиральными амплитудами и сечением рассеяния.

В полностью массивном случае аналитические выражение для спиральных амплитуд $\mathcal{H}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{++++} &= \frac{1}{32}s \left\{ 8(c^- \mathcal{F}_1 + c^+ \mathcal{F}_2) + 4c^- c^+ \frac{\sqrt{\lambda}}{s} (\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4) + 16(\mathcal{F}_5 - \frac{M_Z^2}{s} \mathcal{F}_6) \right. \\ &\quad + c^- c^+ [2s(\mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_8 - \mathcal{F}_9 + \mathcal{F}_{10}) - k_2(\mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{15} + \mathcal{F}_{16}) + k_1 \mathcal{F}_{14}] \\ &\quad - (c^-)^2 k_1 \mathcal{F}_{12} - (c^+)^2 k_2 \mathcal{F}_{13} \\ &\quad \left. + \frac{k_2}{2s} \left[(c^-)^2 (c^+ \sqrt{\lambda} \mathcal{F}_{17} + k_1 \mathcal{F}_{18}) + (c^+)^2 (k_1 \mathcal{F}_{19} + c^- \sqrt{\lambda} \mathcal{F}_{20}) \right] \right\}, \\ \mathcal{H}_{+++-} &= \frac{1}{32} s c^- c^+ \left\{ 2s (-\mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_8 + \mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{10}) \right. \\ &\quad + k_2 \left[(\mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{12} - \mathcal{F}_{13} - \mathcal{F}_{14} - \mathcal{F}_{15} + \mathcal{F}_{16}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\lambda}}{2s} (c^- \mathcal{F}_{17} + c^+ \mathcal{F}_{20}) + \frac{k_2}{2s} (\mathcal{F}_{18} + \mathcal{F}_{19}) \right] \left. \right\}, \\ \mathcal{H}_{+---} &= \frac{1}{64} c^- c^+ \left\{ -8 \frac{\lambda}{s} \mathcal{F}_6 + 2s \left[4(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) - 4 \frac{\sqrt{\lambda}}{s} (\mathcal{F}_3 - \mathcal{F}_4) \right. \right. \\ &\quad - k_2 \mathcal{F}_{12} - k_1 \mathcal{F}_{13} - c^+ \sqrt{\lambda} \mathcal{F}_{14} \\ &\quad \left. \left. + c^- \sqrt{\lambda} \left(\mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{15} - \mathcal{F}_{16} - \frac{k_2}{2s} \mathcal{F}_{17} + \frac{k_1}{2s} \mathcal{F}_{20} \right) \right] + k_2^2 \mathcal{F}_{18} + k_1^2 \mathcal{F}_{19} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{+--+} &= \frac{1}{32}(c^-)^2 s \left\{ 4(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) \right. \\
&\quad \left. + (\sqrt{\lambda}c^+ - u + t - s) \left[\mathcal{F}_{12} + \mathcal{F}_{13} + \frac{1}{2}c^+ \frac{\sqrt{\lambda}}{s} (\mathcal{F}_{17} + \mathcal{F}_{20}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\lambda}c^+ (-\mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{14} - \mathcal{F}_{15} + \mathcal{F}_{16} + \mathcal{F}_{17}) + 2M_Z^2 (\mathcal{F}_{18} + \mathcal{F}_{19}) \right\} \\
\mathcal{H}_{+-00} &= \frac{1}{64} \frac{c^+c^-}{M_Z^2} \left\{ 4s^2 (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) + 2\lambda \left[2(\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4) + \frac{1}{s^2} k_3 \mathcal{F}_6 \right] \right. \\
&\quad \left. - s \left[\sqrt{\lambda} k_{11} (\mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{15}) + k_3 \mathcal{F}_{12} + 4sM_Z^2 \mathcal{F}_{13} + \sqrt{\lambda} k (\mathcal{F}_{14} - \mathcal{F}_{16}) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2M_Z^2 \left[\sqrt{\lambda} k_{11} \mathcal{F}_{17} + k_3 (\mathcal{F}_{18} + \mathcal{F}_{19}) - \sqrt{\lambda} k \mathcal{F}_{20} \right] \right\}, \\
\mathcal{H}_{+++0} &= \frac{1}{32} \frac{1}{M_Z^2} \left\{ -2(s^2 c^+ c^- + k^2) \mathcal{F}_1 - 2(s^2 c^+ c^- + k_{11}^2) \mathcal{F}_2 \right. \\
&\quad \left. - 2c^+ c^- \lambda (\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4) - 4k_3 \left[\mathcal{F}_5 - \frac{M_Z^2}{s} \mathcal{F}_6 \right] - s \left[k k_{11} \mathcal{F}_7 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - k^2 \mathcal{F}_8 - k_{11}^2 \mathcal{F}_9 + (s^2 \cos^2 \vartheta_z - \lambda) \mathcal{F}_{10} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\cos \vartheta_z}{2} k_1 k_2 [k_{11} (\mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{15}) + k \mathcal{F}_{16}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} c^+ c^- s [k_3 \mathcal{F}_{12} + k_1 k_2 \mathcal{F}_{13}] - k \left(\frac{1}{2} \cos \vartheta_z k_3 - s \sqrt{\lambda} \right) \mathcal{F}_{14} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - c^+ c^- M_Z^2 \left[\sqrt{\lambda} k_{11} \mathcal{F}_{17} + k_3 (\mathcal{F}_{18} + \mathcal{F}_{19}) - \sqrt{\lambda} k \mathcal{F}_{20} \right] \right\}, \\
\mathcal{H}_{++++0} &= \frac{1}{32} \sin \vartheta_z \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2} M_Z} \left\{ 2k_1 \left[2(-\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) + \frac{\sqrt{\lambda}}{s} (c^- \mathcal{F}_3 - c^+ \mathcal{F}_4) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2s [k_{11} (-\mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_9) + k (\mathcal{F}_8 - \mathcal{F}_{10})] + c^- k_3 \mathcal{F}_{12} \right. \\
&\quad \left. - (k_1^2 - c^- k_3) \mathcal{F}_{14} - k_2 \left(s c^+ \mathcal{F}_{13} - k_{11} (\mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{15}) - k \mathcal{F}_{16} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2s} \left[\sqrt{\lambda} (c^- k_{11} \mathcal{F}_{17} + c^+ k \mathcal{F}_{20}) + k_3 (c^- \mathcal{F}_{18} - c^+ \mathcal{F}_{19}) \right] \right) \right\}, \\
\mathcal{H}_{+-0+} &= \frac{1}{32} \sin \vartheta_z \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2} M_Z} c^+ \left\{ 4s (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) - 2 \frac{\sqrt{\lambda}}{s} (k_1 \mathcal{F}_3 + k_2 \mathcal{F}_4) \right. \\
&\quad \left. + s \left[c^- \sqrt{\lambda} \mathcal{F}_{11} - k_2 \mathcal{F}_{12} - 4M_Z^2 \mathcal{F}_{13} + c^- \sqrt{\lambda} (\mathcal{F}_{15} - \mathcal{F}_{16}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\lambda} k \mathcal{F}_{14} - 2M_Z^2 \left[c^- \sqrt{\lambda} (\mathcal{F}_{17} - \mathcal{F}_{20}) - k_2 \mathcal{F}_{18} - k_1 \mathcal{F}_{19} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{++0+} &= \frac{1}{32} \sin \vartheta_z \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2} M_z} \left\{ 4k_1 (\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2) + \frac{2\sqrt{\lambda}}{s} k_1 (c^+ \mathcal{F}_3 - c^- \mathcal{F}_4) \right. \\
&\quad + 2s \left[k (\mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_8) - k_{11} (\mathcal{F}_9 - \mathcal{F}_{10}) - \frac{c^-}{2} k_1 \mathcal{F}_{12} \right. \\
&\quad \left. \left. + 2c^+ M_z^2 \mathcal{F}_{13} \right] + k k_1 \mathcal{F}_{14} - 2M_z^2 \left[2s \cos \vartheta_z (\mathcal{F}_{11} - \mathcal{F}_{15} + \mathcal{F}_{16}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - c^+ c^- \sqrt{\lambda} (\mathcal{F}_{17} - \mathcal{F}_{20}) - k_1 (c^- \mathcal{F}_{18} - c^+ \mathcal{F}_{19}) \right] \right\}, \\
\mathcal{H}_{+-+0} &= \frac{1}{32} \sin \vartheta_z \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2} M_z} c^- \left\{ 4s (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) - \frac{2\sqrt{\lambda}}{s} [k_1 \mathcal{F}_3 - k_2 \mathcal{F}_4] \right. \\
&\quad - \sqrt{\lambda} k_{11} (\mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{15}) - k_3 \mathcal{F}_{12} - s k_1 \mathcal{F}_{13} - c^+ s \sqrt{\lambda} \mathcal{F}_{14} \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2s} \left[\sqrt{\lambda} k (2s \mathcal{F}_{16} - k_1 \mathcal{F}_{20}) + \sqrt{\lambda} k_{11} k_2 \mathcal{F}_{17} + k_3 (k_2 \mathcal{F}_{18} + k_1 \mathcal{F}_{19}) \right] \right\},
\end{aligned}$$

где имеют место следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
u &= \cos \vartheta_z \sqrt{\lambda} + t, \\
c^+ &= 1 + \cos \vartheta_z, \quad c^- = 1 - \cos \vartheta_z, \\
k_1 &= s - \sqrt{\lambda}, \quad k_2 = s + \sqrt{\lambda}, \quad k_3 = s^2 + \lambda, \\
k_{11} &= s c^+ - k_1, \quad k = s c^+ - k_2, \\
\lambda &= s(s - 4M_z^2).
\end{aligned}$$

4.3. Численные сравнения

Корректность аналитических результатов подтверждается несколькими факторами: независимостью ФФ \mathcal{F}_i от калибровочных параметров (все вычисления выполнены в R_ξ калибровке), ковариантная амплитуда удовлетворяет тождеству Варда, численные значения и распределения для амплитуд и дифференциальных сечений, полученных в системе SANC, имеют хорошее согласие с независимыми вычислениями, представленными в литературе.

Приведем ряд численных результатов, которые можно получить с помощью пакета для вычислений SANC. В соответствии с [17, 18], вычисления

производились при следующем наборе параметров:

$$\alpha = 1/128;$$

$$\cos \vartheta^* < \cos \pi/6;$$

$$M_W = 80.22 \text{ GeV};$$

$$m_e = 0.51099892 \text{ MeV}, \quad m_\mu = 0.105658369 \text{ GeV}, \quad m_\tau = 1.77699 \text{ GeV};$$

$$m_u = 0.062 \text{ GeV}, \quad m_c = 1.50 \text{ GeV}, \quad m_t = 120.0 \text{ GeV};$$

$$m_d = 0.083 \text{ GeV}, \quad m_s = 0.215 \text{ GeV}, \quad m_b = 4.7 \text{ GeV}.$$

Как видно, в системе имеется возможность анализа вклада каждой спиральной амплитуды с определенным набором спиральностей в заданном диапазоне энергий при заданном угле вылета бозонов. При этом также можно провести анализ отдельных вкладов (фермионного, бозонного, вершины бозона Хиггса) для каждой амплитуды.

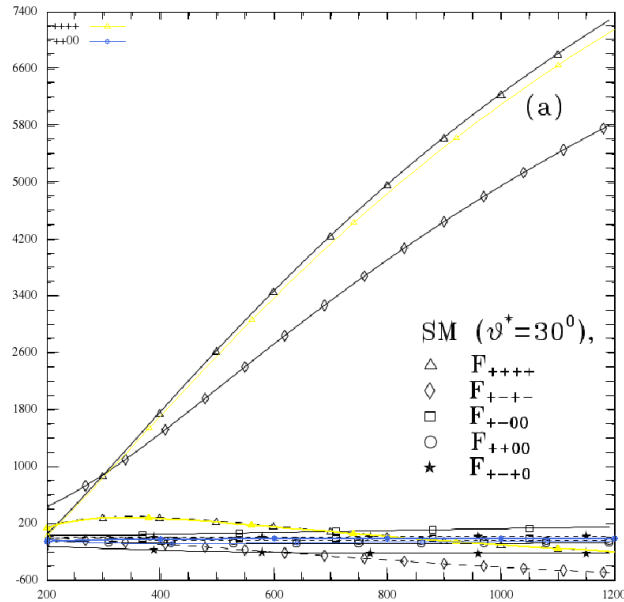


Рис. 4.1: Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в СМ при $\vartheta^* = 30^0$ с учетом вершины Hff [36].

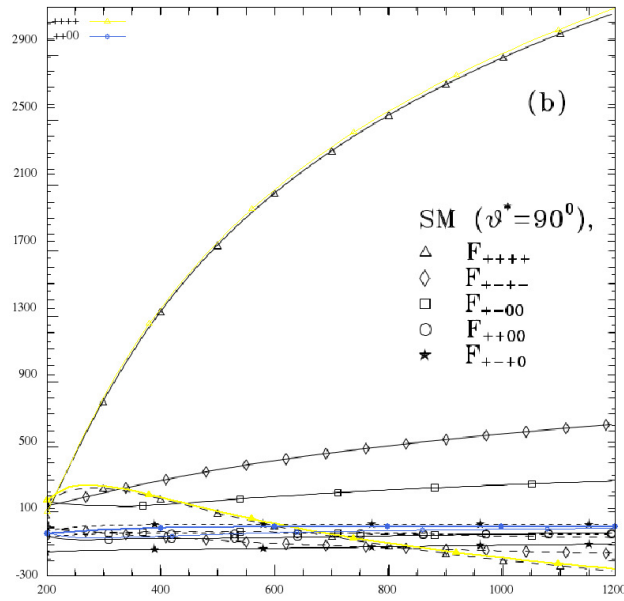


Рис. 4.2: Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в СМ при $\vartheta^* = 90^\circ$ с учетом вершины Hff [36].

