

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Юлдашев Олег Ирикевич

Проекционно-сеточные методы для решения нелинейных  
эллиптических задач с дифференциальными операторами  
векторного анализа

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Дубна - 2010

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий  
Объединённого института ядерных исследований

Научные консультанты:

*заслуженный деятель науки РФ*

Жидков Евгений Петрович

*доктор физико-математических наук*

Иванов Виктор Владимирович

Официальные оппоненты:

*доктор физико-математических наук,  
профессор*

Вабищевич Пётр Николаевич

Институт математического моделирования РАН

*доктор физико-математических наук,  
профессор*

Гулин Алексей Владимирович

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

*доктор физико-математических наук*

Сычевский Сергей Евгеньевич

НТЦ "Синтез", ФГУП "НИИЭФА им. Д.В.Ефремова"

Ведущая организация:

*Казанский (Приволжский) федеральный университет.*

Защита диссертации состоится "29" октября 2010 г. в 14 час.  
на заседании Диссертационного совета Д 720.001.04 при Объединённом  
институте ядерных исследований (Лаборатория информационных техноло-  
гий) по адресу: 141980, г. Дубна, Московской области, ул. Жолио Кюри  
6.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединённого  
института ядерных исследований.

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2010 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета

Иванченко Иосиф Моисеевич

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Актуальность

Проекционно-сеточные методы получили широкое распространение в практических приложениях, благодаря их успешному применению в области теории упругости в начале прошлого века. В настоящее время этот класс методов является наиболее распространённым в инженерных расчётах и с успехом используется в самых различных областях теории и практики. В связи с этим следует упомянуть А.Н.Крылова, Л.В.Канторовича, В.И.Крылова, И.С.Березина, Н.П.Жидкова, Г.И.Марчука, А.А.Самарского, А.В.Гулина, Н.С.Бахвалова и других авторов основополагающих книг по численным методам.

Отметим наиболее общие достижения за последние два десятилетия в развитии проекционно-сеточных методов для решения эллиптических краевых задач: это различные алгоритмы решения дискретизованных нелинейных уравнений на последовательности сеток;  $p$ - и  $hp$ - версии метода Бубнова-Галёркина для непрерывных и разрывных базисных функций, а также для векторных рёберных и граневых (facet) базисных функций; кроме того, это смешанные методы, методы декомпозиции области, методы расчёта с использованием комбинированных систем (т.е. систем с дифференциальными и граничными интегральными уравнениями). Все эти подходы к численному решению задач в различных областях знаний интенсивно развиваются.

В то же время появился новый класс сложных задач, к которому относятся расчёты крупных электрофизических установок, например, для физических экспериментов, готовящихся на Большом Адронном Коллайдере (LHC) в Европейском Центре Ядерных Исследований (CERN, г. Женева, Швейцария). Одной из таких установок является детектор ALICE [1-4]. Одновременно в проектах российских физических экспериментов главным фактором становится минимизация затрат на создание установок, что стимулирует применение оригинальных конструктивных решений и, как следствие, интенсивное использование математического моделирования с развитием известных методов расчёта и созданием новых алгоритмов. При этом сложность моделирования электрофизических устройств часто связана с необходимостью учёта поведения векторных полей различной природы.

Можно выделить следующие принципиальные трудности, возникающие при решении подобных задач с помощью обычных подходов:

поведение стационарных векторных полей описывается, как правило, системой дифференциальных уравнений с операторами векторного анализа, такими как дивергенция, ротор и градиент. Во многих случаях введение скалярного или векторного потенциалов приводит к сокращению числа уравнений системы. Однако при таком подходе необходимо следить за точностью последующего вычисления карты поля посредством дифференцирования потенциалов, поскольку операция численного дифференцирования, вообще говоря, является некорректной<sup>1</sup>. Ещё один недостаток такого подхода проявляется, когда поведение искомых векторных полей в разных областях задаётся разными уравнениями и на границах этих областей должны выполняться определённые условия для векторов поля. При использовании потенциалов о выполнении этих условий можно говорить в смысле сходимости приближённых решений к точному, то есть только в пределе;

---

<sup>1</sup>А.Н.Тихонов, В.А.Арсенин. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979, с.18

при решении задач относительно векторов поля, без введения потенциалов, обычно используются смешанные формулировки, после дискретизации которых возникают системы с так называемой седловой точкой. Итерационные методы решения таких систем для сложных задач пока недостаточно эффективны;

алгебраические системы со специфическими свойствами возникают при использовании некоторых алгоритмов для точного учёта убывании векторного поля на бесконечности и применении некоторых схем метода Галёркина с разрывными базисными функциями. Для сложных задач такого типа также нет достаточно эффективных итерационных методов;

очень важным для практических задач является вопрос о реальной точности вычисляемых полей при использовании ячеек конечных элементов с границами, которые задаются поверхностями второго порядка. Обычно точность в этом случае зависит от геометрических свойств ячейки, которыми определяются оценки для якобианов прямого и обратного преобразования в стандартный элемент. Поэтому использование базисных функций высокого порядка аппроксимации для потенциала в общем случае не гарантирует высокую точность аппроксимации векторного поля;

и, наконец, довольно часто остаётся открытым вопрос о точности описания сложного электрофизического устройства уравнениями для проведения расчётов.

Следует отметить, что с точностью нахождения векторных полей связаны многие проблемы в вычислительной математике, математической физике, функциональном анализе, в других математических и физических дисциплинах. Очевидно, что точность решения этих задач зависит от понимания моделируемого физического явления, математической модели, от конкретной формулировки проблемы, алгоритма дискретизации, итерационного процесса получения решения, метода решения линеаризованной системы алгебраических уравнений, от конкретных алгоритмов и т.д. Все эти факторы определяют актуальность круга вопросов, рассматриваемых в диссертации.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединённого института ядерных исследований и пользовались поддержкой Российского Фонда Фундаментальных Исследований по гранту N 99-01-01103.

### Цель работы

Основной целью диссертационной работы является разработка эффективных проекционно-сеточных методов для решения сложных нелинейных эллиптических задач с дифференциальными операторами векторного анализа, в частности,

- получение обобщённой формулировки, соответствующей задаче;
- исследование свойств оператора обобщённой формулировки в гильбертовых пространствах;
- разработка алгоритма дискретизации обобщённого уравнения.

Перечислим некоторые требования, которым должны удовлетворять схемы, полученные в результате дискретизации обобщённого уравнения.

В первую очередь, это сохранение точности вычислений в следующих случаях:

- когда расчётная область включает несколько несвязных областей, в которых заданы нелинейные уравнения;

- когда на границах областей, в которых поведение векторных полей задаётся разными уравнениями, должны выполняться определённые условия;
- при использовании ячеек конечных элементов с границами в виде поверхностей второго порядка;
- при учёте условий убывания на бесконечности для задач во всём пространстве;
- при вычислении общей карты поля.

Еще одним важным требованием является возможность эффективного итерационного решения достаточно больших по размеру алгебраических систем, соответствующих схемам, поскольку речь идёт о сложных задачах.

Вспомогательной, прикладной целью работы является апробация новых методов в расчётах для конкретных электромагнитных систем экспериментальной физики, в том числе,

- "тёплых" и "сверхпроводящих" магнитов со сложной геометрией и сильноменяющимися полями;
- магнитных систем с заданным поведением поля в определённой области (решение обратных задач).

### Научная новизна

Среди нелинейных задач эллиптического типа выделяется класс задач, заданных во всём пространстве. Трудность решения задач этого класса заключается в необходимости учёта условия убывания решения на бесконечности. Обычный подход к решению таких задач состоит в решении последовательности нелинейных задач для определения удалённой границы с асимптотическими условиями. В ранних работах автора для точного учёта поведения решения на бесконечности в качестве граничного условия было предложено использовать граничное интегральное уравнение. В результате получается комбинированная система, содержащая нелинейные дифференциальные уравнения в дивергентной или вихревой формах в ограниченной области и граничное условие в виде интегрального уравнения. Видимо, независимо от исследований автора через двенадцать лет в CERN была разработана программа, которая использовала аналогичный алгоритм включения интегрального уравнения в общую расчётную схему. Кроме того, эта программа применялась для расчёта главного дипольного магнита Большого Адронного Коллайдера. В диссертационной работе впервые на основе теории монотонных операторов исследованы комбинированные системы относительно специальных проекций векторов на пространства функций с интегрируемыми в квадрате градиентами и на пространства вектор-функций с интегрируемыми в квадрате роторами. Впервые получены комбинированные системы, использующие только один граничный оператор на произвольной границе вокруг расчётной области, включающей подобласти с нелинейными и линейными дифференциальными уравнениями. Решение задач с медленно убывающими на бесконечности искомыми функциями с помощью таких систем экономит общее время компьютерных вычислений. Одна из таких систем использовалась для моделирования дипольного магнита синхротрона СПИН ОИЯИ с помощью метода конечных элементов, и полученные результаты хорошо согласуются с расчётами по конечно-разностной программе.

Ещё один класс нелинейных эллиптических задач, рассмотренный в диссертации, - это задачи относительно вектор-функций с системами из двух дифференциальных уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах. В работе разработаны общие подходы к решению таких задач. В частности, впервые на основе теории о монотонных операторах доказаны теоремы о разрешимости рассмотренных систем в специальных векторных гильбертовых пространствах и сходимости соответствующих приближённых решений к точному. Решение известных нелинейных эллиптических задач в таком виде позволяет получать векторные поля с более высоким уровнем точности при меньших компьютерных затратах. Важной составляющей частью оригинальных подходов являются узловые конечные элементы высокого порядка аппроксимации без внутренних узлов, которые предложены впервые. Базисные функции этих элементов удовлетворяют либо уравнениям со скалярным или векторным оператором Лапласа, либо одновременно двум однородным дифференциальным уравнениям первого порядка с оператором дивергенции и оператором ротора. Впервые показано, что использование таких элементов при решении краевых задач с указанными операторами приводит к конечно-элементным алгебраическим системам с симметричными, положительно-определёнными матрицами. Новые элементы тестировались на типичной задаче интерполяции в рабочей области магнитного спектрометра. Из проведённых расчётов следует, что предлагаемые элементы обеспечивают более быструю сходимость приближённых решений, чем в случае использования обычных конечных элементов лагранжевого типа.

В диссертации разработан ряд новых методов и алгоритмов, которые вносят существенный вклад в методику решения ряда прямых и обратных трёхмерных нелинейных задач магнитостатики. Во-первых, это проекционно-сеточный метод и адаптивный алгоритм вычисления скалярного потенциала, создаваемого проводниками с постоянным током, на границах несвязных областей вне проводников. Этот метод предлагается использовать при решении нелинейных задач магнитостатики в известной формулировке относительно двух скалярных потенциалов. Он позволяет без риска накопления ошибки при вычислении скалярного потенциала проводников использовать кубатурные формулы для интегрирования поля по закону Био-Савара. При обосновании метода использовалась теория сильно монотонных операторов. Его эффективность проверялась при расчётах ряда магнитных систем. Итоговые результаты расчётов хорошо согласуются с измерениями магнитного поля.

Одним из свойств проекционно-сеточных схем, которые используются для решения сложных эллиптических задач, является локальная аппроксимация. Для её апостериорной оценки существует несколько различных методов, где допустимая величина локальной погрешности задаётся из опыта решения подобных задач. В диссертации для задач магнитостатики эту допустимую величину предлагается определять на основе данных интерполяции измеренного с высокой точностью магнитного поля. В качестве эталона используются измеренные магнитные поля для установок L3 (CERN) и ЭКСЧАРМ (ИФВЭ, г.Протвино). Предложенные в диссертации новые характеристики локальной аппроксимации позволяют не только получать расчётные магнитные поля высокого качества, но и оценивать качество полей, измеренных на определённой сетке.

С практической точки зрения, важным классом задач магнитостатики являются обратные задачи построения моделей электрофизических устройств с заданным магнитным полем. В диссертации предложены два оригинальных алгоритма решения задач из этого класса. В первом случае уточняется поверхность ферромагнетика при заданном высокооднородном магнитном поле с учётом его нелинейного поведения. Доказана теорема о сходимости итерационного процесса уточнения. Этот алгоритм позволил обосновать магнитную систему для проекта эксперимента в ИТЭФ (г. Москва),

поддержанного грантом РФФИ 97-02-16765. Во втором алгоритме строится компьютерная модель спектрометрического анализирующего магнита по заданной поворотной силе, размеру рабочей области и некоторым другим параметрам. Предложенные алгоритмы существенно сокращают общее время построения компьютерных моделей магнитов с заданными свойствами.

### Практическая ценность

Все предложенные методы и алгоритмы для решения задач магнитостатики, такие как:

- 1) комбинированные формулировки с одним интегральным оператором;
- 2) проекционно-сеточный метод с адаптивным алгоритмом для вычисления функции на липшицевой границе трёхмерного тела по заданному градиенту;
- 3) алгоритм контроля точности на основе единых характеристик для вычисленных и измеренных магнитных полей;
- 4) итерационный процесс формирования однородного магнитного поля за счёт уточнения поверхности ферромагнетика;
- 5) алгоритм построения компьютерных моделей спектрометрических дипольных магнитов по заданной поворотной силе, размеру рабочей области и другим параметрам, - апробировались при моделировании сложных магнитных систем и могут быть использованы для расчётов подобных систем.

Общую схему решения краевых задач для дифференциальных операторов векторного анализа в областях с линейными и нелинейными уравнениями для векторных полей можно рекомендовать также для решения задач, связанных с расчётом электрических и магнитных полей, упругих колебаний, статических задач распространения потоков тепла, процессов диффузии, фильтрации жидкости, излучения и других.

