На правах рукописи

Абрамов Борис Дмитриевич

АКТУАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ И ТЕОРИИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Специальность 05.13.18 - математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

2016

Работа выполнена в АО «Государственный Научный Центр Российской Федерации - Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского»

Официальные оппоненты:

Агошков Валерий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации. главный научный сотрудник ИВМ РАН

Зизин Михаил Николаевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, главный научный сотрудник НИЦ «Курчатовский институт»

Щукин Николай Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры "Теоретическая и экспериментальная физика ядерных реакторов" НИЯУ МИФИ

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук"

Защита состоится «____»_____________2017 г. в_____часов на заседании диссертационного совета Д 720.001.04 в Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ и на сайте, на котором размещена диссертация/автореферат/…: http://wwwinfo.jinr.ru/announce_disser.htm

Автореферат разослан «____»_______________2016 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванченко Иосиф Моисеевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Математическая теория переноса нейтральных частиц (нейтронов, фотонов) интенсивно развивалась во второй половине прошлого века в связи с работами по использованию атомной энергии и к настоящему времени в этой области науки накоплено большое количество различных методов приближенного решения нейтронно-физических задач [1-23]. Однако многие из них устарели и уже не соответствуют современным требованиям. Другие же продолжают использоваться, причем, зачастую, без должного математического обоснования.

Последнее объясняется обычно тем, что раньше на вопросы математического обоснования часто не обращали особого внимания, поскольку было не до них. Имеется, однако, и другая причина: создать такое обоснование было не всегда легко, ибо математическая теория переноса еще только формировалась.

Ее развитие затруднялось, согласно [5], необычайной сложностью операторов, входящих в уравнение переноса, которые не являются самосопряженными и значения которых целесообразно рассматривать не в гильбертовом пространстве, а в более общих, банаховых пространствах функций, суммируемых со степенью p на фазовом множестве пространственных, энергетических и угловых переменных. В силу этого адекватным математическим аппаратом теории реакторов является функциональный анализ в банаховых пространствах с конусами и теория положительных операторов, оставляющих конус инвариантным. Однако применение этого сравнительно мало известного в то время аппарата для разработки и обоснования методов расчета ядерных реакторов было сопряжено, как указывается в работе [5], со значительными трудностями.

Исторически основные усилия исследователей были сосредоточены на приложениях более известной и более развитой теории симметризуемых положительно определенных операторов в гильбертовых пространствах к задачам разработки и обоснования методов численного решения (систем) односкоростных краевых задач теории переноса нейтронов, к которым сводятся исходные полиэнергетические задачи в рамках многогруппового приближения.

Основополагающие результаты в этом направлении были получены Владимировым. Они опубликованы в его фундаментальной монографии [2], являющейся образцом функционально-аналитического подхода к постановке и исследованию краевых задач теории переноса односкоростных нейтральных частиц.

Этого подхода во многом придерживались авторы последующих отечественных монографий, развивающих и дополняющих результаты Владимирова в плане рассмотрения задач с непрерывной зависимостью сечений от энергии (Шихов [5], Гермогенова [16] и др.), задач нелинейной динамики реактора (Шихов, Щукин [11], Крянев, Шихов [12] и др.), задач развития и обоснования численных методов решения краевых задач теории переноса нейтронов, включая методы характеристик, дискретных ординат и сферических гармоник (Марчук, Лебедев [3], Смелов [8], Румянцев [10], Гермогенова [16], Агошков [17] и др.), методы разделения (декомпозиции) области для кинетического уравнения переноса нейтронов (Лалетин [7], Агошков [17], Смелов [23] и др.).

Помимо работ упомянутых ученых, имеется множество работ других российских и зарубежных ученых, чей вклад в развитие теории и методов расчета ректоров достаточно полно отражен в известных монографиях Марчука, Лебедева [3], Шихова [5], Смелова [8], Зизина [9], Шихова, Троянского [13]; Гермогеновой [16], Агошкова [17], Самарского, Вабищевича [18], Кейза, Цвайфеля [4], Белла, Глесстона [6] и др.

В этих работах были решены основные проблемы теории переноса нейтронов и теории реакторов. Однако ряд актуальных методов решения нейтронно-физических задач не получил должного обоснования. Проблемам развития и обоснования таких методов и посвящена, в частности, диссертация.

К ним относятся методы нейтронно-физических расчетов реакторов в многогрупповом приближении с гомогенизацией ячеек, где проблема подготовки групповых гомогенизированных констант путем (дробно-линейного или дробно-билинейного) усреднения сечений по энергетическим интервалам (группам) и пространственным ячейкам реактора с весом неизвестного заранее решения исходной задачи, обеспечивающих сохранение важнейших функционалов типа $k_{эф}$, интегральных по энергетическим группам и пространственным ячейкам реактора потоков нейтронов, скоростей реакций и т.п. при переходе от исходной (точной) модели реактора к приближенной (многогрупповой) до сих пор в общем случае не решена [3,6,9,13,14,28,46-49].

Исключением является нелинейный многогрупповой метод (метод групп) Марчука решения условно критических задач [3], и его обобщения на неоднородные и нестационарные задачи, предложенные в диссертации, а также нелинейные многогрупповые методы расширенного баланса и эквивалентных разностей (ЭР), где методы ЭР, представленные в диссертации, являются новыми методами численного решения широкого круга неоднородных, условно критических и нестационарных нейтронно-физических задач. Обоснование всех этих методов получено автором методами теории положительных операторов в полуупорядоченных банаховых пространствах [28,29,46-53].

Это же касается методов подготовки коэффициентов уравнений точечной и многоточечной нейтронной кинетики, применяемых для описания нестационарных режимов реактора, а также методов решения обратных задач кинетики реактора по идентификации этих коэффициентов на основе анализа измеряемой зависимости потока нейтронов от времени, где, как известно [15,19-21,33-41,56-71], тоже имеется ряд проблем, требующих своего решения.

Решение этих проблем в диссертации разыскивается на пути введения новых уравнений распределенной кинетики реактора, обобщающих традиционные по линии учета зависимости постоянных распада предшественников запаздывающих нейтронов от номера материнского нуклида и типа энергетического спектра, к которому принадлежал инициировавший деление нейтрон [15,33-41]; новых уравнений точечной и многоточечной кинетики, обобщающих и уточняющих известные уравнения Усачева [19], Генри [20], Эйвери [21] по линии расчета функционалов произвольного вида; новых алгоритмов идентификации реактивности и других коэффициентов уравнений кинетики, обобщающих и уточняющих известные методы измерения реактивности [15].

Остаются открытыми и многие другие проблемы, такие, например, как проблема разработки и математического обоснования метода граничных интегральных уравнений (метода ГИУ) решения краевых задач для кинетических интегро-дифференциальных уравнений переноса в средах с однородными подобластями, обобщающего методы Кейза [4], Лалетина [7] и др. на задачи в произвольной геометрии с общего вида зависимостью сечений от энергии.

Решению проблем метода ГИУ также уделено значительное внимание в диссертации, где сформулированы основные положения метода ГИУ в упомянутой общей постановке, разработаны алгоритмы построения фундаментальных решений и соответствующих ГИУ, установлены основные теоремы о разрешимости этих ГИУ и способах отыскания их решений, включая ГИУ типа интегральных уравнений Фредгольма второго рода и ГИУ типа сингулярных интегральных уравнений (СИУ) Соболева [1] и т.д. [44-45].

Метод ГИУ является частным случаем более общего метода декомпозиции (разделения) области, в котором однородность подобластей не требуется. Развитию и обоснованию алгоритмов метода декомпозиции области для кинетического интегро-дифференциального уравнения переноса нейтронов посвящены работы Смелова [23], Агошкова [17] и др. В частности, в работе [23] установлены достаточные условия сходимости предложенного там метода итераций по подобластям для односкоростных задач с подобластями, удовлетворяющими условию конуса. Он может рассматриваться в качестве обобщения известного метода (алгоритма) Шварца решения дифференциальных уравнений эллиптического типа на задачи для уравнения переноса с подобластями без налегания. В свою очередь, в работе [17] предложены модификации этого метода по линии введения переменных (чебышевских) параметров; исследованы операторы отражения подобластей и их приложения к решению обратных задач; изучены свойства гладкости обобщенных (и, в том числе, периодических) решений уравнения переноса.

Вместе с тем, результаты этих работ не исчерпывают всех возможностей для дальнейшего развития и совершенствования метода декомпозиции области. Некоторые из таких новых возможностей исследованы в диссертации, где сформулированы и обоснованы: новая постановка краевых задач в системах смежных подобластей, обобщающая известные постановки Владимирова [2] и Шихова [5] на задачи с энергетической зависимостью и, соответственно, с невыпуклыми подобластями, облучаемыми извне; новые алгоритмы метода итераций по подобластям в интегро-дифференциальной, интегральной и альбедной формулировках, новые алгоритмы операторной прогонки и распараллеливания вычислений по подобластям и т.д.[24,25,42,43].

К разновидностям метода декомпозиции области следует отнести и метод поверхностных гармоник (величин), развивающий идеи метода поверхностных псевдоисточников Лалетина [7], в котором приближенное решение уравнения переноса в подобластях разыскивается в виде конечного ряда частных решений этого уравнения с коэффициентами, определяемыми из некоторых условий «сшивки» приближенных решений на границах раздела подобластей. Решение задачи по этому методу сводится к выбору частных решений в подобластях и к отысканию коэффициентов разложений.

В диссертации рассмотрены некоторые «дифференциальные» и «интегральные» разновидности метода поверхностных гармоник, отличающиеся от него выбором частных решений и способами определения коэффициентов. Указана их связь с проекционно-итерационным методом автора [43].

Отметим, что в диссертации рассмотрены методы декомпозиции области для решения лишь кинетических интегро-дифференциальных уравнений переноса нейтронов. Рассмотрение соответствующих методов решения нейтронно-физических задач в диффузионном приближении (задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа) выходит за рамки данной работы.

Помимо перечисленных выше, в диссертации рассмотрен и решен ряд других актуальных проблем развития и обоснования методов расчета реакторов, таких, как проблема расчета локальных возмущений полей нейтронов и обусловленных ими эффектов реактивности [26,27,72-75], проблема устранения недостатков метода грубой сетки Askew-Takeda [30-32,54,55], лежащего в основе ряда алгоритмов известных кодов JARFR и TRIGEX расчета быстрых реакторов, проблемы расчета флюенса быстрых нейтронов на корпус реактора ВВЭР-1000 и коррекции констант отражателя в известном комплексе программ ACADEM расчета тепловых реакторов [76,77] и др.

Актуальность. Известно, что прогресс в области вычислительной математики и техники, приводящий к переоценке возможностей тех или иных численных методов, их качества и надежности, а также растущие требования к безопасности и эффективности атомной энергетики выдвигают задачу селекции, отбора накапливаемых знаний в области теории и методов математического моделирования нейтронно-физических процессов, и дальнейшего развития их до уровня, адекватного современным воззрениям на математическую теорию переноса нейтронов, сформированным в основополагающих работах академика Владимирова [2], профессора Шихова [5] и др., и возможностям, которыми располагает современная вычислительная математика и техника. Отсюда и из сказанного выше и вытекает актуальность проводимых автором исследований, основные результаты которых представлены в диссертации.

Цель работы заключается в модернизации известных и разработке новых высокоэффективных математически обоснованных вычислительных методов теории переноса нейтронов и теории ядерных реакторов и, в частности, таких актуальных методов, объединенных общей идеей редукции сложной задачи к более простым задачам:

- методы декомпозиции области для интегро-дифференциальных уравнений переноса, где задача определения плотности нейтронов в рассматриваемой геометрически сложной области пространства сводится (редуцируется) к задаче определения этой плотности на границах раздела подобластей более простого вида, на которые разделяется исходная область;

- методы редукции уравнений переноса с общего вида зависимостью сечений от энергии и координат к уравнениям с кусочно-постоянной зависимостью;

- методы эквивалентных разностей (ЭР) редукции краевых задач для уравнения переноса к системам нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) относительно важнейших функционалов типа интегральных по пространственным ячейкам, энергетическим группам и угловым секторам скоростей реакций, потоков и односторонних токов нейтронов через границы раздела ячеек и т.д.;

- многосеточные методы редукции конечно-разностных уравнений реактора на мелкой сетке к уравнениям на крупной сетке;

- методы точечной и многоточечной кинетики редукции уравнений распределенной нейтронной кинетики реактора к уравнениям с независящими от пространственных, энергетических и угловых переменных коэффициентами.