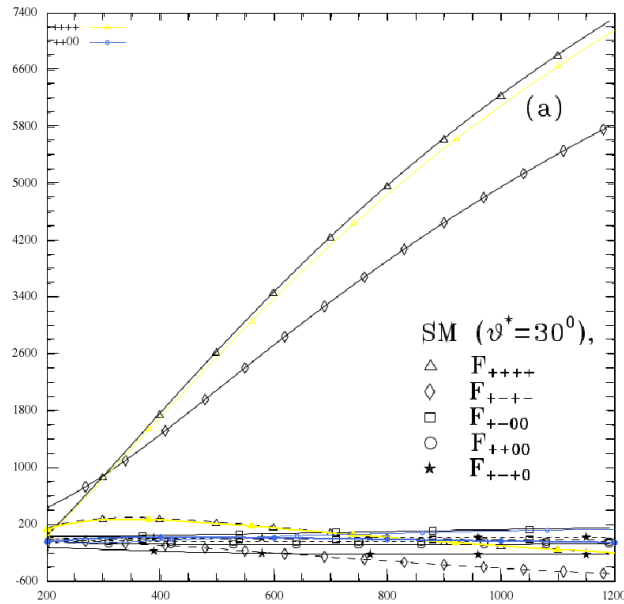


Рис. 4.3: Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в СМ при $\vartheta^* = 30^\circ$ без вклада вершины Hff [36].

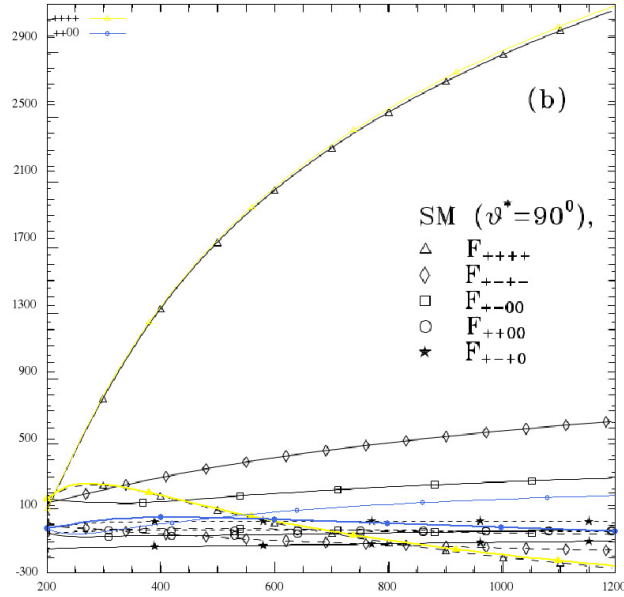


Рис. 4.4: Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в СМ при $\vartheta^* = 90^\circ$ без вклада вершины $H\bar{f}f$ [36].

4.4. Поляризационная физика

Узучение физики на электрон-позитронном линейном коллайдере всегда вызывало большой интерес, основанный на эффектах поляризации [37], [10], [38].

Изучение однопетлевых поправок при поляризованном рассеянии света на свете и γe соударениях является важной задачей высокоточных измерений, и таким образом может быть использована для оценки светимости на ИС. Имея набор спиральных амплитуд для искомым процессов, планируется их применить для вычислений поляризации пучков на однопетлевом уровне точности.

В анализе использовались следующие формулы для дифференциальных сечений процессов, учитывающие спиральности частиц:

$$\frac{d\sigma_0}{d\cos\vartheta^*} = \left(\frac{\beta_Z}{64\pi s}\right) \sum_{\lambda_3\lambda_4} [|\mathcal{H}_{++\lambda_3\lambda_4}|^2 + |\mathcal{H}_{+-\lambda_3\lambda_4}|^2],$$

$$\frac{d\sigma_{22}}{d\cos\vartheta^*} = \left(\frac{\beta_Z}{64\pi s}\right) \sum_{\lambda_3\lambda_4} [|\mathcal{H}_{++\lambda_3\lambda_4}|^2 - |\mathcal{H}_{+-\lambda_3\lambda_4}|^2],$$

$$\frac{d\sigma_{33}}{d\cos\vartheta^*} = \left(\frac{\beta_Z}{64\pi s}\right) \sum_{\lambda_3\lambda_4} \text{Re} [\mathcal{H}_{+-\lambda_3\lambda_4} \mathcal{H}_{-+\lambda_3\lambda_4}^*],$$

$$\frac{d\sigma_3}{d\cos\vartheta^*} = \left(\frac{-\beta_Z}{32\pi s}\right) \sum_{\lambda_3\lambda_4} \text{Re} [\mathcal{H}_{++\lambda_3\lambda_4} \mathcal{H}_{-+\lambda_3\lambda_4}^*],$$

где

$$\beta_Z = 1 - \frac{M_Z^2}{s}.$$

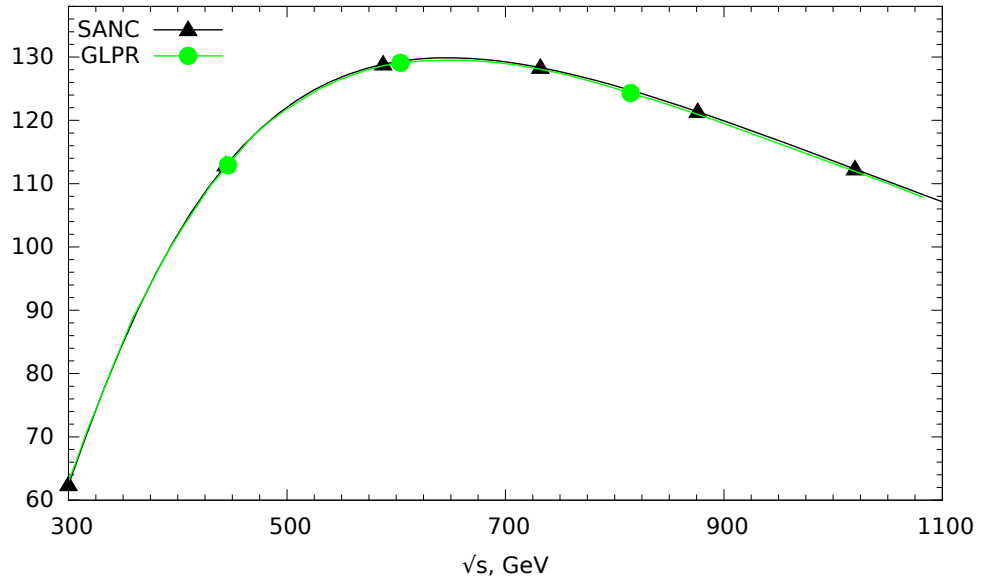


Рис. 4.5: Распределение сечения σ_0 процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].

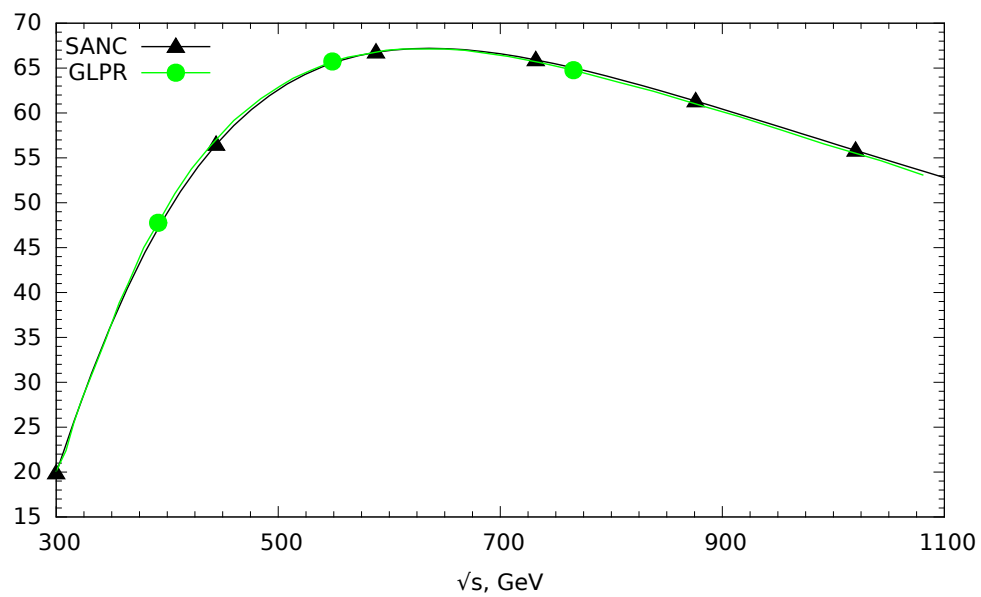


Рис. 4.6: Распределение сечения σ_{22} процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].

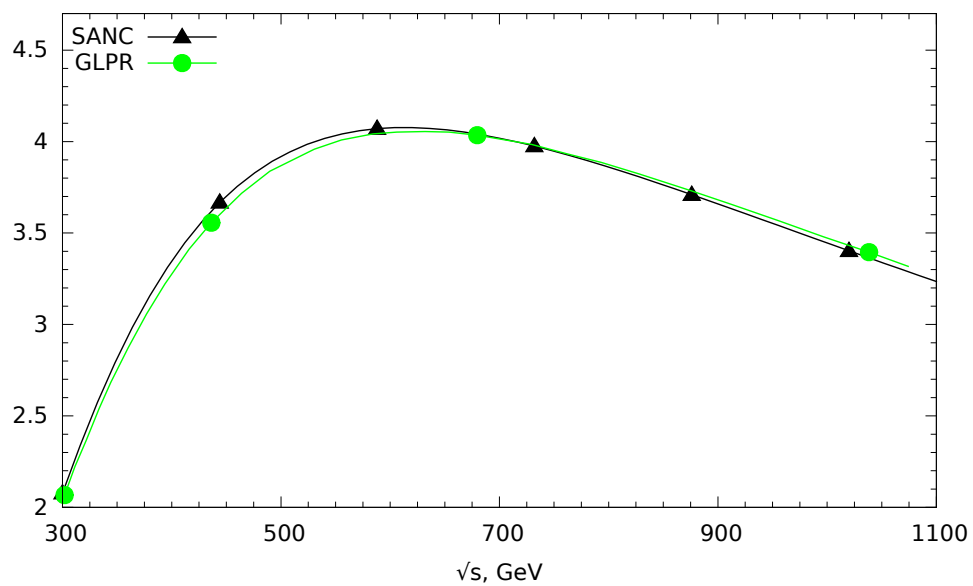


Рис. 4.7: Распределение сечения σ_{33} процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].

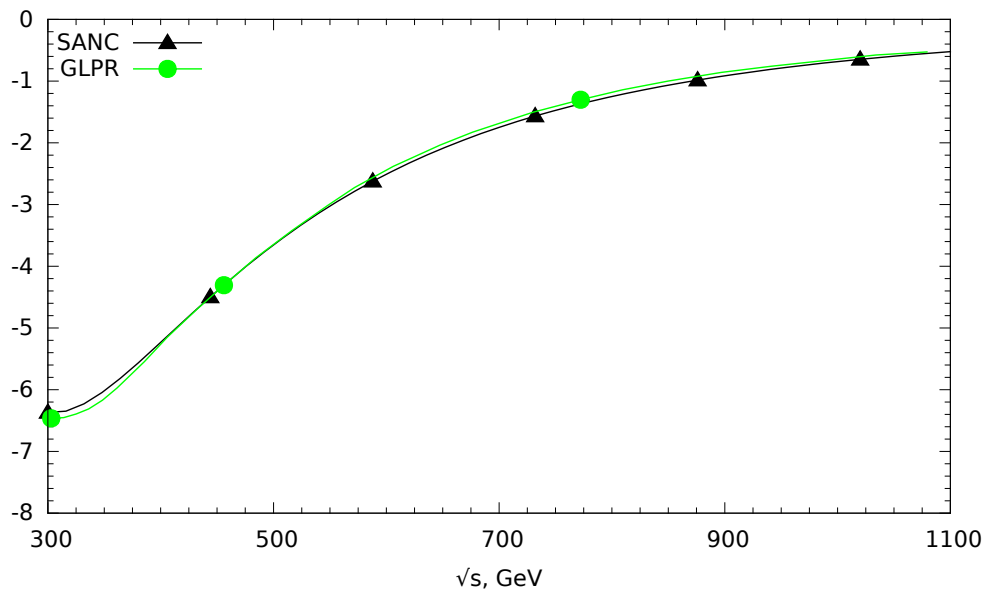


Рис. 4.8: Распределение сечения σ_3 процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].

Глава 5. Компьютерные продукты системы SANC

В данной главе описывается компьютерная часть системы SANC. Дается домашняя Интернет-страница проекта [22], на которой расположены продукты для скачивания. Приводится техническое описание пакета `sanc_4b_v1.10`, с помощью которого получены численные результаты для описанных четырех-бозонных процессов. Кратко описывается генератор диаграмм и амплитуд на древесном и однопетлевом уровне, разработанный в рамках реализации концепции SANC2 [39].


5.1. Домашняя страница проекта SANC

На домашней странице проекта SANC (Рис. 5.1) доступны для скачивания следующие продукты:

- клиент SANC для распределенного аналитического вычисления процессов с помощью разработанной среды FORM процедур, реализованный с использованием JAVA, Perl, MySQL технологий;
- стандартные SANC FORTRAN модули для численных расчетов распределений заданных величин для различных процессов, содержащие выражения для ФФ \mathcal{F}_i , спиральных амплитуд и сечений, а также ряд вспомогательных библиотек;
- стандартные SANC Монте Карло генераторы и интеграторы событий, реализованные на FORTRAN, C++, использующие алгоритмы Vegas, FOAM, Cuba, включающие стандартные SANC FORTRAN модули для различных процессов;
- архивы предыдущих версий различных продуктов.

Часть из продуктов может быть использована как независимые инструменты для анализа, ряд продуктов можно использовать в качестве аналитического ядра для последующего применения в различных генераторах.

SANC Project Official Home Page Joint Institute for Nuclear Research



SUPPORT OF ANALYTIC AND NUMERIC CALCULATIONS FOR EXPERIMENTS AT COLLIDERS

SANC Project [New SANC Modules available for download!](#)

[News](#) [Project Info](#) [Papers](#) [Team Members](#) [Users Support](#) [Download](#)

SANC Project Download.

- [SANC Client](#) -- Special interface for networking at SANC Server.
- [SANC Modules](#) -- Stand alone SANC products for precision calculations.
- [SANC Generators](#) -- Stand alone SANC packages for events generation.
- [SANC Archives](#) -- archives of previous version products.

SANC Modules.

SANC 4b package.

- [31/07/2012 SANC 4b v1.00 package](#) (105 Kb tgz-file) [\[last stable version\]](#)
- [19/11/2009 SANC 4A v1.00 package](#) (21 Kb tgz-file) [\[stable version\]](#)

This package is intended for calculation of the 1-loop full EW correction to four bosons processes like light-by-light scattering, see D. Bardin et al., "Light-by-light scattering in SANC", hep-ph/0611188. Current processes: 4A scattering, Z3A decay and scattering.

corner@nusun.jinr.ru
 Copyright © 2002-2008 SANC Project Team. All rights reserved.
 Copyright © Joint Institute for Nuclear Research (JINR).