Относительно приведённых в диссертации результатов расчётов конкретных магнитных систем можно отметить следующее:

1) компьютерные модели проектов магнитных систем для установки ALICE были разработаны на стадии формирования концепции дипольного магнита, проектировавшегося в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ. Проведённые расчёты, в частности, использовались для обоснования окончательного варианта проекта сверхпроводящего дипольного магнита, который вошёл в Дополнение к техническому проекту эксперимента (CERN/LHCC 96-32), а также для обоснования первых проектов «тёплого» дипольного магнита, включая вариант с конусной конфигурацией магнитопровода, который является самым большим в мире. Для большинства расчётов проводилось сравнение с результатами, полученными по другим программам или по данным измерений магнитного поля. Во всех случаях было получено хорошее согласование.

2) задачи, решённые в рамках грантов РФФИ 97-02-16765 и 99-01-01103, позволили обосновать возможность создания спектрометрического магнита с поляризующими наконечниками для проекта эксперимента с поляризованной мишенью в ИТЭФ. Проект такой магнитной системы является уникальным, поскольку предполагает её работу как в режиме анализирующего дипольного магнита, так и в режиме поляризующего магнита.

3) расчёты, выполненные для соленоида модифицированного бетатрона ОИЯИ, позволили обосновать конструкцию магнитной системы. В настоящее время модифицированный бетатрон используется для проведения уникальных экспериментов в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

## Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на Международных совещаниях по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1983, 1993), X, XI, XV Всесоюзных и Всероссийском совещании по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1986, 1988, Протвино, 1996), II Республиканской конференции "Интегральные уравнения в прикладном моделировании" (Киев, 1986), Всесоюзных конференциях по вычислительной физике и математическому моделированию (Волгоград, 1988, 1989), рабочем совещании "Методы и программы расчёта магнитных полей" (Протвино, 1989), Международных конференциях по дифференциальным уравнениям EQUADIFF -7, 8 (Prague, 1989, Bratislava, 1993), Международной конференции по численному анализу ISNA'92 (Prague, 1992), Конференции по ускорителям заряженных частиц PAC-95 (Dallas, 1995), рабочих совещаниях коллабораций ALICE (CERN, 1996), EXCHARM (Дубна, 1995, 1997) и PANDA (FZ-Juelich, 2004), Конференции-семинаре "Математические модели сложных систем" (Тверь, ТвГУ, 1999), Всероссийских конференциях по проблемам физики, химии, математики, информатики и методики преподавания (Москва, РУДН, 1999, 2000, 2002, 2006), Международной конференции "Тихонов и современная математика" (Москва, МГУ, 2006), Международной конференции "Математическое моделирование и вычислительная физика" (Дубна, 2009), на семинаре кафедры вычислительных методов (ВМК, МГУ, 2009), на семинаре научно-исследовательского вычислительного отдела НТЦ «Синтез» (НИИЭФА, С.-Петербург, 2009), а также на Учёных советах ОИЯИ, семинарах по вычислительной и прикладной математике, вычислительной физике ЛИТ (ЛВТА) ОИЯИ.

## Публикации

Соискатель имеет 67 научных публикаций. Основные результаты, вошедшие в диссертацию, опубликованы в 28 печатных работах, в том числе в 9 публикациях в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией ("Дифференциальные уравнения", "Математическое моделирование", "Журнал вычислительной математики и математической физики", "Вестник Российского Университета Дружбы Народов", "Nuclear Instruments and Methods"), а также в 19 публикациях в журнале "Краткие сообщения ОИЯИ", трудах Всероссийских, Всесоюзных и Международных конференций, в сообщениях ОИЯИ и других научных изданиях.

Некоторые из работ автора, на основе которых написана диссертация, представлены в электронной библиотеке публикаций ОИЯИ <http://www1.jinr.ru/>, в электронных библиотеках институтов КЕК (Япония) и CERN (г.Женева) <sup>2</sup>.

## Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и трёх приложений. Она содержит 21 таблицу, 92 рисунка, список литературы из 214 наименований и изложена на 340 страницах, включая приложения. В каждом параграфе принята своя нумерация лемм и теорем.

---

<sup>2</sup><http://www.slac.stanford.edu/spires/hepname/>



# СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** приводится краткий обзор литературы по проекционно-сеточным методам решения нелинейных эллиптических задач, в том числе с помощью  $hp$ - конечно-элементных адаптивных алгоритмов. Как известно, разработка проекционно-сеточных методов восходит к работам W.Ritz(1908), И.Г.Бубнова(1913) и Б.Г.Галёркина(1915), причём метод Бубнова - Галёркина (взвешенных невязок) обладает очень большой общностью. Отметим также книги по проекционно-сеточным методам С.Г.Михлина, Х.Л.Смолицкого(1965), М.А.Красносельского, Г.М.Вайникко и др.(1969), Р.Ciarlet(1978), Л.А.Оганесяна, Л.А.Руховца(1979), Г.И.Марчука, В.И.Агошкова(1981), В.В.Шайдунова(1989), Ch.Schwab(1998), О.С.Zienkiewicz, R.L.Taylor(2000), Р.Monk(2003), Р.Šolin(2006). В настоящее время численные методы для решения подобных задач (в основном, линейных), в том числе с уравнениями Максвелла, интенсивно развиваются в связи с пионерскими работами R.Courant(1943), Н.Whitney (1957), Г.И.Марчука(1961), Р.П.Федоренко(1961,1979), В.А.Кондратьева(1967), О.А.Ладыженской(1970), I.Babuška(1973,1981), F.Brezzi(1974), В.И.Агошкова(1977), Е.А.Волкова(1979), J.C.Nedelec(1980), А.Bossavit(1987) и других. Среди современных исследований можно выделить как работы отдельных авторов, так и целых коллабораций, представляющих свои публикации не только в периодической печати, но и в WWW. Далее кратко раскрыто содержание глав диссертации, её апробация и структура.

**Первая глава** посвящена проекционно-сеточным методам решения краевых задач для векторов с интегральными граничными условиями, точно учитывающими убывание решения на бесконечности. Как известно из работ Р.П.Федоренко (1961) и Н.С.Бахвалова (1966), особенностью численного решения линейных эллиптических задач в дифференциальном подходе является быстрая сходимост метода простой итерации для быстро осциллирующих компонент решения задачи. В случае же интегрального подхода, как показано, например, в работе Е.П.Жидкова, Б.Н.Хоромского, О.И.Юлдашева (1981), в методе простой итерации быстрее сходятся гладкие компоненты решения задачи. В связи с этим комбинированный подход, который объединяет дифференциальный и интегральный подходы и позволяет точно учитывать условие убывания решения на бесконечности, продолжает вызывать интерес. Среди первых публикаций, посвящённых разработке комбинированных методов, можно отметить работы О.С.Zienkiewicz, D.W.Kelly, Р.Bettess (1977), С.Johnson, J.C.Nedelec (1980), Е.П.Жидкова с соавторами (1982,1992), S.J.Salon (1985), П.Г.Акишина (1991) и других. По-прежнему разрабатываются прикладные пакеты и программы на эту тему, что свидетельствует об актуальности излагаемых здесь результатов.

В §1.1 доказывается теорема 1.1.1 о компонентах непрерывно-дифференцируемого вектора. Как известно, каждый вектор можно разложить по направлению единичного вектора и ему перпендикулярному. В силу теоремы Гельмгольца единичный вектор может быть градиентом, ротором или их суммой. Поэтому при описании компонент вектора в новом разложении получаем различные системы уравнений для его определения.

Во-первых, из теоремы 1.1.1 вытекает абстрактная формулировка внутренней краевой задачи

$$\nabla \cdot (a_1(x, \vec{u})\vec{u}) = f(x, \vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\nabla \times (a_2(x, \vec{u})\vec{u}) = \vec{F}(x, \vec{u}), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$\alpha(x)\vec{n}(a_1\vec{u} \cdot \vec{n}) + \beta(x)\vec{n} \times (a_2\vec{u} \times \vec{n}) = \vec{g}_1, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где все функциональные зависимости предполагаются заданными, а во-вторых, задача вида

$$\nabla \cdot (\vec{A}_1(x, \vec{u}) \times \vec{u}) = f(x, \vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\nabla(\vec{A}_2(x, \vec{u}) \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\vec{A}_3(x, \vec{u}) \times \vec{u}) = \vec{F}(x, \vec{u}), \quad x \in \Omega; \quad (3)$$

$$\alpha(x)\vec{n}((\vec{A}_1 \times \vec{u}) \cdot \vec{n}) + (\vec{A}_2 \cdot \vec{u}) + \beta(x)\vec{n} \times (\vec{A}_3 \times \vec{u}) \times \vec{n} = \vec{g}_2, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Также из теоремы 1.1.1 следует формулировка задачи

$$\nabla \cdot (a_1(x, \vec{u})\vec{u}) + \nabla \cdot (\vec{A}_1(x, \vec{u}) \times \vec{u}) = f(x, \vec{u}), \quad x \in \Omega;$$

$$\nabla \times (a_2(x, \vec{u})\vec{u}) + \nabla(\vec{A}_2(x, \vec{u}) \cdot \vec{u}) + \nabla \times (\vec{A}_3(x, \vec{u}) \times \vec{u}) = \vec{F}(x, \vec{u}), \quad x \in \Omega; \quad (5)$$

$$\alpha(x)\vec{n}((a_1\vec{u} \cdot \vec{n}) + (\vec{A}_1 \times \vec{u}) \cdot \vec{n}) + (\vec{A}_2 \cdot \vec{u}) + \beta(x)\vec{n} \times ((a_2\vec{u} + \vec{A}_3 \times \vec{u}) \times \vec{n}) = \vec{g}_3, \quad x \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Все три абстрактные задачи (1),(2), (3),(4) и (5),(6) при определённых коэффициентах и правых частях имеют смысл, поскольку уравнения каждой из них описывают поведение компонент непрерывно-дифференцируемого вектора.

Сформулируем абстрактные задачи для описания стационарных векторных полей во всём пространстве. Если дифференциальные уравнения (1) дополнить условиями

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|a_i \vec{u}|}{|x|} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

то имеет смысл задача (1),(7). А при условии на бесконечности

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|\vec{A}_i \times \vec{u}|}{|x|} = 0, \quad i = 1, 3, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|\vec{A}_2 \cdot \vec{u}|}{|x|} = 0, \quad (8)$$

имеет смысл задача (3),(8). Аналогично, имеет смысл задача во всем пространстве (5),(7),(8). Для краткости дальнейшего изложения рассматривается частный случай задачи (1),(7) в следующем виде:

$$\nabla \cdot (a_1(x, \vec{u})\vec{u}) = f(x), \quad \nabla \times (a_2(x, \vec{u})\vec{u}) = \vec{F}(x), \quad x \in \Omega;$$

$$\nabla \cdot (\hat{a}_1(x)\vec{u}) = f_1(x), \quad \nabla \times (\hat{a}_1(x)\vec{u}) = \vec{F}_1(x), \quad x \in \Omega_1 \equiv (\mathbf{R}^3 \setminus \Omega); \quad (9)$$

$$\vec{n} \cdot (a_1\vec{u} - \hat{a}_1\vec{u}) = 0, \quad \vec{n} \times (a_2\vec{u} - \hat{a}_1\vec{u}) = 0, \quad x \in \Gamma \equiv \partial\Omega;$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{a}_1\vec{u} = 0.$$

Здесь граница  $\Gamma$ , разделяющая области  $\Omega$  и  $\Omega_1$ , является липшицевой,  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $f_1 \in L_2(\Omega_1)$ ,  $\vec{F} \in (L_2(\Omega))^3$ ,  $\vec{F}_1 \in (L_2(\Omega_1))^3$ , все коэффициенты уравнений предполагаются непрерывно-дифференцируемыми в  $\Omega \cup \Omega_1$ .

Основным результатом этой главы является вывод о том, что при использовании метода Галёркина для решения задачи (9) с помощью интегральных уравнений относительно векторного или скалярного потенциалов получают комбинированные системы уравнений, состоящие из нелинейного дифференциального уравнения внутри области  $\Omega$  и граничного интегрального уравнения с одним граничным оператором на  $\Gamma$ .

Частным случаем задачи (9) являются задачи магнитостатики. Здесь следует отметить, что в автореферате кандидатской диссертации автора <sup>3</sup> для двумерных задач

---

<sup>3</sup> О.И.Юлдашев. Граничные интегральные уравнения в задачах магнитостатики. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ОИЯИ, 11-87-111, Дубна, 1987

магнитостатики было предложено рассматривать граничные интегральные уравнения как специальные граничные условия (лемма 3), и на основании лемм 4,5 были обоснованы два метода включения граничных интегральных уравнений для векторного потенциала в конечно-разностную сеточную схему решения дифференциальной нелинейной задачи магнитостатики относительно векторного потенциала. По всей видимости, независимо от этих исследований, один из упомянутых методов включения, только в конечно-элементную схему, был реализован в виде специальной программы для решения подобного класса задач <sup>4</sup>. Впоследствии она использовалась для расчётов магнитного поля главного дипольного магнита Большого Адронного Коллайдера <sup>5</sup>.

Следует отметить, что излагаемый в этой главе подход (§ 1.4) является более общим, чем методы, изложенные в работах М.Ж.Фридман(1984) и Ж.Е.Пасьяк(1984), а также более экономичным по затратам памяти ЭВМ, чем подходы из <sup>5,6</sup>.

Для исследования системы (9) удобно ввести обозначения

$$\vec{V} = \begin{cases} a_1 \vec{u}, & x \in \Omega, \\ \hat{a}_1 \vec{u}, & x \in \Omega_1, \end{cases} \quad \vec{Z} = \begin{cases} a_2 \vec{u}, & x \in \Omega, \\ \hat{a}_1 \vec{u}, & x \in \Omega_1, \end{cases} \quad \vec{U} = \vec{V} - \vec{Z}.$$

Для  $x \in \Omega$  будем использовать следующие зависимости:  $\vec{Z} = \nu(x, \vec{V})\vec{V}$  и  $\vec{V} = k(x, \vec{Z})\vec{Z}$ .