Большое внимание уделяется также таким актуальным методам, как:

- методы решения обратных задач кинетики реактора по определению реактивности и других коэффициентов уравнений нейтронной кинетики;

- методы теории возмущения для расчета эффектов реактивности;

- методы расчета флюенса быстрых нейтронов на корпус реактора;

- методы коррекции констант отражателя.

Объектом исследования являются ядерно-технические установки (ЯТУ), включая ядерные реакторы (ЯР), электроядерные установки (ЭЛЯУ, ADS) и т.д.

Предметом исследования являются математические модели переноса нейтронов в ЯТУ и методы их численной реализации.

Методы исследования и используемый инструментарий.

Функциональный анализ.

Теория положительных операторов в полуупорядоченных пространствах.

Численные методы и методы системного программирования.

Аттестованные комплексы программ нейтронно-физического расчета.

Научная значимость и новизна определяется как значимостью самой проблемы все более достоверного математического моделирования весьма сложных и потенциально опасных процессов в ядерных реакторах, так и использованием для этого адекватного математического аппарата и соответствующих новых методов повышенной точности и надежности, адаптированных к возможностям современной вычислительной математики и техники.

Таким аппаратом, как уже указывалось выше, является функциональный анализ и теория положительных операторов в полуупорядоченных банаховых пространствах. Применение этого аппарата позволило получить ряд новых результатов, касающихся принципиальных вопросов существования и единственности положительных решений для соответствующих линейных или нелинейных операторных уравнений рассматриваемых в диссертации задач теории переноса нейтронов и теории ядерных реакторов в их исчерпывающе общей постановке, разработать и обосновать методы отыскания этих решений.

На этом пути были получены, в частности, следующие новые результаты.

1. ***Разработаны модификации метода декомпозиции области для решения интегро-дифференциальных уравнений переноса нейтронов с общего вида энергетической зависимостью и подобластями, включая****:*

- новую постановку краевых задач в системах смежных подобластей;

- новые дифференциальные, интегральные и альбедные алгоритмы метода итераций по подобластям;

- новые алгоритмы методов прогонки и распараллеливания по подобластям;

- новые алгоритмы метода граничных интегральных уравнений (ГИУ).

Эти модификации являются методами отыскания положительных решений соответствующих операторных уравнений, к которым сводится указанная новая постановка краевых задач, исследованная в диссертации. Они могут рассматриваться в качестве обобщения известных методов решения краевых задач частного вида (односкоростных, одномерных и т.д.) на задачи общего вида.

2. ***Разработаны и обоснованы новые нелинейные методы расчета функционалов на решениях краевых задач, включая*:**

- методы ЭР редукции однородных, неоднородных и нестационарных краевых задач к СНАУ относительно важнейших реакторных функционалов;
- обобщения известного метода групп (многогруппового метода) Марчука на неоднородные и нестационарные задачи теории переноса нейтронов;
- модификации известного многосеточного метода Askew-Takeda.

Значимость методов ЭР заключается, в частности, в том, что они предоставляют методическую основу для качественно нового шага в направлении дальнейшего развития многогрупповых конечно-разностных методов численного решения краевых задач теории переноса нейтронов и теории реакторов. Обобщения метода Марчука дают иной подход к этой проблеме. Модификации метода Askew-Takeda устраняют недостатки исходного метода, применяемого в ряде версий известных кодов JARFR и TRIGEX расчета быстрых реакторов. Обоснование этих сложных нелинейных методов получено впервые.

3. ***Разработаны новые элементы математического моделирования прямых и обратных задач нестационарного переноса нейтронов, включая*:**

- новые уравнения распределенной кинетики с учетом зависимости постоянных распада предшественников запаздывающих нейтронов от энергии;
- новые уравнения точечной и многоточечной кинетики, обобщающие и уточняющие известные уравнения Усачева, Henry и Avery;
- новые алгоритмы метода обратной кинетики измерения реактивности, анализ погрешностей метода;
- новый критерий выбора данных по запаздывающим нейтронам;
- методы идентификации коэффициентов уравнений нейтронной кинетики.

Указанные новые элементы могут рассматриваться в качестве уточнения, обобщения и дальнейшего развития известных методов моделирования нейтронной кинетики реактора, используемых в целях диагностики и регулирования его режимов. В частности, новые точечные и многоточечные уравнения обобщают известные в плане расчета произвольных функционалов, новые алгоритмы метода обратной кинетики уточняют известные алгоритмы.

4. ***Развиты новые методы расчета возмущений полей нейтронов и обусловленных ими эффектов реактивности, включая:***

- методы расчета локальных возмущений полей нейтронов;
- методы расчета эффектов реактивности по точной теории возмущений;
- методы расчета эффектов при термических деформациях ячеек реактора.

Значимость этих новых методов заключается в том, что они позволяют: находить решение возмущенной задачи в подобласти локализации возмущения, не прибегая к ее решению во всей области реактора; вычислять эффекты реактивности по известным возмущениям коэффициентов уравнения переноса, а не по разности значений реактивности возмущенного и исходного состояний реактора; вычислять эффекты реактивности при термических деформациях с изменением размеров, формы и взаимного расположения ячеек реактора.

5. ***Разработаны и реализованы в комплексе программ ACADEM расчета реакторов эффективные методы:***

- расчета флюенса быстрых нейтронов на корпус реактора;
- коррекции констант отражателя.

Эти методы расширяют возможности комплекса программ ACADEM.

Практическое значение проведенных исследований состоит в том, что они, совместно с аналогичными исследованиями других авторов, способствуют расширению и обновлению базы знаний математической теории переноса, выводу ее на качественно новый уровень путем пополнения новыми идеями, концепциями, приемами и математически обоснованными высокоэффективными методами численного решения. Стимулируя, тем самым, дальнейший прогресс в области теории и методов математического моделирования нейтронно-физических процессов, методов численного решения краевых задач теории переноса нейтронов и теории ядерных реакторов, они содействуют повышению качества и надежности прогнозирования характеристик ЯР как косвенно, путем развития теории, так и непосредственно: путем внедрения разработанных алгоритмов в практику.

Особое внимание в диссертации уделяется вопросам математического обоснования предлагаемых методов, включая доказательства теорем существования и единственности положительных решений соответствующих линейных или нелинейных задач, способы численного отыскания этих решений.

Эти результаты используются затем при разработке алгоритмов и программ расчетов реакторов. И, в частности, они учитывались при:

- анализе методов расчета и измерения эффектов реактивности;
- модернизации схем метода грубой сетки Askew-Takeda в известных комплексах программ JARFR и TRIGEX расчета быстрых реакторов;
- разработке опций вычисления флюенса и коррекции констант отражателя для комплекса программ ACADEM расчета тепловых реакторов;
- учете термических деформаций в быстрых реакторах.

Отметим, что разработанный в ФЭИ и аттестованный в 2012 для расчетов реакторов ВВЭР-1000 комплекс программ ACADEM предназначен для связанных трехмерных нейтронно-физических и теплогидравлических расчетов водо-водяных реакторов с квадратной и гексагональной геометрией тепловыделяющих сборок на покассетном и потвэльном уровнях. Он использовался для расчетов Билибинской, Балаковской и Курской АЭС и применялся в рамках проекта ТВС-КВАДРАТ для нейтронно-физических и термомеханических расчетов бельгийских PWR Tihange – 1 и Tihange – 2 и шведского PWR Ringhals-3.

Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждается доказательствами соответствующих теорем, публикациями в ведущих рецензируемых журналах, сравнением полученных результатов с экспериментом и расчетами других авторов, положительными оценками этих результатов на российских и международных конференциях и семинарах.

Апробация работы. Результаты работы неоднократно докладывались на семинарах, конференциях, симпозиумах и научных семинарах различного уровня, среди которых отметим: международный симпозиум «Численные методы решения уравнения переноса», ИПМ (1992); Российские научные конференции по защите от ионизирующих излучений ядерно-технических установок, ФЭИ (1994,1998,2006); International Conference on Simulation of Devices and Technologies “ICSDT”, ФЭИ (1996); ANS International Topical Meetings on Mathematics and Computations M&C (1999, 2001,2003,2005,2009); International Conference on Computational Mathematics ICCM, Novosibirsk (2002); форум «Ядерные реакторы на быстрых нейтронах», ФЭИ (2003); International Conference on Transport Theory ICTT, ФЭИ (2007); International Conference on the Physics of Reactors PHYSOR’(2008); семинар «Современное состояние и развитие программных средств для анализа динамики и безопасности АЭС», ВНИИЭФ (2003); семинары «Актуальные проблемы физики ядерных реакторов», МИФИ (1995,1997, 2000,2004,2006,2008); ежегодные межведомственные семинары «Нейтронно-физические проблемы атомной энергетики», ФЭИ (1992 – 2015) и др.

Публикации. По теме диссертации представлено **75** работ автора, включая **32** статьи в рецензируемых журналах: **5** - «Журнал вычислительной математики и математической физики»; **12** - «Атомная энергия»; **5** - «Вопросы атомной науки и техники», Серия: Физика ядерных реакторов; **1** - «Вопросы атомной науки и техники», Серия: Математическое моделирование физических процессов; **4** - «Ядерная энергетика»; **1** - «Математическое моделирование»; **1** - «Ядерная физика и инжиниринг»; **3** - «Transport Theory and Statistical Physics». Из них **25** входят в перечень **SCOPUS**: **5** - Computational Mathematics and Mathematical Physics; **12** - Atomic Energy; **5** -“Voprosy Atomnoi Nauki i Tekhniki. Seriya: FizikaYadernykh Reaktorov”, Special Issue of the Journal: “Physics of Atomic Nuclei”; **3** -Transport Theory and Statistical Physics.

Автор выносит на защиту:

1. Теорию и алгоритмы метода декомпозиции области, включая:

- новую постановку краевых задач в системах смежных подобластей;
- новые интегро-дифференциальные, интегральные и альбедные алгоритмы метода итераций по подобластям;
- новые алгоритмы методов операторной прогонки и распараллеливания по подобластям;
- новые алгоритмы метода граничных интегральных уравнений.

2. Теорию и алгоритмы метода групп Марчука и метода эквивалентных разностей расчета функционалов на решениях краевых задач, включая:

- обобщения метода Марчука на неоднородные и нестационарные задачи;
- методы эквивалентных разностей (ЭР) редукции неоднородных, однородных и нестационарных задач теории переноса нейтронов к СНАУ.

3. Методы математического моделирования нейтронной кинетики реактора и расчета эффектов реактивности, включая:

- новые уравнения распределенной кинетики с учетом зависимости постоянных распада предшественников запаздывающих нейтронов от энергии;
- новые уравнения точечной и многоточечной кинетики, обобщающие и уточняющие известные уравнения Усачева, Henry и Avery;
- новые алгоритмы метода обратной кинетики измерения реактивности и анализ их погрешностей;
- новый критерий выбора данных по запаздывающим нейтронам;
- новые алгоритмы идентификации коэффициентов уравнений кинетики по известной зависимости потока нейтронов от времени;
- новые алгоритмы расчета локальных возмущений полей нейтронов;
- новые алгоритмы расчета эффектов реактивности по точной кинетической теории возмущений;
- новые алгоритмы расчета эффектов реактивности при термических деформациях зон (ячеек) реактора.

4. Разработку схем и алгоритмов реализации численных методов для кодов JARFR и ACADEM нейтронно-физических расчетов реакторов, включая:

- методы многогруппового конечно-разностного расчета реактора в трехмерной гексагональной и прямоугольной геометриях, обобщающие и уточняющие нелинейный метод грубой сетки Askew-Takeda, используемый в ряде версий комплексов программ JARFR и TRIGEX расчета быстрых реакторов;

- эффективные алгоритмы вычисления флюенса быстрых нейтронов на корпус реактора и коррекции констант отражателя, реализованные в комплексе программ ACADEM расчета тепловых реакторов.

Личный вклад. Все представленные к защите положения, данные и результаты являются достоверными, новыми и получены диссертантом лично.

Структура диссертации. Диссертация состоит из Введения, 5 глав, Заключения, содержит 296 страниц основного текста, 12 рисунков, 17 таблиц и 5 Приложений на 18 страницах. Список литературы - 204 наименования.

Каждая из глав состоит из Введения, основного текста, разделенного на разделы и подразделы, и Кратких выводов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, отмечается ее научная новизна и практическая значимость, перечисляются положения, вынесенные на защиту, дается общий обзор диссертации.

В главе 1 «**Развитие и обоснование методов декомпозиции области для решения краевых задач теории переноса нейтронов**» разрабатываются методы решения краевых задач, основанные на идее декомпозиции (разделения, расщепления) исходной области на подобласти и перехода от решения задачи во всей области к решению совокупности задач в подобластях.