Рис. 5.1: Домашняя страница проекта SANC [22].

5.2. Стандартный пакет SANC FORTRAN для вычислений

В данном разделе представлено техническое описание пакета численных вычислений `sanc_4b_v1.10`, предназначенный для численного анализа четырех-бозонных процессов в СМ, расчет которых произведен аналитически на однопетлевом уровне точности в системе SANC.

Пакет состоит из следующего набора файлов:

1. `bbbb_main.F` — основной файл,
2. `bbbb_ha_11_11.F` — СА процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в SANC,
3. `bbbb_ha_11_12.F` — СА процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ в SANC,
4. `bbbb_ha_2_111.F` — СА процесса $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ в SANC,
5. `bbbb_ha_11_22.F` — СА процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в SANC,
6. `*.f` — библиотека специальных функций и алгоритмов,
7. `*_input.h` — набор различных настроек входных параметров,
8. README, INSTALL и другие файлы инструкции.

В README и INSTALL файлах находятся инструкции по использованию пакета. Основные параметры можно изменить в файле `bbbb_main.F` — основном файле вычислений. Конечным результатом работы пакета являются искомые распределения, формируемые согласно выбранным флагам.

Приведем основные опции, значения и переменные, применяемые в пакете.

pid(I) — выбор процесса:

- $I = AA2AA$, — $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ процесс
- $I = AA2AZ$, — $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ процесс
- $I = Z2AAA$, — $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ распад
- $I = AA2ZZ$, — $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ процесс

ipm(I) — выбор спиральности входящих фотонов для суммирования в сечении рассеяния:

- $I = SS$, — сумма всех CA
- $I = ++$, — сумма по “++” спиральности
- $I = +-$, — сумма по “+-” спиральности

itl(I) — выбор спиральности для Z -бозона:

- $I = T$, — Z -поперечная спиральность
- $I = L$, — Z -продольная спиральность
- $I = S$, — сумма по спиральностям

iqed(I) — выбор учета КЭД (фермионных) поправок в вычислениях:

- $I = 0$, — без КЭД поправок
- $I = 1$, — с КЭД поправками

iew(I) — выбор учета ЭС (бозонных) поправок в вычислениях:

- $I = 0$, — без ЭС поправок
- $I = 1$, — с ЭС поправками

Чтобы получить полный расчет в ЭС теории с интерференцией необходимо установить флаги `iqed = 1` , `iew = 1`.

gfscheme(I) — выбор ЭС схемы:

- $I = 0$, — α_0 схема вычислений
- $I = 1$, — G_F схема вычислений
- $I = 2$, — G'_F схема как тестовая опция, когда α_0 заменяется на 3280
 параметр α_0 заменяется на $\alpha_{G_F} = \sqrt{2}G_F M_W^2 (1 - M_W^2/M_Z^2) / \pi$.

isetup(I) — выбор набор настроек :

- $I = 0$, — Стандартный набор параметров SANC [PDG 2006]
- $I = 1$, — набор Les Houches Workshop (2005)
- $I = 2$, — набор Tevatron-for-LHC Workshop (2006)
- $I = 3$, — набор параметров для сравнения результатов

start(I) — выбор начальной точки диапазона по энергии — четыре порядка в логарифмическом масштабе для \sqrt{s} :

- $I = 1q-5$ — логарифмический масштаб для \sqrt{s} от 0.1 MeV до 1 GeV
- $I = 1q-1$ — логарифмический масштаб для \sqrt{s} от 1 GeV до 10^4 MeV.

5.3. Генератор диаграмм и амплитуд SANC2

В рамках реализации концепции SANC2 — перехода на автоматическое вычисление однопетлевых процессов, разработан генератор диаграмм и амплитуд. Генератор реализован на RUBY с привлечением FORM для аналитических преобразований, а также pdf \LaTeX для автоматического построения всех диаграмм как основного результата.

Использование генератора происходит посредством локального Web-интерфейса (Рис.5.2). Процесс задается перечнем начальных и конечных частиц из предлагаемого списка всех частиц, а также выбором уровня вычислений (древесный или однопетлевой) и теории (СМ, КЭД, ЭС, КХД,

выборочная). Выбор теории ограничивает список частиц, используемых в процессе генерации диаграмм — подбора допустимых пропагаторов и вершин согласно правилам Фейнмана, тем самым сокращая время генерации. Генерация для процессов два в два на однопетлевом уровне точности в СМ занимает в среднем несколько минут. Сгенерированные выражения для диаграмм (амплитуды процессов) выдаются в стандартных обозначениях системы SANC, поэтому с помощью имеющихся процедур из среды SANC далее возможно применить стандартную последовательность вычислений.

Генератор пока не имеет возможности воспроизводить комбинаторные факторы для конкретных диаграмм, поэтому его текущий статус — для внутреннего пользования. В то же время, данный продукт является хорошим подспорьем в расчетах, так как количество диаграмм на однопетлевом уровне точности в R_ξ калибровке в СМ велико, и автоматическая генерация исключает возможность ошибки при ручной записи начальных выражений согласно правилам Фейнмана.

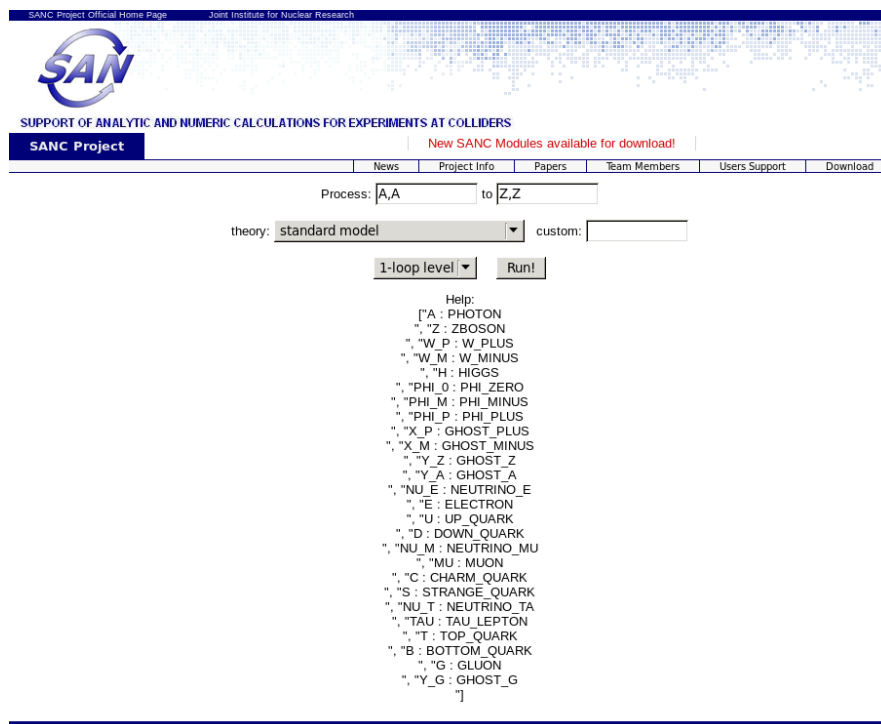


Рис. 5.2: Web-интерфейс генератора диаграмм и амплитуд SANC2.

Глава 6. Вычисление процесса $f\bar{f} \rightarrow W\gamma$

В данной главе представлен результат внедрения процессов $f\bar{f} \rightarrow W\gamma$ в систему SANC в ЭС теории. Массы фермионов считаются легкими так, что пренебрегаются в пределе равным нулю везде, кроме аргументов в логарифмических функциях.

Также описан универсальный подход для аналитических расчетов определенного класса J -функций для шести топологий типа бокс процесса $ud \rightarrow W\gamma$ [40].

6.1. Ковариантные и спиральные амплитуды

Рассмотрим процесс:

$$f(p_2, \lambda_2) + \bar{f}(p_1, \lambda_1) + W(p_4, \lambda_4) + \gamma(p_3, \lambda_3) \rightarrow 0$$

где все 4-х импульсы p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) всех внешних частиц считаются входящими. Здесь λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — спиральности соответствующих частиц.

Диаграммы процесса включают в себя древесные диаграммы, а также однопетлевые в виде диаграмм собственных энергий, вершин и диаграмм типа бокс.

Найдено, что ковариантные амплитуды для процесса могут быть представлены как комбинации из 7 поперечных по импульсу фотона структур.

Получаем:

$$\mathcal{A}_{f\bar{f}W\gamma} = \bar{v}(p_1) \left[\sum_{j=1}^4 \text{Str}_{\mu\nu}^j \mathcal{F}^j + \sum_{j=5}^7 \text{Str}_{\mu\nu}^j \left(\mathcal{F}_0^j + \mathcal{F}^j \right) \right] u(p_2) \varepsilon_\nu^\gamma(p_3) \varepsilon_\mu^W(p_4)$$

где

$$\begin{aligned}
\text{Str}_{\mu\nu}^1 &= -i \left(\not{p}_4 p_{1\mu} - \frac{1}{2} T^2 \gamma_\mu \right) p_{1\nu} \gamma_6, & \text{Str}_{\mu\nu}^2 &= -i \left(\not{p}_4 p_{1\mu} - \frac{1}{2} T^2 \gamma_\mu \right) p_{2\nu} \gamma_6, \\
\text{Str}_{\mu\nu}^3 &= -i \left(\not{p}_4 p_{2\mu} - \frac{1}{2} U^2 \gamma_\mu \right) p_{1\nu} \gamma_6, & \text{Str}_{\mu\nu}^4 &= -i \left(\not{p}_4 p_{2\mu} - \frac{1}{2} U^2 \gamma_\mu \right) p_{2\nu} \gamma_6, \\
\text{Str}_{\mu\nu}^5 &= -i (\not{p}_4 \delta_{\mu,\nu} + \gamma_\mu p_{4\nu}) \gamma_6, & \text{Str}_{\mu\nu}^6 &= -i \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu \gamma_6, \\
\text{Str}_{\mu\nu}^7 &= i \gamma_\nu \gamma_6 \left(p_{1\mu} - p_{2\mu} \frac{T^2}{U^2} \right).
\end{aligned}$$

Отметим, что амплитуда древесного уровня состоит только из трех независимых структур с индексами $i = 5 - 7$.

В явном виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{udW\gamma} &= \mathcal{A}_{udW\gamma}^{\text{Born}} + \mathcal{A}_{udW\gamma}^{1\text{-loop}}, \\
\mathcal{A}_{udW\gamma}^{\text{Born}} &= \sum_{i=5}^7 \text{Str}_i \mathcal{F}_i(s, t, u), & \mathcal{A}_{udW\gamma}^{1\text{-loop}} &= \sum_{i=1}^7 \text{Str}_i \mathcal{F}_i(s, t, u).
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\text{Str}_1 &= -i \left(\not{p}_4 p_{1\mu} + \frac{1}{2} T^2 \gamma_\mu \right) p_{1\nu} \gamma_+, & \text{Str}_2 &= -i \left(\not{p}_4 p_{1\mu} + \frac{1}{2} T^2 \gamma_\mu \right) p_{2\nu} \gamma_+, \\
\text{Str}_3 &= -i \left(\not{p}_4 p_{2\mu} + \frac{1}{2} U^2 \gamma_\mu \right) p_{1\nu} \gamma_+, & \text{Str}_4 &= -i \left(\not{p}_4 p_{2\mu} + \frac{1}{2} U^2 \gamma_\mu \right) p_{2\nu} \gamma_+, \\
\text{Str}_5 &= -i (\not{p}_4 \delta_{\mu,\nu} - \gamma_\mu p_{4\nu}) \gamma_+, & \text{Str}_6 &= -i \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu \gamma_+, \\
\text{Str}_7 &= i \gamma_\nu \left(\frac{p_{1\mu}}{T^2} - \frac{p_{2\mu}}{U^2} \right) \gamma_+.
\end{aligned}$$

Согласно ранее описанной технике получаем ненулевые спиральные амплитуды для данного процесса:

$$\begin{aligned}
H_{+----} &= s_\gamma \left[+\frac{1}{4} s s_- c^+ (F_3^+(s, t, u) - F_4^+(s, t, u)) \right. \\
&\quad \left. - s_- (F_{05}^+(s, t, u) + F_5^+(s, t, u)) + s \frac{c^-}{c^+} (F_{07}^+(s, t, u) + F_7^+(s, t, u)) \right] \\
H_{+----+} &= s_\gamma s c^- \left[\frac{1}{4} s_- (F_1^+(s, t, u) - F_2^+(s, t, u)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{c^+} (F_{07}^+(s, t, u) + F_7^+(s, t, u)) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{+-0-} &= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}M_W} \left[c^+ K(c^+, c^-) F_3^+(s, t, u) + c^+ K(c^-, c^+) F_4^+(s, t, u) \right. \\
&\quad \left. + s_- c^+ (F_{05}^+(s, t, u) + F_5^+(s, t, u)) - s_+ c^- (F_{07}^+(s, t, u) + F_7^+(s, t, u)) \right] \\
H_{+-0+} &= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2}M_W} c^- (K(c^+, c^-) F_1^+(s, t, u) + K(c^-, c^+) F_2^+(s, t, u)) \\
&\quad + s_- (F_{05}^+(s, t, u) + F_5^+(s, t, u) - 2F_{06}^+(s, t, u) - 2F_6^+(s, t, u)) \\
&\quad + s_+ (F_{07}^+(s, t, u) + F_7^+(s, t, u)); \\
H_{+--+} &= s_\gamma s \left(\frac{1}{4} s_- c^+ (F_4^+(s, t, u) - F_3^+(s, t, u)) + F_{07}^+(s, t, u) + F_7^+(s, t, u) \right); \\
H_{+---} &= s_\gamma \left(-\frac{1}{4} s s_- c^- (F_1^+(s, t, u) - F_2^+(s, t, u)) \right. \\
&\quad \left. - s_- ((F_{05}^+(s, t, u) + F_5^+(s, t, u)) - 2(F_{06}^+(s, t, u) + F_6^+(s, t, u))) \right. \\
&\quad \left. - s (F_{07}^+(s, t, u) + F_7^+(s, t, u)) \right);
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
T^2 &= -M_W^2 - 2|p_2||p_3| \cos \vartheta_{p_2, p_3}. \\
c_\pm &= 1 \pm \cos \vartheta_\gamma, \quad s_\pm = s \pm M_W^2. \\
K(c^+, c^-) &= \frac{1}{4} (-s^2 c^+ + 2sM_W^2 - M_W^4 c^-);
\end{aligned}$$

6.2. Сечение рассеяния

Представим основные результаты для вклада на древесном уровне, а также процесса соответствующего тормозного излучения.