При  $f = 0$  для решения системы (9) рассматривается интегральное уравнение относительно векторного потенциала  $\vec{A}$ , который вводится по формуле  $\vec{V} = \nabla \times \vec{A}$ .

Векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$R\vec{A} \equiv \vec{A} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{U}(\vec{A}) \times \nabla \frac{1}{r} dy = \vec{A}_f(x), \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Здесь  $\vec{U}(\vec{A}) = (1 - \nu(x, \nabla \times \vec{A}))\nabla \times \vec{A}$ , а  $r = |x - y|$  - расстояние между точками  $x$  и  $y$ ,  $\vec{A}_f(x)$  - заданный вектор,  $\vec{A}_f \in (L_2(\Omega))^3$ . Предполагается, что  $0 < \nu_* \leq \nu < 1$ ,  $\nu_* = const$ .

В § 1.2 исследуется интегральное уравнение (10) для векторного потенциала в гильбертовом пространстве

$$H(rot, \Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} \in (L_2(\Omega))^3, \nabla \times \vec{u} \in (L_2(\Omega))^3\}$$

со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\alpha} = \alpha(\vec{u}, \vec{v}) + (\nabla \times \vec{u}, \nabla \times \vec{v}),$$

где  $\alpha = const$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in H(rot, \Omega)$ ,  $(\cdot, \cdot)$  - скалярное произведение в  $(L_2(\Omega))^3$ .

Через  $\|\cdot\|$  и  $\|\cdot\|_{\alpha}$  обозначим соответствующие нормы в пространствах  $(L_2(\Omega))^3$  и  $H(rot, \Omega)$ .

Основным условием, которому должны удовлетворять коэффициенты системы (9), является следующее неравенство:

$$|\vec{U}_1 - \vec{U}_2| \leq (1 - \nu_*)|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|, \quad x \in \Omega. \quad (11)$$

Свойства оператора  $R : H(rot, \Omega) \rightarrow H(rot, \Omega)$  устанавливаются в следующей теореме.

<sup>4</sup> S.Kurz, J.Fetzer, W.M.Rucker. Coupled BEM-FEM Methods for 3D field calculations with iron saturation. Proceedings of the First International ROXIE users meeting and workshop, 1999. CERN, open-2000-151, 09/Aug/2000.

<sup>5</sup> S.Kurz, S.Russenschuck, N.Siegel. Accurate calculation of fringe fields in the LHC main dipole. CERN, LHC Project Report 357, 1999.

### Теорема 1.2.1

Если выполняется условие (11), то

1)  $R$  - сильно монотонный оператор, то есть для  $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \in H(\text{rot}, \Omega)$

$$(R(\vec{A}_1) - R(\vec{A}_2), \vec{A}_1 - \vec{A}_2)_\alpha \geq \chi_1 \|\vec{A}_1 - \vec{A}_2\|_\alpha^2,$$

где  $\alpha, \chi_1$  - положительные константы;

2)  $R$  удовлетворяет условию Липшица, то есть для  $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \in H(\text{rot}, \Omega)$

$$\|R(\vec{A}_1) - R(\vec{A}_2)\|_\alpha \leq l_1 \|\vec{A}_1 - \vec{A}_2\|_\alpha,$$

где  $\alpha, l_1$  - положительные константы.

В теореме 1.2.2 устанавливаются свойства производной Фреше оператора  $R$ :

$$R'(\vec{A})\vec{A}_+ \equiv \vec{A}_+ - Q\vec{U}',$$

где  $\vec{U}' \equiv (E - Z'(\vec{V}))\vec{V}_+$ ,  $Z'(\vec{V}) = \{\partial Z_i / \partial V_j\}_{i,j=1,2,3}$ ,  $\vec{V}_+ = \nabla \times \vec{A}_+$ . Формулируются условия при которых решение уравнения (10) можно получить с помощью итерационного процесса Ньютона.

Для дискретизации интегрального уравнения используется метод Галёркина. Вводится пространство

$$J^1(\Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3, \nabla \cdot \vec{u} = 0, \vec{u} \cdot \vec{n}|_\Gamma = 0\},$$

где  $\vec{u} \cdot \vec{n}|_\Gamma$  - след на границе  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ , а  $W_2^1(\Omega)$  - пространство Соболева со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_{J^1} = (\nabla \times \vec{u}, \nabla \times \vec{v})$$

и норма  $\|\vec{u}\|_{J^1} = \|\nabla \times \vec{u}\|$ , где  $\vec{u}, \vec{v} \in J^1(\Omega)$ .

В леммах 1.2.1 и 1.2.2 доказываются вспомогательные результаты об эквивалентности норм и свойств оператора  $\nabla \times$  для элементов пространства  $J^1(\Omega)$ . Далее рассматривается уравнение

$$P_{J^1}(R(\vec{A}) - \vec{A}_f) = 0,$$

и доказывается теорема 1.2.3.

### Теорема 1.2.3

Если выполняется неравенство (11), то

1)  $P_{J^1}R : J^1(\Omega) \rightarrow J^1(\Omega)$  - сильно монотонный и липшиц-непрерывный оператор, то есть для  $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \in J^1(\Omega)$  выполняется неравенство

$$(P_{J^1}(R(\vec{A}_1) - R(\vec{A}_2)), \vec{A}_1 - \vec{A}_2)_{J^1} \geq \nu_* \|\vec{A}_1 - \vec{A}_2\|_{J^1}^2,$$

а также

$$\|P_{J^1}(R(\vec{A}_1) - R(\vec{A}_2))\|_{J^1} \leq (2 - \nu_*) \|\vec{A}_1 - \vec{A}_2\|_{J^1}.$$

2) В предположениях теоремы 1.2.2 оператор  $P_{J^1}R'(\vec{A}) : J^1(\Omega) \rightarrow J^1(\Omega)$  непрерывно обратим и удовлетворяет условию Липшица по  $\vec{A}$ . При этом для  $\vec{A}, \vec{A}_+ \in J^1(\Omega)$  выполняются следующие неравенства:

$$\|P_{J^1}R'(\vec{A})\vec{A}_+\|_{J^1} \geq \nu_* \|\vec{A}_+\|_{J^1},$$

$$\|P_{J^1}(R'(\vec{A}_1) - R'(\vec{A}_2))\|_{J^1} \leq \gamma \|\vec{A}_1 - \vec{A}_2\|_{J^1},$$

где  $\gamma = \text{const}$ .

Согласно методу Галёркина, уравнению (10) соответствует система

$$P_{J_m^1}(R(\vec{A}_m) - \vec{A}_f) = 0,$$

где  $J_m^1$  -  $m$ -мерное линейное подпространство в  $J^1(\Omega)$  с нормой, индуцированной из  $J^1(\Omega)$ , базисом  $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ , и

$$\vec{A}_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \vec{u}_i.$$

Из теорем общей теории для эллиптических задач с монотонными операторами следует существование единственного решения уравнения (10) и сходимость приближённого решения к точному решению уравнения, а также локальная сходимость итерационного процесса метода Ньютона.

Из определения нормы  $J^1(\Omega)$  следует, что уравнение (10) эквивалентно удобной для численной реализации комбинированной  $m$ -мерной системе

$$\int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{A}_m \cdot \nabla \times \vec{u}_i dx + \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \nabla \times \vec{u}_i \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} (\vec{U}_{J_m} \cdot \vec{n}) dS_y dS_x = \int_{\Gamma} (\vec{n} \times \vec{u}_i) \cdot \nabla \times \vec{A}_f dS,$$

$$i = 1, 2, \dots, m;$$

здесь  $\vec{U}_{J_m} \equiv (1 - P_{J_m} \nu) \nabla \times \vec{A}_m$ , а проекция  $P_{J_m} \nu \nabla \times \vec{A}_m$  находится из специального уравнения.  $J_m$  - конечномерное подпространство в пространстве  $J(\Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3, \nabla \cdot \vec{u} = 0\}$ .

В § 1.3 исследуется интегральное уравнение для скалярного потенциала. В случае, когда  $\vec{F} = 0$ , в задаче (9) можно ввести скалярный потенциал  $\varphi$  по формуле  $\vec{Z} = \nabla \varphi$ . Он удовлетворяет уравнению

$$T(\varphi) \equiv \varphi(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{U}(\varphi) \cdot \nabla \frac{1}{r} dy = \varphi_f(x), \quad x \in \Omega. \quad (12)$$

Здесь  $\vec{U}(\varphi) = (k(x, \nabla \varphi) - 1) \nabla \varphi$ , а  $\varphi_f$  - заданная функция,  $\varphi_f \in L_2(\Omega)$ . Предполагается, что  $1 < k \leq k^*$ ,  $k^* = \text{const}$ .

Пусть  $G_1(\Omega)$  - гильбертово пространство:  $G_1(\Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} = \nabla \psi, \psi \in W_2^1(\Omega)\}$ , через  $A_0 : G_1(\Omega) \rightarrow G_1(\Omega)$  обозначим интегральный оператор

$$(A_0 \vec{u})(x) \equiv \nabla \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla \frac{1}{4\pi r} dy.$$

Известно, что оператор  $A_0$  самосопряжён и положительно определён. Кроме того,

$$\lambda_1 \leq \|A_0\| \leq \lambda_2 \leq 1, \quad \lambda_k = \text{const}, \lambda_k > 0, \quad k = 1, 2.$$

Учитывая эти свойства оператора  $A_0$ , в  $G_1(\Omega)$  удобно ввести скалярное произведение

$$(\vec{u}, \vec{v})_* = (A_0^{-1} \vec{u}, \vec{v}).$$

Для соответствующей нормы имеем

$$\|\vec{u}\| \leq \|\vec{u}\|_* \leq \lambda_1^{-1} \|\vec{u}\|.$$

В пространстве  $W_2^1(\Omega)$  введём скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)_\beta = \beta(\varphi, \psi) + (\nabla\varphi, \nabla\psi)_*,$$

где  $\beta = const, \beta > 0, \varphi, \psi \in W_2^1(\Omega)$ , с соответствующей нормой  $\|\cdot\|_\beta^2 = (\cdot, \cdot)_\beta$ .

Далее предположим, что выполняются неравенства

$$\|\vec{U}_1 - \vec{U}_2\| \leq (k^* - 1)\|\vec{Z}_1 - \vec{Z}_2\|, \quad (13)$$

$$(\vec{U}_1 - \vec{U}_2, \vec{Z}_1 - \vec{Z}_2) \geq 0, \quad (14)$$

где  $\vec{U}_i, \vec{Z}_i \in (L^2(\Omega))^3, i = 1, 2$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.3.1**

Если выполняются неравенства (13) и (14), то

1)  $T$  является сильно монотонным оператором, то есть для любых  $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^1(\Omega)$

$$(T(\varphi_1) - T(\varphi_2), \varphi_1 - \varphi_2)_\beta \geq \chi_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\beta^2,$$

где  $\beta, \chi_2$  - положительные константы;

2)  $T$  является липшиц-непрерывным оператором, то есть для любых  $\varphi_1, \varphi_2 \in W_2^1(\Omega)$

$$\|T(\varphi_1) - T(\varphi_2)\|_\beta \leq l_2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\beta,$$

где  $\beta, l_2$  - положительные константы.

Для решения уравнения (12) методом Ньютона определяется производная Фреше

$$T'(\varphi)\varphi_+ \equiv \varphi_+ + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} (V'(\vec{Z}) - 1)\vec{Z}_+ \cdot \nabla \frac{1}{r} dy,$$

где  $\vec{Z}_+ = \nabla\varphi_+, V'(\vec{Z}) = \{\partial V_i / \partial Z_j\}_{i,j=1,2,3}$ . В теореме 1.3.2 формулируются условия при которых решение уравнения (12) можно получить с помощью итерационного процесса Ньютона.

Для дискретизации уравнения (12) по методу Галёркина рассматривается гильбертово пространство  $\tilde{H}^1(\Omega)$ , состоящее из элементов пространства  $W_2^1(\Omega)$ , для которых выполняется хотя бы одно из условий

$$\int_{\Gamma_0} \psi dS = 0, \quad \text{или} \quad \int_{L_0} \psi dl = 0,$$

где  $\Gamma_0$  - часть границы  $\Gamma$ , а  $L_0$  - незамкнутая кривая в области  $\Omega$ , со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\tilde{H}^1} = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_*.$$

Пусть  $\tilde{H}_m^1$  -  $m$ -мерное линейное подпространство  $\tilde{H}^1$  с базисом  $\psi_1, \dots, \psi_m$  и нормой из  $\tilde{H}^1$ . Тогда для аппроксимации Галёркина  $\varphi_m = \sum_{i=1}^m b_i \psi_i$  получим уравнение

$$P_{\tilde{H}_m^1}(T(\varphi_m) - \varphi_f) = 0, \quad (15)$$

где через  $P_{\tilde{H}_m^1}$  обозначен оператор проектирования  $\tilde{H}^1$  на  $\tilde{H}_m^1$ .

Уравнение (15) эквивалентно  $m$ -мерной объединённой системе

$$\int_{\Omega} k \nabla \varphi_m \cdot \nabla \psi_i dx + \int_{\Gamma} \vec{n} \times \nabla \psi_i \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} (\vec{U}_{(G_1)_m} \times \vec{n}) dS_y dS_x = \int_{\Gamma} \psi_i \vec{n} \cdot \nabla \varphi_f dS,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\vec{U}_{(G_1)_m} \equiv (P_{(G_1)_m} k - 1) \nabla \varphi_m$ , а проекция  $P_{(G_1)_m} k \nabla \varphi_m$  находится из специального уравнения.

