Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
Объединенный институт ядерных исследований

На правах рукописи

Федорук Сергей Алексеевич

Классические и квантовые модели суперсимметричной механики и частиц высших спинов

01.04.02 – теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна – 2017

Оглавление

Введение

Современное понимание физических основ материи и развитие физики элементарных частиц невозможны без опережающего развития теории фундаментальных взаимодействий. В связи с этим существует интерес к новым, даже в чем-то принципиальным, подходам в квантовой теории и физике частиц, которые в синтезе с уже имеющимися достижениями позволили бы сформулировать единую унифицированную теорию всех взаимодействий. В то же время, решение этой фундаментальной задачи означало бы преодоление проблем в стандартных на современный момент калибровочных полевых теориях, в квантовой гравитации и космологии, а также в описании при произвольных энергиях квантовых процессов в экспериментах, что проводятся сейчас или планируются в будущем.

Важным атрибутом большинства современных единых теорий есть наличие суперсимметрии, открытой независимо в работах [1, 2, 3] при обобщении четырехмерных полевых теорий и в работах [4, 5, 6, 7] при описании дуально-резонансных моделей (спиновой струны). Несмотря на то, что ситуация с поисками проявлений суперсимметрии в физике высоких энергий является в настоящий момент неопределенной, аппарат суперсимметрии настолько мощный и богатый, что интерес к суперсимметрии только усиливается с годами даже при отсутствии экспериментальных подтверждений в физике элементарных частиц. Это связано как с принципиально новым типом симметрии, привносимым суперсимметрией, так и с новыми идеями и методами, возникающими при изучении суперсимметричных теорий и моделей, обладающих суперсимметрией (смотрите, например, монографии [8, 9, 10, 11, 12]).

Помимо суперсимметричных обобщений полевых калибровочных теорий, важным элементом современной теоретической физики является применение суперсимметрии при описании одномерных и протяженных объектом – суперчастиц и суперструн [10, 13]. Более того, суперсимметрия в задачах квантовой механики дает, фактически, первые подтверждения реализации суперсимметрии в природе. При описании одномерных (как и протяженных) объектов суперсимметрия может быть реализована как на мировой линии, так и в таргетном пространстве. В первом случае такие суперсимметричные системы описываются моделями суперсимметричной квантовой механики [14], которые при наличии релятивистской симметрии в таргетном пространстве и локальной одномерной расширенной суперсимметрии определяют модели спиновых частиц [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]. В случае присутствия таргетной суперсимметрии получаются модели суперчастиц [22, 23].

Модели суперсимметричной квантовой механики, описывающие движение частиц с (изо)спином на искривленном многообразии, являются одним из эффективных инструментов изучения геометрии конфигурационного или фазового пространств рассматриваемых динамических систем, с возможностью получения новых, не изученных ранее, структур дифференциальной геометрии. Уже в первой работе по суперсимметричной квантовой механике [14] была получена деформация комплекса де Рама за счет дополнительного потенциала динамической системы. Позже были получены другие деформации классических геометрий де Рама и Дольбо с кручениями [24, 25, 26]. Кроме того, структуры с гиперкелеровой геометрией с кручением впервые были введены именно физиками при изучении суперсимметричных сигма-моделей [27] (смотрите также более ранние работы [28, 29]). Менее известные сейчас модели с Клиффорд-келеровой (би-гиперкелеровой) и октонионно-келеровой геометриями с кручениями [30, 31], как и недавно обнаруженные квазикомплексные модели [32], в настоящее время требуют детального изучения. Следует отметить, что эффективный формализм суперсимметрии позволяет воспроизвести известные математические результаты в простой форме. В связи с этим можно упомянуть знаменитую теорему Атьи-Зингера [33], для которой чисто математическое доказательство является довольно сложным. С другой стороны, суперсимметричное доказательство этой теоремы с использованием формализма функционального интеграла [34, 35] (см. также [36, 37]) является прозрачным и красивым.

Одним из важным предметов исследований в суперсимметричной квантовой механики являются модели суперконформной механики. Они характеризуются присутствием динамической симметрии, которая описывается суперсимметричными расширениями простой некомпактной неабелевой группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Изучение одномерных конформных систем, начатое еще в работах Баргманна [38], связано с естественной интерпретацией их в качестве низкоразмерного аналога конформных полевых систем, играющих в последнее время важную роль в AdS/CFT соответствии [39, 40, 41]. Начало конкретных исследований и приложений моделей конформной механики как пример одномерной (d=1) конформной теории поля, как на классическом, так и на квантовом уровне, было положено в работе [42]. Кроме того, конформная симметрия характеризует важный класс интегрируемых многочастичных систем, обнаруженных Калоджеро в его пионерских работах [43, 44]. Устранение координаты центра масс в двухчастичной модели Калоджеро [43, 44] воспроизводит модель де Альваро, Фубини и Фурлана [42], устанавливая взаимосвязь между этими двумя ранними попытками приложения d=1 конформной симметрии. Естественным развитием суперсимметричной квантовой механики [14] стало построение моделей суперконформной механики. $\mathcal{N}=2$ суперсимметричные обобщения модели де Альваро, Фубини и Фурлана были найдены в работах [45, 46]. Две разные (но тесно связанные) модели $\mathcal{N}=4$ суперконформной механики, основанные на супергруппе $\mathrm{SU}(1,1|2)$ были построены в работах [46, 47]. $\mathcal{N}=2$ суперсимметричное расширение многочастичной системы Калоджеро было построено в [48].

Дополнительный интерес к моделям конформной и суперконформной механик связан с описанием движения (супер)частиц в пространствах с AdS-геометриями вблизи горизонта черных дыр, возникающих в супергравитациях в различных измерениях. Именно, в [49] было предложено, что радиальное движение массивных заряженных частиц вблизи горизонта экстремальной черной дыры Рейсснера-Нордстрёма описывается некоторыми “релятивистскими” типами конформной механики, которая сводится к конформной механике де Альваро, Фубини и Фурлана [42] в “нерелятивистском” пределе. Динамической переменной этой конформной механики является радиальная AdS-координата $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ фона. Это пространство составляет бозонную часть максимально суперсимметричного решения в $\mathcal{N}=2$, D=4 супергравитации [49] вблизи горизонта экстремальной черной дыры Рейсснера-Нордстрёма, когда супергруппой изометрии является $\mathrm{SU}(1,1|2)$. Это наблюдение привело в [49] к предположению, что полная динамика суперчастиц вблизи горизонта экстремальной черной дыры Рейсснера-Нордстрёма описывается $\mathcal{N}=4$ суперконформной механикой, что стимулировало в конце 90-х дальнейшее изучению моделей $\mathcal{N}=4$ суперконформной механики с $\mathrm{SU}(1,1|2)$-симметрией. Такие модели были построены в рамках нелинейных реализаций в применении к физике черных дыр в [50], частично воссоздавая при этом более ранние результаты работы [47]. Кроме того, в работе [51] микроскопическое описание многоцентровой геометрии вблизи горизонта экстремальных черных дыр Рейсснера-Нордстрёма определялось как предел больших n в n-частичном обобщении $\mathrm{SU}(1,1|2)$ суперконформной механики. Еще одно свидетельство в пользу предложения, сделанного в [49], было найдено в работах [52, 53] посредством канонических преобразований, связывающих радиальное движение (супер)частицы на $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ в $\mathcal{N}=0$, $\mathcal{N}=2$ [52] и $\mathcal{N}=4$ [53] суперконформной механике. Обобщение этой эквивалентности на случай экстремальной черной дыры, обладающей как электрическим, так и магнитным зарядами, было выполнено в [54].

Построение многочастичных $\mathcal{N}=4$ суперконформных систем, супергруппой инвариантности которых является в общем случае исключительная однопараметрическая супергруппа $D(2,1;\alpha)$, остается открытой проблемой даже в так называемом рациональном случае. Прямое решение [55, 56, 57] связанной системы квадратичных уравнений в частных производных на потенциалы многочастичной системы [58, 59] является сложной задачей для более чем трех частиц [60, 61, 62, 63], что требует использование альтернативных способов решения этой проблемы.

Дополнительным аргументом в изучении конформной механики и ее суперсимметричного расширения стало открытие конформной алгебры Галилея, возникшей впервые как предел $c \to \infty$ в контракции релятивистской конформной алгебре [64, 65, 66]. Конформные симметрии Галилея описывают нерелятивистские системы, обладающие симметрией $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, дополненной векторными центральными зарядами. Позднее были найдены семейства конформных алгебр Галилея, характеризуемых полуцелым параметром ℓ. Является важным получение динамических реализаций конформных симметрий Галилея, а также их суперсимметричных обобщений.

Эффективным способом для получения внемассового описания суперсимметричных моделей и для получения возможных обобщений являются их суперполевые формулировки, для получения которых зачастую требуется использовать дополнительные инструменты, среди которых особенную роль играет метод гармонического суперпространства [67, 12], который был впервые разработан при изучении классических и квантовых свойств теорий поля с $\mathcal{N}$=2, D=4 суперсимметрией, а также при формулировке $\mathcal{N}$=3, D=4 суперсимметричной теории поля Янга-Миллса [68]. В моделях суперсимметричной механики подход гармонического суперпространства для $\mathcal{N}$=4, d=1 суперсимметричных моделей был разработан в работе [69] и является чрезвычайно эффективным и при изучении полученных систем и для построения новых моделей. В частности, члены Весса-Зумино для $\mathcal{N}$=4, d=1 супермультиплетов имеют последовательную формулировку в $\mathcal{N}$=4, d=1 гармоническом суперпространстве. Конечно, переход от гармонической формулировки к форулировке без гармоник дает, в общем довольно сложную модель с бесконечным числом вспомогательных полей, которые присущие гармоническому подходу.

Другим эффективным методом получения новых моделей суперконформной механики является использование полудинамических переменных. Эти полудинамические переменные описываются механическим действием Черна-Саймонса (или Весса-Зумино) [70, 71] и после квантования реализуют (изо)спиновые степенями свободы. Использование полудинамических переменных в комбинации с методом калибрования [72, 73] позволяет значительно расширить класс возможных суперполевых систем, обладающих $D(2,1;\alpha)$ симметрией, являющейся самой общей $\mathcal{N}$=4, d=1 суперконформной симметрией. Является важным применить эту схему при получении новых многочастичных моделей, обладающих $\mathcal{N}$=4, d=1 суперконформной симметрией для любого значения α.

Использование дополнительных переменных требуется также при изучении моделей с таргетной суперсимметрией, суперчастиц [22, 23] или суперструн [74, 10], обладающих локальной κ-инвариантностью [75, 76], необходимой для получения надлежащего числа и требуемых свойств физических степеней свободы рассматриваемых систем. Требование ковариантного квантования приводит к необходимости введения в систему дополнительных коммутирующих переменных, которые должны быть спинорами для ковариантной неприводимости спинорных зарядов κ-симметрии.

Одним из важных примеров бозонных спиноров, используемых в физике элементарных частиц и квантовой теории поля, являются твисторы [77, 78, 79]. Вследствие определения твисторов как спиноров конформной группы, твисторный подход имеет естественное применение для безмассовых моделей, в которых твисторные спиноры разрешают массовую связь. Описание спиральности в твисторной теории проводится самосогласованно и существует естественный переход к супертвисторам [80]. При этом, в теории с бозонными твистороподобными спинорами есть, по крайней мере на классическом уровне, очень простое решение проблемы бесконечной приводимости фермионной κ-симметрии благодаря возможности построения проекторов с такими спинорами. Но связь твисторного описания и стандартной пространственно-временной формулировки не устанавливается даже для безмассовой частицы ненулевой спиральности. Традиционный твисторный подход предполагает обязательное использование комплексифицированного пространства-времени в установлении такого типа связи, что приводит к потере наглядной связи твисторного и пространственно-временного подхода. Основная причина этого – использование твисторного перехода для бесспиновой частицы пространственно-временного подхода на случай ненулевого спина (спиральности). Это обстоятельство оправдывает дальнейший анализ бозе-спинорных моделей спиновых частиц в пространстве-времени, поскольку предполагает возможность существования более тонких геометрических и теоретико-групповых аспектов, а также дает альтернативные способы описания спина.

Среди других подходов, которые используют коммутирующие спиноры в качестве переменных, описывающих спин, является гармонический подход, использующий векторные или спинорные лоренцевы гармоники [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88]. В отличие от компактных гармоник [67], лоренцевы гармоники, образующие матрицу группы Лоренца или ее спинорной накрывающей группы, параметризуют произвольную систему отсчета по отношению к выбранной канонической и рассматриваются в виде моста, связывающего представления группы Лоренца с представлениями ее подгруппы.

Одним из способов использования лоренцевых гармоник является введение их в действие (супер)частицы или (супер)струны как чисто калибровочных степеней свободы [81, 88]. После закрепления калибровки они приобретают динамический статус, когда часть основных переменных передают им часть своих функций. Таким способом можно воспроизводится квазигармонический подход с динамическими “гармониками” [84]. В безмассовом случае, приспосабливая гармоническую систему отсчета к положительну вектору энергии-импульса и разрешая массовую связь в терминах гармоник, получаем твисторные формулировки частиц и суперчастиц [80, 89, 82, 83, 90] Конечно, введение твисторов может и не следовать описанной схеме, то есть можно ввести твисторы безотносительно к гармоникам. Следует отметить, что даже использование явно калибровочных гармонических переменных существенно меняет физические модели, так как это приводит к топологически нетривиальным конфигурациям в системе. Именно это дает возможность получать различные спины в безмассовом случае без введения некалибровочных переменных [88].

Другим типом бозонных переменных являются лоренцевы спиноры, которые при переходе в систему покоя массивной частицы воспроизводят классическое описание нерелятивистского спина. В произвольной системе отсчета кинетический член релятивистского действия имеет вид бозонного аналога кинетического действия суперчастицы, что является естественным из-за вариативности описания спина или бозонными или фермионными переменными. Такой коммутирующий спинор, описывающий дополнительные спиновые переменные, естественно назвать индексным спинором из-за его роли в полевой теории (на уровне волновой функции в квантовой механике): соответствующее поле является лоренцевым скаляром и полиномом по индексному спинору, индексы которого сворачиваются с индексами обычного спин-тензорного поля. Данная конструкция переносится на безмассовый случай, а также на высшие размерности пространства-времени, что является дополнительным аргументом в исследовании моделей с индексным спинором (с бозонным аналогом суперсимметрии), в дополнении к гармоникам и твисторам, вследствие неклассической природы спинорной группы в высших измерениях [82, 83, 85, 86, 87]. Кроме того, можно ввести твисторы или гармонические переменные параллельно с индексным спинором, который затем можно при необходимости откалибровать.

Альтернативным типом обобщения суперсимметричных теорий с традиционной суперсимметрией Пуанкаре является расширение суперпрстранства тензорными координатами, что приводит к суперсимметричным теориям, в которых присутствуют, помимо скалярных, нескалярные тензорные центральные заряды [91], коммутирующие с генераторами супертрансляций, но являющиеся, например, тензорами второго ранга относительно группы Лоренца. Интерес к таким моделям связан, в частности, с их прямым отношением к построению M-теории [92, 93, 94, 95, 91], где тензорные центральные заряды в алгебре суперсимметрии связаны с топологическими вкладами супербранных конфигураций. Одномерные системы с дополнительными тензорными координатами обладают привлекательным свойством, заключающимся в том, что число локальных κ-симметрий может быть произвольным, а не только половиной от числа глобальных суперсимметрий, как в простейшем случае безмассовой суперчастицы Бринка-Шварца. Впервые такие суперсимметричные модели частиц были получены в [96, 97] в случае D=4 безмассовой суперчастицы с двумя или тремя локальными κ-симметриями. Важно получить анализ всех возможных конфигураций суперчастицы с тензорными центральными зарядами, как в массивном, так и в безмассовом случаях в зависимости от дополнительных условий (связей) на координаты фазового пространства. Кроме того, такой анализ позволит установить новые эквивалентности динамических систем в продолжение замечательной эквивалентности модели спиновой частицы в псевдоклассической механике [16, 22] с грассмановыми векторными переменными и суперчастицы Касалбуони-Бринка-Шварца [22, 23], установленной в [98, 99]: в безмассовом случае спиновая частица эквивалентна, по крайней мере на классическом уровне, обычной N=1 суперчастице, без каких-либо центральных зарядов. Получаемая при этом идентификация локальной фермионной инвариантности в модели спиновой частицы с фермионной κ-симметрией в модели суперчастицы имеет важное значение для суперполевой формулировке безмассовой суперчастицы [98, 99] и последующих обобщений на супербраны [100, 101]. В [102, 103] была построена модель массивной суперчастицы с дополнительными тензорными координатами (правда, без явной лоренц-инвариантности), число степеней свободы которой совпадает с числом степеней свободы массивной частицы спина 1/2, обладающей одной κ-симметрией. Аппарат индексного спинора позволяет более детально проанализировать этот случай с соблюдением релятивистской инвариантности на предмет возможной эквивалентности.

Дополнительные тензорные координаты применяются при обобщении симметрии Пуанкаре до симметрии Максвелла [104, 105] посредством расширения пространства Минковского до максвелловского тензорного пространства. В [105, 106] было предложено использовать эти дополнительные тензорные степени свободы при описании постоянного электромагнитного фонового поля в пространстве-времени Минковского, хотя их роль и физическая интерпретация остается до конца неясной. Рассмотрение такого типа моделей необходимо для изучения движения частиц фиксированного спина в обобщенном пространстве-времени, геометрия которого генерируется постоянным электромагнитным полем, а также частиц высших спинов, учитывая важную роль тензорных координат в описании последних. Более того, в настоящее время есть много открытых вопросов по поводу взаимодействия полей высших спинов с внешними калибровочными полями, включая случай фонового постоянного электромагнитного поля (см., например, [107, 108]).

Построение согласованной теории, описывающей динамику взаимодействующих полей высших спинов, является достаточной давней и интригующей проблемой, которая на текущий момент остается далекой от своего полного завершения. К настоящему времени значительный прогресс достигнут в теории безмассовых полей высших спинов, которая понимается как калибровочная теория с бесконечномерной калибровочной группой симметрии и, как следствие, бесконечномерным спектром полей всевозможных спинов [109, 110, 111]. Ряд наиболее интересных формулировок теорий высших спинов используют (супер)пространства с дополнительными бозонными координатами (см., например, [112, 113, 114, 115]). Простым и, в то же время, мощным инструментом в анализе геометрической структуры таких (супер)пространств является изучение состояний (супер)частиц, распространяющихся в них. По определению, квантовый спектр системы, описывающей (супер)частицу высших спинов, содержит бесконечное число состояний, обладающихщих всеми (или почти всеми) спинами. Как отмечалось в работе К. Фронсдала [116], система безмассовых полей высших спинов обладает обобщенной конформной симметрией $Sp(8)$ и имеет элегантное описание в десятимерном пространстве-времени, расширенном тензорными координатами. Динамические реализации этой конструкции были найдены в [96, 97] построением модели тензорной (супер)частицы, обладающей обобщенной суперконформной симметрией $OSp(1|8)$ и воспроизводящей после квантования так называемую развернутую формулировку М. А. Васильева теории полей высшего спина [115]. Использование индексного спинора и твисторных переменных в модели частиц высшего спина позволяет рассмотреть альтернативные (супер)мультиплеты высшего спина, сохраняющие киральность в случае нерасширенной суперсимметрии.

Помимо самостоятельного интереса к проблеме полей высшего спина, как то разные формулировки лагранжевого описания с включением калибровочного и гравитационного взаимодействия, теория высших спинов тесно связана со струнной теорией, оперирующей также с бесконечными башнями спиновых состояний в физическом спектре. При этом, суперсимметрия является важным ингредиентом в теории суперструн [10, 13], которая считается в настоящее время одним из основных кандидатов на роль единой теории всех фундаментальных взаимодействий. Возможным вариантом связи этих теорий представляется то, что струнная теория является некоторой фазой спонтанного нарушения более общей теории высших спинов, обладающей более широкой симметрией. С этой позиции теорию безмассовых полей высших спинов можно считать даже как более фундаментальную теорию.

Симметрия системы полей высших спинов проявляется в полной мере при использовании твисторного формализма [78], использование которого при описании суперчастиц [80, 117, 118, 99, 90] и суперструн [119, 120, 121, 122, 123, 124, 125] позволяет реализовать κ-инвариантность суперчастицы и суперструны в виде локальных преобразований суперсимметрии эквивалентной твисторной формулировки (см., например, [99, 120]), в которой твисторные переменные приобретают динамическую роль. В случае протяженных объектов связь твисторного и пространственно-временного подходов мало изучена, что требует нахождение такой формулировки твисторной (супер)струны со стандартными твисторными коммутационными соотношениями, воспроизводящей стандартное пространственно-временное (супер)струнное действие посредством подходящей нелинейной замены переменных и последующей фиксации калибровок. Изучение твисторных струнных формулировок стало особенно актуальным после нахождения новых моделей открытых твисторных струн без натяжений в работах Виттена [122] и Берковица [123], инициировавших применение твисторных методов в калибровочных теориях супер-Янга-Миллса, в частности, к новому твисторному представлению деревесных и петлевых амплитуд (см., например, [126, 127]). Отметим также, что связь теории Янга-Миллса с твисторной струной имеет дальнейшее продолжение в построении действия Янга-Миллса (в D=4) в терминах полей на твисторном пространстве [128, 129].

Следует отметить, что твисторные струнные модели, разработанные в [122, 123, 130, 124, 125], описывались струной без натяжения, которая является одномерным аналогом безмассовых точечных частиц. Описание массивных (супер)частиц, а поэтому и (супер)струн с натяжением, требует введение би-(супер)твисторной геометрии (см., например, [78, 131, 79]). Изучение данной проблемы особенно важно из-за имеющихся многих открытых вопросов, связанных с описанием полей высших спинов, обладающих массой (см., например, [132, 133, 134, 135]). Применение твисторов при описании массивных полей высших спинов позволяет более четко проследить в этом случае за нетривиальной симметрией из-за осцилляторного вида генераторов симметрии в твисторном подходе.

Перечислим **цели и задачи** настоящего диссертационного исследования:

1. Построение моделей $\mathcal{N}$-расширенной суперсимметричной механики со взаимодействием динамических, полудинамических и нединамических калибровочных супермультиплетов, включая суперрасширения многочастичных конформных систем и динамические системы с суперконформной симметрией Галилея.

2. Исследование комплексов де Рама и Дольбо с кручениями, а также гиперкелеровой, би-гиперкелеровой и октонионно-келеровой геометрий с кручениями, с помощью $\mathcal{N}$-расширенной суперсимметричной механики.

3. Развитие твисторных и пространственно-временных формулировок безмассовых и массивных спиновых частиц с установлением координатных

и полевых преобразований Пенроуза, а также моделей с тензорными центральными зарядами, включая системы с симметрией Максвелла.

4. Построение моделей частиц и суперчастиц высших спинов, в том числе безмассовых систем с бозонным аналогом суперсимметрии и битвисторных моделей массивных частиц высших спинов, с нахождением квантового спектра и полевых твисторных преобразований.

5. Развитие твисторных методов в описании динамики расширенных объектов, включая построение твисторной формулировки струны с натяжением, производящей канонические правила квантования твисторного струнного поля.

В диссертации развиты новые направления, связанные с созданием новых подходов к решению важной задачи современной теоретической и математической физики – построению самосогласованных моделей физических объектов, а именно, элементарных частиц и струн, как неотъемлемых частей будущей единой физической теории. В частности,

- предложен подход, использующий составные системы с полу-динамическими степенями свободы, для построения новых моделей суперсимметричной квантовой механики, включая системы с расширенной суперконформной симметрией;

- разработаны новые методы описания безмассовых и массивных частиц и суперчастиц высших спинов на основе обобщенного твисторного подхода и с использованием новых симметрий динамических систем.

Краткое содержание работы

В первой главе исследуются сигма-модели суперсимметричной квантовой механики с расширенной суперсимметрией, являющиеся качественными примерами высокоразмерных теорий и дающие дополнительные возможности в изучении известных геометрий и получении новых геометрических структур [136, 137, 138, 27]. Целью первой главы настоящей диссертационной работы является построение суперполевых реализаций сигма-моделей с $\mathcal{N}{=}1$,

$\mathcal{N}$=2 и $\mathcal{N}$=4 суперсимметрией с различным мультиплетным составом, квантование их с нахождением квантовой алгебры расширенной суперсимметрии и установление свойств геометрических комплексов, описываемых рассматриваемыми системами. В последующей главе будет показано, что некоторые из этих конструкций являются чрезвычайно полезными при построении и изучении квантово-механических моделей с суперконформной симметрией.

В разделе 1.1 изучаются сигма-модели $\mathcal{N}$=2 суперсимметричной квантовой механики, построенные с помощью супермультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ и $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$ и содержащие в действии дополнительные суперполевые члены, генерирующие внешние кручения. Во всех рассмотренных случаях строится соответствующая квантовая $\mathcal{N}$=2 супералгебра с использованием упорядочения Вейля. Анализ суперзарядов показывает, что рассматриваемые модели описывают комплексы де Рама (в $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ случае) и Дольбо (в $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$ случае) с кручением и были найдены в явном виде вакуумные состояния в рамках теории возмущений по кручению. Доказано, что число вакуумных состояний не изменяется после включения кручения, что обеспечивает доказательство теоремы об индексе в рассматриваемых случаях.

В разделе 1.2 рассматривается квантование $\mathcal{N}$=4 системы, образованной двумя взаимодействующими (**4,4,0**) супермультиплетами и доказывается, что когда оба супермультиплеты имеют ту же природу, система описывает комплекс Дольбо с гиперкелеровой геометрией с кручением (HKT геометрией), тогда как система, образованная двумя взаимодействующими взаимно-зеркальными мультиплетами, описывает би-келеровую (или Клиффорд-келеровую) геометрию (би-HKT геометрию) с кручением. Показано с использованием $\mathcal{N}$=2 суперполевого описания, что би-HKT модели являются примерами $\mathcal{N}$=2 суперполевых систем с внешними (анти)голоморфными кручениями. Представлены примеры многообразий с октонионно-келеровой геометрией с кручением (OKT геометрией) и найдены явные выражения для классических и квантовых суперзарядов, что позволило дать новое геометрическое определение би-HKT и OKT многообразий.

В разделе 1.3 проводится детальный анализ общих би-HKT моделей с тремя комплексными структурами I^p, $p = 1, 2, 3$, которые не удовлетворяют кватернионной алгебре, а подчиняются алгебре Клиффорда

$$\{I^p, I^q\} = -2\delta^{pq}\,. \qquad (1)$$

Такие модели содержат как минимум два сектора, каждый из которых характеризуется HKT геометрией. Получены явные выражения для двух пар эрмитово-сопряженных суперзарядов: первая пара представляет суперзаряды Дольбо, деформированные голоморфными кручениями, тогда как вторая пара связана с первой дискретными преобразованиями, являющимися автоморфизмами алгебры $\mathcal{N}$=4 суперсимметрии. Показано, что би-HKT модели содержат две различные гиперкомплексные структуры. Проведена гамильтонова редукция би-HKT моделей, когда метрика и кручения не зависит от половины комплексных координат. Показано, что полученные модели, описанные в терминах обычных и зеркальных киральных $\mathcal{N}$=4 $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ мультиплетов, являются твистованными би-келеровыми системами [139], обобщенными за счет добавления голоморфных членов в суперполевом лагранжиане. Показано, что данная конструкция в терминах вещественных $\mathcal{N}$=2 $(\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1})$ суперполей принадлежит классу квазикомплексных моделей де Рама с эрмитовой (не просто вещественной) суперполевой метрикой и с голоморфными кручениями.

В разделе 1.4 представлена новая версия $\mathcal{N}$=4 механики, которая использует взаимодействие (**1,4,3**) и (**3,4,1**) мультиплетов, в котором (**1,4,3**) мультиплет является динамическим, тогда как (**3,4,1**) мультиплет – полудинамический и описывается членом Весса-Зумино (ВЗ) в полном суперполевом действии. Член ВЗ, используемый в описании (**3,4,1**) супермультиплета рассматриваемой модели, имеет последовательное суперполевое описание только в гармоническом суперпространстве. По этой причине, приведено гармоническое суперполевое описание $\mathcal{N}$=4 супермультиплетов, которое будет использоваться также в следующей главе. Представлен суперполевой лагранжиан взаимодействия динамического (**1,4,3**) и полудинамического (**3,4,1**) супермультиплетов и получено соответствующее компонентное действие. Остающиеся после исключения вспомогательных полей бозонные векторные переменные v_r, $r = 1, 2, 3$ мультиплета (**3,4,1**) образуют SU(2)-триплет и описываются действием первого порядка механики Черна-Саймонса, который определяется скалярным $\mathcal{U}(v)$ и векторным $\mathcal{A}_r(v)$ потенциалами, связанным уравнениями $\operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}} = \operatorname{grad}\mathcal{U}$ для самодуального поля в четырех измерениях. Скалярный потенциал $\mathcal{U}$, являющийся гармонической функцией в трехмерном плоском пространстве $\mathbb{R}^3{=}\{v_r\}$, связан с динамической бозонная переменной x из $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ супермультиплета связью $\mathcal{U} = x$, возникающей благодаря суперполевому взаимодействию супермультиплетов. Как результат этого, одна степень свободы в триплетном бозонном поле $(\mathbf{3{,}4{,}1})$ супермультиплета совпадает с единственной динамической степенью свободы $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ супермультиплета. Две других бозонных степени свободы в $(\mathbf{3{,}4{,}1})$ супермультиплете являются полудинамическими, описывают спиновые переменные и заключены в три-векторе ℓ_r, $r = 1, 2, 3$, который в одномонопольном случае для $\mathcal{U}$ описывают размытую сферу S^2. Такое разделение динамических степеней свободы в три-векторе $v_r{=}v_r(x, \ell_p)$ приводит к очень сильному и одновременно красивому утверждению: множество связей рассматриваемой системы, описывающей взаимодействие динамического $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ и спинового $(\mathbf{3{,}4{,}1})$ супермультиплетов, требует выполнения известных уравнений Нама для вектора v_r

$$v_r' = -\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}\,[v_s, v_t]_{{}_D}\,, \tag{2}$$

в котором роль параметра эволюции играет динамическая часть $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ мультиплета и $v_r' = \frac{\partial}{\partial x}v_r$. Кроме того, наличие уравнений Нама обеспечивает суперсимметрию Пуанкаре в модели. Такой же вывод справедлив и в квантовой теории: операторы супертрансляций и оператор гамильтониана образуют алгебры $\mathcal{N}{=}4$ суперсимметрии, когда операторы $\hat{v}_r$ удовлетворяют операторным уравнениям Нама. Найден явный вид суперзарядов и проверена замкнутость супералгебры при вейлевском упорядочении операторов и использовании формализма скобок Мойала.

В заключительном разделе резюмируются результаты первой главы, опубликованные в работах [140, 141, 142, 143, 144, 145].

Во второй главе рассматриваются новые квантово-механические модели, обладающие конформной и расширенной суперконформной симметрией. Рассмотрены как одночастичные, так и многочастичные системы, обладающие (супер)конформной симметрией, а также системы с конформной и суперконформной симметрией Галилея, являющихся определенным обобщением первых. При получении новых систем используются как динамические, так и полудинамические супермультиплеты, взаимодействие которых генерирует дополнительные конформно-инвариантные взаимодействия. В качестве дополнительного инструмента в построении моделей используется метод калибрования изометрий.

В разделе 2.1 рассмотрены системы, обладающие динамической одномерной конформной симметрией $SL(2,\mathbb{R})$, среди которых одночастичная квантово-механическая система, полученная методом нелинейных реализаций и калиброванием фазовых симметрий и описываемая дилатонным полем. Дополнительные спиновые переменные данной одномерной квантово-механической системы описываются координатами двухмерной размытой сферы. Также получена n-частичная модель Калоджеро посредством калибрования нединамическими $d{=}1$ калибровочными полями специальной матричной модели, описываемой действием

$$S_C = \int dt \left[\mathrm{tr}\,(\nabla X \nabla X) + \tfrac{i}{2}\,(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z}Z) + c\,\mathrm{tr}A \right], \qquad (3)$$

где $X_a{}^b(t)$ – эрмитовое $(n{\times}n)$-матричное поле, $Z_a(t)$ – комплексное $\mathrm{U}(n)$-спинорное поле, $A_a{}^b(t)$ – n^2 калибровочных полей и ковариантные производные суть $\nabla X = \dot{X} + i[A,X]$, $\nabla Z = \dot{Z} + iAZ$. Данное взаимодействие обеспечивает нетривиальный механизм генерации конформного потенциала динамических степеней свободы.

В разделе 2.2 подробно изучены $\mathcal{N}{=}\,1$ and $\mathcal{N}{=}2$ суперрасширения конформной группы и описаны модели соответствующей суперконформной механики, как на суперполевом, так и на компонентном уровне. Описан квантовый спектр систем. С помощью суперсимметричной версии процедуры калибрования построены новые $\mathcal{N}{=}1$ and $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформные расширения бозонной модели Калоджеро, отличные от ранее известных моделей. В частности, построенная $\mathcal{N}{=}2$ суперконформная модель совпадает в бозонном секторе с системой Калоджеро, но отличается от многочастичной системы Фридмана-Менде расширенным фермионным сектором.

В разделе 2.3 представлены новые модели $\mathcal{N}{=}4$ суперконформной механики в гармоническом $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ суперпространстве, как в одночастичном, так и в многочастичном случаях, инвариантные относительно супергруппы $D(2,1;\alpha)$. Данные модели, как одночастичные системы, так и $\mathcal{N}{=}\,4$ суперсимметризации модели Калоджеро, являются составными $\mathcal{N}{=}\,4$ квантово-механическими моделями, в которых внемассовое взаимодействие динамического ($\mathbf{1,4,3}$) и спинового ($\mathbf{4,4,0}$) мультиплетов осуществляется посредством чисто калибровочных топологических ($\mathbf{0,4,4}$) мультиплетов. В одночастичном случае бозонные переменные спинового ($\mathbf{4,4,0}$) мультиплета образуют $\mathrm{SU}(2)$ дублет и после квантования по Дираку описывают размытую сферу как результат имеющей место квантовой версии расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$. Построена новая $D(2,1;\alpha)$-инвариантная n-частичная модель супер-Калоджеро в бозонном пределе описывается лагранжианом $\mathrm{U}(n)$-спиновой модели Калоджеро

$$L_b = \sum_a \dot{x}_a \dot{x}_a + \tfrac{i}{2} \sum_a (\bar{Z}^a_k \dot{Z}^k_a - \dot{\bar{Z}}^a_k Z^k_a) + \sum_{a \neq b} \frac{\mathrm{tr}(S_a S_b)}{4(x_a - x_b)^2} - \frac{n\,\mathrm{Tr}(\hat{S}\hat{S})}{2(X_0)^2}\,, \qquad (4)$$

где поля Z^k_a подчиняются связям $\bar{Z}^a_i Z^i_a = c$.

В разделе 2.4 исследованы новые динамические системы, которые обладают симметриями относительно конформной группы Галилея в произвольной пространственно-временной размерности, являющейся обобщением одномерной конформной группы. С использованием метода нелинейных реализаций и наложением подходящих условий обратного эффекта Хиггса и динамических ковариантных связей найдено множество динамических уравнений, ковариантных относительно конформной группы Галилея и описывающих, помимо дилатонной степени свободы, дополнительные нерелятивистские векторные переменные. Построены два типа действий, воспроизводящих данные уравнения. В данной главе проведено исследование систем, которые обладают симметриями относительно конформной группы Галилея в произвольной пространственно-временной размерности $D{=}d{+}1$.

В разделе 2.5 получены $\mathcal{N}$-расширенные суперконформные алгебры Галилея в $1 \leq d \leq 5$ пространственных измерениях с помощью редукции Иноню-Вигнера релятивистских суперконформных алгебр и изучена их структура. Показано, что $\mathcal{N}$-расширенные суперконформные алгебры Галилея являются расширением полупростых супералгебр, в качестве которых выступают $\mathcal{N}$-расширенные суперсимметрии моделей суперконформной механики.

В последнем разделе второй главы резюмируются полученные результаты, опубликованные в работах [146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154] и трудах конференций [155, 156, 157].

В третьей главе изучаются твисторные формулировки массивной и безмассовой частиц фиксированного спина. В таких формулировках при описании релятивистских систем используются вместо векторного фазового пространства спинорные величины

$$Z_a = \left(\lambda_\alpha, \mu^{\dot\alpha}\right) \,, \tag{5}$$

которые в безмассовом случае образуют спинор конформной группы SU(2,2). Определяющим соотношением твисторного подхода является разрешение импульса частицы через твисторы, например в безмассовом случае

$$p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha} \,. \tag{6}$$

Целью третьей главы является твисторная формулировка безмассовой частицы ненулевой спиральности и ее связь с соответствующей пространственно-временной формулировкой, а также твисторная формулировка массивной частицы ненулевого спина.

В разделе 3.1 рассматривается безмассовая частица ненулевой спиральности j. Исходя из стандартной твисторной формулировки Пенроуза, мы строим обобщенную твисторную формулировку безмассовой частицы, эквивалентную стандартной, но с дополнительной скалярной переменной. Данная формулировка позволяет получить твисторные преобразования Пенроуза, связывающие твисторное пространство с векторным при вещественной пространственно-временной координате. Получаемая в результате этого пространственно-временная формулировка, имеющая прямое обобщение на массивный случай, описывается действием

$$S = \int d\tau \left[p\,\omega - e(p^2 - m^2) - \ell(\zeta \hat{p} \bar\zeta - j)\right] \,, \tag{7}$$

где кинетический член определяется бозонной “суперформой” $\omega = \dot x - i\dot\zeta\sigma\bar\zeta + i\zeta\sigma\dot{\bar\zeta}$, тогда как коммутирующий вейлевский спинор ζ^α (индексный спинор) описывает спиновые степени свободы. Установлены интегральные преобразования, связывающие твисторные поля с тензорными полями, описывающими безмассовую спиновую частицу в обычном пространстве-времени.

В разделе 3.2 получена твисторная формулировка массивной частицы с произвольным фиксированным спином из массивной спиновой частицы в формулировке с индексным спинором посредством введения чисто калибровочных гармонических переменных и последующей частичной фиксации калибровок. Полученная твисторная модель массивной спиновой частицы описывается двумя твисторами (битвистором) и двумя комплексными скалярами. В результате канонического преобразования получены выражения твисторных преобразований. Проведено квантование твисторной спиновой частицы и показано, что на физических состояниях операторы Казимира группы Пуанкаре принимают значения, соответствующие массивной частице фиксированного ненулевого спина. Волновая функция твисторной массивной частицы определена на однородном пространстве $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ и имеет гармоническое разложение по представлениях основной серии с одним фиксированным весом. Построенные интегральные преобразования, связывающие твисторные поля с обычными пространственно-временными полями, имеют вид интеграла

$$\Phi_{\alpha_1\dots\alpha_{2J}}(x) = \int d^3\lambda\, e^{ix^\mu\lambda^k\sigma_\mu\bar{\lambda}_k}\,\lambda^{i_1}_{\alpha_1}\dots\lambda^{i_{2J}}_{\alpha_{2J}}\,\Psi_{i_1\dots i_{2J}}(\lambda,\bar{\lambda}) \tag{8}$$

с инвариантной мерой $d^3\lambda$ на $SL(2,C)/SU(2)$.

В разделе 3.3 построена модель Ширафуджи [117] для массивных частиц со спином и электрическим зарядом. Основными переменными в модели являются пространственно-временной четыре-вектор, четыре скаляры, описывающие спиновые и зарядовые степени свободы, а также пара вейлевских спиноров. Геометрическое описание, предложенное в этом разделе, представляет промежуточный шаг между свободной чисто твисторной моделью в битвисторном пространстве, в котором пространственно-временные вектора координаты и четыре-импульса составные, и стандартной моделью частицы, где эти вектора элементарные. Проведено квантование модели и найдены первично-квантованные волновые функции, описывающие релятивистские частицы с массой, спином и электрическим зарядом. В отличии от битвисторного описания массивной частицы раздела 3.2, здесь все степени свободы, описывающие массивную частицу со спином и внутренним зарядом, полностью проистекают из битвисторной геометрии и связаны с мнимой частью координаты комплексифицированного пространства Минковского.

В разделе 3.4 обсуждаются полученные в третьей главе результаты. Материал этой главы опубликован в работах [158, 159, 160, 161, 162, 163, 164] и трудах конференций [165, 166, 167].

Четвертая глава посвящается исследованию моделей частицы и суперчастицы, конфигурационное пространство которых содержит, помимо четыре-вектора координаты $x^{\dot{\alpha}\beta}$, тензорные координаты $z^{\alpha\beta}$, $\bar{z}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, соответствующие изометриям, генерируемым дополнительными тензорными центральными зарядами обобщенной релятивистской алгебры. В частности, рассматриваются модели массивной и безмассовой суперчастицы, в которых тензорные импульсы описываются единым образом с помощью твисторных и гармонических переменных, а также модель $\mathcal{N}{=}1$, $D{=}4$ массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами, которая, в случае одной κ-симметрии, эквивалентна массивной спиновой частице в псевдоклассическом подходе. Как отмечалось выше, этот результат продолжает последовательность эквивалентностей систем с таргетной суперсимметрией и систем с локальной суперсимметрией на мировой линии, инициированную исследованиями [99, 168], в которых была предложена одна из первых твисторных моделей безмассовой суперчастицы и установлена эквивалентность на классическом уровне между безмассовыми спиновой частицей и суперчастицей без центральных зарядов. Идея отожествления κ-симметрии суперчастицы с локальной суперсимметрией на мировой линии спиновой частицы была также основополагающей при описании супербран с помощью метода супервложений [100, 101].

В разделе 4.1 рассматривается модель $\mathcal{N}{=}1$, $D{=}4$ массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами, получаемой из псевдокласической модели частицы спина 1/2. Последняя модель после введения вспомогательных коммутирующих спинорных переменных, канонического преобразования и исключения части вспомогательных переменных, производит массивную суперчастицу, инвариантную относительно обобщенной суперсимметрии с тензорными центральными зарядами и обладающую одной или двумя κ-симметриями. На языке супербранных теорий эти модели соответствуют БПС бранным конфигурациям, сохраняющим 1/4 или 1/2 часть суперсимметрии [95]. Показано соответствие полученной системы с моделью массивной суперчастицы [102], в которой сохраняется 1/4 таргетных суперсимметрий.

В разделе 4.2 предложена твистороподобная формулировка суперчастицы с тензорными центральными зарядами, в которой массивный и безмассовый случаи описаны единообразно. Модель использует одновременно как координаты центральных зарядов, так и вспомогательные бозонные спинорные переменные. Использование спиноров, играющих роль спинорных лоренцевых гармоник, позволяет значительно упростить анализ при сохранении его ковариантности. При нулевой массе наша модель сводится к твисторной формулировке безмассовой суперчастицы с тензорными центральными зарядами [96, 97], в которой одна или две таргетные суперсимметрии нарушены. В массивном случае получена би-твисторная формулировка массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами, сохраняющей 1/4 или 1/2 таргетных суперсимметрий.

В предыдущих разделах генераторы тензорных центральных зарядов присутствовали в антикоммутаторе суперзарядов. В разделе 4.3 рассмотрены системы, инвариантные относительно группы Максвелла, в которой пространственно-временные трансляции P_μ не коммутируют, а коммутатор их

$$[P_\mu, P_\nu] = i\, e\, Z_{\mu\nu} \tag{9}$$

выражается через тензорные центральные заряды $Z_{\mu\nu}$, $[Z_{\mu\nu}, Z_{\lambda\rho}] = [Z_{\mu\nu}, P_\lambda] = 0$. Данная алгебра имеет естественное приложение для описания квантово-механических состояний частицы с электрическим зарядом e, взаимодействующей с постоянным электромагнитным полем, в частности, при рассмотрении проблемы Ландау. В данном разделе найдены ковариантные формы Картана и построено действие частицы, инвариантное относительно симметрии Максвелла, а также проведено квантование и изучен квантово-механический спектр модели.

В последнем разделе четвертой главы резюмируются полученные результаты, опубликованные в работах [169, 170, 171] и трудах конференций [172, 173, 174].

В пятой главе рассматриваются новые формулировки суперчастиц высших спинов (ВС) и расширенных объектов, построенные с использованием твисторных методов. В частности, построены новые модели частицы и суперчастицы ВС с использованием бозонной суперсимметрии, модели, генерирующие развернутую формулировку полей ВС, а также твисторные формулировки струны Намбу-Гото.

В разделе 5.1 приводится краткий обзор симметрий ВС, основанные на бесконечномерных расширениях обобщенной конформной группы Sp(8,$\mathbb{R}$) и SU(3,2)-обобщении конформной симметрии.

В разделе 5.2 проведено изучение модели релятивистской частицы, инвариантной относительно бозонного аналога суперсимметрии. Генераторы бозонной суперсимметрии R_a образуют четырех-компонентный спинор и удовлетворяют алгебре коммутаторов

$$[R_a, R_b] = 2(\gamma^\mu \gamma_5 C)_{ab} P_\mu + 2C_{ab} Z^{(1)} + 2(\gamma_5 C)_{ab} Z^{(2)}\,, \tag{10}$$

содержащей уже в $\mathcal{N}$=1 случае скалярный $Z^{(1)}$ и псевдоскалярный $Z^{(2)}$ центральные заряды, которые связаны с массовым параметром. Выполнено квантования модели и найден физический спектр в случае $\mathcal{N}$=2 бозонной суперсимметрии. Получено, что при конкретном выборе внутренней симметрии спектр состоит из D=4 массивных спиновых полей, подчиненных уравнениям Баргмана-Вигнера.

В разделе 5.3 построена новая мастер-модель частиц ВС, объединяющая в себе частицы ВС развернутой формулировки и частицы ВС с четной суперсимметрией и воспроизводящая обе эти модели при соответствующих выборах калибровки. Мастер-частица ВС эволюционирует в пространстве, параметризованном спинорными переменными обоих систем и дополнительным комплексным скаляром, и описывается только связями первого рода. Они включают в себя развернутые связи, обобщенные спинорные связи и скалярную связь, генерирующую локальные $U(1)$ преобразования твистороподобных переменных и комплексной скалярной координаты. Проведено каноническое квантование мастер-системы и получен соответствующий набор уравнений ВС для волновой функции. При этом, развернутые уравнения оказывается следствием квантовых спинорных связей. Вследствие скалярной $U(1)$ связи поля ВС характеризуются внешним $U(1)$-зарядом q, который полностью определяет соответствующий бесконечномерный мультиплет спинов. Мультиплет ВС со всеми спиральностями развернутой формулировки получается как q=0 мультиплет и его сопряженный. Кроме того, возникают новые мультиплеты ВС с $q\neq0$. При $q>0$ они натянуты на самодуальные полевые напряженности с растущими положительными спиральностями, начиная с $\frac{q}{2}$. Мультиплеты с $q<0$ проявляют интересное свойство “переворота спина”: они включают в себя самодуальные поля всех неотрицательных спиральностей, а также конечное число анти-самодуальных полей с отрицательными спиральностями. Дано эквивалентное описание этих мультиплетов ВС в терминах киральных и антикиральных полей бозонной суперсимметрии с внешними индексами. В этом разделе построена также твисторная формулировка мастер-системы и полевое твисторное преобразования, которые позволяют реконструировать пространственно-временнное поле ВС по твисторному “препотенциалу”, разрешающего уравнения ВС.

В разделе 5.4 предложена новая модель безмассовой суперчастицы высших спинов, распространяющейся в $\mathcal{N}$=1, D=4 суперпространстве, расширенном коммутирующим вейлевским спинором, и обладающая $SU(3,2|1)$-симметрией. Рассмотрение суперконформной симметрии высших спинов $SU(3,2|1)$ позволило сохранить условие $\mathcal{N}$=1 киральности, лежащей в основе геометрического подхода в обычной $\mathcal{N}$=1 супергравитации [175] – существование кирального предела имеет решающее значение для любой удовлетворительной суперполевой теории ВС, включающей ВС обобщения $\mathcal{N}$=1 супергравитации [176]. Проведено квантование методом Гупта-Блейлера с детальным анализом суперконформной инвариантности динамических уравнений. В результате квантования получена волновая функция, которая описывает бесконечную башню киральных $\mathcal{N}$=1 супермультиплетов с растущим числом внешних спинорных индексов.

В разделе 5.5 развиты твисторные методы в применении к описанию динамики расширенных объектов. Получено твисторное действие бозонной струны с натяжением, генерируемое канонической 2-формой в битвисторном пространстве и доказана эквивалентность твисторной модели и двух импульсных формулировок D=4 бозонной струны: с векторными и с тензорными струнными импульсами.

В разделе 5.6 построено альтернативное битвисторное действие бозонной D=4 струны Намбу-Гото. Показано, что такая формулировка с помощью соответствующей фиксации калибровки локального масштабного преобразования приводит к билинейному твисторному действию и каноническим правилам квантования для двухмерного твисторного струнного поля. Получено множество связей первого рода, описывающее твисторную струнную модель и содержащее две связи Вирасоро и две $U(1)\bigotimes U(1)$ связи Каца - Муди для локальных фазовых преобразований струнных твисторов.

В последнем разделе пятой главы резюмируются полученные результаты, опубликованные в работах [162, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 171, 183] и трудах конференций [184, 185, 186].

Глава 1

Модели расширенной суперсимметричной механики и их геометрии

Модели суперсимметричной квантовой механики составляют важный элемент в современной физике высоких энергий.

Во-первых, они являются примерами моделей с низкоразмерной суперсимметрией, что позволяет детально исследовать ряд свойств высокоразмерных теорий – суперструн и суперполевых теорий – на качественном уровне. Кроме того, суперсимметричные квантово-механические сигма-модели, описывающие движение суперсимметричных частиц на искривленном многообразии [14], могут быть сопоставлены определенным геометрическим структурам. Эта привлекательная математическая интерпретация в сочетании с их использованием в более физическом контексте, например, в эффективных теориях черных дыр (см., например, [187, 188]), делает их предметом интенсивных исследований в настоящее время.

В этой главе мы остановимся на изучении моделей расширенной суперсимметричной квантовой механики, описывающий HKT (гиперкелеровые с кручением), би-HKT, которые иногда называют CKT (Клиффорд-келеровые с кручением), и OKT (октонионно-келеровые с кручением) многобразия. Для эффективности исследования мы будем использовать суперполевой формализм. Кроме того, использование гармонического $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ суперпространственного подхода [69] даст нам дополнительные возможности в формулировках новых сигма-моделей с $\mathcal{N}{=}\,4$ суперсимметрией.

1.1. Вещественные и комплексные суперсимметричные $d = 1$ сигма-модели с кручением

Сигма-модели описываеют в общем случае системы, в которых конфигурационные пространства, на которых определены динамические переменные, являются не плоскими пространствами $\mathbb{R}^D$, а представляет собой нетривиальные таргетные пространства размерности D. Число пространственно-временных координат может быть произвольным, но в случае механической системы все полевые переменные зависят только от времени. При отсутствии внешних полей бозонный лагранжиан такой $d = 1$ сигма-модели дается выражением

$$L^{\rm bos} \;=\; \tfrac{1}{2}\, g_{MN}(x)\, \dot{x}^M \dot{x}^N \tag{1.1}$$

и описывает свободное движение на многообразии с координатами x^M, $M = 1, \ldots, D$ и метрикой $g_{MN}(x)$.

Лагранжиан (1.1) может быть суперсимметризован различными способами, производя после квантования различные версии суперсимметричной квантовой механики (СКМ). Например, вводя D вещественных $\mathcal{N}{=}\,1$ суперполей [1], $\mathcal{X}^M \;=\; x^M + i\theta\psi^M$, где θ – грассманова координата суперпространства, и рассматривая действие [33, 189]

$$S = -\tfrac{i}{2} \int d\theta dt\, g_{MN}(\mathcal{X})\, D\mathcal{X}^M\, \dot{\mathcal{X}}^N = \tfrac{1}{2} \int dt g_{MN}(x)(\dot{x}^M \dot{x}^N - i\psi^M \nabla\psi^N)\,, \tag{1.2}$$

где $D \;=\; \partial_\theta + i\theta\partial_t$, $g_{MN} \;=\; g_{NM}$ и $\nabla\psi^N \;=\; \dot{\psi}^N + \Gamma^N_{PQ}\dot{x}^P\psi^Q$, получаем, что квантовая версия соответствующего суперзаряда может быть ассоциирована с оператором Дирака.

Другая возможность состоит во введении вещественных $\mathcal{N}{=}\,2$ суперполей с удвоенным числом фермионных степеней свободы,

$$X^M = x^M + \theta\psi^M + \bar{\psi}^M\bar{\theta} + F^M\theta\bar{\theta}\,. \tag{1.3}$$

Этот $\mathcal{N}{=}2, d{=}1$ мультиплет обозначается посредством $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, где цифры обозначают соответственно количество физических бозонных, физических фермионных и вспомогательных бозонных полей [190]. В этих обозначениях ранее рассмотренный $\mathcal{N}{=}\,1$ мультиплет является $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, а $\mathcal{N}{=}\,2$ мультиплет $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ расщепляется в прямую сумму $\mathcal{N}{=}\,1$ мультиплетов: $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$. Сигма-модельное действие для мультиплета $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ [191]

$$\begin{aligned} S \;&=\; -\tfrac{1}{2} \int dt d\bar{\theta} d\theta\, g_{MN}(X) D X^M \bar{D} X^N \qquad (1.4)\\ &=\; \tfrac{1}{2} \int dt \Big[g_{MN} \Big(\dot{x}^M \dot{x}^N + i[\bar{\psi}^M \nabla\psi^N - \nabla\bar{\psi}^M \psi^N] \Big) + R_{MNPQ} \bar{\psi}^M \psi^N \bar{\psi}^P \psi^Q \Big] \end{aligned}$$

---

[1] В случае суперсимметричной механики $\mathcal{N}$ считает число вещественных суперсимметрий.

где $\bar\theta = (\bar\theta)$ и

$$D \; = \; \frac{\partial}{\partial\theta} - i\bar\theta\frac{\partial}{dt}\,, \qquad\qquad \bar D = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\theta\frac{\partial}{dt}\,, \tag{1.5}$$

содержит в себе четырехфермионный член, построенный с помощью тензора Римана. При переходе в (1.4) к компонентному действию мы исключили вспомогательные поля F^M с помощью их уравнений движения. Система (1.4) имеет красивую геометрическую интерпретацию [192]: квантовые суперзаряды играют роль оператора внешней производной d и ему сопряженного $d^\dagger$ комплекса де Рама.