- Общее борновское сечение рассеяния

На древесном уровне получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_{udW\gamma}^{\text{Born}} &= \frac{g^4 s_w^2 (s - M_W^2)}{96\pi s^2} \left\{ Q_{dn} \left[\frac{1}{2} \left(Q_{dn} \frac{u}{t} + Q_{up} \frac{sM_W^2}{tu} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{(M_W^2 - s)} \left(\frac{sM_W^2}{t} - u \right) \right] + \left[Q_{dn} \rightarrow Q_{up}, t \leftrightarrow u \right] - \frac{1}{(M_W^2 - s)^2} (sM_W^2 - tu) \right\};
\end{aligned}$$

- КЭД поправки

КЭД поправки из-за виртуальных и мягких фотонов пропорциональны борновскому сечению рассеяния. Явный вид поправок тормозного излу-

чения в начальном и конечном состояниях схожий и имеет вид:

$$\delta_{ISR}^{SV} = \sigma^{\text{Born}} \frac{\alpha}{\pi} \left\{ (Q_{up}^2 + Q_{dn}^2) \left[\frac{3}{4} \left(1 - \ln \left(\frac{s}{\lambda^2} \right) \right) - \frac{1}{2} \ln \left(4 \frac{\omega^2}{s} \right) \right] + \frac{3}{4} \left[Q_{up}^2 \ln \left(\frac{s}{m_u^2} \right) + Q_{dn}^2 \ln \left(\frac{s}{m_d^2} \right) \right] + \frac{1}{2} Q_{up} Q_{dn} \left[\ln \left(4 \frac{\omega^2}{s} \right) \left[\ln \left(\frac{s}{m_u^2} \right) + \ln \left(\frac{s}{m_d^2} \right) \right] + 4 \text{Li}_2(1) \right] \right\}.$$

$$\delta_{FSR}^{SV} = \sigma^{\text{Born}} \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{3}{4} \left(1 - \ln \left(\frac{s}{\lambda^2} \right) \right) + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{s}{M_W^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4\omega^2}{s} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(-M_1, M_W, \sqrt{s})} \ln \left(\frac{1 - \beta(-M_1, M_W, \sqrt{s})}{1 + \beta(-M_1, M_W, \sqrt{s})} \right) \right\}.$$

где $M_1 = 0$ для $ud \rightarrow W\gamma$.

$$\delta_{IFI}^{SV} = \sigma^{\text{Born}} \frac{\alpha}{\pi} Q_{up} \left\{ -\ln(r_1) \left[\frac{1}{4} \ln(r_1) + \frac{1}{2} \ln(r_4) + 2 \ln(r_2) \right] - \frac{5}{4} \ln(r_4)^2 + \ln \left(\frac{T^2}{s} \right) \left[\frac{1}{2} \ln(r_1) - \ln(r_4) - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{Ts}{s} \right) \right] + \ln \left(\frac{4\omega^2}{s} \right) \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{s}{M_W^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s}{m_u^2} \right) - \ln(r_4) \right] - 2 \ln(r_2)^2 + \frac{1}{4} \ln(r_2)^2 + \text{Li}_2(r_5 r_2) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(r_5) - \text{Li}_2(1 - r_4 - r_5 + r_4 r_5) + \frac{1}{2} \text{Li}_2(r_2) - \text{Li}_2 \left(\frac{1}{M_W^2 - s/r_2^2 + sr_5/r_2} \right) - \frac{3}{2} \text{Li}_2(1) + \frac{1}{4} \text{Re}(J_b^W(0, M_W, s))^2 \right\} - \sigma^{\text{Born}} \frac{\alpha}{\pi} Q_{dn} \left\{ T^2 \rightarrow U^2, m_u \rightarrow m_d \right\}$$

где:

$$r_1 = \frac{M_W^2}{s}, r_2 = \frac{s}{(s + M_W^2)}, r_3 = \frac{T^2}{(M_W^2 + T^2)} \\ r_4 = \frac{s}{(M_W^2 + T^2)}, r_5 = \frac{M_W^2}{(M_W^2 + T^2)}.$$

Для обоих процессов имеем одинаковый КЭД ФФ \mathcal{F}_i :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{QED} = & s_w^2 \left\{ -2Q_{up}Q_{dn}Q^2c_0(-m_u^2, -m_d^2, Q^2, m_u, 0, m_d) \right. \\ & + 2Q_{dn}(M_W^2 + U^2)c_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2, M_W, 0, m_d) \\ & - 2Q_{up}(M_W^2 + T^2)c_0(-M_W^2, -m_u^2, T^2, M_W, 0, m_u) \\ & - \frac{3}{2} [a_0^F(M_W) + Q_{up}^2a_0^F(m_u) + Q_{dn}^2a_0^F(m_d)] \\ & \left. + Q_{dn}^2 \ln_\lambda(m_d^2) + Q_{up}^2 \ln_\lambda(m_u^2) + \ln_\lambda(M_W^2) \right\} \end{aligned}$$

6.3. Вычисление J -функций

В данном разделе представлен универсальный подход для аналитических расчетов выражений для функции J_{uni} , справедливый для вычислений всех шести топологий боксов процесса $ud \rightarrow W\gamma$.

J -функции возникают при рассмотрении инфракрасных расходящихся диаграмм типа бокс. Стандартная редукция Пассарино–Вельтмана [26] четырех-точечной боксовской функции с внутренней фотонной линией, соединенной с двумя внешними линиями на массовой поверхности, приводит к инфракрасной расходящейся и массово-сингулярной D_0 -функции.

J -функции, в свою очередь, представлены в виде отдельных линейных комбинаций стандартных D_0 - и C_0 -функций. Затем массовые сингулярности убираются из J в сумме с другими комбинациями C_0 . Результат свободен от обоих типов особенностей и выражается в виде явных и компактных линейных комбинаций дилогарифмических функций, независимых от масс легких фермионов. Вычтенные J -функции, J_{sub} , не имеют массовых особенностей, и их компактность приводит к стабильным и очень быстрым вычислениям.

J -функции, возникающие в процессе $f\bar{f} \rightarrow \gamma\gamma$, первоначально были описаны в [41]. Позже J -функции для четырех-фермионных процессов были рассмотрены в [27]. В рамках проекта SANC предлагается ввести ин-

фрактально конечные J -функции как удобный способ упрощения расчетов для четырех-бозонных процессов.

Впервые все определения и этапы вычислений для J -функций в SANC были описаны в [42] для процессов $f\bar{f} \rightarrow ZZ$, $f\bar{f} \rightarrow ZA$ и $f\bar{f} \rightarrow \gamma\gamma$. Позже мы расширили наш подход путем введения J -функций в расчетах различных каналов процесса $udtb \rightarrow 0$ на ЭС однопетлевом уровне в работе [43]. Явный вид J_{sub} -функции зависел от конкретного канала процесса, представить универсальное выражение не удавалось.

Представленный расчет J -функций для процесса $ud \rightarrow W\gamma$ очень похож на вычисления J -функций для канала: $ud \rightarrow tb$ работы [43], а также в более ранней работе [42], но носит более универсальный характер.

Согласно [27], диаграммы типа бокс для процесса $ff \rightarrow bb$ (где f обозначает фермион, b - бозон) классифицируются на семь типов, которые мы описываем как топологии T_{1-7} .

Для процесса $ud \rightarrow W\gamma$ рассматриваем шесть инфракрасно расходящихся диаграмм типа бокс, приводящих к шести J -функциям, которые естественным образом распадаются на три пары:

- 1) T_1, T_3 (Рис.6.1);
- 2) T_2, T_4 (Рис.6.2);
- 3) $T_6, T_{6'}$ (Рис.6.3).

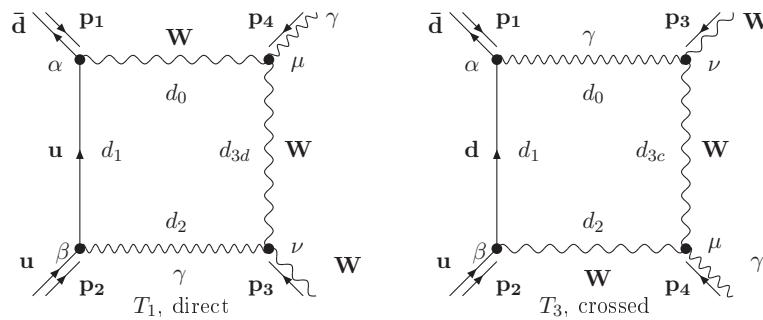


Рис. 6.1: Процесс $ud \rightarrow W\gamma$. Топологии типа бокс T_1 и T_3 .

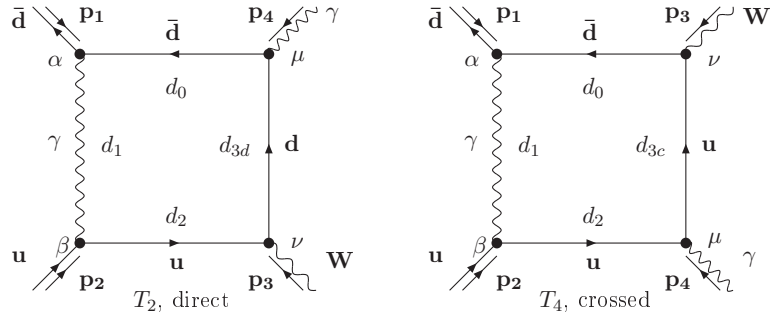


Рис. 6.2: Процесс $ud \rightarrow W\gamma$. Топологии типа бокс T_2 и T_4 .

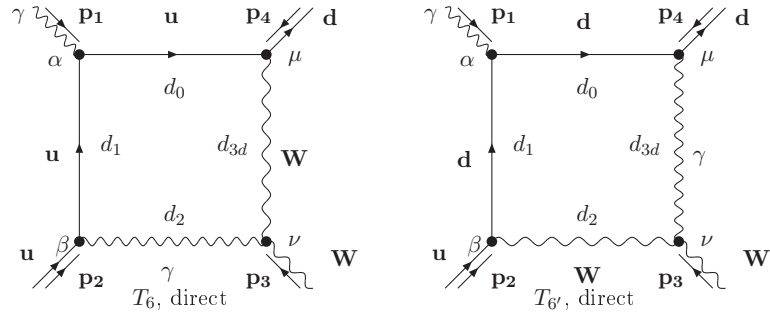


Рис. 6.3: Процесс $ud \rightarrow W\gamma$. Топологии типа бокс T_6 и $T_{6'}$.

Основное определение типичной J -функции имеет вид [43]:

$$i\pi^2 J = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{v(q, p_i) \cdot v(p_i)}{d_0 d_1 d_2 d_3}. \quad (6.1)$$

Знаменатели d_0, d_1, d_2, d_3 — это скалярные части пропагаторов виртуальных частиц боксовских диаграмм; они присущи каждой топологии боксов. Числитель представляет собой скалярное произведение двух векторов $v(q, p_i)$ и $v(p_i)$. Эти векторы должны удовлетворять следующим двум свойствам. Первый 4-вектор является линейной комбинацией вектора интегрирования q и внешнего 4-импульса $p_{1,2,3,4}$ (отсчитывается против часовой стрелки, Рис.6.1, и удовлетворяет закону сохранения $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$); это важно для процедуры сокращения инфракрасной расходимости, которая возникает из-за пропагатора виртуального фотона. Второй 4-вектор, являющийся другой линейной комбинацией внешнего 4-импульса, должен быть выбран таким образом, чтобы упростить последующую процедуру интегрирования по трем фейнмановским параметрам z, x, y .

Тройной интеграл по трем параметрам Фейнмана может быть выражен аналогично [42]:

$$J = \int_0^1 dx \int_0^1 y dy N_{xy} \int_0^1 dz \frac{z}{(L - zk_{xy}^2)^2},$$

с переменными — N_{xy} , L и квадратом вектора k_{xy}^2 — которые являются билинейной комбинацией фейнмановских параметров y, x с коэффициентами, состоящими из параметров задачи: двух инвариантов $P_1^2, P_2^2, Q^2, T^2, U^2$ и всех масс.

Напомним, что используем стандартные для SANC определения переменных Мандельштама s, t, u :

$$s = -Q^2 = -(p_1+p_2)^2, \quad t = -T^2 = -(p_2+p_3)^2, \quad u = -U^2 = -(p_2+p_4)^2,$$

где все инварианты представлены в метрике Паули.

Опускаем детали интегрирования по переменным z и x , опишем интегрирование по переменной y .

В [43] рассматривали случай функции J , когда переменные L и k_{xy}^2 являются линейными по x (если пренебречь массой, которая не приводит к сингулярности). Линейность по x квадрата вектора k_{xy}^2 и переменной $L^* = L - k_{xy}^2$ является ключевым свойством, которое делает возможным вводить одну универсальную функцию для вычисления всех шести J , возникающих в процессе $ud \rightarrow W\gamma$.

Продолжаем рассматривать одномерный интеграл [43]:

$$J(P_1^2, P_2^2; m_1, m_2, m_3, m_4) = \int_0^1 dy I(y),$$

в определение которого поместили весь список формальных параметров функции J .

Для подынтегрального выражения $I(y)$ получается:

$$I(y) = \left(-\frac{1}{k_{xy|y}^2} - \frac{1}{T_y^2 - i\varepsilon} \right) [\ln(L^*|_y) - \ln(P^*(1-y))],$$

с ингредиентами:

$$\begin{aligned}
P^* &= P_1^2 + m_3^2 - i\varepsilon, \\
T_y^2 &= P_2^2 y(1-y) + m_1^2 y + m_4^2(1-y), \\
k_{xy|y}^2 &= m_2^2 y(1-y) - m_1^2 y + P_1^2(1-y), \\
L^*_{|y} &= -m_2^2 y(1-y) + m_1^2 y + m_3^2(1-y) - i\varepsilon.
\end{aligned}$$

Здесь $L^*_{|y} = L^*(x=y, y)$ и $k_{xy|y}^2 = k_{xy}^2(x=y, y)$. Изменены обозначения $P^2 \rightarrow P^*$ и используем инварианты по умолчанию $P_{1,2}^2$ вместо физических инвариантов Q^2, U^2, T^2 , которые ранее использовались [43] для конкретного процесса.