Решение исходной задачи согласно этим методам достигается в процессе последовательного или, что лучше, параллельного пересчета полей нейтронов в подобластях (называемого «итерациями по подобластям») с целью взаимного согласования "перетечек" нейтронов между подобластями.

В главе 1 в рамках исчерпывающе общих для теории реакторов предположений о модели взаимодействия нейтронов с веществом и о геометрических характеристиках подобластей исследован с единой точки зрения ряд известных и новых, впервые предложенных автором, методов декомпозиции области. Полученные результаты дополняют и развивают результаты Владимирова [2], Шихова [5], Агошкова [17], Смелова [23] и др. в плане рассмотрения задач с общего вида энергетической зависимостью и подобластями, расширения круга рассматриваемых алгоритмов, оценок скоростей сходимости в терминах спектральных радиусов соответствующих операторов, исследования зависимости этих величин от способа разделения области и т.д.[24-27,42,43].

В разделе 1.2 главы 1, носящем вводный характер, формулируются исходные постановки краевых задач для уравнения переноса нейтронов

$$\Omega\nabla\psi + C\psi = Q, \tag{1.1а}$$

в области $G \in R^3$ трехмерного евклидова пространства R^3 с условием

$$\psi(x,E,\Omega) = f(x,E,\Omega), \quad \Omega n(x) < 0, \quad x \in \Gamma \tag{1.1б}$$

на ее кусочно-гладкой границе Γ, где $\psi(x,E,\Omega)$ - плотность нейтронов в точке $x \in G$, обладающих энергией $E \in [\underline{E},\overline{E}]$ и направлением полета $\Omega \in S^1$; S^1 - единичная сфера в R^3 ; $0 \le \underline{E} \le E \le \overline{E} < \infty$ - интервал допустимых значений энергии E; f, Q - известные функции; $n(x)$ - единичный вектор внешней нормали к Γ; $\Omega n(x)$ - косинус угла между векторами Ω и $n(x)$;

$$C = \Sigma - K, \qquad K = K_s + K_f, \tag{1.1в}$$

$$K_b\psi = \int dE' \int d\Omega' \omega_b(x,E,E',\Omega,\Omega')\psi(x,E',\Omega'), \quad b = s,f. \tag{1.1г}$$

В отношении коэффициентов уравнения предполагается, что

$$\omega_{b'}(x,E,E',\Omega,\Omega') = \sum_l (E'/E)^{1/2} \nu_{b'l}(E')\Sigma_{b'l}(x,E')W_{b'l}(E',E,\Omega',\Omega),$$

где $\nu_{b'l}(E)$ и $W_{b'l}(E',E,\Omega',\Omega)$ - число вторичных нейтронов, образовавшихся в реакции типа b' нейтрона с ядром l - го нуклида, и плотность вероятности распределения их по энергиям E и направлениям разлета Ω, $\Sigma_{b'l} = N_l(x)\sigma_{b'l}(E')$ - макроскопическое сечение этой реакции, $\sigma_{b'l}(E')$ - микроскопическое сечение, $N_l(x)$ - плотность ядер l - го нуклида,

$$\omega_s = \sum_{b'\neq c,f} \omega_{b'}, \quad \int dE \int W_{b'l}(E', E, \Omega', \Omega) d\Omega = 1, \; \Sigma(x,E) = \sum_{b'} \sum_{l} \Sigma_{b'l}(x,E),$$

суммирование в последней формуле идет по всем нуклидам l и процессам b' взаимодействия нейтронов с ядрами: упругого рассеяния $(b'=e)$, неупругого рассеяния $(b'=i)$, деления $(b'=f)$, радиационного захвата $(b'=c)$ и т. д.

Считается, что $\nu_{b'l}, \sigma_{b'l}, W_{b'l}, N_l$ удовлетворяют условиям 3.1[5], отражающим ряд наиболее общих закономерностей взаимодействия нейтронов с находящимися в состоянии теплового движения ядрами вещества.

Под функцией Q понимается либо независимый источник нейтронов, либо источник нейтронов деления $Q = K_f\psi / k_{эф}$ (и тогда в (1.1в) полагается $K = K_s$). Функция f, описывающая режим облучения области G извне, предполагается фиксированной, так что учет перелетов нейтронов (в случае невыпуклых областей) из G в G по участкам пространства, не принадлежащим G, вообще говоря, не производится (их можно сколь угодно точно учесть путем дополнения области G соответствующими участками пространства, заполненными чисто поглощающим веществом со сколь угодно малым сечением поглощения).

Исходная область разделяется условно на конечное число N подобластей: весьма общего вида**:** подобластью G_n (а, опуская индекс n, и самой областью G) называется всякое открытое связное измеримое подмножество $G_n \subseteq G$ с кусочно-гладкой границей Γ_n класса $C^{(1)}$ такое, что почти все (относительно меры в $S^1 \times R^2$) прямые линии $x_o + \Omega t$, $x_o \in \pi_{\Omega n}$, $t \in (-\infty, \infty)$, имеющие с G_n общую точку, пересекают G_n по конечному числу $\tilde{N}_n$ интервалов (t^-_{nk}, t^+_{nk}), где $\pi_{\Omega n}$ и x_o - ортогональные проекции подобласти G_n и вектора $x \in G$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\Omega \in S^1$, $k = \overline{1, \tilde{N}}$, $n = \overline{1, N}$. Предполагается также, что G_n содержит выпуклое подмножество ненулевой меры в R^3.

Вводятся банаховы пространства $L_p(Y_n), L_p(\Gamma_n^{\pm})$ вещественных функций $\psi(x, E, \Omega)$, суммируемых на множествах

$$Y_n = G_n \times [\underline{E}, \overline{E}] \times S^1, \quad \Gamma_n^{\pm} = \{x, E, \Omega \in \Gamma_n \times [\underline{E}, \overline{E}] \times S^1 : \Omega n_n(x) \gtrless 0\}$$

с p-ой степенью модуля, с нормами

$$\|\psi\|_{L_p(Y_n)} = \left\{ \int_{\underline{E}}^{\overline{E}} dE \int_{S^1} d\Omega \int_{\pi_{\Omega n}} \left(\sum_{k=1}^{\tilde{N}_n} \int_{t_{nk}^-}^{t_{nk}^+} dt \left|\psi(x_o + \Omega t, E, \Omega)\right|^p \right) dx_o \right\}^{1/p},$$

$$\|\psi\|_{L_p(\Gamma_n^{\pm})} = \left\{ \int_{\underline{E}}^{\overline{E}} dE \int_{S^1} d\Omega \int_{\pi_{\Omega n}} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_n} \left|\psi(x_o + \Omega t_{nk}^{\pm}, E, \Omega)\right|^p dx_o \right\}^{1/p}, \quad p < \infty,$$

$$\|\psi\|_{L_\infty(Y_n)} = \underset{x,E,\Omega \in Y_n}{vrai\max} |\psi(x, E, \Omega)|, \quad \|\psi\|_{L_\infty(\Gamma_n^{\pm})} = \underset{x,E,\Omega \in \Gamma_n^{\pm}}{vrai\max} |\psi(x, E, \Omega)|, \quad p = \infty,$$

и классы $D_{on}^p, D_{fn}^p, D_n^p$ функций $\psi \in L_p(Y_n)$, обладающих обобщенной производной $\Omega\nabla\psi \in L_p(Y_n)$ и, соответственно, нулевым $\psi_n^- = 0$, фиксированным $\psi_n^- = f_n \in L_p(\Gamma_n^-)$ или произвольным $\psi_n^- = P_n^- \psi \in L_p(\Gamma_n^-)$ следом на Γ_n^-:

$$\psi = L_n^{-1}\Phi \in D_{on}^p, \quad \psi = L_n^{-1}\Phi + H_n(f) \in D_{fn}^p, \quad \psi = L_n^{-1}\Phi + H_n(\psi) \in D_n^p,$$

где $\Phi \in L_p(Y_n)$, L_n^{-1} - линейный непрерывный в $L_p(Y_n)$ оператор, задаваемый при почти всех $E, \Omega, x_o \in [\underline{E}, \overline{E}] \times S^1 \times \pi_{\Omega n}$ на отрезках $[t_{nk}^-, t_{nk}^+]$ формулой

$$L_n^{-1}\Phi = \int_{t_{nk}^-}^{t} dt' \Phi(x_o + \Omega t', E, \Omega) \exp[-\int_{t'}^{t} dt'' \Sigma(x_o + \Omega t'', E)],$$

обратный к неограниченному замкнутому оператору L_n, порождаемому дифференциальным выражением $(\Omega\nabla + \Sigma)\psi$ на функциях $\psi \in D_{on}^p$ по формуле

$$L_n \psi = \left[\frac{d}{dt} + \Sigma(x_0 + \Omega t, E) \right] \psi(x_0 + \Omega t, E, \Omega), \quad t \in (t_{nk}^-, t_{nk}^+),$$

$\tilde{L}_n$ - расширение L_n на D_n^p, H_n - линейный непрерывный из $L_p(\Gamma_n^-)$ в $L_p(Y_n)$ и в $L_p(\Gamma_n^+)$ оператор, определяемый на отрезках $[t_{nk}^-, t_{nk}^+]$ формулой

$$H_n(f) = f_n(x_o + \Omega t_{nk}^-, E, \Omega) \exp[-\int_{t_{nk}^-}^{t} dt' \sum(x_o + \Omega t', E)],$$

$P_n^\pm$ - оператор, сопоставляющий функциям $\psi \in D_n^p$ их следы на $\Gamma_n^\pm$ при почти всех $E, \Omega, x_o \in [\underline{E}, \overline{E}] \times S^1 \times \pi_{\Omega n}$ по формулам

$$\psi_{nk}^\pm = P_{nk}^\pm \psi = \lim_{t \to t_{nk}^\pm,\, t \in (t_{nk}^-, t_{nk}^+)} \psi(x_o + \Omega t, E, \Omega) = \psi(x_0 + \Omega t_{nk}^\pm, E, \Omega),$$

$$\psi_n^\pm = P_n^\pm \psi = (\psi_1^\pm, ..., \psi_{\tilde{N}_n}^\pm) = (P_1^\pm, ..., P_{\tilde{N}_n}^\pm) \psi \in L_p(\Gamma_n^\pm).$$

При этом пространства D_{on}^p, D_n^p выбираются в качестве областей определения линейных неограниченных замкнутых операторов $L_n, \tilde{L}_n$, а пространства W_n^p функций $\psi \in D_n^p$ с нормой $\|\psi\|_{W_n^p} = \|\tilde{L}_n \psi\|_{L_p(Y_n)} + \|\psi\|_{L_p(\Gamma_n^-)}$ относят к области определения линейных ограниченных из W_n^p в $L_p(\Gamma_n^\pm)$ операторов $P_n^\pm$.

Через K_n (или K) обозначается линейный непрерывный в $L_p(Y_n)$ оператор, порождаемый интегральным выражением (1.1г) на функциях из $L_p(Y_n)$, после чего искомая формулировка краевой задачи в G_n при $Q_n \in L_p(Y_n)$ дается в виде

$$\tilde{L}_n \psi = K_n \psi + Q_n, \quad \psi \in D_n^p \subset L_p(Y_n), \tag{1.2а}$$

либо в эквивалентном виде

$$\psi = L_n^{-1} K_n \psi + L_n^{-1} Q_n + H_n(\psi), \;\; \psi \in L_p(Y_n), \;\; \psi_n^- \in L_p(\Gamma_n^-). \tag{1.2б}$$

Одна из особенностей этой постановки задачи состоит в том, что решение разыскивается в пространствах $L_p(Y_n), L_p(\Gamma_n^\pm)$ функций $\psi(x, E, \Omega)$, определенных лишь почти всюду в $Y_n, \Gamma_n^\pm$, что позволяет избежать известных трудностей, возникающих при рассмотрении практически важных задач [2,5,16,17].

Другая заключается в неопределенности граничного условия на Γ_n^-, которое заранее не известно и должно быть найдено в процессе решения задач в соседних подобластях: на границах раздела подобластей и на внешней поверхности должны выполняться (при почти всех $x_o \in \pi_{\Omega n} \cap \pi_{\Omega l}$) условия сшивки

$$\psi_n^- = \psi_l^+ \quad на \quad \Gamma_n^- \cap \Gamma_l^+, \quad n \neq l; \qquad \psi_n^- = f \quad на \quad \Gamma_n^- \cap \Gamma_-, \quad n,l = \overline{1,N}. \quad (1.3)$$

Требования же $Q_n \in L_p(Y_n), \psi_n^- \in L_p(\Gamma_n^-)$ обеспечивают выполнение условий $\psi \in L_p(Y_n), \psi_n^+ \in L_p(\Gamma_n^+)$ и, тем самым, достаточность классов $\psi \in L_p(Y_n)$, $L_p(\Gamma_n^{\pm})$ для описания переноса нейтронов в задачах теории реакторов [24,25].