В работе [36] была построена и изучена специальная $\mathcal{N}\!=2$ суперсимметричная квантово-механическая модель для произвольного комплексного многообразия вещественной размерности $D\!=2n$, построенная в терминах киральных суперполей

$$Z^{\,j} = z^{\,j} + \sqrt{2}\,\theta\psi^{\,j} - i\theta\bar\theta\,\dot z^{\,j}\,, \quad \bar Z^{\,\bar j} = \bar z^{\,\bar j} - \sqrt{2}\,\bar\theta\bar\psi^{\,\bar j} + i\theta\bar\theta\dot{\bar z}^{\,\bar j}\,, \tag{1.6}$$

$j, \bar j = 1, \ldots, n;\ \bar D Z = D\bar Z = 0$, которые описывают $\mathcal{N} = 2, d = 1$ мультиплеты $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$. Действие было выбрано в виде [31]

$$\begin{aligned} S \; &= \; \int dt d^2\theta \, (\mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{gauge})\,, \\ &\mathcal{L}_\sigma = -\tfrac{1}{4}\, h_{j\bar k}(Z, \bar Z)\, DZ^{\,j}\bar D\bar Z^{\,\bar k}\,, \qquad \mathcal{L}_{gauge} = W(Z, \bar Z) \end{aligned} \tag{1.7}$$

с произвольными суперфункциями $h_{i\bar j}$, определяющими метрику, $ds^2 = 2h_{j\bar k}dz^j d\bar z^{\bar k}$, и препотенциалом W, генерирующим взаимодействие с фоновым калибровочным потенциалом $A_M = (-i\partial_j W, i\partial_{\bar j} W)$. Компонентное действие, соответствующее (1.7), содержит член с кручением, который зануляется только для кэллерового многообразия, когда метрика удовлетворяет связи $\partial_{[j} h_{i]\bar k} = 0$. Соответствующие квантовые $\mathcal{N}\!=2$ суперзаряды могут быть проинтерпретированы как голоморфные внешние производные ∂ и их сопряженные $\partial^\dagger$, образующие скрученные или нескрученные комплексы Дольбо.

Каждое из действий (1.2), (1.4) и (1.7) может быть деформируемо включением дополнительных кручений. Модель (1.2) обобщается включением в действие члена [30]

$$S \; = \; -\tfrac{1}{12} \int d\theta dt \, C_{KLM}\mathcal{D}\mathcal{X}^K\mathcal{D}\mathcal{X}^L\mathcal{D}\mathcal{X}^M\,, \tag{1.8}$$

что приводит к следующему компонентному лагранжиану

$$L = \tfrac{1}{2}\, g_{MN}(x) \left(\dot{x}^M \dot{x}^N + i\psi^M \hat{\nabla} \psi^N \right) - \tfrac{1}{12}\, \partial_P C_{KLM} \psi^P \psi^K \psi^L \psi^M \,, \tag{1.9}$$

в котором ковариантные производные $\hat{\nabla}$ содержат новую аффинную связность

$$\hat{\Gamma}_{K,LM} = \Gamma_{K,LM} + \tfrac{1}{2}\, C_{KLM} \tag{1.10}$$

с дополнительным кручением, где $\Gamma_{K,LM}$ является стандартным символом Кристоффеля. Квантовый суперзаряд, полученный из действия (1.9), имеет вид [136]

$$\mathcal{Q} \;=\; \psi^M \left[\Pi_M - \tfrac{i}{2}\, \Omega_{M,BC} \psi^B \psi^C \right] + \tfrac{i}{12}\, C_{KLM} \psi^K \psi^L \psi^M \;, \tag{1.11}$$

где $\Omega_{M,BC}$ является стандартной спиновой связностью, удовлетворяющей уравнению Маурера-Картана

$$de_A + \Omega_{AB} \wedge e_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Omega_{M,AB} = e_{AK} (\partial_M e_B^K + \Gamma^K_{ML} e_B^L) \,. \tag{1.12}$$

Суперзаряд (1.11) может быть проинтерпретирован как кручение-содержащий оператор Дирака, в котором кручение присутствует с дополнительным фактором 1/3 [136, 137]: последний член в (1.11) может быть поглощен следующим переопределением спиновой связности (сравните с (1.10))

$$\Omega_{M,BC} \;\to\; \tilde{\Omega}_{M,BC} = e_{BK} (\partial_M e_B^K + \tilde{\Gamma}^K_{ML} e_C^L), \quad \tilde{\Gamma}_{K,LM} = \Gamma_{K,ML} + \tfrac{1}{6}\, C_{KML} \,.$$

Действие (1.4) для $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ мультиплета, соответствующее комплексу де Рама, также может быть продеформировано. На геометрическом языке простейшая деформация такого типа [192] описывается посредством

$$d_W \mathcal{O} = d\mathcal{O} - dW \wedge \mathcal{O} \,, \qquad d_W^\dagger \mathcal{O} = d^\dagger \mathcal{O} + \langle dW, \mathcal{O} \rangle \,, \tag{1.13}$$

где W является произвольной регулярной функцией и $\langle dW, \mathcal{O} \rangle$ является внутренним произведением: для p-формы $\mathcal{O}$, $\langle dW, \mathcal{O} \rangle = p\, (\partial_{M_1} W)\, \mathcal{O}^{M_1}{}_{M_2 \ldots M_p}\, dx^{M_2} \wedge \cdots \wedge dx^{M_p}$. Деформация (1.13) соответствует добавлению потенциального члена

$$\int d^2\theta dt\, W(X^M) \tag{1.14}$$

в действие. Можно рассмотреть также деформацию другого типа [24, 25]

$$d_{\mathcal{B}}\mathcal{O} = d\mathcal{O} - d\mathcal{B} \wedge \mathcal{O}\,, \qquad d^{\dagger}_{\mathcal{B}}\mathcal{O} = d^{\dagger}\mathcal{O} - \langle d\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{O}\rangle\ , \tag{1.15}$$

где регулярная 2-форма $\mathcal{B}$ определяет кручению $\mathcal{C}$ и внутреннее произведение $\langle d\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{O}\rangle$ включает контракцию по всем индексам в $d\bar{\mathcal{B}}$. Точное определение $\langle d\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{O}\rangle$ будет дано в (1.40) ниже. Операторы $d_{\mathcal{B}}, d^{\dagger}_{\mathcal{B}}$ (как и операторы $d_W, d^{\dagger}_W$) являются нильпотентными и образуют алгебру суперсимметрии, как и операторы $d, d^{\dagger}$. Данная система с деформированной суперсимметрией реализуется в суперполевом формализме добавлением члена

$$S_2 = \frac{1}{2}\int d^2\theta dt\, \mathcal{B}_{MN}(X^P)\, DX^M DX^N \ + \ \text{c.c.} \tag{1.16}$$

к действию (1.4) [30]. Выражения для квантовых суперзарядов и гамильтониан для этой модели (в случае вещественного $\mathcal{B}_{MN}$) можно найти в [26].

Добавление в $d_{\mathcal{B}}$ внешней производной $d\mathcal{B}_4$ произвольной 4-формы $\mathcal{B}_4$ приводит к дополнительной деформации системы (1.4). Деформированный оператор $d_{W,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_4}$ по прежнему нильпотентен. На суперполевом языке это соответствует добавлению в действие члена

$$S_4 \ = \frac{1}{2}\int d^2\theta dt\, \mathcal{B}_{MNPQ}(X^S)\, DX^M DX^N DX^P DX^Q \ + \ \text{c.c.} \tag{1.17}$$

Можно также добавить внешнюю производную 6-формы и т.д. Эти более высокие четномерные формы могут быть названы обобщенными кручениями. Следует отметить, что эти дополнительные суперполевые члены не генерируют в компонентном лагранжиане каких-либо членов с производными по времени более высокого порядка.

Лагранжиан комплексной сигма-модели (1.7) можно деформировать аналогично. Обобщенный лагранжиан получается добавлением членов

$$\sim \mathcal{B}_{jk}(Z,\bar{Z}) DZ^{\,j} DZ^{\,k} + \text{c.c.} \tag{1.18}$$

к $\mathcal{L}_{\sigma}$ [31] или членов $\propto \mathcal{B}_{jklp}$ и т.д. Члены, связанные с дополнительными кручениями, не были рассмотрены в [36].

В настоящем разделе, основанном на работе [140], дается явный вид классических и квантовых $\mathcal{N}$=2 суперзарядов сигма-моделей с кручением на основе мультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ и $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$, с учетом взаимодействий (1.16), (1.17) и потенциального члена (1.14) для вещественной сигма-модели и с участием членов (1.18) для комплексной сигма-модели. Мы также находим вакуумные состояния в этих сигма-моделях и показываем, что включение членов с кручением не влияет на их количество.

1.1.1. Кручения и обобщенные кручения для $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ сигма-модели

Преобразования $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии мультиплета (1.3)

$$\delta X^M = -(\epsilon Q + \bar\epsilon \bar Q)X^M\,, \qquad Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\bar\theta\partial_t\,, \quad \bar Q = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\theta\partial_t \tag{1.19}$$

генерируют следующие преобразования компонентных полей

$$\begin{aligned} \delta x^M &= -(\epsilon\,\psi^M - \bar\epsilon\bar\psi^M)\,, \qquad & \delta F^M &= i(\epsilon\,\dot\psi^M + \bar\epsilon\,\dot{\bar\psi}^M)\,, \\ \delta\psi^M &= \bar\epsilon\,(i\dot x^M - F^M)\,, \qquad & \delta\bar\psi^M &= -\epsilon\,(i\dot x^M + F^M)\,. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Рассмотрим действие $S = S_g + S_2 + S_4$, где S_g есть стандартное действие, представленное суммой (1.4) и (1.14), тогда как S_2 и S_4 являются членами (1.16) и (1.17), описывающие кручение и обобщенное кручение. Соответствующие компонентные действия имеют вид

$$\begin{aligned} S_g &= \int dt\Big[\frac{1}{2}\,g_{MN}\left(\dot x^M \dot x^N + F^M F^N\right) + \frac{i}{2}\,g_{MN}\left(\bar\psi^M \nabla\psi^N - \nabla\bar\psi^M \psi^N\right) \\ &\quad + \Gamma_{M,NP}\psi^N\bar\psi^P F^M - \frac{1}{2}\,\partial_{[M}\Gamma_{N,P]Q}\psi^M\bar\psi^Q\psi^P\bar\psi^N \\ &\quad + F^M\partial_M W + \partial_M\partial_N W\psi^M\bar\psi^N\Big], \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\int dt\Big[\,\left(\partial_M C_{NPQ}\psi^N\psi^P\psi^Q\bar\psi^M + \partial_M\bar C_{NPQ}\bar\psi^N\bar\psi^P\bar\psi^Q\psi^M\right) \\ &\quad + 3\,C_{MNP}(F^M - i\dot x^M)\psi^N\psi^P - 3\,\bar C_{MNP}(F^M + i\dot x^M)\bar\psi^N\bar\psi^P\Big], \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{2}\int dt\Big[\,\left(\partial_M C_{NPQST}\psi^N\psi^P\psi^Q\psi^S\psi^T\bar\psi^M + \text{c.c.}\right) \\ &\quad + 5\,C_{MNPQS}(F^M - i\dot x^M)\psi^N\psi^P\psi^Q\psi^S + \text{c.c.}\Big]. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\nabla\psi^M = \dot\psi^M + \Gamma^M_{NP}\dot x^N\psi^P\,, \\ &\Gamma_{M,NP} = \tfrac{1}{2}\left[\partial_N g_{MP} + \partial_P g_{MN} - \partial_M g_{NP}\right], \\ &C_{MNP} = \tfrac{1}{3}\left\{\partial_M\mathcal{B}_{NP} + \text{cycle}(M,N,P)\right\}, \\ &C_{MNPQS} = \tfrac{1}{5}\left\{\partial_M\mathcal{B}_{NPQS} + \text{cycle}(M,N,P,Q,S)\right\}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Уравнения движения для F^M (мы рассматриваем для простоты случай с $W=0$) дают

$$F^M = -\Gamma^M_{NP}\,\psi^N\bar\psi^P - \frac{1}{2}\,\mathcal{C}^M\,, \tag{1.25}$$

где

$$\mathcal{C}^M = 3\left[C^{(2)M}(\psi)^2 - \bar C^{(2)M}(\bar\psi)^2\right] + 5\left[C^{(4)M}(\psi)^4 + \bar C^{(4)M}(\bar\psi)^4\right], \tag{1.26}$$

$$C^{(2)M}(\psi)^2 := C^M_{NP}\,\psi^N\psi^P\,, \quad C^{(4)M}(\psi)^4 := C^M_{NPQS}\,\psi^N\psi^P\psi^Q\psi^S\,, \quad \text{etc.} \tag{1.27}$$

После подстановки этих выражений в сумму действий (1.21) - (1.23) получаем полное действие на массовой поверхности

$$\begin{aligned}
S_{\text{on-sh}} \;=\; & \frac{1}{2}\int dt\Big[g_{MN}\dot x^M\dot x^N + ig_{MN}(\bar\psi^M\nabla\psi^N - \nabla\bar\psi^M\psi^N) \\
& + (\nabla_M C_{NPQ}\psi^N\psi^P\psi^Q\bar\psi^M + \nabla_M\bar C_{NPQ}\bar\psi^N\bar\psi^P\bar\psi^Q\psi^M) \\
& - 3i\,\dot x^M(C_{MNP}\psi^N\psi^P + \bar C_{MNP}\bar\psi^N\bar\psi^P) \\
& + (\nabla_M C_{NPQST}\psi^N\psi^P\psi^Q\psi^S\psi^T\bar\psi^M - \nabla_M\bar C_{NPQST}\bar\psi^N\bar\psi^P\bar\psi^Q\bar\psi^S\bar\psi^T\psi^M) \\
& - 5i\,\dot x^M(C_{MNPQS}\psi^N\psi^P\psi^Q\psi^S - \bar C_{MNPQS}\bar\psi^N\bar\psi^P\bar\psi^Q\bar\psi^S) \\
& + R_{MNPQ}\bar\psi^M\psi^N\bar\psi^P\psi^Q - \frac{1}{4}\,\mathcal{C}^M\mathcal{C}_M\Big],
\end{aligned} \tag{1.28}$$

где

$$R_{MNPQ} = g_{MT}\left(\partial_P\Gamma^T_{QN} - \partial_Q\Gamma^T_{PN} + \Gamma^T_{PS}\Gamma^S_{QN} - \Gamma^T_{QS}\Gamma^S_{PN}\right) \tag{1.29}$$

является тензором Римана.

Классические сохраняющиеся нетеровские суперзаряды, вычисленные с помощью инфинитезимальных преобразований (1.20), имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
Q \;=\; & \psi^M(\tilde\Pi_M + i\partial_M W) - \tfrac{i}{2}\,\partial_M g_{NP}\psi^M\psi^N\bar\psi^P \\
& + i\,C_{MNP}\psi^M\psi^N\psi^P + \,iC_{MNPQS}\psi^M\psi^N\psi^P\psi^Q\psi^S\,,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
\bar Q \;=\; & \bar\psi^M(\tilde\Pi_M - i\partial_M W) - \tfrac{i}{2}\,\partial_M h_{NP}\bar\psi^M\bar\psi^N\psi^P \\
& + i\,\bar C_{MNP}\bar\psi^M\bar\psi^N\bar\psi^P - i\,\bar C_{MNPQS}\bar\psi^M\bar\psi^N\bar\psi^P\bar\psi^Q\bar\psi^S\,.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Здесь $\tilde\Pi_M$ является каноническим импульсом,

$$\tilde\Pi_M = \frac{\partial L}{\partial\dot x^M} = g_{MN}\dot x^N - \frac{i}{2}\,\Gamma_{N,MP}\left(\psi^P\bar\psi^N - \psi^N\bar\psi^P\right) - \frac{i}{2}\,\mathcal{S}_M\,, \tag{1.32}$$

где

$$\mathcal{S}^M := 3\left[C^{(2)M}(\psi)^2 + \bar{C}^{(2)M}(\bar{\psi})^2\right] + 5\left[C^{(4)M}(\psi)^4 - \bar{C}^{(4)M}(\bar{\psi})^4\right].$$

Несмотря на то, что вспомогательные поля F^M содержались в лагранжиане, они явно не присутствуют в суперзарядах.

Частные производные (1.32) рассчитывались в предположении фиксированных $\psi^M, \bar{\psi}^M$. Однако последние переменные не являются канонически сопряженными: их скобка Пуассона равна $\{\bar{\psi}^M, \psi^N\} = g^{MN}$. В качестве предварительного шага при квантовании следует определить касательное пространство канонически сопряженных фермионных переменных $\psi^A = e^A_M \psi^M$, $\bar{\psi}^A = e^A_M \bar{\psi}^M$ и выразить классические суперзарядами через эти переменные и новый бозонный канонический импульс

$$\Pi_M = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M}\right|_{\text{fixed } \psi^A} = \tilde{\Pi}_M - \frac{\partial \dot{\psi}^A}{\partial \dot{x}^M}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^A} - \frac{\partial \dot{\bar{\psi}}^A}{\partial \dot{x}^M}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}^A}\,. \tag{1.33}$$

Как результат, мы получаем следующее классическое выражение для Q (и, аналогично, для $\bar{Q}$):

$$\begin{aligned} Q \;=\; & \psi^A e^{AM}(\Pi_M + i\partial_M W) - i\Omega^{C,AB}\,\psi^C\psi^A\bar{\psi}^B \\ & + i\,C^{ABC}\psi^A\psi^B\psi^C + i\,C^{ABCDE}\psi^A\psi^B\psi^C\psi^D\psi^E\,. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Здесь

$$\Omega^{C,AB} = e^{MC}\,\Omega^{AB}_M\,, \qquad \Omega^{AB}_M = e^A_N(\partial_M e^{NB} + \Gamma^N_{MT}e^{TB})\,, \tag{1.35}$$

является стандартной спиновой связностью.

При получении квантовых суперзарядов нужно заменить Π_M и $\bar{\psi}^A$ дифференциальными операторами $\Pi_M \to -i\partial/\partial x^M$, $\bar{\psi}^A \to \partial/\partial\psi^A$ и решить проблему упорядочения. Чтобы сделать выбор между различными квантовыми теориями, соответствующими данной классической, мы требуем, чтобы алгебра суперсимметрии оставалась неизменной на квантовом уровне и чтобы Q_{qu} и $\bar{Q}_{qu}$ были эрмитово сопряжены друг другу. Это фиксирует квантовые суперзаряды и гамильтониан.

Как было показано в [193], общий рецепт такого квантования, сохраняющего суперсимметрии, состоит в следующем.

- Делаем вейлевское упорядочение в суперзарядах.

- Полученные таким образом суперзаряды нильпотентны и их антикоммутатор дает квантовый гамильтониан. В общем случае, он *не* совпадает с оператором, который получается из классического гамильтониана вейлевским упорядочением.

- Эта процедура дает квантовые суперзаряды и гамильтониан, действующие в “плоском” гильбертовом пространстве с мерой $\sim \left(\prod_M dx^M\right) d(\text{fermions})$ в скалярном произведении. Для получения выражений ковариантных операторов, действующих в гильбертовом пространстве с мерой, использующей фактор $\sqrt{\det g}$, необходимо выполнить преобразование подобия

$$(Q^{\rm cov}, \bar{Q}^{\rm cov}) = (\det g)^{-1/4} (Q^{\rm flat}, \bar{Q}^{\rm flat})(\det g)^{1/4} \tag{1.36}$$

Выполнив соответствующие действия, мы получаем следующие квантовые суперзаряды

$$\begin{aligned} Q^{\rm cov} &= -i\psi^A e^{MA}(\partial_M - \partial_M W) - i\Omega^{C,AB}\,\psi^C\bar\psi^A\psi^B \\ &\qquad + i\,C^{ABC}\psi^A\psi^B\psi^C + i\,C^{ABCDE}\psi^A\psi^B\psi^C\psi^D\psi^E\,, \\ \bar Q^{\rm cov} &= -i\bar\psi^A e^{MA}(\partial_M + \partial_M W) - i\Omega^{C,AB}\,\bar\psi^C\psi^A\bar\psi^B \\ &\qquad + i\,\bar C^{ABC}\bar\psi^A\bar\psi^B\bar\psi^C - i\,\bar C^{ABCDE}\bar\psi^A\bar\psi^B\bar\psi^C\bar\psi^D\bar\psi^E\,. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Полученные суперзаряды составляют $\mathcal{N}$=2, $d = 1$ супералгебру Пуанкаре

$$(Q^{\rm cov})^2 = (\bar Q^{\rm cov})^2 = 0\,,\ \{Q^{\rm cov}, \bar Q^{\rm cov}\} = 2H\,,\ [Q^{\rm cov}, H] = [\bar Q^{\rm cov}, H] = 0 \tag{1.38}$$

и изоморфны твистованным операторам де Рама (1.15) с $\mathcal{B} = \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_4$. Для наших дальнейших целей, мы не будем нуждаться в явном виде квантового гамильтониана H . Для вещественных C^{ABC} и нулевых C^{ABCDE} он был приведен в [26]. Изоморфизм между суперзарядами (1.37) и операторами, входящими в геометрическую конструкцию (1.15), подразумевает, в частности, соответствие

$$\langle d\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{O}\rangle \ \Leftrightarrow\ \bar C^{ABC}\frac{\partial}{\partial\psi^A}\frac{\partial}{\partial\psi^B}\frac{\partial}{\partial\psi^C}\,\psi^{D_1}\ldots\psi^{D_n}\,\mathcal{O}^{D_1\ldots D_n}\,, \tag{1.39}$$

которое дает следующее явное определение скалярного произведения во второй строчке в (1.15):

$$\langle d\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{O}\rangle \;=\; -\frac{p!}{(p-3)!}\,\bar{C}^{MNP}\mathcal{O}_{MNPR_4\ldots R_n}dx^{R_4}\wedge\cdots\wedge dx^{R_p} \qquad (1.40)$$

для p-формы $\mathcal{O}$ ($p \geq 3$). Мы будем использовать его в дальнейшем.

Суперзаряды (1.37) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} Q^{\text{cov}} &= e^{W+\psi^K\psi^L\mathcal{B}_{KL}+\psi^K\psi^L\psi^M\psi^N\mathcal{B}_{KLMN}}\,Q_0^{\text{cov}}\,e^{-W-\psi^K\psi^L\mathcal{B}_{KL}-\psi^K\psi^L\psi^M\psi^N\mathcal{B}_{KLMN}}\,, \\ \bar{Q}^{\text{cov}} &= e^{-W+\bar\psi^K\bar\psi^L\bar{\mathcal{B}}_{KL}-\bar\psi^K\bar\psi^L\bar\psi^M\bar\psi^N\bar{\mathcal{B}}_{KLMN}}\,\bar{Q}_0^{\text{cov}}\,e^{W-\bar\psi^K\bar\psi^L\bar{\mathcal{B}}_{KL}+\bar\psi^K\bar\psi^L\bar\psi^M\bar\psi^N\bar{\mathcal{B}}_{KLMN}}, \end{aligned} \qquad (1.41)$$

где $Q_0^{\text{cov}}, \bar{Q}_0^{\text{cov}}$ – суперзаряды с подавленными кручением и потенциальными членами. Отметим, что производные в $Q_0^{\text{cov}}, \bar{Q}_0^{\text{cov}}$ действуют здесь не только на W и $\mathcal{B}$, но также на $\psi^K = e^{KA}\psi^A$ и им подобные. Эти члены в точности компенсируются членами, возникающими из коммутаторов членов $\sim \Omega\psi\bar\psi\psi$ и $\sim \Omega\bar\psi\psi\bar\psi$ в Q_0^{cov} и $\bar{Q}_0^{\text{cov}}$ со слагаемыми с кручением.

На языке дифференциальных форм это замечательное представление для суперзарядов имеет довольно прозрачный смысл. Первая строка (1.41) означает

$$d_{W,\mathcal{B}} = e^{W+\mathcal{B}}de^{-W-\mathcal{B}}\,, \qquad (1.42)$$

что является прямым следствием определений (1.13), (1.15). Вторая строка является эрмитовым сопряженнием первой. Представление (1.41), (1.42) будет использоваться при нахождении явного вида основного состояния волновых функций в последующем.

1.1.2. Комплексная модель с кручениями

Рассмотрим сумму действия (1.7) и дополнительного члена

$$S_{\text{extra torsion}} = \frac{1}{4}\int dtd^2\theta\left(\mathcal{B}_{jk}(Z,\bar{Z})\,DZ^{\,j}DZ^{\,k} - \bar{\mathcal{B}}_{\bar{j}\bar{k}}(Z,\bar{Z})\,\bar{D}\bar{Z}^{\,\bar{j}}\bar{D}\bar{Z}^{\,\bar{k}}\right) \qquad (1.43)$$

с произвольной антисимметричной комплексной суперфункцией $\mathcal{B}_{jk}$ и сопряженной ей $\bar{\mathcal{B}}_{\bar{j}\bar{k}}$. Компонентная форма полного действия имеет вид

$$
\begin{aligned}
S \;=\; \int dt \Big\{ & h_{j\bar{k}} \left[\dot{z}^{\,j}\dot{\bar{z}}^{\,\bar{k}} + \tfrac{i}{2}\left(\psi^{\,j}\dot{\bar{\psi}}^{\,\bar{k}} - \dot{\psi}^{\,j}\bar{\psi}^{\,\bar{k}}\right)\right] + \left(\partial_t\partial_{\bar{l}}h_{j\bar{k}}\right)\psi^{\,t}\psi^{\,j}\bar{\psi}^{\,\bar{l}}\bar{\psi}^{\,\bar{k}} \\
& - \tfrac{i}{2}\left[\left(2\partial_j h_{t\bar{k}} - \partial_t h_{j\bar{k}}\right)\dot{z}^{\,t} - \left(2\partial_{\bar{k}}h_{j\bar{t}} - \partial_{\bar{t}}h_{j\bar{k}}\right)\dot{\bar{z}}^{\,\bar{t}}\right]\psi^{\,j}\bar{\psi}^{\,\bar{k}} \\
& + 2\partial_j\partial_{\bar{k}}W\,\psi^{\,j}\bar{\psi}^{\,\bar{k}} - i\left(\partial_j W\dot{z}^{\,j} - \partial_{\bar{j}}W\dot{\bar{z}}^{\,\bar{j}}\right) \\
& - 3i\,\partial_{[m}\mathcal{B}_{ik]}\,\dot{z}^{\,m}\psi^{\,i}\psi^{\,k} - 3i\,\partial_{[\bar{m}}\bar{\mathcal{B}}_{\bar{i}\bar{k}]}\,\dot{\bar{z}}^{\,\bar{m}}\bar{\psi}^{\,\bar{i}}\bar{\psi}^{\,\bar{k}} \\
& - \partial_{\bar{n}}\partial_m\mathcal{B}_{ik}\,\bar{\psi}^{\,\bar{n}}\psi^{\,m}\psi^{\,i}\psi^{\,k} - \partial_n\partial_{\bar{m}}\bar{\mathcal{B}}_{\bar{i}\bar{k}}\,\psi^{\,n}\bar{\psi}^{\,\bar{m}}\bar{\psi}^{\,\bar{i}}\bar{\psi}^{\,\bar{k}}\Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

Это действие может быть представлено в $\mathcal{N}=1$ суперполевом формализме как сумму членов (1.2), (1.8) и члена

$$
S_{\rm gauge} \;=\; -i\int dt d\theta\, A_M(\mathcal{X}^P)\mathcal{D}\mathcal{X}^M\;, \tag{1.45}
$$

с $M = \{j,\bar{j}\}$, $A_M = \{-i\partial_j W, i\partial_{\bar{j}}W\}$, которая приводит к компонентому лагранжиану

$$
\begin{aligned}
L \;&=\; L_\sigma + L_{\rm extra\ torsion} + L_{\rm gauge} \\
&=\; \tfrac{1}{2}\left[g_{MN}\,\dot{z}^{\,M}\dot{z}^{\,N} + ig_{MN}\,\psi^M\hat{\nabla}\psi^N - \tfrac{1}{6}\,\partial_P C_{KLM}\,\psi^P\psi^K\psi^L\psi^M\right] \\
&\quad\; + A_M\dot{z}^M - \tfrac{i}{2}\,F_{MN}\psi^M\psi^N\,,
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

где $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ и $z^M \equiv x^M = (z^j, \bar{z}^{\bar{j}}), \psi^M = (\psi^j, \bar{\psi}^{\bar{j}})$. Отмечаем, что таргетное пространство в этом случае четномерное.

Ненулевыми компонентами полностью антисимметричного тензора кручения C_{KLM} являются

$$
\begin{aligned}
C_{kl\bar{m}} = -\left(\partial_k h_{l\bar{m}} - \partial_l h_{k\bar{m}}\right)\,, \qquad & C_{\bar{k}\bar{l}m} = (C_{kl\bar{m}})^* = -\left(\partial_{\bar{k}}h_{m\bar{l}} - \partial_{\bar{l}}h_{m\bar{k}}\right)\,, \\
C_{klm} = 12\,\partial_{[k}\mathcal{B}_{lm]}\,, \qquad & C_{\bar{k}\bar{l}\bar{m}} = 12\,\partial_{[\bar{k}}\bar{\mathcal{B}}_{\bar{l}\bar{m}]}\;.
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

Таким образом, члены $\propto \mathcal{B}_{jk}$, $\bar{\mathcal{B}}_{\bar{j}\bar{k}}$ генерируют голоморфные компоненты кручения $C_{klm}, C_{\bar{k}\bar{l}\bar{l}}$. (3,0)-форма $C_{klm}dz^k \wedge dz^l \wedge dz^m$ получается из произвольной (2,0)-формы $\mathcal{B}_{jk}dz^j \wedge dz^k$ посредством внешней голоморфной производной ∂. Кроме того, существуют смешанные компоненты тензора кручения $C_{kl\bar{m}}, C_{\bar{k}\bar{l}m}$, которые не являются произвольными, а жестко связаны с метрикой $h_{j\bar{k}}$. Для келерового многообразия, когда $h_{j\bar{k}} = \partial_j\partial_{\bar{k}}K$, эти компоненты зануляются. В этом случае и когда $\mathcal{B}_{jk} = 0$ лагранжиан (1.46) совпадает с (1.2).

В общем случае, лагранжиан в уравнениях (1.44), (1.46) включает в себя 4-фермионный член, который зануляется [137] в случае замкнутой формы $C_{MNK} dz^M \wedge dz^N \wedge dz^K$. Отметим, что “новые” члены, вызванные дополнительными кручениями $\propto \mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$, появляются только начиная с комплексной таргетной размерности $n = 3$. При $n \leq 2$ они тождественно равны нулю.

Суперзаряды, найденные с помощью теоремы Нётер, имеют вид

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{2}\, e^k_c \psi^{\,c} \left[\Pi_k - i\,\Omega_{k,\bar{a}b}\, \bar{\psi}^{\,\bar{a}} \psi^{\,b} + i\psi^{\,a}\psi^{\,b} e^j_a e^l_b \partial_k \mathcal{B}_{jl}\right], \\ \bar{Q} &= \sqrt{2}\, e^{\bar{k}}_{\bar{c}} \bar{\psi}^{\,\bar{c}} \left[\bar{\Pi}_{\bar{k}} - i\,\bar{\Omega}_{\bar{k},a\bar{b}}\, \psi^{\,a} \bar{\psi}^{\,\bar{b}} + i\bar{\psi}^{\,\bar{a}}\bar{\psi}^{\,\bar{b}} e^{\bar{j}}_{\bar{a}} e^{\bar{l}}_{\bar{b}} \partial_{\bar{k}} \bar{\mathcal{B}}_{\bar{j}\bar{l}}\right], \end{aligned} \tag{1.48}$$

где

$$\Pi_k = P_k + i\,\partial_k W\,, \qquad \bar{\Pi}_{\bar{k}} = P_{\bar{k}} - i\,\partial_{\bar{k}} W\,, \tag{1.49}$$

и $P_k, P_{\bar{k}}$ являются каноническими импульсами, получаемыми варьированием лагранжиана по $\dot{z}^k, \dot{\bar{z}}^{\bar{k}}$ при фиксированных $\psi^a, \bar{\psi}^{\bar{a}}$. Спиновые связности $\Omega_{k,\bar{a}b}$, $\bar{\Omega}_{\bar{k},a\bar{b}}$ являются соответствующими компонентами стандартной вещественной спиновой связности $\Omega_{M,AB}$, удовлетворяющей (1.12). Члены $\propto \partial\mathcal{B}$ в $Q, \bar{Q}$ являются голоморфными компонентами $\hat{\Omega}_{k,ab}$ и $\hat{\bar{\Omega}}_{\bar{k},\bar{a}\bar{b}}$ связности

$$\hat{\Omega}_{M,AB} = e_{AN}(\partial_M e^N_B + \hat{\Gamma}^N_{MK} e^K_B) = \Omega_{M,AB} + \frac{1}{2}\, e^K_A e^L_B C_{MLK}\,, \tag{1.50}$$

удовлетворяющей обобщению уравнения (1.12):

$$de_A + \hat{\Omega}_{AB} \wedge e_B = C_A = C_{ABC}\, dz^B \wedge dz^C\,. \tag{1.51}$$

Можно убедиться, что для специального кручения, компоненты которого представлены в (1.47), сумма $Q + \bar{Q}$ суперзарядов (1.48) совпадает с $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ суперзарядом (1.11). Отметим, что компоненты спиновой связности $\Omega_{k,\bar{a}\bar{b}}$ и $\Omega_{\bar{k},ab}$ равны нулю в келеровом случае.

Канонический гамильтониан H_{cl} имеет компактный вид

$$\begin{aligned} H_{cl} \;=\;& h^{\bar{k}j} \mathcal{P}_j \bar{\mathcal{P}}_{\bar{k}} - e^t_a e^j_c e^{\bar{l}}_{\bar{b}} e^{\bar{k}}_{\bar{d}} \,(\partial_t \partial_{\bar{l}}\, h_{j\bar{k}})\, \psi^{\,a}\psi^{\,c}\bar{\psi}^{\,\bar{b}}\bar{\psi}^{\,\bar{d}} \\ & + e^{\bar{m}}_{\bar{d}} e^i_a e^j_c e^k_c \,(\partial_{\bar{m}}\partial_i \mathcal{B}_{jk})\, \bar{\psi}^{\,\bar{d}}\psi^{\,a}\psi^{\,b}\psi^{\,c} + e^m_d e^{\bar{i}}_{\bar{a}} e^{\bar{j}}_{\bar{b}} e^{\bar{k}}_{\bar{c}} \,(\partial_m \partial_{\bar{i}} \bar{\mathcal{B}}_{\bar{j}\bar{k}})\, \psi^{\,d}\bar{\psi}^{\,\bar{a}}\bar{\psi}^{\,\bar{b}}\bar{\psi}^{\,\bar{c}} \\ & - 2\, e^j_a e^{\bar{k}}_{\bar{b}}\, (\partial_j \partial_{\bar{k}} W)\, \psi^{\,a}\bar{\psi}^{\,\bar{b}}\,, \end{aligned} \tag{1.52}$$

где $\mathcal{P}_M = \Pi_M - \frac{i}{2}\hat{\Omega}_{M,AB}\psi^A\psi^B$.

При переходе к квантовой теории мы используем вейлевское упорядочение в суперзарядах, дополненное преобразованием подобия (1.36) [193]. Как результат этого, мы получаем следующие выражения для ковариантных квантовых суперзарядов

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{cov}} &= \sqrt{2}\, e^k_c \psi^{\,c} \left[\Pi_k - \tfrac{i}{2}\partial_k(\ln\det \bar{e}) + i\,\Omega_{k,\bar{a}b}\,\psi^{\,b}\bar{\psi}^{\,\bar{a}} + i\psi^{\,a}\psi^{\,b} e^j_a e^l_b \partial_k \mathcal{B}_{jl}\right], \\ \bar{Q}^{\mathrm{cov}} &= \sqrt{2}\, e^{\bar{k}}_{\bar{c}} \bar{\psi}^{\,\bar{c}} \left[\bar{\Pi}_{\bar{k}} - \tfrac{i}{2}\partial_{\bar{k}}(\ln\det e) + i\,\bar{\Omega}_{\bar{k},a\bar{b}}\,\bar{\psi}^{\,\bar{b}}\psi^{\,a} + i\bar{\psi}^{\,\bar{a}}\bar{\psi}^{\,\bar{b}} e^{\bar{j}}_{\bar{a}} e^{\bar{l}}_{\bar{b}} \partial_{\bar{k}} \bar{\mathcal{B}}_{\bar{j}\bar{l}}\right], \end{aligned} \tag{1.53}$$

где $\bar{\psi}^{\bar{a}} = \partial/\partial\psi^a$ и $\Pi_M = -i\partial_M - A_M$, $A_M = \{-i\partial_j W, i\partial_{\bar{j}} W\}$. Квантовый гамильтониан равен

$$\begin{aligned} H^{\mathrm{cov}}_{qu} \;=\; & -\frac{1}{2}\,\triangle^{\mathrm{cov}} + \frac{1}{8}\left(R - \frac{1}{2}\,h^{\bar{i}i}h^{\bar{j}j}h^{\bar{k}k}C_{i\,j\,\bar{k}}\,C_{\bar{i}\,\bar{j}\,k} - \frac{1}{6}\,h^{\bar{i}i}h^{\bar{j}j}h^{\bar{k}k}C_{i\,j\,k}\,C_{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}}\right) \\ & - 2\langle\psi^a\bar{\psi}^{\bar{b}}\rangle\, e^i_a e^{\bar{j}}_{\bar{b}}\,(\partial_i\partial_{\bar{j}}W) - \langle\psi^a\psi^b\bar{\psi}^{\bar{c}}\bar{\psi}^{\bar{d}}\rangle\, e^i_a e^j_b e^{\bar{k}}_{\bar{c}} e^{\bar{l}}_{\bar{d}}\,(\partial_i\partial_{\bar{k}}\, h_{j\bar{l}}) \\ & + \langle\bar{\psi}^{\,\bar{d}}\psi^{\,a}\psi^{\,b}\psi^{\,c}\rangle\, e^{\bar{m}}_{\bar{d}} e^i_a e^j_c e^k_c\,(\partial_{\bar{m}}\partial_i\mathcal{B}_{jk}) + e^m_d e^{\bar{i}}_{\bar{a}} e^{\bar{j}}_{\bar{b}} e^{\bar{k}}_{\bar{c}}\,\langle\psi^{\,d}\bar{\psi}^{\,\bar{a}}\bar{\psi}^{\,\bar{b}}\bar{\psi}^{\,\bar{c}}\rangle\,(\partial_m\partial_{\bar{i}}\bar{\mathcal{B}}_{\bar{j}\bar{k}})\,. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Здесь, $\langle\ldots\rangle$ обозначает произведения фермионов, упорядоченных по Вейлю, R является стандартной скалярной кривизной метрики $h_{j\bar{k}}$, а $\triangle^{\mathrm{cov}}$ – ковариантным лапласианом, вычисленным с помощью “шляпочных” аффиной и спиновой связностей, $\triangle^{\mathrm{cov}} = -h^{\bar{k}j}\left(\mathcal{P}_j\bar{\mathcal{P}}_{\bar{k}} + i\hat{\Gamma}^{\bar{q}}_{j\bar{k}}\bar{\mathcal{P}}_{\bar{q}} + \bar{\mathcal{P}}_{\bar{k}}\mathcal{P}_j + i\hat{\Gamma}^{s}_{\bar{k}j}\mathcal{P}_s\right)$.

Обсудим геометрическую интерпретацию рассматриваемой системы. Сумму суперзарядов (1.53)

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{cov}} = Q^{\mathrm{cov}} + \bar{Q}^{\mathrm{cov}} \;\equiv\; i\gamma^M\tilde{\nabla}_M\,, \tag{1.55}$$

можно интерпретировать как оператор Дирака на многобразии, оснащенном кручением $\frac{1}{3}C_{MNP}$, где $\tilde{\nabla}_M = \Pi_M - \frac{i}{2}\,\tilde{\Omega}_{M,BC}\gamma^B\gamma^C$ и $\tilde{\Omega}_{M,BC} = \Omega_{M,BC} + \frac{1}{6}\,e^L_B e^K_C C_{LKM}$. Разность $Q^{\mathrm{cov}} - \bar{Q}^{\mathrm{cov}}$ изоморфна оператору $\gamma^M I^N_M\tilde{\nabla}_N$, где $\tilde{\nabla}_M = \partial_M + \frac{1}{2}\,\tilde{\Omega}_{M,AB}\gamma^A\gamma^B$ и I^M_N является матрицей ковариантно-постоянной комплексной структуры ($I^2 = -1\,,\ \nabla_T I^M_N = 0$).

Как было отмечено в [36], при нулевых дополнительных кручениях $\propto \mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ и при $W = \frac{1}{4}\ln\det h$, суперзаряды (1.53) реализуют комплекс Дольбо. Он включает в себя операторы внешней голоморфной производной ∂ и ей сопряженной $\partial^\dagger$. Когда $W = -\frac{1}{4}\ln\det h$, суперзаряды изоморфны операторам $\bar{\partial}$, $\bar{\partial}^\dagger$ комплекса анти-Дольбо. При других выборах W они реализуют твистованный комплекс Дольбо с $\partial_{\mathcal{A}} = \partial - \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} = \partial W$ является точной $(1,0)$-формой и может быть проинтерпретирована как калибровочное поле.

В более общем случае, рассматриваемом здесь, мы имеем дело с твистованныым комплексом Дольбо, деформированным кручением и определямым операторами (сравните с уравнением (1.15))

$$\begin{aligned} \partial_{W,B}\mathcal{O} &= \partial\mathcal{O} - \partial W \wedge \mathcal{O} - \partial\mathcal{B} \wedge \mathcal{O}\,, \\ \partial^{\dagger}_{W,B}\mathcal{O} &= \partial^{\dagger}\mathcal{O} + \langle \bar{\partial} W, \mathcal{O}\rangle - \langle \bar{\partial}\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{O}\rangle\ . \end{aligned} \tag{1.56}$$

Обозначения $\langle X, Y\rangle$ применяются здесь для комплексного внутреннего произведения. Например, если X является $(0,1)$-формой и Y – $(1,0)$-формой, то $\langle X, Y\rangle = h^{\bar{j}k} X_{\bar{j}} Y_k$.

Отметим, что квантовые суперзаряды (1.53) и гамильтониан (1.54) зависят от $\mathcal{B}$ только в виде внешнего дифференциала $\partial\mathcal{B}$. Это означает, что $\mathcal{B}$ определена с точностью до калибровочных преобразований $\mathcal{B} \to \mathcal{B} + \partial\mathcal{A}$.

1.1.3. Вакуумные состояния

Найдем волновые функции состояний нулевой энергии $\Phi_{\mathcal{B}}$ в $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ и $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$ суперсимметричных квантово-механических сигма-моделях с ненулевым кручением, генерируемых членами (1.16)-(1.18) с тензорами $\mathcal{B}$. Эти волновые функции являются решениями уравнений

$$Q^{\rm cov}\Phi_{\mathcal{B}} = 0\,, \qquad \bar{Q}^{\rm cov}\Phi_{\mathcal{B}} = 0\,. \tag{1.57}$$

При получении общего решения для вакуумных волновых функций $\Phi_{\mathcal{B}}$ мы будем использовать представление (1.41) для квантовых суперзарядов, а также геометрическое соответствие с комплексом де Рама в $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ случае и с комплексом Дольбо в $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$ случае. При этом, мы ограничимся анализом сферы S^n и многообразия $\mathbb{CP}^n$ в первом и втором случаях соответственно.

Комплекс де Рама с кручением

Для комплекса де Рама индекс Виттена $\mathrm{Tr}\{(-1)^F\}$ совпадает с эйлеровой характеристикой χ многообразия. В случае S^n и при четном n, эйлеровая характеристика равна $\chi = 2$, что свидетельствует о наличии двух бозонных нулевых мод. Когда кручение отсутствуют, эти нулевые моды описываются постоянной 0-формой и n-формой объема. Индекс Виттена не может измениться при гладкой деформации, что обеспечивает наличие двух бозонных нулевых мод в спектре также и для деформированного комплекса.

При нечетном n эйлерова характеристика равна нулю. Если многообразие обладает изометриями, то можно рассмотреть еще один индекс – так называемое число Лефшеца $\mathrm{Tr}\{(-1)^F K\}$, где K есть изометрия, коммутирующая с гамильтонианом, например, отражение одной из координат. Для нечетномерной сферы, число Лефшеца равно 2, что означает опять же наличие двух нулевых мод в деформированном комплексе при условии, что деформация согласована с этой изометрией [192]. Для "деформированной" сферы без какой-либо изометрии (или когда изометрия не соблюдается при деформации), этот аргумент не работает. Тем не менее, можно доказать, что количество суперсимметричных вакуумов остается неизменным.

При деформации (1.13) деформированный вакуум можно найти в явном виде. Действительно, оператор $d_W = e^W d e^{-W}$ аннигилирует 0-форму e^W, которая автоматически анигилируется также оператором $d_W^\dagger = e^{-W} d^\dagger e^W$. Кроме того, оператор $d_W^\dagger = e^{-W} d^\dagger e^W$ аннигилирует форму $e^{-W}\mathcal{V}_n = e^{-W}\sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, которая также аннигилируется автоматически оператором d_W.

Покажем, что для деформации (1.15) уравнения (1.57), имеющие на языке дифференциальных форм вид

$$d_{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = d_{\mathcal{B}}^\dagger \Phi_{\mathcal{B}} = 0\,, \tag{1.58}$$

имеют два нетривиальных решения. Рассмотрим форму $\Phi = e^{\mathcal{B}}$. Из (1.42) сразу получаем, что она замкнута в деформированном смысле, $d_{\mathcal{B}}\Phi = 0$. Тем не менее, она не может быть точной, $\Phi \neq d_{\mathcal{B}}\Psi$: тождество $e^{\mathcal{B}} = d_{\mathcal{B}}\Psi = e^{\mathcal{B}} d e^{-\mathcal{B}}\Psi$ приведет к противоречию $1 = d\left(e^{-\mathcal{B}}\Psi\right)$. Отметим, что согласно разложению Ходжа любая форма четного порядка и, в частности, Φ может быть представлена в виде

$$\Phi = d_{\mathcal{B}}\mathcal{X} + d_{\mathcal{B}}^\dagger \mathcal{Y} + \Phi_{\mathcal{B}}\,, \tag{1.59}$$

где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ некоторые формы нечетного порядка, в то время форма $\Phi_{\mathcal{B}}$ удовлетворяет (1.58) и, таким образом, $d_{\mathcal{B}}$ – гармоническая. Разложение (1.59) говорит, что гильбертово пространство любой квантово-механической системы порождается *(i)* нулевыми модами гамильтониана (т.е. $\Phi_{\mathcal{B}}$), *(ii)* состояниями, которые аннигилируются суперзарядом Q, но не суперзарядом $\bar{Q}$ (то есть $d_{\mathcal{B}}\mathcal{X}$) и *(iii)* состояниями, которые аннигилируются суперзарядом $\bar{Q}$, но не Q (то есть $d^{\dagger}_{\mathcal{B}}\mathcal{Y}$). Для нашей формы Φ, которая уничтожается под действием $Q \equiv d_{\mathcal{B}}$, второе слагаемое в разложении (1.59) должно отсутствовать. Поскольку форма не является точной, должны быть некоторые нетривиальные ненулевые решения $\Phi_{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{B}} - d_{\mathcal{B}}\mathcal{X}$, принадлежащие к тому же классу когомологий, что и $e^{\mathcal{B}}$. Это есть первое решение уравнений (1.58).

Для нахождения второго решения рассмотрим форму объема $\mathcal{V}_n$, которая является d-замкнутой, а также $d_{\mathcal{B}}$-замкнутой. Это – нулевая мода твистованного комплекса и, следовательно, она не может быть d-точной. Отсюда следует, что она не $d_{\mathcal{B}}$-точная. Действительно, $\mathcal{V}_n = e^{\mathcal{B}} d e^{-\mathcal{B}} \mathcal{X}$ будет означать, что $e^{-\mathcal{B}}\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_n = d\left(e^{-\mathcal{B}}\mathcal{X}\right)$. Используя те же рассуждения, что и выше, получаем, что форма $\mathcal{V}_n$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{V}_n \ = \ d_{\mathcal{B}}\mathcal{Z} + \tilde{\Phi}_{\mathcal{B}} \ , \tag{1.60}$$

где $\tilde{\Phi}_{\mathcal{B}}$ является нетривиальной $d_{\mathcal{B}}$ - гармонической формой того же порядка, что $\mathcal{V}_n$. На физическом языке, это есть вторая бозонная нулевая мода для четномерных сфер и фермионная нулевая мода для нечетномерных сфер. Данное фермионное вакуумное состояние необходимо для компенсации бозонной нулевой моды, что приводит к нулевому индексу Виттена в случае сфер нечетной размерности.

Явные решения уравнений (1.58) находятся пертурбативно в любом порядке теории возмущений по $\mathcal{B}$.

Простейшим нетривиальным случаем является S^3. Будем искать решение уравнений (1.58) в виде

$$\Phi = 1 + Y_2 \, , \tag{1.61}$$

где Y_2 является 2-формой (это анзац утверждает, что недеформированной функцией будет $\Phi_0 = 1$). При S^3 уравнение (1.58) подразумевает

$$S^3 : \qquad dY_2 = d\mathcal{B} \ , \qquad d^{\dagger}Y_2 = 0 \, . \tag{1.62}$$

Решением первого уравнения в (1.62) является

$$Y_2 = \mathcal{B} + d\mathcal{A}_1\,, \qquad (1.63)$$

с произвольной 1-формой $\mathcal{A}_1$, которая может быть записана в виде $\mathcal{A}_1 = d\omega_0 + d^\dagger\omega_2$, где ω_0 и ω_2 являются соответственно некоторыми 0- и 2-формами. Такое представление гарантируется теоремой разложения Ходжа по отношению к обычному комплексу де Рама $d, d^\dagger$, имея в виду, что нет нулевых мод 1-формы - число Бетти β_1 при S^3 равно нулю. Член $d\omega_0$, являющийся калибровочной степенью свободы, не дает вклад в решение (1.63) и мы можем его проигнорировать, выбрав калибровку $\mathcal{A}_1 = d^\dagger\omega_2$, так что $d^\dagger\mathcal{A}_1 = 0$. Тогда второе уравнение в (1.63) дает $\triangle\mathcal{A}_1 = -d^\dagger\mathcal{B}$, где $\triangle \equiv dd^\dagger + d^\dagger d$ является ковариантным лапласианом. Последний может быть обращен, что дает решение

$$\mathcal{A}_1 = -\triangle^{-1}d^\dagger\mathcal{B} \qquad (1.64)$$

для произвольной $\mathcal{B}$.

Для S^4, мы можем искать решение в той же форме (1.61), как для S^3. Мы получаем те же уравнения (1.62) и то же решение (1.63), (1.64). Отметим, что в этом случае мы должны также добавить некоторую 4-форму Y_4 в анзац (1.61), но уравнения (1.58) приводят к $Y_4 = 0$.

Для S^5 и для S^6 анзац (1.61) не совместим с уравнениями (1.58) и мы вынуждены расширить его, добавив 4-форму Y_4

$$\Phi = 1 + Y_2 + Y_4\,. \qquad (1.65)$$

Подставляя (1.65) в (1.58), мы получаем следующее уравнение для $Y_{2,4}$:

$$S^{5,6}\ : \qquad \begin{array}{ll} dY_2 = d\mathcal{B}\ , & d^\dagger Y_2 - \langle d\bar{\mathcal{B}}, Y_4\rangle = 0\ , \\ dY_4 = d\mathcal{B}\wedge Y_2\ , & d^\dagger Y_4 = 0\ . \end{array} \qquad (1.66)$$

Общим решением уравнений с оператором d (левый столбец в (1.66)) является

$$Y_2 = \mathcal{B} + d\mathcal{A}_1\,, \qquad {}_4 = \tfrac{1}{2}\mathcal{B}\wedge\mathcal{B} + \mathcal{B}\wedge d\mathcal{A}_1 + d\mathcal{A}_3\,, \qquad (1.67)$$

где $\mathcal{A}_3$ – произвольная 3-form, определенная с точностью до калибровочных преобразований $\mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3 + d\omega_2$, позволяющих взять $\mathcal{A}_3 = d^\dagger\omega_4$, то есть

$d^\dagger \mathcal{A}_3 = 0$. Мы также рассматриваем калибровку $d^\dagger \mathcal{A}_1 = 0$. Тогда уравнения в правой колонке (1.66) сводятся к следующей системе

$$\begin{aligned} \triangle \mathcal{A}_1 &= -d^\dagger \mathcal{B} + \langle d\bar{\mathcal{B}}, \tfrac{1}{2}\mathcal{B}\wedge\mathcal{B}\rangle + \langle d\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{B}\wedge d\mathcal{A}_1\rangle + \langle d\bar{\mathcal{B}}, d\mathcal{A}_3\rangle\,, && (1.68) \\ \triangle \mathcal{A}_3 &= -\frac{1}{2} d^\dagger (\mathcal{B}\wedge\mathcal{B}) - d^\dagger\left(\mathcal{B}\wedge d\mathcal{A}_1\right)\,, && (1.69) \end{aligned}$$

которая позволяет определить $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_3$ в виде ряда теории возмущений по полю кручения $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \mathcal{A}_1^{(1)} + \mathcal{A}_1^{(3)} + \mathcal{A}_1^{(5)} + \mathcal{A}_1^{(7)} + \cdots\,, && (1.70) \\ \mathcal{A}_3 &= \mathcal{A}_3^{(2)} + \mathcal{A}_3^{(4)} + \mathcal{A}_3^{(6)} + \mathcal{A}_3^{(8)} + \cdots\,. && (1.71) \end{aligned}$$

Явное решение может быть найдено итерациями. Например, из (1.68) мы находим $\mathcal{A}_1^{(1)} = -\triangle^{-1} d^\dagger \mathcal{B}$. Тогда (1.69) дает $\mathcal{A}_3^{(2)} = -\triangle^{-1}\left(d^\dagger\mathcal{B}\wedge\mathcal{B} - d^\dagger(\mathcal{B}\wedge\triangle^{-1} d^\dagger\mathcal{B})\right)$. После этого мы находим $\mathcal{A}_1^{(3)}$ из (1.68) и затем $\mathcal{A}_3^{(4)}$ из (1.69) и так далее, шаг за шагом. Конечно, нам нужно предположить, что этот ряд теории возмущений сходится и результирующая полная вакуумная волновая функция является регулярной на всем многообразии, как и сама $\mathcal{B}$.

Полученные решения можно представить в следующей компактной форме

$$\Phi_{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{B}}\left(1 + d\mathcal{A}_1 + d\mathcal{A}_3 + \ldots + d\mathcal{A}_{n-2}\right) \tag{1.72}$$

для нечетномерных сфер и

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \left[e^{\mathcal{B}} - \tfrac{1}{(n/2)!}\mathcal{B}^{n/2}\right]\left(1 + d\mathcal{A}_1 + d\mathcal{A}_3 + \ldots + d\mathcal{A}_{n-3}\right) \tag{1.73}$$

для четномерных сфер.

Мы построили решение, полученное возмущением ненулевой 0-формы $\mathcal{B}$. Но, используя дуальность, тот же анализ может быть сделан для формы объема $\mathcal{V}_n$.