Учитывая свойства операторов проектирования, доказываются теоремы 1.3.3 и 1.3.4.

### Теорема 1.3.3

При выполнении условий теоремы 1.3.1 операторы  $P_{\tilde{H}_1} T : \tilde{H}^1 \rightarrow \tilde{H}^1$  и  $P_{\tilde{H}_m} T : \tilde{H}_m^1 \rightarrow \tilde{H}_m^1$  являются сильно монотонными и липшиц-непрерывными.

### Теорема 1.3.4

При выполнении условий теоремы 1.3.2 производные Фреше  $P_{\tilde{H}_1} T' : \tilde{H}^1 \rightarrow \tilde{H}^1$  и  $P_{\tilde{H}_m} T' : \tilde{H}_m^1 \rightarrow \tilde{H}_m^1$  являются положительно определёнными и липшиц-непрерывными.

Из теорем 1.3.3 и 1.3.4 следует не только существование и сходимость приближённых решений к точному, но также и сходимость метода последовательных приближений и метода Ньютона.

В § 1.4 рассматривается класс комбинированных систем уравнений для нелинейной задачи (9), полученный с помощью введения вспомогательного вектора. Для простоты изложения предполагается, что граница  $\Gamma$  является более гладкой, чем предполагалось раньше, и в каждой точке имеет непрерывный вектор нормали.

Для векторов  $\vec{V}$  и  $\vec{Z}$  имеем

$$\nabla \times \vec{Z} = \vec{F}, \quad \nabla \cdot \vec{V} = f, \quad \vec{V} = k \vec{Z}, \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

где функция  $k$  задана либо как  $k = k(x, \vec{V})$ , либо как  $k = k(x, \vec{Z})$ . Используя формулу Грина в области  $\Omega_1$  для векторов  $\vec{V}$ ,  $\vec{Z}$ , получаем

$$\vec{g}(x) = -\nabla \int_{\Gamma} \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS_y + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\vec{Z} \times \vec{n}}{4\pi r} dS_y + \vec{V}, \quad x \in \Omega_1, \quad (17)$$

где  $\vec{n}$  - вектор внешней к  $\Omega$  нормали. Здесь

$$\vec{g}(x) = \nabla \times \int_{\Omega_1} \frac{\vec{F}_1}{4\pi r} dy - \nabla \int_{\Omega_1} \frac{f_1}{4\pi r} dy.$$

Учитывая скачки интегралов в (17) при  $x \rightarrow \Gamma$  и условия связи нормальной компоненты вектора  $\vec{V}$  и тангенциальной компоненты вектора  $\vec{Z}$  при переходе через границу  $\Gamma$ , приходим к граничному соотношению

$$\vec{g}_1(x) = -\nabla \int_{\Gamma} \frac{\vec{V} \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS_y + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\vec{Z} \times \vec{n}}{4\pi r} dS_y + \frac{1}{2} (\vec{n} (\vec{V} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{Z} \times \vec{n})), \quad x \in \Gamma. \quad (18)$$

Здесь

$$\vec{g}_1(x) = \vec{g}(x) - \frac{1}{2} (\vec{n} \Delta f + \Delta \vec{F} \times \vec{n}) + \nabla \int_{\Gamma} \frac{\Delta f}{4\pi r} dS_y + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\vec{n} \times (\Delta \vec{F} \times \vec{n})}{4\pi r} dS_y,$$

а  $\Delta f = f - f_1$ ,  $\Delta \vec{F} = \vec{F} - \vec{F}_1$ .

Таким образом, в общем виде задачу (9) можно сформулировать как задачу с уравнениями (16) и граничным условием (18).

С целью получения в (18) только одного интеграла по  $\Gamma$  вводится вспомогательный вектор-функция  $\vec{P}$ , удовлетворяющий в  $\Omega$  следующим уравнениям:

$$\nabla \times \vec{P} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{P} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (19)$$

Тогда из формулы Грина имеем

$$\alpha(x)\vec{P}(x) = \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\vec{P} \times \vec{n}}{r} dS_y + \nabla \int_{\Gamma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS_y, \quad (20)$$

где  $\alpha(x) = 4\pi$ , если  $x \in \Omega$ , и  $\alpha(x) = 2\pi$ , если  $x \in \Gamma$ . С учётом (18) и (20), задавая для вектора  $\vec{P}$  условия на  $\Gamma$  в виде  $\vec{P} \times \vec{n} = \vec{Z} \times \vec{n}$  или  $\vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n}$ , получим следующие краевые условия к уравнениям (16) и (19):

$$\vec{P} \times \vec{n} = \vec{Z} \times \vec{n}, \quad (\vec{P} + \nabla \int_{\Gamma} \frac{(\vec{V} - \vec{P}) \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS) \times \vec{n} = \vec{g}_1(x) \times \vec{n}, \quad (21)$$

$$\vec{P} \times \vec{n} = \vec{Z} \times \vec{n}, \quad \left(\frac{\vec{B} + \vec{P}}{2} + \nabla \int_{\Gamma} \frac{(\vec{V} - \vec{P}) \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS\right) \cdot \vec{n} = \vec{g}_1(x) \cdot \vec{n}, \quad (22)$$

а также

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \quad \left(\frac{\vec{Z} + \vec{P}}{2} + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{(\vec{Z} - \vec{P}) \times \vec{n}}{4\pi r} dS\right) \times \vec{n} = \vec{g}_1(x) \times \vec{n}, \quad (23)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \quad (\vec{P} + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{(\vec{Z} - \vec{P}) \times \vec{n}}{4\pi r} dS) \cdot \vec{n} = \vec{g}_1(x) \cdot \vec{n}, \quad (24)$$

точно учитывающие поведение решения на бесконечности. Каждая пара краевых условий (21)-(24) содержит только один граничный интегральный оператор и с уравнениями (16), (19) образует четыре различные комбинированные формулировки.

Для одной из них доказывается теорема 1.4.1 о сильной монотонности и липшиц-непрерывности соответствующего оператора и приводится пример численного расчёта плоскопараллельного магнитного поля.

**Вторая глава** диссертации посвящена обоснованию проекционно-сеточных схем для решения нелинейных краевых задач с дифференциальными операторами первого порядка в дивергентной и вихревой формах относительно вектор-функций.

Как известно, общие подходы к решению нелинейных эллиптических задач были заложены Л.В.Канторовичем, М.М.Вайнбергом, Ф.Е.Browder, G.J.Minty, М.К.Гавуриным. Отметим работы Е.П.Жидкова, И.В.Пузынина, а также М.М.Карчевского, А.Д.Ляшко и других представителей этих школ.

Можно выделить два направления в разработке и применении проекционно-сеточных методов с конечными элементами, которые особенно интенсивно развиваются в последнее время. К первому направлению относятся  $h$ -,  $p$ - и  $hp$ - схемы ( $p \geq 2$ ) метода Галёркина с разрывными базисными функциями<sup>6 7</sup>, а ко второму -  $h$ -,  $p$ - и  $hp$ - версии схем с векторными конечными элементами (Whitny's, Nedelec's elements).

<sup>6</sup>Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1977, с. 88-91; 3-е издание, 1989, с.116-122.

<sup>7</sup>В.Cockburn. Discontinuous Galerkin methods. Z. Angew. Math. Mech. v. 83, N 11, 2003, p.731-754.



В диссертации разработаны два эффективных метода построения проекционно-сеточных схем для рассматриваемых нелинейных задач. Первый из них основан на вариационном подходе, а второй - на подходе Бубнова-Галёркина. Предлагаемые методы обеспечивают высокую скорость сходимости и высокое качество получаемых решений за счёт особого выбора гильбертовых пространств, в которых ищутся решения, и построения соответствующих конечно-элементных базисов. Это позволяет значительно минимизировать вычислительные затраты процесса получения решения. В диссертации разработаны алгоритмы построения таких базисов.

Полученные на этой основе конечно-элементные схемы можно отнести к двум типам. Первый предназначен для решения линейных задач. Он характеризуется высоким порядком сходимости, при построении схем нет необходимости проводить интегрирование внутри ячеек, оно осуществляется только по их границам. Матрицы соответствующих алгебраических уравнений являются симметричными и положительно-определёнными. Второй тип можно использовать как для решения линейных, так и нелинейных задач. Особенностью конечно-элементных схем этого типа также является высокий порядок сходимости. При обычных условиях на коэффициенты дифференциальных уравнений соответствующие схемам операторы являются сильно-монотонными и липшиц-непрерывными.

В § 2.1 представлены алгоритмы построения конечно-элементных векторных узловых базисных функций из гильбертовых пространств

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(\Omega) &= \{\vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3 : \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \nabla \times \vec{u} = 0\}; \\ \tilde{U}(\Omega) &= \{\vec{u} \in (L_2(\Omega))^3 : \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \nabla \times \vec{u} \in (L_2(\Omega))^3\}; \\ \tilde{V}(\Omega) &= \{\vec{u} \in (L_2(\Omega))^3 : \nabla \cdot \vec{u} \in L_2(\Omega), \quad \nabla \times \vec{u} = 0\}.\end{aligned}$$

Функции из пространства  $\tilde{Z}(\Omega)$  могут быть выражены в виде градиентов гармонических функций. Поэтому в п. 2.1.1 приводятся алгоритмы генерации гармонических конечно-элементных базисных функций.

Пусть приближённое решение  $u^h$  в каждом конечном элементе  $\omega$  в форме тетраэдра, гексаэдра, пятигранной призмы и т.п. ищется в виде

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m u_i^h N_i(x), \quad (25)$$

где  $u_i^h$ ,  $i = 1, \dots, m$ , - значения приближённого решения в узлах  $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$  на границе  $\partial\omega$ , а  $N_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , - базисные функции.

Для нахождения гармонической базисной функции  $N_i(x)$  такой, что  $\nabla \cdot \nabla N_i = 0$ , согласно первому алгоритму, используется метод коллокации. Представим её в виде  $N_i(x) = \sum_{j=1}^m a_j^{(i)} f_g(j)(x)$ , где  $a_j^{(i)}$  - неизвестные коэффициенты,  $f_g(j)$  - индексная функция,  $j = 1, \dots, m$ , а в качестве  $f_g(j)$  выбираются функции

$$p_{n+1, k+1}(x) = d_{nk}(r/r_0)^n \cos(k\varphi) P_n^k(\cos\theta), \quad q_{n+1, k+1}(x) = d_{nk}(r/r_0)^n \sin(k\varphi) P_n^k(\cos\theta) \quad (26)$$

при  $x = (r, \theta, \varphi)$ ,  $d_{nk} = (2n+1)(n-k)!/(n+k)!$ , которые вычисляются по рекуррентным формулам и входят в общее представление решения задачи Дирихле для оператора Лапласа внутри сферы радиуса  $r_0$ . Неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^m a_j^{(i)} f_g(j)(x_l) = \delta(x_i, x_l), \quad l = 1, \dots, m.$$

Индексная функция  $g(j)$  подбирается так, чтобы система была разрешима. Точность аппроксимаций с помощью  $N_i(x)$  определяется степенями гармонических многочленов, которые входят в функции  $f_g(j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , и для которых аппроксимационная формула (25) точна.

По второму алгоритму  $N_i(x) = \sum_{j=1}^m b_j^{(i)} f_j(x)$ , где  $f_j$  выбираются последовательно из функций (26), а неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^m b_j^{(i)} \int_{\partial\omega} f_j f_l dS = \int_{\partial\omega} L_i f_l dS, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

где  $L_i$  - лагранжевая граничная базисная функция. Точность приближений функциями  $N_i(x)$  зависит от точности аппроксимаций функциями  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Важным свойством конечных элементов с гармоническими базисными функциями является отсутствие внутренних узлов даже при использовании аппроксимаций высокого порядка.

В п. 2.1.2 представлены два алгоритма построения конечно-элементных векторных узловых базисных функции для аппроксимаций высокого порядка из пространств  $Z(\Omega)$ ,  $\tilde{V}(\Omega)$ ,  $\tilde{U}(\Omega)$ . В обоих случаях используется тот факт, что как и сами гармонические функции, их градиенты обладают хорошими аппроксимационными свойствами.

Пусть приближённое решение  $\vec{u}$  ищется в виде разложения по базисным функциям  $\vec{W}_j^{(k)}$

$$\vec{u}(x) = \sum_{k=1}^3 \vec{i}_k \left( \sum_{j=1}^m u_{k,j} N_j(x) \right) = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^m u_{k,j} \vec{W}_j^{(k)}(x), \quad (27)$$

где  $u_{k,j}$  - значения приближённого решения в узлах  $\{x_j\}_{j=1, \dots, m}$  на границе  $\partial\omega$ .

Согласно первому алгоритму, базисные функции ищутся в виде  $\vec{W}_i^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \nabla f_{g(j)}(x)$ , где  $a_j^{(k,i)}$  - неизвестные коэффициенты,  $f_{g(j)}$  - гармонические функции из (26),  $g(j)$  - индексная функция. Неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы

$$\sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \frac{\partial f_{g(j)}}{\partial x_k}(x_l) = \delta_{il}, \quad \sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \frac{\partial f_{g(j)}}{\partial x_{k1}}(x_l) = 0, \quad \sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \frac{\partial f_{g(j)}}{\partial x_{k2}}(x_l) = 0, \quad (28)$$

$$x_l \in \partial\omega, \quad k \neq k1, \quad k \neq k2, \quad k1 \neq k2, \quad 1 \leq k, k1, k2 \leq 3, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Индексная функция  $g$  подбирается так, чтобы система была разрешима. Точность аппроксимаций такими базисными функциями зависит от степени гармонических многочленов, градиенты которых участвуют в определении коэффициентов  $a_j^{(k,i)}$ .