В исследовании возникает два набора топологий. Первый – топологии T_2, T_4 и топологии T_6, T'_6 . Для этого множества получили универсальный ответ, J_{uni} , в терминах четырех различных обращений к вспомогательной функции трех аргументов. Второй набор состоит из двух топологий T_1, T_3 . В этом случае ответ для J_{uni}^0 является пределом предыдущего. Выражение гораздо проще и оно может быть выражено через три обращения к вспомогательной функции двух аргументов.

Для всех топологий получили предел при нулевых массах легких кварков. Массой кварка, который не связан с фотоном, можно пренебречь, в то время как для кварка, связанного с фотоном, развивается массово-сингулярный логарифм — продолжаем удерживать массы кварков в аргументах логарифмических функций и пренебрегать ими во всех других случаях.

- Результат интегрирования по y для первого набора топологий

Можно получить универсальный результат интегрирования, J_{uni} , для первого набора топологий, который выражается через вспомогательную функцию $\mathcal{L}(a, b, c)$:

$$J_{\text{uni}}(P_1^2, P_2^2; m_1, m_2, m_3, m_4) = -\frac{1}{\sqrt{D_k}} (\mathcal{L}(y_{L_1^*}, y_{L_2^*}, y_{k_1}) - \mathcal{L}(y_{L_1^*}, y_{L_2^*}, y_{k_2})) - \\ -\frac{1}{\sqrt{D_T}} (\mathcal{L}(y_{L_1^*}, y_{L_2^*}, y_{T_1}) - \mathcal{L}(y_{L_1^*}, y_{L_2^*}, y_{T_2})).$$

Вспомогательная функция зависит от трех аргументов:

$$\mathcal{L}(a, b, c) = \mathcal{M}(a, c) + \mathcal{M}(b, c) - \mathcal{M}(1, c) - \ln \left(1 - \frac{1}{c}\right) \ln \left(\frac{P^*}{m_3^2}\right),$$

с мастер-интегралом вида:

$$\mathcal{M}(y_d, y_l) = \int_0^1 \frac{dy}{(y - y_d) \ln(1 - y/y_l)} = \\ = \ln \left(1 - \frac{y_d}{y_l}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{y_d}\right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1 - y_d}{y_l - y_d}\right) + \text{Li}_2 \left(\frac{-y_d}{y_l - y_d}\right).$$

Аргументы вспомогательных функций являются корнями квадратных трехчленов:

$$y_{T_{1,2}} = \frac{-b_T \pm \sqrt{D_T}}{(-2P_2^2)}, \quad \text{где } b_T = -m_4^2 + m_1^2 + P_2^2, \quad D_T = b_T^2 + 4P_2^2(m_4^2 - i\varepsilon). \\ y_{k_{1,2}} = \frac{-b_k \pm \sqrt{D_k}}{(-2m_2^2)}, \quad \text{где } b_k = -m_1^2 + m_2^2 - P_1^2, \quad D_k = b_k^2 + 4m_2^2(P_1^2 + i\varepsilon). \\ y_{L_{1,2}^*} = \frac{-b_L \pm \sqrt{D_L}}{2m_2^2}, \quad \text{где } b_L = -m_3^2 + m_1^2 - m_2^2, \quad D_L = b_L^2 - 4m_2^2(m_3^2 - i\varepsilon).$$

- Результат интегрирования второго набора топологий

Этот результат является частным случаем предыдущего при $m_1 = m_3$ и $m_2 = 0$, и его можно записать:

$$J_{\text{uni}}^0(P_1^2, P_2^2; m_3, 0, m_3, m_4) = -\frac{1}{P^*} \left[\mathcal{L}_0 \left(\frac{Q^2}{P^*} \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{D_T}} \left[\mathcal{L}_0(y_{T_1}) - \mathcal{L}_0(y_{T_2}) \right].$$

Аргументы значительно упрощаются, и в этом случае вспомогательная функция сводится к функции одной переменной $\mathcal{L}_0(a)$:

$$\mathcal{L}_0(a) = \mathcal{M}(1, a) + \ln \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln \left(\frac{P^*}{m_3^2}\right).$$

6.4. Топологии T_2, T_4

- Определение функций J^{T_2, T_4}

Для процесса $u\bar{d} \rightarrow W\gamma$ боксовские диаграммы топологий T_2, T_4 показаны на рис. 6.2. Они могут быть прямого и перекрестного типа соответственно.

Функция J^{T_2} для прямого канала определяется следующим образом:

$$i\pi^2 J^{T_2} = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{2(q+p_1)p_4}{d_0(m_d)d_1(0)d_2(m_u)d_{3d}(m_d)};$$

скалярные знаменатели имеют вид d_i :

$$\begin{aligned} d_0 &= q^2 + m_d^2, \\ d_1 &= (q+p_1)^2, \\ d_2 &= (q+p_1+p_2)^2 + m_u^2, \\ d_{3d} &= (q-p_4)^2 + m_d^2, \\ d_{3c} &= (q-p_3)^2 + m_u^2, \end{aligned}$$

где d_{3d} и d_{3c} - знаменатели для прямого и перекрестного канала соответственно.

Прямая J^{T_2} функция выражается через универсальную функцию $J_{\text{uni}}(P_1^2, P_2^2; m_1, m_2, m_3, m_4)$, определяемую в предыдущем разделе:

$$J^{T_2} = J_{\text{uni}}(T^2, Q^2; m_u, M_W, m_d, m_d).$$

Для соответствующего перекрестного канала данной топологии функция J^{T_4} представляется подобным образом:

$$i\pi^2 J^{T_4} = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{-2(q+p_1)p_4}{d_0(m_d)d_1(0)d_2(m_u)d_{3c}(m_u)}.$$

Такой же подход к списку аргументов срабатывает и здесь; в терминах J_{uni} получаем:

$$J^{T_4} = J_{\text{uni}}(U^2, Q^2; m_d, M_W, m_u, m_u).$$

- J^{T_2, T_4} как функции D_0 и C_0 .

Для топологии T_2 с помощью стандартной редукции Пассарино–Вельтмана можно получить соотношения между следующими функциями: инфракрасными и массово-сингулярными $D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_w^2, 0, Q^2, T^2; m_d, 0, m_u, m_d)$ и $C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u)$; инфракрасно конечной, но массово сингулярной J^{T_2} -функцией, а также $C_0(-m_u^2, -M_w^2, T^2; 0, m_u, m_d)$ с массовой сингулярностью.

Такое соотношение, точное по массам, имеет вид:

$$J^{T_2} = (T^2 + m_d^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_w^2, 0, Q^2, T^2; m_d, 0, m_u, m_d) - C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u) + C_0(-m_u^2, -M_w^2, T^2; 0, m_u, m_d).$$

Для J^{T_4} работают подобные соотношения. Однако, пренебрегая вкладом, пропорциональными степеням кварковых масс $m_{u,d}^2/Q^2$, можно получить:

$$J^{T_4} = (U^2 + m_u^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, 0, -M_w^2, Q^2, U^2; m_d, 0, m_u, m_u) - C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u) + C_0(-m_d^2, -M_w^2, U^2; 0, m_d, m_u).$$

Это типичное свойство таких соотношений; они точные по массам для боксов прямого типа, а для боксов перекрестного типа они точные до некоторых степеней массовых вкладов, которые мы все равно не контролируем.

Большое преимущество этих соотношений состоит в следующем. Сложный объект D_0 , содержащий инфракрасную расходимость, исключается в пользу явно вычисляемой функции J^{T_2} или J^{T_4} и простого инфракрасно расходящегося объекта $C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u)$, инфракрасную расходимость которого можно регуляризовать любым способом: массой фотона, с помощью размерной регуляризации или шириной нестабильной частицы. Примеры C_0 -функций, регуляризованных шириной, можно найти в [44].

- Вычтенные функции $J_{\text{sub}}^{T_{2,4}}$.

Добавлением к соотношениям между J, D_0, C_0 других пинчей функции D_0 (которая в целом массово сингулярна) с соответственно скорректированными кинематическими коэффициентами, можно получить вычтенную функцию $J_{\text{sub}}^{T_{2,4}}$, которая свободна от массовых кварковых сингулярностей:

$$\begin{aligned}
J_{\text{sub}}^{T_2} = & (T^2 + m_d^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_W^2, 0, Q^2, T^2; m_d, 0, m_u, m_d) - \\
& - C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u) - \frac{T^2}{Q^2} C_0(0, -m_d^2, T^2; m_d, m_d, 0) - \\
& - \frac{T^2 + M_W^2}{Q^2} C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; 0, m_u, m_d) - \\
& - \frac{Q^2 + M_W^2}{Q^2} C_0(0, -M_W^2, Q^2; m_d, m_d, m_u),
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
J_{\text{sub}}^{T_4} = & (U^2 + m_u^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, 0, -M_W^2, Q^2, U^2; m_d, 0, m_u, m_u) - \\
& - C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u) - \frac{U^2}{Q^2} C_0(0, -m_u^2, U^2; m_u, m_u, 0) - \\
& - \frac{U^2 + M_W^2}{Q^2} C_0(-m_d^2, -M_W^2, U^2; 0, m_d, m_u) - \\
& - \frac{Q^2 + M_W^2}{Q^2} C_0(0, -M_W^2, Q^2; m_u, m_u, m_d).
\end{aligned}$$

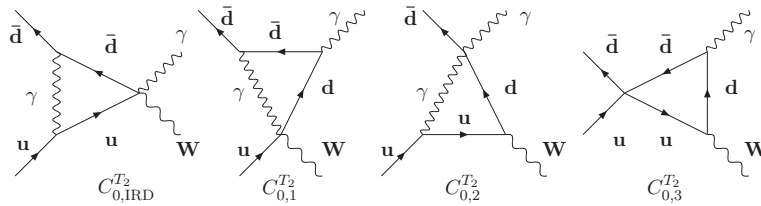


Рис. 6.4: Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_2 .

- Пинчи топологии T_2 (Рис.6.4).

Каждая боксовская диаграмма содержит четыре трех-точечных пинча. В этом разделе представляем диаграммы для пинчей и их выражения в терминах соответствующих C_0 -функций для боксовских топологий T_2 и

T_4 . Отметим, что все четыре пинча вносят вклад в соотношения вычтенных функций J_{sub} . Кроме того, приводятся явные выражения для трех инфракрасно конечных и массово сингулярных пинчей $C_{0,1-3}^{T_2}$ в пределе $m_u = m_d = 0$, т.е. удерживаем эти массы только в аргументах логарифмических функций.

Пинчи для боксовской топологии T_2 в терминах C_0 -функций имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_{0,IRD}^{T_2} &= C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u), \\
C_{0,1}^{T_2} &= C_0(0, -m_d^2, T^2; m_d, m_d, 0) = \frac{1}{T^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{T^2 - i\varepsilon}{m_d^2} \right) + 2\zeta(2) \right], \\
C_{0,2}^{T_2} &= C_0(-m_u^2, -M_w^2, T^2; 0, m_u, m_d) = \\
&= \frac{1}{T^2 + M_w^2} \left\{ \ln[-(1 - i\varepsilon)] \ln \left[\frac{(T^2 + M_w^2)^2 M_w^2}{(T^2)^3} \right] + \right. \\
&\quad + \text{Li}_2 \left(1 + \frac{M_w^2 - i\varepsilon}{T^2} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{M_w^2 - i\varepsilon}{T^2} \right) + 4\zeta(2) + \\
&\quad \left. + \ln \left[-(1 - i\varepsilon) \frac{T^2}{M_w^2} \right] \ln \left(\frac{T^2 + M_w^2}{m_u^2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{T^2}{M_w^2} \right) \right\}, \\
C_{0,3}^{T_2} &= C_0(0, -M_w^2, Q^2; m_d, m_d, m_u) = \\
&= -\frac{1}{Q^2 + M_w^2} \left\{ \ln \left(-\frac{M_w^2}{Q^2} \right) \ln \left(-\frac{Q^2}{m_d^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{M_w^2}{Q^2} \right) \left[\ln \left(\frac{M_w^2 + i\varepsilon}{Q^2} \right) - \ln(-1 + i\varepsilon) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Как видно, для $C_{0,2}^{T_2}$ и $C_{0,3}^{T_2}$ только одна масса кварка (m_u или m_d соответственно) появляется на правой стороне полученного результирующего выражения. Это означает, что особенности по другим массам не развиваются, и ими можно безопасно пренебречь.

- Пинчи топологии T_4 (Рис.6.5).

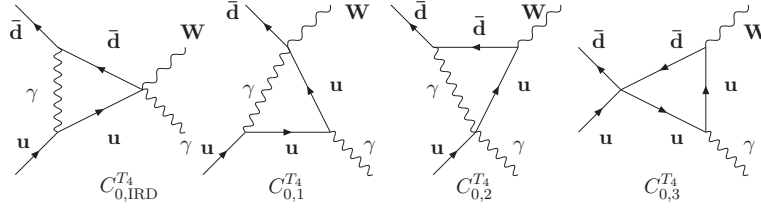


Рис. 6.5: Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_4 .

Пинчи для боксовской топологии T_4 в терминах C_0 -функций имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_{0,\text{IRD}}^{T_4} &= C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u), \\
C_{0,1}^{T_4} &= C_0(0, -m_u^2, U^2; m_u, m_u, 0), \\
C_{0,2}^{T_4} &= C_0(-m_d^2, -M_W^2, U^2; 0, m_d, m_u), \\
C_{0,3}^{T_4} &= C_0(0, -M_W^2, Q^2; m_u, m_u, m_d).
\end{aligned}$$

Три пинча $C_{0,1-3}^{T_4}$ получаются из $C_{0,1-3}^{T_2}$ заменами $T^2 \rightarrow U^2$ и $m_d \leftrightarrow m_u$.

- Заключительные преобразования функций $J_{\text{sub}}^{T_2, T_4}$

Используя ранее представленные соотношения можно найти явный вид для вычтенных функций J_{sub} и расходящихся D_0 .