Указанная постановка распространяется, далее, на исходную задачу (1.1): опуская индекс n подобласти, ее формулируют либо в виде уравнения

$$\tilde{L}\psi = K\psi + Q, \quad \psi \in D_f^p, \qquad (1.4а)$$

либо в виде эквивалентного ему уравнения

$$\psi = L^{-1}K\psi + L^{-1}Q + H(f), \quad \psi \in L_p(Y). \qquad (1.4б)$$

Опираясь на результаты работ [2,5], в теореме 1.2.2 устанавливаются основные положения, касающиеся компактности и u_o-положительности оператора $L^{-1}K$, существования и единственности решения этой задачи при

$$r(L^{-1}K) < 1 \qquad (1.5)$$

где $r(L^{-1}K)$-спектральный радиус оператора $L^{-1}K$, возможности получения этого решения методом последовательных приближений.

$$\tilde{L}\psi^{(m+1)} = K\psi^{(m)} + Q, \quad \psi^{(m+1)} \in D_f^p, \quad m = 0,1,..., \qquad (1.6а)$$

или эквивалентным ему методом

$$\psi^{(m+1)} = L^{-1}K\psi^{(m)} + L^{-1}Q + H(f), \quad m = 0,1,..., \qquad (1.6б)$$

сходящимися в $L_p(Y)$ при произвольном выборе $\psi^{(0)} \in L_p(Y)$ со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $r(L^{-1}K)$ и т.п.

Что же касается свойств условно критического уравнения второго рода

$$M\psi = F\psi / k_{эф},\ \ M = L - S\ ,\ \ F = K_f\ ,\ \ S = K_s\ ,\ \ \psi \in D_o^p\ , \tag{1.7}$$

то в теореме 1.2.3 указывается, что при наличии расщепляющихся нуклидов на множестве $G_f = \{x \in G : \sum_l \Sigma_{fl}(x,E) > 0\}$ ненулевой меры и выполнении условия $r(L^{-1}S) < 1$ оно имеет единственное (нормированное) положительное решение $0 < \psi \in L_\infty(Y)$, соответствующее ведущему собственному значению $k_{эф} > 0$, и это решение (пара $\psi, k_{эф}$) может быть получено степенным методом.

Все эти результаты оказываются справедливыми, с точностью до индекса n подобласти, и для уравнений в подобластях. Они обобщают результаты работы [5] на случай невыпуклых подобластей, облучаемых извне.

В теореме 1.2.4 они переносятся на сопряженные операторы и уравнения.

В разделе 1.3 вводится и исследуется семейство «интегральных» методов декомпозиции (методов итераций по подобластям) в форме уравнений

$$(1 - \sum_{l=1}^{N} \alpha_{nl} L_{nl}^{-1} K)\psi_n^{(m+1)} = \sum_{l=1}^{N} L_{nl}^{-1}[(1-\alpha_{nl})K\psi_l^{(m)} + Q_l] + P_n H, \quad m = 0,1,...$$

где $\psi_l = P_l\psi,\ Q_l = P_l Q,\ L_{nl}^{-1} = P_n L^{-1} P_l,\ P_l$ - оператор проектирования на G_l, $\alpha_{nl} \in [0,1]$ - некоторые параметры, определяющие скорость сходимости.

Показывается, что спектральные радиусы операторов шага этих итераций монотонно убывают от $r(L^{-1}K)$ при $\alpha_{nl} = 0$ до 0 при $\alpha_{nl} = 1,\ n,l = \overline{1,N}$.

Сравнительные скорости сходимости ряда методов с

$$\alpha_{nl} = \delta_{nl}, \tag{1.8а}$$

$$\alpha_{nl} = 1\ \ при\ \ n < l,\ \ \alpha_{nl} = 0\ \ при\ \ n \ge l, \tag{1.8б}$$

$$\alpha_{nl} = 1\ \ при\ \ n \le l,\ \ \alpha_{nl} = 0\ \ при\ \ n > l, \tag{1.8в}$$

аналогичных (в смысле выбора α_{nl}) методам Якоби, Зейделя и Некрасова линейной алгебры, характеризует теорема 1.3.3, согласно которой спектральные радиусы $r(а)$, $r(б), r(в)$ операторов шага методов (1.8) удовлетворяют оценкам

$$r(в) < r(а) < r(L^{-1}K), \quad r(в) < r(б) < r(L^{-1}K).$$

В силу этой теоремы (асимптотическая) скорость сходимости метода (1.8в) строго больше скоростей сходимости методов (1.6),(1.8а),(1.8б).

В теореме 1.3.4 указывается, что в процессе группировки исходных подобластей $G_n, n=\overline{1,N}$ в I, $2 \le I \le N$ совокупности подобластей $\tilde{G}_i$ скорость сходимости методов (1.8а),(1.8в) возрастает, а метода (1.8б) – убывает. Эти результаты актуальны для выбора оптимальных алгоритмов.

Раздел 1.4 содержит альтернативную "дифференциальную" формулировку этих методов в виде последовательностей краевых задач

$$\tilde{L}_n \psi_n^{(m+1)} = K_n \psi_n^{(m)} + Q_n, \quad \psi_n^{(m+1)} \in D_n^p, \; n=\overline{1,N}, \; m=0,1,..., \qquad (1.9а)$$

$$\tilde{L}_n \psi_n^{(m+1)} = K_n \psi_n^{(m+1)} + Q_n, \quad \psi_n^{(m+1)} \in D_n^p, \; n=\overline{1,N}, \; m=0,1,..., \qquad (1.9б)$$

для методов (1.8б) и (1.8а),(1.8в), соответственно, с некоторыми граничными условиями на границах раздела подобластей, определяемыми из уравнений

$$\Psi^{(m+1)} = \Psi^{(m+1/2)} + A_1(\Psi^{(m+1)} - \Psi^{(m)}), \qquad (1.10а)$$

$$\tilde{L}_n \psi_n^{(m+1/2)} = K_n \psi_n^{(m)} + Q_n, \quad \psi_n^{(m+1/2)} \in D_n^p, \qquad (1.10б)$$

где $(A_1)_{\ln} = \alpha_{\ln} L_{\ln}^{-1} K$. Например, для двух выпуклых подобластей эти условия сводятся (при $m \ge 1$) к условиям «сшивки» (при почти всех $x_o \in \pi_{\Omega 1} \cap \pi_{\Omega 2}$)

$$\psi_1^{(m+1)-} = \psi_2^{(m)+} \; на \; \Gamma_1^- \cap \Gamma_2^+; \quad \psi_2^{(m+1)-} = \psi_1^{(m)+} \; на \; \Gamma_2^- \cap \Gamma_1^+,$$

$$\psi_1^{(m+1)-} = \psi_2^{(m)+} \; на \; \Gamma_1^- \cap \Gamma_2^+; \quad \psi_2^{(m+1)-} = \psi_1^{(m+1)+} \; на \; \Gamma_2^- \cap \Gamma_1^+$$

для методов (1.8а) и (1.8б), соответственно, и т.д.

Интерпретация этих методов в виде уравнения (1.10б) с процедурами ускорения (1.10а), трактуемыми приближенно, обосновывается, далее, в теореме 1.4.1 для произвольных аппроксимаций $\tilde{A}_1$ оператора A_1 вида $0 \le \tilde{A}_1 \le A$. Эта теорема служит обоснованием широкого круга новых методов ускорения сходимости, вытекающих из (1.10) в рамках указанной аппроксимации $A_1 \to \tilde{A}_1$.

Раздел 1.5 посвящен обобщениям известного метода В.В.Смелова [23] на случай общего вида энергетической зависимости и подобластей. Решение задачи (1.1) по методу Смелова, обобщающему известный метод (алгоритм, алгорифм) Шварца на задачи теории переноса с подобластями без налегания, сводится к решению совокупности уравнений (1.9б) с условиями

$$\psi_n^{(m+1)-} = \psi_l^{(s)+} \text{ на } \Gamma_n^- \cap \Gamma_l^+, \quad \psi_n^{(m+1)-} = f \text{ на } \Gamma_n^- \cap \Gamma_-, \qquad (1.11)$$

где $s = m+1$ при $n > l$ и $s = m$ при $n < l$, $l,n = \overline{1,N}$.

Эффективность этого метода зависит от способа нумерации подобластей. Скажем, в случае 3 плоских слоев, занумерованных слева направо в виде 1,3,2, в слое 2 на его левой границе придется выбрать $s = m$, а не $s = m+1$, как бы это следовало сделать, и т.д. Этого можно избежать, полагая в (1.11) $s = m+1$, если $\psi_l^{(m+1)+}$ известна, и $s = m$, если не известна. Соответствующее обобщение метода мы называем обобщенным методом Смелова-Шварца.

В теореме 1.5.2 показывается, что он сходится со скоростью, не превышающей скорости сходимости метода (1.8в), причем совпадение скоростей достигается лишь в случае разделения области на две выпуклые подобласти.

Раздел 1.6 содержит результаты по развитию теории альбедного метода как разновидности метода декомпозиции области, трактующего перенос нейтронов с помощью альбедных операторов R_i, S_i, осуществляющих трансформацию входящего в подобласти излучения ψ_i^- в выходящее излучение ψ_i^+ согласно уравнениям

$$\psi_i^+ = R_i\psi_i^- + S_iQ_i, \quad \psi_i^\pm \in L_p(\Gamma_i^\pm), \; i = \overline{1,N}, \qquad (1.12а)$$

рассматриваемым совместно с условиями сшивки (1.3), где

$$R_i = P_i^+(1 - L_i^{-1}K_i)^{-1}H_i, \qquad S_i = P_i^+(1 - L_i^{-1}K_i)^{-1}L_i^{-1}. \qquad (1.12б)$$

Согласно теореме 1.6.1 решение этой задачи в рамках условия (1.5) существует, единственно и может быть получено методом последовательных приближений

$$\psi_i^{(m+1)+} = R_i\psi_i^{(m+1)-} + S_iQ_i, \quad i = \overline{1,N}, \; m = 0,1,... \qquad (1.13)$$

с условиями (1.11), сходящихся со скоростью метода Смелова.

Исследуются также свойства альбедных операторов, определенных на кусках поверхностей, свойства характерных композиций альбедных операторов двух смежных областей и т.д., результаты подводятся в теоремах 1.6.2- 1.6.5.

Раздел 1.7 посвящен приложению этих результатов к системам квазиодномерных подобластей типа плоских слоев, занумерованных слева направо. В этом случае, обозначая через u_i и v_i плотности нейтронов, вылетающих из слоя i направо и налево, можно записать систему альбедных уравнений

$$u_i = A_i u_{i-1} + B_i v_{i+1} + f_i, \qquad v_i = C_i u_{i-1} + D_i v_{i+1} + g_i,$$

где A_i, D_i - операторы пропускания i-го слоя в соответствующих направлениях, B_i, C_i - операторы отражения, f_i, g_i - известные функции, $i = \overline{1,N}$.

Такие же, в общем, уравнения могут быть записаны для систем сферических, цилиндрических, тороидальных и т.п. слоев, вложенных друг в друга.

Помимо итерационных методов, в разделе 1.7 предлагаются и обосновываются новые безытерационные методы операторной прогонки для решения этих уравнений с использованием формул сложения альбедных операторов слоев, обобщающих известные формулы астрофизика Амбарцумяна [1], формулируются и изучаются условно критические задачи в альбедной постановке и т.п. Результаты подводятся в теоремах 1.7.1-1.7.3, служащих математическим обоснованием соответствующих положений и приложений теории альбедных операторов.

Раздел 1.8 посвящен методам распараллеливания вычислений по подобластям. Одним из основополагающих методов такого рода является метод, в котором каждой подобласти G_n сопоставляется свой процессор и на каждом шаге решаются сразу все N уравнений (1.9б) с граничными условиями

$$\psi_n^{(m+1)-} = \psi_l^{(m)+} \text{ на } \Gamma_n^- \cap \Gamma_l^+, \quad \psi_n^{(m+1)-} = f \text{ на } \Gamma_n^- \cap \Gamma_-$$

при выборе, скажем, $\psi_l^{(0)+} = 0$, где $l, n = \overline{1,N}$, $m = 0,1,...$ [32,33].

В теореме 1.8.1 доказывается, что этот метод сходится при $r(L^{-1}K) < 1$, причем не быстрее метода (1.8а). Таким образом, при больших N этот параллельный метод проигрывает по скорости сходимости последовательному методу (1.8а), а по времени счета итерации – выигрывает, ибо оно уменьшается примерно в $1/N$ раз, что иллюстрирует отличие распараллеливания от ускорения.