Отметим, что решение (1.72) можно представить в виде $\Phi_{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{B}} + d_{\mathcal{B}}\left[e^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_{n-2})\right]$, то есть, оно принадлежит когомологическому классу

$$\Phi_{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{B}} + d_{\mathcal{B}}\mathcal{X}\,. \tag{1.74}$$

Аналогично, решение (1.73) имеет вид $e^{\mathcal{B}} - \frac{1}{(n/2)!}\mathcal{B}^{n/2} + d_{\mathcal{B}}\left[e^{\mathcal{B}}(\mathcal{A}_1 + \ldots + \mathcal{A}_{n-2})\right]$ и принадлежит комбинации когомологического класса (1.74) и класса

$$\hat{\Phi}_{\mathcal{B}} \;=\; \mathcal{V}_n + d_{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{X}}\,. \tag{1.75}$$

Результаты (1.72) и (1.73) могут быть представлены в “физических” обозначениях. Например, (1.72) описывает волновую функцию вида

$$\Phi_{\mathcal{B}} = e^{\psi^M \psi^N \mathcal{B}_{MN}} \left(1 + \psi^M \psi^N \partial_M \mathcal{A}_N + \ldots + \psi^{M_1} \ldots \psi^{M_n} \partial_{M_1} \mathcal{A}_{M_2 \ldots M_n}\right). \tag{1.76}$$

Это выражение для волновой функции основного состояния соответствует представлению (1.41) для суперзарядов.

Комплекс Дольбо с кручениями

Рассмотрим сначала лагранжиан (1.7) без членов с дополнительным кручением. Число вакуумных состояний дается теоремой Атьи-Зингера. Эта теорема широко применяется для келеровых многообразий, когда индекс оператора Дольбо совпадает со стандартным индексом Дирака. Например, в случае $\mathbb{CP}^n$ и при каноническом выборе

$$W \;=\; \frac{q}{2(n+1)} \ln\det h \;=\; -\frac{q}{2}\ln(1 + \bar{z}z) \tag{1.77}$$

индекс равен

$$I_{\mathbb{CP}^n} \;=\; \begin{pmatrix} q + (n-1)/2 \\ n \end{pmatrix}, \tag{1.78}$$

где q должен быть целым при нечетном n и полуцелым для четного n.

При $|q| < \frac{n+1}{2}$ вакуумные состояния с нулевой энергией отсутствуют, что указывает на спонтанное нарушение суперсимметрии в этом случае. Когда $q = \pm\frac{n+1}{2}$ мы получаем комплекс Дольбо (соответственно, анти-Дольбо) с единственным вакуумным состоянием в секторе $(p, q) = (0, 0)$ (соответственно, в секторе $(p, q) = (n, n)$). При $|q| > \frac{n+1}{2}$ имеет место твистованный комплекс Дольбо (с дополнительным калибровочным полем), имеющий несколько вакуумных состояний.

Рассмотрим сначала чистый комплекс Дольбо с $q = (n+1)/2$. Суперзаряды $Q, \bar{Q}$ можно интерпретировать в этом случае как оператор внешней голоморфной производной и его эрмитово-сопряженный. Член с кручением (1.43) может быть введен в виде гладкой деформации, в результате которой индекс не может измениться. Таким образом, можно ожидать, что система (1.53) имеет точно такое же число вакуумных состояний (1.78), как в случае с $\mathcal{B} = 0$, и они могут быть построены по той же схеме, что и для комплекса де Рама.

В простейших нетривиальных случаях $\mathbb{CP}^3$, $q = 2$ и $\mathbb{CP}^4$, $q = \frac{5}{2}$ деформированная вакуумная волновая функция может быть найдена точно. Действительно, мы можем принять анзац $\Phi = 1 + Y_{(2,0)}$, где $Y_{(2,0)}$ является (2,0)-формой. По аналогии с (1.63), (1.64), решением уравнений $\partial_{\mathcal{B}}\Phi = \partial^\dagger_{\mathcal{B}}\Phi = 0$ есть $Y_{(2,0)} = \mathcal{B} - \partial\triangle^{-1}\partial^\dagger\mathcal{B}$, где $\triangle$ – лапласиан. Анализ для $\mathbb{CP}^n$ с $n > 4$ без изменений повторяет приведенный выше анализ для $S^n, n > 4$: во всех формулах нужно заменить $\langle d\bar{\mathcal{B}}, \cdot\rangle$ на $\langle \bar\partial\bar{\mathcal{B}}, \cdot\rangle$, а также заменить везде $d, d^\dagger$ на $\partial, \partial^\dagger$. Решениями являются

$$\Phi_{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{B}}\left(1 + \partial\mathcal{A}_{(1,0)} + \partial\mathcal{A}_{(3,0)} + \ldots + \partial\mathcal{A}_{(n-2,0)}\right) \tag{1.79}$$

при нечетном n и

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \left[e^{\mathcal{B}} - \tfrac{1}{(n/2)!}\,\mathcal{B}^{n/2}\right]\left(1 + \partial\mathcal{A}_{(1,0)} + \partial\mathcal{A}_{(3,0)} + \ldots + \partial\mathcal{A}_{(n-3,0)}\right) \tag{1.80}$$

для четных n. Все $(n,0)$-формы $\mathcal{A}_{(n,0)}$ можно определить как ряды по $\mathcal{B}$ после фиксации калибровок $\partial^\dagger_{W'}\mathcal{A}_{(n,0)} = 0$. Как и для комплекса де Рама, присутствие множителя $e^{\mathcal{B}}$ в решении (1.79) является естественным ввиду $\partial_{\mathcal{B}} = e^{\mathcal{B}}\partial e^{-\mathcal{B}}$. В физических обозначениях (сравните с (1.41))

$$Q^{\rm cov} = e^{\psi^i\psi^k\mathcal{B}_{ik}}\; Q^{\rm cov}_{\mathcal{B}=0}\; e^{-\psi^i\psi^k\mathcal{B}_{ik}}\,, \tag{1.81}$$

где $Q^{\rm cov}_{\mathcal{B}=0}$ является суперзарядом (1.53), не содержащим членов кручения.

При $q > \frac{n+1}{2}$ мы сталкиваемся с твистованным комплексом Дольбо. При этом, уравнения несколько сложнее. Когда $\mathcal{B} = 0$, вакуумные состояния Φ_0 должны определяться уравнением

$$\partial_{W'}\Phi_0 = e^{W'}\partial\left(e^{-W'}\Phi_0\right) = 0\,, \tag{1.82}$$

где W' – суперпотенциал, перенормированный сдвигом $q \to 2s := q - \frac{n+1}{2}$ (смотрите [36] для деталей),

$$W' \;=\; -s\ln(1 + \bar zz)\,. \tag{1.83}$$

Решение тогда имеет вид

$$\Phi_0 \;=\; e^{W'}R(\bar z)\,, \tag{1.84}$$

где $R(\bar z)$ является полиномом по $\bar z^j$ степени не выше чем $2s$ (чтобы сохранить нормированность (1.84)) [194]. Индекс (1.78) равен числу коэффициентов в этом многочлене.

При $\mathcal{B} \neq 0$ рассмотрим сначала простейший нетривиальный случай $\mathbb{CP}^3$, для которого деформированная волновую функция вакуума ищется в виде

$$\Phi_{\mathcal{B}} = (1 + Y_{(2,0)})\Phi_0\,.$$

Тогда, уравнения для $Y_{(2,0)}$ имеют вид

$$\partial_{W'}(Y_{(2,0)}\Phi_0) = \partial_{W'}(\mathcal{B}\Phi_0)\,, \qquad \partial^\dagger_{W'}\big(Y_{(2,0)}\Phi_0\big) = 0, \tag{1.85}$$

где $\partial^\dagger_{W'} = e^{W'}\partial^\dagger e^{-W'}$. Общее решение первого уравнения в (1.85) есть

$$Y_{(2,0)} \;=\; \mathcal{B} + \Phi_0^{-1}\partial_{W'}\mathcal{A}_{(1,0)}\,. \tag{1.86}$$

Согласно разложению Ходжа в отношении операторов $\partial_{W'}$, $\partial^\dagger_{W'}$ (они пригодны для этого, поскольку операторы $\partial_{W'}$, $\partial^\dagger_{W'}$ удовлетворяют стандартной $\mathcal{N} = 2$ алгебре суперсимметрии) и из того, что нет нулевых мод гамильтониана $H_{W'} = \partial^\dagger_{W'}\partial_{W'} + \partial_{W'}\partial^\dagger_{W'}$ в (1,0) секторе, форма $\mathcal{A}_{(1,0)}$ может быть представлена в виде $\mathcal{A}_{(1,0)} = \partial_{W'}\omega^{(0,0)} + \partial^\dagger_{W'}\omega^{(2,0)}$. Выберем калибровку, в которой первое слагаемое отсутствует, так что $\partial^\dagger_{W'}\mathcal{A}_{(1,0)} = 0$. Тогда второе уравнение в (1.85) приобретает вид

$$H_{W'}\mathcal{A}_{(1,0)} \;=\; -\partial^\dagger_{W'}\mathcal{B}\,.$$

Гамильтониан $H_{W'}$ положительно определен в секторе (1,0)-форм и его можно обратить, что дает нам выражение для $\mathcal{A}_{(1,0)}$ и решение (1.86). Решения при $\mathcal{B} \neq 0$ для многообразий $\mathbb{CP}^n$ с более высоким n ищутся аналогично и имеют вид (1.79), (1.80), где следует сделать замену $\partial\mathcal{O} \to \Phi_0^{-1}\partial_{W'}\mathcal{O} = \partial(\Phi_0^{-1}\mathcal{O})$.

1.2. Комплексные структуры в моделях с расширенной суперсимметрией

В предыдущем разделе были рассмотрены общие $\mathcal{N} = 2$ модели, представленные действиями (1.4), (1.14), (1.16), (1.17), (1.7), (1.43) и соответствующие комплексам де Рама и Дольбо с дополнительными потенциалами [14] и/или кручениями [24, 136, 25, 26, 140]. В некоторых случаях, эти модели и их обобщения обладают расширенной суперсимметрией. Хорошо известно, например, что $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия вещественной сигма-модели может быть расширена до $\mathcal{N} = 4$ в случае, если многообразие является кэлеровым [195] и до $\mathcal{N} = 8$, если многообразие гиперкэлерово [138]. Кроме того, когда метрика гиперкэлеровая или геометрия является так называемой гипер-кэлеровой с кручением (HKT) [27, 30, 31], суперсимметрия комплексной модели может быть расширена до $\mathcal{N} = 4$. Было также отмечено в [27, 30, 31], что комплексные сигма-модели допускают расширенную $\mathcal{N}{=}\,4$ суперсимметрию и для геометрии, более общей, чем HKT. Эта геометрия с ослабленными (по сравнению с HKT) условиями для комплексных структур была названа в [31] клиффордовой кэлеровой с кручением (би-HKT) геометрией. Для некоторых специальных метрик би-HKT (так называемые октонионно-кэлеровы с кручением (OKT) метрики) модели обладают расширенной $\mathcal{N} = 8$ суперсимметрией. Характерной особенностью HKT геометрий является наличие трех комплексных структур, которые образуют алгебру кватернионов и ковариантно постоянны по отношению к соответствующей связности с кручением. би-HKT геометрия характеризуется тремя комплексными структурами, которые образуют алгебру Клиффорда, но не кватернионную алгебру. Наконец, OKT многообразия являются многообразиями размерности, кратной 8, и включают семь различных комплексных структур, образующих $7D$ алгебру Клиффорда. Одной из целей этого раздела является подробное рассмотрение конкретных примеров би-HKT и OKT многообразий для более глубокого понимания их геометрических структур.

1.2.1. Структура суперзарядов в HKT, би-HKT и OKT $\mathcal{N} = 4$ моделях

HKT многообразие является многообразием размерности $D{=}4n$ с тремя различными интегрируемыми[2] антисимметричными комплексными структу-

---

[2] Термин *интегрируемые* означает, что комплексные координаты можно ввести так, что метрика имеет вид $ds^2 = 2h_{j\bar{k}}dz^j d\bar{z}^{\bar{k}}$. Это возможно, когда *это тензор Нийенхуиза* равен нулю. Последнее условие

рами $(I^p)_{MN} = -(I^p)_{NM}$, удовлетворяющими кватернионной алгебре

$$(I^p)_M^{\ L}(I^q)_L^{\ N} = -\delta^{pq}\delta_M^N + \epsilon^{pqr}(I^r)_M^{\ N}\,. \tag{1.88}$$

Ковариантные производные Леви-Чивита комплексных структур $\nabla_M I^p$ не обязательно равны нулю (нулевые – для гиперкэлерового многообразия). Однако для любой комплексной структуры I всегда можно определить аффинную связность с кручением, в отношении которых и метрика и эта комплексная структура ковариантно постоянны, $\tilde{\nabla}_L g_{MN} = \tilde{\nabla}_L(I)_{MN} = 0$. Если мы потребуем антисимметричность тензора кручения C_{MNL}, то такая связность является единственной и называется связностью Бисмута $C_{MNL} = B_{MNL}$ [137]. [3] Для НКТ многообразий связности Бисмута для всех трех структур I^p совпадают.

Би-НКТ многообразие обладает тремя антисимметричными интегрируемыми комплексными структурами, которые не обязательно удовлетворяют алгебре кватернионов (1.88), но должны образовывать алгебру Клиффорда

$$I^pI^q + I^qI^p = -2\delta^{pq}\,. \tag{1.92}$$

Кроме того, требуется существования такой аффинной связности с полностью антисимметричным тензором кручения, когда соответствующие ковариантные производные метрики и комплексных структур удовлетворяют условиям $\tilde{\nabla}_L g_{MN} = 0$ и

$$\tilde{\nabla}_{(L} I^{p\ \ N}_{M)} = 0\,. \tag{1.93}$$

можно записать в виде

$$\partial_{[M}(I^p)_{N]}^{\ L} \;=\; (I^p)_M^{\ K}(I^p)_N^{\ R}\partial_{[K}(I^p)_{R]}^{\ L}\,, \tag{1.87}$$

где можно также использовать ковариантные производные Леви-Чивита вместо обычных. Когда (1.87 выполняется, внешние голоморфные производные, ассоциированные с комплексными структурами I^p, нильпотентны и могут быть интерпретированы как суперзаряды.

[3] Явное выражение для тензора кручения Бисмута

$$B_{MNL} \;=\; I_M^{\ A} I_N^{\ B} I_L^{\ C}(\nabla_A I_{BC} + \nabla_B I_{CA} + \nabla_C I_{AB})\,, \tag{1.89}$$

где ∇_A является ковариантной производной Леви-Чивита. (Fнти)голоморфные проекции тензора (1.89) равны нулю, $(P^\pm)_M^{\ A}(P^\pm)_N^{\ B}(P^\pm)_L^{\ C}\,B_{ABC} \;=\; 0$, где $(P^\pm)_M^{\ A} = (\delta_M A^\alpha \pm i I_M^{\ A})/2$. Эквивалентно,

$$H_{MNL}(B,I) \;=\; 0\,, \tag{1.90}$$

где

$$H_{MNL}(C,I) \;=\; \frac{1}{4}\left(C_{MNL} - I_M^{\ R}I_N^{\ S}C_{RSL} - I_L^{\ R}I_M^{\ S}C_{RSN} - I_N^{\ R}I_L^{\ S}C_{RSM}\right). \tag{1.91}$$

Есть два дополнительных требования, необходимых для выполнения алгебры суперсимметрии для суперзарядов, связанные с комплексными структурами I^p. Во-первых, все конкоминанты Нийенхуиза

$$\tfrac{1}{2}\,N(p,q)^{L}_{MN} \;=\; \Big\{(I^p)_{[M}^{\;S}\partial_S(I^q)_{N]}^{\;L} - \partial_{[M}(I^q)_{N]}^{\;S}(I^p)_S^{\;L}\Big\} \;+ (p \leftrightarrow q) \tag{1.94}$$

должны равняться нулю,

$$\tfrac{1}{2}\,N(p,q)^{L}_{MN} \;= 0\,. \tag{1.95}$$

Во-вторых, тензор кручения должен удовлетворять условию

$$(I^p)^S{}_{[M}\partial_{|S|}C_{NLR]} = (I^p)^S{}_{[M}\partial_N C_{LR]S} + 2C_{S[MN}\partial_L(I^p)^S{}_{R]}, \tag{1.96}$$

которое может быть переписано в виде [30, 31]

$$\iota_p dC = \tfrac{2}{3}\,d(\iota_p C)\,. \tag{1.97}$$

Оператор ι_p действует на произвольной n-форме ω следующим образом: если $\omega = \frac{1}{n!}\,\omega_{M_1\ldots M_n}dx^{M_1} \wedge \cdots \wedge dx^{M_n}$, тогда $\iota_p\omega = \frac{1}{(n-1)!}\,\omega_{N[M_2\ldots M_{n-1}}(I^a)^N{}_{M_1]}\,dx^{M_1} \wedge \cdots \wedge dx^{M_n}$. Для формы ω_{n_1,n_2} с n_1 голоморфными (по отношению к комплексной структуре I^p) и n_2 антиголоморфными индексами, действие ι_p сводится к умножению на $i(n_1 - n_2)$.

ОКТ многообразие является многообразием с семью интегрируемыми структурами, удовлетворяющими алгебре Клиффорда и всем дополнительным условиям, перечисленным выше.

Следует отметить, что имея три комплексные структуры I^p, удовлетворяющие алгебре Клиффорда (1.92), мы можем найти в обертывающей алгебре другие триплеты комплексных структур, образующих алгебру кватернионов (1.88) [30, 31]. Например, $J^p = \frac{1}{2}\epsilon^{pqr}I^qI^r$ образуют алгебру кватернионов (1.88), однако связностей, в отношении которых J^p являются ковариантно постоянными, не существует.

Как было показано в работе [196], наиболее общая таргетная НКТ геометрия воспроизводится в рамках суперполевого подхода. В общем случае следует использовать подход гармонического суперпространства [12, 69]. Как было также показано в [196], $\mathcal{N} = 4$ сигма-модели с таргетной би-НКТ геометрией возникают, когда одновременно используются обычные $(\mathbf{4{,}4{,}0})$ мультиплеты и так называемые “зеркальные” $(\mathbf{4{,}4{,}0})$ мультиплеты, которые имеют другие законы преобразования при $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии. Таким образом, минимальная размерность бозонного таргетного пространства би-НКТ модели равна восьми. Соответствующий общий лагранжиан, использующий оба типа корневых (**4,4,0**) мультиплетов, был построен в [196] с помощью $\mathcal{N} = 2$ суперполей. Однако, ни явных компонентных примеров би-НКТ систем, ни соответствующих классических и квантовых нётеровских суперзарядов, там не получено. С другой стороны, суперполевой и компонентный лагранжианы для конкретного подкласса $\mathcal{N} = 4, d = 1$ сигма-моделей с набором из двух взаимно зеркальных линейных (**4,4,0**)-мультиплетов были построены ранее в [197]. Кроме того, было показано, что при определенных ограничениях на суперполевой лагранжиан, эта система обладает расширенной $\mathcal{N} = 8$ суперсимметрией [198, 199], обеспечивая пример ОКТ геометрии. Чтобы лучше понять взаимосвязь между НКТ, би-НКТ и ОКТ геометриями, необходимо изучить структуру соответствующих нётеровских суперзарядов. Для понимания различий геометрий, мы рассматриваем, параллельно с системой двух взаимно-зеркальных $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ мультиплетов, также систему из двух мультиплетов одного сорта.

Представим качественно происхождение различных суперсимметричных структур.

При рассмотрении этих (**4, 4, 0**) мультиплетов отдельно есть два набора генераторов суперсимметрии: набор генераторов $Q_{(1)}$ и $Q^p_{(1)}$ для одного мультиплета и набор $Q_{(2)}$ и $Q^p_{(2)}$ для другого мультиплета (здесь $p = 1, 2, 3$). По отдельности, оба набора $Q_{(1)}$, $Q^p_{(1)}$ и $Q_{(2)}$, $Q^p_{(2)}$ образуют $\mathcal{N} = 4$ суперper алгебр, соответствующие НКТ геометрии.

Рассмотрим теперь систему с участием обоих мультиплетов, взяв сначала свободный случай – происхождение различных типов геометрии можно понять уже на этом примере, так как корневые мультиплеты не содержат вспомогательных компонент и преобразования суперсимметрии одинаковые и для свободного случая, и в случае взаимодействия. Мы можем выделить следующие суперсимметрии:

1) Суперсимметрия, генерируемая операторами $Q = Q_{(1)} + Q_{(2)}$;

2) Суперсимметрия с генераторами $S^a = Q^p_{(1)} + Q^p_{(2)}$;

3) Суперсимметрия, генерируемая операторами $Q^a = Q^p_{(1)} - Q^p_{(2)}$;

4) Скрытая $\mathcal{N}\!=4$ суперсимметрия, которая порождается суперзарядами $\tilde{Q}$, $\tilde{Q}^p$. Эта суперсимметрия смешивает компонентные поля из двух различных мультиплетов.

Каждый суперзаряд в 2), 3) и 4) соответствует той или иной комплексной структуре. Мы увидим, что структуры, соответствующие 2), образуют кватернионную алгебру (1.88), тогда как структуры, соответствующие 3), не удовлетворяют (1.88), а только (1.92). Таким образом, суперзаряды 2) связаны с HKT геометрией, в то время как суперзаряды 3) - би-HKT геометрией. Эти связи алгебр суперсимметрии с различными таргетными геометриями можно схематически представить в виде

$$\rlap{$\overbrace{}^{\mathcal{N}=4\,(\text{HKT})}$}S^p \qquad \underbrace{\underbrace{Q \qquad\quad Q^p}_{\mathcal{N}=4\,(\text{KKK})} \qquad \tilde{Q} \qquad \tilde{Q}^p}_{\mathcal{N}=8\,(\text{OKK})}\,. \tag{1.98}$$

При включении взаимодействия только часть суперсимметрий из (1.98) выживает в зависимости от типа взаимодействия. Как увидим ниже, в случае двух $\mathcal{N}\!=4$ мультиплетов одного типа остается только $\mathcal{N}\!=4$ суперсимметрия с генераторами Q, S^p, проявляющая таргетную HKT геометрию. В случае, когда один из таких $\mathcal{N}\!=4$ мультиплетов взаимодействует с ему зеркальным мультиплетом, мы остаемся с $\mathcal{N}\!=4$ суперсимметрией с генераторами Q, Q^p, соответствующей би-HKT геометрии. В некоторых случаях сохраняется суперсимметрия с 3) и 4), которая соответствует OKT геометрии.

1.2.2. (4,4,0) мультиплеты

Мы будем использовать $\mathcal{N}\!=4$ суперпространство, параметризованное координатами $(t, \theta^{ik'})$, $(\overline{\theta^{ik'}}) = -\epsilon_{ij}\epsilon_{k'l'}\theta^{jl'} \equiv -\theta_{k'j}$. Индексы $i = 1,2$ и $k' = 1,2$ являются дублетными индексами групп $\mathrm{SU}_L(2)$ и $\mathrm{SU}_R(2)$, которые образуют полную группу автоморфизмов $\mathrm{SO}(4) = \mathrm{SU}_L(2) \times \mathrm{SU}_R(2)$ расширенной $\mathcal{N}\!=4$ супералгебры. Ковариантные производные суть

$$D^{ik'} = \frac{\partial}{\partial\theta_{k'i}} + i\theta^{ik'}\partial_t\,. \tag{1.99}$$

Обычный (4,4,0) мультиплет

Линейный (**4,4,0**) мультиплет описывается (псевдо)вещественным суперполем $\mathcal{V}^{i\alpha}(t,\theta)$, $(\overline{\mathcal{V}^{i\alpha}}) = -\epsilon_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{V}^{j\beta} \equiv \mathcal{V}_{\alpha i}$, подчиненным связям

$$D^{(ij'}\mathcal{V}^{k)\alpha} = 0\,, \tag{1.100}$$

где индекс $\alpha = 1,2$ преобразуется дополнительной группой Паули-Гюрси SU(2), коммутирующей с $\mathcal{N}{=}4$ суперсимметрией. Решение внемассовых связей (1.100) имеет вид

$$\mathcal{V}^{i\alpha} = v^{i\alpha} - \theta^{ik'}\psi^{\alpha}_{k'} + i\theta^{ik'}\theta_{k'k}\dot{v}^{k\alpha} - \tfrac{i}{3}\,\theta^{ii'}\theta_{i'k}\theta^{kk'}\dot{\psi}^{\alpha}_{k'} - \tfrac{1}{12}\,\theta^{kk'}\theta_{k'j}\theta^{ji'}\theta_{i'k}\,\ddot{v}^{\,i\alpha}, \tag{1.101}$$

то есть, данный мультиплет включает в себя четыре вещественных бозонных компонентных полей $(\overline{v^{i\alpha}}) = -\epsilon_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}v^{j\beta}$ и четыре вещественных фермионных компонентных полей $(\overline{\psi^{i'\alpha}}) = -\epsilon_{i'j'}\epsilon_{\alpha\beta}\psi^{j'\beta}$.

Суперполевое действие $S_1{=}\displaystyle\int dtd^4\theta\,\mathcal{L}_1(\mathcal{V})$, где $d^4\theta{\equiv}-\tfrac{1}{24}\,D^{ii'}D_{i'k}D^{kk'}D_{k'i}$, дает следующее компонентное действие

$$S_1 = \int dt\,\Big[-\tfrac{1}{2}\,G_1\dot{v}^{i\alpha}\dot{v}_{\alpha i} + \tfrac{i}{4}\,G_1\dot{\psi}^{i'\alpha}\psi_{\alpha i'} + i\,\dot{v}^{i}_{\alpha}R^{\alpha\beta}(\partial_{\beta i}G_1) + \tfrac{1}{6}\,(\triangle_v G_1)\,R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\Big]\,,$$

где $G_1 = \triangle_v\mathcal{L}_1(v)$, $R^{\alpha\beta} = R^{\beta\alpha} = \frac{1}{4}\,\psi^{\alpha}_{k'}\psi^{k'\beta}$. Мы используем следующие обозначения: $\partial_{\alpha i} = \partial/\partial v^{i\alpha}$, $\triangle_v = \partial^2/\partial v^{i\alpha}\partial v_{\alpha i}$.

Нётеровские заряды для преобразований суперсимметрии

$$\delta v^{i\alpha} = \varepsilon^{ik'}\psi^{\alpha}_{k'}\,, \qquad \delta\psi^{i'\alpha} = -2i\varepsilon^{ki'}\dot{v}^{\alpha}_{k} \tag{1.102}$$

имеют вид

$$Q^{j'}_{i} = \psi^{j'\alpha}p_{\alpha i} + \tfrac{i}{12}\;\;\psi^{j'\beta}\psi_{\beta k'}\psi^{k'\alpha}(\partial_{\alpha i}G_1)\,, \tag{1.103}$$

где $p_{\alpha i} = -G_1\dot{v}_{\alpha i} - i(\partial_{\beta i}G_1)R^{\beta}_{\alpha}$ является каноническим импульсом для $v^{i\alpha}$. Используя ненулевые скобки Пуассона $\{v^{i\alpha},p_{\beta j}\} = \delta^{i}_{j}\delta^{\alpha}_{\beta}$, $\{\psi^{i'\alpha},\psi_{\beta j'}\} = \frac{2i}{G_1}\,\delta^{i'}_{j'}\delta^{\alpha}_{\beta}$, $\{\psi^{i'\alpha},p_{\beta j}\} = -\frac{1}{2G_1}\,(\partial_{\beta j}G_1)\,\psi^{i'\alpha}$, получаем, что суперзаряды (1.103) образуют $\mathcal{N} = 4$ алгебру суперсимметрии

$$\{Q^{j'}_{i},Q^{l'}_{k}\} = 2i\,\epsilon^{j'l'}\epsilon_{ik}\,H_1\,, \tag{1.104}$$

где

$$H_1 = -\tfrac{1}{2G_1}\,p^{i\alpha}p_{\alpha i} - \tfrac{i}{G_1}\,p^{k\alpha}R^{\beta}_{\alpha}(\partial_{\beta k}G_1) - \tfrac{1}{6}\;\Big[\Delta_x G_1 - \tfrac{3}{2G_1}\,(\partial^{k\gamma}G_1)(\partial_{\gamma k}G_1)\Big]\,R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$$

является каноническим гамильтонианом системы.

Вводя вещественные четыре-вектора $v^A = (\overline{x^A})$, $p_A = (\overline{p_A})$, $\psi^A = (\overline{\psi^A})$, $A = 1,2,3,4$, определенные посредством [4]

$$v_{\alpha i} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, v^A (\sigma_A)_{\alpha i}\,, \qquad p_{\alpha i} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\, p_A (\sigma^A)_{\alpha i}\,, \qquad \psi_{\alpha i'} = \psi^A (\sigma_A)_{\alpha i'}\,, \tag{1.108}$$

и выделяя в суперзарядах (1.103) синглетную $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Q^{j'}_k \delta^k_{j'}$ и триплетные $Q^a = \frac{i}{\sqrt{2}}\, Q^{j'}_k (\sigma^a)^k{}_{j'}$ части, мы получаем

$$\begin{aligned} Q &= \psi^A \left[p_A + \tfrac{i}{12}\, \epsilon_{ABCD} (\partial_D G_1)\, \psi^B \psi^C \right], && (1.109)\\ Q^p &= -\psi^E\, \eta^a_{EA} \Big[p_A + \tfrac{i}{4}\, \epsilon_{ABCD} (\partial_D G_1)\, \psi^B \psi^C \Big], && (1.110) \end{aligned}$$

где η^a_{AB} являются символами ‘т Хоофта. В четыре-векторных обозначениях компонентное действие принимает вид

$$S_1 = \int dt \left[\tfrac{1}{2}\, g_{AB} \left(\dot v^A \dot v^B + i \psi^A \hat\nabla \psi^B \right) - \tfrac{1}{12}\, \partial_A C_{BCD} \psi^A \psi^B \psi^C \psi^D \right], \tag{1.111}$$

где

$$g_{AB} = G_1 \delta_{AB}\,, \qquad C_{ABC} = \epsilon_{ABCD} (\partial_D G_1) \tag{1.112}$$

есть метрический тензор и кручение. Ковариантная производная фермионных полей

$$\hat\nabla \psi^A = \dot\psi^A + \hat\Gamma^A_{BC} \dot v^B \psi^C \tag{1.113}$$

включает аффинную связность с кручением,

$$\hat\Gamma_{A,BC} = g_{AD} \hat\Gamma^D_{BC} = \Gamma_{A,BC} + \tfrac{1}{2}\, C_{ABC} \tag{1.114}$$

---

[4] SO(4) сигма-матрицы σ_A, $A = 1,2,3,4$ могут быть выбраны в виде

$$\sigma_A = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \sigma_4) = (\vec\sigma; i)\,, \qquad \sigma^\dagger_A = (\vec\sigma; -i)\,, \tag{1.105}$$

где $\vec\sigma$ являются обычными матрицами Паули. Матрицы (1.105) удовлетворяют тождествам

$$\sigma^\dagger_A \sigma_B = \delta_{AB} + i\, \eta^a_{AB}\, \sigma_a\,, \qquad \sigma_A \sigma^\dagger_B = \delta_{AB} + i\, \bar\eta^p_{AB}\, \sigma_p\,, \tag{1.106}$$

где σ_p, $p = 1,2,3$ – матрицы Паули и

$$\eta^p_{BC} = -\eta^a_{CB} = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_{pBC} & B, C = 1,2,3\,, \\ \delta_{pB} & C = 4\,, \end{array} \right. \qquad \bar\eta^p_{BC} = -\bar\eta^p_{CB} = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_{pBC} & B, C = 1,2,3\,, \\ -\delta_{pB} & C = 4\,, \end{array} \right. \tag{1.107}$$

являются символами ‘т Хоофта.

где $\Gamma_{A,BC} = \frac{1}{2}\left(\partial_B g_{AC} + \partial_C g_{AB} - \partial_A g_{BC}\right)$ является связностью Леви-Чивита.

Суперзаряды (1.109, (1.110 могут быть представлены в более геометрической форме после введения лоренцевой спиновой связности

$$\Omega_{A,BC} = e^{\underline{D}}_{B}\, e^{\underline{E}}_{C}\, \Omega_{A,\underline{DE}} \qquad\qquad \Omega_{A,\underline{BC}} = e_{\underline{B}D}\left(\partial_A e^{D}_{\underline{C}} + \Gamma^{D}_{AE} e^{E}_{\underline{C}}\right) \tag{1.115}$$

(индексы касательного пространства являются подчеркнутыми). В нашем случае тетрада равна $e^{\underline{B}}_{A} = \sqrt{G_1}\,\delta^{\underline{B}}_{A}$ и

$$\Omega_{A,BC} = \tfrac{1}{2}\Big[\delta_{AB}(\partial_C G_1) - \delta_{AC}(\partial_B G_1)\Big]\,. \tag{1.116}$$

Как результат этого мы получаем

$$Q \;=\; \psi^A\Big(p_A - \tfrac{i}{2}\,\Omega_{A,BC}\psi^B\psi^C + \tfrac{i}{12}\,C_{ABC}\,\psi^B\psi^C\Big), \tag{1.117}$$

$$Q^p \;=\; \psi^D (I^p)_D{}^A\Big(p_A - \tfrac{i}{2}\,\Omega_{A,BC}\psi^B\psi^C - \tfrac{i}{4}\,C_{ABC}\,\psi^B\psi^C\Big)\,, \tag{1.118}$$

где мы ввели следующие тензоры комплексных структур

$$(I^p)_A{}^B = -\eta^p_{AB}\,. \tag{1.119}$$

Тензоры комплексных структур (1.119) образуют кватернионную алгебру (1.88) и ковариантно-постоянные относительно связности (1.114)

$$\hat{\nabla}_A (I^p)_B{}^C = \partial_A (I^p)_B{}^C - \hat{\Gamma}^D_{AB}(I^p)_D{}^C + \hat{\Gamma}^C_{AD}(I^p)_B{}^D = 0\,. \tag{1.120}$$

Таким образом, эта модель воспроизводит НКТ геометрию и (1.114) есть ни что иное, как связность Бисмута с кручением (1.89), которая в этом случае может быть представлена в виде

$$C_{ABC} \;=\; \left(I_{AB}I_{CD} + I_{AD}I_{BC} + I_{AC}I_{DB}\right)\frac{\partial_D G_1}{G_1^2}\,. \tag{1.121}$$

В рассматриваемом случае суперзаряды можно также переписать в несколько ином виде, если отметить справедливость следующего соотношения $\chi^D (I^p)_D{}^A\,\Omega_{A,BC}\chi^B\chi^C = -\chi^D (I^p)_D{}^A\,C_{ABC}\,\chi^B\chi^C$. Это позволяет записать (1.118) в виде

$$Q^p = \psi^D (I^a)_D{}^A\Big(p_A - \tfrac{i}{6}\,\Omega_{A,BC}\psi^B\chi^C + \tfrac{i}{12}\,C_{ABC}\,\psi^B\psi^C\Big)\,. \tag{1.122}$$

Ниже увидим, что представление (1.122) обобщается на случай би-НКТ.

Зеркальный (4,4,0) мультиплет

Зеркальный (**4,4,0**) мультиплет описывается суперполем $\mathcal{W}^{i'\alpha'}(t,\theta)$, подчиненным связям

$$D^{k(i'}\mathcal{W}^{j')\alpha'} = 0\,, \tag{1.123}$$

где индекс $\alpha' = 1,2$ относится к дополнительной группе Паули-Гюрси $\mathrm{SU}'(2)$. Связи (1.123) решаются в виде

$$\mathcal{W}^{i'\alpha'} = w^{i'\alpha'} - \chi^{\alpha'}_k \theta^{ki'} - i\dot{w}^{j'\alpha'}\theta_{j'k}\theta^{ki'} + \tfrac{i}{3}\,\dot{\chi}^{\alpha'}_j\,\theta^{jk'}\theta_{k'k}\theta^{ki'} + \tfrac{1}{12}\,\ddot{w}^{i'\alpha'}\,\theta^{kk'}\theta_{k'j}\theta^{jj'}\theta_{j'k}\,, \tag{1.124}$$

т.е. они дают такой же полевой состав, хотя и с другим распределением ролей групп автоморфизмов $SU(2)_L$ и $SU(2)_R$.

Суперполевое действие $S_2 = \int dt d^4\theta\, \mathcal{L}_2(\mathcal{W})$ приводит к следующему компонентному действию

$$S_2 = \int dt\, \Big[-\tfrac{1}{2}\, G_2 \dot{w}^{i'\alpha'}\dot{w}_{\alpha'i'} + \tfrac{i}{4}\, G_2\dot{\chi}^{i\alpha'}\chi_{\alpha'i} + i\dot{w}^{i'}_{\alpha'}\, R^{\alpha'\beta'}(\partial_{\beta'i'}G_2) + \tfrac{1}{6}\,(\triangle_y G_2)\, R^{\alpha'\beta'}R_{\alpha'\beta'} \Big]\,, \tag{1.125}$$

где $G_2 = -\triangle_w \mathcal{L}_2(w)$, $R^{\alpha'\beta'} = \frac{1}{4}\,\chi^{\alpha'}_k\chi^{k\beta'}$ и $\partial_{\alpha'i'} = \partial/\partial w^{i'\alpha'}$, $\triangle_w = \partial^2/\partial w^{i'\alpha'}\partial w_{\alpha'i'}$.

Нётеровские заряды преобразований суперсимметрии

$$\delta w^{i'\alpha'} = \chi^{\alpha'}_k \varepsilon^{ki'}\,, \qquad \delta\chi^{i\alpha'} = 2i\varepsilon^{ik'}\dot{w}^{\alpha'}_{k'} \tag{1.126}$$

имеют вид

$$Q^{j'}_i = p^{j'\alpha'}\chi_{\alpha'i} - \tfrac{i}{12}\,(\partial^{j'\alpha'}G_2)\,\chi_{\alpha'k}\chi^{k\beta'}\chi_{\beta'i}\,, \tag{1.127}$$

где $p_{\alpha'i'} = -G_2\dot{w}_{\alpha'i'} - i\, R^{\beta'}_{\alpha'}(\partial_{\beta'i'}G_2)$ являются каноническими импульсами для $w^{i'\alpha'}$. Ненулевые скобки Пуассона $\{w^{i'\alpha'}, p_{\beta'j'}\} = \delta^{i'}_{j'}\delta^{\alpha'}_{\beta'}$, $\{\chi^{i\alpha'}, \chi_{\beta'j}\} = \frac{2i}{G_2}\,\delta^i_j\delta^{\alpha'}_{\beta'}$, $\{\chi^{i\alpha'}, p_{\beta'j'}\} = -\frac{1}{2G_2}\,(\partial_{\beta'j'}G_2)\,\chi^{i\alpha'}$ приводят к алгебре $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии суперзарядов (1.127)

$$\{Q^{j'}_i, Q^{l'}_k\} = 2i\,\epsilon^{j'l'}\epsilon_{ik}\,H_2\,, \tag{1.128}$$

где канонический гамильтониан системы (1.125) равен

$$\begin{aligned} H_2 \;=\; & -\tfrac{1}{2G_2}\,p^{i'\alpha'}p_{\alpha'i'} - \tfrac{i}{G_2}\,R^{\beta'}_{\alpha'}(\partial_{\beta'k'}G_2)p^{k'\alpha'} \\ & -\tfrac{1}{6}\,\Big[\Delta_w G_2 + \tfrac{3}{2G_2}\,(\partial^{k'\gamma'}G_2)(\partial_{\gamma'k'}G_2)\Big]\, R^{\alpha'\beta'}R_{\alpha'\beta'}\,. \end{aligned} \tag{1.129}$$

В терминах вещественных четыре-векторных величин $w^{A'} = (\overline{w^{A'}})$, $p_{A'} = (\overline{p_{A'}})$, $\chi^{A'} = (\overline{\chi^{A'}})$, $M = 1, 2, 3, 4$, определяемых соотношениями

$$w_{\alpha' i'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, w^{A'} (\sigma_{A'})_{\alpha' i'}\,, \quad p_{\alpha' i'} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\, p_{A'} (\sigma^{A'})_{\alpha' i'}\,, \quad \chi_{\alpha' i} = \chi^{A'} (\sigma_{A'})_{\alpha' i}\,, \tag{1.130}$$

синглетная $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\, Q_k^{j'} \delta_{j'}^k$ и триплетная $Q^p = \frac{i}{\sqrt{2}}\, Q_k^{j'} (\sigma^p)^k{}_{j'}$ части суперзарядов (1.127) принимают вид

$$Q \;=\; \chi^{A'} \left(p_{A'} + \tfrac{i}{12}\, \epsilon_{A'B'C'D'} (\partial_{B'} G_2)\, \chi^{C'} \chi^{D'} \right)\,, \tag{1.131}$$

$$Q^p \;=\; \chi^{E'} \eta^p_{E'A'} \left(p_{A'} + \tfrac{i}{4}\, \epsilon_{A'B'C'D'} (\partial_{B'} G_2)\, \chi^{C'} \chi^{D'} \right)\,. \tag{1.132}$$

С точностью до знака в Q^p эти выражения имеют тот же вид, что и (1.110).

В четыре-векторных обозначениях действие (1.125) принимает вид

$$S_1 = \int dt \left[\tfrac{1}{2}\, g_{A'B'} \left(\dot{w}^{A'} \dot{w}^{B'} + i \chi^{A'} \hat{\nabla} \chi^{B'} \right) - \tfrac{1}{12}\, \partial_{A'} C_{B'C'D'} \chi^{A'} \chi^{B'} \chi^{A'} C \chi^{A'} D \right], \tag{1.133}$$

где метрический тензор, кручение и ковариантные производные фермионного поля

$$g_{A'B'} = G_2\, \delta_{A'B'}\,, \quad C_{A'B'C'} = \epsilon_{A'B'C'D'} (\partial_{D'} G_2)\,, \quad \hat{\nabla} \chi^{A'} = \dot{\chi}^{A'} + \hat{\Gamma}^{A'}_{B'C'} \dot{w}^{B'} \chi^{C'}\,. \tag{1.134}$$

Суперзаряды (1.131), (1.132) могут быть записаны в виде

$$Q \;=\; \chi^{A'} \Big[\left(p_{A'} - \tfrac{i}{2}\, \Omega_{A',\underline{B'C'}} \chi^{\underline{B'}} \chi^{\underline{C'}} \right) + \tfrac{i}{12}\, C_{A'B'C'}\, \chi^{B'} \chi^{C'} \Big], \tag{1.135}$$

$$Q^p \;=\; \chi^{D'} (I^p)_{D'}{}^{A'} \Big[\left(p_{A'} - \tfrac{i}{2}\, \Omega_{A',\underline{B'C'}} \chi^{\underline{B'}} \chi^{\underline{C'}} \right) - \tfrac{i}{4}\, C_{A'B'C'}\, \chi^{B'} \chi^{C'} \Big], \tag{1.136}$$

где тензоры комплексных структур теперь равны

$$(I^p)_{A'}{}^{B'} = \eta^p_{A'B'}\,. \tag{1.137}$$

Таким образом, мы получили с точностью до знака в (1.137) те же структуры, что и в случае с одним обычным мультиплетом. Этот знак, однако, будет играть важную роль в возникновении нетривиальной би-НКТ геометрии при рассмотрении взаимодействия между обычным и зеркальным мультиплетами.

1.2.3. Свободная система с двумя (4,4,0) мультиплетами

До изучения нетривиальных взаимодействующих систем, рассмотрим свободную модель с 8-мерным плоским таргетным пространством. Это позволит более точно проиллюстровать схему (1.98) и поможет нам лучше понять, что происходит в случае наличия нетривиального взаимодействия.

Лагранжиан в компонентном действиии

$$S_{free} = \tfrac{1}{2} \int dt \left[\dot{v}^A \dot{v}^A + \dot{w}^{A'} \dot{w}^{A'} + i\psi^A \dot{\psi}^A + i\chi^{A'} \dot{\chi}^{A'} \right] \tag{1.138}$$

представляет собой сумму двух лагранжианов, описывающих плоский обычный и плоский зеркальный мультиплеты (1.111), (1.133) с $G_1 = G_2 = 1$. Нётеровские суперзаряды, ассоциированные с преобразованиями $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии (1.102), (1.126), имеют вид

$$Q = \psi^A p_A^{(v)} + \chi^{A'} p_{A'}^{(w)} , \qquad Q^p = -\psi^A \eta^a_{AB} p_B^{(v)} + \chi^{A'} \eta^a_{A'B'} p_{B'}^{(w)} . \tag{1.139}$$

Знаки в Q^a подразумевают следующий блочно-диагональный вид ассоциированных комплексных структур

$$I^p = \left(\begin{array}{cc} -\eta^p_{AB} & 0 \\ 0 & \eta^p_{A'B'} \end{array} \right) . \tag{1.140}$$

То же компонентое действие (1.138) можно получить, рассматривая системы из двух свободных обычных или двух свободных зеркальных мультиплетов. Соответствующие нётеровские суперзаряды имеют вид

$$S^p = -\psi^A \eta^p_{AB} p_B^{(v)} - \chi^{A'} \eta^p_{A'B'} p_{B'}^{(w)} . \tag{1.141}$$

Суперзаряды (1.141) и Q из (1.139) образуют $\mathcal{N} = 4$ супералгебру, связанную с НКТ комплексной структурой

$$J^p = \left(\begin{array}{cc} -\eta^p_{AB} & 0 \\ 0 & -\eta^p_{A'B'} \end{array} \right) . \tag{1.142}$$

Комплексные структуры (1.142) удовлетворяют кватернионной алгебре (1.88), тогда как структуры (1.140) – только алгебре Клиффорда (1.92).

В рассматриваемом свободном случае имеет место также скрытая $\mathcal{N}=4$ суперсимметрия, реализованная преобразованиями

$$\delta v^{i\alpha} = \eta^{\alpha\beta'}\chi^{i}_{\beta'}\,, \quad \delta\psi^{i'\alpha} = -2i\eta^{\alpha\beta'}\dot{w}^{i'}_{\beta'}\,, \qquad \delta w^{i'\alpha'} = -\psi^{i'}_{\beta}\eta^{\beta\alpha'}\,, \quad \delta\chi^{i\alpha'} = -2i\dot{v}^{i}_{\beta}\eta^{\beta\alpha'}\,. \tag{1.143}$$

Соответствующие нётеровские заряды

$$\tilde{Q} = -\psi^{A}\delta_{A}{}^{N}p^{(w)}_{N} + \chi^{M}\delta_{M}{}^{B}p^{(v)}_{B}\,, \qquad \tilde{Q}^{p} = \psi^{A}\bar{\eta}^{p}_{AN}p^{(w)}_{N} + \chi^{M}\bar{\eta}^{p}_{MB}p^{(v)}_{B} \tag{1.144}$$

производят матрицы четырех дополнительных комплексных структур

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{A}{}^{B'} \\ \delta_{A'}{}^{B} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{I}^{\tilde{p}} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\eta}^{\tilde{p}}_{AB'} \\ \bar{\eta}^{\tilde{p}}_{A'B} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.145}$$

Антисимметричные матрицы I^{a}, $\tilde{I}$ и $\tilde{I}^{\tilde{p}}$ образуют семимерную алгебру Клиффорда.

1.2.4. Взаимодействие (4,4,0) мультиплетов

Рассмотрим теперь систему с двумя корневыми мультиплетами при наличии нетривиального взаимодействия между ними.

Мультиплеты одной зеркальности

Рассмотрим систему двух взаимодействующих мультиплетов $(\mathbf{4},\ \mathbf{4},\ \mathbf{0})$ одного типа, которые описываются суперполем $\mathcal{V}^{i\alpha}(t,\theta)$ (1.101) и суперполем $\mathcal{U}^{i\alpha}(t,\theta)$, имеющим компонентное разложение

$$\mathcal{U}^{i\alpha} = u^{i\alpha} - \theta^{ik'}\varphi_{k'}^{\ \alpha} + i\theta^{ik'}\theta_{k'k}\dot{u}^{k\alpha} - \tfrac{i}{3}\,\theta^{ii'}\theta_{i'k}\theta^{kk'}\dot{\varphi}_{k'}^{\ \alpha} - \tfrac{1}{12}\,\theta^{kk'}\theta_{k'j}\theta^{ji'}\theta_{i'k}\,\ddot{u}^{\,i\alpha}, \tag{1.146}$$

содержащее четыре вещественных бозонных поля $u^{i\alpha}$ и четыре вещественных фермионных поля $\varphi^{i'\alpha}$.

Общее сигма-модельное суперполевое действие $S = \int dtd^4\theta\,\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{U})$ имеет следующий компонентный вид [69]

$$S = \int dt\,\Big(L_b + L_{2f} + L_{4f}\Big), \tag{1.147}$$

$$L_b = -\tfrac{1}{2}\left(\triangle_v\mathcal{L}\right)\dot{v}^{i\alpha}\dot{v}_{\alpha i} - \tfrac{1}{2}\left(\triangle_u\mathcal{L}\right)\dot{u}^{i\alpha}\dot{u}_{\alpha i} + 2\epsilon^{ij}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(u)}_{\beta j}\mathcal{L}\right)\dot{v}^{k\alpha}\dot{u}^{\beta}_{k}\,, \tag{1.148}$$

$$
\begin{aligned}
L_{2f} \;=\;& -\tfrac{i}{4}\left(\triangle_v\mathcal{L}\right)\psi^{i'\alpha}\dot{\psi}_{\alpha i'} - \tfrac{i}{4}\left(\triangle_u\mathcal{L}\right)\varphi^{i'\alpha}\dot{\varphi}_{\alpha i'} \\
& +\tfrac{i}{2}\,\epsilon^{ij}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(u)}_{\beta j}\mathcal{L}\right)\left(\varphi^{\beta}_{k'}\dot{\psi}^{k'\alpha} - \dot{\varphi}^{\beta}_{k'}\psi^{k'\alpha}\right) \\
& +i\left(\partial^{(v)}_{\alpha k}\triangle_v\mathcal{L}\right)\dot{v}^{k}_{\beta}R^{\alpha\beta}_{(\psi)} + 2i\,\epsilon^{ij}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(u)}_{\beta j}\partial^{(u)}_{\gamma k}\mathcal{L}\right)\dot{v}^{k\alpha}R^{\beta\gamma}_{(\varphi)} \\
& +\tfrac{i}{4}\left(\partial^{(u)}_{\alpha k}\triangle_v\mathcal{L}\right)\dot{v}^{k}_{\beta}\varphi^{\alpha}_{j'}\psi^{j'\beta} - \tfrac{i}{2}\,\epsilon^{ij}\left(\partial^{(u)}_{\alpha i}\partial^{(v)}_{\beta j}\partial^{(v)}_{\gamma k}\mathcal{L}\right)\dot{v}^{k\beta}\varphi^{\alpha}_{j'}\psi^{j'\gamma} \\
& +i\left(\partial^{(u)}_{\alpha k}\triangle_u\mathcal{L}\right)\dot{u}^{k}_{\beta}R^{\alpha\beta}_{(\varphi)} + 2i\,\epsilon^{ij}\left(\partial^{(u)}_{\alpha i}\partial^{(v)}_{\beta j}\partial^{(v)}_{\gamma k}\mathcal{L}\right)\dot{u}^{k\alpha}R^{\beta\gamma}_{(\psi)} \\
& +\tfrac{i}{4}\left(\partial^{(v)}_{\alpha k}\triangle_u\mathcal{L}\right)\dot{u}^{k}_{\beta}\psi^{\alpha}_{j'}\varphi^{j'\beta} - \tfrac{i}{2}\,\epsilon^{ij}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(u)}_{\beta j}\partial^{(u)}_{\gamma k}\mathcal{L}\right)\dot{u}^{k\beta}\psi^{\alpha}_{j'}\varphi^{j'\gamma}
\end{aligned}
\tag{1.149}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{4f} \;=\;& \tfrac{1}{6}\left(\triangle_v^2\mathcal{L}\right)R^{\alpha\beta}_{(\psi)}R_{(\psi)\alpha\beta} + \tfrac{1}{6}\left(\triangle_u^2\mathcal{L}\right)R^{\alpha\beta}_{(\varphi)}R_{(\varphi)\alpha\beta} \\
& -\tfrac{1}{3}\,\epsilon^{ij}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(u)}_{\beta j}\triangle_v\mathcal{L}\right)R^{\alpha\gamma}_{(\psi)}\psi_{k'\gamma}\varphi^{\beta k'} + \tfrac{1}{3}\,\epsilon^{ij}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(u)}_{\beta j}\triangle_u\mathcal{L}\right)R^{\beta\gamma}_{(\varphi)}\varphi_{\gamma k'}\psi^{k'\alpha} \\
& -\tfrac{1}{2}\left(\triangle_v\triangle_u\mathcal{L}\right)R^{i'j'}_{(\psi)}R_{(\varphi)i'j'} + 2\epsilon^{ik}\epsilon^{jl}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(v)}_{\beta j}\partial^{(u)}_{\gamma k}\partial^{(u)}_{\delta l}\mathcal{L}\right)R^{\alpha\beta}_{(\psi)}R^{\gamma\delta}_{(\varphi)}\,,
\end{aligned}
\tag{1.150}
$$

где $R^{i'j'}_{(\psi)} = \frac{1}{4}\psi^{i'\gamma}\psi^{j'}_{\gamma}$, $R_{(\varphi)\,i'j'} = \frac{1}{4}\varphi^{\gamma}_{i'}\varphi_{\gamma j'}$.

Действие (1.147) инвариантно относительно преобразований $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии (1.102) полей $v^{i\alpha}$, $\psi^{i'\alpha}$ и аналогичных преобразований компонентных полей суперполя $\mathcal{U}^{i\alpha}$:

$$
\delta u^{i\alpha} = \varepsilon^{ik'}\varphi^{\alpha}_{k'}, \qquad \delta\varphi^{i'\alpha} = -2i\dot{u}^{\alpha}_{k}\varepsilon^{ki'}. \tag{1.151}
$$

Эти преобразования образуют $\mathcal{N} = 4$ НКТ суперсимметрию с комплексными структурами J^p, определенными в (1.142).

Обратим внимание, что бозонная часть действия включает в общем смешанный кинетический член $\propto \dot{v}\dot{u}$. Он обращается в нуль только при выполнении условия

$$
\epsilon^{ij}\left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\partial^{(u)}_{\beta j}\mathcal{L}\right) = 0\,, \tag{1.152}
$$

которое справедливо, если лагранжиан представляет собой сумму двух слагаемых, зависящих, соответственно, только от v, ψ и только от u, φ, т.е. если два мультиплета не взаимодействуют. Для доказательства этого заметим во-первых, что большинство членов в (1.149) и (1.150) содержат (1.152) и его производные. Есть также члены с $\triangle_v\mathcal{L} \equiv G_1$, $\triangle_u\mathcal{L} \equiv G_2$ и их производными. Для определения их структуры подействуем на (1.152) оператором $\partial^{\alpha(v)}_{k} = \epsilon^{\alpha\gamma}\partial^{(v)}_{\gamma k}$. Оператор $\epsilon^{\alpha\gamma}\partial^{(v)}_{\gamma k}\partial^{(v)}_{\alpha i}$ антисимметричный по отношению к

$k \leftrightarrow i$ и дает $(1/2)\epsilon_{ki}\triangle_v$. Мы получаем $\partial^{(u)}_{\beta j} G_1 = 0$, то есть G_1 не зависит от u. По той же причине G_2 не зависит от v.