Из соотношений для функций J и J_{sub} можно исключить инфракрасно расходящиеся D_0 и C_0 . В терминах пинчей получаем:

$$J_{\text{sub}}^{T_2} = J^{T_2} - \frac{T^2}{Q^2} C_{0,1}^{T_2} - \left(1 + \frac{T^2 + M_W^2}{Q^2}\right) C_{0,2}^{T_2} - \frac{Q^2 + M_W^2}{Q^2} C_{0,3}^{T_2}.$$

В качестве следующего шага при получении функции $J_{\text{sub}}^{T_2}$ подставляем вычисленную функцию J^{T_2} и пинчи через явные выражения, представленные в предыдущем разделе. Затем вычисляем предел по массам $m_d \rightarrow 0$ и $m_u \rightarrow 0$. Окончательный ответ выражается в терминах дилогарифмов, не содержит логарифмических массовых особенностей и имеет очень компакт-

НЫЙ ВИД:

$$\begin{aligned}
J_{\text{sub}}^{T_2, T_4}(Q^2, P^2, M_w^2) = & \frac{1}{Q^2} \left[-\ln^2 \left(-\frac{M_w^2}{Q^2 + M_w^2} \right) + \ln^2 \left(\frac{M_w^2}{P^2} \right) + \right. \\
& + 2 \ln \left(-\frac{M_w^2 + i\varepsilon}{P^2} \right) \ln \left(-\frac{P^2 + M_w^2}{Q^2} \right) - \\
& \left. - 2\text{Li}_2 \left(\frac{M_w^2}{Q^2 + M_w^2 + i\varepsilon} \right) + 2\text{Li}_2 \left(-\frac{M_w^2}{P^2 + i\varepsilon} \right) \right].
\end{aligned}$$

Приведем окончательные ответы для $J_{\text{sub}}^{T_2, T_4}$ для обеих топологий $T_{2,4}$, восстанавливая список физических аргументов: $P^2 = T^2$ для топологии T_2 и $P^2 = U^2$ для топологии T_4 . Следует также отметить, что в вычислениях применяем s -канальную кинематику с $Q^2 < 0$ и $P^2 > 0$.

Имея ответ для вычтенной функции J_{sub} , можем также найти соотношение для исключения инфракрасно-расходящейся D_0 в пользу $J_{\text{sub}}^{T_2}$ и пинчей $C_{0,i}^{T_2}$, $i = 1, 2, 3$. При этом $C_{0,\text{IRD}}^{T_2}$ относится к КЭД-части петлевой поправки, в то время как $J_{\text{sub}}^{T_2}$ и три пинча $C_{0,1-3}^{T_2}$ относятся к чисто слабой части ЭС петлевых поправок:

$$\begin{aligned}
& (T^2 + m_d^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_w^2, 0, Q^2, T^2; m_d, 0, m_u, m_d) = \\
& = C_0(-m_d^2, -m_u^2, Q^2; m_d, 0, m_u) - \\
& - J_{\text{sub}}^{T_2}(Q^2, P^2, M_w^2) + \frac{T^2}{Q^2} C_0(0, -m_d^2, T^2; m_d, m_d, 0) + \\
& + \frac{T^2 + M_w^2}{Q^2} C_0(-m_u^2, -M_w^2, T^2; 0, m_u, m_d) \\
& + \frac{Q^2 + M_w^2}{Q^2} C_0(0, -M_w^2, Q^2; m_d, m_d, m_u).
\end{aligned}$$

Для топологии боксов T_4 соответствующие функции интерпретируются аналогично.

6.5. Топологии T_1, T_3

- Определение функций J^{T_1, T_3}

Для процесса $u\bar{d} \rightarrow W\gamma$ боксовские диаграммы топологий T_1, T_3 показаны на рис. 6.1. Так же как и в топологиях T_2, T_4 они бывают прямого и перекрестного типа.

Для определения функции J^{T_1} мы имеем:

$$i\pi^2 J^{T_1} = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{2(q + p_1 + p_2)p_1}{d_0(M_W)d_1(m_u)d_2(0)d_{3d}(M_W)}.$$

Из-за появления массы фотона $m_\gamma = 0$ в списке аргументов выражения для J_{uni} , используется предел

$$J_{\text{uni}}^0(P_1^2, P_2^2; m_1, 0, m_3, m_4) = \lim_{m_2 \rightarrow 0} J_{\text{uni}}(P_1^2, P_2^2; m_1, m_2, m_3, m_4),$$

явное выражение которого приводится ранее.

Для прямой функции J^{T_1} список аргументов в универсальной функции J_{uni}^0 таков:

$$J^{T_1} = J_{\text{uni}}^0(Q^2, T^2; M_W, 0, M_W, m_u).$$

Для поперечного канала топологии T_3 определение следующее:

$$i\pi^2 J^{T_3} = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{-2qp_2}{d_0(0)d_1(m_d)d_2(M_W)d_{3c}(M_W)},$$

и в терминах J_{uni}^0 мы имеем:

$$J^{T_3} = J_{\text{uni}}^0(Q^2, U^2; M_W, 0, M_W, m_d).$$

- J^{T_1, T_3} как функция D_0 и C_0 .

Выполняя стандартную редукцию Пассарино–Вельтмана, выражаем J^{T_1, T_3} в терминах соответствующих D_0 - и C_0 -функций:

$$\begin{aligned} J^{T_1} &= (Q^2 + M_W^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_W^2, 0, Q^2, T^2; M_W, m_u, 0, M_W) - \\ &\quad - C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_u, 0, M_W) \\ &\quad + C_0(-M_W^2, 0, Q^2; 0, M_W, M_W) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
J^{T_3} &= (Q^2 + M_W^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_W^2, 0, Q^2, U^2; M_W, m_u, 0, M_W) - \\
&\quad - C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; M_W, 0, m_d) \\
&\quad + C_0(0, -M_W^2, Q^2; M_W, M_W, 0).
\end{aligned}$$

Опять же, первое соотношение получено точно с удержанием всех масс, в то время как во втором соотношении пренебрегаем вкладом $m_{u,d}^2/Q^2$.

- Вычтенные функции $J_{\text{sub}}^{T_{1,3}}$.

Только один дополнительный пинч должен быть добавлен к соотношениям $J^{T_{1,3}}$ для того, чтобы сократить оставшуюся массовую сингулярность:

$$\begin{aligned}
J_{\text{sub}}^{T_1} &= (Q^2 + M_W^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_W^2, 0, Q^2, T^2; M_W, m_u, 0, M_W) - \\
&\quad - C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_u, 0, M_W) + C_0(-M_W^2, 0, Q^2; 0, M_W, M_W) - \\
&\quad - \frac{Q^2}{T^2 + M_W^2} C_0(-m_u^2, -m_d^2, Q^2; 0, m_u, M_W)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
J_{\text{sub}}^{T_3} &= (Q^2 + M_W^2) D_0(-m_d^2, -m_u^2, 0, -M_W^2, Q^2, U^2; 0, m_d, M_W, M_W) - \\
&\quad - C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; M_W, 0, m_d) + C_0(0, -M_W^2, Q^2; M_W, M_W, 0) - \\
&\quad - \frac{Q^2}{U^2 + M_W^2} C_0(-m_u^2, -m_d^2, Q^2; M_W, m_d, 0).
\end{aligned}$$

- Пинчи топологий T_1 и T_3

Для топологий T_1 и T_3 показываем только те три диаграммы пинчей, которые входят в выражения для вычтенных функций J_{sub} и дают точные выражения только для одного инфракрасно конечного и массово-сингулярного пинча $C_{0,2}^{T_1}$. Функция $C_{0,1}^{T_1}$ является инфракрасной и не имеет массовых сингулярностей.

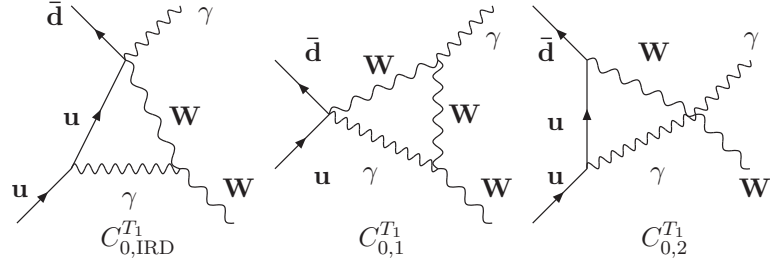


Рис. 6.6: Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_1 .

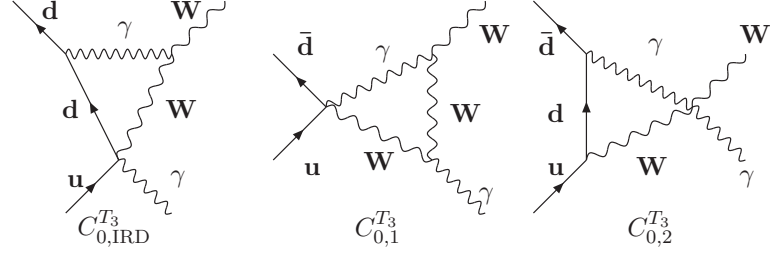


Рис. 6.7: Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_3 .

Пинчи топологии T_1 (Рис.6.6):

$$\begin{aligned}
C_{0,IRD}^{T_1} &= C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_u, 0, M_W), \\
C_{0,1}^{T_1} &= C_0(-M_W^2, 0, Q^2; 0, M_W, M_W), \\
C_{0,2}^{T_1} &= C_0(-m_u^2, -m_d^2, Q^2; 0, m_u, M_W) = \\
&= \frac{1}{Q^2} \left[\ln \left(\frac{-Q^2}{M_W^2} \right) \ln \left(\frac{Q^2 + M_W^2 - i\varepsilon}{M_W^2} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{Q^2 + M_W^2 - i\varepsilon}{M_W^2} \right) - \zeta(2) \right].
\end{aligned}$$

Пинчи топологии T_3 (Рис.6.7):

$$\begin{aligned}
C_{0,IRD}^{T_3} &= C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; M_W, 0, m_d), \\
C_{0,1}^{T_3} &= C_0(0, -M_W^2, Q^2; M_W, M_W, 0), \\
C_{0,2}^{T_3} &= C_0(-m_u^2, -m_d^2, Q^2; M_W, m_d, 0).
\end{aligned}$$

Точное выражение для пинча $C_{0,2}^{T_3}$ получается из $C_{0,2}^{T_1}$ заменой $m_d \leftrightarrow m_u$.

- Заключительные преобразования функции $J_{\text{sub}}^{T_1, T_3}$

Здесь срабатывает такая же техника, которая была реализована в предыдущем разделе, но теперь для функций $J_{\text{sub}}^{T_1, T_3}$. Теперь рассматриваем

только один массово сингулярный пинч $C_{0,2}^{T_1, T_3}$, и уравнение между функцией J и вычтенной J_{sub} имеет вид:

$$J_{sub}^{T_{1,3}} = J^{T_{1,3}} - \frac{Q^2}{T^2 + M_W^2} C_{0,2}^{T_{1,3}}.$$

Подставляются функции J^{T_1, T_3} и $C_{0,2}^{T_1, T_3}$, вычисляются пределы по массам $m_d \rightarrow 0$ и $m_u \rightarrow 0$, и получается компактный ответ:

$$\begin{aligned} J_{sub}^{T_1, T_3}(Q^2, P^2, M_W^2) = & \frac{1}{Q^2 + M_W^2} \left[-\text{Li}_2 \left(-\frac{Q^2}{M_W^2 - i\varepsilon} \right) + \zeta(2) \right] + \\ & + \frac{1}{P^2 + M_W^2} \left\{ \ln \left(-\frac{M_W^2 - i\varepsilon}{P^2} \right) \ln \left(\frac{P^2 + M_W^2}{M_W^2} \right) + \right. \\ & + 2 \ln \left(\frac{Q^2 + M_W^2 - i\varepsilon}{M_W^2} \right) \ln \left(\frac{P^2 + M_W^2}{M_W^2} \right) - \\ & - \ln \left(\frac{Q^2 + M_W^2 - i\varepsilon}{M_W^2} \right) \ln \left(\frac{-Q^2}{M_W^2} \right) - \\ & \left. - \text{Li}_2 \left(\frac{Q^2 + M_W^2 - i\varepsilon}{M_W^2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{P^2 + M_W^2}{M_W^2 - i\varepsilon} \right) + \zeta(2) \right\}. \end{aligned}$$

Далее опять восстанавливается список физических аргументов $P^2 = T^2$ для топологии T_1 и $P^2 = U^2$ для топологии T_3 . Подобно предыдущим вычислениям, ограничиваемся кинематикой s -канала – когда $Q^2 < 0$ и $P^2 > 0$ – для записи заключительного выражения.

6.6. Топологии $T_6, T_{6'}$

- Определение функций $J^{T_6, T_{6'}}$

Боксовские диаграммы для топологий $T_6, T_{6'}$ для процесса $u\bar{d} \rightarrow W\gamma$ показаны на Рис.6.3. Обе диаграммы являются диаграммами прямого типа (различаются только обменом виртуальной частицы $\gamma \leftrightarrow W$), и, следовательно, соотношения будут точными по всем массам.

Для определения функции J^{T_6} мы имеем:

$$i\pi^2 J^{T_6} = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{2(q + p_1 + p_2)p_1}{d_0(m_u)d_1(m_u)d_2(0)d_{3d}(M_W)}.$$

Функция J^{T_6} выражается через универсальную функцию J_{uni}^0 следующим образом:

$$J^{T_6} = J_{\text{uni}}(U^2, T^2; M_W, m_d, m_u, m_u).$$

Для $J^{T_{6'}}$ определение имеет вид

$$i\pi^2 J^{T_{6'}} = \mu^{4-n} \int d^n q \frac{2(q + p_1 + p_2 + p_3)(-p_1)}{d_0(m_d)d_1(m_d)d_2(M_W)d_{3d}(0)},$$

что в терминах универсальной функции

$$J^{T_{6'}} = J_{\text{uni}}(T^2, U^2; M_W, m_u, m_d, m_d).$$

- $J^{T_6, T_{6'}}$ как функция D_0 и C_0 .

После процедуры стандартной редукции Пассарино–Вельтмана, функции $J^{T_6, T_{6'}}$ выражаются через соответствующие D_0 - и C_0 -функции:

$$\begin{aligned} J^{T_6} &= (U^2 + m_u^2) D_0(0, -m_u^2, -M_W^2, -m_d^2, U^2, T^2; m_u, m_u, 0, M_W) - \\ &\quad - C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_u, 0, M_W) + C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; 0, M_W, m_u) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} J^{T_{6'}} &= (T^2 + m_d^2) D_0(0, -m_u^2, -M_W^2, -m_d^2, U^2, T^2; m_d, m_d, M_W, 0) \\ &\quad - C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; M_W, 0, m_d) + C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_d, M_W, 0). \end{aligned}$$

- Вычтенная $J_{\text{sub}}^{T_{6,6'}}$ функция.