Другие, более медленные методы характеризует теорема 1.8.2.

В разделе 1.9 разрабатываются алгоритмы численной реализации метода декомпозиции, основанные на поиске решений уравнений переноса в подобластях в виде суперпозиций частных решений этих уравнений. Они могут рассматриваться в качестве обобщения алгоритмов известных методов элементарных решений Кейза [4], поверхностных гармоник Лалетина [7] и др. [43].

В главе 2 "Развитие и обоснование метода граничных интегральных уравнений в теории переноса" разрабатываются специальные разновидности метода декомпозиции области, основанные на аналитическом решении уравнений переноса внутри однородных подобластей [44,45].

В разделе 2.2 дается постановка краевых задач с сингулярными источниками в пространствах обобщенных функций медленного роста (теорема 2.2.2), обсуждаются вопросы построения фундаментальных решений уравнений переноса методами интегральных преобразований Радона и Фурье, решается дискуссионный вопрос о возможности представления фундаментального решения в виде суперпозиции всюду расходящихся рядов элементарных решений Лалетина.

В разделе 2.3 обсуждаются методы редукции краевых задач к ГИУ и устанавливаются теоремы 2.3.2, 2.3.3 существовании, единственности, свойств и методов отыскания решений ГИУ для задачи (1.1) в выпуклой области G и в невыпуклых областях типа сферических, эллипсоидальных и др. слоев.

Свойства ГИУ для уравнения (1.1а) с граничными условиями ячеечного типа (периодичности, отражения и т.п.) характеризует, далее, теорема 2.3.4.

В разделе 2.4 исследуются алгоритмы метода поверхностных псевдоисточников Лалетина [7], рассматриваемого в качестве разновидности метода ГИУ, и в теореме 2.4.1 устанавливаются недостающие положения о существовании, единственности и способах отыскания решений соответствующих ГИУ.

Раздел 2.5 посвящен развитию и обоснованию (в теореме 2.5.2) нового метода редукции краевых задач теории в плоской геометрии к ГИУ типа сингулярных интегральных уравнений (СИУ) Соболева [1] и разработке методов их решения. Эти результаты обобщаются на задачи с энергетической зависимостью.

В разделе 2.6 обсуждается ряд новых разновидностей ГИУ, вытекающих из известного свойства голоморфности преобразования Фурье финитной функции и т.д. Результаты подводятся в теоремах 2.6.1 и 2.6.2 [44,45].

Глава 3 «***Разработка и обоснование алгоритмов метода групп Марчука и метода эквивалентных разностей***» посвящена нелинейным методам расчета функционалов на решениях неоднородных, условно критических и нестационарных задач теории переноса нейтронов и теории реакторов.

В разделе 3.2 дается обзор математических моделей многогруппового метода для решения условно критических задач, включая модели традиционного многогруппового метода, нелинейного метода Марчука и нелинейного метода расширенного баланса, для которых автором были установлены теоремы существования [48,49].

Наиболее перспективной среди этих моделей представляется модель полностью сбалансированного многогруппового метода [48,49], алгоритмы реализации которой обобщают и уточняют алгоритмы традиционного метода.

В разделе 3.3 обсуждаются обобщения метода групп Марчука на задачи расчета функционалов на решении неоднородной краевой задачи (1.1).

Ставится задача разработки и математического обоснования алгоритмов этого метода. Устанавливаются теоремы 3.3.1-3.3.3 существования и единственности решений рассматриваемых нелинейных операторных уравнений [28,47,49].

В разделе 3.4 обсуждаются обобщения метода групп Марчука на нестационарные задачи кинетики реактора применительно к расчету импульсных нейтронных экспериментов [46,47,49].

Ставится задача разработки и математического обоснования алгоритмов этого метода. Устанавливаются теоремы 3.4.1-3.4.2 существования и единственности решений рассматриваемых нелинейных операторных уравнений.

В разделе 3.5 приводятся схемы метода эквивалентных разностей (метода ЭР) редукции неоднородных, условно критических и нестационарных задач к системам нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) относительно важнейших нейтронно-физических функционалов типа интегральных по пространственным ячейкам, энергетическим группам и угловым секторам скоростей реакций, потоков нейтронов и односторонних токов нейтронов через грани ячеек.

Так, по методу ЭР для неоднородных задач вводятся подобласти G_n, группы (E_{i-1}, E_i), угловые секторы S_l^1 и задача (1.1) преобразуется к СНАУ

$$\sum_{n' \in N_n} (\breve{\Sigma}_{n'n}^{il} \breve{\psi}_n^{il} - \breve{\Sigma}_{nn'}^{il} \breve{\psi}_{n'}^{il}) + \breve{\Sigma}_n^{il} \breve{\psi}_n^{il} - \sum_{i',l',b} \breve{\Sigma}_{nb}^{il,i'l'} \breve{\psi}_n^{i'l'} = \breve{Q}_n^{il} \qquad (3.1)$$

относительно функционалов $\breve{\psi}_n^{il} = (g\theta_n^{il}, \psi), (g\theta_{n'n}^{il}, \psi)$, $(g\theta_n^{il}, \Sigma\psi)$ и т.д., где θ_n^{il} - характеристическая функция множества $Y_n^{il} = G_n \times (E_{i-1}, E_i) \times S_l^1$; $g(E,\Omega)$ - весовая функция; N_n - множество номеров ячеек $G_{n'}$, касающихся ячейки G_n,

$$\breve{\Sigma}_{n'n}^{il} = \breve{J}_{n'n}^{il} / \breve{\psi}_n^{il}, \quad \breve{J}_{n'n}^{il} = \int_{\Gamma_n^{il+} \cap \Gamma_{n'}^{il-}} \Omega n_n(x)\, g(E,\Omega)\, \psi(x,\Omega,E)\, d\gamma dE d\Omega \equiv (g\theta_{n'n}^{il}, \psi),$$

$$\breve{\Sigma}_n^{il} = (g\theta_n^{il}, \Sigma\psi) / \breve{\psi}_n^{il}, \quad \breve{\Sigma}_{nb}^{il,i'l'} = (g\theta_n^{il}, K_b \theta_n^{i'l'} \psi) / \breve{\psi}_n^{i'l'}, \quad \breve{Q}_n^{il} = (g\theta_n^{il}, Q). \qquad (3.2)$$

Приближенное решение СНАУ (3.1) с коэффициентами (3.2) разыскивается методом последовательных приближений: полагая $\xi = L^{-1}Q + H(f)$,

$$\psi \approx \tilde{\psi}^{(m)} = K\tilde{\tilde{\psi}}^{(m-1)} + \xi, \quad \tilde{\tilde{\psi}}^{(m)}(x,E,\Omega) = \sum_{i,l,n} \breve{\psi}_n^{il(m)}\, q_n^{il}(x,E,\Omega), \qquad (3.3)$$

вычисляются по данному $\breve{\psi}_n^{il(m-1)}$ коэффициенты (3.2) для уравнения

$$\sum_{n' \in N_n} (\breve{\Sigma}_{n'n}^{il(m)} \breve{\psi}_n^{il(m)} - \breve{\Sigma}_{nn'}^{il(m)} \breve{\psi}_{n'}^{il(m)}) + \breve{\Sigma}_n^{il(m)} \breve{\psi}_n^{il(m)} - \sum_{i',l',b} \breve{\Sigma}_{nb(m)}^{il,i'l'} \breve{\psi}_n^{i'(m)} = \breve{Q}_n^{il}, \qquad (3.4)$$

находится его решение $\breve{\psi}_n^{il(m)}$ и т.д.

Здесь итерации нацелены на вычисление коэффициентов (3.2) по формулам

$$\breve{\Sigma}_{n'n}^{il(m)} = [r_{n'n}^{il} + \sum_{i',l',n'',b} r_{n'nb}^{n'',il,i'l'} \breve{\psi}_{n''}^{i'l'(m-1)}]/[\sigma_n^{il} + \sum_{i',l',n',b} \sigma_{nn'b}^{il,i'l'} \breve{\psi}_{n'}^{i'l'(m-1)}], \tag{3.5а}$$

$$\breve{\Sigma}_{n}^{il(m)} = [\sigma_n^{\Sigma,il} + \sum_{i',l',n',b} \sigma_{nn'b}^{\Sigma,il,i'l'} \breve{\psi}_{n'}^{i'l'(m-1)}]/[\sigma_n^{il} + \sum_{i',l',n',b} \sigma_{nn'b}^{il,i'l'} \breve{\psi}_{n'}^{i'l'(m-1)}], \tag{3.5б}$$

$$\breve{\Sigma}_{nb(m)}^{il,i'l'} = [\sigma_{nb}^{il,i'l'} + \sum_{i'',l'',n',b'} \sigma_{nn'bb'}^{il,i'l',i''l''} \breve{\psi}_{n'}^{i''l''(m-1)}]/[\sigma_n^{i'l'} + \sum_{i'',l'',n',b} \sigma_{nn'b}^{i'l',i''l''} \breve{\psi}_{n'}^{i''l''(m-1)}], \tag{3.5в}$$

где введены независящие от номера итерации константы нового типа

$$\sigma_n^{il} = (g\theta_n^{il}, \xi), \quad \sigma_n^{\Sigma,il} = (g\theta_n^{il}, \Sigma\xi), \quad \sigma_{nn'b}^{il,i'l'} = (g\theta_n^{il}, L^{-1}K_b\, q_{n'}^{i'l'}), \tag{3.6а}$$

$$\sigma_{nn'b}^{\Sigma,il,i'l'} = (g\theta_n^{il}, \Sigma L^{-1}K_b\, q_{n'}^{i'l'}), \quad \sigma_{nn'bb'}^{il,i'l',i''l''} = (g\theta_n^{il}, K_b\theta_n^{i'l'} L^{-1}K_{b'}\, q_{n'}^{i''l''}), \tag{3.6б}$$

$$r_{n'n}^{il} = (g\theta_{n'n}^{il}, \xi), \quad r_{n'nb}^{n'',il,i'l'} = (g\theta_{n'n}^{il}, L^{-1}K_b q_{n''}^{i'l'}). \tag{3.6в}$$

Расчет функционалов (3.2) сводится, таким образом, к выбору функции формы $q_n^{il} = \theta_n^{il} q/(g\theta_n^{il}, q)$ поля нейтронов в Y_n^{il}, вычислению констант (3.6), выбору начального приближения $\breve{\psi}_n^{il(0)} \ge 0$, вычислению коэффициентов (3.5) при $m=1$, отысканию из уравнения (5.5) первого приближения $\breve{\psi}_n^{il(1)}$ и т.д.

При $\bar{l} > 1$ этот метод может рассматриваться в качестве обобщения метода характеристик, а при $\bar{l} = 1$ - многогрупповых конечно-разностных уравнений диффузии, отличаясь от последних, в частности, тем, что диффузионное приближение не используется и метод является точным при $K \equiv 0$ [29,50,51].

Аналогичным, в общем, образом формулируются методы ЭР для решения условно критических и нестационарных задач [52,53].

В разделах 3.6-3.8 дается математическое обоснование методов ЭР для неоднородных (теоремы 3.6.1-3.6.3), однородных условно критических (теоремы 3.7.1-3.7.3) и нестационарных (теоремы 3.8.1-3.8.2) задач, соответственно.

Глава 4 «Развитие методов математического моделирования кинетики реактора и расчета эффектов реактивности» посвящена проблемам математического моделирования и диагностики нестационарных режимов реактора.

В разделе 4.2 формулируются новые уравнения распределенной кинетики

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+M\varphi=F\varphi+\sum_{r,l,m'}(\lambda_{(r,l)}^{(m')}R_{(r,l)}^{(m')}-F_{(r,l)}^{(m')}\varphi)+Q\,, \qquad (4.1а)$$

$$\frac{\partial R_{(r,l)}^{(m')}}{\partial t}=-\lambda_{(r,l)}^{(m')}R_{(r,l)}^{(m')}+F_{(r,l)}^{(m')}\varphi\,,\qquad R_{(r,l)}^{(m')}=\chi_{(r,l)}^{(m')}C_{(r,l)}^{(m')}, \qquad (4.1б)$$

обобщающие обычные по линии учета экспериментальной зависимости постоянных распада $\lambda_{(r,l)}^{(m')}$ предшественников m' от номера материнского нуклида l и спектра r, использованного при измерении $\lambda_{(r,l)}^{(m')}$, $\beta_{(r,l)}^{(m')}$, где $R_{(r,l)}^{(m')}=\chi_{(r,l)}^{(m')}C_{(r,l)}^{(m')}$, $r=t$ (thermal) для теплового спектра, $r=f$ (fast) для быстрого спектра[62].