Два взаимно-зеркальных (4,4,0) мультиплета

Рассмотрим теперь суперполевое действие $S = \displaystyle\int dt d^4\theta\, \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, где $\mathcal{V}$ является обычный мультиплет, тогда как $\mathcal{W}$ – зеркальный мультиплет. Оно имеет следующий компонентный вид [197]

$$S = \int dt\, L = \int dt\, \Big(L_b + L_{2f} + L_{4f}\Big) \tag{1.153}$$

$$L_b = -\tfrac{1}{2}\, G_1\, \dot v^{i\alpha} \dot v_{\alpha i} - \tfrac{1}{2}\, G_2\, \dot w^{i'\alpha'} \dot w_{\alpha' i'}\,, \tag{1.154}$$

$$\begin{aligned} L_{2f} \;\; = \;\; & -\tfrac{i}{4}\, G_1\, \psi^{i'\alpha} \dot\psi_{\alpha i'} - \tfrac{i}{4}\, G_2\, \chi^{i\alpha'} \dot\chi_{\alpha' i} \\ & +i \left(\partial^{(v)}_{\alpha k}\, G_1\right) \dot v^k_\beta R^{\alpha\beta} - i \left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\, G_2\right) R^{ik} \dot v^\alpha_k - \tfrac{i}{2} \left(\partial^{(w)}_{\alpha' i'}\, G_1\right) \psi^{i'\alpha} \dot x_{\alpha i} \chi^{i\alpha'} \\ & +i \left(\partial^{(w)}_{\alpha' k'}\, G_2\right) \dot w^{k'}_{\beta'} R^{\alpha'\beta'} - i \left(\partial^{(w)}_{\alpha' i'}\, G_1\right) R^{i'k'} \dot w^{\alpha'}_{k'} - \tfrac{i}{2} \left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\, G_2\right) \chi^{i\alpha'} \dot w_{\alpha' i'} \psi^{i'\alpha} \end{aligned} \tag{1.155}$$

$$\begin{aligned} L_{4f} \;\; = \;\; & \tfrac{1}{6} \left(\triangle_v\, G_1\right) R^{\alpha\beta} R_{\beta\alpha} + \tfrac{1}{6} \left(\triangle_w\, G_2\right) R^{\alpha'\beta'} R_{\beta'\alpha'} \\ & -\tfrac{1}{3} \left(\partial^{(v)}_{\alpha i} \partial^{(w)}_{\alpha' i'}\, G_1\right) R^{\alpha\beta} \psi^{i'}_\beta \chi^{i\alpha'} - \tfrac{1}{3} \left(\partial^{(v)}_{\alpha i} \partial^{(w)}_{\alpha' i'}\, G_2\right) R^{\alpha'\beta'} \chi^i_{\beta'} \psi^{i'\alpha} \\ & + \left(\partial^{(v)}_{\alpha i} \partial^{(v)}_{\beta j}\, G_2\right) R^{\alpha\beta} R^{ij} + \left(\partial^{(w)}_{\alpha' i'} \partial^{(w)}_{\beta' j'}\, G_1\right) R^{\alpha'\beta'} R^{i'j'}\,. \end{aligned} \tag{1.156}$$

Здесь

$$G_1(v,w) = \triangle_v \mathcal{L}(v,w)\,, \quad G_2(v,w) = -\triangle_w \mathcal{L}(v,w)\,, \tag{1.157}$$

$R^{\alpha\beta}$, $R^{\alpha'\beta'}$, $R^{i'j'}$ были определены выше и $R^{ij} = R^{ji} = \frac{1}{4}\, \chi^{i\gamma'} \chi^j_{\gamma'}$. Обратим внимание, что, в отличие от лагранжиана (1.148), описывающего взаимодействие двух обычных $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ мультиплетов, здесь отсутствуют смешанные кинетические члены $\propto \dot v \dot w$.

В общем случае действие (1.153) инвариантно относительно преобразований $\mathcal{N}\!=\!4$ суперсимметрии (1.102), (1.126), генерируемыми нётеровскими суперзарядами

$$\begin{aligned} Q^{j'}_i \;\; = \;\; & \psi^{j'\alpha} p^{(v)}_{\alpha i} + p^{(w)j'\alpha'} \chi_{\alpha' i} \\ & + \tfrac{i}{12} \psi^{j'\beta} \psi_{\beta k'} \psi^{k'\alpha} \left(\partial^{(v)}_{\alpha i}\, G_1\right) - \tfrac{i}{12} \left(\partial^{(w)j'\alpha'}\, G_2\right) \chi_{\alpha' k} \chi^{k\beta'} \chi_{\beta' i} \\ & + \tfrac{i}{4} \psi^{j'\beta} \psi_{\beta k'} \left(\partial^{(w)k'\alpha'}\, G_1\right) \chi_{\alpha' i} - \tfrac{i}{4} \psi^{j'\beta} \left(\partial^{(w)}_{\beta k}\, G_2\right) \chi^{k\alpha'} \psi_{\alpha' i}\,. \end{aligned} \tag{1.158}$$

То есть, нетривиальное взаимодействие в действии (1.153) нарушает НКТ преобразования свободного действия и оставляет только би-НКТ преобразования (1.102), (1.126).

Выше мы видели, что свободное действие (1.138) имеет дополнительную инвариантность относительно преобразований (1.143), смешивающих компоненты разных мультиплетов. Действие (1.153) также обладает этим свойством при условии

$$G_1(v,w) = G_2(v,w) \equiv G(v,w)\,, \tag{1.159}$$

когда метрика становится конформно-плоской. В этом случае $\mathcal{N}$=4 би-НКТ суперсимметрия расширяется до $\mathcal{N}$=8 ОКТ суперсимметрии. Нётеровские суперзаряды, соответствующие преобразованиям (1.102), (1.126), равны

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{\alpha'}_{\beta} \;=\; & -\psi_{\beta k'} p^{(w)k'\alpha'} + p^{(v)}_{\beta k}\chi^{k\alpha'} \\ & - \tfrac{i}{12}\left(\partial^{(v)}_{\beta i}\, G\right)\chi^{i\gamma'}\chi_{\gamma' k}\chi^{k\alpha'} - \tfrac{i}{12}\psi_{\beta i'}\psi^{i'\gamma}\psi_{\gamma k'}\left(\partial^{(w)k'\alpha'}\, G\right) \\ & + \tfrac{i}{4}\psi_{\beta k'}\left(\partial^{(w)k'\gamma'}\, G\right)\chi_{\gamma' i}\chi^{i\alpha'} + \tfrac{i}{4}\psi_{\beta i'}\psi^{i'\gamma}\left(\partial^{(v)}_{\gamma k}\, G\right)\chi^{k\alpha'}\,. \end{aligned} \tag{1.160}$$

Важно отметить, что условие (1.159) вместе с соотношениями (1.157) приводит к D=8 гармоничности функции Лагранжа,

$$(\triangle_v + \triangle_w)\,\mathcal{L}(v,w) = 0\,, \tag{1.161}$$

а также к $D = 8$ гармоничности конформного фактора $(\triangle_v + \triangle_w)\,G(v,w) = 0$.

Восьмимерная формулировка

Вводя величины $x^M = \left(v^A, w^{A'}\right)$, $\psi^M = \left(\psi^A, \chi^{A'}\right)$, $M = 1,\ldots,8$, получим следующий вид метрики

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} G_1\,\delta_{AB} & 0 \\ 0 & G_2\,\delta_{A'B'} \end{pmatrix} \tag{1.162}$$

и лагранжиана в (1.153)

$$L = \tfrac{1}{2}\, g_{MN}\left(\dot{x}^M\dot{x}^N + i\psi^M\hat{\nabla}\psi^N\right) - \tfrac{1}{12}\,\partial_M C_{NLR}\psi^M\psi^N\psi^L\psi^R\,, \tag{1.163}$$

где $\quad \hat{\nabla}\psi^M = \dot{\psi}^M + \hat{\Gamma}^M_{NL}\dot{x}^N\psi^L\,, \qquad \hat{\Gamma}_{M,NL} = g_{MR\hat{\Gamma}^R_{NL}=\Gamma_{M,NL}+\frac{1}{2}\,C_{MNL}\,.}$(1.164)

Лагранжиан (1.163) дает следующие ненулевые скобки Пуассона $\{x^M, p_N\} = \delta^M_N$, $\{\psi^M, \psi^N\} = -ig^{MN}$, $\{\psi^M, p_N\} = -\frac{1}{2}\, g^{ML}(\partial_N g_{LR})\, \psi^R$. Связность Леви-Чивита $\Gamma_{M,NL} = \frac{1}{2}\,(\partial_N g_{ML} + \partial_L g_{MN} - \partial_M g_{NL})$ имеет следующие ненулевые компоненты

$$\Gamma_{A,BC} = \tfrac{1}{2}\left[\delta_{AB}(\partial^{(v)}_C G_1) + \delta_{AC}(\partial^{(v)}_B G_1) - \delta_{BC}(\partial^{(v)}_A G_1)\right],$$

$$\Gamma_{A',B'C'} = \tfrac{1}{2}\left[\delta_{A'B'}(\partial^{(w)}_{C'} G_2) + \delta_{A'C'}(\partial^{(w)}_{B'} G_2) - \delta_{B'C'}(\partial^{(w)}_{A'} G_2)\right],$$

$$\Gamma_{A',B'A} = -\Gamma_{A,A'B'} = \tfrac{1}{2}\,\delta_{A'B'}(\partial^{(v)}_A G_2), \quad \Gamma_{A,BA'} = -\Gamma_{A',AB} = \tfrac{1}{2}\,\delta_{AB}(\partial^{(w)}_{A'} G_1).$$

Ненулевые компоненты кручения равны

$$C_{ABC} = \epsilon_{ABCD}(\partial^{(v)}_D G_1)\,, \qquad C_{A'B'C'} = \epsilon_{A'B'C'D'}(\partial^{(w)}_{A'} G_2)\,, \tag{1.165}$$

$$C_{A'AB} = -C_{AA'B} = C_{AA'M} = -\eta^p_{AB}\eta^p_{A'B'}(\partial^{(w)}_{B'} G_1)\,, \tag{1.166}$$

$$C_{AA'B'} = -C_{A'AB'} = C_{A'B'A} = -\eta^p_{AC}\eta^p_{A'B'}(\partial^{(v)}_C G_2)\,. \tag{1.167}$$

Отметим, что компоненты кручения (1.166), (1.167) удовлетворяют условиям $4D$ самодуальности $\epsilon_{ABCD}C_{MCD} = 2\, C_{MAB}$, $\epsilon_{A'B'C'D'}C_{AC'D'} = 2\, C_{AA'B'}$.

Стандартная спиновая связность, определенная соотношениями $\Omega_{M,NL} = e^{\underline{R}}_N\, e^{\underline{S}}_L\, \Omega_{M,\underline{RS}}$, $\Omega_{M,\underline{NL}} = e_{\underline{N}R}\left(\partial_M e^R_{\underline{L}} + \Gamma^R_{MS} e^S_{\underline{L}}\right)$, редуцируется для метрики (1.162) к виду $\Omega_{M,NL} = \Gamma_{N,ML} - \frac{1}{2}\,\partial_M g_{NL} = \partial_{[L} g_{N]M}$ и подразумевает $\Omega_{M,NL}\psi^M\psi^N\psi^L = 0$.

Гамильтониан системы (1.163)

$$H = \tfrac{1}{2}\, g^{MN}\mathcal{P}_M\mathcal{P}_N + \tfrac{1}{12}\,\partial_M C_{NLR}\psi^M\psi^N\psi^L\psi^R \tag{1.168}$$

использует величины $\mathcal{P}_M = p_M - \frac{i}{2}\,\hat{\Omega}_{M,NL}\psi^N\psi^L$, где спиновая связность с кручением

$$\hat{\Omega}_{M,NL} = \Omega_{M,NL} - \tfrac{1}{2}\, C_{MNL} = e^{\underline{R}}_N e^{\underline{S}}_L\, \hat{\Omega}_{M,\underline{RS}} \tag{1.169}$$

соответствует аффинной связности с кручением (1.164): $\hat{\Omega}_{M,\underline{NL}} = e_{\underline{N}R}\left(\partial_M e^R_{\underline{L}} + \hat{\Gamma}^R_{MS} e^S_{\underline{L}}\right)$. Отметим, что в рассматриваемом случае выполняется равенство $\Omega_{M,NL}\psi^N\psi^L = \Gamma_{N,ML}\psi^N\psi^L$.

Синглетная и триплетная части суперзарядов (1.158)

$$Q \;=\; \psi^M\Big(p_M - \tfrac{i}{2}\,\Omega_{M,NL}\psi^N\psi^L + \tfrac{i}{12}\, C_{MNL}\,\psi^N\psi^L\Big), \tag{1.170}$$

$$Q^p \;=\; \psi^S(I^p)_S{}^M\Big(p_M - \tfrac{i}{6}\,\Omega_{M,NL}\psi^N\psi^L + \tfrac{i}{12}\, C_{MNL}\,\psi^N\psi^L\Big), \tag{1.171}$$

в которых матрицы комплексных структур $(I^p)_S^{\ M}$ даются выражениями (1.140), удовлетворяют алгебре суперсимметрии

$$\{Q,Q\}=-2iH\,,\qquad \{Q^p,Q^q\}=-2iH\delta^{pq}\,,\qquad \{Q,Q^p\}=0 \qquad (1.172)$$

с гамильтонианом (1.168).

По аналогии со случаем HKT геометрии, преобразования (1.102), (1.126) можно переписать в виде

$$\delta x^M = i\,\varepsilon\psi^M + i\,\varepsilon_p(I^p)^M{}_N\psi^N\,,\qquad \delta\psi^M=-\varepsilon\dot{x}^M+\varepsilon_p(I^p)^M{}_N\,\dot{x}^N\,, \qquad (1.173)$$

где $(I^p)^M{}_N = g^{ML}(I^p)_L{}^R g_{RN}$ имеет те же матричные компоненты, что и $(I^p)_M{}^N$. Но, в отличие от HKT геометрии, комплексные структуры (1.140) не ковариантно постоянны в отношении связности (1.164). Это означает, в частности, что кручения (1.165)-(1.167) не даются выражением (1.89) для любой I^p. Конечно, для каждой комплексной структуры I^p все еще можно определить связность Бисмута (1.89) так, что ковариантная производная I^p равна нулю. В отличие от HKT случая, такие связности Бисмута различные для разных I^p . Кроме того, комплексные структуры удовлетворяют более слабым условиям (1.93) по отношению к ковариантной производной (1.164). Отметим, что конкомитант Нийенхейса (1.94) обращаются в нуль, поскольку $(I^p)_M^N$ постоянные. Можно также проверить, что тензор кручения удовлетворяет условиям (1.96). Таким образом, рассматриваемая модель описывает би-HKT геометрию.

Как было указано выше, при $G_1=G_2$, т.е. когда $\partial_\mu\partial_\mu G(v,w)=0$, модель обладает четырьма дополнительными суперсимметриями (1.143), которые в восьмимерных обозначениях могут быть представлены в виде

$$\delta x^M = i\,\eta\tilde{I}^M{}_N\psi^N{+}i\,\eta_p(\tilde{I}^{\tilde p})^M{}_\nu\psi^N\,,\qquad \delta\psi^M=\eta\tilde{I}^M{}_N\dot{x}^N{+}\eta_p(\tilde{I}^{\tilde p})^M{}_N\dot{x}^N\,. \quad (1.174)$$

Синглетная и триплетная части нётеровских суперзарядов (1.160) этой $\mathcal{N}{=}4$ суперсимметрии принимают вид ($\tilde{p}=1,2,3$)

$$\tilde{Q} \;=\; \psi^S\tilde{I}_S{}^M\Big(p_M-\tfrac{i}{6}\,\Omega_{M,NL}\psi^N\psi^L+\tfrac{i}{12}\,C_{MNL}\,\psi^N\psi^L\Big), \qquad (1.175)$$

$$\tilde{Q}^{\tilde p} \;=\; \psi^S(\tilde{I}^{\tilde p})_S{}^M\Big(p_M-\tfrac{i}{6}\,\Omega_{M,NL}\psi^N\psi^L+\tfrac{i}{12}\,C_{MNL}\,\psi^N\psi^L\Big)\,, \qquad (1.176)$$

где комплексные структуры $\tilde{I}_M^{\ N}, (\tilde{I}^{\tilde{p}})_M^{\ N}$ определены в (1.145). Эти комплексные структуры вместе со структурами (1.140) образуют алгебру Клиффорда

$$\begin{gathered} \{I^a, I^b\} = -2\,\delta^{ab}\mathbf{1}_8\,, \qquad \tilde{I}^2 = -\mathbf{1}_8\,, \qquad \{\tilde{I}^{\tilde{p}}, \tilde{I}^{\tilde{q}}\} = -2\,\delta^{\tilde{p}\tilde{q}}\mathbf{1}_8\,, \\ \{\tilde{I}, \tilde{I}^{\tilde{p}}\} = \{\tilde{I}, I^a\} = \{I^a, \tilde{I}^{\tilde{p}}\} = \ 0\,. \end{gathered} \tag{1.177}$$

$\mathcal{N}=2$ суперполевая формулировка

Для лучшего понимания природы спиновой связности (1.169), выразим лагранжиан (1.163) в терминах $\mathcal{N}=2$ суперполей и покажем присутствие здесь некоторых специальных случаев твистованных комплексов Дольбо с расширенной суперсимметрией. Для этого при рассмотрении суперполя $\mathcal{V}^{i\alpha}$, определяемого связями (1.100), введем два комплексных суперполя $\mathcal{V}^m$ посредством $\mathcal{V}^{i\alpha} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^1 & \mathcal{V}^2 \\ \bar{\mathcal{V}}^2 & -\bar{\mathcal{V}}^1 \end{pmatrix}$, а также $\theta^{ik'} = \begin{pmatrix} \eta & \theta \\ \bar{\theta} & -\bar{\eta} \end{pmatrix}$, $D^{ik'} = \begin{pmatrix} \bar{D}_\eta & \bar{D}_\theta \\ -D_\theta & D_\eta \end{pmatrix}$, где

$$\begin{aligned} D_\theta &= \partial_\theta - i\bar{\theta}\partial_t\,, \qquad & \bar{D}_\theta &= -\partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_t\,, \\ D_\eta &= \partial_\eta - i\bar{\eta}\partial_t\,, \qquad & \bar{D}_\eta &= -\partial_{\bar{\eta}} + i\eta\partial_t\,. \end{aligned} \tag{1.178}$$

Связи (1.100) теперь представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar{D}_\theta\mathcal{V}^m = \bar{D}_\eta\mathcal{V}^m = 0\,, \qquad & D_\theta\bar{\mathcal{V}}^{\bar{m}} = D_\eta\bar{\mathcal{V}}^{\bar{m}} = 0\,, \\ D_\theta\mathcal{V}^m + \epsilon^{mn}\bar{D}_\eta\bar{\mathcal{V}}^{\bar{n}} = 0\,, \qquad & D_\eta\mathcal{V}^m - \epsilon^{mn}\bar{D}_\theta\bar{\mathcal{V}}^{\bar{n}} = 0 \end{aligned} \tag{1.179}$$

и разрешаются через $\mathcal{N}=2$ киральные суперполя $V^m = \ v^m + \sqrt{2}\theta\psi^m - i\theta\bar{\theta}\dot{v}^m$ следующим образом

$$\mathcal{V}^m = V^m + \eta\,\epsilon^{mn}\bar{D}\bar{V}^{\bar{n}} - i\eta\bar{\eta}\,\dot{V}^m\,, \tag{1.180}$$

где $D \equiv D_\theta,\ \bar{D} \equiv \bar{D}_\theta$.

Для зеркального $(\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$ мультиплета, который описываются суперполем $\mathcal{W}^{i'\alpha'}$ со связями (1.123), введем суперполя $\mathcal{W}^\mu$, определенные посредством $\mathcal{W}^{i'\alpha'} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{W}}^1 & \bar{\mathcal{W}}^2 \\ \mathcal{W}^2 & -\mathcal{W}^1 \end{pmatrix}$, для которых связи (1.123) принимают вид

$$\begin{aligned} &\bar{D}_\theta \mathcal{W}^\mu = D_\eta \mathcal{W}^\mu = 0\,, \qquad && D_\theta \bar{\mathcal{W}}^{\bar{\mu}} = \bar{D}_\eta \bar{\mathcal{W}}^{\bar{\mu}} = 0\,, \\ &D_\theta \mathcal{W}^\mu - \epsilon^{\mu\nu} D_\eta \bar{\mathcal{W}}^{\bar{\nu}} = 0\,, \qquad && \bar{D}_\eta \mathcal{W}^\mu + \epsilon^{\mu\nu} \bar{D}_\theta \bar{\mathcal{W}}^{\bar{\nu}} = 0\,. \end{aligned} \tag{1.181}$$

Решения этих связей

$$\mathcal{W}^\mu = W^\mu + \bar{\eta}\, \epsilon^{\mu\nu} \bar{D} \bar{W}^{\bar{\nu}} + i\eta\bar{\eta}\, \dot{W}^\mu\,. \tag{1.182}$$

где $W^\mu = w^\mu + \sqrt{2}\theta\chi^\mu - i\theta\bar{\theta}\dot{w}^\mu$ имеет точно такой же вид, как $\mathcal{V}^m$, но с заменой $\eta \leftrightarrow \bar{\eta}$.

Суперполевое действие (1.153) может быть эквивалетно переписано в $\mathcal{N} = 2$ суперполевой форме

$$\begin{aligned} \int d\eta d\bar{\eta}\, \mathcal{L}(\mathcal{V}^m, \bar{\mathcal{V}}^{\bar{m}}, \mathcal{W}^\mu, \bar{\mathcal{W}}^{\bar{\mu}}) = & \Big[(\partial_m \partial_{\bar{n}} \mathcal{L}) + \epsilon_{mk}\, \epsilon_{\bar{n}\bar{l}}\, (\partial_l \partial_{\bar{k}} \mathcal{L})\Big] DV^m \bar{D} \bar{V}^{\bar{n}} \\ & - \Big[(\partial_\mu \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{L}) + \epsilon_{\mu\kappa}\, \epsilon_{\bar{\nu}\bar{\lambda}}\, (\partial_\lambda \partial_{\bar{\kappa}} \mathcal{L})\Big] DW^\mu \bar{D} \bar{W}^{\bar{\nu}} \\ & + \epsilon_{mn}\, \epsilon_{\mu\nu}\, (\partial_{\bar{n}} \partial_{\bar{\nu}} \mathcal{L})\, DV^m DW^\mu \\ & - \epsilon_{\bar{m}\bar{n}}\, \epsilon_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\, (\partial_n \partial_\nu \mathcal{L})\, \bar{D} \bar{V}^{\bar{m}} \bar{D} \bar{W}^{\bar{\mu}}\,. \end{aligned} \tag{1.183}$$

Действие (1.183) является частным случаем $\mathcal{N}$=2 суперполевого действия для НКТ систем, предложенного в [196].

Отметим важное различие между $\mathcal{N} = 2$ суперполевыми разложениями $\mathcal{V}^m$ и $\mathcal{W}^\mu$ в (1.180) и (1.182): во втором случае грассманова переменная η заменяется на $\bar{\eta}$. Эта разница не важна при рассмотрении систем только с $\mathcal{V}^{i\alpha}$ или только с $\mathcal{W}^{i'\alpha'}$, так как всегда можно переопределить $\eta \leftrightarrow \bar{\eta}$. Однако она становится существенной при рассмотрении этих супермультиплетов вместе, потому что это приводит к различным законам преобразования соответствующих киральных суперполей относительно скрытой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии, действующей в виде сдвигов $\eta, \bar{\eta}$. С точки $\mathcal{N} = 2$ суперполевой точки зрения, именно эта разница отвечает за появление би-НКТ геометрии в такой системе [196]. Действительно, присутствие η в (1.180) и $\bar{\eta}$ в (1.182) приводит к появлению структур $DV^m DW^\mu$, $\bar{D}\bar{V}^{\bar{m}} \bar{D}\bar{W}^{\bar{\mu}}$ (последние два члена в (1.183), генерирующих дополнительные голоморфные компоненты в кручениях.

1.2.5. Квантовые суперзаряды и геометрия

В Разделе 1.1 мы описали общий рецепт для квантования суперсимметричных теорий, который был предложен в [193]. Выражения для квантовых суперзарядов можно получить с использованием результатов предыдущего раздела и работы [140], где показано, что данная модель, записанная в терминах $\mathcal{N}=2$ суперполей, имеет вид твистованного комплекса Дольбо с дополнительными голоморфными и антиголоморфными компонентами кручения.

Обсудим вид квантовых суперзарядов. Для этого, рассмотрим пару (Q, Q^p) при некотором частном значении p. (Анти)голоморфные компоненты кручения $\sim C_{jkl}, \sim C_{\bar{j}\bar{k}\bar{l}}$ даются выражением (1.91) с $I \equiv I^p$. Кручение C представляет собой сумму (анти)голоморфной части H и кручения Бисмута B, не имеющего (анти)голоморфных составляющих. В вещественных обозначениях (анти)голоморфные части определяются $\frac{i}{12}H_{MNL}\psi^M\psi^N\psi^L$ для Q и $\frac{i}{12}H_{MNL}(I^p)_S{}^M\psi^S\psi^N\psi^L$ для Q^p , точно также, как и в классических суперзарядах. Твистованная часть в Q^p включает тензор кручения Бисмута B^p_{MNL} для комплексной структуры I^p и дается тем же выражением, что и в (1.118) с указанным там порядком индексов [200]. Окончательно получаем следующие выражения для квантовых суперзарядов

$$Q = \psi^M\Big(p_M - \tfrac{i}{2}\,\Omega_{M,NL}\psi^N\psi^L + \tfrac{i}{12}\,C_{MNL}\,\psi^N\psi^L\Big), \tag{1.184}$$

$$Q^p = \psi^S(I^p)_S{}^M\Big(p_M - \tfrac{i}{2}\,\Omega_{M,NL}\psi^N\psi^L - \tfrac{i}{4}\,B^p_{MNL}\psi^N\psi^L + \tfrac{i}{12}\,H^p_{MNL}\psi^N\psi^L\Big), \tag{1.185}$$

где

$$C_{MNL} \;=\; B^p_{MNL} + H^p_{MNL}\,. \tag{1.186}$$

B^p_{MNL} является кручением Бисмута для комплексной структуры I^p, тогда как кручение $H^p_{MNL}(C, I^p)$ определено в (1.91).

Можно доказать, что суперзаряды (1.184), (1.185) образуют квантовую $\mathcal{N}=4$ супералгебру. Выполнение соотношений $Q^2 = (Q^p)^2 = H$, $\{Q, Q^p\}_+ = 0$ для суперзарядов (1.184), (1.185) было получено в [140]. Так как квантовые суперзаряды (1.185) получаются из классических суперзарядов (1.171) с помощью вейлевского упорядочения, то доказательство выполнения $\{Q^p, Q^q\}_+ = 0$ при $p \neq q$ можно выполнить с помощью символа Вейля (анти)коммутатора двух операторов, который задается скобкой Мойала их вейлевских символов. Для системы с участием фермионных переменных последняя определяется как

$$
\begin{aligned}
i\hbar\{A,B\}_{GM} \;=\; & 2\sinh\left\{\frac{\hbar}{2}\sum_a\left(\frac{\partial^2}{\partial\psi_a^{(2)}\partial\bar{\psi}_a^{(1)}}-\frac{\partial^2}{\partial\psi_a^{(1)}\partial\bar{\psi}_a^{(2)}}\right)\right. \\
& \left.+\frac{i\hbar}{2}\sum_i\left(\frac{\partial^2}{\partial q_i^{(1)}\partial p_i^{(2)}}-\frac{\partial^2}{\partial q_i^{(2)}\partial p_i^{(1)}}\right)\right\} \\
& A\left(p_i^{(1)},q_i^{(1)};\bar{\psi}_a^{(1)},\psi_a^{(1)}\right)B\left(p_i^{(2)},q_i^{(2)};\bar{\psi}_a^{(2)},\psi_a^{(2)}\right)\Big|_{1=2}\;,
\end{aligned}
\tag{1.187}
$$

где (p_i, q_i) являются бозонными и (ψ^a, ψ^a) – фермионными каноническими парами. Здесь мы ввели $\hbar$ для более явного вида классического предела $\hbar \to 0$, когда ограничиваемся первым членом в разложении $sinh$ и скобка ГМ сводится к скобке Пуассона. Скобки Пуассона $\{Q^p, Q^q\}$ равна нулю при $p \neq q$. Возможные кубичные члены в разложении sinh с шестьми частными производными также обращаются в нуль для диагональной метрики (1.162).

Таким образом, мы получили новое геометрическое определение би-HKT многообразий, которое выглядит как естественное обобщение определения HKT многообразия. HKT многообразие является многообразием с 3 кватернионными комплексными структурами, для которых связности Бисмута совпадают. би-HKT многообразие является многообразием с 3 комплексными структурами, для которых связности Бисмута не совпадают, но совпадают полные связности: они содержат в общем тензоре кручения (1.186) дополнительные члены, которые являются голоморфными и антиголоморфными по отношению ко всем комплексным структурам. Развернутое доказательство этого утверждения для произвольных KKT многообразий дано в нашей работе [143], где приведены также конкретные примеры систем с HKT, би-HKT и OKT структурами.

1.3. Гамильтонова редукция в би-HKT сигма-моделях и би-келеровы системы

В предыдущем подразделе рассматривался случай с одним обычным и одним зеркальным мультиплетами. Теперь рассмотрим систему, образованной произвольным числом обычных и зеркальных мультиплетов, и исследуем гамильтонову редукцию в ней.

Система, образованная n^* обычными $(\mathbf{4},\, \mathbf{4},\, \mathbf{0})$ супермультиплетами, описывает HKT геометрию. При подходящем выборе координат HKT комплексные структуры определяются вещественными антисимметричными матрицами размерности $4n^*$ $(I^1)_M{}^N = \mathrm{diag}(\mathbf{I}, \ldots, \mathbf{I})$, $(I^2)_M{}^N = \mathrm{diag}(\mathbf{J}, \ldots, \mathbf{J})$, $(I^3)_M{}^N = \mathrm{diag}(\mathbf{K}, \ldots, \mathbf{K})$, где

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

являются самодуальными и выражаются через символы т‘Хофта.

В [143] было рассмотрено альтернативное определение HKT многообразия. Для этого рассмотрим формы Ω_p, соответствующие комплексным структурам I^p. В случае HKT многообразия форма

$$\mathcal{I} = \Omega_2 + i\Omega_3 \tag{1.188}$$

имеет тип (2,0) относительно комплексной структуры I^1: ее голоморфная производная зануляется, $\partial_1 \mathcal{I} = 0$. Сопряженная форма $\bar{\mathcal{I}} = \Omega_2 - i\Omega_3$ имеет тип (0,2) относительно I^1. Аналогично, формы $\Omega_3 \pm i\Omega_1$ имеют типы (2,0) и (0,2) относительно I^2, а формы $\Omega_1 \pm i\Omega_2$ – (2,0) и (0,2) относительно I^3. Доказательство этого утверждения дано в [201, 144]. Существование замкнутой голоморфной формы может быть взято в качестве альтернативного определения HKT геометрии. Можно выбрать комплексный базис, в котором

$$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}{}^{\bar{\mathcal{N}}} = h^{\bar{\mathcal{N}}\mathcal{P}} \mathcal{I}_{\mathcal{M}\mathcal{P}} = \mathrm{diag}(\epsilon, \ldots, \epsilon)\,, \qquad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.189}$$

и аналогично для $\bar{\mathcal{I}}_{\bar{\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{N}}$. Суперзаряды

$$\begin{aligned}
S^{\text{НКТ}} &= \sqrt{2}\,\psi^{\mathcal{M}} \left[\Pi_{\mathcal{M}} - \tfrac{i}{2}\left(\partial_{\mathcal{M}} h_{\mathcal{K}\bar{\mathcal{L}}}\right) \psi^{\mathcal{K}} \bar{\psi}^{\bar{\mathcal{L}}}\right], \\
\bar{S}^{\text{НКТ}} &= \sqrt{2}\,\bar{\psi}^{\bar{\mathcal{M}}} \left[\bar{\Pi}_{\bar{\mathcal{M}}} + \tfrac{i}{2}\left(\bar{\partial}_{\bar{\mathcal{M}}} h_{\mathcal{K}\bar{\mathcal{L}}}\right) \psi^{\mathcal{K}} \bar{\psi}^{\bar{\mathcal{L}}}\right], \\
R^{\text{НКТ}} &= \sqrt{2}\,\psi^{\mathcal{N}}\, \mathcal{I}_{\mathcal{N}}{}^{\bar{\mathcal{M}}} \left[\bar{\Pi}_{\bar{\mathcal{M}}} - \tfrac{i}{2}\left(\bar{\partial}_{\bar{\mathcal{M}}} h_{\mathcal{K}\bar{\mathcal{L}}}\right) \psi^{\mathcal{K}} \bar{\psi}^{\bar{\mathcal{L}}}\right], \\
\bar{R}^{\text{НКТ}} &= \sqrt{2}\,\bar{\psi}^{\bar{\mathcal{N}}}\, \bar{\mathcal{I}}_{\bar{\mathcal{N}}}{}^{\mathcal{M}} \left[\Pi_{\mathcal{M}} + \tfrac{i}{2}\left(\partial_{\mathcal{M}} h_{\mathcal{K}\bar{\mathcal{L}}}\right) \psi^{\mathcal{K}} \bar{\psi}^{\bar{\mathcal{L}}}\right]
\end{aligned} \tag{1.190}$$

удовлетворяют алгебре $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии.

Общие НКТ модели определяются динамикой (**4**, **4**, **0**) мультиплетов, которые описываются $\mathcal{N}=4$ суперполями $\mathcal{V}^{i\alpha}_a$ (см. (1.180)), где индекс $a=1,\ldots,n^*$ является “цветной”. Общее НКТ действие

$$S \;=\; \frac{1}{4}\int dt\, d\theta d\bar\theta d\eta d\bar\eta\, \mathcal{L}(\mathcal{V}^m_a,\bar{\mathcal{V}}^{\bar m}_a) \tag{1.191}$$

после интегрирования по $d\eta d\bar\eta$ принимает вид

$$S=\frac{1}{4}\int dt\, d\theta d\bar\theta\, \Delta^{ab}_{m\bar n}\mathcal{L}(V,\bar V)\, DV^m_a\bar D\bar V^{\bar n}_b\,, \tag{1.192}$$

где

$$\Delta^{ab}_{m\bar n}\mathcal{L} \;=\; \Big(\partial^a_m\bar\partial^b_{\bar n}+\epsilon_{mk}\epsilon_{\bar n\bar l}\bar\partial^a_{\bar k}\partial^b_l\Big)\mathcal{L} \tag{1.193}$$

является эрмитовой метрикой $h_{m\bar n}$. Лагранжиан (1.192) принадлежит к классу $\mathcal{N}=2$ сигма-моделей, описывающих комплексы Дольбо [36].

Если метрика комплекса Дольбо $h_{\mathcal{M}\bar{\mathcal{N}}}$ не зависит от половины комплексных координат $z^{\mathcal{M}}$ ($\mathcal{M}\equiv\{m,a\}$) или от половины вещественных координат (например, от мнимых частей $\mathrm{Im}(z^{\mathcal{M}})$),[5] можно выполнить гамильтонову редукцию, после которой эрмитова метрика $h_{\mathcal{M}\bar{\mathcal{N}}}$ представляется в виде суммы

$$h_{\mathcal{M}\bar{\mathcal{N}}} \;\to\; \frac{1}{2}\Big(g_{(MN)}+ib_{[MN]}\Big)\,, \tag{1.194}$$

содержащую симметричную вещественную и антисимметричную мнимую части. Получаемая после редукции суперсимметричная модель является квазикомплексной моделью де Рама. Настоящий метрический тензор редуцированной модели равен

$$G_{MN} \;\to\; g_{MN}+b_{MK}(g^{-1})^{KL}b_{LN}\,. \tag{1.195}$$

Как показано в [144], данная квазикомплексная модель имеет суперполевое представление в терминах n^* (**2**, **4**, **2**) суперполей $\mathcal{Z}_a(t;\theta,\eta;\bar\theta,\bar\eta)$, удовлетворяющих линейным киральным связям $\bar D_\theta\mathcal{Z}^a=\bar D_\eta\mathcal{Z}^a \;=\; 0\,$. Суперполевой

---

[5] Для интегрируемой комплексной структуры можно ввести голоморфные координаты $x^M=\{z^{\mathcal{M}},\bar z^{\bar{\mathcal{M}}}\}$, для которых метрика является эрмитовой, $ds^2 = 2h_{\mathcal{M}\bar{\mathcal{N}}}dz^{\mathcal{M}}d\bar z^{\bar{\mathcal{N}}}$. В этих кординатах тензор ${I_M}^N$ имеет ненулевые компоненты ${I_{\mathcal{M}}}^{\mathcal{N}} = -I^{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}} = -i\delta^{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}}$, ${I_{\bar{\mathcal{M}}}}^{\bar{\mathcal{N}}} = -I^{\bar{\mathcal{N}}}_{\bar{\mathcal{M}}} = i\delta^{\bar{\mathcal{N}}}_{\bar{\mathcal{M}}}$ и поэтому $I_{\mathcal{M}\bar{\mathcal{N}}}=-I_{\bar{\mathcal{N}}\mathcal{M}}=-ih_{\mathcal{M}\bar{\mathcal{N}}}$.

лагранжиан квазикомплексной кэлеровой модели является суммой лагранжиана кэлеровой модели и голоморфных F-членов,

$$S = \frac{1}{4}\int dt\, d^2\theta\, d^2\eta\, \mathcal{K}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}) - \frac{1}{2}\left[\int dt\, d\theta d\eta\, \mathcal{A}_a(\mathcal{Z})\dot{\mathcal{Z}}^a + \text{c.c.}\right] . \qquad (1.196)$$

Более подробно это обсудим в следующем подразделе при обсуждении редукции би-НКТ моделей.

1.3.1. Би-НКТ многобразия

В отличии от случая НКТ, алгебра матриц $A + B^p I^p$, образованных из трех би-НКТ комплексных структур I^p, теперь не замкнута относительно умножения. Замыкание этой алгебры представляет прямую сумму кватернионных алгебр $\mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-$. Так, произведение генераторов I^p производит 4 дополнительных генератора,

$$J^p = \frac{1}{2}\,\epsilon^{pqr} I^q I^r, \qquad \Delta = -I^1 J^1 = -I^2 J^2 = -I^3 J^3 \qquad (1.197)$$

замыкающих алгебру:

$$I^p J^q = J^p I^q = \ -\delta^{pq}\Delta + \epsilon^{pqr} I^r, \qquad I^p I^q = J^p J^q = \ -\delta^{pq} + \epsilon^{pqr} J^r,$$

$$\Delta I^p = I^p \Delta = J^p, \qquad \Delta J^p = J^p \Delta = I^p, \qquad \Delta^2 = 1\,.$$

Отметим, что матрицы J^p удовлетворяют кватернионной алгебре (1.88). Рассмотрим теперь матрицы $I^p_\pm = \frac{1}{2}(I^p \pm J^p)$ и $\Delta_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \Delta)$. Легко увидеть, что два множества $\{\Delta_+, I^p_+\}$ и $\{\Delta_-, I^p_-\}$ образуют подалгебры, каждая из которых изоморфна кватернионной алгебре: $I^p_\pm I^q_\pm = -\delta^{pq}\Delta_\pm + \epsilon^{pqr} I^r_\pm$, $I^p_\pm \Delta_\pm = \Delta_\pm I^p_\pm = I^p_\pm$, $\Delta_\pm I^p_\mp = I^p_\mp \Delta_\pm = I^p_\pm I^q_\mp = 0$. Учитывая это, мы можем взять структуры в виде

$$I^1_{bi-HKT} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{I},\ldots,\mathbf{I}}_{n^*},\ \underbrace{-\mathbf{I},\ldots,-\mathbf{I}}_{m^*}), \qquad J^1_{bi-HKT} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{I},\ldots,\mathbf{I}}_{n^*+m^*}),$$

$$I^2_{bi-HKT} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{J},\ldots,\mathbf{J}}_{n^*},\ \underbrace{-\mathbf{J},\ldots,-\mathbf{J}}_{m^*}), \qquad J^2_{bi-HKT} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{J},\ldots,\mathbf{J}}_{n^*+m^*}),$$

$$I^3_{bi-HKT} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{K},\ldots,\mathbf{K}}_{n^*},\underbrace{-\mathbf{K},\ldots,-\mathbf{K}}_{m^*}), \qquad J^3_{bi-HKT} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{K},\ldots,\mathbf{K}}_{n^*+m^*})\,.$$

Эти выражения подразумевают, что конкомутант Нийехуиза $\frac{1}{2}\, N^{\lambda}_{\mu\nu}(p,q) = \Big\{ (I^p)_{[\mu}{}^{\sigma}\partial_{\sigma}(I^q)_{\nu]}{}^{\lambda} - \partial_{[\mu}(I^q)_{\nu]}{}^{\sigma}(I^p)_{\sigma}{}^{\lambda} \Big\} + (p \leftrightarrow q)$ зануляется для любой пары (I^p, I^q), (J^p, J^q), (I^p, J^q).

В [143] и предыдущем подразделе рассматривался случай с одним обычным и одним зеркальным мультиплетами. Теперь рассмотрим систему, образованной n^* обычными (1.180) и m^* зеркальным (1.182) мультиплетами и описываемую суперполевым действием

$$S = \frac{1}{4}\int dt\, d\theta d\bar\theta\, d\eta d\bar\eta\, \mathcal{L}(\mathcal{V}^n_a, \bar{\mathcal{V}}^{\bar n}_a, \mathcal{W}^{\mu}_{\alpha}, \bar{\mathcal{W}}^{\bar\mu}_{\alpha})\,, \tag{1.198}$$

$a = 1, \ldots, n^*$; $\alpha = 1, \ldots, m^*$; $n, \mu = 1, 2$. Интегрируя по $d\eta d\bar\eta$, мы представляем это действие в $\mathcal{N} = 2$ суперпространстве

$$S = \frac{1}{4}\int dt\, d\theta d\bar\theta\, \mathcal{L}'(V, \bar V, W, \bar W)\,, \tag{1.199}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' \;=\;& (\Delta^{ab}_{m\bar n}\mathcal{L})\, DV^m_a \bar D\bar V^{\bar n}_b - (\Delta^{\alpha\beta}_{\mu\bar\nu}\mathcal{L})\, DW^{\mu}_{\alpha}\bar D\bar W^{\bar\nu}_{\beta} \\ & - \epsilon_{mn}\epsilon_{\mu\nu}(\bar\partial^a_{\bar n}\bar\partial^{\alpha}_{\bar\nu}\mathcal{L})\, DV^m_a DW^{\mu}_{\alpha} + \epsilon_{\bar m\bar n}\epsilon_{\bar\mu\bar\nu}(\partial^a_n\partial^{\alpha}_{\nu}\mathcal{L})\, \bar D\bar V^{\bar m}_a \bar D\bar W^{\bar\mu}_{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1.200}$$

Здесь $\partial^a_m = \partial/\partial V^m_a$, $\bar\partial^a_{\bar m} = \partial/\partial\bar V^{\bar m}_a$, $\partial^{\alpha}_{\mu} = \partial/\partial W^{\mu}_{\alpha}$, $\bar\partial^{\alpha}_{\bar\mu} = \partial/\partial\bar W^{\bar\mu}_{\alpha}$; $D \equiv D_{\theta}$, $\bar D \equiv \bar D_{\theta}$ – ковариантные производные (1.178) и структуры

$$\Delta^{ab}_{m\bar n}\mathcal{L} \;=\; \partial^a_m\bar\partial^b_{\bar n}\mathcal{L} + \epsilon_{mk}\epsilon_{\bar n\bar l}\bar\partial^a_{\bar k}\partial^b_l\mathcal{L}\,, \qquad \Delta^{\alpha\beta}_{\mu\bar\nu}\mathcal{L} \;=\; \partial^{\alpha}_{\mu}\partial^{\beta}_{\bar\nu}\mathcal{L} + \epsilon_{\mu\lambda}\epsilon_{\bar\nu\bar\rho}\bar\partial^{\alpha}_{\bar\lambda}\partial^{\beta}_{\rho}\mathcal{L} \tag{1.201}$$

зависят от $2n^* + 2m^*$ киральных $\mathcal{N} = 2$ суперполей $V^m_a, \bar V^{\bar m}_a, W^{\mu}_{\alpha}, \bar W^{\bar\mu}_{\alpha}$.

Лагранжиан (1.200) содержит, помимо членов $\sim D\bar D$, также члены $\sim DD$ и $\sim \bar D\bar D$, и описывает суперсимметричную систему Дольбо, твистованную голоморфными кручениями [31, 140]. Половина суперсимметрий действия (1.198) реализованы явно в (1.200), тогда как вторая половина “скрыта” и реализована следующими преобразованиями $\mathcal{N} = 2$ суперполей

$$\begin{aligned} \delta_{\eta}V^m_a &= -\varepsilon_{\eta}\,\epsilon^{mn}\bar D\bar V^{\bar n}_a\,, & \delta_{\eta}\bar V^{\bar m}_a &= \bar\varepsilon_{\eta}\,\epsilon^{\bar m\bar n}DV^n_a\,, \\ \delta_{\eta}W^{\mu}_{\alpha} &= -\bar\varepsilon_{\eta}\,\epsilon^{\mu\nu}\bar D\bar W^{\bar\nu}_{\alpha}\,, & \delta_{\eta}\bar W^{\bar\mu}_{\alpha} &= \varepsilon_{\eta}\,\epsilon^{\bar\mu\bar\nu}DW^{\nu}_{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1.202}$$

После интегрирования по грассмановым переменным в (1.200) получаем компонентное действие. Вторые производные препотенциала (1.201) дают метрику: бозонная часть компонентного лагранжиана имеет вид

$$L_b = h^{ab}_{m\bar n}\, \dot v^m_a \dot{\bar v}^{\bar n}_b + h^{\alpha\beta}_{\mu\bar\nu}\, \dot w^\mu_\alpha \dot{\bar w}^{\bar\nu}_\beta\,, \tag{1.203}$$

где в

$$h^{ab}_{m\bar n} = \Delta^{ab}_{m\bar n}\mathcal{L}\,, \qquad h^{\alpha\beta}_{\mu\bar\nu} = -\Delta^{\alpha\beta}_{\mu\bar\nu}\mathcal{L}\,, \tag{1.204}$$

производные берутся по компонентным полям v^m_a, w^μ_α. Заметим, что $\epsilon_{nk}h^{ab}_{m\bar k} = -\epsilon_{mk}h^{ba}_{n\bar k}$, $\epsilon_{\bar n\bar k}h^{ab}_{k\bar m} = -\epsilon_{\bar m\bar k}h^{ba}_{k\bar n}$, $\epsilon_{\nu\lambda}h^{\alpha\beta}_{\mu\bar\lambda} = -\epsilon_{\mu\lambda}h^{\beta\alpha}_{\nu\bar\lambda}$, $\epsilon_{\bar\nu\bar\lambda}h^{\alpha\beta}_{\lambda\bar\mu} = -\epsilon_{\bar\mu\bar\lambda}h^{\beta\alpha}_{\lambda\bar\nu}$. Компонентный лагранжиан содержит также 2- и 4-фермионные члены, зависящие от ψ^n_a (фермионные суперпартеры v^n_a) и χ^μ_α (фермионные суперпартеры w^μ_α). Полный компонентный лагранжиан приведен в [151].

Суперзаряды находятся с помощью нётеровской процедуры. Пара суперзарядов, соответствующих явной $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии, имеет вид [140]

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{2}\,\psi^m_a\left(\Pi^a_m - \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{bc}_{k\bar l}\,\psi^k_b\bar\psi^{\bar l}_c - \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{\beta\gamma}_{\nu\bar\lambda}\,\chi^\nu_\beta\bar\chi^{\bar\lambda}_\gamma + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{mn}\epsilon_{\nu\lambda}\,\bar\partial^a_{\bar n}h^{\alpha\beta}_{\mu\bar\lambda}\,\chi^\mu_\alpha\chi^\nu_\beta\right)\\
&\quad+\sqrt{2}\,\chi^\mu_\alpha\left(\Pi^\alpha_\mu - \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{\beta\gamma}_{\nu\bar\lambda}\,\chi^\nu_\beta\bar\chi^{\bar\lambda}_\gamma - \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{bc}_{k\bar l}\,\psi^k_b\bar\psi^{\bar l}_c + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{nk}\,\bar\partial^\alpha_{\bar\nu}h^{ab}_{m\bar k}\,\psi^m_a\psi^n_b\right),\\
\bar S &= \sqrt{2}\,\bar\psi^{\bar m}_a\left(\bar\Pi^a_{\bar m} + \tfrac{i}{2}\,\bar\partial^a_{\bar m}h^{bc}_{k\bar l}\,\psi^k_b\bar\psi^{\bar l}_c + \tfrac{i}{2}\,\bar\partial^a_{\bar m}h^{\beta\gamma}_{\nu\bar\lambda}\,\chi^\nu_\beta\bar\chi^{\bar\lambda}_\gamma - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\bar m\bar n}\epsilon_{\bar\mu\bar\lambda}\,\partial^a_n h^{\alpha\beta}_{\lambda\bar\nu}\,\bar\chi^{\bar\mu}_\alpha\bar\chi^{\bar\nu}_\beta\right)\\
&\quad+\sqrt{2}\,\bar\chi^{\bar\mu}_\alpha\left(\bar\Pi^\alpha_{\bar\mu} + \tfrac{i}{2}\,\bar\partial^\alpha_{\bar\mu}h^{\beta\gamma}_{\nu\bar\lambda}\,\chi^\nu_\beta\bar\chi^{\bar\lambda}_\gamma + \tfrac{i}{2}\,\bar\partial^\alpha_{\bar\mu}h^{bc}_{k\bar l}\,\psi^k_b\bar\psi^{\bar l}_c - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\bar\mu\bar\nu}\epsilon_{\bar m\bar k}\,\partial^\alpha_\nu h^{ab}_{k\bar n}\,\bar\psi^{\bar m}_a\bar\psi^{\bar n}_b\right),
\end{aligned}$$

где импульсы Π^a_m, Π^α_μ находятся вариацией лагранжиана по $\dot v^n_a$ и $\dot w^\mu_\alpha$ при фиксированных $\psi^n_a, \chi^\mu_\alpha$. Выражения суперзарядов можно сделать более компактными после введения величин

$$\Psi^{\mathcal{M}} = \{\psi^m_a, \chi^\mu_\alpha\}\,, \quad \bar\Psi^{\bar{\mathcal{M}}} = \left\{\bar\psi^{\bar m}_a, \bar\chi^{\bar\mu}_\alpha\right\}\,, \quad \Pi_{\mathcal{M}} = \left\{\Pi^a_m, \Pi^\alpha_\mu\right\}, \tag{1.205}$$

$\partial_{\mathcal{M}} = \left\{\partial^a_m, \partial^\alpha_\mu\right\}$, метрического тензора

$$h_{\mathcal{M}\bar{\mathcal{N}}} = \begin{pmatrix} h^{ab}_{m\bar n} & 0 \\ 0 & h^{\alpha\beta}_{\mu\bar\nu} \end{pmatrix}, \tag{1.206}$$

и матриц двух гиперкомплексных структур, соответствующих двум тройкам комплексных структур,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathcal{M}}{}^{\bar{\mathcal{N}}} = \bar{\mathcal{I}}_{\bar{\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{N}} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{mn}\delta^a{}_b & 0 \\ 0 & -\epsilon_{\mu\nu}\delta^\alpha{}_\beta \end{pmatrix},\\
\mathcal{J}_{\mathcal{M}}{}^{\bar{\mathcal{N}}} = \bar{\mathcal{J}}_{\bar{\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{N}} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{mn}\delta^a{}_b & 0 \\ 0 & \epsilon_{\mu\nu}\delta^\alpha{}_\beta \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.207}$$

Суперзаряды тогда приобретают вид

$$
\begin{aligned}
S &= \sqrt{2}\,\Psi^{\mathcal{M}}\Big(\Pi_{\mathcal{M}} - \tfrac{i}{2}\,\partial_{\mathcal{M}} h_{\mathcal{K}\bar{\mathcal{L}}}\Psi^{\mathcal{K}}\bar{\Psi}^{\mathcal{L}} + \tfrac{i}{2}\,\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\Psi^{\mathcal{K}}\Psi^{\mathcal{L}}\Big)\,, \\
\bar{S} &= \sqrt{2}\,\bar{\Psi}^{\bar{\mathcal{M}}}\Big(\bar{\Pi}_{\bar{\mathcal{M}}} + \tfrac{i}{2}\,\bar{\partial}_{\bar{\mathcal{M}}} h_{\mathcal{K}\bar{\mathcal{L}}}\Psi^{\mathcal{K}}\bar{\Psi}^{\mathcal{L}} - \tfrac{i}{2}\,\bar{\partial}_{\bar{\mathcal{M}}}\bar{\mathcal{C}}_{\bar{\mathcal{K}}\bar{\mathcal{L}}}\,\bar{\Psi}^{\bar{\mathcal{K}}}\bar{\Psi}^{\bar{\mathcal{L}}}\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{1.208}
$$

где

$$
\mathcal{C}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = -\mathcal{I}_{[\mathcal{K}}{}^{\bar{\mathcal{P}}}\,\mathcal{J}_{\mathcal{L}]}^{\bar{\mathcal{R}}}\,\partial_{\bar{\mathcal{P}}}\partial_{\bar{\mathcal{R}}}\,\mathcal{L}\,. \tag{1.209}
$$

Для нахождения второй пары суперзарядов, генерирующих преобразования (1.202), воспользуемся инвариантностью компонентного лагранжиана относительно $Z_2 \times Z_2$ преобразований:

$$
\chi^{\mu}_{\alpha} \to \epsilon^{\mu\nu}\bar{\chi}^{\bar{\nu}}_{\alpha}\,, \quad \bar{\chi}^{\bar{\mu}}_{\alpha} \to \epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\chi^{\nu}_{\alpha}\,; \quad v^{m}_{a} \to \epsilon^{mn}\bar{v}^{\bar{n}}_{a}\,, \quad \bar{v}^{\bar{m}}_{a} \to \epsilon^{\bar{m}\bar{n}}v^{n}_{a}\,; \tag{1.210}
$$

(поля w^{μ}_{α}, ψ^{m}_{a} не преобразовываются) или

$$
\psi^{m}_{a} \to \epsilon^{mn}\bar{\psi}^{\bar{n}}_{a}\,, \quad \bar{\psi}^{\bar{m}}_{a} \to \epsilon^{\bar{m}\bar{n}}\psi^{n}_{a}\,; \quad w^{\mu}_{\alpha} \to \epsilon^{\mu\nu}\bar{w}^{\bar{\nu}}_{\alpha}\,, \quad \bar{w}^{\bar{\mu}}_{\alpha} \to \epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}}w^{\nu}_{\alpha}\,; \tag{1.211}
$$

(поля v^{m}_{a} and χ^{μ}_{α} не преобразовываются). Наличие таких дискретных преобразований является общим свойством суперсимметричных моделей. Они являются дискретными подгруппами непрерывных групп автоморфизмов алгебры суперсимметрии (R-симметрий). В нашем случае, симметрия (1.210) является частью $SU_L(2)$-симметрии, которая вращает индекс i в $\theta^{ik'}$ и преобразует поля v^m, χ^μ, оставляя инвариантными w^μ, ψ^m. Симметрия (1.211) – подгруппа $SU_R(2)$, действующая на индекс k' в $\theta^{ik'}$, преобразующая w^μ, ψ^m и не действующая на v^m, χ^μ.