Во втором алгоритме базисные функции ищутся в виде  $\vec{W}_i^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \nabla f_{g(j)}(x)$ , где по правилу построения среднеквадратичного приближения коэффициенты  $b_j^{(k,i)}$  находятся из системы

$$\sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \int_{\partial\omega} \nabla f_{g(j)} \cdot \nabla f_{g(l)} dS = \int_{\partial\omega} L_i \frac{\partial f_{g(l)}}{\partial x_k} dS, \quad l = 1, 2, \dots, 3m. \quad (29)$$

Здесь  $g(j) = j + 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, 3m$ , если  $f_1 = 1$ . Точность аппроксимаций в этом случае зависит от точности приближений лагранжевыми граничными базисными функциями  $L_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ).

Так же, как и в предыдущем случае, в конечных элементах с векторными гармоническими базисными функциями отсутствуют внутренние узлы даже в случае аппроксимаций высокого порядка.

Далее приводятся алгоритмы построения конечно-элементного базиса из гильбертовых пространств  $\tilde{U}(\Omega)$  и  $\tilde{V}(\Omega)$ . Сначала рассматривается случай пространства  $\tilde{V}(\Omega)$ . Пусть приближённое решение  $\vec{u}$  ищется в виде (27), где  $u_{k,j}$  - значения приближённого решения в узлах  $\{x_j\}_{j=1,\dots,m}$  внутри и на границе  $\omega$ .

Согласно первому алгоритму, базисные функции представим в виде  $\vec{W}_i^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{3m} a_j^{(k,i)} \nabla h_{g(j)}(x)$ , где  $a_j^{(k,i)}$  - неизвестные коэффициенты,  $g(j)$  - индексная функция,  $h_{g(j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , - функции из множества

$$\{1; x_1; x_2; x_3; x_1x_2; x_1x_3; x_2x_3; x_1x_2x_3; x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots\}. \quad (30)$$

Неизвестные коэффициенты находятся в результате решения системы, аналогичной (28).

Во втором алгоритме базисные функции определяются в виде  $\vec{W}_i^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{3m} b_j^{(k,i)} \nabla h_{g(j)}(x)$ , где по правилу построения среднеквадратичного приближения коэффициенты  $b_j^{(k,i)}$  находятся из системы, аналогичной (29). В обоих алгоритмах точность аппроксимаций базисными функциями  $\vec{W}_i^{(k)}(x)$  зависит от степени многочленов (30), градиенты которых участвуют в определении коэффициентов  $a_j^{(k,i)}$  и  $b_j^{(k,i)}$ .

Базисные функции из пространства  $\tilde{U}(\Omega)$  формируются из базисных функций  $\vec{W}_i^{(k)} \in \tilde{V}(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

В п. 2.1.4 дано более подробное описание конечных элементов с гармоническими функциями формы из п. 2.1.1. В таблице 1 приведены такие характеристики конечных элементов, как вид ячейки  $\omega$ , число узлов  $m$  и наибольший порядок  $d$  гармонических многочленов, которые точно приближаются соответствующими базисными функциями. Для стандартного симплекса  $S = \{x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$  и пятигранной призмы  $T = \{x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1; -1 \leq x_3 \leq 1\}$  со стандартным расположением узлов на границах ячеек оба алгоритма дают одинаковые результаты. Однако, как видно из таблицы 2, в случае стандартного куба  $[-1, 1]^3$  первый алгоритм демонстрирует более высокую точность.

**Таблица 1**

	$S$				$T$	
$m$	10	20	34	52	18	38
$d$	2	3	4	5	2	4

**Таблица 2**

	алгоритм 1			алгоритм 2		
$m$	26	56	98	26	56	98
$d$	3	5	7	2	3	4

Приведём пример сравнения сходимости приближённых решений в трёхмерной задаче интерполяции магнитного поля, когда в качестве конечных элементов используются последовательности обычных лагранжевых (параллелепипеды с 27, 64, 125 узлами) и гармонических (параллелепипеды с 26, 56, 98 узлами) элементов. На рис. 1 представлено поведение максимума модуля относительной погрешности  $\delta^{(1)}$  в зависимости от общего числа узлов  $N$ , используемого при интерполяции на адаптивной сетке.

Как видно из рис.1, лучшая точность  $\approx 0.1 \cdot 10^{-4}$  достигается на 98 узловых гармонических элементах при общем числе точек интерполяции 16358. Это на 37 %

точек меньше, чем при интерполяции 125 узловыми лагранжевыми элементами с меньшей точностью.

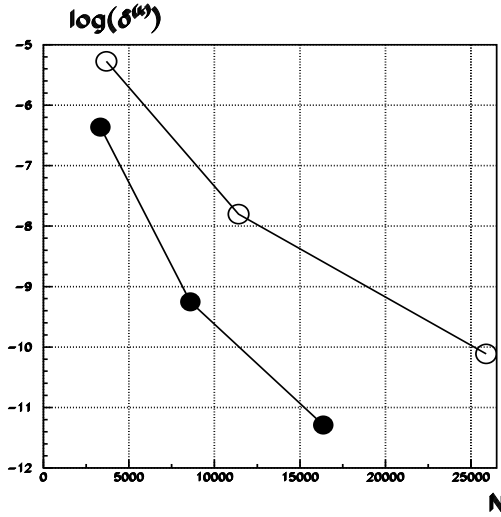


Рис. 1. Сходимость интерполяций для параллелепипедов (слева - направо, сверху - вниз):  
 ○ - 27, 64, 125 узловых лагранжевые;  
 ● - 26, 56, 98 узловых гармонические (первый метод).

В § 2.2 представлены обобщённые формулировки для численного решения краевых задач с системой из двух уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах относительно вектор-функций. Рассматриваются два частных случая задачи (1),(2), которые являются наиболее распространёнными на практике:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\tilde{a}_1 \vec{v}) = f, & \nabla \times \vec{v} = \vec{F}, & x \in \Omega; \\ \vec{v} = 0, & & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{w} = f, & \nabla \times (\tilde{a}_2 \vec{w}) = \vec{F}, & x \in \Omega; \\ \vec{w} = 0, & & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (32)$$

Выбор постановки задачи зависит от свойств коэффициентов  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ . Предполагается, что правые части удовлетворяют необходимым условиям для разрешимости задач.

Для построения обобщённой формулировки задачи (31) используется вариационный метод. Пусть  $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_1(x, \vec{v})$  - заданная функция,  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\vec{F} \in (L_2(\Omega))^3$  и  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ . Решение задачи ищется в пространстве  $W_{2,0}^1(\Omega)^3$ :

$$W_{2,0}^1(\Omega)^3 = \{ \vec{u} \in (L_2(\Omega))^3 : \partial \vec{u} / \partial x_k \in (L_2(\Omega))^3, k = 1, 2, 3; \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Как известно, такое пространство позволяет использовать две эквивалентные нормы:

$$\| \vec{u} \|_{W_{2,0}^1(\Omega)^3}^2 = \sum_{k=1}^3 (\partial \vec{u} / \partial x_k, \partial \vec{u} / \partial x_k)_{(L_2(\Omega))^3}; \quad \| \vec{u} \|_{W_{2,0}^1(\Omega)^3}^2 = \| \nabla \cdot \vec{u} \|_{(L_2(\Omega))^3}^2 + \| \nabla \times \vec{u} \|_{(L_2(\Omega))^3}^2.$$

Очевидно, что решение задачи (31) обеспечивает минимум функционала

$$F_1(\vec{v}) \equiv (1/2) \int_{\Omega} [(\nabla \cdot (\tilde{a}_1 \vec{v}) - f)^2 + (\nabla \times \vec{v} - \vec{F})^2] d\Omega.$$

Предположим, что для коэффициента уравнения выполняются следующие условия:

$$c_1 \| \nabla \cdot \vec{v} \|_{L_2(\Omega)} \leq \| \nabla \cdot (\tilde{a}_1 \vec{v}) \|_{L_2(\Omega)} \leq c_2 \| \nabla \cdot \vec{v} \|_{L_2(\Omega)}, \quad (33)$$

$$\| \nabla \cdot (\tilde{a}_1(x, \vec{v}_1) \vec{v}_1) - \nabla \cdot (\tilde{a}_1(x, \vec{v}_2) \vec{v}_2) \|_{L_2(\Omega)} \leq c_3 \| \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \|_{W_{2,0}^1(\Omega)^3}, \quad (34)$$

где  $c_i > 0$ ,  $c_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а  $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ .

Справедлива теорема.

**Теорема 2.2.1**

Пусть  $\vec{v}_+ = t\vec{v}_2 + (1-t)\vec{v}_1$ ,  $t \in (0, 1)$  и  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ . Если для коэффициента  $\tilde{a}_1$  выполняются неравенства (33), (34) и справедливо представление

$$\tilde{a}_1(x, \vec{v}_+)\vec{v}_+ = t\tilde{a}_1(x, \vec{v}_2)\vec{v}_2 + (1-t)\tilde{a}_1(x, \vec{v}_1)\vec{v}_1,$$

то при  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\vec{F} \in (L_2(\Omega))^3$  функционал  $F_1$ , определённый на  $W_{2,0}^1(\Omega)^3$ , является непрерывным, коэрцитивным и строго выпуклым.

При выполнении (33), а также неравенства

$$\|\nabla \cdot (u'(\tilde{a}_1, \vec{v}, \vec{u})\vec{u})\|_{L_2(\Omega)} \leq c_4 \|\vec{u}\|_{W_{2,0}^1(\Omega)^3},$$

где  $u'(\tilde{a}_1, \vec{v}, \vec{u}) = \{\partial(\tilde{a}_1(x, \vec{v})v_i)/\partial u_j\}_{i,j=1,2,3}$ ,  $\vec{v}, \vec{u} \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ ,  $c_4 = \text{const}$ , доказывается лемма 2.2.1 о том, что градиент функционала  $F_1$ , определяемый равенством

$$(A_1\vec{v}, \vec{u})_{(L_2(\Omega))^3} = \int_{\Omega} [(\nabla \cdot (\tilde{a}_1(x, \vec{v})\vec{v}) - f)\nabla \cdot (u'(\tilde{a}_1, \vec{v}, \vec{u})\vec{u}) + (\nabla \times \vec{v} - \vec{F}) \cdot \nabla \times \vec{u}]d\Omega,$$

задаёт отображение из  $W_{2,0}^1(\Omega)^3$  в  $(W_{2,0}^1(\Omega)^3)^*$ .

При выполнении условий теоремы 2.2.1 и леммы 2.2.1 из известных теорем о связи метода Рунге и метода Галёркина следует, что обобщённая формулировка для задачи (31) в виде уравнения

$$(A_1\vec{v}, \vec{u}) = 0, \quad \forall \vec{u} \in W_{2,0}^1(\Omega)^3,$$

имеет единственное решение  $\vec{v} \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ . Кроме того, при каждом  $n$  это уравнение для  $\forall \vec{u}_n \in (W_{2,0}^1(\Omega))^3_n$  имеет единственное галёркинское приближение  $\vec{u}_n \in (W_{2,0}^1(\Omega))^3_n$ .

Если в задаче (31)  $\vec{F} = 0$ , то для её эффективного решения в полученной обобщённой формулировке рекомендуется использовать базис из пространства  $\tilde{V}(\Omega)$ , удовлетворяющий краевым условиям.

Далее вариационный метод используется для построения обобщённой формулировки задачи (32). Предполагается, что  $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_2(x, \vec{w})$  - заданная функция,  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\vec{F} \in (L_2(\Omega))^3$  и  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ . Решение задачи ищется в пространстве  $W_{2,0}^1(\Omega)^3$ . Функционал для задачи (32) имеет вид

$$F_2(\vec{v}) \equiv (1/2) \int_{\Omega} [(\nabla \cdot (\vec{w}) - f)^2 + (\nabla \times (\tilde{a}_2\vec{w}) - \vec{F})^2]d\Omega.$$

Пусть для коэффициента уравнения выполняются следующие условия:

$$c_5 \|\nabla \times \vec{w}\|_{(L_2(\Omega))^3} \leq \|\nabla \times (\tilde{a}_2\vec{w})\|_{(L_2(\Omega))^3} \leq c_6 \|\nabla \times \vec{w}\|_{(L_2(\Omega))^3}, \quad (35)$$

$$\|\nabla \times (\tilde{a}_2(x, \vec{w}_1)\vec{w}_1) - \nabla \times (\tilde{a}_2(x, \vec{w}_2)\vec{w}_2)\|_{(L_2(\Omega))^3} \leq c_7 \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{W_{2,0}^1(\Omega)^3}, \quad (36)$$

где  $c_i > 0$ ,  $c_i = \text{const}$ ,  $i = 5, 6, 7$ , а  $\vec{w}, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ .

Справедлива теорема.

**Теорема 2.2.2**

Пусть  $\vec{w}_+ = t\vec{w}_2 + (1-t)\vec{w}_1$ ,  $t \in (0, 1)$  и  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ . Если для коэффициента  $\tilde{a}_2$  выполняются неравенства (35), (36) и справедливо представление

$$\tilde{a}_2(x, \vec{w}_+)\vec{w}_+ = t\tilde{a}_2(x, \vec{w}_2)\vec{w}_2 + (1-t)\tilde{a}_2(x, \vec{w}_1)\vec{w}_1,$$

то при  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\vec{F} \in (L_2(\Omega))^3$  функционал  $F_2$ , определённый на  $W_{2,0}^1(\Omega)^3$ , является непрерывным, коэрцитивным и строго выпуклым.