Приводятся новые уравнения одноточечной кинетики [33,34]

$$[\frac{d}{dt}+(\overline{\alpha}-\frac{\rho-\overline{\beta}}{\Lambda})]P=[\sum_{m=1}^{\overline{m}}\overline{\lambda}^{(m)}\overline{C}^{(m)}+\overline{Q}]/k_p\Lambda\,, \qquad (4.2а)$$

$$[\frac{d}{dt}+(\overline{\lambda}^{(m)}-\overline{\alpha}^{(m)})]\overline{C}^{(m)}=\overline{\beta}^{(m)}k_pP\,, \qquad (4.2б)$$

эквивалентные (при $\tilde{\psi}=\varphi$) исходным уравнениям (4.1) относительно функционалов $P(t)=(p,\varphi)$, $\overline{C}^{(m)}(t)=\sum_{r,l,m'\in m}(\psi^*,R_{(r,l)}^{(m')})$, с коэффициентами

$$\overline{\alpha}=\frac{(\psi^*,v^{-1}\partial\xi/\partial t)}{(\psi^*,v^{-1}\xi)},\quad \Lambda=\frac{(\psi^*,v^{-1}\tilde{\psi})}{(\psi^*,F\tilde{\psi})},\quad k_p=\frac{(\psi^*,F\tilde{\psi})}{(p,\tilde{\psi})},$$

$$\overline{\lambda}^{(m)}=\frac{\sum\limits_{r;l,m'\in m}(\psi^*,\lambda_{(r,l)}^{(m')}R_{(r,l)}^{(m')})}{\sum\limits_{r;l,m'\in m}(\psi^*,R_{(r,l)}^{(m')})},\quad \overline{\alpha}^{(m)}=\frac{\sum\limits_{r;l,m'\in m}(\partial\psi^*/\partial t,R_{(r,l)}^{(m')})}{\sum\limits_{r;l,m'\in m}(\psi^*,R_{(r,l)}^{(m')})},$$

$$\overline{\beta}_{(r,l)}^{(m')}=\frac{(\psi^*,F_{(r,l)}^{(m')}\tilde{\psi})}{(\psi^*,F\tilde{\psi})},\quad \overline{\beta}_{(l)}^{(m')}=\sum_r\overline{\beta}_{(r,l)}^{(m')},\quad \overline{\beta}^{(m)}=\sum_{l,m'\in m}\overline{\beta}_{(l)}^{(m')},$$

$$\rho=1-1/k_{эф},\quad \overline{\beta}=\beta_{эф}=\sum_{m=1}^{\overline{m}}\overline{\beta}^{(m)},\quad \overline{Q}=(\psi^*,Q),\quad \xi=\tilde{\psi}/(p,\tilde{\psi}), \qquad (4.2в)$$

обобщающие и уточняющие известные уравнения Усачева [19] и Henry [20] применительно к расчету функционалов **произвольного** вида $P=(p,\varphi)$, с коэффициентами $\lambda_{(r,l)}^{(m')}, \beta_{(r,l)}^{(m')}$, зависящими от типа r спектра, где $\overline{\alpha}, \overline{\alpha}^{(m)}$ учитывают изменения форм-функций $\tilde{\psi}, \psi^*$ во времени; ψ, ψ^* - решения уравнений $M\psi = F\psi / k_{эф}$, $M^*\psi^* = F^*\psi^* / k_{эф}$ и, например, $\tilde{\psi} = \psi$.

Разработаны методы численной реализации уравнений (4.2), обобщающие известные адиабатическое и квазистатическое приближения.

В разделе 4.3 эти результаты распространяются на многозонные задачи, для решения которых используется многоточечная аппроксимация

$$\varphi(x, E, \Omega, t) \approx \sum_{n=1}^{N} \theta_n(x) P_n(t)\, \xi_n(x, E, \Omega, t), \tag{4.3}$$

где n – номер подобласти (зоны) $G_n = \theta_n G$; $\theta_n(x)$ - характеристическая функция G_n; $P_n(t) = (p, \varphi)_n$; $(\ ,\ )_n$ - символ интеграла по $x, E, \Omega \in Y_n$; $\xi_n = \tilde{\psi}_n / (p, \tilde{\psi}_n)_n$.

Исследуются соответствующие обобщения уравнений (4.2), корректируются положения известной теории связанных реакторов Avery [21,34].

В разделе 4.4 рассматриваются проблемы метода обратной кинетики измерения реактивности. Формулируются точные уравнения обратной кинетики

$$\rho = \overline{\beta} + \alpha\Lambda - [\overline{Q} + \sum_j \lambda_j \int_{-\infty}^{t} dt' e^{-\lambda_j (t-t')} (\psi^*, F_j' \varphi_{t'})] / (\psi^*, F\varphi_t) \tag{4.4а}$$

для определения реактивности $\rho = 1 - 1/k_{эф}$ по потоку φ, где $F_j' = F_j(t')$,

$$\alpha = \frac{(\psi^*, v^{-1}\partial\varphi/\partial t)}{(\psi^*, v^{-1}\varphi)}, \quad \Lambda = \frac{(\psi^*, v^{-1}\varphi)}{(\psi^*, F\varphi)}, \quad \overline{\beta} = \frac{(\psi^*, F_d\varphi)}{(\psi^*, F\varphi)}, \quad \overline{Q} = (\psi^*, Q), \tag{4.4б}$$

а также различные точечные

$$\rho = \overline{\beta} - \{Q_{эф} + \sum_j \lambda_j \int_{-\infty}^{t} dt' \overline{\beta}_j (t, t') P(t') e^{-\lambda_j (t-t')}\} / P(t)$$

и многоточечные

$$\rho = \overline{\beta} - \{\overline{Q}_{эф} + \sum_{j,k} \lambda_j b^{(k)}(t) \int_{-\infty}^{t} dt' \overline{\beta}_j^{(k)}(t, t') P_k(t') e^{-\lambda_j (t-t')}\} / \sum_k b^{(k)}(t) P_k(t)$$

аппроксимации этих уравнений с коэффициентами

$$\overline{\beta}_j(t,t') = (\psi_t^*, F_j' \xi_{t'})/(\psi_t^*, F\,\xi_t), \qquad Q_{эф}(t) = \overline{Q}\,/(\psi_t^*, F\,\xi_t)\,,$$

$$\overline{\beta}_j^{(k)}(t,t') = \frac{(\psi_t^*, F_j' \xi_{t'}^{(k)})}{(\psi_t^*, F\xi_t^{(k)})},\ \ b^{(k)} = \frac{(\psi_t^*, F\xi_t^{(k)})}{\sum\limits_{k'}(\psi_t^*, F\xi_t^{(k')})},\ \ \overline{Q}_{эф} = \frac{(\psi_t^*, Q)}{\sum\limits_{k}(\psi_t^*, F\xi_t^{(k)})}\,,$$

вытекающие из (4.3),(4.4аб) в приближении $\Lambda = 0$, где $P = (p,\varphi),\ P_k = (p_k, \theta_k \varphi)$ - сигналы датчиков потока нейтронов, $k = \overline{1,K}$ - номер датчика [35-41].

Исследуются их свойства и способы численной реализации, дается анализ погрешностей и впервые доказывается [37], что **реактивность неизвестного состояния реактора в принципе не может быть измерена точно, но можно сколь угодно точно измерять сколь угодно малые эффекты реактивности.**

Формулируется новая концепция измерения реактивности как процедуры коррекции ее расчетных значений (коррекции параметров расчетной модели реактора) и разрабатываются методы ее приближенный реализации, согласно одному из которых искомая реактивность $\hat{\rho}(t)$ вычисляется по формуле

$$\hat{\rho} = \breve{\rho}_{укр}\,\kappa, \quad \kappa = \tilde{\rho}_{экс}/\tilde{\rho}_{чис}\,, \tag{4.5}$$

где $\tilde{\rho}_{чис}$ - реактивность, отличающаяся от $\tilde{\rho}_{экс}$ заменой измеряемого сигнала $P_{экс}$ на вычисляемый сигнал $P_{чис}$, а κ - коэффициент коррекции, характеризующий погрешности эксперимента и численного моделирования. Показывается, что предлагаемый метод (4.5) обычно более точен, требует меньшего времени измерения и позволяет измерять реактивность в абсолютных единицах [41].

В разделе 4.5 разрабатываются новые алгоритмы метода обратной кинетики, согласно которым коэффициенты q, β_j, Λ,... уравнений обратной кинетики не предполагаются известными заранее, а определяются одновременно с реактивностью ρ по измеряемой зависимости потока нейтронов от времени [66-70].

Формулируются и исследуются соответствующие нелинейные в общем случае уравнения методов идентификации этих коэффициентов, устанавливаются теоремы 4.5.1-4.5.3 существования, единственности и способов отыскания их решений, разрабатываются алгоритмы численной реализации [39,40].

Предлагается и апробируется «четырехпараметрическая» схема измерения реактивности, обобщающая и уточняющая известную «трехпараметрическую» схему, используемую на стенде БФС ФЭИ и реакторе БН-600 [67-70].

Изучаются проблемы константного обеспечения запаздывающих нейтронов и конверсии 6-групповых констант в 8-групповые с «универсальными» λ_j [66].

Предлагается и апробируется на примере сборки БФС новый критерий оптимального выбора данных по запаздывающим нейтронам, согласно которому более точными являются $\lambda_j, \beta_j, \chi_j$, обеспечивающие, при прочих равных, лучшее согласие измеренной реактивности $\rho_{экс}$ с реактивностью $\rho_{укр}$, рассчитанной по условно критическому уравнению (1.7) [38].

В разделе 4.6 разрабатываются методы расчета локальных возмущений, позволяющие находить решение возмущенной задачи в подобласти $G_1 \subset G$ локализации возмущения, не прибегая к решению возмущенной задачи во всей области G, что весьма важно в ряде случаев. Результаты подводятся в теореме 4.6.1, обосновывающей принципиальную реализуемость таких методов [26,27].

В разделе 4.7 рассматривается проблема идентификации компоненты утечки в кинетическом эффекте реактивности. Показывается, что она формируется всеми нечетными членами в разложении эффекта по сферическим гармоникам, а не только первым членом, как это иногда утверждается [72].

Раздел 4.8 посвящен разработке методов расчета эффектов реактивности по известным возмущениям $\delta C, \delta F$ на основе формул точной кинетической теории возмущений в ходе последовательных приближений типа [26,27]

$$(\Omega\nabla + C')\psi^{(l+1)} = F'\psi^{(l)} / k_{эф}^{(l)}, \qquad \psi^{(l+1)} \in D_o^p, \qquad l = 0,1,...$$

$$\delta\rho^{(l+1)} = \frac{(\psi^*, (\delta F / k_{эф} - \delta C)\psi^{(l)})}{(\psi^*, F'\psi^{(l)})}, \qquad \frac{1}{k_{эф}^{(l+1)}} = \frac{1}{k_{эф}} - \delta\rho^{(l+1)},$$

где штрихами обозначены возмущенные операторы, $k_{эф}^{(0)} = k_{эф}$, $\psi^{(0)} = \psi$ и т.д.

Устанавливаются условия сходимости этих итераций к решению ψ' возмущенной задачи и к искомому эффекту $\delta\rho$, приводится приближенная формула

$$\delta\rho \approx (\psi^*, (\delta F / k_{эф} - \delta C)\psi) / (\psi^*, F'\psi),$$

значительно уточняющая в случаев больших возмущений δF обычную широко используемую на практике формулу теории малых возмущений.

Разрабатываются альбедные разновидности методов расчета эффектов реактивности от локальных возмущений, сосредоточенных в подобласти $G_1 \subset G$, не прибегая к решению возмущенного уравнения во всей области [27,73].

Результаты подводятся в теоремах 4.8.1, 4.8.2.

В разделе 4.9 разрабатываются обобщения известного метода Шихова и др. расчета эффектов реактивности, возникающих при термических деформациях зон (ячеек, кассет) реактора [73-75], на кинетические уравнения переноса.

Приводятся точные формулы для вычисления эффектов реактивности и их новые P_1- приближения, альтернативные традиционным формулам в диффузионном приближении. Показывается, что новые P_1- приближения в ряде случаев более точно оценивают искомые эффекты, нежели традиционные [73,74].

В разделе 4.10 дается распространение предыдущей методики на более общий класс кусочно-непрерывных деформаций с изменением как размеров и формы, так и взаимного расположения ячеек реактора [75].

Глава 5. “Разработка схем и алгоритмов реализации численных методов для кодов JAFER и ACADEM” посвящена решению вопросов развития и дальнейшего совершенствования математического обеспечения этих кодов.