Действуя на S, $\bar{S}$ дискретными преобразованиями (1.210), дополненными $\Pi^a_m \to -\epsilon_{mn}\bar{\Pi}^a_{\bar{n}}$, или (1.211), дополненными $\Pi^\alpha_\mu \to -\epsilon_{\mu\nu}\bar{\Pi}^\alpha_{\bar{\nu}}$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{2}\,\psi^{n}_{a}\,\epsilon_{nm}\left(\bar{\Pi}^{a}_{\bar{m}} - \tfrac{i}{2}\,\bar{\partial}^{a}_{\bar{m}}h^{bc}_{k\bar{l}}\,\psi^{k}_{b}\bar{\psi}^{\bar{l}}_{c} + \tfrac{i}{2}\,\bar{\partial}^{a}_{\bar{m}}h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^{\nu}_{\beta}\bar{\chi}^{\bar{\lambda}}_{\gamma} - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\bar{m}\bar{k}}\epsilon_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}\,\partial^{a}_{k}h^{\alpha\beta}_{\lambda\bar{\nu}}\,\bar{\chi}^{\bar{\mu}}_{\alpha}\bar{\chi}^{\bar{\nu}}_{\beta}\right) \\
&\quad -\sqrt{2}\,\bar{\chi}^{\bar{\nu}}_{\alpha}\,\epsilon_{\bar{\nu}\bar{\mu}}\left(\Pi^{\alpha}_{\mu} + \tfrac{i}{2}\,\partial^{\alpha}_{\mu}h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^{\nu}_{\beta}\bar{\chi}^{\bar{\lambda}}_{\gamma} - \tfrac{i}{2}\,\partial^{\alpha}_{\mu}h^{bc}_{k\bar{l}}\,\psi^{k}_{b}\bar{\psi}^{\bar{l}}_{c} + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\lambda}\epsilon_{nk}\,\bar{\partial}^{\alpha}_{\bar{\lambda}}h^{ab}_{m\bar{k}}\,\psi^{m}_{a}\psi^{n}_{b}\right)\,, \\
\bar{R} &= \sqrt{2}\,\bar{\psi}^{\bar{n}}_{a}\,\epsilon_{\bar{n}\bar{m}}\left(\Pi^{a}_{m} + \tfrac{i}{2}\,\partial^{a}_{m}h^{bc}_{k\bar{l}}\,\psi^{k}_{b}\bar{\psi}^{\bar{l}}_{c} - \tfrac{i}{2}\,\partial^{a}_{m}h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^{\nu}_{\beta}\bar{\chi}^{\bar{\lambda}}_{\gamma} + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{mk}\epsilon_{\nu\lambda}\,\bar{\partial}^{a}_{\bar{k}}h^{\alpha\beta}_{\mu\bar{\lambda}}\,\chi^{\mu}_{\alpha}\chi^{\nu}_{\beta}\right) \\
&\quad -\sqrt{2}\,\chi^{\nu}_{\alpha}\,\epsilon_{\nu\mu}\left(\bar{\Pi}^{\alpha}_{\bar{\mu}} - \tfrac{i}{2}\,\bar{\partial}^{\alpha}_{\bar{\mu}}h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^{\nu}_{\beta}\bar{\chi}^{\bar{\lambda}}_{\gamma} + \tfrac{i}{2}\,\bar{\partial}^{\alpha}_{\bar{\mu}}h^{bc}_{k\bar{l}}\,\psi^{k}_{b}\bar{\psi}^{\bar{l}}_{c} - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\bar{\mu}\bar{\lambda}}\epsilon_{\bar{m}\bar{k}}\,\partial^{\alpha}_{\lambda}h^{ab}_{k\bar{n}}\,\bar{\psi}^{\bar{m}}_{a}\bar{\psi}^{\bar{n}}_{b}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Подобно S и $\bar{S}$, можно ввести компактные выражения для $R, \bar{R}$ посредством введения твистованных фермионов и импульсов, получаемых действием Z_2 симметрии (1.210) на мультиплет (1.205),

$$\Psi^{*\mathcal{M}} = \left\{\epsilon^{mn}\bar{\psi}^{\bar{n}}_{a}, \chi^{\mu}_{\alpha}\right\}, \quad \Pi^{*}_{\mathcal{M}} = \left\{\Pi^{a}_{m}, -\epsilon_{\mu\nu}\bar{\Pi}^{\alpha}_{\bar{\nu}}\right\}, \tag{1.212}$$

$\partial^{*}_{\mathcal{M}} = \left\{\partial^{a}_{m}, -\epsilon_{\mu\nu}\bar{\partial}^{\alpha}_{\bar{\nu}}\right\}$. Можно показать, что $R, \bar{R}$ выражается в терминах (1.212) точно также , как $S, \bar{S}$ через (1.205). Таким образом, обе пары суперзарядов зависят симметрично от гиперкомплексных структур $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$.

В вещественных величинах суперзаряды $S, \bar{S}$ и $R, \bar{R}$ суперполевого лагранжиана (1.198) эквивалентны вещественным суперзарядам (1.184), (1.185) при отожествлении $\psi^{M} = \{\Psi^{\mathcal{M}}, \bar{\Psi}^{\bar{\mathcal{M}}}\}$. Таким образом, структура (1.184), (1.185) имеет место для произвольной би-НКТ системы.

1.3.2. Квазикомплексные би-келеровые многообразия

Рассмотрим n^{*} суперполей $\mathcal{Z}^{a}(t;\, \theta, \bar{\theta}, \eta, \bar{\eta})$, $a = 1, \ldots, n^{*}$, представляющих киральные линейные (**2**, **4**, **2**) мультиплеты, и m^{*} твистованных (зеркальных) киральных (**2**, **4**, **2**) суперполей $\mathcal{U}^{\alpha}(t; \theta, \bar{\theta}, \eta, \bar{\eta})$, $\alpha = 1, \ldots, m^{*}$. Эти суперполя удовлетворяют связям

$$\bar{D}_{\theta}\, \mathcal{Z}^{a} = 0\,, \qquad \bar{D}_{\eta}\, \mathcal{Z}^{a} = 0\,, \tag{1.213}$$

$$\bar{D}_{\theta} \mathcal{U}^{\alpha} = 0\,, \qquad D_{\eta} \mathcal{U}^{\alpha} = 0 \tag{1.214}$$

и могут быть выражены в терминах $\mathcal{N} = 2$ суперполей.

$(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0}) \oplus (\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$

Можно представить $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$ мультиплет в виде суммы мультиплетов $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ и $(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ [36],

$$\mathcal{Z}^{a} = Z^{a} + \sqrt{2}\,\eta\, \Phi^{a} - i\eta\bar{\eta}\, \dot{Z}^{a}, \qquad \mathcal{U}^{\alpha} = U^{\alpha} - \sqrt{2}\,\bar{\eta}\, \Psi^{\alpha} + i\eta\bar{\eta}\, \dot{U}^{\alpha} \tag{1.215}$$

где $Z^{a} = z^{a} + \sqrt{2}\theta\phi^{a} - i\theta\bar{\theta}\dot{z}^{a}$, $\bar{D}_{\theta} Z^{a} = 0$ и $U^{\alpha} = u^{\alpha} + \sqrt{2}\,\theta\, \rho^{\alpha} - i\theta\bar{\theta}\, \dot{u}^{\alpha}$, $\bar{D}_{\theta} U^{\alpha} = 0$ являются обычными киральными суперполями, а $\Phi^{a} = \varphi^{a} + \sqrt{2}\,\theta\, A^{a} - i\theta\bar{\theta}\, \dot{\varphi}^{a}$, $\bar{D}_{\theta}\, \Phi^{a} = 0$ и $\Psi^{\alpha} = \varrho^{\alpha} + \sqrt{2}\,\theta\, B^{\alpha} - i\theta\bar{\theta}\, \dot{\varrho}^{\alpha}$, $\bar{D}_{\theta}\, \Psi^{\alpha} = 0$ – киральные суперполя типа $(\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$. Бозонные поля z^a, u^α являются динамическими, тогда как A^a, B^α – вспомогательными. Поля ϕ^a, φ^a, ρ^α, ϱ^α являются фермионными.

Твистованная келерова сигма-модель [139] описывается действием $\sim \int dt\, d\theta d\bar\theta\, d\eta d\bar\eta\, \mathcal{K}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}, \mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}})$, к которому можно добавить голоморфные F-члены:

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{bi-K}} \;&=\; \frac{1}{4}\int dt\, d\theta d\bar\theta\, d\eta d\bar\eta\, \mathcal{K}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}, \mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}) \\ &-\frac{1}{2}\left[\int dt\, d\theta\, d\eta\, \mathcal{A}_a(\mathcal{Z})\dot{\mathcal{Z}}^a + \text{c.c.}\right] + \frac{1}{2}\left[\int dt\, d\theta\, d\bar\eta\, \mathcal{B}_\alpha(\mathcal{U})\,\dot{\mathcal{U}}^\alpha + \text{c.c.}\right] \end{aligned} \tag{1.216}$$

После интегрирования по $d\eta$ и $d\bar\eta$ действие (1.216) записывается в терминах $\mathcal{N}=2$ суперполей:

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{bi-K}} \;&=\; \frac{1}{4}\int dt\, d\theta d\bar\theta\, \left[\kappa_{a\bar b}\left(DZ^a\bar D\bar Z^{\bar b} - 2\Phi^a\bar\Phi^{\bar b}\right) + \kappa_{\alpha\bar\beta}\left(DU^\alpha\bar D\bar U^{\bar\beta} - 2\Psi^\alpha\bar\Psi^{\bar\beta}\right)\right] \\ &-\frac{1}{2}\int dt\, d\theta d\bar\theta\, \left[(\partial_a\partial_\beta\mathcal{K})\,\Phi^a\Psi^\beta - (\bar\partial_{\bar a}\bar\partial_{\bar\beta}\mathcal{K})\,\bar\Phi^{\bar a}\bar\Psi^{\bar\beta}\right] \\ &+\frac{1}{\sqrt{2}}\int dt\, d\theta\, \left(\mathcal{F}_{ab}(Z)\dot Z^a\Phi^b + \mathcal{G}_{\alpha\beta}(U)\dot U^\alpha\Psi^\beta\right) \\ &+\frac{1}{\sqrt{2}}\int dt\, d\bar\theta\, \left(\bar{\mathcal{F}}_{\bar a\bar b}(\bar Z)\dot{\bar Z}^{\bar a}\bar\Phi^{\bar b} + \bar{\mathcal{G}}_{\bar\alpha\bar\beta}(\bar U)\dot{\bar U}^{\bar\alpha}\bar\Psi^{\bar\beta}\right)\,, \end{aligned} \tag{1.217}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_{a\bar b} = \partial_a\bar\partial_{\bar b}\mathcal{K}\,, \qquad \kappa_{\alpha\bar\beta} = -\partial_\alpha\bar\partial_{\bar\beta}\mathcal{K} \\ \mathcal{F}_{ab} \;=\; \partial_a\mathcal{A}_b - \partial_b\mathcal{A}_a, \qquad \mathcal{G}_{\alpha\beta} \;=\; \partial_\alpha\mathcal{B}_\beta - \partial_\beta\mathcal{B}_\alpha\,. \end{aligned} \tag{1.218}$$

Опуская в бозонном компонентном лагранжиане

$$\begin{aligned} L^{\mathrm{bi-K}}_{bos} \;&=\; \kappa_{a\bar b}\left(\dot z^a\dot{\bar z}^{\bar b} \;+\; A^a\bar A^{\bar b}\right) + \kappa_{\alpha\bar\beta}\left(\dot u^\alpha\dot{\bar u}^{\bar\beta} \;+\; B^\alpha\bar B^{\bar\beta}\right) \\ &+\mathcal{F}_{ab}(z)\,\dot z^a A^b + \bar{\mathcal{F}}_{\bar a\bar b}(\bar z)\,\dot{\bar z}^{\bar a}\bar A^{\bar b} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}(u)\,\dot u^\alpha B^\beta + \bar{\mathcal{G}}_{\bar\alpha\bar\beta}(\bar u)\,\dot{\bar u}^{\bar\alpha}\bar B^{\bar\beta} \end{aligned} \tag{1.219}$$

члены $\propto u, B$, мы получаем бозонный лагранжиан квазикомплексной келеровой модели [32]

$$L_{bos} = \kappa_{a\bar b}\left(\dot z^a\dot{\bar z}^{\bar b} \;+\; A^a\bar A^{\bar b}\right) + \mathcal{F}_{ab}(z)\,\dot z^a A^b + \bar{\mathcal{F}}_{\bar a\bar b}(\bar z)\,\dot{\bar z}^{\bar a}\bar A^{\bar b}\,, \tag{1.220}$$

который, после исключения вспомогательных полей $A^a, \bar A^{\bar b}$, производит

$$L_{bos} \to \dot z^a\dot{\bar z}^{\bar b}\left[\kappa_{a\bar b} - F_{af}(\kappa^{-1})^{\bar c f}F_{\bar c\bar b}\right], \tag{1.221}$$

в котором метрика не имеет вид $\partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} Q$ и, таким образом, не келерова.

Действие (1.216) является ограниченным выбором и возможны более общие дополнительные члены в би-келеровом случае. Так, вместо $\int dt\, d\theta\, d\eta\, \mathcal{A}_a(\mathcal{Z})\dot{\mathcal{Z}}^a$ мы можем взять линейную комбинацию $\int dt\, d\theta d\eta d\bar{\eta}\, \mathcal{A}^{(1)}_a(\mathcal{Z},\mathcal{U}) D_\eta \mathcal{Z}^a$ и $\int dt\, d\theta d\bar{\theta} d\eta\, \mathcal{A}^{(2)}_a(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{U}}) D_\theta \mathcal{Z}^a$ с двумя различными "векторными потенциалами", зависящими от зеркальных суперполей. То же можно проделать со структурой $\mathcal{B}_\alpha(U)$, заменяя ее на комбинацию $\mathcal{B}^{(1)}_\alpha(U,\mathcal{Z})$ и $\mathcal{B}^{(2)}_\alpha(U,\bar{\mathcal{Z}})$. Как результат, действие

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}^{\mathrm{bi-K}} &= \frac{1}{4}\int dt\, d\theta d\bar{\theta}\, d\eta d\bar{\eta}\, \mathcal{K}(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{Z}},\mathcal{U},\bar{\mathcal{U}}) \qquad (1.222)\\
&-\frac{i}{4}\left[\int dt\, d\theta\, d\eta d\bar{\eta}\, \mathcal{A}^{(1)}_a(\mathcal{Z},\mathcal{U})\, D_\eta \mathcal{Z}^a - \int dt\, d\theta d\bar{\theta}\, d\eta\, \mathcal{A}^{(2)}_a(\mathcal{Z},\bar{\mathcal{U}})\, D_\theta \mathcal{Z}^a + \text{c.c.}\right]\\
&+\frac{i}{4}\left[\int dt\, d\theta\, d\eta d\bar{\eta}\, \mathcal{B}^{(1)}_\alpha(\mathcal{U},\mathcal{Z})\, \bar{D}_\eta \mathcal{U}^\alpha - \int dt\, d\theta d\bar{\theta}\, d\bar{\eta}\, \mathcal{B}^{(2)}_\alpha(\mathcal{U},\bar{\mathcal{Z}})\, D_\theta \mathcal{U}^\alpha + \text{c.c.}\right]
\end{aligned}
$$

генерирует бозонный лагранжиан (1.219), в котором напряженности $\mathcal{F}_{ab}$, $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ определены выражениями (1.218) с

$$
\mathcal{A}_a = \mathcal{A}^{(1)}_a(z,u) + \mathcal{A}^{(2)}_a(z,\bar{u}), \qquad \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}^{(1)}_\alpha(u,z) + \mathcal{B}^{(2)}_\alpha(u,\bar{z})\,. \qquad (1.223)
$$

Действие (1.222) определяет общую квазикомплексную би-келерову модель.

Теперь мы готовы доказать основное утверждение этого подраздела: би-келеровы модели (1.216), (1.222) являются гамильтоновой редукцией би-НКТ моделей (1.198). Покажем сначала это для чистой НКТ модели, бозонный лагранжиан которой

$$
L^{\text{НКТ}}_{bos} = h^{ab}_{m\bar{n}}\, \dot{v}^m_a \dot{\bar{v}}^{\bar{n}}_b\,, \qquad h^{ab}_{m\bar{n}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial v^m_a \partial \bar{v}^{\bar{n}}_b} + \epsilon_{mk}\epsilon_{\bar{n}\bar{l}}\frac{\partial^2}{\partial \bar{v}^{\bar{k}}_a \partial v^l_b}\right)\mathcal{L}(v,\bar{v}) \qquad (1.224)
$$

после введения переменных $z^a = v^1_a$, $\xi^a = \bar{v}^2_a$ принимает вид

$$
L^{\text{НКТ}}_{bos} = \kappa_{a\bar{b}}\left(\dot{z}^a \dot{\bar{z}}^{\bar{b}} + \dot{\xi}^a \dot{\bar{\xi}}^{\bar{b}}\right) \;+\; \mathcal{F}_{ab}\, \dot{z}^a \dot{\xi}^b + \bar{\mathcal{F}}_{\bar{a}\bar{b}}\, \dot{\bar{z}}^{\bar{a}} \dot{\bar{\xi}}^{\bar{b}}\,, \qquad (1.225)
$$

где

$$
\kappa_{a\bar{b}} = h^{ab}_{1\bar{1}} = h^{ba}_{2\bar{2}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^a \partial \bar{z}^{\bar{b}}} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^a \partial \bar{\xi}^{\bar{b}}}\right)\mathcal{L}\,,
$$

$$\mathcal{F}_{ab} = h^{ab}_{1\bar{2}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^a \partial \xi^b} - \frac{\partial^2}{\partial z^b \partial \xi^a} \right) \mathcal{L}\,, \quad \bar{\mathcal{F}}_{\bar{a}\bar{b}} = h^{ab}_{2\bar{1}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^{\bar{a}} \partial \bar{\xi}^{\bar{b}}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^{\bar{b}} \partial \bar{\xi}^{\bar{a}}} \right) \mathcal{L}\,.$$

В моделях, допускающих редукцию, величины $\kappa_{a\bar{b}}$ и F_{ab} не должны иметь зависимость от половины координат, в качестве которых могут быть взяты ξ^a. Это приводит к ограничениям на препотенциал $\mathcal{L}$, общее решение для которого имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}) + \mathcal{A}_a(\mathcal{Z})\, \Xi^a + \bar{\mathcal{A}}_{\bar{a}}(\bar{\mathcal{Z}})\, \bar{\Xi}^{\bar{a}}\,, \tag{1.226}$$

где $\mathcal{K}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}})$ ($\mathcal{Z}^a = \mathcal{V}^1_a$, $\Xi^a = \mathcal{V}^2_a$). Тогда $\kappa_{a\bar{b}} = \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \mathcal{K}$ и $\mathcal{F}_{ab} = \partial_a \mathcal{A}_b - \partial_b \mathcal{A}_a$. Отметим, что бозонный кинетический член (1.225) содержит, помимо члена $\kappa_{a\bar{b}} \dot{z}^a \dot{\bar{z}}^{\bar{b}}$, также член $\kappa_{a\bar{b}} \dot{\xi}^a \dot{\bar{\xi}}^{\bar{b}}$ с временными производными ξ^a, даже в случае, когда препотенциал (1.191) зависит только от $\mathcal{V}^1_a$, так как компонентное разложение $\mathcal{V}^1_a$ содержит также $\bar{V}^2_a$.

Как отмечалось в [202] и подробно обсуждалось в [144], при редукции производные редуцированных координат переходят во вспомогательные поля редуцированной модели. В нашем случае, $\dot{\xi}^a \to A^a$. Таким образом, мы воспроизводим выражение (1.220) с полями обычного мультиплета. Фермионные члены восстанавливаются как в исходной, так и в редуцированной модели, $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией.

Для получения в результате редукции би-келеровой модели (1.222) рассмотрим би-НКТ модель (1.198) с препотенциалом

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & \mathcal{K}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}; \mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}) \\ & + \Big[\mathcal{A}^{(1)}_a(\mathcal{Z}, \mathcal{U}) + \mathcal{A}^{(2)}_a(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{U}}) \Big] \Xi^a + \Big[\bar{\mathcal{A}}^{(1)}_a(\bar{\mathcal{Z}}, \bar{\mathcal{U}}) + \bar{\mathcal{A}}^{(2)}_a(\bar{\mathcal{Z}}, \mathcal{U}) \Big] \bar{\Xi}^{\bar{a}} \\ & - \Big[\mathcal{B}^1_\alpha(\mathcal{U}, \mathcal{Z}) + \mathcal{B}^2_\alpha(\mathcal{U}, \bar{\mathcal{Z}}) \Big] \Sigma^\alpha - \Big[\bar{\mathcal{B}}^1_\alpha(\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathcal{Z}}) + \bar{\mathcal{B}}^2_\alpha(\bar{\mathcal{U}}, \mathcal{Z}) \Big] \bar{\Sigma}^{\bar{\alpha}} \end{aligned} \tag{1.227}$$

($\mathcal{U}^\alpha = \mathcal{W}^1_\alpha, \Sigma^\alpha = \mathcal{W}^2_\alpha$), бозонный лагранжиан (1.203) которой

$$\begin{aligned} L^{bi-HKT}_b \;=\; & \kappa_{a\bar{b}} \left(\dot{z}^a \dot{\bar{z}}^{\bar{b}} \;+\; \dot{\xi}^a \dot{\bar{\xi}}^{\bar{b}} \right) + \kappa_{\alpha\bar{\beta}} \left(\dot{u}^\alpha \dot{\bar{u}}^{\bar{\beta}} \;+\; \dot{\sigma}^\alpha \dot{\bar{\sigma}}^{\bar{\beta}} \right) \\ & + \mathcal{F}_{ab}\, \dot{z}^a \dot{\xi}^b + \bar{\mathcal{F}}_{\bar{a}\bar{b}}\, \dot{\bar{z}}^{\bar{a}} \dot{\bar{\xi}}^{\bar{b}} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}\, \dot{u}^\alpha \dot{\sigma}^\beta + \bar{\mathcal{G}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\, \dot{\bar{u}}^{\bar{\alpha}} \dot{\bar{\sigma}}^{\bar{\beta}}\,, \end{aligned} \tag{1.228}$$

где метрические величины

$$\kappa_{a\bar{b}} \;=\; \frac{\partial^2}{\partial z^a \partial \bar{z}^{\bar{b}}} \mathcal{K}\,, \quad \kappa_{\alpha\bar{\beta}} \;=\; -\frac{\partial^2}{\partial u^\alpha \partial \bar{u}^{\bar{\beta}}} \mathcal{K}\,,$$

$$\mathcal{F}_{ab} \; = \; \frac{\partial}{\partial z^a}\left[\mathcal{A}^{(1)}_b + \mathcal{A}^{(2)}_b\right] - (a \leftrightarrow b)\,, \quad \mathcal{G}_{\alpha\beta} \; = \; \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left[\mathcal{B}^{(1)}_\beta + \mathcal{B}^{(2)}_\beta\right] - (\alpha \leftrightarrow \beta)\,.$$

не зависят от ξ^a, σ^α. В результате редукции по этим переменным, когда производные $\dot{\xi}^a, \dot{\sigma}^\alpha$ переходят во вспомогательные поля A^a, B^α, воспроизводится бозонный лагранжиан (1.219) с $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{(1)} + \mathcal{F}^{(2)}$, $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(2)}$ квазикомплексной би-келеровой модели (1.222).

(2, 4, 2) = (1, 2, 1)⊕(1, 2, 1)

Имеет место реализация $\mathcal{N} = 4$ суперполей (1.213) и (1.214) с помощью двух пар вещественных $(\mathbf{1},\, \mathbf{2},\, \mathbf{1})$ $\mathcal{N} = 2$ суперполей X^m_a и Y^μ_α соответственно. Тогда представление би-келеровой модели в терминах суперполей X^m_a и Y^μ_α получается размерной редукцией би-НКТ действия относительно мнимых частей $\mathrm{Im}(v^m_a)$ и $\mathrm{Im}(w^\mu_\alpha)$. Эта процедура осуществляется представлением

$$v^m_a = x^m_a + i\lambda^m_a\,, \qquad w^\mu_\alpha = y^\mu_\alpha + it^\mu_\alpha\,, \tag{1.229}$$

введением новых комплексных переменных

$$z^a = x^1_a + ix^2_a\,, \quad \xi^a = \lambda^1_a + i\lambda^2_a\,, \qquad u^\alpha = y^1_\alpha + iy^2_\alpha\,, \quad \sigma^\alpha = t^1_\alpha + it^2_\alpha \tag{1.230}$$

и выполнением редукции в отношении ξ^a, σ^α. Гамильтонова редукция первой строки в (1.200) производит квазикомплексную модель де Рама [32] с лагранжианом

$$\mathcal{L}^{\text{first line}} \; = \; \frac{1}{2}\left[g^{ab}_{mn} + ib^{ab}_{mn}\right] DX^m_a \bar{D}X^n_b + \frac{1}{2}\left[g^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + ib^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\right] DY^\mu_\alpha \bar{D}Y^\nu_\beta\,, \tag{1.231}$$

где $g^{ab}_{mn}, g^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ и $b^{ab}_{mn}, b^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ являются, соответственно, вещественной симметричной и мнимой антисимметричной частями эрмитовых метрик $h^{ab}_{m\bar{n}}, h^{\alpha\beta}_{\mu\bar{\nu}}$ в (1.200), определяемые выражениями

$$g^{ab}_{mn} \; = \; \frac{1}{2}\Big(\partial^a_m\partial^b_n + \epsilon_{mk}\epsilon_{nl}\partial^a_k\partial^b_l\Big)\,\mathcal{K}(Z,\bar{Z},U,\bar{U}), \tag{1.232}$$

$$g^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \; = \; -\frac{1}{2}\Big(\partial^\alpha_\mu\partial^\beta_\nu + \epsilon_{\mu\kappa}\epsilon_{\nu\lambda}\partial^\alpha_\kappa\partial^\beta_\lambda\Big)\,\mathcal{K}(Z,\bar{Z},U,\bar{U}), \tag{1.233}$$

$$b^{ab}_{mn} = -\mathcal{F}^{ab}_{mn} \; = \; \partial^b_n\mathcal{A}^a_m - \partial^a_m\mathcal{A}^b_n\,, \qquad b^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = -\mathcal{G}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \; = \; \partial^\beta_\nu\mathcal{B}^\alpha_\mu - \partial^\alpha_\mu\mathcal{B}^\beta_\nu\,, \tag{1.234}$$

где $\mathcal{A}_1^a(X) = \mathcal{A}_a(Z) + \bar{\mathcal{A}}_a(\bar{Z})$, $\mathcal{A}_2^a(X) = i\left[\mathcal{A}_a(Z) - \bar{\mathcal{A}}_a(\bar{Z})\right]$ и $\mathcal{B}_1^\alpha(Y) = \mathcal{B}_\alpha(U)+\bar{\mathcal{B}}_\alpha(\bar{U})$, $\mathcal{B}_2^\alpha(Y) = i\left[\mathcal{B}_\alpha(U) - \bar{\mathcal{B}}_\alpha(\bar{U})\right]$ – вещественные 2-мерные "вектор-потенциалы". Здесь, $\partial_m^a, \partial_\mu^\alpha$ означают $\partial/\partial X_a^m$, $\partial/\partial Y_\alpha^\mu$. Дополняя (1.231) редукцией второй строки в (1.200), получаем полное редуцированное действие

$$\begin{aligned} S \;=\; \frac{1}{2}\int dt\, d\theta d\bar{\theta}\,\Big[\left(g_{mn}^{ab} + i b_{mn}^{ab}\right) DX_a^m \bar{D} X_b^n + \left(g_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + i b_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\right) DY_\alpha^\mu \bar{D} Y_\beta^\nu \\ + \frac{1}{2}\,\epsilon_{mn}\epsilon_{\mu\nu}(\partial_n^a \partial_\nu^\alpha \mathcal{K})\left(\bar{D}X_a^m \bar{D} Y_\alpha^\mu - DX_a^m DY_\alpha^\mu\right)\Big]. \qquad (1.235) \end{aligned}$$

Скрытая дополнительная $\mathcal{N}=2$ суперсимметрия действия (1.235) реализована преобразованиями

$$\begin{aligned} \delta X_a^m &= -\varepsilon_\eta \epsilon^{mn} \bar{D} X_a^n + \bar{\varepsilon}_\eta \epsilon^{mn} D X_a^n\,, \\ \delta Y_\alpha^\mu &= -\bar{\varepsilon}_\eta \epsilon^{\mu\nu} \bar{D} Y_\alpha^\nu + \varepsilon_\eta \epsilon^{\mu\nu} D Y_\alpha^\nu\,, \end{aligned} \qquad (1.236)$$

которые имеют тот же вид, что и (1.202), но с заменами V^m, $\bar{V}^m \to X^m$ и W^μ, $\bar{W}^\mu \to Y^\mu$. После введения $\varepsilon = \varepsilon_+ + i\varepsilon_-$, $D = D_+ + iD_-$, где $\varepsilon_\pm, D_\pm$ вещественны, (1.236) принимает вид

$$\delta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^M = 2i\varepsilon_+\, J^M{}_N D_- \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^N - 2i\varepsilon_-\, I^M{}_N D_+ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^N . \qquad (1.237)$$

Здесь матрицы I, J совпадают с матрицами $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ приведенными в (1.207). Но теперь они являются матрицами двух различных комплексных структур, а не матрицами гиперкомплексной структуры, как имеет место в случаях би-НКТ многообразий.

Для получения суперзарядов в би-келеровой модели можно воспользоваться полученными выше суперзарядами для $(\mathbf{4},\, \mathbf{4},\, \mathbf{0})$ мультиплетов в би-НКТ модели и выполнить в них гамильтонову редукцию, которая подразумевает замены $\partial_{\mathcal{M}}, \bar{\partial}_{\bar{\mathcal{M}}} \to \frac{1}{2}\partial_M$, $\Pi_{\mathcal{M}}, \bar{\Pi}_{\bar{\mathcal{M}}} \to \frac{1}{2}\Pi_M$, $\psi^{\mathcal{M}} \to \sqrt{2}\,\psi^M$, где фактор $\sqrt{2}$ связан с согласованием преобразований фермионных компонент мультиплетов (**1**, **2**, **1**) и (**2**, **2**, **0**). В результате, получаем операторы

$$\begin{aligned}
S \;=\;& \psi^m_a \left(\Pi^a_m - \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c - \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{mn}\epsilon_{\nu\lambda}\,\partial^a_n h^{\alpha\beta}_{\mu\bar{\lambda}}\,\chi^\mu_\alpha \chi^\nu_\beta\right) \\
&+\chi^\mu_\alpha \left(\Pi^\alpha_\mu - \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma - \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{nk}\,\partial^\alpha_\nu h^{ab}_{m\bar{k}}\,\psi^m_a \psi^n_b\right), \\
\bar{S} \;=\;& \bar{\psi}^m_a \left(\Pi^a_m + \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c + \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{mn}\epsilon_{\mu\lambda}\,\partial^a_n h^{\alpha\beta}_{\lambda\bar{\nu}}\,\bar{\chi}^\mu_\alpha \bar{\chi}^\nu_\beta\right) \\
&+\bar{\chi}^\mu_\alpha \left(\Pi^\alpha_\mu + \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma + \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{mk}\,\partial^\alpha_\nu h^{ab}_{k\bar{n}}\,\bar{\psi}^m_a \bar{\psi}^n_b\right)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R \;=\;& \psi^n_a\,\epsilon_{nm} \left(\Pi^a_m - \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c + \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{mk}\epsilon_{\mu\lambda}\,\partial^a_k h^{\alpha\beta}_{\lambda\bar{\nu}}\,\bar{\chi}^\mu_\alpha \bar{\chi}^\nu_\beta\right) \\
&-\bar{\chi}^\nu_\alpha\,\epsilon_{\nu\mu} \left(\Pi^\alpha_\mu + \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma - \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\lambda}\epsilon_{nk}\,\partial^\alpha_\lambda h^{ab}_{m\bar{k}}\,\psi^m_a \psi^n_b\right)\,, \\
\bar{R} \;=\;& \bar{\psi}^n_a\,\epsilon_{nm} \left(\Pi^a_m + \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c - \tfrac{i}{2}\,\partial^a_m h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma + \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{mk}\epsilon_{\nu\lambda}\,\partial^a_k h^{\alpha\beta}_{\mu\bar{\lambda}}\,\chi^\mu_\alpha \chi^\nu_\beta\right) \\
&-\chi^\nu_\alpha\,\epsilon_{\nu\mu} \left(\Pi^\alpha_\mu - \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{\beta\gamma}_{\nu\bar{\lambda}}\,\chi^\nu_\beta \bar{\chi}^\lambda_\gamma + \tfrac{i}{2}\,\partial^\alpha_\mu h^{bc}_{k\bar{l}} \psi^k_b \bar{\psi}^l_c - \tfrac{i}{2}\,\epsilon_{\mu\lambda}\epsilon_{mk}\,\partial^\alpha_\lambda h^{ab}_{k\bar{n}}\,\bar{\psi}^m_a \bar{\psi}^n_b\right)\,,
\end{aligned}$$

генерирующие $\mathcal{N}\!=4$ суперсимметрию в фазовом пространстве с вещественным бозонным сектором.

1.4. Суперсимметричная механика со спиновыми переменными и уравнение Нама

В предыдущих разделах мы рассматривали модели суперсимметричной квантовой механики, в которой все физические переменные являются динамическими. В последнее время найдены и изучены новые модели $\mathcal{N}\!=4$ суперсимметричной квантовой механики, которые описывают взаимодействие двух неприводимых $\mathcal{N}\!=4$ мультиплетов: один из этих мультиплетов является динамическим, с нормальными кинетическими членами для всех физических компонентных полей, в то время как другой – “полу-динамическим” или “спиновым”, с $d\!=1$ действием Весса-Зумино (ВЗ) для бозе-полей (первого порядка по временной производной) и действием без производных для фермионных переменных. Последние, таким образом, играють роль вспомогательных полей. После квантования бозе-поля становятся определенным типом спиновых степеней свободы, параметризующих некоммутативное “размытое” многообразие (например, стандартную “размытую” сферу [203] в простейшем случае, когда спиновые переменные являются SU(2) дублетами). Волновые функции образуют неприводимые мультиплеты соответствующих групп изометрии. В отличие от моделей [146, 147, 148] со спиновыми (**4,4,0**) мультиплетами, которые будут представлены в следующей главе, в этом разделе мы рассмотрим модель, где линейная версия мультиплетя (**3,4,1**) служит для описания спинового мультиплета. В качестве динамического мультиплета мы выбираем (**1,4,3**) мультиплет.

Член ВЗ, используемый в описании (**3,4,1**) супермультиплета рассматриваемой модели, имеет последовательное суперполевое описание только в гармоническом суперпространстве. Более того, гармонический подход является наиболее адекватным для внемассового описания $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}\,1$ мультиплетов. По этой причине, мы приведем ниже подход $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}\,1$ гармонического суперпространства [12, 69], который будет использоваться и в следующей главе.

1.4.1. Мультиплеты в гармоническом $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ суперпространстве

$\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ гармоническое суперпространство (ГСП) [69], которое получается в результате расширения обычного суперпространства гармоническими координатами $u^\pm_i$, параметризовано $(t, \theta^\pm, \bar\theta^\pm, u^\pm_i)$ где $\theta^\pm = \theta^i u^\pm_i$, $\bar\theta^\pm = \bar\theta^i u^\pm_i$. Коммутирующие SU(2) спиноры $u^\pm_i$ описывают 2-сферу $S^2 \sim \mathrm{SU}(2)_R/\mathrm{U}(1)_R$:

$$u^{+i}u^-_i = 1\,. \tag{1.238}$$

Характерным свойством ГСП является наличие в нем гармонического аналитического суперпространства (АСП) с половиной грассмановых координат:

$$(\zeta, u) = (t_A, \theta^+, \bar\theta^+, u^\pm_i)\,, \qquad t_A = t + i(\theta^+\bar\theta^- + \theta^-\bar\theta^+)\,, \tag{1.239}$$

замкнутого относительно $\mathcal{N}{=}\,4$ преобразований суперсимметрии. Общие $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ супермальтиплеты вне массовой поверхности представляются в виде аналитических суперполей, “живущих ” в подпространстве (1.239). Спинорные ковариантные производные в аналитическом базисе гармонического суперпространства, параметризованном координатами $(\zeta, u, \theta^\pm, \bar\theta^\pm)$, принимают вид

$$D^+ = \frac{\partial}{\partial\theta^-}\,, \quad \bar{D}^+ = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^-}\,, \quad D^- = -\frac{\partial}{\partial\theta^+} - 2i\bar{\theta}^-\partial_{t_A}\,, \quad \bar{D}^- = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^+} - 2i\theta^-\partial_{t_A}$$

и связаны с ковариантными производными в центральном базисе через проекции $D^\pm = D^i u_i^\pm$ and $\bar{D}^\pm = \bar{D}^i u_i^\pm$. Гармонические ковариантные производные в аналитическом базисе равны

$$D^{\pm\pm} = \partial^{\pm\pm} + 2i\theta^\pm\bar{\theta}^\pm\partial_{t_A} + \theta^\pm\frac{\partial}{\partial\theta^\mp} + \bar{\theta}^\pm\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\mp}\,.$$

Меры интегрирования определяются посредством $\mu_H = dudtd^4\theta = \mu_A^{(-2)}(D^+\bar{D}^+)$, $\mu_A^{(-2)} = dud\zeta^{(-2)} = dudt_A d\theta^+ d\bar{\theta}^+ = dudt_A(D^-\bar{D}^-)$.

В гармоническом суперпространстве $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ супермультиплеты описываются гармоническими суперполями $\Phi^{(q)}(t,\theta^\pm,\bar{\theta}^\pm,u)$ [69, 72, 73], обладающими $U(1)$-зарядом q. Наличие этого заряда отражает локальную $U(1)$-симметрию гармонической формулировки, генерируемой оператором D^0,

$$D^0\Phi^{(q)} = q\Phi^{(q)}\,, \tag{1.240}$$

где $D^0 = \partial^0 + \theta^+\frac{\partial}{\partial\theta^+} + \bar{\theta}^+\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^+} - \theta^-\frac{\partial}{\partial\theta^-} - \bar{\theta}^-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^-}$. Аналитические суперполя $\Phi^{(q)}(\zeta,u)$, зависящие от суперкоординат (1.239), определяются грассмановыми связями Коши-Римана

$$D^+\Phi^{(q)} = \bar{D}^+\Phi^{(q)} = 0\,. \tag{1.241}$$

Аналитические суперполя могут удовлетворять обобщенному условию вещественности, которое подразумевает обычное условие вещественности для компонентных полей. Обобщенное сопряжение гармонических суперполей, которое является комбинацией комплексного сопряжения и антиподального отражения на гармонической 2-сфере, обозначается посредством тильды: $\Phi^{(q)} \to \tilde{\Phi}^{(q)}$ (для деталей смотрите [12, 69]). Ниже мы кратко представим гармонические описания базовых $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ супермультиплетов, которые будут использоваться в этой и следующей главах.

Супермультиплет (1,4,3) описывается в ГСП четным вещественным гармоническим суперполем $\mathcal{X}(t,\theta^\pm,\bar{\theta}^\pm,u)$, имеющим нулевой гармонический заряд и подчиненным связям

$$D^{++}\,\mathcal{X} = 0\,, \tag{1.242}$$

$$D^{+}D^{-}\,\mathcal{X} = 0\,, \qquad \bar{D}^{+}\bar{D}^{-}\,\mathcal{X} = 0\,, \qquad (D^{+}\bar{D}^{-} + \bar{D}^{+}D^{-})\,\mathcal{X} = 0\,. \tag{1.243}$$

Условия (1.242) и (1.243) эквивалентно стандартным связям [47] в центральном базисе

$$D^{i}D_{i}\,\mathcal{X} = 0\,, \qquad \bar{D}_{i}\bar{D}^{i}\,\mathcal{X} = 0\,, \qquad [D^{i}, \bar{D}_{i}]\,\mathcal{X} = 0\,. \tag{1.244}$$

где

$$D^{i} = \frac{\partial}{\partial\theta_{i}} - i\bar{\theta}^{i}\partial_{t}\,, \qquad \bar{D}_{i} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{i}} - i\theta_{i}\partial_{t} = -\overline{(D^{i})}\,. \tag{1.245}$$

– спинорные ковариантные производные. Уравнение (1.242) подразумевает независимость суперполя $\mathcal{X}$ от гармонических переменных, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(t,\theta_{i},\bar{\theta}^{i})$, а уравнения (1.243) редуцируются к связям (1.244). θ-разложение суперполя имеет вид

$$\mathcal{X}(t,\theta_{i},\bar{\theta}^{i}) = x + \theta_{i}\chi^{i} + \bar{\chi}_{i}\bar{\theta}^{i} + \theta^{i}\bar{\theta}^{k}K_{ik} - \tfrac{i}{2}(\theta)^{2}\dot{\chi}_{i}\bar{\theta}^{i} - \tfrac{i}{2}(\bar{\theta})^{2}\theta_{i}\dot{\bar{\chi}}^{i} + \tfrac{1}{4}(\theta)^{2}(\bar{\theta})^{2}\ddot{x}\,, \tag{1.246}$$

где $(\theta)^{2} \equiv \theta_{i}\theta^{i}$, $(\bar{\theta})^{2} \equiv \bar{\theta}^{i}\bar{\theta}_{i}$. Первый член действия (1.263), $S_{\mathcal{X}} = \displaystyle\int dt\, d^{4}\theta\, \mathcal{L}(\mathcal{X})$, где $d^{4}\theta = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{i}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{i}}\frac{\partial}{\partial\theta^{i}}\frac{\partial}{\partial\theta_{i}}$, имеет следующий компонентный вид

$$S_{\mathcal{X}} = \int dt\,\Big[\mathcal{L}'\ddot{x} - i\mathcal{L}''\left(\dot{\bar{\chi}}^{k}\chi_{k} - \bar{\chi}^{k}\dot{\chi}_{k}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathcal{L}''K^{ik}K_{ik} - \mathcal{L}'''K^{ik}\chi_{i}\bar{\chi}_{k} + \tfrac{1}{4}\,\mathcal{L}^{(IV)}\chi_{i}\chi^{i}\bar{\chi}^{k}\bar{\chi}_{k}\Big]\,. \tag{1.247}$$

Здесь, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$, $\mathcal{L}'''$, $\mathcal{L}^{(IV)}$ являются функциями переменной x и черта означает производную по x: $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(x)$ и т.д.

Существует другое, эквивалентное описание (**1,4,3**) супермультиплета. Оно использует вещественное аналитическое калибровочное суперполе $\mathcal{V}(\zeta,u)$, $D^{+}\,\mathcal{V} = \bar{D}^{+}\,\mathcal{V} = 0$, определенное с точностью до абелевой калибровочной свободы

$$\delta\mathcal{V} = D^{++}\lambda^{--}\,, \quad \lambda^{--} = \lambda^{--}(\zeta,u)\,. \tag{1.248}$$

Аналитическое суперполе $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\zeta,u)$ играет роль препотенциала для (**1,4,3**) мулитиплета и связано с суперполем $\mathcal{X}(t,\theta_{i},\bar{\theta}^{i})$ посредством гармонического интегрального преобразования [72]

$$\mathcal{X}(t,\theta_i,\bar\theta^i) = \int du\,\mathcal{V}(t_A,\theta^+,\bar\theta^+,u)\Big|_{\theta^\pm=\theta^i u_i^\pm,\ \bar\theta^\pm=\bar\theta^i u_i^\pm}\,. \tag{1.249}$$

Препотенциальное представление (1.249) автоматически разрешает базисные связи (1.244) и позволяет построить новые $\mathcal{N}{=}\,4$ суперсимметричные модели, в которых (**1,4,3**) мультиплет взаимодействует с другими $\mathcal{N}{=}\,4$ супермультиплетами. Выражая $D_i = D^- u_i^+ - D^+ u_i^-$ и $\bar D_i = \bar D^- u_i^+ - \bar D^+ u_i^-$ и используя антикоммутационные соотношения $\{D^+,\bar D^-\} = -\{D^-,\bar D^+\} = -2i\partial_t$, мы находим, что связи (1.244) выполняются как прямое следствие условий аналитичности для $\mathcal{V}$: $D^+\mathcal{V} = \bar D^+\mathcal{V} = 0$.

Чтобы убедиться, что $\mathcal{V}$ действительно описывает мультиплет (**1,4,3**), мы должны использовать калибровочную свободу (1.248). Она может быть использована для удаления бесконечного множества калибровочных степеней свободы в $\mathcal{V}$ и приведения его к весс-зуминовскому виду

$$\mathcal{V}(t_A,\theta^+,\bar\theta^+,u^\pm) = x(t_A) - 2\,\theta^+\chi^i(t_A)u_i^- - 2\,\bar\theta^+\bar\chi^i(t_A)u_i^- + 3\,\theta^+\bar\theta^+K^{ik}(t_A)u_i^-u_k^-\,, \tag{1.250}$$

где $t_A = t + i(\theta^+\bar\theta^- + \theta^-\bar\theta^+)$ и поля $x(t)$, $\chi^i(t)$, $\bar\chi^i(t)$, $K^{ik}(t)$ те же, что в (1.246).

Тензорный супермультиплет (3,4,1) описывается четным аналитическим суперполем $L^{++}(\zeta,u)$, которое удовлетворяет обобщенному условию вещественности, $\widetilde{L^{++}} = L^{++}$ и подчиняется гармонической связи [69]

$$D^{++}\,L^{++} = 0\,. \tag{1.251}$$

Внемассовый компонентный состав тензорного мультиплета описывается компонентными полями $v_{ij} = v_{ji}$, B, ψ_i и $\bar\psi_i$ в решении связи (1.251) [69]

$$L^{++} = v^{++} + \theta^+\psi^+ + \bar\theta^+\bar\psi^+ - 2i\,\theta^+\bar\theta^+\left(\dot v^{+-} + B\right), \tag{1.252}$$

где $v^{++} = v^{ij}u_i^+u_j^+$, $v^{+-} = v^{ij}u_i^+u_j^-$, $\psi^+ = \psi^i u_i^+$ и $\bar\psi^+ = \bar\psi^i u_i^+$. SU(2)-триплет v^{ij} описывает три бозонные физические степени свободы. В центральном базисе суперполе $L^{++} = u_i^+u_k^+L^{ik}$, где $L^{ik}(t,\theta,\bar\theta)$ является обычным суперполем, подчиненным связям

$$D^{(i}L^{kl)} = 0\,, \qquad \bar D^{(i}L^{kl)} = 0\,. \tag{1.253}$$

Действия сигма-модельного типа для L^{++} записываются как интеграл по полному гармоническому суперпространству от лагранжиана, который есть функцией L^{++}, $L^{+-} = \frac{1}{2}\,D^{--}L^{++}$, $L^{--} = \frac{1}{2}\,D^{--}L^{+-}$ и гармоник (смотрите детали в [69]). Действие Весса-Зумино, генерирующее суперпотенциальный член для L^{++}, дается следующим интегралом по аналитическому суперпространству

$$
\begin{aligned}
S_{WZ} &= \tfrac{i}{2}\,\gamma\int \mu_A^{(-2)}\,\mathcal{L}^{(+2)}(L^{++},u) \\
&= -\gamma\int dt\,\Big(\tfrac{1}{2}\,\mathcal{A}_{ik}\dot{v}^{ik} + \tfrac{i}{2}\,\mathcal{R}_{ik}\bar{\psi}^{(i}\psi^{k)} + \mathcal{U}B\Big),
\end{aligned}
\tag{1.254}
$$

где потенциалы определены выражениями

$$
\mathcal{A}_{ik} = 2\int du\, u^+_{(i}u^-_{k)}\,\frac{\partial\mathcal{L}^{++}}{\partial v^{++}}, \quad \mathcal{R}_{ik} = \int du\, u^+_i u^+_k\,\frac{\partial^2\mathcal{L}^{++}}{\partial (v^{++})^2}, \quad \mathcal{U} = \int du\,\frac{\partial\mathcal{L}^{++}}{\partial v^{++}},
$$

которые подразумевают выполнение уравнений

$$
\triangle_{\mathbb{R}^3}\mathcal{U} = 0\,, \qquad \triangle_{\mathbb{R}^3}\mathcal{A}_{ik}\,, \qquad \partial^{ik}\mathcal{A}_{ik} = 0\,, \tag{1.255}
$$

$$
\partial_{ij}\mathcal{A}_{kl} - \partial_{kl}\mathcal{A}_{ij} = (\epsilon_{ik}\partial_{jl} + \epsilon_{jl}\partial_{ik})\,\mathcal{U}\,, \tag{1.256}
$$

$$
\mathcal{R}_{ik} = \partial_{ik}\mathcal{U}\,, \tag{1.257}
$$

где $\partial_{ik} = \partial/\partial v^{ik}$ и $\triangle_{\mathbb{R}^3} = \partial^{ik}\partial_{ik}$ является оператором Лапласа на $\mathbb{R}^3$.

Уравнения (1.255), (1.256) совпадают с уравнениями, определяющими монопольное (статическое) решение для самодуалных максвелловского или гравитационного полей в $\mathbb{R}^4$ (см., например, [204] и ссылки там). Нетривиальная физика возникает при наличии особенностей в $\mathcal{U}$. Эти особенности приводят к нетривиальному определению фонового калибровочного векторного потенциала $\mathcal{A}_{ij}$, который обязательно включает в себя дираковскую струну. Это свойство требует использования нескольких накрытий (или формализм расслоений) v-пространства для корректного определения потенциала [204]. Хотя мы и будем получать выражения для $\mathcal{A}_{ij}$, анализ рассматриваемой в этой главе системы не требует знания точного выражения для этого векторного потенциала: гамильтонов анализ будет использовать исключительно полевые напряженности.

“Корневой” супермультиплет (4,4,0), рассматриваемый в предыдущих разделах в обычном суперпространстве, позволяет сгенерировать другие мультиплеты посредством редукции, осуществляемой или на уровне компонентного действия [202] или суперполевого действия [72, 73]. В гармоническом суперпространстве он описывается комплексным аналитическим суперполем $\mathcal{Z}^+$, $\bar{\mathcal{Z}}^+$, имеющем единичный гармонический заряд, подчиненным связи

$$D^{++}\,\mathcal{Z}^+ = 0 \tag{1.258}$$

и имеющим следующее разложение

$$\mathcal{Z}^+ = z^i u_i^+ + \theta^+\varphi + \bar{\theta}^+\phi - 2i\,\theta^+\bar{\theta}^+\partial_{t_A} z^i u_i^- \,, \tag{1.259}$$

где SU(2)-дублет $z^i(t_A)$ описывает четыре бозонные физические степени свободы. Мы можем скомбинировать суперполя $\mathcal{Z}^+$ и $\tilde{\mathcal{Z}}^+$ в дублет некоторой дополнительной (“Паули-Гюрси”) $\mathrm{SU}(2)_{PG}$ группы согласно

$$q^{+a} := (\tilde{\mathcal{Z}}^+, \mathcal{Z}^+)\,,\ a = 1,2\,. \tag{1.260}$$

В центральном базисе, “корневой” супермультиплет представляется в виде

$$q^{+a} = u_i^+ q^{ia}\,, \tag{1.261}$$

где $q^{ia}(t,\theta,\bar{\theta})$ является обычным $\mathcal{N}{=}4$ суперполем, подчиненным связям (1.100), которые можно представить в виде

$$D^{(i}q^{k)a} = 0\,, \qquad \bar{D}^{(i}q^{k)a} = 0\,. \tag{1.262}$$

Сигма-модельное действие “корневого” супермультиплета представляется в виде интеграла по полному гармоническому суперпространству от функции, зависящей от q^{+a}, $q^{-a} = D^{--}q^{+a}$ и гармоник. Суперпотенциальный член для суперполя q^{+a} представляется в виде интеграла по аналитическому суперпространству от аналитического лагранжиана, зависящего от суперполя q^{+a} и гармоник [69].

Отметим, что весс-зуминовские потенциальные члены для всех $\mathcal{N}{=}4$ супермультиплетов могут быть представлены в явной $\mathcal{N}{=}4$ суперполевой форме только в гармоническом суперпространстве – в обычном $\mathcal{N}{=}4$ суперпространстве такие члены или включают явно θ-координаты [205] или выражаются через подходящие препотенциалы со сложной калибровочной свободой.

Такие члены важны для описания изоспиновых супермультиплетов, используемых при построении новых интегрируемых суперсимметричных систем, включая суперконформно-инвариантные.

1.4.2. Суперполевое и компонентное действия

Рассмотрим суперполевое действие

$$\begin{aligned} S &= S_{\mathcal{X}} + S_{int} + S_{WZ} \qquad (1.263) \\ &= \int \mu_H \, \mathcal{L}(\mathcal{X}) + \tfrac{i}{2}\, b \int \mu_A^{(-2)} \, \mathcal{V}\,(L^{++} + c^{++}) - \tfrac{i}{2}\, \gamma \int \mu_A^{(-2)} \, \mathcal{L}^{(+2)}(L^{++}, u)\,, \end{aligned}$$

где $c^{++} = c^{ik} u_i^+ u_k^+$. Константы перенормировки γ и b, а также постоянный триплет c^{ik}, являются параметрами модели, которые будут зафиксированны ниже. $\mathcal{N} = 4$ суперполя $\mathcal{X}$ и L^{++} описывают соответственно мультиплеты (**1,4,3**) и (**3,4,1**) вне массовой поверхности. Аналитическое суперполе $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\zeta, u)$ является препотенциалом для мультиплета (**1,4,3**) [72]. Член, пропорциональный c^{++} in (5.27), то есть $i \int \mu_A^{(-2)} \, \mathcal{V} \, c^{++}$, является членом Файе-Иллипоулоса для супермультиплета **(1,4,3)**.