Обобщённая формулировка для задачи (32) получается с помощью дифференцирования функционала  $F_2$ . При выполнении (35) и неравенства

$$\|\nabla \times (v'(\tilde{a}_2, \vec{w}, \vec{u})\vec{u})\|_{L_2(\Omega)} \leq c_8 \|\vec{u}\|_{W_{2,0}^1(\Omega)^3},$$

где  $v'(\tilde{a}_2, \vec{w}, \vec{u}) = \{\partial(\tilde{a}_2(x, \vec{w})w_i)/\partial u_j\}_{i,j=1,2,3}$ ,  $\vec{w}, \vec{u} \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ ,  $c_8 = const$ , доказывается лемма 2.2.2 о том, что градиент функционала  $F_2$ , определяемый равенством

$$(A_2\vec{w}, \vec{u})_{(L_2(\Omega))^3} = \int_{\Omega} [(\nabla \cdot \vec{w} - f)\nabla \cdot \vec{u} + (\nabla \times (\tilde{a}_2(x, \vec{w})\vec{w}) - \vec{F}) \cdot \nabla \times (v'(\tilde{a}_2, \vec{w}, \vec{u})\vec{u})] d\Omega,$$

задаёт отображение из  $W_{2,0}^1(\Omega)^3$  в  $(W_{2,0}^1(\Omega)^3)^*$ .

При выполнении условий теоремы 2.2.2 и леммы 2.2.2 обобщённая формулировка для задачи (32) в виде уравнения

$$(A_2\vec{w}, \vec{u}) = 0, \quad \forall \vec{u} \in W_{2,0}^1(\Omega)^3,$$

имеет единственное решение  $\vec{w} \in W_{2,0}^1(\Omega)^3$ . Кроме того, при каждом  $n$  это уравнение для  $\forall \vec{u}_n \in (W_{2,0}^1)_n(\Omega)^3$  имеет единственное галёркинское приближение  $\vec{w}_n \in (W_{2,0}^1)_n(\Omega)^3$ .

Если в задаче (32)  $f = 0$ , то для её эффективного решения в полученной обобщённой формулировке рекомендуется использовать удовлетворяющий краевым условиям базис из пространства  $\tilde{U}(\Omega)$ .

В § 2.3 представлены проекционно-сеточные схемы для решения нелинейных задач вида (31),(32) относительно вектор-функций, использующие предложенные в п.2.1.3 функции формы из пространства  $\tilde{V}(\Omega)$ . Основой для построения этих схем является подход Бубнова-Галёркина.

Здесь строится проекционно-сеточная схема относительно вектор-функции для решения нелинейной краевой задачи с внутренней границей:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0, \quad \nabla \times \vec{Z} = 0, \quad \vec{V} = p\vec{Z}, \quad x \in \Omega; \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0, \quad \nabla \times \vec{Z} = \vec{F}'(x), \quad \vec{V} = \vec{Z}, \quad x \in \Omega'; \\ [\vec{n} \cdot \vec{V}] &= 0, \quad [\vec{n} \times \vec{Z}] = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad \vec{V} = \vec{Z} = 0, \quad x \in \Gamma_0. \end{aligned} \quad (37)$$

Предполагается, что граница  $\partial\Omega$  является общей для областей  $\Omega$  и  $\Omega'$ , причём  $\Omega'$  окружает  $\Omega$  так, что  $\Gamma_0$  является удалённой от  $\Omega$  частью границы  $\partial\Omega'$ . Важно отметить, что область  $\Omega$  может быть составлена из нескольких несвязных областей. Функция  $p$  задана либо как  $p = p(x, \vec{V})$ , либо как  $p = p(x, \vec{Z})$ . Через  $[\vec{n} \cdot \vec{V}]$  и  $[\vec{n} \times \vec{Z}]$  обозначена разность пределов соответствующих функций при стремлении точки  $x$  на границу  $\partial\Omega$  изнутри и извне области  $\Omega$ . Относительно нелинейного коэффициента задачи предполагается, что выполняются обычные неравенства.

Дискретизованная обобщённая формулировка задачи (37) обеспечивает выполнение условий на внутренней границе для нормальных и тангенциальных компонент искомой вектор-функции. С базисом из пространства  $\tilde{V}(\Omega)$  при формировании матрицы не требуется вычисления слагаемых, содержащих ротор.

В этом пункте доказана теорема 2.3.2 о сходимости итерационного процесса, с помощью которого получается приближённое решение. При реализации итерационного процесса на каждом шаге итерации решается задача с симметричной, положительно-определённой матрицей. Полученное приближённое решение точно удовлетворяет

однородному уравнению с оператором ротора. Отметим, что для приближённого решения и нелинейного коэффициента можно использовать аппроксимации высокого порядка. Существует также возможность построения адаптивных приближений отдельно для каждой компоненты искомой вектор-функции при помощи векторных базисных функций. Для вычисления карты поля не требуется специальной интерполяции с использованием точек суперсходимости, а получаемая точность будет такой же, как точность аппроксимации приближённого решения при построении проекционно-сеточной схемы.

**Третья глава** диссертации посвящена методам и алгоритмам, существенно повышающим эффективность решения как прямых, так и обратных нелинейных задач магнитостатики. Среди публикаций, посвящённых построению проекционно-сеточных схем для задач магнитостатики, отметим работы Н.И.Дойникова, С.Е.Сычевского, Е.А.Ламзина с соавторами, J.C.Coulomb с соавторами, J.Simkin, C.W.Trowbridge с соавторами, M.J.Friedman, J.E.Pasciak, I.D.Mayergouyz с соавторами, Е.П.Жидкова, С.Б.Ворожцова, П.Г.Акишина, Б.Н.Хоромского, Э.А.Айрына с соавторами, А.Г.Дайковского с соавторами, S. Russenschuck с соавторами и других исследователей.

В § 3.1 предлагается новый метод вычисления функции на липшицевой границе трёхмерного тела по заданному градиенту. В качестве примера применения метода приведём следующую нелинейную краевую задачу. Пусть область  $\Omega' \subset \mathbf{R}^3$  ограничена липшицевой границей и  $\Omega' = \Omega \cup \Omega_1$ , где области  $\Omega$  и  $\Omega_1$  разделяются внутренней границей  $\Gamma \subset \Omega'$ , которая также является липшицевой. Требуется найти функции  $u, u_1$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(x, u, \nabla u)) + a(x, u, \nabla u) &= 0, \quad x \in \Omega; \\ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} &= f, \quad x \in \Omega_1; \\ u - u_1 &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 (a_i(x, u, \nabla u) - \sum_{j=1}^3 \hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} - b_i u_1) \cdot \alpha_i = 0, \quad x \in \Gamma; \\ u = \bar{u}(x), \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma; \quad (\sum_{i,j=1}^3 \hat{a}_{ij}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 b_i u_1) \cdot \hat{\alpha}_i &= \bar{u}_1(x), \quad x \in \partial\Omega_1 \setminus \Gamma, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\nabla u$  - градиент функции  $u$ , а  $\alpha_i, \hat{\alpha}_i$  - компоненты векторов внешних нормалей к соответствующим областям. При этом равенства на границе понимаются в смысле следов соответствующих функций. Предполагается, что все коэффициенты в уравнениях вещественные и вместе с заданными функциями  $f, \bar{u}, \bar{u}_1$  удовлетворяют условиям, необходимым для однозначной разрешимости приведённой задачи. Если в области  $\Omega_1$  известно частное решение - достаточно гладкая вектор-функция  $\vec{G}$ , компоненты которой  $G_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют уравнению

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{a}_{ij}(x) \cdot G_j) + \sum_{i=1}^3 b_i \cdot G_i = f, \quad x \in \Omega_1,$$

то можно ввести функцию  $\phi$ , такую, что  $\nabla \phi = \vec{G}$  в  $\Omega_1$ . Эта функция будет являться частным решением уравнения в области  $\Omega_1$ . Тогда задачу (38) можно сформулировать

относительно функций  $u$  в области  $\bar{\Omega}$  и  $\hat{u}_1 = u_1 - \phi$  в области  $\bar{\Omega}_1$ . Причём в  $\Omega_1$  получается однородное уравнение для функции  $\hat{u}_1$ . Поэтому если вектор  $\vec{G}$  вычисляется более точно и быстро, чем функция  $f$  в области  $\Omega_1$ , и при этом упрощается процесс построения трёхмерной сетки, то переформулировка задачи для неизвестных  $u, \hat{u}_1$  является оправданной. Однако точность решения новой задачи зависит от точности вычисления функции  $\phi$ , которая входит в условия на границе  $\Gamma$ .

Для нахождения функции  $\phi$  вводится пространство функций

$$W_2^1(\Gamma) = \{u : u \in L_2(\Gamma), \nabla_\tau u \in (L_2(\Gamma))^2\},$$

где в локальной правой декартовой системе координат с ортами  $\vec{s}, \vec{t}, \vec{n}$ , направленными вдоль касательной, бинормали и внешней нормали,

$$\nabla_\tau u = \vec{s}\partial u/\partial s + \vec{t}\partial u/\partial t.$$

В  $W_2^1(\Gamma)$  выделяется класс функций  $W_{2,0}^1(\Gamma)$ , для которых выполняется хотя бы одно из условий

$$\int_{\Gamma_0} u dS = 0 \quad \text{или} \quad \int_{l_0} u dl = 0,$$

здесь  $\Gamma_0$  - часть границы  $\Gamma$ , а  $l_0$  - некоторая незамкнутая кривая на  $\Gamma$ . Для функций  $u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma)$  можно ввести скалярное произведение и соответствующую норму

$$(u, v)_{W_{2,0}^1(\Gamma)} = (\nabla_\tau u, \nabla_\tau v)_{(L_2(\Gamma))^2}, \quad \|u\|_{W_{2,0}^1(\Gamma)} = ((u, u)_{W_{2,0}^1(\Gamma)})^{1/2}.$$

Введённая норма эквивалентна норме пространства  $W_2^1(\Gamma)$ .

Функция  $\phi$  находится из обобщённого уравнения

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_\tau \phi \cdot \nabla_\tau v dS + \int_{\Gamma_2} \rho(\vec{G}, |\nabla_\tau \phi|) (\nabla_\tau \phi - \vec{G}_\tau) \cdot \nabla_\tau v dS = \int_{\Gamma_1} \vec{G}_\tau \cdot \nabla_\tau v dS, \quad v \in W_{2,0}^1(\Gamma),$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2$  - непересекающиеся составные части границы  $\Gamma$ , определяемые в зависимости от поведения  $\vec{G} \in K = \{\nabla \phi : \phi \in L_2(\Gamma), \nabla \phi \in (L_2(\Gamma))^3\}$ . Здесь

$$\rho(\vec{G}, |\nabla_\tau \phi|) = 2 - \frac{|G_n|}{|\vec{G} - \nabla_\tau \phi|}.$$

Для исследования этого уравнения вводятся следующие обозначения. Зададим операторы  $B_1, B_2$  с помощью равенств

$$(B_1 u_1, v_1)_{W_{2,0}^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_\tau u_1 \cdot \nabla_\tau v_1 dS, \quad u_1, v_1 \in W_{2,0}^1(\Gamma_1);$$

$$(B_2 u_2, v_2)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} = \int_{\Gamma_2} \rho(\vec{G}, |\nabla_\tau u_2|) (\nabla_\tau u_2 - \vec{G}_\tau) \cdot \nabla_\tau v_2 dS, \quad u_2, v_2 \in W_{2,0}^1(\Gamma_2).$$

Очевидно, что  $B_1 : W_{2,0}^1(\Gamma_1) \rightarrow W_{2,0}^1(\Gamma_1)$  и  $B_2 : W_{2,0}^1(\Gamma_2) \rightarrow W_{2,0}^1(\Gamma_2)$ .

Свойства оператора  $B_2$  сформулированы в следующей лемме.

### **Лемма 3.1.1**

*Оператор  $B_2 : W_{2,0}^1(\Gamma_2) \rightarrow W_{2,0}^1(\Gamma_2)$  является:*



1) *сильно монотонным, то есть выполняется неравенство*

$$(B_2u - B_2v, u - v)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} \geq \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}^2, \quad u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma_2);$$

2) *липшиц-непрерывным, то есть выполняется неравенство*

$$\|B_2u - B_2v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)} \leq \sigma_7 \|u - v\|_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}, \quad u, v \in W_{2,0}^1(\Gamma_2),$$

где  $\sigma_7 = 2 + \max_{x \in \Gamma_2} (1/|G_n|)$ ,  $\vec{G} \in K$ .

На основе леммы 3.1.1 доказывается, что оператор  $B : H \rightarrow H$ , где  $H = W_{2,0}^1(\Gamma) \cap \{W_2^1(\Gamma_1) \times W_2^1(\Gamma_2)\}$ , задаваемый равенством

$$(Bu, v)_H = (B_1u_1, v_1)_{W_{2,0}^1(\Gamma_1)} + (B_2u_2, v_2)_{W_{2,0}^1(\Gamma_2)}$$

для  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2) \in H$ , является сильно монотонным и липшиц-непрерывным. Из общих теорем об уравнениях с такими операторами сразу же получаем однозначную разрешимость обобщённого уравнения задачи и сходимост галёркинских приближений к точному решению. Кроме того, известен итерационный процесс, с помощью которого можно получить это решение.

Предложенный метод вычисления функции на липшицевой границе трёхмерного тела по заданному градиенту по сравнению с "классическим" подходом <sup>8</sup> даёт более быстросходящиеся к точному решению приближения, поскольку использует двумерное интегрирование, а не интегрирование по отрезкам или кривым второго порядка. Кроме того, при решении системы уравнений не происходит возможного накопления ошибки, если градиент задан не точно.