В разделе 5.2 рассматриваются модифицированные уравнения

$$2\sum_{j=1}^{6} \frac{S_{ri}}{V_i} \left(\frac{h_r}{\tilde{D}_{ri}^{(n)}} + \frac{h_r}{\tilde{D}_{rj}^{(n)}} \right)^{-1} \left(\tilde{\Phi}_i^{(n)} - \tilde{\Phi}_j^{(n)} \right) + \tilde{\Sigma}_i^{(n)} \tilde{\Phi}_i^{(n)} +$$

$$+ 2\sum_{j=7}^{8} \frac{S_z}{V_i} \left(\frac{h_{zi}}{\tilde{D}_{zi}^{(n)}} + \frac{h_{zj}}{\tilde{D}_{zj}^{(n)}} \right)^{-1} \left(\frac{\gamma_{ri}^{(n)}}{\gamma_{zi}^{(n)}} \tilde{\Phi}_i^{(n)} - \frac{\gamma_{rj}^{(n)}}{\gamma_{zj}^{(n)}} \tilde{\Phi}_j^{(n)} \right) = \tilde{\mathrm{Q}}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n})} \qquad (5.1)$$

метода грубой сетки Askew-Takeda [22] решения многогрупповых диффузионных конечно-разностных уравнений реактора в трехмерной гексагональной геометрии с одним эффективным узлом на шестигранную призму (ячейку грубой сетки), где i - номер рассматриваемой призмы, $j = 1,2,...,6$ и $j = 7,8$ - номера призм, прилегающих к ней с боков и торцов, h_r - размер "под ключ", h_{zi} - высота, $V_i = h_{zi}S_z$, $S_{ri} = h_{zi}h_r / \sqrt{3}$, $S_z = \sqrt{3}h_r^2 / 2$ - объем и площади граней призмы,

$$\tilde{Q}_i^{(n)} = \sum_{n'} \tilde{\Sigma}_i^{n'\to n}\tilde{\Phi}_i^{(n')} + \frac{\chi_i^{(n)}}{k'_{эф}} \sum_{n'} \nu\tilde{\Sigma}_{fi}^{(n')}\tilde{\Phi}_i^{(n')}$$

и введены эффективные потоки, сечения и коэффициенты диффузии

$$\tilde{\Phi}_i^{(n)} = \Phi_i^{(n)} / \gamma_{ri}^{(n)}, \quad \tilde{\Sigma}_i^{(n)} = \Sigma_i^{(n)}\gamma_{ri}^{(n)}, \quad \tilde{\Sigma}_i^{n'\to n} = \Sigma_i^{n'\to n}\gamma_{ri}^{(n')},$$

$$\nu\tilde{\Sigma}_{fi}^{(n')} = \nu\Sigma_{fi}^{(n')}\gamma_{ri}^{(n')}, \quad \tilde{D}_{ri}^{(n)} = D_i^{(n)}\delta_{ri}^{(n)}, \quad \tilde{D}_{zi}^{(n)} = D_i^{(n)}\delta_{zi}^{(n)},$$

в группе n, отличающиеся от истинных $\Phi_i^{(n)}, \Sigma_i^{(n)}, \Sigma_i^{n'\to n},...$ поправками

$$\gamma_{ri}^{(n)} = 1 - \frac{\tau_{ri} - 1}{2\tau_{ri}^2}\beta_{in}^2 h_r^2, \quad \gamma_{zi}^{(n)} = 1 - \frac{\tau_{zi} - 1}{2\tau_{zi}^2}\beta_{in}^2 h_{zi}^2, \quad \delta_{ri}^{(n)} = \frac{\tau_{ri}\gamma_{ri}^{(n)}}{\tau_{ri} - 1 + \gamma_{ri}^{(n)}},$$

$$\delta_{ri}^{(n)} = \frac{\tau_{ri}\gamma_{ri}^{(n)}}{\tau_{ri} - 1 + \gamma_{ri}^{(n)}}, \quad \delta_{zi}^{(n)} = \frac{\tau_{zi}\gamma_{zi}^{(n)}}{\tau_{zi} - 1 + \gamma_{zi}^{(n)}}, \quad \beta_{in}^2 = \frac{\mathrm{Q}_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n})} - \Sigma_i^{(n)}\Phi_i^{(n)}}{D_i^{(n)}\Phi_i^{(n)}}.$$

Эти уравнения соответствуют многосеточному методу Askew-Takeda [22], модифицированному путем введения вспомогательных неравномерных мелких сеток, характеризуемых параметрами τ_{ri}, τ_{zi}. При $\gamma_{ri}^{(n)} = \gamma_{zi}^{(n)} = \delta_{ri}^{(n)} = \delta_{zi}^{(n)} = 1$ они переходят в обычные конечно-разностные уравнения с одним узлом на призму, а при $\tau_{ri} = \tau_{zi} = 3$ - в уравнения метода Askew-Takeda с равномерными мелкими сетками, приводящего в ряде случаев к абсолютно неверным результатам типа отрицательных потоков нейтронов, мнимых $k_{эф}$ и т.п. [30-32,54-55].

Методами теории нелинейных положительных операторов устанавливаются достаточные условия положительной разрешимости уравнений (5.1) в форме требований $4/\tau_{ri} + 2/\tau_{zi} \le 1$ на выбор параметров τ_{ri}, τ_{zi}. Предлагаются также линейные формулировки методов, лишенные указанных недостатков.

Качество исходного метода Askew-Takeda (Askew) и линейного варианта (L-Askew) демонстрируется в табл.1, 2 на примерах расчетов по коду JARFR двумерных бенчмарк-моделей тепловых и быстрых реакторов стандартными конечно-разностными методами (к-р) с 1, 6 и 24 узлами на кассету и указанными версиями метода с одним узлом на кассету. Они показывают, что исходный метод может не иметь искомого решения (что отражается в расходимости итераций). Но если такое решение существует, то его точность (в $k_{эф}$) оказывается близкой к точности обычного к-р метода с 6 узлами на призму [30-32,54-55].

Таблица 1. $k_{эф}$ **задачи Makai [54]**

число узлов	1	6	24	1	1
Метод	К-р	К-р	К-р	Askew	L-Askew
шаг, см.	14,006	4,6687	2,3343	14,006	14,006
$k_{эф}$	1,1143	1,1109	1,1114	Расходится	1,1083

Таблица 2. $k_{эф}$ **реактора SNR-300 [54]**

число узлов	1	6	24	1	1
Метод	К-р	К-р	К-р	Askew	L-Askew
шаг, см.	11.20	2.733	1.866	11.20	11.20
$k_{эф}$	1.1386	1.1236	1.1208	1.1234	1.1186

В разделе 5.3 предлагается метод расчета флюенса быстрых нейтронов на корпус реактора ВВЭР-1000, основанный на синтезе многогруппового диффузионного приближения для нейтронно-физических расчетов реактора и метода Монте-Карло для расчета переноса быстрых нейтронов из активной зоны на корпус реактора. Он использует насчитанные методом Монте-Карло в реальной трехмерной геометрии активной зоны, выгородки, корпуса и околокорпусного пространства функции влияния ячеек активной зоны на 30 000 ячеек шахты и корпуса реактора и не содержит обычных приближений, связанных с упрощенным описанием геометрии, многогрупповой аппроксимацией и т.п.[76].

В разделе 5.4 описывается метод уточнения энерговыделения в активной зоне путем коррекции констант отражателя, базирующийся на требовании эквивалентности приближенной (малогрупповой гомогенизированной диффузионной) модели отражателя и более точной (референтной) модели с точки зрения их влияния на активную зону, то есть на требовании сохранения токов и потоков нейтронов на границе раздела активной зоны и отражателя при переходе от референтной модели к приближенной. Этот весьма эффективный метод приводит обычно к существенному (в разы) уточнению энерговыделения [77].

Заключение содержит краткую сводку основных результатов.

Приложения включают дополнительные материалы, касающиеся: применения метода ЭР к задачам решения интегральных уравнений, СЛАУ, свертки мелких сеток в крупные, свойств P_1-приближения в нестационарных задачах, связи спектров квазикритических и нестационарных задач, исследования алгоритмов методов типа Askew-Takeda на модельных задачах и особенностей программной реализации этих алгоритмов в комплексе программ JARFR.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Перечислим основные результаты работы.

1. Развиты теория и алгоритмы метода декомпозиции области, включая:

- новую постановку краевых задач в системах смежных подобластей;
- новые интегро-дифференциальные, интегральные и альбедные алгоритмы реализации метода декомпозиции области;
- новые алгоритмы методов прогонки и распараллеливания по подобластям;
- новые алгоритмы метода граничных интегральных уравнений.

2. Разработаны и математически обоснованы новые нелинейные методы расчета функционалов на решениях краевых задач, включая:

- методы эквивалентных разностей редукции неоднородных, однородных и нестационарных краевых задач теории переноса нейтронов к СНАУ;

- обобщения метода Марчука на неоднородные и нестационарные задачи.

3. Разработаны новые алгоритмы математического моделирования прямых и обратных задач нейтронной кинетики реактора и расчета эффектов реактивности, включая:

- новые уравнения распределенной кинетики с учетом зависимости постоянных распада предшественников запаздывающих нейтронов от энергии;
- новые уравнения точечной и многоточечной кинетики, обобщающие и уточняющие известные уравнения Усачева, Henry и Avery;
- новые алгоритмы метода обратной кинетики измерения реактивности и анализ их погрешностей;
- новый критерий выбора данных по запаздывающим нейтронам;
- новые алгоритмы идентификации коэффициентов уравнений кинетики по известной зависимости потока от времени.
- новые алгоритмы расчета локальных возмущений полей нейтронов;
- новые алгоритмы расчета эффектов реактивности по точной (кинетической) теории возмущений;
- новые алгоритмы расчета эффектов реактивности при термических деформациях зон (ячеек) реактора.

4. Разработаны схемы и алгоритмы реализации численных методов для комплексов программ JARFR и ACADEM расчетов реакторов, включая:

- линейные и нелинейные модификации известного метода грубой сетки Askew-Takeda для кода **JARFR** расчета быстрых реакторов;
- алгоритмы вычисления флюенса нейтронов на корпус реактора и коррекции констант отражателя для кода **ACADEM** расчета тепловых реакторов.

Изложенные в диссертации результаты являются вкладом в теорию и методы математического моделирования нейтронно-физических процессов. Они обеспечивают развитие и дальнейшее совершенствование математической теории переноса нейтронов и методов расчета ядерных реакторов.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.:Гостехиздат. 1956.
2. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды Математического Института АН СССР. Т.61. М. 1961.
3. Марчук Г.И., Лебедев В.И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.:Атомиздат. 1971.
4. Кейз К.М., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.:МИР. 1972.
5. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. М.:Атомиздат. 1973.
6. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. М.:Атомиздат. 1973.
7. Лалетин Н.И. Метод поверхностных псевдоисточников для решения уравнения переноса нейтронов (G_n-приближения). – В кн. Методы расчета полей тепловых нейтронов в решетках реакторов. М.:Атомиздат. 1974. С. 187-215.
8. Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.:Атомиздат. 1978.
9. Зизин М.Н. Расчет нейтронно-физических характеристик реакторов на быстрых нейтронах. М.:Атомиздат. 1978.
10. Румянцев Г.Я. Линейно-алгебраическая теории переноса нейтронов в плоских решетках. М.:Атомиздат. 1979.
11. Шихов С.Б., Щукин Н.В. Динамика реакторов. М.:МИФИ. 1982.
12. Крянев А.В., Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. Нелинейный анализ. М.:Энергоатомиздат. 1983.
13. Шихов С.Б.,Троянский В.Б. Теория ядерных реакторов. Газокинетическая теория. М.:Энергоатомиздат. 1983.
14. Николаев М.Н., Рязанов Б.Г., Савоськин М.М., Цибуля А.М. Многогрупповое приближение в теории переноса нейтронов. М.:Энергоатомиздат. 1984.
15. Казанский Ю.А., Матусевич Е.С. Экспериментальные методы физики реакторов. М.:Энергоатомиздат. 1984.
16. Гермогенова Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.:Наука. 1986.
17. Агошков В.И. Обобщенные решения уравнения переноса и свойства их гладкости. М.:Наука. 1988.
18. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.:ЛКИ. 2009.
19. Усачев Л.Н. Уравнение для ценности нейтронов, кинетика реакторов и теория возмущений. - В кн.: Материалы Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Женева. 1955. Т.5. М.-Л. Госэнергоиздат. 1958. С. 598-606.
20. Henry A.F. The Application of Reactor Kinetics to the Analysis of Experiments// Nuclear Science and Engineering. - 1958. - Vol.3. № 1. P. 52-70.
21. Эйвери Р. Теория связанных реакторов. – В кн. Физика ядерных реакторов. Труды 2-й Женевской конференции. М.: Атомиздат. 1959. С. 321-340.
22. Takeda T., Komano Y. Extension of Askew's Coarse-Mesh Method to Few-Group Problems for Calculating Two-Dimensional Power Distribution in Fast Breeder Reactors// Nuclear Science and Technology. -1978.- Vol.15. № 7. P. 523.
23. Смелов В.В. Принцип итерирования по подобластям в задачах с уравнением переноса// Журнал вычислительной математики и математической физики. -1981.-Т. 21. №6. С. 1493-1504.