Вычтенная $J_{\text{sub}}^{T_{6,6'}}$ функция даётся выражениями:

$$\begin{aligned} J_{\text{sub}}^{T_6} &= (U^2 + m_u^2) D_0(0, -m_u^2, -M_W^2, -m_d^2, U^2, T^2; m_u, m_u, 0, M_W) \\ &\quad - C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_u, 0, M_W) + C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; 0, M_W, m_u) \\ &\quad - \frac{U^2}{M_W^2 + T^2} C_0(0, -m_u^2, U^2; m_u, m_u, 0) \\ &\quad - \frac{T^2}{M_W^2 + T^2} C_0(0, -m_d^2, T^2; m_u, m_u, M_W) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
J_{\text{sub}}^{T_{6'}} &= (T^2 + m_d^2) D_0(0, -m_u^2, -M_W^2, -m_d^2, U^2, T^2; m_d, m_d, M_W, 0) - \\
&- C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; M_W, 0, m_d) + C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_d, M_W, 0) - \\
&- \frac{T^2}{M_W^2 + U^2} C_0(0, -m_d^2, T^2; m_d, m_d, 0) - \\
&- \frac{U^2}{M_W^2 + U^2} C_0(0, -m_u^2, U^2; m_d, m_d, M_W).
\end{aligned}$$

Здесь вновь показаны все четыре пинча для вычтенных $J_{\text{sub}}^{T_{6,6'}}$ -функций.

• Пинчи топологий T_6 и $T_{6'}$

Пинчи топологии T_6 (Рис.6.8) соответствуют следующим C_0 -функциям:

$$\begin{aligned}
C_{0,\text{IRD}}^{T_6} &= C_0(-m_u^2, -M_W^2, T^2; m_u, 0, M_W), \\
C_{0,1}^{T_6} &= C_0(-M_W^2, -m_d^2, U^2; 0, M_W, m_u), \\
C_{0,2}^{T_6} &= C_0(0, -m_u^2, U^2; m_u, m_u, 0), \\
C_{0,3}^{T_6} &= C_0(0, -m_d^2, T^2; m_u, m_u, M_W) = \\
&= \frac{1}{T^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{T^2 + M_W^2}{M_W^2} \right) + \ln \left(\frac{T^2 + M_W^2}{M_W^2} \right) \ln \left(\frac{M_W^2}{m_u^2} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{T^2}{T^2 + M_W^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

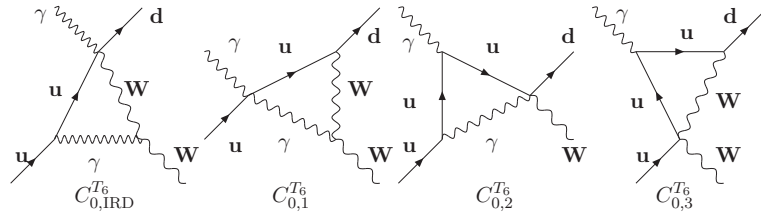


Рис. 6.8: Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_6 .

Функция $C_{0,1}^{T_6}$ свободна от массовых сингулярностей, точное выражение для $C_{0,2}^{T_6}$ аналогично для $C_{0,2}^{T_2}$. В настоящей работе даем точное выражение только для $C_{0,3}^{T_6}$.

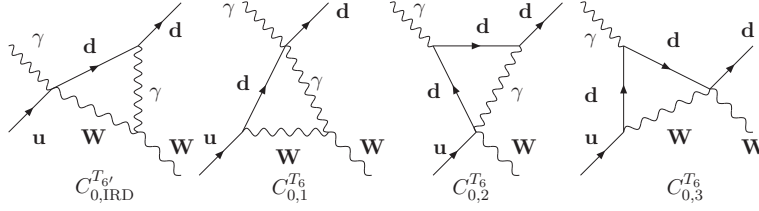


Рис. 6.9: Диаграммы пинчей для топологии типа бокс $T_{6'}$.

Пинчи топологии $T_{6'}$ (Рис.6.9) соответствуют C_0 -функциям с аргументами, которые поменялись местами:

$$\begin{aligned}
C_{0,IRD}^{T_{6'}} &= C_0(-M_w^2, -m_d^2, U^2; M_w, 0, m_d), \\
C_{0,1}^{T_{6'}} &= C_0(-m_u^2, -M_w^2, T^2; m_d, M_w, 0), \\
C_{0,2}^{T_{6'}} &= C_0(0, -m_d^2, T^2; m_d, m_d, 0), \\
C_{0,3}^{T_{6'}} &= C_0(0, -m_u^2, U^2; m_d, m_d, M_w).
\end{aligned}$$

Явное выражение для пинча $C_{0,3}^{T_{6'}}$ получается из $C_{0,3}^{T_6}$ заменами $T^2 \rightarrow U^2$ и $m_d \leftrightarrow m_u$.

- Заключительные преобразования функций $J_{\text{sub}}^{T_6, T_{6'}}$

Соотношение между функцией J и вычтенной J_{sub} в этом случае принимает вид:

$$J_{\text{sub}}^{T_6} = J^{T_6} - \frac{U^2}{M_w^2 + T^2} C_{0,2}^{T_6} - \frac{T^2}{M_w^2 + T^2} C_{0,3}^{T_6}.$$

После подстановки ее составляющих, а также принимая во внимание пределы $m_d \rightarrow 0$ и $m_u \rightarrow 0$, получаем очень короткий ответ:

$$\begin{aligned}
J_{\text{sub}}^{T_6}(T^2, U^2, M_w) &= \frac{1}{M_w^2 + U^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{M_w^2}{U^2} \right) + 3\text{Li}_2(1) \right] + \\
&+ \frac{1}{M_w^2 + T^2} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{M_w^2}{U^2} \right) - \ln^2 \left(\frac{M_w^2 + T^2}{U^2} \right) - 3\text{Li}_2(1) \right].
\end{aligned}$$

Здесь восстановлен список физических аргументов, соответствующих топологии T_6 . Ответ для топологии $T_{6'}$ получается заменой $T^2 \leftrightarrow U^2$. Вы-

ражение считается для s -канальной кинематики, где $T^2 > 0$ и $U^2 > 0$, и является действительным (не имеет мнимой части).

Как обычно, можно поменять порядок вычислений для того, чтобы исключить инфракрасно-расходящееся D_0 , а затем перераспределить C_0 .

6.7. Свободные от массовых сингулярностей комбинации D_0 , C_0

Второй способ, применяемый ко всем шести боксовским топологиям с виртуальной фотонной линией, в конечном итоге приводит к сокращению многих, но не всех массово-сингулярных $C_{0,i}^{T_j}$ -функций. Оставшиеся массово-сингулярные C_0 сокращаются после наблюдения того, что некоторые линейные комбинации D_0 (связанные с боксами, имеющими виртуальный Z вместо виртуального фотона) и C_0 не содержат массовых сингулярностей. Соотношения проверили численно с помощью LoopTools и обнаружили, что четыре следующие комбинации сходятся к стабильному пределу, когда $m_u \rightarrow 0$ и/или $m_d \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
C_{d_0, c_0}(Q^2, T^2) &= (Q^2 T^2 + Q^2 M_Z^2 + M_W^2 M_Z^2) \times \\
&\quad \times D_0(-m_d^2, -m_u^2, -M_W^2, 0, Q^2, T^2; m_d, M_Z, m_u, m_d) - \\
&\quad - T^2 C_0(0, -m_d^2, T^2; m_d, m_d, M_Z) - \\
&\quad - (M_W + Q^2) C_0(0, -M_W^2, Q^2; m_d, m_d, m_u);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{d_0, c_0}(Q^2, U^2) &= (Q^2 U^2 + Q^2 M_Z^2 + M_W^2 M_Z^2) \times \\
&\quad \times D_0(-m_d^2, -m_u^2, 0, -M_W^2, Q^2, U^2; m_d, M_Z, m_u, m_u) - \\
&\quad - U^2 C_0(0, -m_u^2, U^2; m_u, m_u, M_Z) - \\
&\quad - (Q^2 + M_W) C_0(0, -M_W^2, Q^2; m_u, m_u, m_d);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{d_0, c_0}(T^2, U^2) &= (T^2 U^2 + M_W^2 U^2 + M_Z^2 T^2) \times \\
&\times D_0(0, -m_u^2, -M_W^2, -m_d^2, U^2, T^2; m_u, m_u, M_Z, M_W) - \\
&- U^2 C_0(0, -m_u^2, U^2; m_u, m_u, M_Z) - \\
&- T^2 C_0(0, -m_d^2, T^2; m_u, m_u, M_W);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{d_0, c_0}(U^2, T^2) &= (T^2 U^2 + M_W^2 U^2 + M_Z^2 T^2) \times \\
&\times D_0(0, -m_u^2, -M_W^2, -m_d^2, U^2, T^2; m_d, m_d, M_W, M_Z) - \\
&- T^2 C_0(0, -m_d^2, T^2; m_d, m_d, M_Z) - \\
&- U^2 C_0(0, -m_u^2, U^2; m_d, m_d, M_W).
\end{aligned}$$

Следует обратить внимание на нетривиальные кинематические коэффициенты перед D_0 -функциями. Используя соотношения между функциями J и J_{sub} , исключаем четыре D_0 -функции в пользу C_0 -функций (массово-сингулярных) и комбинаций C_{d_0, c_0} (которые свободны от массовых сингулярностей). Можно проверить, что все 12 массово-сингулярных C_0 -функций сокращаются в полном выражении для NLO PW части поперечного сечения процесса $ud \rightarrow W\gamma$. Замечательным представляется тот факт, что массово-сингулярные C_0 -функции исчезают в целом, т. е. без подстановки их явных выражений.

6.8. Численные результаты

В этом разделе приведем сравнение реальные и мнимые части функции $J_{sub}^{T_i}$ с соответствующими частями, которые вычислены с использованием пакета LoopTools [44].

В приведенных ниже таблицах результаты SANC представлены в первых строках, а соответствующие числа LoopTools во вторых строках.

Числа приведены для двух значений s (в ГэВ^2) и для трех значений $\cos \vartheta$.

Как видно из Таблицы 6.1, получено согласие от 7 до 12 разрядов для реальных и мнимых частей.

Как видно из Таблицы 6.2, опять получаем согласие в 10–12 разрядов для функций $J_{\text{sub}}^{T_6,6'}$, которые являются вещественными для топологии T_6 и $T_{6'}$.

Как видно из Таблицы 6.3, существует согласие в 11–12 разрядах для реальных и мнимых частей топологий T_1 и T_3 .

Численное сравнение с библиотекой LoopTools может быть проверено с помощью программных пакетов SANC.

Создан пакет JAWAudWA.F, который связан с внедрением функций J_{T_i} .

Для инфракрасных и массовых сингулярностей, возникающих у четырех-точечных функций боксовских диаграмм с внутренней фотонной линией, соединяющей две внешние линии на массовой поверхности, рассмотрим концепцию на примере процесса $ud \rightarrow W\gamma$.

Предыдущие исследования расчета диаграмм такого класса [27], [42], где был первоначально предложен общий подход к этой проблеме.

Этот подход состоит из трех этапов. На первом этапе вводим новый класс вспомогательных функций J , которые связаны с редукцией Пассарино–Вельтмана [26] скалярных и векторных интегралов. По построению J -функции свободны от инфракрасных особенностей и являются достаточно простыми для последующего интегрирования по трем фейнмановским параметрам z , x , y , что приводит к компактному и точному результату в терминах дилוגарифмических функций. J -функция, в свою очередь, может быть подвергнута стандартной редукции Пассарино–Вельтмана, приводящей к линейным комбинациям стандартных D_0 - и C_0 -функций, которые могут быть использованы, чтобы исключить сложную инфракрасно расходящуюся D_0 -функцию в пользу функции J и простой трехточечной инфракрасно расходящейся C_0 -функции.

В целом, явный вид функции J не является универсальным, а зависит от конкретной топологии инфракрасно расходящихся D_0 -функций процесса.

Встречаются шесть различных топологий инфракрасно расходящихся диаграмм типа бокс, которые возникают в аналитических вычислениях J -функции в процессе $ud \rightarrow W\gamma$. Чтобы упростить аналитические расчеты, нашли способ представить универсальную функцию с помощью специального метода, выбирая два 4-вектора и параметры Фейнмана в определяющем выражении для функции J , который обеспечивает линейную зависимость подынтегральной функции J по одному из переменных интегрирования x .

Таким образом, получаем выражение для J в терминах универсальной вспомогательной функции $J_{\text{uni}}(P_1^2, P_2^2; m_1, m_2, m_3, m_4)$. Это позволяет получить явное выражение для различных топологий простым поворотом аргументов вспомогательной функции. Это новый шаг по сравнению с нашими предыдущими работами по J -функциям.

Вторым шагом является типичный подход в SANC для J -функций: для каждой J_{uni} строим соответствующие вычтенные J_{sub} -функции, свободные от массовых особенностей, которые перешли на какой-то другой набор массово расходящихся C_0 -функций. Часть из последних C_0 -функций сокращается на этом этапе.

Третий шаг заключается в комбинировании четырех оставшихся массово расходящихся D_0 -функций со всеми оставшимися массово сингулярными C_0 -функциями. Эти комбинации C_{d_0, c_0} снова свободны от массовых сингулярностей, и все 12 массово расходящихся C_0 -функций задачи сокращаются.

Такой подход приводит к компактным аналитическим результатам, позволяет выполнить стабильный и быстрый численный расчет и избежать больших численных сокращений между отдельными вкладками.