Второй член в (1.263), S_{int}, описывает взаимодействие мультиплетов (**1,4,3**) и (**3,4,1**). Его форма определяется однозначно из требования инвариантности относительно калибровочных преобразований (1.248). Его компонентное действие равно

$$\begin{aligned} S_{int} &= \tfrac{i}{2}\, b \int \mu_A^{(-2)} \, \mathcal{V}\,(L^{++} + c^{++}) \qquad (1.264) \\ &= ib \int dt \,\Big[-ix\, B + \tfrac{1}{2} \left(\bar{\chi}^k \psi_k - \bar{\psi}^k \chi_k \right) + \tfrac{1}{2}\, K^{ij} (v_{ij} + c_{ij}) \Big]\,. \end{aligned}$$

Суммируя действия (1.247), (1.254) и (1.264), мы получаем компонентное выражение полного действия

$$\begin{aligned} S = \int dt \,\Big[& \mathcal{L}' \ddot{x} - i \mathcal{L}'' \left(\dot{\bar{\chi}}^k \chi_k - \bar{\chi}^k \dot{\chi}_k \right) + \tfrac{1}{2}\, \mathcal{L}'' K^{ik} K_{ik} \qquad (1.265) \\ & - \mathcal{L}''' K^{ik} \chi_i \bar{\chi}_k + \tfrac{1}{4}\, \mathcal{L}^{(IV)} \chi_i \chi^i \bar{\chi}^k \bar{\chi}_k \\ & + b\, xB + \tfrac{i}{2}\, b \left(\bar{\chi}^k \psi_k - \bar{\psi}^k \chi_k \right) + \tfrac{i}{2}\, b\, K^{ij} (v_{ij} + c_{ij}) \\ & - \tfrac{1}{2}\, \gamma \mathcal{A}_{ik} \dot{v}^{ik} - \tfrac{i}{2}\, \gamma\, \mathcal{R}_{ik} \bar{\psi}^{(i} \psi^{k)} - \gamma\, \mathcal{U}\, B \Big]\,. \end{aligned}$$

Исключая вспомогательные поля K_{ik}, ψ_k и $\bar{\psi}_k$ из действия (1.265), мы получаем действие для физических полей:

$$S=\int dt\,\Big[\mathcal{L}'\ddot{x}+\tfrac{1}{8}\,b^2(\mathcal{L}'')^{-1}(v^{ij}+c^{ij})(v_{ij}+c_{ij})-\tfrac{1}{2}\,\gamma\mathcal{A}_{ik}\dot{v}^{ik}-(\gamma\,\mathcal{U}-b\,x)B$$
$$-\,i\,\mathcal{L}''\left(\dot{\bar{\chi}}^k\chi_k-\bar{\chi}^k\dot{\chi}_k\right)-\tfrac{i}{2}\,b\Big((\mathcal{L}'')^{-1}\mathcal{L}'''(v^{ik}+c^{ik})+b\gamma^{-1}(\mathcal{R}^{-1})^{ik}\Big)\chi_i\bar{\chi}_k$$
$$+\,\tfrac{1}{4}\Big(\mathcal{L}^{(IV)}-\tfrac{3}{2}\,(\mathcal{L}'')^{-1}(\mathcal{L}''')^2\Big)\chi_i\chi^i\bar{\chi}^k\bar{\chi}_k\Big]\,, \tag{1.266}$$

где $(\mathcal{R}^{-1})^{ik}=2\mathcal{R}^{ik}/(\mathcal{R}^{lm}\mathcal{R}_{lm})$ есть обратная матрица к $\mathcal{R}_{ik}$, определенной в (1.257). Константы перенормировки b и γ характеризуют вклад суперполевого взаимодействия и ВЗ члена в физическое компонентное действие. Путем надлежащего масштабного преобразования переменных v_{ik}, B и потенциала $\mathcal{U}$ они могут быть преобразованы к $b=1$, $\gamma=1$.

1.4.3. Бозонный предел

Бозонный предел в действии (1.266)

$$L^{bose}=-\mathcal{L}''\dot{x}\dot{x}+\tfrac{1}{8}\,(\mathcal{L}'')^{-1}(v^{ij}+c^{ij})(v_{ij}+c_{ij})-\tfrac{1}{2}\,\mathcal{A}_{ik}\dot{v}^{ik}+B\,(x-\mathcal{U})\,, \tag{1.267}$$

показывает, что вспомогательное поле B играет роль множителя Лагранжа для связи

$$x-\mathcal{U}(v)=0\,. \tag{1.268}$$

Кроме того, в результате исключения вспомогательных полей K^{ik} появляется осцилляторный потенциальный член для бозонных полей v^{ik} мультиплета (**3,4,1**) (с дополнительной зависимостью от x). После подстановки (1.268) в кинетическую форму для x возникает нетривиальная таргетная метрика

$$\sim\partial_{ik}\mathcal{U}\partial_{jl}\mathcal{U}\dot{v}^{ik}\dot{v}^{jl}, \tag{1.269}$$

хотя первоначально не было кинетического члена для v^{ik}, а только ВЗ член. Эта ситуация отличная от (**3,4,1**) суперсимметричных квантово-механических моделей, рассмотренных в [47, 69], в которых инвариантное действие с самого начала включает в себя как кинетические, так и ВЗ члены для (**3,4,1**) мультиплета. Отметим, что метрика (1.269) вырожденная. Можно перейти к новой параметризации таргетного пространства, рассматривая $\mathcal{U}$ в качестве одной из новых координатах. Тогда две оставшиеся координаты не будут возникать в метрической части и будут давать вклад только в ВЗ взаимодействие. Таким образом, остается только одна истинная динамическая координата и две независимые спиновые переменные. При квантовании удобно не решать связь (1.268) явно, а рассматривать x как независимую фазовую переменную и рассматривать условие (1.268) в качестве гамильтоновой связи второго рода, на равне с другими связями, следующими из действия (1.266).

Для наглядности в дальнейшем мы сосредоточимся на случае $\mathcal{L}| = -\frac{1}{2}\, x^2$ (здесь $|$ обозначает ограничение к θ-независимым частям), соответствующем выбору $\mathcal{L}(\mathcal{X}) = -\frac{1}{2}\, \mathcal{X}^2$ в (5.27). Введем 3-векторные обозначения, переходя от триплетным спинорным индексам (ik) к векторным $r = 1, 2, 3$: $v^{ik} = i\sigma_r^{ik} v_r$, $v_r = \frac{i}{2}\, \sigma_r^{ik} v_{ik}$, $|v|^2 = v_r v_r = \frac{1}{2}\, v^{ik} v_{ik}$, где $\sigma_r^{ik} = \epsilon^{ij} \sigma_{rj}{}^k$, $\sigma_{rik} = \epsilon_{kj} \sigma_{ri}{}^j$ и $\sigma_{ri}{}^k$ являются стандартными матрицами Паули. В 3-векторных обозначениях выражение действие (1.267) принимает вид

$$S_b = \int dt \left[\dot{x}\dot{x} - \tfrac{1}{4}\, (v_r + c_r)(v_r + c_r) - \mathcal{A}_a \dot{v}_a + B\, (x - \mathcal{U}) \right], \tag{1.270}$$

тогда как выражения (1.255), (1.255) для $\mathcal{A}_r, \mathcal{U}$ записываются как

$$\partial_r \partial_r \mathcal{U} = 0\,, \tag{1.271}$$

$$\partial_r \partial_r \mathcal{A}_b = 0\,, \qquad \partial_r \mathcal{A}_r = 0\,, \tag{1.272}$$

$$\partial_r \mathcal{A}_s - \partial_s \mathcal{A}_r = -\epsilon_{rst} \partial_t \mathcal{U}\,. \tag{1.273}$$

Выполним гамильтонов анализ системы, которая описывается связями

$$\pi_r \equiv p_r + \mathcal{A}_r \approx 0\,, \tag{1.274}$$

$$h \equiv x - \mathcal{U} \approx 0 \tag{1.275}$$

и гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{4}\, p^2 + \tfrac{1}{4}\, (v_r + c_r)(v_r + c_r) + \lambda_r \pi_r + Bh\,, \tag{1.276}$$

где λ_r и B – лагранжевы множители. Скобки Пуассона связей (1.274), (1.275) равны

$$[\pi_r, \pi_s]_{{}_P} = -\mathcal{F}_{rs}\,, \qquad [\pi_r, h]_{{}_P} = \partial_r \mathcal{U}\,, \tag{1.277}$$

где

$$\mathcal{F}_{rs} = \partial_r \mathcal{A}_s - \partial_s \mathcal{A}_r = -\epsilon_{rst}\partial_t \mathcal{U} \,. \tag{1.278}$$

Определитель матрицы правой части в (1.277) не равен нулю, $(\partial_a \mathcal{U} \partial_a \mathcal{U})^2 \neq 0$, и, следовательно, все четыре связи (1.274), (1.275) второго рода. Скобки Дирака, соответствующие им, определяются выражением

$$\begin{aligned}[A,B]_{{}_D} \ = \ & [A,B]_{{}_P} + \frac{\epsilon_{rst}\partial_t \mathcal{U}}{\partial_p \mathcal{U} \partial_p \mathcal{U}}\, [A,\pi_r]_{{}_P}[\pi_s,B]_{{}_P} \\ & + \frac{\partial_r \mathcal{U}}{\partial_p \mathcal{U} \partial_p \mathcal{U}} \Big([A,\pi_r]_{{}_P}[h,B]_{{}_P} - [A,h]_{{}_P}[\pi_r,B]_{{}_P} \Big)\end{aligned} \tag{1.279}$$

и для фазовых переменных равны

$$[x,p]_{{}_D} = 1 \,, \tag{1.280}$$

$$[v_r,x]_{{}_D} = 0 \,, \qquad [v_r,p]_{{}_D} = \frac{\partial_r \mathcal{U}}{\partial_p \mathcal{U} \partial_p \mathcal{U}} \,, \tag{1.281}$$

$$[v_r,v_s]_{{}_D} = -\epsilon_{rst}\, \frac{\partial_t \mathcal{U}}{\partial_p \mathcal{U} \partial_p \mathcal{U}} \,. \tag{1.282}$$

Таким образом, у нас есть 2 независимые физические фазовые переменные (x и p) и две независимые спиновые переменные, скрытые в v_r. Действительно, как следует из примеров, рассмотренных ниже, связь (1.275) после соответствующего переопределения спиновых переменных можно рассматривать как уравнение, определяющее двумерную поверхность в пространстве v_a.

Скобки Дирака (1.281) и (1.281) гарантируют выполнение уравнений

$$[p,v_r]_{{}_D} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}\,[v_s,v_t]_{{}_D} \,, \tag{1.283}$$

которые являются знаменитыми уравнениями Нама [206]. В самом деле, мы можем определить спиновые переменные ℓ_r, так, чтобы они были отделены от динамических степеней свободы x, p в отношении скобки Дирака, $[\ell_r,x]_{{}_D} = [\ell_r,p]_{{}_D} = 0$. Тогда $[p,v_r]_{{}_D} = -\frac{\partial}{\partial x} v_r := -v_a^{\prime}$ и уравнения (1.283) принимают стандартную форму уравнений Нама

$$v_r^{\prime} = -\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}\,[v_s,v_t]_{{}_D} \tag{1.284}$$

для $v_r{=}v_r(x,\ell_t)$. Как мы покажем ниже, уравнения Нама (1.284) и их квантовый аналог являются основными уравнениями для существования $\mathcal{N}{=}\,4$ суперсимметрии в моделях со спиновыми переменными. Именно наличие этих уравнений для векторной переменной v_r гарантирует $\mathcal{N}=4$ суперсимметрию в моделях такого типа.

Следует отметить, что появление здесь уравнения Нама (1.284) является естественным с точки зрения утверждения, полученного в [207] (см. следствие 3.2 там). А именно, если мы выбираем гармоническую функцию $\mathcal{U}(v) = x$ как одну из независимых переменных на многобразии, определяемом три-вектором v_r, то вектор v_r будет удовлетворять уравнению Нама (1.284), где левая часть является производной по переменной x, а скобки Дирака (структура Пуассона) в левой части определяются этой гармонической функцией $\mathcal{U}(v)$. Рассматривая данную модель, мы приводим динамическую реализацию этой взаимосвязи между уравнением Лапласа (1.271) в трех измерениях и уравнениями Нама (1.284).

Ниже мы рассмотрим примеры моделей (1.270), связанных с многоцентровым решением уравнения Лапласа $\partial_r\partial_r\mathcal{U} = 0$, определяемым выражением

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_n := g_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{g_s}{|\vec{v} - \vec{k}_s|}\,, \tag{1.285}$$

где g_0 и g_s являются константами. Константа $g_0 = 0$ определяет только асимптотические свойства потенциала (1.285). Принимая во внимание связь (1.275), $x = \mathcal{U}$, наличие ненулевой константой g_0 в $\mathcal{U}$ сводится к тривиальному сдвигу переменной x и, без ограничения общности, мы предполагаем ниже, что $g_0 = 0$. Отметим, что для потенциала (1.285) решения уравнений (1.272), (1.273) для 3-векторного потенциала $\vec{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_r)$ есть

$$\vec{\mathcal{A}} = \sum_{a=1}^{n} \vec{\mathcal{A}}_a\,, \qquad \vec{\mathcal{A}}_a = g_a \frac{\vec{n}_a \times (\vec{v} - \vec{k}_a)}{|\vec{v} - \vec{k}_a| \Big(|\vec{n}_a||\vec{v} - \vec{k}_a| + \vec{n}_a(\vec{v} - \vec{k}_a) \Big)}\,. \tag{1.286}$$

Одномонопольный случай

Рассмотрим сначала простейший одно-монопольный случай, в котором

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 := \frac{g}{|\vec{v} - \vec{k}|}\,, \qquad \mathcal{A}_r = g\, \frac{\epsilon_{rst} n_s (v_t - k_t)}{|\vec{v} - \vec{k}| \Big(|\vec{n}||\vec{v} - \vec{k}| + \vec{n}(\vec{v} - \vec{k}) \Big)}\,. \tag{1.287}$$

Этот потенциал $\mathcal{U}$ обладает $SU(2) \sim SO(3)$-инвариантностью: постоянный вектор $\vec{k}$ может быть поглощен переопределением 3-вектора $\hat{v}^r = v^r - k^r$. “Магнитное поле" $\nabla\times\vec{\mathcal{A}}$ ориентировано в радиальном направлении, $\nabla\times\vec{\mathcal{A}}\sim\hat{\vec{v}}$, то есть $\hat{\vec{v}}\times\vec{\mathcal{A}}=0$. В этом случае полный лагранжиан (1.270) является SU(2) инвариантным при выполнении условия $\vec{k}=-\vec{c}$. Одно-монопольный потенциал (1.287) с $\vec{n}=\vec{k}/|\vec{k}|$ может быть получен из аналитического суперполевого лагранжиана [69]

$$\mathcal{L}^{(+2)}\sim\frac{L^{++}}{\left(1+\sqrt{1-k^{--}L^{++}}\right)\sqrt{1-k^{--}L^{++}}}\,, \tag{1.288}$$

который, помимо $\mathcal{N}{=}4, d{=}1$ суперсимметрии Пуанкаре, обладает также $\mathcal{N}{=}4$ суперконформной инвариантностью $D(2,1;\alpha)$. В случае, когда $\mathcal{L}(\mathcal{X})=-\frac{1}{2}\,\mathcal{X}^2$, имеет место $\mathcal{N}{=}4$ суперконформная инвариантность OSp(4|2) [147].

В случае потенциала (1.287) связь (1.275) принимает вид $x=g/|\vec{v}-\vec{k}|$. Введем новые переменные

$$\ell_r=x\,(v_r-k_r)=g\frac{v_r-k_r}{|\vec{v}-\vec{k}|}\,, \tag{1.289}$$

в которых связь (1.275) становится

$$\ell_r\ell_r=g^2\,, \tag{1.290}$$

а скобки Дирака (1.280)-(1.282) записываются в виде

$$[x,p]_{{}_D}=1\,,\qquad [\ell_r,x]_{{}_D}=0\,,\quad [\ell_r,p]_{{}_D}=0\,,\qquad [\ell_r,\ell_s]_{{}_D}=\epsilon_{rst}\ell_t\,. \tag{1.291}$$

Таким образом, переменные ℓ_r параметризуют сферу S^2 с радиусом g и генерируют группу SU(2) относительно скобок Дирака. Гамильтониан (1.276) при условии $\vec{k}=-\vec{c}$ записывается в виде

$$H=\frac{1}{4}\left(p^2+\frac{\ell_r\ell_r}{x^2}\right)\,. \tag{1.292}$$

Рассматриваемая одно-монопольная система может быть проквантована несколькими различными способами в зависимости от реализации квантовых спиновых переменных ℓ_r.

Рассмотрим один из возможных методов квантования, который явно учитывает свойства размытой сферы. После квантования переменные ℓ_r становятся операторами $\ell_r \quad\rightarrow\quad \hat{\ell}_r$, коммутационные соотношения которых определяются скобками Дирака (1.291) и образуют алгебру $su(2)$

$$[\hat{\ell}_r, \hat{\ell}_s] = i\hbar\,\epsilon_{rst}\hat{\ell}_t\,. \tag{1.293}$$

При квантовании связь (1.290) для операторов $\hat{\ell}_a$ должна выполняться в сильном смысле. С другой стороны, произведение $(\hat{\ell}_r\hat{\ell}_r)$ является оператором Казимира для $su(2)$. Следовательно, для унитарных представлений оно должно равняться

$$\hat{\ell}_r\hat{\ell}_r = \hbar^2 n(n+1) \tag{1.294}$$

где n есть неотрицательное целое или полуцелое число, $2n \in \mathbb{N}$. Таким образом, в процессе квантования классическая постоянная g^2, присутствующая в связи (1.290), квантуется:

$$g^2 \qquad \to \qquad \hbar^2 n(n+1)\,. \tag{1.295}$$

Мы можем использовать для $\hat{\ell}_r$ стандартную реализацию посредством $(2n+1)\times(2n+1)$-матриц. В результате, волновая функция имеет $(2n+1)$ компонент и описывает нерелятивистскую частицу спина n с $d = 1$ конформным гамильтонианом (1.292). Полный набор генераторов $d = 1$ конформной симметрии будет представлен ниже при рассмотрении суперсимметричного случая.

Другой метод квантования использует описание спинового сектора посредством независимых переменных. А именно, переменные ℓ_3 и $\varphi{:=}\arctan\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\right)$ описывают два-сферу (в определенной карте) и имеют скобки Дирака $[\varphi, \ell_3]_{_D} = 1$. В терминах переменных φ and ℓ_3 член ВЗ (третий член в действии (1.270)) принимает вид $-\displaystyle\int \mathcal{A}_a\,dv_a = \int \ell_3\,d\varphi$. Введем стандартным образом второй (азимутальный) угол ϑ на сфере

$$\ell_1 = g\sin\vartheta\cos\varphi\,, \qquad \ell_2 = g\sin\vartheta\sin\varphi\,, \qquad \ell_3 = g\cos\vartheta \tag{1.296}$$

и перейдем к комплексной переменной

$$z := e^{i\varphi}\cot\left(\vartheta/2\right)\,, \qquad [z,\bar{z}]_{_D} = \frac{i}{2g}\,(1+z\bar{z})^2\,. \tag{1.297}$$

В переменных z, $\bar{z}$ генераторы (1.296) принимают вид

$$\begin{aligned} \ell_+ = \ell_1 + i\ell_2 &= \frac{2gz}{1+z\bar{z}} = 2gz - z^2\,\frac{2g\bar{z}}{1+z\bar{z}}\,, \\ \ell_- = \ell_1 - i\ell_2 &= \frac{2g\bar{z}}{1+z\bar{z}}\,, \\ \ell_3 &= -g\,\frac{1-z\bar{z}}{1+z\bar{z}} = z\,\frac{2g\bar{z}}{1+z\bar{z}} - g\,. \end{aligned} \tag{1.298}$$

Поскольку $\left[z, \frac{2g\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right]_D = i$, квантовый аналог $2g\bar{z}/(1+z\bar{z})$ играет роль ∂_z в голоморфном представлении (подробное рассмотрение квантования по Гупте-Блейлеру на двумерной сферы в переменной z представлено в [194]), голоморфная квантовая реализация SU(2)-генераторов (1.298) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_1 &= \hbar\left(\tfrac{1}{2}\,(1-z^2)\partial_z + gz\right), \\ \hat{\ell}_2 &= \hbar\left(\tfrac{i}{2}\,(1+z^2)\partial_z - igz\right), \\ \hat{\ell}_3 &= \hbar\,(z\partial_z - g)\,. \end{aligned} \tag{1.299}$$

Гильбертово пространство неприводимого представления образовано $(2g+1)$ базисными функциями 1, z, ..., z^{2g} со скалярным произведением

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \frac{2g+1}{2\pi i} \int\limits_{S^2} \frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^{2g+2}}\,\bar{\Psi}(\bar{z})\Phi(z)\,. \tag{1.300}$$

Отметим, что в реализации (1.299) имеет место $\hat{\ell}_r\hat{\ell}_r = \hbar^2 g(g+1)$, поэтому в этой схеме квантования классическая постоянная g совпадает с квантовой полуцелой постоянной n в отличии от (1.295) для предыдущего случая квантования и, используя определение (1.297), мы можем представить базис гильбертового пространства системы в виде сферических функций.

Двух-монопольный случай

Этот случай соответствует сохранению двух членов в общем решении (1.285) (с $g_0 = 0$) уравнения Лапласа для функции $\mathcal{U}$. Без ограничения общности, мы можем разместить точки сингулярности на оси z, другие возможные значения получаются чистыми вращениями и сдвигами системы координат.

Таким образом, двух-монопольный потенциал может быть выбран в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_2 := \frac{g_1}{|\vec{v} - \vec{k}_1|} + \frac{g_2}{|\vec{v} - \vec{k}_2|}\,, \tag{1.301}$$

где $\vec{k}_1 = (0,0,k_1)$, $\vec{k}_2 = (0,0,k_2)$. Соответствующий аналитический суперполевой лагранжиан $\mathcal{L}^{(+2)}$ является суммой двух лагранжианами (1.288) с параметрами k_1^{ik} и k_2^{ik}. В общем случае он обладает только U(1) внутренней симметрией и не обладает $d=1$ суперконформной симметрией.

Для квантования системы, мы можем действовать по аналогии с одно-монопольным случаем. Мы должны перейти от переменных v_r к новым переменным, так, чтобы одна из этих переменных была динамической степенью свободы x, тогда как две оставшиеся степени свободы – спиновыми, с по-возможностью простыми скобками Дирака. В этих новых переменных спиновый сектор должен отделяться от динамического сектора (x,p). Такое разделение истинных динамических степеней свободы от "полудинамических" спиновых степеней свободы является необходимым шагом при выполнении квантования соответствующих скобок Дирака.

Используя скобки (1.280)-(1.282), можно непосредственно обнаружить, что величина

$$\ell_3 := \frac{g_1(v_3 - k_1)}{|\vec{v} - \vec{k}_1|} + \frac{g_2(v_3 - k_2)}{|\vec{v} - \vec{k}_2|}\,, \qquad [\ell_3, p]_{{}_D} = [\ell_3, x]_{{}_D} = 0 \tag{1.302}$$

коммутирует с динамическим сектором. Второй полудинамической спиновой степенью свободы есть полярный угол $\vec{v}$

$$\varphi := \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right)\,, \qquad [\varphi, p]_{{}_D} = [\varphi, x]_{{}_D} = 0\,. \tag{1.303}$$

Переменные (1.302) и (1.303) сопряжены относительно скобки Дирака: $[\varphi, \ell_3]_{{}_D} = 1$. Таким образом, фазовое пространство модели разделяется на два сектора: один из них есть динамический сектор, образованный сопряженной парой (x,p), тогда как сопряженная пара (φ, ℓ_3) определяет полудинамический спиновый сектор. Подобно одноцентровому случаю, член ВЗ в действии (1.270) имеет вид $\int dt\, \ell_3\, \dot{\varphi}$ в переменных φ и ℓ_3. Отметим, что переменная ℓ_3 имеет прозрачный физический смысл: это нётеровский сохраняющийся заряд для O(2) фазовых преобразований $\delta v_1 = \alpha\, v_2$, $\delta v_2 = -\alpha\, v_1$, $\delta v_3 = 0$ в случае, когда c_a направлена вдоль третьей оси, $c_a = (0,0,c)$. Именно этот случай, когда вектор $\vec{c}$ колинеарен векторам $\vec{k}_{1,2}$ и $[\ell_3, H]_{_D} = 0$, будет рассматриваться ниже.

Обратные выражения $v_r = v_r(x, \ell_3, \varphi)$ являются более сложными и в дальнейшем они не будут использованы. Но непосредственно из (1.301), (1.302), (1.303) мы видим, что $|\vec{v}|$ и v_3 выражаются через $x{=}\mathcal{U}$ и ℓ_3. Проиллюстрируем это в некоторых предельных случаях.

i) В этом случае второй полюс стремится к бесконечности. Используя обозначения $g_1 = g$, $\vec{k}_1 = \vec{k}$, $\vec{k}_2 = \vec{k} + \vec{k}/\varepsilon$, в пределе $\varepsilon \to 0$ мы получаем

$$x = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2' := \frac{g}{|\vec{v} - \vec{k}|} + 2E(v_3 - k) + g_0\,, \tag{1.304}$$

где $E = \frac{\varepsilon^2 g_2}{k^2} \ll 1$, $g_0 = \frac{\varepsilon g_2}{k} \ll 1$. Таким образом, в этом пределе потенциал (1.304) является суммой одномонопольного потенциала (1.287) и “потенциала постоянного электрического фонового поля” $\sim \vec{E}(\vec{v} - \vec{k})$. U(1) нётеровский заряд в случае потенциала (1.304) равен

$$\ell_3 = \frac{g(v_3 - k)}{|\vec{v} - \vec{k}|} + E\left(|\vec{v} - \vec{k}|^2 - (v_3 - k)^2\right)\,. \tag{1.305}$$

Обратные к (1.304), (1.305) выражения получаются в виде ряда по E

$$\begin{aligned} v_3 - k \;&=\; \frac{\ell_3}{x - g_0} + E\,\frac{3\ell_3^2 - g^2}{(x - g_0)^3} + O(E^2)\,, &(1.306)\\ \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2} \;&=\; \frac{\sqrt{g^2 - \ell_3^2}}{x - g_0}\left(1 + E\,\frac{3\ell_3}{(x - g_0)^2}\right) + O(E^2)\,. &(1.307)\end{aligned}$$

В выражениях (1.306), (1.307) члены высшего порядка определяются через члены низшего порядка рекурентным способом.

ii) Этот случай соответствует близко расположенным полюсам. Беря предел $\varepsilon \to 0$ при $g_1 = g_2 = g/2$, $\vec{k}_1 = \vec{k}$, $\vec{k}_2 = \vec{k} + \varepsilon\vec{k}$, мы получаем

$$x = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2'' := \frac{g}{|\vec{v} - \vec{k}|} + \frac{d(v_3 - k)}{|\vec{v} - \vec{k}|^3}\,, \tag{1.308}$$

где $d = \varepsilon k g \ll 1$. Потенциал (1.308) является суммой одномонопольного потенциала (1.287) и “электрического дипольного потенциала” $\sim \vec{d}(\vec{v}{-}\vec{k})/|\vec{v}-$

$\vec{k}|^3$. Генератор преобразований U(1) симметрии в случае потенциала (1.308) равен

$$\ell_3 = \frac{g(v_3 - k)}{|\vec{v} - \vec{k}|} - d\,\frac{|\vec{v} - \vec{k}|^2 - (v_3 - k)^2}{|\vec{v} - \vec{k}|^3}\,. \tag{1.309}$$

Обратные к (1.308), (1.309) выражения в виде ряда по d имеют вид

$$v_3 - k \;=\; \frac{\ell_3}{x} + d\,\frac{1}{g} - d^2\,\frac{x\ell_3}{g^4} + d^3\,\frac{x^2(3\ell_3^2 - g^2)}{g^7} + O(d^4)\,, \tag{1.310}$$

$$\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2} \;=\; \frac{\sqrt{g^2 - \ell_3^2}}{x}\left(1 + d^2\,\frac{x^2}{2g^4} - d^3\,\frac{2x^3\ell_3}{g^7}\right) + O(d^4)\,. \tag{1.311}$$

Как и в предыдущем случае, более члены более высокого порядка в разложении (1.310), (1.311) определяются по низшим рекуррентным способом.

Выбирая как в одномонопольном случае $\vec{c} = -\vec{k}$ в гамильтониане (1.276) и подставляя выражения (1.306)-(1.307) или (1.310)-(1.311), мы получаем гамильтониан, выраженный через переменные p, x и ℓ_3. Отметим, что в рассматриваемых выше разложениях для v_3 (см. (1.306) и (1.310)) содержатся не только линейные члены по ℓ_3 как в одномонопольном случае, а члены более высокого порядка. Присутствие этих членов приводит к модификации процедуры квантования соответствующих суперсимметричных аналогов.

Алгебра квантовых операторов $\hat{\varphi}$ и $\hat{\ell}_3$

$$[\hat{\varphi}, \hat{\ell}_3\,] = i\hbar \tag{1.312}$$

позволяет рассматреть следующую реализацию

$$\hat{\ell}_3 = -i\hbar\,\partial/\partial\varphi\,, \qquad \hat{\varphi} = \varphi\,, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi\,. \tag{1.313}$$

Тогда волновая функция представляется в виде ряда Фурье

$$\Psi(x,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi}\psi_n(x)\,, \tag{1.314}$$

где компонентные $d = 1$ поля в $\psi_n(x)$ описывают состояния с фиксированной “проекцией импульса” $\hat{\ell}_3$, генерирующего U(1) симметрию.

Специальный многоцентровой случай

Рассмотрим потенциал

$$\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} = \frac{g}{k}\,\mathrm{arcoth}\left(\frac{|\vec{v}+\vec{k}|+|\vec{v}-\vec{k}|}{2k}\right), \tag{1.315}$$

где $\vec{k} = (0,0,k)$. Оператор Эйлера $v_r\partial_r$ воспроизводит [207] из потенциала (1.315) стандартный двухцентровой потенциал (1.301): $\mathcal{U}_2 = -v_r\partial_r\tilde{\mathcal{U}} = \frac{g}{2}\left(\frac{1}{|\vec{v}+\vec{k}|}+\frac{1}{|\vec{v}-\vec{k}|}\right)$. Аналогично одномонопольному случаю для потенциала (1.315) мы извлекаем из v_r "радиальную переменную" x и спиновые переменные ℓ_a следующими соотношениями

$$v_1 = f_1(x)\,\ell_1\,, \qquad v_2 = f_2(x)\,\ell_2\,, \qquad v_3 = f_3(x)\,\ell_3\,, \tag{1.316}$$

где функции $f_1 = f_2 = \frac{k}{g\,\sinh(kx/g)}$, $f_3 = \frac{k}{g}\coth(kx/g)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера [6]

$$f_1' = -f_2 f_3\,, \qquad f_2' = -f_1 f_3\,, \qquad f_3' = -f_1 f_2\,. \tag{1.317}$$

Скобки Дирака (1.280)-(1.282) новых переменных имеют вид

$$[x,p]_{_D} = 1\,, \qquad [\ell_r,x]_{_D} = 0\,, \qquad [\ell_r,p]_{_D} = 0\,, \qquad [\ell_r,\ell_s]_{_D} = \epsilon_{rst}\ell_t\,, \tag{1.318}$$

тогда как связь (1.275) записывается в виде уравнения сферы

$$\ell_r\ell_r = g^2\,. \tag{1.319}$$

Гамильтониан (1.276) в этом случае равен

$$H = \frac{1}{4}p^2 + \frac{k^2}{4g^2}\sinh^{-2}(\frac{k\hat{x}}{g})\left[(\hat{\ell}_1)^2 + (\hat{\ell}_2)^2 + \left(\cosh(\frac{k\hat{x}}{g})\,\hat{\ell}_3 + \frac{cg}{k}\sinh(\frac{k\hat{x}}{g})\right)^2\right],$$

где мы взяли для определенности $\vec{c} = (0,0,c)$. Отметим, что выражения (1.316) воспроизводят одномонопольное решение (1.289) в пределе $k \to 0$.

---

[6] Отметим, что функции f_a являются частным случаем эллиптических функций $\mathrm{cs(z;m)} = \mathrm{ds(z;m)} = 1/\mathrm{sinh(z)}$, $\mathrm{ns(z;m)} = \mathrm{coth(z)}$ при $|m| = 1$.

Кроме того, уравнения Нама (1.284) выполняются благодаря скобкам Дирака (1.318) и уравнениям Эйлера (1.317).

В отличие от одномонопольного случая, когда все компоненты ℓ_r, $r = 1,2,3$ коммутируют с x, p и гамильтонианом, в данном случае только ℓ_3 может имеют нулевую скобку Дирака с H, $\quad [\ell_3, H]_{_D} = 0$, тогда как $[\ell_1, H]_{_D} = -\alpha\,\ell_2$, $[\ell_2, H]_{_D} = \alpha\,\ell_1$, $\alpha := \frac{k^2\ell_3}{2g^2}$. Таким образом, только третья компонента ℓ_3 является 'истинной' сохраняющейся величиной в рассматриваемом случае, в то время как ℓ_1 и ℓ_2 ими не являются. Тем не менее, временная эволюция величин $\ell_{1,2}$ сводится к локальному U(1) вращению и преобразованный вектор

$$\tilde{\ell}_r \simeq \ell_r + \delta t\,\dot{\ell}_r = \ell_r + \delta t\,[\ell_r, H]_{_D} \tag{1.320}$$

удовлетворяет тем же основным соотношениям (1.318) деформированной размытой сферы (с заменой $\ell_r \to \tilde{\ell}_r$). Таким образом, "размытая сфера" сохраняется при динамической эволюции системы и мы можем использовать стандартную квантовую реализацию для ℓ_r в терминах $(2n+1)\times(2n+1)$-матриц, как в одномонопольном случае.

1.4.4. Включение суперсимметрии

По прежнему будем рассматривать случай $\mathcal{L}| = -\frac{1}{2}\,x^2$. В полном компонентном действии (1.266) чисто бозонная часть S_b совпадает с (1.270), а члены с фермионными полями равны

$$S_f = i\left(\dot{\bar{\chi}}^k\chi_k - \bar{\chi}^k\dot{\chi}_k\right) - \tfrac{i}{2}\,(\mathcal{R}^{-1})^{ik}\chi_i\bar{\chi}_k\,. \tag{1.321}$$

Полное действие $S = S_b + S_f$ инвариантно относительно следующих преобразований $\mathcal{N}{=}4$ суперсимметрии

$$\delta x = -\varepsilon_i\chi^i + \bar{\varepsilon}^i\bar{\chi}_i\,,$$

$$\delta\chi^i = i\,\dot{x}\bar{\varepsilon}^i - \tfrac{i}{2}\left(v^{ik} + c^{ik}\right)\bar{\varepsilon}_k\,, \quad \delta\bar{\chi}_i = -i\,\dot{x}\varepsilon_i - \tfrac{i}{2}\left(v_{ik} + c_{ik}\right)\varepsilon^k\,, \tag{1.322}$$

$$\delta v^{ij} = -(\mathcal{R}^{-1})^{k(i}\left[\varepsilon^{j)}\chi_k + \bar{\varepsilon}^{j)}\bar{\chi}_k\right]\,, \quad \delta B = -\tfrac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\Big[(\mathcal{R}^{-1})_{ik}(\varepsilon^i\chi^k + \bar{\varepsilon}^i\bar{\chi}^k)\Big]\,,$$

где $\varepsilon_i, \bar{\varepsilon}^i$ – грассмановы параметры. Соответствующие суперзаряды равны

$$Q^i = p\,\chi^i + \left(v^{ik} + c^{ik}\right)\chi_k - \tfrac{1}{2}\left(x - \mathcal{U}\right)(\mathcal{R}^{-1})^{ik}\chi_k\,, \tag{1.323}$$

$$\bar{Q}_i = p\,\bar{\chi}_i - \big(v_{ik} + c_{ik}\big)\,\bar{\chi}^k + \tfrac{1}{2}\,\big(x - \mathcal{U}\big)\,(\mathcal{R}^{-1})_{ik}\bar{\chi}^k\,. \tag{1.324}$$

Полный гамильтониан имеет вид

$$H = \tfrac{1}{4}\,p^2 + \tfrac{1}{8}\,\big(v^{ik} + c^{ik}\big)\,\big(v_{ik} + c_{ik}\big) + \tfrac{i}{2}\,(\mathcal{R}^{-1})^{ik}\chi_i\bar{\chi}_k - B\,\big(x - \mathcal{U}\big)\,. \tag{1.325}$$

Вследствие связей второго рода (1.274), (1.275) последние слагаемые в суперзарядах и гамильтониане (1.323)-(3.23) обращаются в нуль: в векторных обозначениях

$$Q^i = p\,\chi^i + i\,(v_r + c_r)\,\sigma_r^{ik}\chi_k\,, \qquad \bar{Q}_i = p\,\bar{\chi}_i - i\,\big(v_r + c_r\big)\,\sigma_{r\,ik}\bar{\chi}^k\,, \tag{1.326}$$

$$H = \tfrac{1}{4}\,p^2 + \tfrac{1}{4}\,(v^r + c^r)\,\big(v_r + c_r\big) - \chi_i\sigma_a^{ik}\bar{\chi}_k\,\partial_a\mathcal{U}/(\partial_p\mathcal{U}\partial_p\mathcal{U})\,. \tag{1.327}$$

Фермионные переменные χ^i и $\bar{\chi}_i$ имеют следующие ненулевые скобки Дирака:

$$\{\chi^i, \bar{\chi}_k\}_{{}_D} = -\tfrac{i}{2}\,\delta^i_k \tag{1.328}$$

и операторы (1.326), (1.327) образуют алгебру $\mathcal{N}\!=4$ суперсимметрии:

$$\{Q^i, \bar{Q}_k\}_{{}_D} = -2i\,\delta^i_k H\,, \qquad \{Q^i, Q^k\}_{{}_D} = [Q^i, H]_{{}_D} = 0\,. \tag{1.329}$$

Следует подчеркнуть важное свойство суперзарядов (1.326): основные соотношения суперсимметрии (1.329) имеют место вследствие выполнения для бозонных переменных v_r классических уравнений Нама

$$[p, v_r]_{{}_D} = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}\,[v_s, v_t]_{{}_D}\,, \tag{1.330}$$

которые являются следствием скобок Дирака (1.280)-(1.282).

Квантовые аналоги генераторов супертрансляций (1.326) однозначно определяются следующими выражениями

$$\hat{Q}^i = \hat{p}\,\hat{\chi}^i + i\,(\hat{v}_r + c_r)\,\sigma_r^{ik}\hat{\chi}_k\,, \qquad \hat{\bar{Q}}_i = \hat{p}\,\hat{\bar{\chi}}_i - i\,\big(\hat{v}_r + c_r\big)\,\sigma_{r\,ik}\hat{\bar{\chi}}^k\,, \tag{1.331}$$

где фермионные операторы удовлетворяют алгебре

$$\{\hat{\chi}^i, \hat{\bar{\chi}}_k\} = \tfrac{1}{2}\hbar\,\delta^i_k\,. \tag{1.332}$$

Антикоммутаторы суперзарядов (1.331) равны

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}^i, \hat{\hat{Q}}^j\} \;&=\; -2\hbar\,\epsilon^{ij}\Big[\tfrac{1}{4}\,\hat{p}^2 + \tfrac{1}{4}\,(\hat{v}^r + c^r)\,\big(\hat{v}_r + c_r\big) \\
&\qquad -\tfrac{i}{2}\hbar^{-1}\Big([\hat{p}, \hat{v}_r] + \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}\,[\hat{v}_s, \hat{v}_t]\Big)\hat{\chi}_k\sigma_a^{kl}\hat{\hat{\chi}}_l\Big] \\
&\qquad + i\,\sigma_r^{ij}\,\Big([\hat{p}, \hat{v}_r] - \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}\,[\hat{v}_s, \hat{v}_t]\Big)\,\Big(\hat{\chi}^n\hat{\hat{\chi}}_n - \tfrac{1}{2}\,\hbar\Big)\,, \qquad (1.333) \\
\{\hat{Q}^i, \hat{Q}^j\} \;&=\; i\,\sigma_r^{ij}\,\Big([\hat{p}, \hat{v}_r] - \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}\,[\hat{v}_s, \hat{v}_t]\Big)\,\hat{\chi}^n\hat{\chi}_n\,.
\end{aligned}$$

Алгебра суперсимметрии на квантовом уровне

$$\{\hat{Q}^i, \hat{\hat{Q}}_k\} = 2\hbar\,\delta^i_k\hat{H}\,, \qquad \{\hat{Q}^i, \hat{Q}^k\} = 0 \qquad (1.334)$$

требует выполнения операторных уравнений Нама

$$[\hat{p}, \hat{v}_r] = \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{rst}[\hat{v}_s, \hat{v}_t]\,. \qquad (1.335)$$

Тогда квантовый гамильтониан однозначно определяется в виде

$$\hat{H} = \tfrac{1}{4}\,\hat{p}^2 + \tfrac{1}{4}\,(\hat{v}_r + c_r)\,\big(\hat{v}_r + c_r\big) - i\hbar^{-1}\,[\hat{p}, \hat{v}_r]\hat{\chi}_i\sigma_r^{ik}\hat{\hat{\chi}}_k\,. \qquad (1.336)$$

Таким образом, как и в классическом случае, при операторном квантовании квантовые операторы $\hat{v}_r$ должны подчиняться операторным уравнениям Нама (1.335) для существования $\mathcal{N}\!=4$ суперсимметрии. Это условие сохранения квантовых уравнений Нама (то есть, переход от уравнения (1.330) со связями Дирака к операторным уравнениям (1.335)) приводит к дополнительным требованиям к стандартной процедуре квантования скобок Дирака фазовых переменных, выбранных в качестве основных переменных. Дадим дополнительные разъяснения к схеме перехода от классической теории к квантовой.

Уравнения (1.335) содержат операторы $\hat{p}$ и $\hat{v}_r$ со сложной алгеброй коммутации, которая получается из скобок Дирака (1.280)-(1.282). По этой причине и как было сделано в чисто бозоном случае, мы рассматриваем в качестве основных квантовых переменных переменные двух коммутирующих секторов: радиального с операторами $\hat{x}$, $\hat{p}$ и спинового с операторами $\hat{\ell}_r$ (или $\hat{\varphi}$, $\hat{\ell}_3$), имеющими прозрачные алгебраические и геометрические свойства. При этом, операторы $\hat{v}_r{=}\hat{v}_r(\hat{x}, \hat{\ell}_t)$ являются составными величинами и определяются соответствующими классическими выражениями $v_r{=}v_r(x, \ell_t)$ с точностью до упорядочения операторов $\hat{\ell}_r$. Необходимые для сохранения суперсимметрии уравнения (1.335) принимают стандартный вид уравнений Нама

$$\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{v}_r = \tfrac{i}{2} \epsilon_{rst}[\hat{v}_s, \hat{v}_t] \,. \tag{1.337}$$

Так как $\hat{x}$ коммутирует со всеми операторами $\hat{\ell}_r$, левые части уравнений Нама (1.337) определены классическими выражениями v_r (с точностью до упорядочения по $\hat{\ell}_a$) . Тогда требуется, чтобы правые части уравнений Нама (1.337) также определялись скобками Дирака, т.е. необходимо, чтобы $[\hat{v}_r, \hat{v}_s] = i\hbar\, \widehat{[v_r, v_s]_{D}}$ для $v_r{=}v_r(x, \ell_t)$. Очевидно, что это условие не выполняется в общем случае, так как мы рассматриваем ℓ_r в качестве основных квантовых величин: $[\hat{\ell}_r, \hat{\ell}_s] = i\hbar\, \widehat{[\ell_r, \ell_s]_{D}}$. Только в ограниченных случаях мы можем согласовать квантование вектора v_a и квантования “элементарного” вектора ℓ_r с одновременным переходом от классических уравнений Нама к квантовым уравнениям Нама. Именно эта возможность возникает в одномонопольном случае и в специальном мультимонопольном случае, когда компоненты вектора v_r являются линейными функциями ℓ_r.

В двухмонопольном случае, когда разложение v_r содержит все степени ℓ_r, необходимо сделать квантовую модификацию операторов $\hat{v}_r$,

$$\hat{v}_r(\hat{x}, \hat{\ell}_s) \quad \to \quad \hat{v}_r(\hat{x}, \hat{\ell}_s; \hbar)$$

так, чтобы новые операторы удовлетворяли уравнению Нама во всех порядках по $\hbar$. В этом случае, нулевой порядок по $\hbar$ в разложении операторов $\hat{v}_r(\hat{x}, \hat{\ell}_s; \hbar)$ полностью определяется соответствующими классическими выражениями или, другими словами, классические выражения являются вейлевскими символами членов нулевого порядка.

Следует подчеркнуть, что мы строго следуем предписаниям, которые требует переход от классической системы к соответствующей квантовой теории. Конечно, независимое построение квантовой теории (без квантования классической системы) не требует соблюдения этих дополнительных ограничений.

Одномонополный случай

В случае потенциала (1.287) и при, $\vec{c} = -\vec{k}$ генераторы (1.326), (1.327) принимать вид

$$Q^i = p\,\chi^i + i\,\frac{\ell_r\,\sigma_r^{ik}\chi_k}{x}\,, \qquad \bar{Q}_i = p\,\bar{\chi}_i - i\,\frac{\ell_r\,\sigma_{r\,ik}\bar{\chi}^k}{x}\,, \tag{1.338}$$

$$H = \frac{1}{4}\left(p^2 + \frac{\ell_r\ell_r}{x^2}\right) + \frac{\ell_r\,\chi_i\sigma_r^{ik}\bar{\chi}_k}{x^2}\,. \tag{1.339}$$

В отличие от чисто бозонного случая, рассматриваемого ранее, вектор ℓ_r имеет ненулевые скобки Дирака с гамильтонианом (1.339) и с суперзарядами (1.338). Преобразования суперсимметрии переменных ℓ_r имеют вид

$$\delta\ell_r = \left[\varepsilon H + \varepsilon_i Q^i - \bar{\varepsilon}^i\bar{Q}_i, \ell_r\right]_{D} = \epsilon_{rst}\,\omega_s\,\ell_t\,, \tag{1.340}$$

где $\omega_s = \varepsilon\,\sigma_s^{ik}\chi_i\bar{\chi}_k/x^2 - i\sigma_s^{ik}(\varepsilon_i\chi_k - \bar{\varepsilon}_i\bar{\chi}_k)/x$, то есть они являются локальными SU(2)-вращениями. Как результат этого, преобразованный под действием суперсимметрии вектор $\tilde{\ell}_r = \ell_r + \delta\ell_r + \ldots$ удовлетворяет тем же основным соотношениям (1.290) и (1.291), $\tilde{\ell}_r\tilde{\ell}_r = g^2$ и $[\tilde{\ell}_r, \tilde{\ell}_s]_{D} = \epsilon_{rst}\tilde{\ell}_t$.

Вектор размытой сферы ℓ_r является частью генераторов

$$J_r = \ell_r\, -\, \chi_i\sigma_r^{ik}\bar{\chi}_k\,, \qquad [J_r, J_s]_{D} = \epsilon_{rst}\,J_t\,, \tag{1.341}$$

которые коммутируют с гамильтонианом, $[H, J_r]_{D} = 0$, и генерируют преобразования SU(2), действующие на индекс i:

$$[Q^i, J_r]_{D} = -\tfrac{i}{2}\,\sigma_r^{ik}\,Q_k\,, \qquad [\bar{Q}_i, J_r]_{D} = \tfrac{i}{2}\,\sigma_{r\,ik}\,\bar{Q}^k\,. \tag{1.342}$$

Генераторы (1.341), вместе с операторами (1.338), (1.339) и

$$\begin{array}{lcl} I_{1'} & = & \frac{1}{2}\left(\chi_k\chi^k + \bar{\chi}^k\bar{\chi}_k\right), \\ I_{2'} & = & -\frac{i}{2}\left(\chi_k\chi^k - \bar{\chi}^k\bar{\chi}_k\right), \qquad [I_{a'}, I_{b'}]_{D} = \epsilon_{a'b'c'}I_{c'}\,. \\ I_{3'} & = & -\chi_k\bar{\chi}^k\,, \end{array} \tag{1.343}$$

$$S^i = -2\,x\,\chi^i + t\,Q^i\,, \qquad \bar{S}_i = -2\,x\,\bar{\chi}_i + t\,\bar{Q}_i\,, \tag{1.344}$$

$$K = x^2 - t\,xp + t^2 H\,, \qquad D = -\tfrac{1}{2}\,xp + t\,H\,, \tag{1.345}$$

образуют алгебру $\mathcal{N}=4$ конформной супергруппы OSp(4|2), являющейся симметрией в одномонопольном случае. Обратим внимание, что хотя величины (1.341) образуют алгебру SU(2) и коммутируют с гамильтонианом, они не могут рассматриваться как координаты размытой сферы: условие $J_r J_r = const$ не выполняется и, более того, такое условие не является инвариантным относительно преобразований суперсимметрии, в отличие от инвариантного условия $\ell_r \ell_r = g^2$. Таким образом, в суперсимметричной модели бозонная размытая сфера по-прежнему натянута на те же переменные ℓ_r.

Сохранение основных отношений (1.290) и (1.291), которые определяют размытую сферу, предполагает использование $(2n+1)\times(2n+1)$-матричной реализации для $\hat{\ell}_a$, где $n \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ является спином в SU(2) неприводимом представлении. Следует подчеркнуть, что в этом случае важное для присутствия $\mathcal{N}{=}\,4$ суперсимметрии уравнение Нама (1.337) справедливо вследствие $\hat{v}_r{-}k_r = \hat{\ell}_r/\hat{x}$ для размытой сферы в одномонопольном случае. Используя голоморфное представление для фермионных операторов

$$\hat{\chi}^i = \chi^i\,, \qquad \hat{\bar{\chi}}_k = \tfrac{1}{2}\,\hbar\,\partial/\partial\chi^i \tag{1.346}$$

и принимая во внимание, что квантовая суперзаряды и гамильтониан являются $(2n{+}1)\times(2n{+}1)$ матрицами, мы находим, что волновая функция имеет вид

$$\Psi^A(x,\chi^i) = \phi^A(x) + \chi^i\,\psi^A_i(x) + \chi^i\chi_i\,\varphi^A(x) \tag{1.347}$$

где внешний индекс $A = 1, \ldots 2n$ является индексом неприводимого SU(2)-представления с матрицами $\hat{\ell}_r$ как генераторами. Мы видим, что по отношению к полным SU(2) преобразованиям, порожденных (1.341), бозонные волновые функции $\phi^A(x)$ и $\varphi^A(x)$ образуют два неприводимых SU(2) представлений спина n, в то время как фермионные волновые функции $\psi^A_i(x)$ содержат два неприводимых SU(2) представления с SU(2) спинами $n \pm \frac{1}{2}$.

Этот результат находится в полном согласии с результатом, полученным в [147], где спиновые переменные были представлены с помощью (**4,4,0**) супермультиплета. В отличие от формулировки в [147], где координаты размытой сферы строятся как билинейные произведения SU(2)-дублетных полей, удовлетворяющих осцилляторной алгебре, т.е. как некоторые вторичные составные объекты, спиновый (**3,4,1**) супермультиплет обеспечивает описание размытой сферы непосредственно в терминах неабелевых векторных координат ℓ_a, которые теперь рассматриваются как “элементарные” составляющие.

Многоцентровые случаи

Рассмотрим сначала квантования в двухмонопольном случае с потенциалом (1.301).

Обращение уравнений (1.301), (1.302), (1.303) дает следующие выражения для компонент три-вектора v_r:

$$v_1 = V(x,\ell_3)\,\cos\varphi\,, \qquad v_2 = V(x,\ell_3)\,\sin\varphi\,, \qquad v_3 = W(x,\ell_3)\,. \tag{1.348}$$

Явный вид функций $V(x,\ell_3)$, $W(x,\ell_3)$ можно легко получить, например, из выражений (1.306), (1.307) и (1.310), (1.311) в двух предельных случаях, но он нам для данного рассмотрения не потребуется.

Квантование суперсимметричных теорий предполагает преимущественно выбор вейлевского упорядочения операторов [193], анализ которого эффективен с помощью скобок Мойала [16, 193]. Таким образом, выражениям (1.348) соответствуют квантовые выражения

$$\hat v_\pm := \hat v_1 \pm i\hat v_2 = \langle V(\hat x,\hat\ell_3)\,e^{\pm i\hat\varphi}\rangle_W\,, \qquad \hat v_3 = W(\hat x,\hat\ell_3)\,, \tag{1.349}$$

где скобки $\langle\ldots\rangle_W$ обозначают вейлевское упорядочение некоммутирующих операторов $\hat\varphi$, $\hat\ell_3$. При этом, классические выражения (1.348) должны быть вейлевскими символами соответствующих квантовых величин, т.е.

$$\hat v_\pm(\hat\ell_3,\hat\varphi) = \tfrac{1}{4\pi^2}\int d\alpha\,d\beta\,d\ell_3\,d\varphi\,V(x,\ell_3)\,e^{\pm i\varphi}\,e^{-i(\alpha\ell_3+\beta\varphi)}\,e^{i(\alpha\hat\ell_3+\beta\hat\varphi)}\,. \tag{1.350}$$

В рассматриваемой модели скобки Мойала любых операторов $\hat M$, $\hat N$ равны

$$\Big[[\hat M,\hat N\}\Big]^W = 2\sinh\left\{\frac{\hbar}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^{(2)k}\partial\bar\chi^{(1)}_k} - \frac{\partial^2}{\partial\chi^{(1)k}\partial\bar\chi^{(2)}_k}\right)\right. \tag{1.351}$$

$$\left. + \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{(1)}\partial p^{(2)}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{(2)}\partial p^{(1)}}\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^{(1)}\partial\ell_3^{(2)}} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^{(2)}\partial\ell_3^{(1)}}\right)\right\}$$

$$\cdot\, M(x^{(1)},p^{(1)},\varphi^{(1)},\ell_3^{(1)},\chi^{(1)k},\bar\chi^{(1)}_k)\,N(x^{(2)},p^{(2)},\varphi^{(2)},\ell_3^{(2)},\chi^{(2)k},\bar\chi^{(2)}_k)\Big|_{(1)=(2)}$$

$$\equiv i\hbar\, [M, N\}_{_M} \,.$$

Отметим, что (1.350) дают следующие операторные соотношения [7]

$$\hat{v}_{\pm} = e^{\pm i\hat{\varphi}/2}\, V(\hat{x}, \hat{\ell}_3)\, e^{\pm i\hat{\varphi}/2} = e^{\pm i\hat{\varphi}}\, V(\hat{x}, \hat{\ell}_3 \pm \tfrac{\hbar}{2}) = V(\hat{x}, \hat{\ell}_3 \mp \tfrac{\hbar}{2})\, e^{\pm i\hat{\varphi}} \,. \qquad (1.352)$$

Как подчеркивалось выше, сохранение суперсимметрии на квантовом уровне требует выполнения операторного уравнения Нама (1.335). Его выполнение в вейлевски-упорядоченых выражениях представляется равенством

$$[p, v_r]_{_M} = \tfrac{1}{2}\, \epsilon_{rst} [v_s, v_t]_{_M} \,. \qquad (1.353)$$

Но прямое вычисление с использованием скобки Мойала (1.351) показывает, что скобки Мойала левой и правой сторон в выражении (1.353) не совпадают: левая часть (1.353) равна скобке Дирака, $[p, v_r]_{_M} = -\dfrac{\partial v_r}{\partial x} = [p, v_r]_{_D}$, а правая часть имеет дополнительные члены по $\hbar$,

$$i\hbar\, [v_3, v_{\pm}]_{_M} = -2\, v_3 \sinh \left\{ \frac{i\hbar}{2} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \ell_3} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \varphi} \right\} v_{\pm} = i\hbar\, [v_3, v_{\pm}]_{_D} + O(\hbar^3) \,. \qquad (1.354)$$

Следовательно, требуется выполнить некоторые обобщения при переходе к квантовой теории, как было указано выше.