24. Abramov B.D. Methods of Iterations on Subdomains for Neutron Transport Theory Problems// Transport Theory and Statistical Physics. - 2008.- Vol. 3. № 2-4. P. 208-235.
25. Абрамов Б.Д. Методы декомпозиции области в теории переноса нейтронов// Ядерная физика и инжиниринг. - 2012.- Т 3. №1. С. 41-46.
26. Абрамов Б.Д. Расчет полей нейтронов в неоднородностях// Атомная энергия.- 2001.- Т. 91. Вып. 6. С. 485-488.
27. Абрамов Б.Д. Некоторые методы расчета возмущений в ядерных реакторах// Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика ядерных реакторов. - 2014.- Вып.6. С. 5-14.
28. Абрамов Б.Д. О некоторых модификациях многогруппового метода Марчука для решения неоднородных краевых задач теории переноса нейтронов// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2000.- Т.40. №11. С. 1739-1752.
29. Абрамов Б.Д. Метод эквивалентных разностей для уравнения переноса нейтронов// Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2013.- Т. 53. №9. С. 79-92.
30. Абрамов Б.Д. О методе грубой сетки Askew решения многогрупповых диффузионных уравнений реактора// Ядерная энергетика.- 2003.- №2. С. 20-27.
31. Абрамов Б.Д. Критерии положительной разрешимости нелинейных уравнений метода грубой сетки Askew// Математическое моделирование.- 2004.- Т.16. № 12. С. 96-108.
32. Abramov B.D. On Some Nonlinear Extensions of Askew Coarse Mesh Method// Transport Theory and Statistical Physics. - 2008.- Vol. 37. № 2-4. P. 264-285.
33. Абрамов Б.Д. О некоторых модификациях уравнений точечной кинетики// Ядерная энергетика.- 2001.- №2. С. 52-59.
34. Абрамов Б.Д. Некоторые модификации теории связанных реакторов// Атомная энергия.- 2001.- Т.90. Вып.5. С. 337-345.
35. Абрамов Б.Д. О методе ОРУК определения реактивности// Ядерная энергетика.- 2004.- № 3. С. 19-31.
36. Абрамов Б.Д. Некоторые вопросы классификации и оценки погрешностей метода ОРУК определения реактивности// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. Вып. Динамика и безопасность ядерных энергетических установок. - 2004.- № 3. С. 3-13.
37. Абрамов Б.Д. К концепции метода ОРУК измерения реактивности// Ядерная энергетика. - 2006. - №4. С. 3-13.
38. Абрамов Б.Д. Критерий оптимального выбора данных по запаздывающим нейтронам// Атомная энергия.- 2006.- Т.100. Вып.5. С. 307-311.
39. Абрамов Б.Д. Матвеев Ю.В. Взаимосогласованное определение реактивности и других коэффициентов точечной модели кинетики, наилучших для данного реактора// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. Вып.1. Динамика и безопасность ядерных энергетических установок. – 2007.- С. 29-35.
40. Abramov B.D., Matveev Yu.V. Some Inverse Problems for Reactor Point Kinetics// Transport Theory and Statistical Physics. - 2008.- Vol. 37. № 2-4. P. 327-343.
41. Абрамов Б.Д. Развитие концепции измерения реактивности как процедуры коррекции ее расчетных значений// Атомная энергия. - 2010.- Т.109. Вып.4. С.188-194.
42. Абрамов Б.Д. Методы итераций по подобластям в задачах теории переноса и параллельные алгоритмы. В кн. - Энциклопедия низкотемпературной плазмы (Серия "Б", том VII-1 «Математическое моделирование в низкотемпературной плазме» Часть 3). - Москва: ЯНУС-К. 2008. С. 482-495.
43. Абрамов Б.Д. О некоторых методах декомпозиции области в теории переноса нейтронов. Препринт ФЭИ-3251. Обнинск. 2014.

44. Абрамов Б.Д. Вопросы развития и обоснования метода граничных интегральных уравнений в теории переноса нейтронов. Препринт ФЭИ- 3181. Обнинск. 2010.
45. Абрамов Б.Д. Развитие и обоснование алгоритмов метода ГИУ для решения краевых задач теории переноса нейтронов. Доклады ежегодных межведомственных семинаров 2009-2011 г. «Нейтронно-физические проблемы атомной энергетики». ГНЦ РФ-ФЭИ. 2012. С.108-113.
46. Абрамов Б.Д. О некоторых модификациях метода групп Марчука для расчета нестационарных режимов реактора. Препринт ФЭИ-2839. Обнинск. 2000.
47. Абрамов Б.Д. On Some Extension s of the Marchuk's Multigroup Method. Proc. of the Int. Conf. on Computational Mathematics ICCM-2002. Novosibirsk. Part II. P. 303-307.
48. Абрамов Б.Д. О некоторых многогрупповых методах повышенной консервативности// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерные константы. - 2003.- Вып.1-2. С. 18-33.
49. Абрамов Б.Д. Развитие и обоснование нелинейных математических моделей многогруппового метода и гомогенизации для расчета перспективных ядерных реакторов и электроядерных установок со сложной гетерогенной компоновкой и нетрадиционными видами топлива. Труды регионального конкурса научных проектов в области естественных наук. АНО «Калужский Научный Центр». РФФИ. Калуга. Изд. «Полиграф-Информ». 2004. С. 40-55.
50. Абрамов Б.Д. Некоторые нелинейные методы расчета функционалов на решениях уравнения переноса нейтронов. Препринт ФЭИ -3206. Обнинск. 2011.
51. Абрамов Б.Д. Нелинейные методы эквивалентных сеток решения уравнения переноса нейтронов. Доклады ежегодных межведомственных семинаров 2009-2011 гг. «Нейтронно-физические проблемы атомной энергетики». ГНЦ РФ-ФЭИ. Обнинск. 2012. С.150-161.
52. Абрамов Б.Д. Методы эквивалентных разностей для решения условно критических уравнений реактора. Препринт ФЭИ -3225. Обнинск. 2012.
53. Абрамов Б.Д. Метод эквивалентных разностей для уравнений нейтронной кинетики. Препринт ФЭИ - 3241. Обнинск. 2013.
54. Абрамов Б.Д., Невиница В.А., Фомиченко П.А. Линейная формулировка обобщенного метода крупной сетки Askew-Takeda решения многогрупповых диффузионных уравнений реактора в трехмерной гексагональной геометрии. Препринт ФЭИ-2519. Обнинск.1996.
55. Абрамов Б.Д. Кризис положительной разрешимости в методе грубой сетки Askew и некоторые пути его преодоления. Препринт ФЭИ-2953. Обнинск. 2002.
56. Абрамов Б.Д. Некоторые вопросы математического моделирования кинетики реакторов. Препринт ФЭИ- 2778. Обнинск.1999.
57. Abramov B.D., Danilytchev A.V., Stogov V.Yu., Suslov I.R. Neutronics Parameters of BN-600 Type Reactor with Hybrid Core. "Updated Codes and Methods to Reduce the Calculational Uncertainties of Liquid Metal Fast Reactor Reactivity Effects". Working Material IAEA-RC-803.2, IWG-FR/103. Vienna, Austria. P. 338-341. 2000.
58. Абрамов Б.Д. Некоторые обобщения уравнений кинетики реактора. Препринт ФЭИ-2875. Обнинск. 2001.
59. Abramov B.D. On Some Modifications of the Point Reactor Kinetics Equations. The 2001 ANS Int. Topical Meeting M&C- 2001. Salt Lake City, USA. Log 002.
60. Абрамов Б.Д. Некоторые обобщения уравнений обратной кинетики реактора. Препринт ФЭИ-2970. Обнинск. 2003.
61. Абрамов Б.Д. О некоторых обобщениях уравнений кинетики реактора. Тез. доклада на семинаре «Современное состояние и развитие программных средств для анализа динамики и безопасности АЭС». ВНИИЭФ. г. Саров. С 8. 2003.

62. Абрамов Б.Д. О моделировании кинетики реактора с использованием различных данных по запаздывающим нейтронам// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерные константы.- 2003.- Вып. 1-2. С. 34-47.
63. Абрамов Б.Д. Об уравнениях кинетики реактора со сложным спектром. Форум «Ядерные реакторы на быстрых нейтронах». ФЭИ, Обнинск. С. 76. 2003.
64. Абрамов Б.Д. Вопросы математического моделирования кинетики на запаздывающих нейтронах. Препринт ФЭИ-3052. Обнинск. 2005.
65. Abramov B.D. On Reactor Kinetics Simulation with Different Sets of Delayed Neutrons Data. Int. Topical Meeting M&C 2005. Avignon. France. 2005. Log # 130
66. Абрамов Б.Д. Матвеев Ю.В. Развитие 8-групповой модели запаздывающих нейтронов с универсальными постоянными распада предшественников// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерные константы. - 2007.- Вып.1-2. С. 95-109.
67. Абрамов Б.Д., Матвеев Ю.В. К проблеме идентификации коэффициентов уравнений нейтронной кинетики реактора с учетом пространственных эффектов реактивности. Препринт ФЭИ- 3113. Обнинск. 2007.
68. Абрамов Б.Д., Долгов Е.В., Забродская С.В., Серегин А.С., Соловьев Н.А. Развитие и обоснование математических методов моделирования нейтронной кинетики и контроля реактивности для расчета перспективных ядерных реакторов и электроядерных установок со сложной гетерогенной компоновкой и нетрадиционными видами топлива. Труды регионального конкурса научных проектов РФФИ и АНО КНЦ. Изд. АНО «КНЦ». Калуга. 2007. С. 28-41.
69. Абрамов Б.Д., Матвеев Ю.В. Четырехпараметрическая схема метода ОРУК измерения реактивности. «Волга-2008, Актуальные проблемы физики ядерных реакторов – эффективность, безопасность, нераспространение». М:. МИФИ. 2008. С. 73-76.
70. Abramov B. Matveev Yu. Optimal choice of data on delayed neutrons. Proc. Int. Conf. on the Physics of Reactors (PHYSOR’08). Interlaken, Switzerland. 2008. Log 360.
71. Абрамов Б.Д., Матвеев Ю.В., Пивоваров В.А. Развитие методов контроля реактивности на основе многоточечных уравнений нейтронной кинетики реактора. Препринт ФЭИ- 3171. Обнинск. 2009.
72. Abramov B.D. On Separations of Reactivity Effects in Nuclear Reactors. Proc. Int. Conf. MAC’99. MADRID. Vol. 2. P. 1795. 1999.
73. Абрамов Б.Д., Багдасарова М.Е., Долгов Е.В., Комиссаров О.В., Косарев С.А., Макаров О.И., Матвеев Ю.В., Мишина Л.М. Развитие и обоснование методов расчета локальных возмущений полей нейтронов и сопутствующих им эффектов реактивности в перспективных ядерных реакторах и электроядерных установках со сложной гетерогенной компоновкой и нетрадиционными видами топлива. Сборник научных трудов РФФИ и АНО "КНЦ", Изд АНО "КНЦ” г. Калуга. 2009. С.48-62.
74. Abramov B.D. On reactivity effects calculations. Proc. Int. Conf. M&C-2009, Saratoga Springs, USA. 2009. ID 201501.
75. Абрамов Б.Д., Раскач К.Ф. О некоторых методах расчета эффектов реактивности при деформациях зон реактора// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерные константы. - 2015.- Вып.2. С. 18-32.
76. Абрамов Б.Д., Зинин А.И., Коробейников В.В., Макаров О.И., Малков М.Р., Соловьев Н.А., Слюняева О.В. Метод и программа оперативного расчета флюенса быстрых нейтронов на корпус реактора ВВЭР-1000 в рамках комплекса ACADEM. Избранные труды ФЭИ 2000. Обнинск. ФЭИ. 2000. Часть 1. С.7-14.
77. Абрамов Б.Д., Долгов Е.В., Кулагин Н.Т., Пивоваров В.А. Методика коррекции констант отражателя. В сб. «Итоги научно-технической деятельности института ядерных реакторов и теплофизики за 2012 г.». ФЭИ. Обнинск. 2013. С. 14-24.