В этом же параграфе приводится алгоритм вычисления функции на липшицевых границах несвязных областей по заданному градиенту для задач магнитостатики. Скалярный потенциал проводников с током  $\varphi^S$  предлагается определять на границах  $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, m$ , несвязных областей из уравнений

$$\nabla \varphi^S = \vec{H}^S(x), \quad x \in \Gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (39)$$

с условием  $\varphi^S(y_k) = \varphi_k^S$ ,  $y_k \in \Gamma_k$ ,  $\varphi^S(y_0)$  – известная величина, где  $y_0$  может не принадлежать границам  $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, m$ . В общем случае точки  $y_k, k = 1, 2, \dots, m$ , связаны с точкой  $y_0$  ломаными  $L_k, k = 1, 2, \dots, m$ , а потенциал  $\varphi^S$  на этих ломаных находится с помощью адаптивного алгоритма из обобщённых уравнений

$$\int_{L_k} \frac{\partial \varphi^S}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} d\tau = \int_{L_k} (\vec{\tau} \cdot \vec{H}^S + \frac{\partial \tilde{\chi}_k}{\partial \tau}) \frac{\partial v}{\partial \tau} d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

где  $v$  – достаточно гладкая функция,  $\tilde{\chi}_k$  – функция, обеспечивающая выполнение условия в точке  $y_0$ , вектор  $\vec{\tau}(x)$  задаёт направление ломаной  $L_k$ . Обобщённые линейные уравнения, соответствующие (39), будут иметь вид

$$\int_{\Gamma_k} \nabla_{\tau} \varphi^S \cdot \nabla_{\tau} v dS = \int_{\Gamma_k} (\vec{H}^S + \nabla_{\tau} \chi_k) \cdot \nabla_{\tau} v dS, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (40)$$

<sup>8</sup>И.Н.Бронштейн, К.С.Семендяев.Справочник по математике,10-е издание,М.: Наука, 1965, с.538-539.

где функции  $v$ ,  $\chi_k$  имеют тот же смысл, что и  $v$ ,  $\tilde{\chi}_k$  в предыдущем уравнении соответственно.

Для решения уравнений (40) адаптивным методом конечных элементов рассматриваются четыре типа четырехугольных элементов. При построении конечно-элементной системы используются лагранжевы элементы с 9-ю узлами (тип 2) и серендиповы элементы с 17-ю узлами (тип 3). Для вспомогательных вычислений применяются лагранжевы элементы с 6-ю (тип 1) и 15-ю (тип 4) узлами. Доказана лемма 3.1.3 об оценках функции интерполянта через старшие производные известной вектор-функции. Эффективность адаптивного алгоритма демонстрируется на модельном примере и на вычислении скалярного потенциала обмотки для большого соленоидального магнита L3 [1].

§ 3.2 диссертации посвящён алгоритмам с контролем точности для решения задач магнитостатики. Разработки алгоритмов контроля точности для проекционно-сеточных методов содержатся в многочисленных работах. Особенно актуальным этот вопрос является для численного решения трёхмерных эллиптических задач с сильно меняющимися решениями, в расчётной области которых содержатся подобласти с неодинаковыми дифференциальными уравнениями. При этом сами подобласти могут иметь сложную конфигурацию. Здесь можно отметить книги С.Г.Михлина, Х.Л.Смолицкого(1965), Н.С.Бахвалова(1975), Н.Н.Калиткина(1978), Г.И.Марчука,В.В.Шайдурова(1979), В.В.Шайдурова(1989), В.Szabo, I.Babuška(1991), Ch.Schwab(1998), О.С.Zienkiewicz, R.T.Taylor(2000), P.Šolin(2006), в которых рассматриваются вопросы, возникающие при построении такого типа алгоритмов и есть ссылки на оригинальные публикации. Различные алгоритмы контроля точности используются в некоторых коммерческих системах автоматизированного проектирования при решении линейных и нелинейных краевых задач с эллиптическими дифференциальными операторами второго порядка. Все апостериорные методы анализа ошибки проекционно-сеточных методов можно разделить на три основные группы: 1) методы, основанные на решении задачи в дополняющих друг друга формулировках, когда точное решение принимает промежуточное значение между приближёнными решениями одной и другой формулировки; 2) методы с многократным решением задачи; 3) методы с локальным оцениванием ошибки. Наиболее экономичной по вычислительным затратам считается третья группа методов, которая и развивается в последнее время особенно интенсивно. В этой группе выделяются методы с целенаправленной *hp*-адаптивностью (L.Demkowicz с соавторами), а также метод суперсходящегося покусочного восстановления (superconvergence patch recovery method, О.С.Zienkiewicz, J.Z.Zhu). Об актуальности вопросов, рассматриваемых в этой главе, свидетельствует практически постоянное представление докладов по контролю точности расчётов в задачах магнитостатики на регулярных конференциях Computag, посвящённых моделированию магнитных полей и смежным темам. В отличие от известных методов для этого класса задач, в третьей главе предлагается комплексный подход, объединяющий на основе единых характеристик как тестирование функций магнитного поля, основанных на данных измерений для спектрометров физических экспериментов, так и тестирование магнитного поля, которое получается в результате расчётов.

В параграфе приводятся формулы, характеризующие численную погрешность в зависимости от невязки уравнений для операторов дивергенции и ротора. Пусть область  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  разбита стандартным образом на некоторые конечные элементы  $w_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , и на каждом  $i$ -ом элементе определены функции формы  $N_{i,k}(x)$ , так что  $N_{i,k}(x^{(j)}) = \delta(x^{(k)}, x^{(j)})$  где узлы,  $x^{(k)}, x^{(j)} \in \bar{w}_i$ . Через  $\hat{w}_k$  обозначим носитель  $k$ -той базисной

функции  $\hat{w}_k = \bigcup_{w_i: x^{(k)} \in \bar{w}_i} \text{supp} N_{i,k}$ , а через  $(C_0^\infty(\hat{w}_k))^3$  - множество финитных бесконечно-дифференцируемых вектор-функций с носителями на  $\hat{w}_k$ . Справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.2.1**

Пусть для  $\vec{v} \in (C_0^\infty(\hat{\omega}_k))^3$  выполняются неравенства

$$|\nabla \cdot \vec{v}(x) - \nabla \cdot \vec{v}(y)| \leq \tilde{c}_1 d_0, \quad |\nabla \times \vec{v}(x) - \nabla \times \vec{v}(y)| \leq \tilde{c}_2 d_0,$$

где  $x, y \in \hat{\omega}_k$ ,  $d_0 = \max_{x \in \hat{\omega}_k, z \in \partial \hat{\omega}_k} |x - z|$ ,  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  - положительные постоянные, не зависящие от  $x$  и  $y$ . Тогда при  $x \in \hat{\omega}_k$  выполняется равенство

$$\vec{v}(x) = (\nabla \cdot \vec{v}(x)) \vec{I}_0(x) + (\nabla \times \vec{v}(x)) \times \vec{I}_0(x) + R_0 \vec{v},$$

здесь

$$\vec{I}_0(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\hat{\omega}_k} \frac{\vec{r}}{r^3} dy, \quad |\vec{I}_0(x)| \leq d_0, \quad |R_0 \vec{v}| \leq \tilde{c}_3 d_0^2,$$

при этом  $\tilde{c}_3 = \max\{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2\}$ ,  $\vec{r} = \sum_{p=1}^3 \vec{i}_p (x_p - y_p)$ ,  $r = |x - y|$ .

Справедлива также лемма о представлении вектор-функции  $\vec{v} \in (C^\infty(\omega_k))^3$  на элементе  $\omega_k$ .

**Лемма 3.2.2**

Пусть для  $\vec{v} \in (C^\infty(\omega_k))^3$  выполняются неравенства

$$|\nabla \cdot \vec{v}(x) - \nabla \cdot \vec{v}(y)| \leq \tilde{c}_4 d, \quad |\nabla \times \vec{v}(x) - \nabla \times \vec{v}(y)| \leq \tilde{c}_5 d,$$

где  $x, y \in \omega_k$ ,  $d = \max_{x \in \omega_k, z \in \partial \omega_k} |x - z|$ ,  $\tilde{c}_4, \tilde{c}_5$  - положительные постоянные, не зависящие от  $x$  и  $y$ . Тогда при  $x \in \omega_k$  выполняется равенство

$$\vec{v}(x) = (\nabla \cdot \vec{v}(x)) \vec{I}(x) + (\nabla \times \vec{v}(x)) \times \vec{I}(x) + P\vec{v} + R\vec{v},$$

здесь

$$\vec{I}(x) = \frac{-1}{4\pi} \int_{\omega_k} \frac{\vec{r}}{r^3} dy, \quad |\vec{I}(x)| \leq d, \quad |P\vec{v}| \leq \max_{y \in \partial \omega_k} \left( \sum_{p=1}^3 |v_p| \right) (y), \quad |R\vec{v}| \leq \tilde{c}_6 d^2,$$

при этом  $\tilde{c}_6 = \max\{\tilde{c}_4, \tilde{c}_5\}$ .

Леммы 3.2.1 и 3.2.2 можно использовать для оценки погрешности приближённого решения краевых задач с операторами дивергенции и ротора.

В теореме 3.2.1 доказывается справедливость представлений ошибки на конечном элементе  $w_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . В отличие от известных подходов к локальному оцениванию погрешности приближённого решения с помощью формулы Тейлора, в полученных представлениях этой погрешности в пространстве непрерывно-дифференцируемых вектор-функций учитывается тот факт, что точное решение удовлетворяет либо однородному уравнению с оператором дивергенции, либо однородному уравнению с оператором ротора, либо двум уравнениям одновременно.

В этом же параграфе для анализа функций магнитного поля, которые обычно используются в экспериментах с магнитными спектрометрами и основываются на данных измерений, определяется функционал  $\eta$ , далее называемый характеристикой. Он задаётся следующим образом:

$$\eta(I^{(l)} \vec{B}, w) = (|\int_w \nabla \cdot I^{(l)} \vec{B} dw| + |\int_w \nabla \times I^{(l)} \vec{B} dw|) / (|w| B_0),$$

где  $w$  - некоторый конечный элемент, образованный из узлов сетки, на которых известны данные измерений,  $|w|$  - объем  $w$ , а  $B_0$  - величина основной компоненты поля в центре магнита. Через  $I^{(l)}\vec{B}$  обозначен оператор восполнения. В некоторых случаях он может быть равен оператору  $I_e^{(l)}$ , задаваемому формулой  $I_e^{(l)}\vec{B} = \sum_{i=1}^{m_l} \vec{B}_i N_i^{(l)}(x)$ , где индекс  $l$  - степень интерполяционного многочлена,  $m_l$  - число используемых при интерполяции узлов сетки,  $\vec{B}_i$  - значение вектора  $\vec{B}$  в  $i$ -м узле,  $N_i^{(l)}(x)$  -  $i$ -я базисная функция интерполяционного многочлена.

С помощью характеристики  $\eta$ , во-первых, можно определить ошибки в измерениях поля, а во-вторых, можно установить, на какой сетке необходимо проводить измерения, чтобы ошибка функции магнитного поля была минимальной. В качестве критерия следует использовать неравенство

$$\eta(I_e^{(l)}\vec{B}, w) \leq C \cdot h^{l+1} \cdot |D^{l+1}\vec{B}(\hat{x})|, \quad \hat{x} \in w,$$

где  $C = const, C > 0$ ,  $h$  - диаметр элемента  $w$ ,  $D^m = \partial^{|m|}/\partial^{m_1}x_1\partial^{m_2}x_2\partial^{m_3}x_3$ ,  $|m| = m_1 + m_2 + m_3$ .

В § 3.3 представлены методы решения задачи формирования однородного магнитного поля, которую можно отнести к классу обратных задач. Общий подход к их решению разработан А.Н.Тихоновым и его школой. Здесь следует отметить работы П.Н.Вабищевича, а для задач магнитостатики - работы Е.А.Ламзина, С.Е.Сычевского с соавторами. В этом разделе сформулирован итерационный процесс уточнения части поверхности ферромагнетика для получения высокооднородного магнитного поля (теорема 3.3.1) и даны примеры решения задач с его помощью.

В § 3.4 приводится алгоритм построения компьютерных моделей анализирующих магнитов спектрометров с контролем точности вычислений. Главными требованиями к таким магнитам обычно являются: величина поворотной силы, объём рабочей области, эксплуатационные условия, материал проводника и тип стали. Процесс построения компьютерной модели дипольного магнита, основанный на этих входных данных, можно описать с помощью следующего алгоритма:

- 1) оценка ампер-витков, длины магнита и толщины ярма по аналитическим формулам;
- 2) построение компьютерной модели обмотки и итерационный процесс формирования геометрии ненасыщенного магнитного ярма;
- 3) анализ точности разработанной компьютерной модели, который включает в себя проверку правильности вычисления поля от обмотки и анализ адекватности расчётной сетки;
- 4) вычисление наиболее важных характеристик магнита: функций поля вдоль лучей в полярной системе координат с центром в точке взаимодействия для оценки поворотной силы магнита; поведения поля в ярме магнита для анализа эффектов насыщения; пондермоторных сил и моментов, действующих на проводники, по формуле  $\vec{J} \times \vec{B}$ ; поведения поля вокруг магнита; запасённой энергии; сил, действующих на различные части магнита (стресс Максвелла), и других.

**Четвертая глава** диссертации посвящена результатам применения методов, описанных в предыдущей главе, к построению компьютерных моделей и расчётов полей магнитных систем для установки ALICE [1-4] (CERN, г. Женева) и проекта установки для эксперимента с поляризованной мишенью в ИТЭФ [5] (г. Москва).

В § 4.1 приводятся результаты построения компьютерных моделей для большого соленоидального магнита L3, проекта сверхпроводящего дипольного магнита и первого проекта "теплого" дипольного магнита для эксперимента ALICE. В частности, для модели

ЛЗ представлены результаты сравнения расчётов, выполненных по программе MSFE3D<sup>9</sup>, с картой поля магнита, а также с результатами расчётов по другим программам.