Отметим, что в одномонопольном случае, когда функция W линейна по ℓ_3, таких проблем не возникает. Так, в одномонопольном случае мы имеем $W = (\ell_3/x) + k$, $V = \sqrt{g^2 - \ell_3^2}/x$. Упорядоченные по Вейлю операторы (1.349) (см. (1.352)) $\hat{v}_3 = (\hat{\ell}_3/\hat{x}) + k$, $\hat{v}_{\pm} = e^{\pm i\hat{\varphi}/2} \sqrt{g^2 - \hat{\ell}_3^2}\, e^{\pm i\hat{\varphi}/2}/\hat{x}$ удовлетворяют алгебре $[\hat{v}_+, \hat{v}_-] = 2\hbar\, \hat{v}_3/\hat{x}$, $[\hat{v}_3, \hat{v}_{\pm}] = \pm\hbar\, \hat{v}_{\pm}/\hat{x}$. Как результат этого, операторные уравнения Нама (1.337) выполняются в этом случае.

Сохранения уравнения Нама (1.353), гарантирующего $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрию на квантовом уровне, требует в двухмонопольном случае модифиции классическо-квантового соответствия (1.350), что приводит к необходимости изменения символов квантовых операторов $\hat{v}_r$. Вместо символов (1.348), совпадающих с классическими выражениями, мы будем рассматривать символы

$$v_{\pm} = \tilde{V}(x, \ell_3, \hbar)\, e^{\pm i\varphi} \,, \qquad v_3 = \tilde{W}(x, \ell_3, \hbar) \,, \qquad (1.355)$$

---

[7] Эти формулы получаются после приведения операторной экспоненты в интеграле (1.350) к виду $e^{i(\alpha\hat{\ell}_3 + \beta\hat{\varphi})} = e^{i\alpha\beta\hbar/2} e^{i\beta\hat{\varphi}} e^{i\alpha\hat{\ell}_3}$ и последующего преобразования Фурье. Мы также используем соотношение $F(\hat{\ell}_3)\, e^{i\alpha\hat{\varphi}} = e^{i\alpha\hat{\varphi}} F(\hat{\ell}_3 + \alpha\hbar)$.

соответствие которых классическим величинам заключается в совпадении первых членов разложения (1.355) по $\hbar$ с выражениями (1.348):

$$\begin{aligned} \tilde V(x,\ell_3,\hbar) &= V(x,\ell_3) + \hbar\, V_1(x,\ell_3) + \hbar^2\, V_2(x,\ell_3) + \cdots\,, \\ \tilde W(x,\ell_3,\hbar) &= W(x,\ell_3) + \hbar\, W_1(x,\ell_3) + \hbar^2\, W_2(x,\ell_3) + \cdots\,. \end{aligned} \tag{1.356}$$

Соответствующие квантовые операторы равны

$$\hat v_\pm = e^{\pm i\hat\varphi/2}\, \tilde V(\hat x, \hat\ell_3, \hbar)\, e^{\pm i\hat\varphi/2}\,, \qquad \hat v_3 = \tilde W(\hat x, \hat\ell_3, \hbar)\,. \tag{1.357}$$

Таким образом, мы делаем дополнительные поправки к квантовым операторам в более высоких порядках в разложении по $\hbar$. В результате, выполняются операторные уравнения Нама и имеет место предельный переход $\hbar \to 0$ к классической системе.

Уравнения Мойала-Нама (1.353) для символов (1.355) или операторные уравнения Нама (1.335) для операторов (1.357) приводят к уравнениям на функции $V_n(x,\ell_3)$ и $W_n(x,\ell_3)$. Решая эти уравнения, мы находим полные решения для квантовых операторов. В приложении работы [141] представлены решения этих уравнений в виде разложения по $\hbar$.

Генераторы суперсимметрии Пуанкаре тогда даются выражениями (1.331) и (1.336), где $\hat v_\pm$ и $\hat v_3$ заданы в (1.357) с функциями $\tilde V$ и $\tilde W$, определенными в виде ряда по $\hbar$. Например, в случае **i)** первые члены суперзарядов (до первой степени E и до четвертой степени $\hbar$) равны (берем $\vec c = -\vec k$)

$$\begin{aligned} \hat Q^i &= \hat p\, \hat\chi^i + i\left[(\tilde W - k)\sigma_3^{ik} + e^{i\hat\varphi/2}\tilde V e^{i\hat\varphi/2}\sigma_-^{ik} + e^{-i\hat\varphi/2}\tilde V e^{-i\hat\varphi/2}\sigma_+^{ik}\right]\hat\chi_k \\ \hat{\bar Q}_i &= \hat p\, \hat{\bar\chi}_i - i\left[(\tilde W - k)\sigma_{3\,ik} + e^{i\hat\varphi/2}\tilde V e^{i\hat\varphi/2}\sigma_{-\,ik} + e^{-i\hat\varphi/2}\tilde V e^{-i\hat\varphi/2}\sigma_{+\,ik}\right]\hat{\bar\chi}^k, \end{aligned}$$

где $\sigma_\pm = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 \pm i\sigma_2\right)$ и

$$\begin{aligned} \tilde W(\hat x, \hat\ell_3) - k &= \frac{1}{\hat x - g_0}\left(\hat\ell_3 + E\,\frac{3\hat\ell_3^2 - g^2}{(\hat x - g_0)^2}\right), \\ \tilde V(\hat x, \hat\ell_3, \hbar) &= \frac{\sqrt{g^2 - \hat\ell_3^2}}{\hat x - g_0}\left(1 + \frac{3E\hat\ell_3}{(\hat x - g_0)^2}\right)\left(1 + \frac{\hbar^2}{8(g^2 - \hat\ell_3^2)} + \frac{\hbar^4}{128(g^2 - \hat\ell_3^2)^2}\right). \end{aligned}$$

Мы можем использовать другой способ построения квантовой системы в многомонопольной системе, подобно методу размытой сферы. Этот метод подходит для специального многоцентрового случая с потенциалом (1.315). Здесь, мы можем рассмотреть квантовый аналог соотношений (1.316)

$$\hat{v}_1 = f_1(\hat{x})\,\hat{\ell}_1\,, \qquad \hat{v}_2 = f_2(\hat{x})\,\hat{\ell}_2\,, \qquad \hat{v}_3 = f_3(\hat{x})\,\hat{\ell}_3\,, \tag{1.358}$$

где $\hat{\ell}_a$ являются стандартными координатами размытой сферы,

$$[\hat{\ell}_r, \hat{\ell}_s] = i\hbar\,\epsilon_{rst}\hat{\ell}_t\,, \qquad \hat{\ell}_r\hat{\ell}_r = g^2\,. \tag{1.359}$$

Как и ранее, мы должны положить $g^2 = \hbar^2\,n(n+1)$, $2n \in \mathbb{N}$ для унитарных представлений. Благодаря уравнениям Эйлера (1.317) квантовые уравнения Нама (1.335), (1.337) выполняются. Как результат, операторы (мы берем $c_r = (0,0,c)$ в (1.331), (1.336))

$$\begin{aligned}
\hat{Q}^i \;&=\; \hat{p}\,\hat{\chi}^i + \tfrac{ik}{g}\sinh^{-1}(\tfrac{k\hat{x}}{g})\Big[\hat{\ell}_1\,\sigma_1^{ik}\hat{\chi}_k + \hat{\ell}_2\,\sigma_2^{ik}\hat{\chi}_k \\
&\qquad\qquad + \Big(\cosh(\tfrac{k\hat{x}}{g})\,\hat{\ell}_3 + \tfrac{cg}{k}\sinh(\tfrac{k\hat{x}}{g})\Big)\,\sigma_3^{ik}\hat{\chi}_k\Big]\;, \\
\hat{\bar{Q}}_i \;&=\; \hat{p}\,\hat{\bar{\chi}}_i - \tfrac{ik}{g}\sinh^{-1}(\tfrac{k\hat{x}}{g})\Big[\hat{\ell}_1\,\sigma_{1\,ik}\hat{\bar{\chi}}^k + \hat{\ell}_2\,\sigma_{2\,ik}\hat{\bar{\chi}}^k \\
&\qquad\qquad + \Big(\cosh(\tfrac{k\hat{x}}{g})\,\hat{\ell}_3 + \tfrac{cg}{k}\sinh(\tfrac{k\hat{x}}{g})\Big)\,\sigma_{3\,ik}\hat{\bar{\chi}}^k\Big]\;,
\end{aligned} \tag{1.360}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H} = \tfrac{1}{4}\,\hat{p}^2 &+ \tfrac{k^2}{4g^2}\sinh^{-2}(\tfrac{k\hat{x}}{g})\left[(\hat{\ell}_1)^2 + (\hat{\ell}_2)^2 + \Big(\cosh(\tfrac{k\hat{x}}{g})\,\hat{\ell}_3 + \tfrac{cg}{k}\sinh(\tfrac{k\hat{x}}{g})\Big)^2\right] \\
&+ \tfrac{k^2}{g^2}\sinh^{-2}(\tfrac{k\hat{x}}{g})\Big[\cosh^2(\tfrac{k\hat{x}}{g})\Big(\hat{\ell}_1\hat{\chi}_i\sigma_1^{ik}\hat{\bar{\chi}}_k + \hat{\ell}_2\hat{\chi}_i\sigma_2^{ik}\hat{\bar{\chi}}_k\Big) + \hat{\ell}_3\hat{\chi}_i\sigma_3^{ik}\hat{\bar{\chi}}_k\Big]
\end{aligned} \tag{1.361}$$

образуют $\mathcal{N} = 4$ супералгебру Пуанкаре.

1.5. Резюме

В данной главе исследованы модели расширенной суперсимметричной механики, описывающие различные геометрии в таргетном пространстве. В частности, рассмотрены модели с кручениями $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной квантовой механики на основе супермультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ и $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$, а также системы $\mathcal{N}=4$ суперсимметричной механики, описывающие НКТ, би-НКТ и би-келеровые геометрии, а также $\mathcal{N}=4$ суперсимметричные системы со спиновыми степенями свободы.

Модели такого типа изучались ранее, но в ограниченых рамках. Например, общая $\mathcal{N}=2$ модель, основанная на сумме суперполевых лагранжианамов (1.7) и (1.43), рассматривалась ранее в основном на классическом уровне, в то время как его квантовые версии, в том числе явный вид соответствующих $\mathcal{N}=2$ суперзарядов, было известно только для нескольких частных случаев [137, 36]. Кроме того, квантовые модели, связанные с мультиплетом $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$, были известны для действия (1.4) с потенциальным членом (1.14) или его модификацией, получаемой добавлением действия (1.16) с вещественным кручением [26], но без включения более высоких порядков, как в (1.17). Во всех рассмотренных случаях мы получили соответствующие квантовые $\mathcal{N}=2$ супералгебры. Общим рецептом при этом является использование упорядочение Вейля для суперзарядов с последующим переходом к ковариантным суперзарядам, которые действуют в гильбертовом пространстве с геометрическим скалярным произведением. Получение этих квантовых суперзарядов и их интерпретация как комплексов де Рама (в $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ случае) и Дольбо (в $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{0})$ случае) позволяет найти в явном виде вакуумные состояния в рассматриваемой модели и убедиться, что их число не меняется после включения кручения. Такая инвариантность обеспечивается теоремой об индексе и подкрепляется математическим аргументом, что когомологии для твистованного комплекса де Рама и нетвистованного комплекса совпадают. Явное построение этих состояний, которое было сделано в рамках теории возмущений по кручению, является новым результатом.

Изучая $\mathcal{N}=4$ квантово-механическую систему, образованную двумя взаимодействующими $(\mathbf{4{,}4{,}0})$ супермультиплетами, мы показали, что когда оба супермультиплеты имеют ту же природу, система описывает HKT комплекс Дольбо. С другой стороны, система с двумя взаимно-зеркальными мультиплетами характеризуются HKT геометрией в обоих, обычном и зеркальном, секторах и была названа нами *би-HKT* моделью. Эта модель была представлена в терминах $\mathcal{N}=2$ суперполей и было показано, что би-HKT модели являются примерами $\mathcal{N}=2$ суперполевых систем с внешними (анти)голоморфными кручениями. В частном случае, с конформно-плоской гармонической 8-мерной метрикой, суперсимметрия может быть расширена до $\mathcal{N}=8$, когда сигма-модель описывает OKT геометрию. Были найдены явные выражения для классических и квантовых суперзарядов и это позволило нам сделать утверждения, касающиеся математической структуры общих би-НКТ и ОКТ комплексов, и дать новое геометрическое определение би-НКТ и ОКТ многообразий.

Мы рассмотрели также систему, описывающую общее взаимодействие произвольного числа обычных и зеркальных $(\mathbf{4},\,\mathbf{4},\,\mathbf{0})$ мультиплетов, и показали, что такая система описывает также би-НКТ геометрию [30, 31], которая характеризуется дополнительными гиперкомплексными структурами (1.207). Мы представили явные выражения суперполевых действий (1.198)-(1.201), компонентные лагранжианы и суперзаряды.

Мы выполнили гамильтову редукцию би-НКТ моделей относительно половины комплексных координат. Редуцированная модель может быть описана обычными и зеркальными $(\mathbf{2},\,\mathbf{4},\,\mathbf{2})$ мультиплетами и представляет твистованную келерову модель [139], обобщенную дополнительными голоморфными членами в суперполевом действиии (1.222) и описывающую квазикомплексную твистованную келерову геометрию. Редуцированные модели могут быть описаны также посредством вещественных $\mathcal{N}=2$ суперполей и принадлежат к классу квазикомплексных моделей де Рама с эрмитовой (не просто вещественной) суперполевой метрикой [32]. Данные модели предполагают присутствие также голоморфных кручений с несохранением фермионного заряда [25, 26, 140]. Они названы нами би-келеровыми моделями из-за наличия двух различных комплексных структур, которые происходят из двух различных гиперкомплексных структур родительских би-НКТ моделей.

В этой главе мы представили также новую версию $\mathcal{N}=4$ механики, которая использует взаимодействие $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ и $(\mathbf{3{,}4{,}1})$ мультиплетов, в котором $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ мультиплет является динамическим, тогда как $(\mathbf{3{,}4{,}1})$ мультиплет – полудинамический и описывается членом Весса-Зумино в полном суперполевом действии. Остающийся после исключения вспомогательных полей бозонные векторные переменные $(\mathbf{3{,}4{,}1})$ мультиплета описываются действием первого порядка механики Черна-Саймонса и являются спиновыми степенями свободы. $\mathcal{N}=4$ суперсимметричный член взаимодействия генерирует связь, которая связывает одну степень свободы этих векторных переменных с бозонной динамической переменной $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ мультиплета. Мы использовали ковариантное описание спиновых переменных посредством три-вектора, т.е. спиновые переменные описываются некоторой двумерной размытой поверхностью в трехмерном (плоском) пространстве. Скобки Дирака, определенные гармоническим скалярным потенциалом, определяют алгебраическую структуру спинового сектора. В случаях с одноцентровым (1.287) и специальном многоцентровом (1.315) потенциалом спиновые переменные образуют SU(2) алгебру и живут на размытой сфере S^2 благодаря указанной связи.

Один из самых красивых и неожиданных следствий, полученных при изучении этих моделей, является выполнение уравнений Нама для три-векторной переменной полудинамического (**3,4,1**) мультиплета. Кроме того, мы наблюдаем строгое соответствие между присутствием $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии в системе и уравнениями Нама для векторной переменной как на классическом уровне, так и в квантовом случае, то есть, уравнения Нама являются показателем присутствия $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии.

Результаты данной главы опубликованы в работах [140, 141, 142, 143, 144, 145].

Глава 2

Новые модели расширенной суперконформной механики

Данная глава посвящена построению новых моделей конформной и суперконформной механики. В частности, будут рассмотрены как одночастичные, так и многочастичные системы, а также системы с расширенной $d = 1$ суперконформной симметрией.

Как отмечалось во введении, модели конформной и суперконформной механики обладают динамической симметрией $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и ее суперсимметричными расширениями и описывают (супер)конформные физические системы в одномерии [42, 45, 46, 47, 50], а также характеризует важный класс интегрируемых многочастичных систем [43, 44, 48, 55]. С учетом важности таких моделей в современных теоретических исследованиях, в частности, при изучении AdS/CFT соответствия и описании свойств черных дыр, является актуальным построение новых систем $\mathcal{N}$-расширенной суперконформной механики с дополнительными степенями свободы при высших $\mathcal{N}$.

Попытки [55, 56, 57] построить многочастичные системы с $\mathcal{N}{=}4$ суперконформной инвариантностью показали их “жесткость”, характеризуемую сильными ограничениями на параметры системы. В отличие от $\mathcal{N}{=}2$ суперконформного случая с одним препотенциалом U, при $\mathcal{N}{=}4$ возникает второй препотенциал F. Данные препотенциалы подчиняются не только условиям однородности, но также удовлетворяют связанной системе квадратичных уравнений в частных производных: так называемому уравнению ВДВВ для F [58, 59] и соответствующему твистованно-периодическому уравнению для U. Как отмечалось в работах [60, 61, 62, 63], что если даже взять известное решение для F, то явно решить U-уравнение для более чем трех частиц в случае $\mathrm{SU}(1,1|2)$ симметрии является сложной задачей. Эти технические трудности, а также физические применения суперконформных систем в исследованиях M-бранных решений и свойствах черных дыр (см. например [187]), предполагают построение и изучение новых моделей $\mathcal{N}{=}4$ суперконформной механики с самой общей супергруппой симметрии $D(2,1;\alpha)$.

Одним из способов построения новых систем многих частиц с суперконформной симметрии является увеличение числа степеней свободы системы за счет дополнительных “полудинамических” изоспиновых переменных [146, 147, 148] с использованием суперконформно-инвариантного калибрования некоторых изометрий в суперсимметричных моделях матричной механики. Эти полудинамические переменные описываются механическим действием Черна-Саймонса (или Весса-Зумино) [70, 71], а после квантования реализуют (изо)спиновые степени свободы. Результирующие суперконформные многочастичные модели, расширенные изоспиновыми переменными, существуют для любого значения α и, в общем случае, координаты частиц моделей параметризуют неплоские таргетные пространства.

Конформные и суперконформные модели возникают также при построении систем с (супер)конформной нерелятивистской симметрией. Отметим, что в семидесятые годы симметрии Галилея были расширены до симметрий Шредингера посредством добавления к алгебре Галилея двух дополнительных генераторов [208, 209]: дилатаций и растяжений. Из-за конформного характера этих генераторов симметрии Шредингера были названы нерелятивистскими конформными симметриями. Однако вскоре появился лучший кандидат для нереляивистской конформной симметрии – конформная алгебра Галилея: она возникает как предел $c\to\infty$ в контракции релятивистской конформной алгебры [64, 65, 66]. В отличие от алгебры Шредингера конформные симметрии Галилея описывают безмассовые нерелятивистские системы – центральные расширения конформной алгебры Галилея с введением нерелятивистских массовых параметров не допускаются.

В данной главе будут представлены новые результаты в описании разнообразных физических систем, инвариантных относительно (супер)конформных симметрий и их расширений.

2.1. Модели конформной механики

Конформная алгебра в одномерии $\mathcal{C}^{(0)} = o(2,1)$ образована эрмитовыми генераторами H, K, D, коммутаторы которых равны

$$[\,D,H\,] = -iH\,, \qquad [\,K,H\,] = -2iD\,, \qquad [\,D,K\,] = iK\,. \tag{2.1}$$

Вводя безразмерный O$(2,1)$-вектор T_r, $r,s,t=0,1,2$,

$$T_0=\tfrac{1}{2}\left(mK+m^{-1}H\right), \qquad T_1=\tfrac{1}{2}\left(mK-m^{-1}H\right), \qquad T_2=D\,, \tag{2.2}$$

где m является константой размерности массы, мы получаем другое представление той же алгебры $o(2,1)$ (2.1)

$$[\,T_r,T_s\,]=i\,\epsilon_{rst}\,T^t\,, \tag{2.3}$$

где $\epsilon_{012}=+1$, $T^r=g^{rs}T_s$, g_{rs}= diag$(-++)$.

В суперсимметричных теориях важную роль играют спинорные представления, в данном случае, d=1 конформной алгебры. Вводя SU$(1,1)\simeq$ O$(2,1)$ биспинор $T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha}$, $\alpha,\beta,\gamma=1,2$,

$$T_{11}=H\,, \qquad T_{22}=K\,, \qquad T_{12}=D\,, \tag{2.4}$$

мы получаем спинорные представления алгебры (2.1)

$$[\,T_{\alpha\beta},T_{\gamma\delta}\,]=i\left(\epsilon_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta}+\epsilon_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma}\right)\,, \qquad \text{где} \qquad \epsilon_{12}=-\epsilon_{21}=+1\,. \tag{2.5}$$

Конечно, некомпактная группа SL$(2,\mathbb{R})\simeq$ SU$(1,1)\simeq$ O$(2,1)$ имеет только бесконечномерные унитарные представления. В частности, бесконечномерные унитарные представления дискретной серии универсальной накрывающей группы SU(1,1) нумеруются положительными числами r_0, которые могут быть целыми или полуцелыми [38]. Базисные функции этих представлений являются собственными векторами компактного SU(1,1) генератора T_0. Его собственные значения суть $r=r_0+n$, $n\in\mathbb{N}$ [38, 42]. На этих состояниях оператор Казимира второго порядка алгебры $o(2,1)$

$$T^2=\tfrac{1}{2}\left\{H,K\right\}-D^2=-T^rT_r=\tfrac{1}{2}\,T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

принимает значения

$$T^2=r_0(r_0-1)\,. \tag{2.7}$$

2.1.1. Модель де Альфаро-Фубини-Фурлана и ее интерпретация

Конформная механика де Альфаро-Фубини-Фурлана (АФФ) описывается действием [42]

$$S_0=\int dt\,\left(\dot{x}^2-\gamma^2\,x^{-2}\right)\equiv\int dt\,\mathcal{L}_0\,, \tag{2.8}$$

уравнения движения которого

$$\ddot{x} = \gamma^2 x^{-3} \,. \tag{2.9}$$

Канонической размерностью x есть $[x] = L^{1/2}$, тогда как константа γ безразмерна, $[\gamma] = L^0$. Действие (2.8) инвариантно относительно d=1 конформных преобразований $\delta t = f(t)$, $\delta x = \frac{1}{2}\dot{f}\,x$ при $\partial_t^3 f(t) = 0$, относительно которых $\delta S_0 = \int dt\,\dot{\Lambda}$, где $\Lambda = \frac{1}{2}x^2\,\ddot{f}$. Отожествляя константные параметры a, b и c d=1 трансляций, дилатаций и конформных бустов с коэффициентами в t-разложении функции $f(t) = a + b\,t + c\,t^2$, мы находим соответствующие нётеровские заряды

$$H = \tfrac{1}{4}\,p^2 + \frac{\gamma^2}{x^2}\,, \qquad D = -\tfrac{1}{2}\,xp + tH\,, \qquad K = x^2 - txp + t^2 H\,, \tag{2.10}$$

где $p = 2\,\dot{x}$. В отношении канонических скобок Пуассона заряды (2.10) образуют алгебру $sl(2,\mathbb{R})$

$$\{H, D\}_{{}_P} = H, \qquad \{K, D\}_{{}_P} = -K, \qquad \{H, K\}_{{}_P} = 2D\,, \tag{2.11}$$

которая является динамической симметрией модели. Отметим, что явная зависимость от t в генераторах D и K может быть представлена в виде преобразования подобия $(D, K) = e^{tH}(D_0, K_0)e^{-tH}$, где коммутаторы представлены в виде скобок Пуассона, и $D_0 = -\frac{1}{2}\,xp\,,\; K_0 = x^2$ являются t-независимыми частями D и K . Вместе с H они удовлетворяют той же алгебре скобок Пуассона (2.11). В последующем мы будем в основном рассматривать только эти главные члены в генераторах конформной алгебры и ее суперрасширениях.

Выражения для нётеровских зарядов (2.10) подразумевают следующее значение классического оператора Казимира (2.6),

$$T^2 = \gamma^2 \,. \tag{2.12}$$

Тогда гамильтониан может быть записан в виде

$$H = \tfrac{1}{4}\,p^2 + \frac{T^2}{x^2}\,. \tag{2.13}$$

Как было отмечено в [210], это выражение характеризует самий общий классический гамильтониан моделей конформной механики, включая многочастичные и суперсимметричные расширения одномерной механики АФФ. Канонические переменные p и x характеризуют радиальную степень свободы, тогда как дополнительные угловые и фермионные координаты и их импульсы скрыты в конформном операторе Казимира T^2, который сам по себе может считаться как гамильтониан некоторой ‘угловой’ механической системы.

Как было продемонстрировано в [211], конформную механику АФФ [42] можно получить с помощью метода нелинейных реализаций, примененного к алгебре $o(2,1)$. Для экпоненциальной параметризации элементов группы SO$(2,1)$

$$G_0 = e^{itH}\, e^{izK}\, e^{iuD} \tag{2.14}$$

соответствующие лево-инвариантные формы Маурера-Картана (МК), получаемые из $G_0^{-1}dG_0 = i\Big(\omega_H H + \omega_K K + \omega_D D\Big)$, равны

$$\omega_H = e^{-u}dt\,, \qquad \omega_K = e^{u}\left(dz + z^2 dt\right)\,, \qquad \omega_D = du - 2zdt\,, \tag{2.15}$$

а один-формы МК, ассоциированные с генераторами T_r (2.2), имеют вид

$$\omega_0 = m^{-1}\omega_K + m\,\omega_H\,, \qquad \omega_1 = m^{-1}\omega_K - m\,\omega_H\,, \qquad \omega_2 = \omega_D\,. \tag{2.16}$$

Динамика конформной механики АФФ воспроизводится наложением следующих связей на одномерные поля $z(t)$ и $u(t)$ [211]

$$\text{(a)}\quad \omega_1 = 0\,, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \omega_2 = 0\,. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.17b) является условием обратного эффекта Хиггса [212], позволяющее рассматривать поле $z(t)$ как временную производную дилатона $u(t)$,

$$z = \tfrac{1}{2}\,\dot{u}\,, \tag{2.18}$$

тогда как (2.17a) является динамической связью, которая приводит к уравнению (2.9) для единственной независимой пероменной

$$x = \mu^{-1/2}e^{u/2}\,, \tag{2.19}$$

где μ является размерной частью m, $[\mu] = cm^{-1}$ и $m = \mu\gamma$, $[\gamma] = cm^0$. Будучи условием на лево-инвариантные формы МК, уравнение (2.17) обладает явной d=1 конформной SO(2,1) симметрией.

В формализме один-форм МК действие конформной механики может быть представлено в виде [211]

$$S_0 = -\gamma\int \omega_0 = -\int dt\Big[\mu^{-1}e^{u}\left(\dot{z} + z^2\right) + \mu\gamma^2 e^{-u}\Big]\,. \tag{2.20}$$

Как и кинематическая связь (2.18), так и динамическое уравнение (2.9), следуют из действия (2.20) как уравнения движения. Подставляя кинематическое решение (2.18) в (2.20) и переходя к переменной x с помощью (2.19), мы воспроизводим исходное действие АФФ конформной механики (2.8).

Отметим, что (2.17) определяет класс гедезических на групповом пространстве $\mathrm{SO}(1,2)$, генерируемых правым действием однопараматрической компактной подгруппы с генератором T_0 [211]. Только такой класс приводит к стандартной конформной механике с удовлетворительными квантовыми свойствами [42], в отличие от других нетривиальных выборов связей (например, с выбором $\omega_0 = 0$ вместо (2.17a)). Координата τ, ассоциированная с генератором T_0 в экспоненциальной параметризации этой компактной подгруппы, является естественным параматром на геодезической кривой. В черно-дырной интерпретации (супер)конформной механики τ играет роль собственного времени пробной частицы, движущейся возле горизонта экстремальной черной дыры.

В гамильтоновой формулировке модель (2.20) описывается связями второго рода

$$p_u \approx 0\,, \qquad p_z + \mu\, e^u \approx 0\,, \tag{2.21}$$

позволяющая исключить (p_z, p_u). Скобки Дирака для оставшейся пары фазовых переменных (u, z) и гамильтониан принимают вид

$$\{u, z\}_{{}_D} = \mu\, e^{-u}\,, \qquad H = \tfrac{1}{4\mu}\left(e^u z^2 + 4\gamma^2\mu^2 e^{-u}\right). \tag{2.22}$$

Вводя переменные $x = \mu^{-1/2}e^{u/2}$, $p = 2\mu^{-1/2}e^{u/2}z$, которые обладают стандартными скобками Дирака, $\{x, p\}_{{}_D} = 1$, мы находим, что система (2.20) описывается гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{4}\,p^2 + \gamma^2\, x^{-2}\,, \tag{2.23}$$

который следует также из действия (2.8).

Главные свойства квантования, что базируются на стандартном гамильтониане (2.23), следующие [42, 46]:

- Спектр H непрерывный: $H|E> = E|E> \;\Rightarrow\; H\, e^{i\alpha D}|E> = e^{2\alpha}E|E>$.

- Спектр включает все собственные значения $E{>}0$ и для каждого из них существует состояние с нормировкой плоской волны.
- Состояние с $E{=}0$ не имеет даже нормировки плоской волны и не может быть выбрано в качестве основного состояния.

Отсутствие нормированного основного состояния указывает на то, что описание квантовой конформной механики посредством собственных состояний оператора H является плохо определенным. Корректное описание модели достигается выбором компактного оператора T_0 для определения спектра [42]:

$$\tilde{H} := 2mT_0 = H + m^2K = \tfrac{1}{4}\,p^2 + \gamma^2\,x^{-2} + m^2x^2\,. \tag{2.24}$$

Он содержит осцилляторный член и имеет хорошо определенное основное состояние. Соответствующим гильбертовым пространством является пространство функций, образующих бесконечномерное представление SU(1,1). Спектр гамильтониана (2.24) дискретный. Его основное состояние не инвариантно относительно полной SU(1,1) и нарушает эту симметрию спонтанно [42, 213].

Переход к фазовому пространству с новым эволюционным оператором T_0 и спонтанно нарушенной симметрией SU(1,1)$\sim$SL(2,$\mathbb{R}$) можно интерпретировать как переопределение временной координаты [42, 49, 213]. В самом деле, если мы введем новый параметр эволюции τ и новую координату q [42]

$$\tau := \tfrac{1}{m}\arctan(mt)\,, \qquad q(\tau) := x(t)/\sqrt{1+m^2t^2}\,, \tag{2.25}$$

то с точностью до граничных членов действие (2.8) принимает вид

$$S_0 = \int d\tau\,\big(\,\dot{q}^2 - \gamma^2 q^{-2} - m^2q^2\,\big)\,, \qquad \dot{q} := dq/d\tau \tag{2.26}$$

и является действием для гамильтониана (2.24). Такое координатное изменение имеет красивую интерпретацию в применении к динамике черных дыр. Геометрия вблизи горизонта описывается многообразием AdS$_2$ с группой изометрии SL$(2,\mathbb{R})$. Хорошей глобальной временной координатой для частицы, движущейся вблизи горизонта AdS$_2$, является параметр эволюции τ (смотрите детали в [49, 213]).

Квантовые аналоги генераторов $o(2,1)$ (2.10) при $t=0$ принимают вид

$$H = \tfrac{1}{4}\,\hat{p}^2 + \frac{\gamma^2}{\hat{x}^2}\,, \qquad D = -\tfrac{1}{4}\,\{\hat{x},\hat{p}\}\,, \qquad K = \hat{x}^2\,, \tag{2.27}$$

где $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. Оператор Казимира (2.6) принимает значение

$$T^2 = \gamma^2 - \tfrac{3}{16}\,. \tag{2.28}$$

Следовательно, напряженность γ конформного потенциала связана с константой r_0, нумерующей представления $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, посредством

$$r_0 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4\gamma^2 + \tfrac{1}{4}}\right)\,. \tag{2.29}$$

Используя квантовый оператор Казимира (2.28), мы можем представить квантовый гамильтониан (2.27) в виде

$$H = \tfrac{1}{4}\,p^2 + \frac{T^2 + \frac{3}{16}}{x^2}\,. \tag{2.30}$$

Сравнивая его с классическим выражением (2.13), мы отмечаем появление константного сдвига в числителе потенциального члена.

2.1.2. Конформная механика из d=1 калибрования

Действие конформной механики АФФ (2.8) и ее версия (2.26) с осцилляторным членом может быть воспроизведена методом калибрования. Этот пример является прототипом более сложных (супер)конформных моделей, которые будут рассмотрены ниже.

Рассмотрим комплексное d=1 поле $z(t), \bar{z}(t)$ с лагранжианом

$$L_z = \dot{z}\,\dot{\bar{z}} + im\,(\dot{z}\bar{z} - z\dot{\bar{z}})\,, \tag{2.31}$$

представляющего сумму кинетического члена и d=1 члена Весса-Зумино. Одной из симметрий этой системы является инвариантность относительно глобальных U(1) преобразований

$$z' = e^{-i\lambda}z\,, \quad \bar{z}' = e^{i\lambda}\bar{z}\,. \tag{2.32}$$

Откалибруем эту симметрию, расширяя ее до локальных преобразований: $\lambda \to \lambda(t)$. Калибровочно-инвариантное действие использует d=1 калибровочное поле $A(t)$:

$$L_{gauge} = (\dot{z}{+}iAz)\,(\dot{\bar{z}}{-}iA\bar{z}){+}im\,(\dot{z}\bar{z} - z\dot{\bar{z}} + 2iAz\bar{z}){+}2\gamma\,A\,, \quad A' = A{+}\dot{\lambda}\,, \tag{2.33}$$

где мы добавили также член “Файе-Илиополуса” $\propto \gamma$. Этот член калибровочно инвариантен с точностью до полной производной.

Следующий шаг – выбор калибровки в L_{gauge}. Накладывая условие $z = \bar{z} \equiv q(t)$ и подставляя его в L_{gauge}, получаем

$$L_{gauge} = (\dot{q})^2 + A^2 q^2 - 2mAq^2 + 2\gamma A\,. \tag{2.34}$$

Теперь $A(t)$ становится вспомогательным полем и может быть исключено с помощью алгебраического уравнения движения $A = m - \gamma\, q^{-2}$. Как результат, мы получаем следующий лагранжиан

$$L_{gauge} \Rightarrow (\dot{q})^2 - \left(mq - \gamma q^{-1}\right)^2. \tag{2.35}$$

С точностью до дополнительного постоянного члена $\sim m\gamma$, этот лагранжиан совпадает с (2.26). При $m = 0$, мы воспроизводим стандартную конформную механику (2.8). Исходное действие $S_z = \int dt L_z$ при $m = 0$ является инвариантным при конформных преобразованиях $\delta t = f(t), \delta z = \frac{1}{2}\dot{f}\, z\,,\ (\partial_t)^3 f = 0\,.$ Конформная инвариантность сохраняется при процедуре калибрования, если считать, что калибровочное поле $A(t)$ преобразуется подобно ∂_t, то есть, $\delta A(t) = -\dot{f}\, A(t)\,.$

Данная процедура $d{=}1$ калибрования может быть проинтерпретирована как внемассовый лагранжевый аналог гамильтоновой редукции. В настоящем случае, в параметризации $z = qe^{i\varphi}$, соответствующая гамильтонова редукция состоит в наложении связей $p_\varphi - 2\gamma \approx 0\,,\ \varphi \approx 0$, при котором гамильтониан системы (2.31) редуцируется в гамильтониан АФФ.

2.1.3. Конформная механика с дополнительными изоспиновыми степенями свободы

Другим эффективным способом исследования конформных систем является расширение их дополнительными изоспиновыми степенями свободы, которые описываются действием Черна-Саймонса (или Весса-Зумино в другой терминологии) [70, 71]. Использование этих дополнительных полудинамических степеней свободы совместно с калиброванием некоторых изометрий исходных действий позволяет как воспроизвести лагранжевы модели, построенные ранее с помощью других методов, так и построить новые динамические конформные системы [72, 73]. Такой подход открывает дополнительные возможности к стандартной конформной квантовой механике: кроме стандартной дилатонной переменной $x(t)$ с конформным потенциалом, новые модели конформной механики могут содержать размытую сферу [203], которая описывается дополнительными изоспиновыми переменными. В результате этого, соответствующая волновая функция является нетривиальным SU(2)-тензором, в противоположность SU(2)-синглетной волновой функции стандартной конформной механики. Кроме того, напряженность конформного потенциала совпадает с собственным значением оператора Казимира (то есть, “спина”) и, таким образом, является квантованной.

Рассмотрим следующее действие

$$\tilde{S}_0 = \int dt \left[\dot{x}\dot{x} + \tfrac{i}{2}\left(\bar{z}_k \dot{z}^k - \dot{\bar{z}}_k z^k\right) - \frac{\alpha^2 (\bar{z}_k z^k)^2}{16x^2} - A\left(\bar{z}_k z^k - c\right) \right], \qquad (2.36)$$

где α является безразмерным параметром (как увидим ниже, он совпадает с параметром, характеризующем наиболее общую $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформную группу $D(2,1;\alpha)$). Это действие инвариантно относительно локальных U(1) преобразований

$$A' = A - \dot{\lambda}_0\,, \qquad z^{i\prime} = e^{i\lambda_0} z^i\,, \quad \bar{z}_i{}' = e^{-i\lambda_0} \bar{z}_i\,. \qquad (2.37)$$

Калибровочная связность $A(t)$ в (2.36) является лагранжевым множителем для связи первого рода

$$\bar{z}_k z^k = c\,. \qquad (2.38)$$

Удобно фиксировать калибровочную свободу выбором противоположных фаз в z^1 и z^2. В этой калибровке связь (2.38) разрешается следующими выражениями $z^1 = \kappa \cos\frac{\gamma}{2}\, e^{i\beta/2}$, $z^2 = \kappa \sin\frac{\gamma}{2}\, e^{-i\beta/2}$, $\kappa^2 = c$. В терминах полей $x(t), \gamma(t)$ and $\beta(t)$ действие (2.36) принимает вид

$$S_b = \int dt \left[\dot{x}\dot{x} - \frac{\alpha^2 c^2}{16x^2} - \frac{c}{2}\cos\gamma\,\dot{\beta} \right]. \qquad (2.39)$$

Действие (2.39) содержит “правильный” кинетический член только для одного поля x, тогда как другие поля β и γ, параметризующие фактор-пространство SU(2)/U(1), описываются членом Весса-Зумино и поэтому являются изоспиновыми степенями свободы (таргетными SU(2)-гармониками) после квантования. Конформная инвариантность весс-зуминовского члена в (2.39) является очевидной, если принять во внимание, что SU(2)-поля $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ имеют нулевой конформный вес. Отметим, что наличие конформной инвариантности d=1 весс-зуминовских членов было впервые отмечено в [214].

Рассмотренная модель реализует новый механизм генерации конформного потенциала $\sim 1/x^2$ для поля $x(t)$: члены такого вида возникают как результат вариации по лагранжевому множителю $A(t)$ и использования условия связи (2.38). В квантовой теории этот новый механизм влечет за собой квантование константы c.

Соответствующий канонический гамильтониан модели (2.36) имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{4}\left[p^2 + \frac{\alpha^2(\bar{z}_k z^k)^2}{4x^2}\right] + A\left(\bar{z}_k z^k - c\right), \tag{2.40}$$

где $p = 2\dot{x}$ – канонический импульс для x. Импульс для поля A равен нулю, $p_A = 0$, и поле A в действии (2.36) является лагранжевым множителем для связи

$$D^0 - c := \bar{z}_k z^k - c \approx 0\,. \tag{2.41}$$

Выражения канонических импульсов для z-переменных, определяют связи 2-го рода. Введение скобок Дирака для них исключает спинорные импульсы. Скобки Дирака для оставшихся переменных равны

$$[x, p]_{{}_D} = 1, \qquad [z^i, \bar{z}_j]_{{}_D} = -i\delta^i_j. \tag{2.42}$$

На классическом уровне спинорные переменные описывают двухмерную сферу. В самом деле, используя первое отображение Хопфа мы вводим U(1) калибровочно-инвариантные переменные

$$y_r = \tfrac{1}{2}\,\bar{z}_i(\sigma_r)^i{}_j z^j\,, \tag{2.43}$$

где σ_r, $r = 1, 2, 3$ – матрицы Паули. Связь (2.41) предполагает, что эти переменные параметризуют два-сферу радиуса $c/2$:

$$y_a y_a = (z^k \bar{z}_k)^2/4 \approx c^2/4\,. \tag{2.44}$$

Группой движений этой 2-сферы является конечно группа SU(2), действующая на дублетные индексы i, k и триплетные индексы r. В терминах переменных (2.43) гамильтониан (2.40) с точностью до членов, зануляющихся на поверхности связей, принимает вид

$$H=\frac{1}{4}\left[p^2+\frac{\alpha^2 y_r y_r}{x^2}\right]\approx\frac{1}{4}\left[p^2+\frac{\alpha^2 c^2}{4x^2}\right]. \tag{2.45}$$

На квантовом уровне алгебра операторов имеет вид

$$[\hat{x},\hat{p}]=i\,,\qquad [\hat{z}^i,\hat{\bar{z}}_j]=\delta^i_j \tag{2.46}$$

и легко показать, что квантовые аналоги переменных (2.43)

$$\hat{y}_r=\tfrac{1}{2}\,\hat{\bar{z}}_i(\sigma_r)^i{}_j\hat{z}^j \tag{2.47}$$

образуют алгебру $su(2)$

$$[\hat{y}_r,\hat{y}_s]=i\,\epsilon_{rst}\hat{y}_t\,. \tag{2.48}$$

Но прямое вычисление дает $\hat{y}_r\hat{y}_r\ =\ \frac{1}{2}\,\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k\left(\frac{1}{2}\,\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k+1\right)$. Поэтому, благодаря связи (2.41), мы получаем (для определенности здесь берется $\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k$-упорядочение)

$$\hat{y}_r\hat{y}_r=\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+1\right). \tag{2.49}$$

Как отмечалось в Разделе 1.4, соотношения (2.48) и (2.49) являются определением координат так называемой размытой сферы. Таким образом, угловые переменные, описываемые на классическом уровне спинорными переменными z^i или векторными переменными y_r, становятся после квантования координатами размытой сферы. Сравнивая выражения (2.44) и (2.49), мы видим, что радиус сферы изменяется при квантовании следующим образом: $\frac{c^2}{4}\ \rightarrow\ \frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+1\right)$. При этом, соотношение (2.49) фиксирует значение оператора Казимира алгебры $su(2)$, где c является соответствующим SU(2) спином (“размытостью”). Следовательно, имеет место квантование c, $c\in\mathbb{Z}$, для унитарных представлений.

Волновая функция наследует эту внутреннюю симметрию SU(2). Рассмотрим следующую реализацию операторов Z^i и $\bar{Z}_i$

$$\hat{\bar{z}}_i=v^+_i,\qquad \hat{z}^i=\partial/\partial v^+_i\,, \tag{2.50}$$

где v^+_i является коммутирующим SU(2)-спинором. Связь (2.41), наложенная на волновую функцию $\Phi(x,v^+_i)$,

$$D^0\Phi=\hat{\bar{z}}_i\hat{z}^i\Phi=v^+_i\frac{\partial}{\partial v^+_i}\,\Phi=c\,\Phi\,, \tag{2.51}$$

приводит к полиномиальной зависимости ее от v_i^+:

$$\Phi(x, v_i^+) = \phi_{k_1 \dots k_c}(x) v^{+k_1} \dots v^{+k_c} \,. \tag{2.52}$$

То есть, в отличие от модели работы [42], в нашем случае x-зависимая волновая функция, являясь SU(2) спинором ранга c, реализует неприводимое представление спина $c/2$ группы SU(2).

Используя (2.45) и (2.49), мы видим, что на физических состояниях квантовый гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{4}\left(\hat{p}^2 + \frac{g}{\hat{x}^2}\right), \qquad \text{где} \qquad g = \alpha^2 \, \frac{c}{2}\left(\frac{c}{2} + 1\right) \,. \tag{2.53}$$

Легко показать, что оператор Казимира SU(1,1) принимает значение

$$T^2 = \tfrac{1}{4}\, g - \tfrac{3}{16}. \tag{2.54}$$

Таким образом, подобно [42], на полях $\phi_{k_1 \dots k_c}(x)$ реализуется унитарное неприводимое представление группы SU(1,1). При этом, волновая функция является многокомпонентной, с $(c+1)$ независимыми компонентами. Требование однозначности волновой функции $\Phi(v^+)$ приводит к условию $c \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что действие (2.39) может быть расширено добавлением конформно- и SU(2)-инвариантного сигма-модельного члена для SU(2)/U(1)-переменных γ и β:

$$S_b \;\Rightarrow\; S_b' = S_b + g' \int dt \, x^2 \left[(\dot{\gamma})^2 + (\dot{\beta})^2 \sin^2 \gamma \right], \tag{2.55}$$

где g' – константа. В такой расширенной модели SU(2)-поля теряют статус полудинамических изоспиновых переменных – они становятся полноценными физическими степенями свободы и вносят свой вклад в гамильтониан. Коэффициент c перед членом ВС по прежнему квантуется по топологическим причинам. Этот тип конформно-инвариантной модели с тремя физическими степенями свободы возникает в чисто бозонном пределе $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной механики, основанной на $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ супермультиплете (**3,4,1**) [205].

2.1.4. Конформно-инвариантные многочастичные системы

Выше представленные конформно-инвариантные модели обладали только одной динамической степенью свободы. Рассмотрим теперь многочастичные системы с конформной инвариантностью. Примером таких систем является хорошо известная многочастичная модель Калоджеро [43, 44], которая описывает n тождественных частиц, взаимодействующих попарно через обратно-квадратичный потенциал.

Представим n-частичную модель Калоджеро как матричную модель с калибровочной $\mathrm{U}(n)$ симметрией [215, 216, 147], что позволит сделать обобщение на суперсимметричные случаи. В этой формулировке n-частичная модель Калоджеро описывается эрмитовым $(n\times n)$-матричным полем $X_a{}^b(t)$, $(\overline{X_a{}^b}) = X_b{}^a$, и комплексным $\mathrm{U}(n)$-спинорным полем $Z_a(t)$, $\bar{Z}^a = (\overline{Z_a})$, $a,b = 1,\ldots,n$, а также использует n^2 калибровочных полей $A_a{}^b(t)$, $(\overline{A_a{}^b}) = A_b{}^a$. Действие имеет следующий вид

$$S_C = \int dt \left[\mathrm{tr}\,(\nabla X \nabla X) + \tfrac{i}{2}\,(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z} Z) + c\,\mathrm{tr} A \right], \qquad (2.56)$$

где ковариантная производная суть

$$\nabla X = \dot{X} + i[A, X]\,, \qquad \nabla Z = \dot{Z} + iAZ\,, \qquad \nabla\bar{Z} = \dot{\bar{Z}} - i\bar{Z}A\,. \qquad (2.57)$$

Последний член – член Файе-Илиопоулоса – включает только $\mathrm{U}(1)$ калибровочное поле, c является вещественной константой.

Действие (2.56) инвариантно относительно d=1 конформной $\mathrm{SO}(2,1)$ симметрии

$$\delta t = a(t)\,, \quad \delta X_a^b = \frac{1}{2}\dot{a}\, X_a^b\,, \quad \delta Z_a = 0\,, \quad \delta A_a^b = -\dot{a}\, A_a^b\,, \qquad (2.58)$$

где $a(t)$ удовлетворяет связи $\partial_t^3 a = 0$. Действие (2.56) инвариантно также относительно локальных $\mathrm{U}(n)$ преобразований, $g(\tau) \in \mathrm{U}(n)$,

$$X \to gXg^+\,, \qquad Z \to gZ\,, \qquad \bar{Z} \to \bar{Z}g^+\,, \qquad A \to gAg^+ + i\dot{g}g^+\,, \quad (2.59)$$

для которых условия $X_a{}^b = 0$, $a \neq b$ фиксируют (частично) калибровку. В этой калибровке матричная переменная X принимает вид $X_a{}^b = x_a \delta_a{}^b$. Тогда $[X,A]_a{}^b = (x_a - x_b)A_a{}^b$, и, следовательно, $\mathrm{tr}[X,A] = 0$, $\mathrm{tr}(\dot{X}[X,A]) = 0$, $\mathrm{tr}([X,A][X,A]) = -\sum_{a,b}(x_a - x_b)^2 A_a{}^b A_b{}^a$. Как результат этого, действие (2.56) принимает вид

$$S_C = \int dt \sum_{a,b} \left[\dot{x}_a\dot{x}_a + \tfrac{i}{2}\,(\bar{Z}^a\dot{Z}_a - \dot{\bar{Z}}^a Z_a) + (x_a - x_b)^2 A_a{}^b A_b{}^a - \bar{Z}^a A_a{}^b Z_b + c\,A_a{}^a \right],$$

где третий член содержит только недиагональные элементы ${A_a}^b$, $a \neq b$. Полученное действие инвариантно относительно остаточной калибровочной абелевой $[\mathrm{U}(1)]^n$ симметрии с локальными параметрами $\varphi_a(t)$

$$Z_a \to e^{i\varphi_a} Z_a \,, \qquad \bar{Z}^a \to e^{-i\varphi_a} \bar{Z}^a \,, \qquad {A_a}^a \to {A_a}^a - \dot{\varphi}_a \tag{2.60}$$

(здесь нет суммирования по a), для которой фиксацией калибровки являются условия $\bar{Z}^a = Z_a$. В этой калибровке действие принимает вид

$$S_C = \int dt \sum_{a,b} \Big[\dot{x}_a \dot{x}_a + (x_a - x_b)^2 {A_a}^b {A_b}^a - Z_a Z_b {A_a}^b + c\, {A_a}^a \Big] . \tag{2.61}$$

Подставляя уравнения движения

$$\text{b)} \quad \sum_b ({A_a}^b + {A_b}^a) Z_b = 0 \,, \qquad {A_a}^b = \frac{Z_a \bar{Z}^b}{2(x_a - x_b)^2} \qquad \text{при} a \neq b \,, \tag{2.62}$$

$$(Z_a)^2 = c \qquad \forall\, a \quad (\text{нет суммирования по } a) \,. \tag{2.63}$$

в (2.61), мы получаем стандартное действие Калоджеро

$$S_C = \tfrac{1}{2} \int dt \Big[\sum_a \dot{x}_a \dot{x}_a - \sum_{a \neq b} \frac{c^2}{(x_a - x_b)^2} \Big] . \tag{2.64}$$

Рассмотрим гамильтонову формулировку матричной модели (2.56) и ее переход к гамильтониану Калоджеро. Выражения для импульсов, полученные из действия (2.56), $P_{\scriptscriptstyle X} = 2\nabla X$, $P_{\scriptscriptstyle Z} = i\,\bar{Z}$, $\bar{P}_{\scriptscriptstyle Z} = -i\,Z$, $P_{\scriptscriptstyle A} = 0$ генерируют связи

$$G \equiv P_{\scriptscriptstyle Z} - i\,\bar{Z} \approx 0 \,, \qquad \bar{G} \equiv \bar{P}_{\scriptscriptstyle Z} + i\,Z \approx 0 \tag{2.65}$$

и $P_{\scriptscriptstyle A} \approx 0$. Гамильтониан системы имеет следующий вид

$$H = \tfrac{1}{4} \,\mathrm{tr}\, (P_{\scriptscriptstyle X} P_{\scriptscriptstyle X}) + \mathrm{tr}\, (A\, T) \,, \tag{2.66}$$

где

$$T \equiv i[X, P_{\scriptscriptstyle X}] \; - \; 2Z{\cdot}\bar{Z} \; - \; cI_n \tag{2.67}$$

и I_n является $(n \times n)$ унитарной матрицей.

Сохранение связей $P_{\scriptscriptstyle A} \approx 0$ приводит ко вторичным связям

$$T \approx 0 \,, \tag{2.68}$$

для которых поля A являются лагранжевыми множителями.

Используя канонические скобки Пуассона

$$[X_a{}^b, P_{X\,c}{}^d]_{{}_P} = \delta_a^d \delta_c^b\,, \qquad [Z_a, P_Z^b]_{{}_P} = \delta_a^b\,, \qquad [\bar{Z}^a, \bar{P}_{Z\,b}]_{{}_P} = \delta_b^a\,, \tag{2.69}$$

мы находим скобки Пуассона связей второго рода (2.65)

$$[G^a, \bar{G}_b]_{{}_P} = -2i\delta_b^a\,. \tag{2.70}$$

Тогда мы вводим скобки Дирака

$$[A, B]_{{}_D} = [A, B]_{{}_P} + \tfrac{i}{2}[A, G^a]_{{}_P}[\bar{G}_a, B]_{{}_P} - \tfrac{i}{2}[A, \bar{G}_a]_{{}_P}[G^a, B]_{{}_P} \tag{2.71}$$

и рассматривем связи (2.65) в сильном смысле, исключая P_Z, $\bar{P}_Z$.

Оставшиеся переменные имеют следующие скобки Дирака

$$[X_a{}^b, P_{X\,c}{}^d]_{{}_D} = \delta_a^d \delta_c^b\,, \qquad [Z_a, \bar{Z}^b]_{{}_D} = -\tfrac{i}{2}\,\delta_a^b\,. \tag{2.72}$$

При этом, оставшиеся связи (2.67), образующие $(n \times n)$ эрмитову матрицу $T = T^+$, образуют алгебру $u(n)$ в отношении скобок Дирака

$$[T_a{}^b, T_c{}^d]_{{}_D} = i(\delta_a{}^d T_c{}^b - \delta_c{}^b T_a{}^d) \tag{2.73}$$

и генерируют U(n) калибровочные преобразования переменных $X_a{}^b$, $P_{X\,a}{}^b$, Z_a, $\bar{Z}^a$. Зафиксируем калибровку в отношении этих переменных.