Табл. 6.1: Сравнение реальных и мнимых частей функции $J_{\text{sub}}^{T_2}$ между результатами SANC и LoopTools, рассчитанными для различных значений s и $\cos \vartheta$. Масса $M_W = 80$ ГэВ (для топологии T_4 строки ± 0.999 должны быть переставлены)

$\cos \vartheta$	$s = 10^4 \text{ GeV}^2$	
	Re	Im
-0.999	6.53638473617E-08	-1.13107515511E-07
	6.53638447452E-08	-1.13107515739E-07
0	9.73334338213E-05	-1.24690402239E-04
	9.73334338175E-05	-1.24690402239E-04
0.999	8.28985241530E-04	-2.80233766861E-04
	8.28985239959E-04	-2.80233766861E-04
$\cos \vartheta$	$s = 10^6 \text{ GeV}^2$	
	Re	Im
-0.999	3.89750326994E-11	-3.12226209474E-09
	3.89750340292E-11	-3.12226209489E-09
0	5.48800329682E-07	-4.31508792787E-06
	5.48800329683E-07	-4.31508792787E-06
0.999	5.40166075955E-05	-3.12695141375E-05
	5.40166075954E-05	-3.12695141375E-05

Табл. 6.2: Сравнение вещественной части функции $J_{\text{sub}}^{T_6}$ между результатами SANC и LoopTools, вычисленными для различных значений s и $\cos \vartheta$; $M_W = 80$ ГэВ (для топологии $T_{6'}$ строки ± 0.999 должны быть переставлены)

$\cos \vartheta$	$s = 10^4 \text{ GeV}^2$	$s = 10^6 \text{ GeV}^2$
	Re	Re
-0.999	-2.86644118212E-04	-2.43416713242E-03
	-2.86644118211E-04	-2.43416713242E-03
0	-8.41693567906E-05	3.76366826830E-05
	-8.41693567907E-05	3.76366826830E-05
0.999	1.40586637158E-03	1.12954414152E-03
	1.40586637160E-03	1.12954414152E-03

Табл. 6.3: Сравнение реальных и мнимых частей функции $J_{\text{sub}}^{T_1}$ между результатами SANC и LoopTools, вычисленными для различных значений s и $\cos \vartheta$. Масса $M_{SSW} = 80.4$ ГэВ (для топологии T_3 строки ± 0.999 должны быть переставлены)

$\cos \vartheta$	$s = 10^4 \text{ GeV}^2$	
	Re	Im
-0.999	1.85671149365E-04	2.50678493204E-04
	1.85671149365E-04	2.50678493205E-04
0	2.36366656601E-04	3.69642886168E-04
	2.36366656601E-04	3.69642886168E-04
0.999	3.27769575491E-04	5.99387751646E-04
	3.27769575491E-04	5.99387751646E-04
$\cos \vartheta$	$s = 10^6 \text{ GeV}^2$	
	Re	Im
-0.999	1.42521459789E-05	9.82990632508E-08
	1.42521459789E-05	9.82990632508E-08
0	3.20290753820E-05	-6.95783750976E-06
	3.20290753820E-05	-6.95783750976E-06
0.999	-1.50514580606E-03	2.22442249799E-03
	-1.50514580606E-03	2.22442249799E-03

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

Разработана и реализована вычислительная среда процедур в системе SANC для расчета спиральных амплитуд, сечений процессов и ширин распадов четырех-бозонной физики в Стандартной Модели.

Получены аналитические выражения на однопетлевом уровне точности в мультиканальном подходе для спиральных амплитуд, сечений процессов и ширин распадов следующих процессов: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$, $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$, $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$.

Созданы автономные аналитические и фортранные модули вычисления сечений и ширины распада четырех-бозонных процессов для получения численных результатов и тщательного сравнения с другими программными продуктами и литературой.

Реализовано вычисление процесса $u\bar{d} \rightarrow W^+\gamma$ на партонном уровне, найден общий метод вычисления вспомогательных функций J типа Пассарино–Вельтмана.

Список иллюстраций

1.1	КЭД диаграммы процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$	15
1.2	Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в КЭД дереве	24
1.3	Сайт SANC для скачивания модулей [22].	25
2.1	ЭС диаграммы процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$: топологии типа бокс, типа пинч, типа рыба.	32
2.2	$\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ на дереве процессов в системе SANC.	37
2.3	Сечение рассеяния для $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ SANC ("++" и "+-") [16].	38
2.4	$\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ SANC полное сечение рассеяния.	38
3.1	Диаграммы процесса $Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0$	41
3.2	$Z\gamma\gamma\gamma \rightarrow 0$ на дереве процессов SANC.	43
3.3	Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при "++" поляризации начальных фотонов (стандартный набор параметров).	51
3.4	Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при "+-" поляризации начальных фотонов (стандартный набор параметров).	51
3.5	Ширина распада $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ — плато стабильности.	52
3.6	Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при "++" поляризации начальных фотонов (PDG2012 параметры [34]).	52
3.7	Сечение рассеяния $\gamma\gamma \rightarrow \gamma Z$ при "+-" поляризации начальных фотонов (PDG2012 параметры [34]).	53
4.1	Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в CM при $\vartheta^* = 30^0$ с учетом вершины Hff [36].	59
4.2	Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в CM при $\vartheta^* = 90^0$ с учетом вершины Hff [36].	60
4.3	Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в CM при $\vartheta^* = 30^0$ без вклада вершины Hff [36].	60

4.4	Распределение доминирующих спиральных амплитуд процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ в СМ при $\vartheta^* = 90^0$ без вклада вершины Hff [36].	61
4.5	Распределение сечения σ_0 процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].	62
4.6	Распределение сечения σ_{22} процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].	63
4.7	Распределение сечения σ_{33} процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].	63
4.8	Распределение сечения σ_3 процесса $\gamma\gamma \rightarrow ZZ$ [36].	64
5.1	Домашняя страница проекта SANC [22].	66
5.2	Web-интерфейс генератора диаграмм и амплитуд SANC2.	69
6.1	Процесс $ud \rightarrow W\gamma$. Топологии типа бокс T_1 и T_3	75
6.2	Процесс $ud \rightarrow W\gamma$. Топологии типа бокс T_2 и T_4	76
6.3	Процесс $ud \rightarrow W\gamma$. Топологии типа бокс T_6 и $T_{6'}$	76
6.4	Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_2	82
6.5	Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_4	84
6.6	Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_1	88
6.7	Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_3	88
6.8	Диаграммы пинчей для топологии типа бокс T_6	91
6.9	Диаграммы пинчей для топологии типа бокс $T_{6'}$	92

Литература

1. CERN. homepage. — 2017. — <http://web.cern.ch>. 1
2. Aaboud M. et al. Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC. — 2017. — 1702.01625. 2
3. Ellis J., Mavromatos N. E., You T. Light-by-Light Scattering Constraint on Born-Infeld Theory. — 2017. — 1703.08450. 2
4. Telnov V. I. Photon colliders: The First 25 years // Acta Phys. Polon. — 2006. — Vol. B37. — P. 633–656. — physics/0602172. 5
5. Telnov V. I. The Photon collider at ILC: Status, parameters and technical problems // Acta Phys. Polon. — 2006. — Vol. B37. — P. 1049–1072. — physics/0604108. 5
6. Colliding gamma e and gamma gamma Beams Based on the Single Pass e+e- Accelerators. 2. Polarization Effects. Monochromatization Improvement / I. F. Ginzburg, G. L. Kotkin, S. L. Panfil et al. // Nucl. Instrum. Meth. — 1984. — Vol. A219. — P. 5–24. 5
7. Telnov V. I. Problems of Obtaining $\gamma\gamma$ and γe Colliding Beams at Linear Colliders // Nucl. Instrum. Meth. — 1990. — Vol. A294. — P. 72–92. 5
8. Telnov V. I. Prospects of high energy photon colliders // Nucl. Part. Phys. Proc. — 2016. — Vol. 273-275. — P. 219–224.
9. Boland M. J. et al. Updated baseline for a staged Compact Linear Collider. — 2016. — 1608.07537. 7
10. Accomando E. et al. Physics at the CLIC multi-TeV linear collider // Proceedings, 11th International Conference on Hadron spectroscopy (Hadron 2005): Rio de Janeiro, Brazil, August 21-26, 2005. — 2004. — hep-ph/0412251. 61

11. Moortgat-Pick G. et al. The Role of polarized positrons and electrons in revealing fundamental interactions at the linear collider // Phys. Rept. — 2008. — Vol. 460. — P. 131–243. — hep-ph/0507011. 7
12. Heisenberg W., Euler H. Consequences of Dirac's theory of positrons // Z. Phys. — 1936. — Vol. 98. — P. 714–732. — physics/0605038. 7
13. Karplus R., Neuman M. The scattering of light by light // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 83. — P. 776–784. 8
14. Ahiezer A., Berestecky V. Quantum Electrodynamics. — Nauka, 1981. — Moscow, (1981) 375 p. 8, 30
15. Jikia G., Tkabladze A. Photon-photon scattering at the photon linear collider // Phys. Lett. — 1994. — Vol. B323. — P. 453–458. — hep-ph/9312228. 8
16. Jikia G. Electroweak gauge boson production at gamma gamma collider // Turk. J. Phys. — 1998. — Vol. 22. — P. 705–713. — hep-ph/9710459. 8, 30, 38, 101
17. Bohm M., Schuster R. Scattering of light by light in the electroweak standard model // Z. Phys. — 1994. — Vol. C63. — P. 219–225. 8, 30, 39, 58
18. Diakonidis T., Gounaris G. J., Layssac J. A FORTRAN code for gamma gamma \rightarrow Z Z in SM and MSSM // Eur. Phys. J. — 2007. — Vol. C50. — P. 47–52. — hep-ph/0610085. 8, 40, 49, 50, 56, 58
19. QCD and QED corrections to light by light scattering / Z. Bern, A. De Freitas, Lance J. Dixon et al. // JHEP. — 2001. — Vol. 11. — P. 031. — hep-ph/0109079. 8, 30
20. SANCscope - v.1.00 / A. Andonov, A. Arbuzov, D. Bardin et al. // Comput. Phys. Commun. — 2006. — Vol. 174. — P. 481–517. — [Erratum: Comput. Phys. Commun.177,623(2007)]. hep-ph/0411186. 8, 13, 20, 22, 23, 31, 40

21. Standard SANC Modules / A. Andonov, A. Arbuzov, D. Bardin et al. // Comput. Phys. Commun. — 2010. — Vol. 181. — P. 305–312. — 0812.4207. 8, 23, 40
22. SANC. Sanc, homepages. — 2016. — Dubna — <http://sanc.jinr.ru>. 8, 17, 23, 25, 29, 36, 40, 43, 53, 55, 65, 66, 101, 102
23. Light-by-light scattering in SANC / D. Bardin, L. Kalinovskaya, V. Kolesnikov, E. Uglov // International School-Workshop on Calculations for Modern and Future Colliders (CALC 2006) Dubna, Russia, July 15-25, 2006. — 2006. — hep-ph/0611188. 13, 31, 40
24. SANC system and its applications for LHC / R. Sadykov, A. Arbuzov, E. Uglov et al. // J. Phys. Conf. Ser. — 2014. — Vol. 523. — P. 012043 (8 pp.). — 1310.3644. 13
25. Vega R., Wudka J. A Covariant method for calculating helicity amplitudes // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D53. — P. 5286–5292. — [Erratum: Phys. Rev.D56,6037(1997)]. hep-ph/9511318. 13, 20, 31, 46
26. Passarino G., Veltman M. One Loop Corrections for e+ e- Annihilation Into mu+ mu- in the Weinberg Model // Nucl.Phys. — 1979. — Vol. B160. — P. 151. 13, 14, 16, 35, 42, 74, 95
27. Bardin D. Y., Passarino G. The standard model in the making: Precision study of the electroweak interactions. — 1999. — Oxford, UK: Clarendon (1999) 685 p. 13, 42, 74, 75, 95
28. Lepage G. P. A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration // J. Comput. Phys. — 1978. — Vol. 27. — P. 192. 23
29. Bardin D., Kalinovskaya L., Uglov E. Standard Model light-by-light scattering in SANC: analytic and numeric evaluation // Phys. Atom. Nucl. — 2010. — Vol. 73. — P. 1878–1888. — 0911.5634. 31, 40, 55
30. Jikia G., Tkabladze A. gamma Z pair production at the photon linear collider // Phys. Lett. — 1994. — Vol. B332. — P. 441–447. — hep-ph/9312274. 40, 49, 50

31. Yang M.-Z., Zhou X.-J. The Decay of the Z boson into three photons via W boson loops // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D52. — P. 5018–5024. 40, 49, 50
32. The gamma gamma \rightarrow gamma Z process at high-energies and the search for virtual SUSY effects / G. J. Gounaris, J. Layssac, P. I. Porfyriadis, F. M. Renard // Eur. Phys. J. — 1999. — Vol. C10. — P. 499–513. — hep-ph/9904450. 40, 49, 50
33. Glover E. W. N., Morgan A. G. Z boson decay into photons // Z. Phys. — 1993. — Vol. C60. — P. 175–180. 40, 49, 50, 52
34. Beringer J. et al. Review of Particle Physics (RPP) // Phys.Rev. — 2012. — Vol. D86. — P. 010001. 52, 53, 101
35. SANC: the process $AA \rightarrow ZZ$ / D. Yu. Bardin, S. Bondarenko, E. D. Uglov et al. // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2017. — Vol. 14, no. 6. 54
36. The gamma gamma \rightarrow Z Z process and the search for virtual SUSY effects at a gamma gamma collider / G. J. Gounaris, J. Layssac, P.I. Porfyriadis, F. M. Renard // Eur. Phys. J. — 2000. — Vol. C13. — P. 79–97. — hep-ph/9909243. 59, 60, 61, 62, 63, 64, 101, 102
37. Accomando E. et al. Physics with e^+e^- linear colliders // Phys. Rept. — 1998. — Vol. 299. — P. 1–78. — hep-ph/9705442. 61
38. Arbey A. et al. Physics at the $e^+ e^-$ Linear Collider // Eur. Phys. J. — 2015. — Vol. C75, no. 8. — P. 371. — 1504.01726. 61
39. Andonov A. D., Kolesnikov V. A., Uglov E. The SANC project status and plans // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2011. — Vol. 8. — P. 765–767. 65
40. J functions for the process $ud \rightarrow WA$ / D. Yu. Bardin, L. V. Kalinovskaya, E. D. Uglov, W. von Schlippe // Phys. Atom. Nucl. — 2016. — Vol. 79, no. 1. — P. 95–107. — [Yad. Fiz.79,no.1,37(2016)]. 1411.6845. 70
41. Brown L. M., Feynman R. P. Radiative corrections to Compton scattering // Phys. Rev. — 1952. — Vol. 85. — P. 231–244. 74

42. Bardin D. Yu., Kalinovskaya L. V., Romyantsev L. A. $J(A)$ functions in the Passarino-Veltman reduction // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2009. — Vol. 6. — P. 30–41. — [Pisma Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra2009,no.149,54(2009)].
75, 77, 95
43. $J_{AW,WA}$ functions in Passarino - Veltman reduction / D. Bardin, L. Kalinovskaya, V. Kolesnikov, W. von Schlippe // Phys.Atom.Nucl. — 2010. — Vol. 73. — P. 2048–2063. — 0912.3893. 75, 76, 77, 78
44. SANCnews: Top decays in QCD and EW sectors / D. Bardin, S. Bondarenko, P. Christova et al. // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2010. — Vol. 7. — P. 72–79. — 0903.1533. 81, 94