В § 4.2 представлены результаты построения компьютерных моделей дипольных магнитов серии VULCAN с конусной конфигурацией ферромагнетика для эксперимента AL-ICE. Здесь приводятся разработанные модели обмоток, укладываемых на боковую поверхность прямого усечённого конуса, результаты использования различных характеристик для оценки точности вычисления поля в апертурах магнитов, а также другие расчёты.

В § 4.3 представлены результаты моделирования магнитного поля для проекта эксперимента с поляризованной мишенью в ИТЭФ. Здесь рассматриваются два варианта магнита без поляризующих наконечников, а также приводится результат по формированию конфигурации поверхности поляризующих наконечников с помощью итерационного процесса из § 3.3.

К диссертационной работе имеется три приложения. **Приложение 1** содержит анализ функций магнитного поля, основанных на данных измерений для эксперимента ЭКСЧАРМ [6-8]. Рассматриваются 4 различные функции магнитного поля, интерполирующие данные с сетки измерений с помощью произведения интерполяционных многочленов Лагранжа первой, второй третьей и четвертой степеней соответственно по каждой пространственной переменной. Для их сравнения используется характеристика  $\eta(I^{(k)}\vec{B}, w_0)$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , введённая в § 3.2.

В **Приложении 2** приводятся результаты расчётов магнитного поля для модели соленоида проекта модифицированного бетатрона, разработанного в Лаборатории Ядерных Проблем ОИЯИ.

В **Приложении 3** представлены результаты расчётов магнитного поля для модели поворотного магнита M-90-05 ускорительного комплекса У400-У400М, предназначенного для проекта DRIBs [9].

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Исследованы комбинированные системы, содержащие нелинейные дифференциальные уравнения в дивергентной или вихревой формах в ограниченной области и граничные условия в виде интегральных уравнений, точно учитывающие поведение решения на бесконечности. Получены комбинированные системы, использующие только один граничный оператор на произвольной границе вокруг расчётной области, включающей подобласти с нелинейными и линейными дифференциальными уравнениями.
2. Получены и обоснованы проекционно-сеточные схемы для решения линейных и нелинейных краевых задач относительно вектор-функций с системами из двух дифференциальных уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах. Предложен класс конечных элементов высокого порядка аппроксимации без внутренних узлов. Базисные функции этих элементов удовлетворяют либо уравнениям со скалярным или векторным оператором Лапласа, либо одновременно двум однородным дифференциальным уравнениям первого

---

<sup>9</sup> М.Б.Юлдашева, О.И.Юлдашев. Комплекс программ MSFE3D для расчётов пространственных магнитостатических полей. Версия 1.2. ОИЯИ, Р11-94-202, Дубна, 1994

порядка с оператором дивергенции и оператором ротора. Использование таких элементов при решении краевых задач с указанными операторами приводит к конечно-элементным алгебраическим системам с симметричными, положительно-определенными матрицами.

3. Разработаны методы и алгоритмы решения трёхмерных нелинейных задач магнитостатики:
  - проекционно-сеточный метод и адаптивный алгоритм вычисления скалярного потенциала, создаваемого проводниками с постоянным током, на границах несвязных областей вне проводников;
  - алгоритм построения единых характеристик для контроля точности вычисленных и измеренных магнитных полей ;
  - итерационный метод формирования высокооднородного магнитного поля за счёт изменения объема, занимаемого ферромагнетиком;
  - алгоритм построения компьютерных моделей спектрометрических дипольных магнитов по заданной поворотной силе, размеру рабочей области и другим параметрам.
4. На основе созданных алгоритмов и программного обеспечения решён ряд трёхмерных задач с учётом нелинейного влияния ферромагнитных частей магнитных систем. В некоторых задачах использовались характеристики точности вычислений. Разработаны компьютерные модели и проведены расчёты:
  - большого соленоидального магнита L3 установки ALICE на LHC (CERN, г.Женева) и проектов ОИЯИ дипольных магнитов для этой установки: сверхпроводящего и "тёплых" вариантов, в том числе с конусной конфигурацией магнитопровода;
  - спектрометрического магнита с поляризующими наконечниками для проекта эксперимента с поляризованной мишенью на ускорителе в ИТЭФ (г.Москва);
  - соленоида для проекта модифицированного бетатрона ОИЯИ (г.Дубна).

### **Диссертация основывается на следующих опубликованных работах**

1. Е.П.Жидков, А.В.Фёдоров, О.И.Юлдашев. Об одном подходе к решению задачи магнитостатики в комбинированной постановке. Математическое моделирование, т.2, N 9, 1990, с.10-20.
2. Е.П.Жидков, А.В.Фёдоров, О.И.Юлдашев. Использование метода Галёркина для решения интегрального уравнения магнитостатики относительно векторного потенциала. Дифференциальные уравнения, т.28, N 10, 1992, с. 1821-1828.
3. Е.П.Жидков, О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Адаптивный алгоритм вычисления функции на липшицевой границе трёхмерного тела по заданному градиенту и его применение в магнитостатике. Журнал вычислительной математики и математической физики, т.42, N 12, 2002, с.1854-1869.

4. E.P.Zhidkov, O.I.Yuldashev, M.B.Yuldasheva. A projection method for solving linear problems with the divergence, curl operators and its application in magnetostatics. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Прикладная и компьютерная математика, N 1(1), 2002, с.79-86.
5. Е.П.Жидков, О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Новые проекционные формулировки относительно векторов поля для решения нелинейных задач магнитостатики. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Прикладная и компьютерная математика, т.2, N 2, 2003, с. 104-115.
6. Е.П.Жидков, В.В.Рыльцов, О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Численное решение задачи формирования однородного магнитного поля за счёт изменения занимаемого ферромагнетиком объёма для некоторых магнитных систем экспериментальной физики. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Физика, N 12, 2004, с.17-25.
7. Е.П.Жидков, О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. О контроле точности вычислений при моделировании пространственных магнитных полей. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Прикладная и компьютерная математика, т.4, N 1, 2005, с.93-101.
8. О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Об одном классе конечных элементов с гармоническими базисными функциями. Вестник Российского университета дружбы народов. Серия Математика. Информатика. Физика, N 2 (2), 2010, с.44-48.
9. A.Ivanov, S.Ivashkevich, ... I.Meshkov, ... O.Yuldashev. Focusing system of the modified betatron: design, technology, manufacturing and test. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, section A, v.441, 2000, p.262-266.
10. P.G. Akishin, E.V. Arkhipov, ... A.S.Vodopianov, ... O.I. Yuldashev. Superconducting dipole magnet for ALICE dimuon arm spectrometer. Краткие сообщения ОИЯИ, N 1, 1997, p.81-94.
11. Э.А.Айрян, Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский, О.И.Юлдашев. Алгоритм учёта условий на бесконечности в двумерных задачах магнитостатики. ОИЯИ, P11-87-49, Дубна, 1987, 15с.
12. Е.П.Жидков, В.В.Журавлев, В.С.Кладницкий, И.М.Матора, А.В. Фёдоров, О.И.Юлдашев. О формировании однородного магнитного поля на инжекторном участке ЛИУ-30. ОИЯИ, P9-88-508, Дубна, 1988, 11с.; [http://ccdb4fs.kek.jp/cgi-bin/img\\_index?8811447](http://ccdb4fs.kek.jp/cgi-bin/img_index?8811447).
13. Е.П.Жидков, А.В.Фёдоров, О.И.Юлдашев. Алгоритм численного моделирования фокусирующей магнитной системы ЛИУ. Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Вычислительная физика и математическое моделирование", Волгоград-1989, УДН, М., 1989, с.46-47.
14. Е.П.Жидков, В.В.Журавлев, В.С.Кладницкий, И.М.Матора, А.В. Фёдоров, О.И.Юлдашев. О формировании однородного магнитного поля на инжекторном участке ЛИУ-30 с использованием ферромагнитных колец. Труды XI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Д9-89-52, Дубна, 1989, т.1, с.381-383.

15. E.A.Ayrjan, E.P.Zhidkov, A.V.Fedorov, O.I.Yuldashev. A Galerkin Method for Solving the Magnetostatic Nonlinear Potential Integral Equations. Proceedings of International Symposium on Numerical Analysis (ISNA'92). Part III, Contributed Papers. Prague, August 31-September 4, 1992, p.20-32.
16. E.A.Ayrjan, A.V.Fedorov, O.I.Yuldashev, E.P.Zhidkov. One approach for coupling FEM and BEM. Proceedings of International Symposium on Numerical Analysis (ISNA'92). Part III, Contributed Papers. Prague, August 31-September 4, 1992, p.12-19.
17. P.G.Akishin, A.S.Vodopianov, I.V.Puzynin, Yu.A.Shishov, M.B.Yuldasheva, O.I.Yuldashev. Computing Models of the L3 Magnet and Dipole Magnet for the ALICE Experiment. CERN-ALICE 96-06, Int. Note/Mag, 4 April, 1996, 21p.
18. P.G. Akishin, E.A. Arkhipov, ... A.S.Vodopianov, ... O.I. Yuldashev. Conceptual design of the warm dipole magnet for the ALICE forward muon spectrometer. CERN-ALICE 96-26, Int. Note/Mag, 1996, 10p.
19. П.Г.Акишин, А.С.Водопьянов, И.В.Пузынин, Ю.А.Шишов, М.Б.Юлдашева, О.И.Юлдашев. Моделирование поля мюонного детектора установки ALICE. XV Собрание по ускорителям заряженных частиц, сборник докладов. ГИЦ РФ ИФВЭ, Протвино, 1996, т.2, с.182-185.
20. A.S. Vodopianov, Yu.A. Shishov, M.B. Yuldasheva, O.I. Yuldashev. Computer models of dipole magnets of a series "VULCAN" for the ALICE experiment. JINR, E11-98-385, Dubna, 1998. 18p.; <http://cdsweb.cern.ch/search?sysno=000328897CER>
21. Р.И.Давлетшин, Е.П.Жидков, В.В.Куликов, В.В.Рыльцов, О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Компьютерная модель магнита для проекта эксперимента с поляризованной мишенью в ИТЭФ. Расчёт основных вариантов без поляризующих наконечников. ОИЯИ, P11-98-351, Дубна, 1998, 18с.
22. J.Ritman, O.I.Yuldashev, M.B.Yuldasheva. An algorithm for construction of dipole magnets computer models with quality control and its application for the PANDA Forward Spectrometer. JINR, E11-2005-49, Dubna, 2005, 19p.
23. О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Новый проекционно-сеточный подход для моделирования пространственных нелинейных магнитных полей сложных магнитных систем экспериментальной физики. Международная конференция "Тихонов и современная математика", Тезисы докладов секции Математическое моделирование, с.189-190. М., МГУ, 2006.
24. О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации. JINR LIT Scientific Report 2006-2007, JINR, Dubna, 2007, с.317-320.
25. О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. О конечно-элементном подходе относительно векторов поля для расчётов сложных магнитных систем экспериментальной физики. JINR LIT Scientific Report 2006-2007, JINR, Dubna, 2007, с.234-238.
26. O.I.Yuldashev, M.B.Yuldasheva. 3D finite elements with harmonic basis functions for approximations of high order. JINR, E11-2008-104, Dubna, 2008, 24p.



27. О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Новое правило построения квадратичных функционалов для решения методом конечных элементов относительно вектор-функций краевых задач с системой из двух уравнений первого порядка в дивергентной и вихревой формах. JINR LIT Scientific Report 2008-2009, JINR, Dubna, 2009, с.113-116.
28. О.И.Юлдашев, М.Б.Юлдашева. Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из специальных гильбертовых пространств. JINR LIT Scientific Report 2008-2009, JINR, Dubna, 2009, с.105-108.

## Цитируемая литература

1. ALICE collaboration (N.Ahmad, ... O.I.Yuldashev et al.) ALICE Technical Proposal, CERN/LHCC 95-71, 1995, 237p.
2. ALICE collaboration (S.Beole, ... O.I.Iouldachev et al.) The Forward Muon Spectrometer of ALICE (Addendum to the ALICE technical proposal), CERN/LHCC 96-32, 1996, 77p.
3. ALICE collaboration. (S.Beole, ... O.I.Iouldachev et al.) ALICE technical design report: detector for high momentum PID. CERN-LHCC-98-19, 1998, 198p.
4. ALICE collaboration. (G.Dellacasa, ... O.I.Iouldachev et al.) ALICE technical design report: photon multiplicity detector (PMD). CERN-LHCC-99-32, 1999, 134p.
5. И.Г.Алексеев, Н.А.Бажанов, ... В.В.Рыльцов и др. Исследование поляризационных параметров в бинарных реакциях рождения странных частиц  $\pi r \rightarrow K\Lambda(\Sigma)$  на ускорителе ИТЭФ (предложение эксперимента). ИТЭФ 41-97, Москва, 1997, 33с.
6. ЭКСЧАРМ коллаборация ( А.Н.Алеев, ... О.И.Юлдашев и др.). Исследование инклюзивного образования  $\varphi$  - мезонов нейтронами на серпуховском ускорителе. ОИЯИ, P1-96-437, Дубна, 1996.
7. ЭКСЧАРМ коллаборация ( А.Н.Алеев, ... О.И.Юлдашев и др.). Наблюдение очарованного бариона  $\Sigma_c^0$  в эксперименте ЭКСЧАРМ. Краткие сообщения ОИЯИ, N 3 [77], 1996, с.31-46.
8. ЭКСЧАРМ коллаборация ( А.Н.Алеев, ... О.И.Юлдашев и др.). Спектрометр ЭКСЧАРМ. ПТЭ, N 4, 1999, с.52-64.
9. G.G.Gulbekian, Yu.Ts.Oganessian. "DRIBs": The Dubna Project for Radiative Ion Beams. Nuclear Shell - 50 Years: Intern. Conf. on Nuclear Physics, Dubna, Apr. 1999. Proc.-Singapore etc.:World Sci., 2000.