В обозначениях $x_a \equiv X_a{}^a$, $p_a \equiv P_{X\,a}{}^a$ (здесь нет суммирования по a); $x_a{}^b \equiv X_a{}^b$, $p_a{}^b \equiv P_{X\,a}{}^b$ при $a \neq b$, связи (2.67) принимают вид $(a \neq b)$

$$T_a{}^b = i(x_a - x_b)p_a{}^b - i(p_a - p_b)x_a{}^b + i\sum_c (x_a{}^c p_c{}^b - p_a{}^c x_c{}^b) - 2Z_a\bar{Z}^b \approx 0\,, \tag{2.74}$$

$$T_a{}^a = i\sum_c (x_a{}^c p_c{}^a - p_a{}^c x_c{}^a) - 2Z_a\bar{Z}^a - c \approx 0\,. \tag{2.75}$$

Связи (2.74) генерируют преобразования $\delta x_a{}^b = [x_a{}^b, \epsilon_b{}^a T_b{}^a]_{{}_D} \sim i(x_a - x_b)\epsilon_b{}^a$ и при $x_a \neq x_b$ мы можем наложить калибровку

$$x_a{}^b \approx 0\,. \tag{2.76}$$

Вводя для связей (2.74), (2.76) скобки Дирака, мы исключаем ${x_a}^b = 0$, ${p_a}^b = -\frac{2i}{(x_a - x_b)} Z_a \bar{Z}^b$, то есть

$$P_{X\,a}{}^b = \Big(p_a {\delta_a}^b \quad \text{при} \quad a = b\,; \qquad -\frac{2i}{(x_a - x_b)} Z_a \bar{Z}^b \quad \text{при} \quad a \neq b \Big)\,. \tag{2.77}$$

Кроме того, в этой калибровке связь (2.75) принимает вид

$$-2Z_a \bar{Z}^a - c \approx 0 \qquad (\text{нет суммирования по} \quad a) \tag{2.78}$$

и генерирует локальные фазовые преобразования спинора Z_a. Накладывая калибровку

$$Z_a - \bar{Z}^a \approx 0\,, \tag{2.79}$$

мы полностью исключаем Z_a.

Используя (2.77) и (2.79), мы получаем следующее выражение для гамильтониана (2.66)

$$H = \tfrac{1}{4}\mathrm{tr}\,(P_X P_X) = \frac{1}{4}\left(\sum_a (p_a)^2 + \sum_{a \neq b} \frac{c^2}{(x_a - x_b)^2} \right), \tag{2.80}$$

который совпадает со стандартным гамильтонианом Калоджеро [43, 44].

Отметим, что модель Калоджеро является примером точно решаемой многочастичной системы и может быть получена гамильтоновой редукцией из матричной системы, описывающую корневую систему A_n [217]. Квантование модели Калоджеро анализировалось в исходной работе [43, 44], где были найдены волновая функция основного состояния и энергетический спектр. Волновые функции некоторых возбужденных состояний были найдены в [218]. Прогресс в нахождении физических волновых функций модели Калоджеро был сделан в [219], где было предложено использовать при квантовании операторы Данкла.

2.2. $\mathcal{N}{=}\,1$ и $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформные механики

Симметрия $\mathcal{N}{=}\,1$ суперконформной механики [50] описывается вещественной супералгеброй $osp(1|2)$ с генераторами $(\alpha, \beta = 1, 2)$

$$G^{(1)} = (Q_\alpha; T_{\alpha\beta})\ , \qquad (Q_\alpha)^\dagger = Q_\alpha\,. \qquad (T_{\alpha\beta})^\dagger = T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}\,, \tag{2.81}$$

ненулевыми (анти)коммутаторами которых являются (2.5) и

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\,T_{\alpha\beta}\,, \qquad [T_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q_{\beta)}\,. \tag{2.82}$$

Фермионные O$(2,1)$-спинорные суперзаряды $\mathcal{N}{=}\,1$ суперконформной алгебры Q_α включают в себя стандартный суперзаряд $Q = Q_1$ и генератор суперконформных бустов $S = Q_2$. Оператор Казимира второго порядка супергруппы OSp$\,(1|2)$ определяется следующим выражением

$$C_2^{(\mathcal{N}=1)} = T^2 + \tfrac{i}{4}\,Q_\alpha Q^\alpha\,. \tag{2.83}$$

$\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформная алгебра $su(1,1|1)\cong osp\,(2|2)$ [45, 46, 47, 50] образована генераторами

$$G^{(2)} = \left(Q_\alpha, \bar{Q}_\alpha; T_{\alpha\beta}, J, C\right)\,, \tag{2.84}$$

$$(Q_\alpha)^\dagger = \bar{Q}_\alpha\,, \qquad (T_{\alpha\beta})^\dagger = T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}\,, \qquad (J)^\dagger = J\,, \qquad (C)^\dagger = C\,, \tag{2.85}$$

ненулевые (анти)коммутаторы которых

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\,T_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\alpha\beta}J + i\epsilon_{\alpha\beta}C\,, \tag{2.86}$$

$$[T_{\alpha\beta}, Q_\gamma] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q_{\beta)}\,, \qquad [T_{\alpha\beta}, \bar{Q}_\gamma] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}\bar{Q}_{\beta)}\,, \tag{2.87}$$

$$[J, Q_\alpha] = Q_\alpha\,, \qquad [J, \bar{Q}_\alpha] = -\bar{Q}_\alpha\,. \tag{2.88}$$

Генераторы $T_{\alpha\beta}$ образуют алгебру $so(1,2)$ (2.5), тогда как J есть генератор O(2). Генератор C является центральным зарядом. Здесь мы использовали реализацию алгебры $osp(2|2)$ как в [47], с фермионными суперзарядами в виде комплексных O(2)-спиноров. В частности, стандартные суперзаряды $Q = Q_1$, $\bar{Q} = \bar{Q}_1$ и генераторы конформных супертрансляций $S = Q_2$, $\bar{S} = \bar{Q}_2$ комбинируются в один O$(2,1)$-дублетный суперзаряд Q_α.

Оператор Казимира второго порядка для супергруппы OSp$\,(2|2)$ дается следующим выражением

$$C_2^{(\mathcal{N}=2)} = T^2 + \tfrac{i}{4}\,[Q_\alpha, \bar{Q}^\alpha] - \tfrac{1}{4}\,J^2 - \tfrac{1}{4}\,\{J, C\}\,. \tag{2.89}$$

Унитарные неприводимые представления реализованы на собственных состояниях оператора C_2. Такие представления разлагаются в бесконечную башню представлений компактной супергруппы, включающую компактный генератор T_0 (2.2) конформной группы. Эта компактная подалгебра супералгебры $osp(2|2)$ образована генераторами

$$T_0\,, \quad J\,, \quad C\,, \quad \Gamma \equiv m^{1/2}S + im^{-1/2}Q\,, \quad \bar{\Gamma} \equiv m^{1/2}\bar{S} - im^{-1/2}\bar{Q}\,, \tag{2.90}$$

имещими следующие ненулевые (анти)коммутаторы

$$\{\Gamma, \bar{\Gamma}\} = 4\,T_0 - 2\,C - 2\,J\,, \tag{2.91}$$

$$[T_0, \Gamma] = \tfrac{1}{2}\,\Gamma\,, \quad [T_0, \bar{\Gamma}] = -\tfrac{1}{2}\,\bar{\Gamma}\,, \qquad [J, \Gamma] = \Gamma\,, \quad [J, \bar{\Gamma}] = -\bar{\Gamma}\,. \tag{2.92}$$

2.2.1. Одночастичная механика из нелинейной реализации

Рассмотрим построение моделей суперконформной механики в суперполевом подходе, определенном в Разделе 1.1. $\mathcal{N}{=}1$ суперпространство параметризовано суперкоординатами (t, θ), $\theta^2 = 0$, $(\overline{\theta}) = \theta$. Ковариантная производная равна $D = \partial_\theta + i\theta\partial_t$, $\{D, D\} = 2i\,\partial_t$. Координатами $\mathcal{N}{=}2$ суперпространства являются $(t, \theta, \bar{\theta})$, $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = 0$, $(\overline{\theta}) = \bar{\theta}$. $\mathcal{N}{=}2$ ковариантные спинорные производные определены в (1.5).

$\mathcal{N}{=}1$ суперконформная одночастичная модель [49, 50] описывается суперполевым действием

$$S^{(N=1)}_{n=1} = -i \int dt d\theta\, \dot{\Phi} D\Phi\,, \tag{2.93}$$

где $\Phi(t, \theta)$ является вещественным суперполем со следующим $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ компонентным составом вне массовой поверхности

$$\Phi(t, \theta) = x(t) + i\theta\psi(t)\,. \tag{2.94}$$

На компонентном уровне действие (2.93) генерирует свободные действия для бозона x и фермиона ψ, то есть, обеспечивает суперсимметризацию конформной механики АФФ с нулевым конформным потенциалом.

$\mathcal{N}{=}2$ суперконформная механика [45, 46] может быть описана вещественным $\mathcal{N}{=}2$ суперполем (см. (1.3))

$$\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) = x(t) + \theta\psi(t) - \bar{\theta}\bar{\psi}(t) + \theta\bar{\theta}y(t)\,, \tag{2.95}$$

описывающим $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ мультиплет. Суперконформное действие равно

$$S^{(N=2)}_{n=1} = \int dt d^2\theta \left[\bar{D}\Phi\, D\Phi - c\, \ln \Phi \right], \tag{2.96}$$

где суперпотенциал

$$W = c\, \ln \Phi, \tag{2.97}$$

генерирует конформный потенциал для бозонного компонентного поля: после исключения вспомогательного поля y действие (2.96) принимает следующий вид

$$S^{(N=2)}_{n=1} = \int dt \left[\dot{x}^2 - i \left(\dot{\bar{\psi}}\psi - \bar{\psi}\dot{\psi} \right) - \frac{c(c-4\bar{\psi}\psi)}{4x^2} \right], \tag{2.98}$$

которое является $\mathcal{N}{=}\,2$ суперсимметричным обобщением механики АФФ, рассмотренным впервые в [46] и в [45].

Подобно бозонному случаю, формулировка (2.96) имеет геометрическую интерпретацию в рамках метода нелинейных реализаций [47]. Рассмотрим экспоненциальную параметризацию фактор-пространства $\mathrm{SU}(1,1|1)/\mathrm{U}(1)$

$$G = e^{itH} e^{i(\theta Q - \bar{\theta}\bar{Q})} e^{izK} e^{i(\xi S - \bar{\xi}\bar{S})} e^{iuD}\,. \tag{2.99}$$

Параметры фактор-пространства, ассоциированные с генераторами K, S, $\bar{S}$, D, трактуются как голдстоуновские суперполя, $z = z(t,\theta,\bar{\theta})$, $\xi = \xi(t,\theta,\bar{\theta})$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t,\theta,\bar{\theta})$, $u = u(t,\theta,\bar{\theta})$. Генератор J соответствует подгруппе стабильности вакуума $\mathrm{U}(1)$. Накладывая условия обратного эффекта Хиггса на левоковариантные формы Маурера-Картана, мы исключаем часть голдстоуновских суперполей и получаем уравнения движения для оставшихся полей. Корректный набор таких условий был получен в [47]: они соответствуют занулению всех форм Маурера-Картана за исключением тех, которые ассоциированы с генераторами подалгебры (2.90). В результате этого выделяется соответствующее геодезическое подмногообразия, параметризованное фактор-параметрами τ, η, $\bar{\eta}$, соответствующими генераторам T_0, Γ, $\bar{\Gamma}$. После наложения связей на формы Маурера-Картана, включающие кинематические условия обратного эффекта Хиггса, в качестве единственного независимого суперполя остается дилатонное суперполе $u(t,\theta,\bar{\theta})$. Суперполе (2.95) выражается через дилатон посредством $\Phi = \exp(u/2)$.

Для системы (2.98) квантовые генераторы супералгебры Пуанкаре имеют вид

$$H = \frac{1}{4}\left[\hat{p}^2 + \left(\frac{dW}{d\hat{x}}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\,\frac{d^2W}{d\hat{x}^2}\left(\hat{\psi}\hat{\bar{\psi}} - \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi}\right), \tag{2.100}$$

$$Q = \hat{\psi}\left(\hat{p} - i\,\frac{dW}{d\hat{x}}\right), \qquad \bar{Q} = \hat{\bar{\psi}}\left(\hat{p} + i\,\frac{dW}{d\hat{x}}\right), \tag{2.101}$$

тогда как генераторы суперконформных бустов равны

$$S = -2\hat{\psi}\,\hat{x}\,, \qquad \bar{S} = -2\hat{\bar{\psi}}\,\hat{x}\,. \tag{2.102}$$

Здесь $W(\hat{x}) = c\ln\hat{x}$. Используя алгебру квантовых операторов $[\hat{x},\hat{p}] = i$, $\{\hat{\psi},\hat{\bar{\psi}}\} = \frac{1}{2}$, мы находим ненулевые антикоммутаторы нечетных генераторов (2.101) и (2.102):

$$\{Q,\bar{Q}\} = 2H\,, \qquad \{S,\bar{S}\} = 2K\,, \tag{2.103}$$

$$\{Q,\bar{S}\} = 2D + iJ + iC\,, \qquad \{\bar{Q},S\} = 2D - iJ - iC\,. \tag{2.104}$$

Здесь, генераторы

$$K = \hat{x}^2\,, \qquad D = -\tfrac{1}{4}\left(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\,\hat{x}\right) \tag{2.105}$$

вместе с H образуют алгебру $su(1,1)$, величина

$$J = \hat{\psi}\hat{\bar{\psi}} - \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} \tag{2.106}$$

является U(1) генератором и

$$C = \hat{x}\,\frac{dW}{d\hat{x}} = c \tag{2.107}$$

есть центральный заряд.

Удобной реализацией квантовых фермионных операторов является реализация в терминах матриц Паули,

$$\hat{\psi} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sigma_1 + i\sigma_2\right), \quad \hat{\bar{\psi}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sigma_1 - i\sigma_2\right), \quad \hat{\psi}\hat{\bar{\psi}} - \hat{\bar{\psi}}\hat{\psi} = \tfrac{1}{2}\,\sigma_3\,. \tag{2.108}$$

Мы видим, что в противоположность несуперсимметричному случаю, энергетический спектр в одночастичной $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной модели является двухкратно-вырожденным и квантовый гамильтониан (2.100) принимает следующий вид

$$H = \frac{1}{4}\left[\hat{p}^2 + \frac{c(c-\sigma_3)}{\hat{x}^2}\right]. \tag{2.109}$$

Поскольку второй член в скобках можно переписать как $l(l{+}1)/x^2$, где $l = \pm c$ для σ_3-компонент ∓ 1, напряженность $|c|$ была отожествлена в [50] с орбитальным угловым моментом частицы возле горизонта экстремальной черной дыры Рейснера-Нордстрёма.

Квантовый спектр (со спонтанно нарушенной суперконформной симметрией) можно найти аналогично бозонному случаю, на основании теоретико-групповых соображений, описанных в предыдущем разделе. Как отмечалось в [46], "наивное" применение "стандартной" схемы квантования к этой системе не дает желаемого результата. В самом деле, определяя волновую функцию Ψ_0 основного состояния посредством условий

$$Q\,\Psi_0 = 0\,, \qquad \bar{Q}\,\Psi_0 = 0\,, \tag{2.110}$$

которые приводят к матричному уравнению $\left(\partial_x - \dfrac{c\sigma_3}{x}\right)\Psi_0 = 0$, мы немедленно получаем, что двух-компонентная волновая функция Ψ_0 имеет следующий вид $\Psi_0 = \begin{pmatrix} A_+\, x^c \\ A_-\, x^{-c} \end{pmatrix}$, где $A_\pm$ являются некоторыми константами. Очевидно, ни одна из компонент этой волновой функции основного состояния не является нормируемой, хотя и состояния с ненулевой энергией описывается функциями Бесселя и являются нормируемыми (см. [42, 46]).

Для квантования $\mathcal{N}{=}\,2$ конформной механики без отмеченных выше недостатков основное состояние определяется вместо (2.110) следующими условиями [45, 46]

$$\Gamma\,\Psi_0 = 0\,, \qquad \bar{\Gamma}\,\Psi_0 = 0\,, \tag{2.111}$$

где суперзаряды Γ, $\bar{\Gamma}$, определенные в (2.90), образуют компактную подалгебру в супералгебре $osp(2|2)$ и имеют следующий явный вид (сравните (2.101))

$$m^{1/2}\Gamma = i\hat{\psi}\left(\hat{p} - i\,\frac{d\tilde{W}}{d\hat{x}}\right), \qquad m^{1/2}\bar{\Gamma} = -i\hat{\bar{\psi}}\left(\hat{p} + i\,\frac{d\tilde{W}}{d\hat{x}}\right), \tag{2.112}$$

где $\tilde{W} := W - mx^2 = c\ln x - mx^2$. Тогда уравнения (2.111) сводятся к условию

$$\left(\partial_x - \sigma_3\,\frac{d\tilde{W}}{d\hat{x}}\right)\Psi_0 = 0\,, \tag{2.113}$$

решение которого

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \Psi_0^{(+)} \\ \Psi_0^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_+ x^c e^{-mx^2} \\ A_- x^{-c} e^{mx^2} \end{pmatrix}.$$

Предполагая без потери общности положительность “массового” параметра m, мы можем рассматривать волновую функцию $\Psi_0^{(+)}$ как нормированную волновую функцию основного состояния, считая его бозонным состоянием [46]. Учитывая соотношение (2.91), мы заключаем, что $\left(T_0 - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}J\right)\Psi_0^{(+)} = 0$. Поскольку $C = c$ и $J = \frac{1}{2}$ на вакуумной волновой функции, вакуумное собственное значение конформного оператора T_0 равно $r_0 = \frac{1}{2}(c + \frac{1}{2})$. Отметим, что соотношения (2.111) могут быть проинтерпретированы как выражения, определяющие спонтанное нарушение полной суперконформной симметрии OSp(2|2) до компактной подгруппы SU(1|1) $\propto \left(\Gamma, \bar{\Gamma}, T_0 - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}J\right)$.

Полный спектр $\mathcal{N}$=2 модели, рассмотренный в этом подразделе, был описан в деталях в [45, 46]. Следует подчеркнуть, что выбор “правильной” спонтанно нарушеной фазы можна проинтерпретировать как переход к эффективной теории с переопределенными временным параметром и динамическими переменными [45], аналогично бозонной конформной механике, рассмотренной ранее. Переопределяя в действии (2.98) параметр эволюции и бозонные переменные как в (2.25) и делая дополнительное переопределение фермионных переменных $\psi(t) \to \tilde{\psi}(\tau) = \psi(t)$, мы получаем систему, которая на квантовом уровне описывается новым гамильтонианом

$$\tilde{H} = 2mT_0 = H + m^2 K = \frac{1}{4}\left[\hat{p}^2 + \frac{c(c-2J)}{\hat{x}^2}\right] + m^2\hat{x}^2 . \qquad (2.114)$$

Он совпадает с компактным оператором T_0 и, поэтому, имеет дискретный спектр.

Отметим, что на массовой поверхности $\mathcal{N}$= 2 суперконформная механика, ассоциированная с мультиплетом $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, имеет эквивалентное описание в терминах кирального мультиплета $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ [47].

2.2.2. Многочастичная механика

Модель Фридмана-Менде

Многочастичная система, обладающая $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной симметрией, получается из взаимодействия n вещественных суперполей Φ_a, $a = 1, 2, \ldots, n$ (2.95), описывающих n $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ мультиплетов. Суперполевое действие

$$S_n^{(N=2)} = \int dt d^2\theta \, \Big[\sum_{a=1}^{n} \bar{D}\Phi_a \, D\Phi_a - W(\Phi_a) \Big] \, , \tag{2.115}$$

где $W(\Phi_a)$ – определяющий симметрию модели суперпотенциал, производит компонентное действие

$$S_n^{(N=2)} = \int dt \, \left[\sum_{a=1}^{n} \Big(\dot{x}_a^2 - i\dot{\bar{\psi}}_a \psi_a + i\bar{\psi}_a \dot{\psi}_a - \tfrac{1}{4} \, \partial_a W \partial_a W \Big) + \sum_{a,b} \bar{\psi}_a \psi_b \partial_a \partial_b W \right] , \tag{2.116}$$

где $\partial_a := \partial/\partial x_a$. Действие (2.116) обладает явной $\mathcal{N}{=}\,2$ суперсимметрией Пуанкаре, фермионные суперзаряды которой

$$Q = \sum_a \psi_a \Big(p_a - i \, \partial_a W \Big), \qquad \bar{Q} = \sum_a \bar{\psi}_a \Big(p_a + i \, \partial_a W \Big). \tag{2.117}$$

Требование $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной симметрии накладывает сильные ограничения на суперпотенциал. Анализ преобразований суперконформных бустов $\delta'\Phi_a = -i(\eta\bar{\theta} + \bar{\eta}\theta) \, \Phi_a$, действующих на супермультиплеты $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ [47], с учетом инвариантности меры $\delta'(dt d^2\theta) = 0$ показывают, что действие (2.115) инвариантно только если суперпотенциал удовлетворяет условию

$$x_a \partial_a \, W(x) = C \, , \tag{2.118}$$

где C – некоторая константа. Как показано в [220], где были представлены выражения для генераторов $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной алгебры, константа C совпадает с центральным зарядом в общей $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной алгебре (2.103)-(2.104). Фермионные заряды, генерирующие суперконформные бусты, даются выражениями

$$S = tQ - 2 \sum_a \psi_a \, x_a \, , \qquad \bar{S} = t\bar{Q} - 2 \sum_a \bar{\psi}_a \, x_a \, . \tag{2.119}$$

Замыкание генераторов (2.117), (2.119) воспроизводит полную $\mathcal{N}\!=2$ суперконформную алгебру. Как показано в [220], в случае, когда квантовый гамильтониан содержит только бозон-фермионное взаимодействие без бозон-бозонного, суперпотенциал W определяется гармонической однородной функцией переменной x_a и центральный зараяд C удовлетворяет некоторому условию "квантования".

Важный частный случай суперполевого действия (2.115) соответствует суперпотенциалу вида [56]

$$W = c\sum_{a\neq b}\ln\left(\Phi_a - \Phi_b\right), \tag{2.120}$$

который является обобщением одночастичного суперпотенциала (2.97). В этом случае компонентное действие модели равно

$$S_n^{(N=2)} = \int dt\,\left[\sum_{a=1}^{n}\left(\dot{x}_a^2 - i\dot{\bar{\psi}}_a\psi_a + i\bar{\psi}_a\dot{\psi}_a\right) - \sum_{a\neq b}\frac{c^2 + 4c(\bar{\psi}_a - \bar{\psi}_b)(\psi_a - \psi_b)}{4(x_a - x_b)^2}\right]. \tag{2.121}$$

Действие (2.121) обеспечивает в точности $\mathcal{N}\!=2$ суперконформное обобщение модели Калоджеро, предложенное Фридманом и Менде [48]. Таким образом, в модели Фридмана-Менде напряженность c конформного потенциала связана с центральным зарядом C в $\mathcal{N}\!=2$ суперконформной алгебре условием

$$C = n(n{-}1)c\,, \tag{2.122}$$

которое прямо следует из условия (2.118).

Другой случай n-частичной системы с $\mathcal{N}\!=2$ суперконформной симметрией был получен в [60] посредством нетривиальных нелинейных преобразований из свободной $\mathcal{N}\!=2$ суперконформной n-частичной системы. Эта взаимодействующая система описывается суперпотенциалом

$$W(x) = \nu\,\ln\Big(\sum_a x_a x_a\Big)\,, \tag{2.123}$$

где ν – константа, и представляет $\mathcal{N}\!=2$ суперконформное обобщение движения центра масс n-частичной системы.

Калибровочные модели с $\mathcal{N}{=}\,1$ и $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной симметрией

Используя метод $d{=}1$ калибрования, применяемый ранее для получения системы Калоджеро, можно построить новые многочастичные системы с $\mathcal{N}{=}\,1$ и $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной симметрией, которые при $\mathcal{N}{=}\,2$ отличаются от систем Фридмана-Менде фермионным сектором. Данный метод суперконформных расширений модели Калоджеро был предложен в [146].

$\mathcal{N}{=}\,1$ **многочастичная механика.** Мы стартуем с модели, которая использует в своем описании эрмитовое $\mathcal{N}{=}\,1$ $(n{\times}n)$-матричное суперполе $\mathcal{X}_a{}^b(t,\theta)$, $(\mathcal{X})^+ = \mathcal{X}$, и $\mathcal{N}{=}\,1$ $\mathrm{U}(n)$-спинорное суперполе $\mathcal{Z}_a(t,\theta)$, $\bar{\mathcal{Z}}^a(t,\theta) = (\mathcal{Z}_a)^+$ $a,b = 1,\ldots,n$. Калибровочным суперполям в настоящем случае является анти-эрмитовое нечетное $(n{\times}n)$-матричное суперполе $\mathcal{A}_a{}^b(t,\theta)$, $\mathcal{A}_a{}^b \equiv -\overline{(\mathcal{A}_b{}^a)}$, $(\mathcal{A} \equiv -\mathcal{A}^+)$, которое есть спинорная связность, ковариантизирующая спинорную производную. Четное калибровочное суперполе $\mathcal{A}_t = -iD\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{A}$. является калибровочной связностью для ∂_t.

Калибровочно-инвариантное действие имеет следующий вид

$$S^{(N=1)} = -i\int dtd\theta \left[\mathrm{tr}\,(\nabla_t\mathcal{X}\,\mathcal{D}\mathcal{X}\,) + \tfrac{i}{2}\,(\bar{\mathcal{Z}}\,\mathcal{D}\mathcal{Z} - \mathcal{D}\bar{\mathcal{Z}}\,\mathcal{Z}) + c\,\mathrm{tr}\mathcal{A}\right]. \qquad (2.124)$$

Здесь ковариантные производные определены выражениями $\mathcal{D}\mathcal{X} = D\mathcal{X} + i[\mathcal{A},\mathcal{X}]$, $\nabla_t\mathcal{X} = \partial_t\mathcal{X} + i[\mathcal{A}_t,\mathcal{X}]$, $\mathcal{D}\mathcal{Z} = D\mathcal{Z} + i\mathcal{A}\mathcal{Z}$, $\mathcal{D}\bar{\mathcal{Z}} = D\bar{\mathcal{Z}} - i\bar{\mathcal{Z}}\mathcal{A}$. Будучи построенным только из калибровочно-ковариантных объектов, действие (2.124) является инвариантным относительно локальных U(n) преобразований

$$\mathcal{X}\,' = e^{i\tau}\,\mathcal{X}\,e^{-i\tau}\,, \qquad \mathcal{Z}' = e^{i\tau}\mathcal{Z}\,, \quad \bar{\mathcal{Z}}' = \bar{\mathcal{Z}}\,e^{-i\tau}\,, \qquad (2.125)$$

$$\mathcal{A}' = e^{i\tau}\,\mathcal{A}\,e^{-i\tau} - i\,e^{i\tau}(De^{-i\tau})\,, \qquad \mathcal{A}_t' = e^{i\tau}\,\mathcal{A}_t\,e^{-i\tau} - i\,e^{i\tau}(\partial_t e^{-i\tau})\,, \quad (2.126)$$

где $\tau_a{}^b(t,\theta) \in u(n)$ является эрмитовым $(n{\times}n)$-матричным параметром, $(\tau)^+ = \tau$. Действие (2.124) обладает также суперконформной инвариантностью. Используя выражения вариаций координат при суперконформных бустах $\delta' t = -i\,\eta\theta t$, $\delta'\theta = \eta t$, $\delta'(dtd\theta) = (dtd\theta)(-i\,\eta\theta)$, $\delta' D = i\,\eta\theta\,D$ и преобразования суперполей $\delta'\mathcal{X} = -i\,\eta\theta\,\mathcal{X}$, $\delta'\mathcal{A} = i\,\eta\theta\,\mathcal{A}$, $\delta'\mathcal{Z} = 0$, мы находим, что вариация действия (2.124) равна полной производной.

Компонентный состав $\mathcal{N}{=}\,1$ суперполей следующий

$$\mathcal{X} = X + i\theta\Psi\,, \qquad \mathcal{Z} = Z + \theta\Upsilon\,, \quad \bar{\mathcal{Z}} = \bar{Z} - \theta\bar{\Upsilon}\,, \qquad \mathcal{A} = i(\Phi + \theta A)\,. \quad (2.127)$$

Благодаря калибровочной инвариантности (2.126) мы можем выбрать калибровку Весса-Зумино

$$\mathcal{A} = i\theta A(t)\,. \qquad (2.128)$$

Подставляя это выражение в действие (2.124), интегрируя по θ ($\int d\theta\,\theta = 1$) и исключая вспомогательные поля Υ и $\bar{\Upsilon}$ посредством их уравнений движения, $\Upsilon = 0$ and $\bar{\Upsilon} = 0$, мы получаем физическое компонентное действие

$$S^{(N=1)}_{WZ} = \int dt \left[\mathrm{tr}\,(\nabla X \nabla X) - i\,\mathrm{tr}\,(\Psi\nabla\Psi) + \tfrac{i}{2}\,(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z}Z) + c\,\mathrm{tr}A \right], \quad (2.129)$$

где $\nabla\Psi = \Psi + i[A,\Psi]$ является $\mathrm{U}(n)$-ковариантной производной матричного грассманового поля Ψ. Первый, третий и четвертый члены в (2.129) включают только бозонные поля и в точности воспроизводят действие (2.56), которое является стартовой точкой в получении модели Калоджеро посредством подхода d=1 калибрования. Второй член с фермионными полями обеспечивает $\mathcal{N}{=}\,1$ суперсимметризацию модели Калоджеро. Отметим, что система вовлекает n^2 (вещественных) фермионных степеней свободы, описываемых матричным фермионным полем $\Psi(t)$. Бозонные и фермионные взаимодействуют через калибровочное поле $A(t)$.

На равных основаниях, мы можем также анализировать модель (2.124) в суперсимметричной калибровке. Используя калибровочные τ преобразования (2.125), мы можем наложить (частичную) фиксацию калибровки

$$\mathcal{X}_a{}^b = 0\,, \qquad a \neq b\,. \qquad (2.130)$$

В этой калибровке действие (2.124) принимает вид

$$\begin{aligned} S^{(N=1)} \; = -i\textstyle\int dt d\theta \Big[& \sum_a \dot{\mathcal{X}}_a D\mathcal{X}_a + \tfrac{i}{2} \sum_a (\bar{\mathcal{Z}}^a\, D\mathcal{Z}_a - D\bar{\mathcal{Z}}^a\, \mathcal{Z}_a) \qquad (2.131) \\ & -i\sum_{a,b}(\mathcal{X}_a - \mathcal{X}_b)^2 D\mathcal{A}_a{}^b\mathcal{A}_b{}^a - \sum_{a,b}(\mathcal{X}_a - \mathcal{X}_b)^2(\mathcal{A}\mathcal{A})_a{}^b\mathcal{A}_b{}^a \\ & +\sum_{a,b}\bar{\mathcal{Z}}^a\mathcal{A}_a{}^b\mathcal{Z}_b + c\sum_a\mathcal{A}_a{}^a \Big]\,. \end{aligned}$$

Отметим, что при $n{=}1$ потенциальный член не возникает в компонентном действии и действие (2.131) совпадает с действием $S^{(N=1)}_{n=1} = -i\int dtd\theta\, \dot{\mathcal{X}}D\mathcal{X}$ для свободного вещественного $\mathcal{N}{=}\,1$ супермультиплета. Первый нетривиальный случай возникает при $n{=}2$. В этом случае, после наложения калибровочных условий

$$\mathcal{Z}_1 = \bar{\mathcal{Z}}^1\,, \qquad \mathcal{Z}_2 = \bar{\mathcal{Z}}^2 \tag{2.132}$$

для остаточных калибровочных симметрий, исключения вспомогательных полей $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ и введения суперполей

$$\mathcal{X} \equiv \mathcal{X}_1 - \mathcal{X}_2\,, \quad \mathcal{Y} \equiv \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2\,, \quad \mathcal{B} \equiv \mathcal{X}\,({\mathcal{A}_1}^2 + {\mathcal{A}_2}^1)\,, \quad \mathcal{C} \equiv i\mathcal{X}\,({\mathcal{A}_1}^2 - {\mathcal{A}_2}^1)\,,$$

действие (2.131) принимает вид

$$S^{(N=1)}_{n=2} = -i\int dtd\theta \left[\tfrac{1}{2}\dot{\mathcal{Y}}D\mathcal{Y} - \tfrac{i}{2}\mathcal{C}D\mathcal{C} + \tfrac{1}{2}\dot{\mathcal{X}}D\mathcal{X} - \tfrac{i}{2}\mathcal{B}D\mathcal{B} - c\,\epsilon_1\epsilon_2\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{X}} \right]. \tag{2.133}$$

Константы $\epsilon_1 = \pm 1$, $\epsilon_2 = \pm 1$ возникают из связи $\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 = -\frac{c\,\epsilon_1\epsilon_2}{2}$, которая следует из уравнений движения для $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$. Суперполя $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются бозонными, тогда как $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – фермионные. Действие (2.133) описывает два свободных $\mathcal{N}{=}\,1$ мультиплета $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}$ и два взаимодействующих друг с другом $\mathcal{N}{=}\,1$ мультиплета $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$. В действительности, система (2.133) является $\mathcal{N}{=}\,1$ суперполевой формой $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформной механики, основанной на $\mathcal{N}{=}\,2$ мультиплете $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$, дополненной действием свободного мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$, описывающим центр масс двухчастичной модели Калоджеро. Скрытая $\mathcal{N}{=}\,1$ суперсимметрия, дополняющую явную суперсимметрию до $\mathcal{N}{=}\,2$ и сохраняющая инвариантным действие (2.133), реализована преобразованиями $\delta\mathcal{Y} = \varepsilon\,\mathcal{C}$, $\delta\mathcal{C} = i\varepsilon\,\dot{\mathcal{Y}}$, $\delta\mathcal{X} = \varepsilon\,\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{B} = i\varepsilon\,\dot{\mathcal{X}}$, где $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ является грассмановым параметром преобразования. Действие (2.133) также инвариантно относительно $\mathcal{N}{=}\,1$ суперконформных преобразований координат $\delta t = a(t) + i\theta\chi(t)$, $\delta\theta = \chi(t) + \frac{1}{2}\theta\dot{a}(t)$, $(\partial_t)^3 a = (\partial_t)^2\chi = 0$, $\delta(dtd\theta) = (dtd\theta)$ и суперполей $\delta D = -A\,D\,, A$, $\delta\mathcal{X} = A\,\mathcal{X}$, $\delta\mathcal{Y} = A\,\mathcal{Y}$, $\delta\mathcal{C} = \delta\mathcal{B} = 0$, где $A = \frac{1}{2}\dot{a} + i\theta\dot{\chi}$. Замыкание их со скрытой $\mathcal{N}{=}\,1$ суперсимметрией производит $\mathcal{N}{=}\,2, d{=}1$ суперконформную симметрию.

Такая же процедура в случае n=3 производит действие

$$\begin{aligned}
S^{(N=1)}_{n=3} \;=\; & -i\int dtd\theta\left[\sum_{a=1}^{3}\dot{\mathcal{X}}_a D\mathcal{X}_a - \frac{i}{2}\sum_{a=1}^{3}\left(\mathcal{B}_a D\mathcal{B}_a + \mathcal{C}_a D\mathcal{C}_a\right)\right. \qquad (2.134)\\
& +\frac{i}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_2}+\frac{1}{\mathcal{X}_2-\mathcal{X}_3}+\frac{1}{\mathcal{X}_3-\mathcal{X}_1}\right)\times\\
& \qquad\times\left(\mathcal{C}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3+\mathcal{B}_1\mathcal{C}_2\mathcal{B}_3-\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{C}_3+\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3\right)\\
& -c\,\frac{\mathcal{B}_1}{(\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_2)}\epsilon_1\epsilon_2\left[1-\frac{i}{2c}\left(\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2+\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3\right)-\frac{1}{4c^2}(\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2)(\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3)\right]\\
& -c\,\frac{\mathcal{B}_2}{(\mathcal{X}_2-\mathcal{X}_3)}\epsilon_2\epsilon_3\left[1+\frac{i}{2c}\left(\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1+\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3\right)-\frac{1}{4c^2}(\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1)(\mathcal{B}_3\mathcal{C}_3)\right]\\
& \left.-c\,\frac{\mathcal{B}_3}{(\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_3)}\epsilon_1\epsilon_3\left[1-\frac{i}{2c}\left(\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1-\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2\right)+\frac{1}{4c^2}(\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1)(\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2)\right]\right],
\end{aligned}$$

где $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_2)\left(\mathcal{A}_1^2+\mathcal{A}_2^1\right)$, $\mathcal{B}_2 = (\mathcal{X}_2-\mathcal{X}_3)\left(\mathcal{A}_2^3+\mathcal{A}_3^2\right)$, $\mathcal{B}_3 = (\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_3)\left(\mathcal{A}_1^3+\mathcal{A}_3^1\right)$ и $\mathcal{C}_1 = i(\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_2)\left(\mathcal{A}_1^2-\mathcal{A}_2^1\right)$, $\mathcal{C}_2 = i(\mathcal{X}_2-\mathcal{X}_3)\left(\mathcal{A}_2^3-\mathcal{A}_3^2\right)$, $\mathcal{C}_3 = i(\mathcal{X}_1-\mathcal{X}_3)\left(\mathcal{A}_1^3-\mathcal{A}_3^1\right)$. В отличие от двухчастичного ($n = 2$) случая, действие (2.134) описывает новую $\mathcal{N}{=}1$ суперконформно-инвариантную систему, которая не имеет четкой связи с известными $\mathcal{N}{=}2$ или $\mathcal{N}{=}3$ суперконформно-инвариантными системами, хотя и в пределе нулевых фермионных полей оно производит стандартную 3-частичную модель Калоджеро для полей $x_a = \mathcal{X}_a|_{\theta=0}$.

$\mathcal{N}{=}2$ **суперсимметричное расширение.** Калибровочная матричная формулировка $\mathcal{N}{=}2$ суперсимметричного расширения модели Калоджеро описывается эрмитовым $(n\times n)$-матричным суперполем $\mathcal{X}_a{}^b(t,\theta,\bar\theta)$, $(\mathcal{X})^+ = \mathcal{X}$, $a,b = 1,\ldots,n$, киральным U(n)-спинорным суперполем $\mathcal{Z}_a(t_{\scriptscriptstyle R},\theta)$, $\bar{\mathcal{Z}}^a(t_{\scriptscriptstyle L},\bar\theta) = (\mathcal{Z}_a)^+$, $t_{\scriptscriptstyle L,R} = t\mp i\theta\bar\theta$, $a,b = 1,\ldots,n$, подчиненным условию киральности $D\mathcal{Z}_a = 0$, $\bar D\bar{\mathcal{Z}}^a = 0$, и матричным калибровочным суперполем. Подобно $\mathcal{N}{=}2$, d=4 суперсимметричным теориям, они могут быть описаны или комплексными $(n\times n)$ матричными “мостовыми” суперполями $b_a{}^b(t,\theta,\bar\theta)$, $\bar b_a{}^b \equiv \overline{(b_b{}^a)}$, $(\bar b \equiv b^+)$, или препотенциалом V, связанными друг с другом посредством $e^{2V} = e^{-i\bar b}e^{ib}$. Ковариантные производные суперполя $\mathcal{X}$ равны $\mathcal{D}\mathcal{X} = D\mathcal{X}-i[\mathcal{A},\mathcal{X}]$, $\bar{\mathcal{D}}\mathcal{X} = \bar D\mathcal{X}-i[\bar{\mathcal{A}},\mathcal{X}]$, где потенциалы построены из моста стандартным способом $\mathcal{A} = -i\,e^{i\bar b}(De^{-i\bar b})$, $\bar{\mathcal{A}} = -i\,e^{ib}(\bar De^{-ib})$. Действие $\mathcal{N}{=}2$

суперсимметричного расширения модели Калоджеро имеет вид

$$S^{(N=2)}_{sC} = \int dt d^2\theta \left[\mathrm{tr}\left(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{X}\,\mathcal{D}\mathcal{X}\,\right) + \tfrac{1}{2}\,\bar{\mathcal{Z}}\, e^{2V}\mathcal{Z} - c\,\mathrm{tr}V \right]. \tag{2.135}$$

Оно инвариантно относительно локальных U(n) преобразований

$$e^{ib'} = e^{i\tau}\, e^{ib} e^{-i\lambda}\,, \qquad e^{i\bar{b}'} = e^{i\tau}\, e^{i\bar{b}} e^{-i\bar{\lambda}}\,, \qquad e^{2V'} = e^{i\bar{\lambda}}\, e^{2V} e^{-i\lambda}\,, \tag{2.136}$$

$$\mathcal{X}\,' = e^{i\tau}\,\mathcal{X}\,e^{-i\tau}\,, \qquad \mathcal{Z}' = e^{i\lambda}\mathcal{Z}\,, \qquad \bar{\mathcal{Z}}' = \bar{\mathcal{Z}}\,e^{-i\bar{\lambda}}\,, \tag{2.137}$$

где τ является эрмитовым $(n\times n)$-матричным параметром, $\tau_a{}^b(t,\theta,\bar{\theta}) \in u(n)$, $(\tau)^+ = \tau$, а параметры $(n \times n)$ комплексной матрицы $\lambda = (\lambda_a{}^b)$ являются (анти)киральными суперполями $\lambda(t_{\scriptscriptstyle L},\theta) \in u(n)$, $\bar{\lambda}(t_{\scriptscriptstyle R},\theta) = (\lambda)^+ \in u(n)$.

Действие (2.135) инвариантно также относительно глобальных преобразований, образующих $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконфомную группу SU(1,1|1): преобразования $\mathcal{N}{=}\,2$ суперпространственных координат при суперконформных бустах из SU(1,1|1) [47] имеют вид $\delta' t = -i(\eta\bar{\theta} + \bar{\eta}\theta)t$, $\delta'\theta = -\eta(t - i\theta\bar{\theta})$, $\delta'\bar{\theta} = -\eta(t + i\theta\bar{\theta})$, $\delta'(dtd^2\theta) = 0$, тогда как преобразование матричных суперполей – $\delta'\mathcal{X} = -i(\eta\bar{\theta} + \bar{\eta}\theta)\,\mathcal{X}$, $\delta'\mathcal{Z} = 0$, $\delta' b = 0$, $\delta' V = 0$.

Аналогично $\mathcal{N}{=}\,2$ $d{=}4$ суперсимметричным теориям, можно остаться только с λ-ковариантными объектами переходом к новому эрмитовому $(n \times n)$-матричному суперполю

$$\tilde{\mathcal{X}} = e^{-ib}\,\mathcal{X}\,e^{i\bar{b}}\,, \qquad \mathcal{X}\,' = e^{i\lambda}\,\mathcal{X}\,e^{-i\bar{\lambda}}\,, \tag{2.138}$$

В результате этого, действие (2.135) принимает более экономный вид

$$S^{(N=2)}_{sC} = \int dt d^2\theta \left[\mathrm{tr}\left(\bar{\mathcal{D}}\tilde{\mathcal{X}}\,e^{2V}\mathcal{D}\tilde{\mathcal{X}}\,e^{2V}\right) + \tfrac{1}{2}\,\bar{\mathcal{Z}}\,e^{2V}\mathcal{Z} - c\,\mathrm{tr}V \right], \tag{2.139}$$

где ковариантные производные суперполя $\tilde{\mathcal{X}}$ равны $\mathcal{D}\tilde{\mathcal{X}} = D\tilde{\mathcal{X}} + e^{-2V}(De^{2V})\,\tilde{\mathcal{X}}$, $\bar{\mathcal{D}}\tilde{\mathcal{X}} = \bar{D}\tilde{\mathcal{X}} - \tilde{\mathcal{X}}\,e^{2V}(\bar{D}e^{-2V})$.

В абелевом ($n{=}\,1$) случае, подобно $\mathcal{N}{=}\,0,1$ случаям, действие (2.139) описывает свободный $\mathcal{N}{=}\,2$ вещественный супермультиплет и нетривиальные суперконформные модели начинаются с $n \geq 2$. Компонентные разложения используемых суперполей имеют вид

$$\tilde{\mathcal{X}} = X + \theta\Psi - \bar{\theta}\bar{\Psi} + \theta\bar{\theta}Y\,, \qquad V = v + \theta\Phi - \bar{\theta}\bar{\Phi} + \theta\bar{\theta}A\,, \tag{2.140}$$

$$\mathcal{Z} = Z + 2i\theta\Upsilon + i\theta\bar\theta\dot{Z}\,, \qquad \bar{\mathcal{Z}} = \bar{Z} + 2i\bar\theta\bar\Upsilon - i\theta\bar\theta\dot{\bar{Z}}\,, \tag{2.141}$$

где ${\Psi_a}^b$, ${\bar\Psi_a}^b = (\overline{{\Psi_b}^a})$, ${\Phi_a}^b$, ${\bar\Phi_a}^b = (\overline{{\Phi_b}^a})$, и Υ_a, $\bar\Upsilon^a = (\overline{\Upsilon_a})$, – фермионные компонентные поля. Накладывая калибровку Весса-Зумино

$$V(t,\theta,\bar\theta) = \theta\bar\theta A(t) \tag{2.142}$$

и исключая вспомогательные поля Υ, $\bar\Upsilon$ с помощью их уравнений движения, мы находим, что компонентное действие (2.139) имеет вид ($\int d^2\theta\,(\theta\bar\theta) = 1$)

$$S^{WZ}_{sC} = \int dt \left[\mathrm{Tr}\Big(\nabla X \nabla X\Big) + \tfrac{i}{2}\,(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z} Z) - c\,\mathrm{tr} A \,+\, i\,\mathrm{tr}\Big(\bar\Psi\nabla\Psi - \nabla\bar\Psi\Psi\Big) \right]. \tag{2.143}$$

Ковариантные производные ∇X и ∇Z определены в (2.57), тогда как $\nabla\Psi = \dot\Psi + i[\Psi, A]\,$, $\nabla\bar\Psi = \dot{\bar\Psi} + i[\bar\Psi, A]\,$. Мы видим, что бозонная часть модели (2.143) в точности совпадает с системой Калоджеро (2.56).

Действие (2.143) инвариантно относительно остаточных локальных $\mathrm{U}(n)$-преобразований (2.59) и

$$\Psi \to g\Psi g^+\,, \qquad \bar\Psi \to g\bar\Psi g^+\,. \tag{2.144}$$

Как и в чисто бозонном случае, эта $\mathrm{U}(n)$-инвариантность исключает недиагональные поля X_a^b, $a{\neq}b$, и все спинорные поля Z_a. Таким образом, вещественными физическими полями в рассматриваемом $\mathcal{N}{=}\,2$ суперсимметричном обобщении системы Калоджеро являются n бозонов $x_a = X_a^a$ и $2n^2$ фермионов Ψ_a^b. Эти поля представляют компонентный состав на массовой поверхности n мультиплетов $(\mathbf{1{,}2{,}1})$ и $n^2{-}n$ мультиплетов $(\mathbf{0{,}2{,}2})$, сгенерированных исходными n^2 мультиплетами $(\mathbf{1{,}2{,}1})$ с помощью процедуры калибрования [72]. Мы можем изобразить эту мультиплетную структуру посредством следующей схемы:

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\mathcal{X}_a^a = (X_a^a, \Psi_a^a)}_{(\mathbf{1,2,1})\,\text{мультиплеты}} & & \underbrace{\mathcal{X}_a^b = (X_a^b, \Psi_a^b),\,{\scriptstyle a\neq b}}_{(\mathbf{1,2,1})\,\text{мультиплеты}} \\
\Downarrow & \text{калибрование} & \Downarrow \\
\underbrace{\mathcal{X}_a^a = (X_a^a, \Psi_a^a)}_{(\mathbf{1,2,1})\,\text{мультиплеты}} & \text{взаимодействующие} & \underbrace{\Omega_a^b = (\Psi_a^b, B_a^b),\,{\scriptstyle a\neq b}}_{(\mathbf{0,2,2})\,\text{мультиплеты}}\,.
\end{array}$$

Здесь, бозонные поля B_a^b являются вспомогательными компонентами мультиплетов (**0,2,2**). Таким образом, мы получаем новое $\mathcal{N}{=}2$ расширение n-частичной модели Калоджеро с n бозонами и $2n^2$ фермионами, в отличие от стандартной $\mathcal{N}{=}2$ системы супер-Клоджеро Фридмана и Менде, использующей только $2n$ фермионов [48].

Накладывая условия фиксации калибровки и исключая вспомогательные поля $A_a{}^b$, мы получаем действие рассматриваемой многочастичной модели (2.143) в терминах только физических переменных

$$S_{sC}^{(N=2)} = \int dt \Big[\sum_a \dot{x}_a \dot{x}_a + i\,(\bar{\Psi}_a{}^b \dot{\Psi}_b{}^a - \dot{\bar{\Psi}}_a{}^b \Psi_b{}^a) - H \Big] , \tag{2.145}$$

в котором гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{4}\sum_a (p_a)^2 + \sum_{a\neq b} \frac{4}{(x_a - x_b)^2}\Big(Z_a \bar{Z}^a Z_b \bar{Z}^b + 2\bar{Z}^a \{\Psi,\bar{\Psi}\}_a{}^b Z_b + \{\Psi,\bar{\Psi}\}_a{}^b \{\Psi,\bar{\Psi}\}_b{}^a \Big)$$

и переменные Z_a, которые являются вещественными после фиксации калибровки, $\bar{Z}^a = Z_a$, и определяются из уравнений движения для диагональных компонент матричного поля $A_a{}^b$

$$(Z_a)^2 = c - R_a \, , \tag{2.146}$$

$$R_a \equiv \{\Psi,\bar{\Psi}\}_a{}^a = \sum_b (\Psi_a{}^b \bar{\Psi}_b{}^a + \bar{\Psi}_a{}^b \Psi_b{}^a) \quad \text{(нет суммирования по } a\text{)}. \tag{2.147}$$

Решения уравнений (2.146) суть

$$Z_a = \epsilon_a \sqrt{c} \sum_{k=0}^{2(n-1)} \frac{\alpha_k}{c^k} (R_a)^k \, , \tag{2.148}$$

где $\epsilon_a = \pm 1$, независимо для каждого a, и α_k являются некоторыми константами. Первые константы из этого множества равны $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\alpha_3 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{5}{8}$. Рассмотрим в качестве примера случай $n = 2$. В этом случае действие (2.145) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} S_{sC}^{(n=2)} = \int dt \Big\{ & \dot{x}_0 \dot{x}_0 + i\,(\bar{\psi}_0 \dot{\psi}_0 - \dot{\bar{\psi}}_0 \psi_0) + i\,(\bar{\chi}\dot{\chi} - \dot{\bar{\chi}}\chi) \\ & + \dot{\rho}\dot{\rho} + i\,(\bar{\psi}\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) + i\,(\bar{\varphi}\dot{\varphi} - \dot{\bar{\varphi}}\varphi) \\ & - \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{c^2}{4} + c\epsilon_1\epsilon_2(\psi\bar{\varphi} + \varphi\bar{\psi}) + (\psi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\varphi + \bar{\chi}\chi)^2 \right] \Big\} , \end{aligned} \tag{2.149}$$

где мы использовали обозначения $x_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x_1 + x_2)$, $\rho \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x_1 - x_2)$, $\psi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Psi_1{}^1 + \Psi_2{}^2)$, $\psi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Psi_1{}^1 - \Psi_2{}^2)$, $\chi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Psi_1{}^2 + \Psi_2{}^1)$, $\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Psi_1{}^2 - \Psi_2{}^1)$. После введения новых фермионных полей посредством $\phi_0 \equiv \chi\Big(1 + \frac{1}{2m}\,(\psi\bar\varphi - \varphi\bar\psi) + \frac{1}{4m^2}\,\psi\bar\psi\varphi\bar\varphi\Big)$, $\phi_1 \equiv \psi + \frac{1}{2m}\,(\bar\chi\chi)\,\varphi$, $\phi_2 \equiv \bar\varphi - \frac{1}{2m}\,(\bar\chi\chi)\,\bar\psi$, где $m = -\frac{c\epsilon_1\epsilon_2}{2}$, действие (2.149) принимает вид

$$\begin{aligned} S_{sC}^{(n=2)} = \int dt \Bigg\{ & \dot x_0 \dot x_0 + i\,(\bar\psi_0\dot\psi_0 - \dot{\bar\psi}_0\psi_0) + i\,(\bar\phi_0\dot\phi_0 - \dot{\bar\phi}_0\phi_0) \\ & + \dot\rho\dot\rho + i\,(\bar\phi_1\dot\phi_1 - \dot{\bar\phi}_1\phi_1) + i\,(\bar\phi_2\dot\phi_2 - \dot{\bar\phi}_2\phi_2) \\ & - \frac{1}{\rho^2}\Bigg[m^2 - 2m\phi_1\phi_2 + 2m\bar\phi_1\bar\phi_2 + (\bar\phi_1\phi_1 + \bar\phi_2\phi_2)^2\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned} \qquad (2.150)$$

Это действие является суммой действия свободного $\mathcal{N}{=}\,4$ (**1,4,3**) супермультиплета Ω с физическими компонентами $(x_0;\ \psi_0,\ \phi_0)$ и действия $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной механики [47] для $\mathcal{N}{=}\,4$ (**1,4,3**) супермультиплета Y с физическим составом $(\rho;\ \phi_1,\ \phi_2)$. Действие (2.150) может быть получено из следующего $\mathcal{N}{=}\,4$ суперполевого действия

$$S_{sC}^{(n=2)} = -\int dt d^4\theta\,\Big(\tfrac{1}{2}\,\Omega^2 + Y\ln Y\Big)\,. \qquad (2.151)$$

Это появление скрытой $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной симметрии не возникает, правда, в $\mathcal{N}{=}\,2$ моделях с $n{>}2$.

Рассмотренные в этом разделе $\mathcal{N}{=}\,1$ и $\mathcal{N}{=}\,2$ суперрасширения конформной модели Калоджеро [146]) являются новыми и требуют более детального анализа, включая изучение их возможной интегрируемости. В отличие от модели Фридмана и Менде, данные суперрасширения системы Калоджеро содержат неминимальный набор фермионных полей, следующий из процедуры суперсимметричного калибрования. Остается также открытым вопрос: можно ли каким-то способом редуцировать число фермионов – или посредством наложения некоторых дополнительных ковариантных условий на исходные суперполя или посредством расширения калибровочной инвариантности.

2.3. $\mathcal{N}=4$ суперконформная механика

Общая $\mathcal{N}=4$, d=1 суперконформная алгебра $D(2,1;\alpha)$ [221, 205] образована генераторами

$$G^{(4)} = (Q_{\alpha ii'}; T_{\alpha\beta}, J_{ij}, I_{i'j'})\,, \tag{2.152}$$

удовлетворяющими следующим (анти)коммутационным соотношениям

$$\{Q_{\alpha ii'}, Q_{\beta jj'}\} = 2\Big(\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}T_{\alpha\beta} + \alpha\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{i'j'}J_{ij} - (1{+}\alpha)\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}I_{i'j'}\Big)\,, \tag{2.153}$$

$$[J_{ij}, J_{kl}] = i\left(\epsilon_{ik}J_{jl} + \epsilon_{jl}J_{ik}\right)\,, \qquad [I_{i'j'}, I_{k'l'}] = i\big(\epsilon_{i'k'}I_{j'l'} + \epsilon_{j'l'}I_{i'k'}\big)\,, \tag{2.154}$$

$$\begin{gathered}[T_{\alpha\beta}, Q_{\gamma ii'}] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q_{\beta)ii'}, \\ [J_{ij}, Q_{\alpha ki'}] = -i\,\epsilon_{k(i}Q_{\alpha j)i'}, \qquad [I_{i'j'}, Q_{\alpha ik'}] = -i\,\epsilon_{k'(i'}Q_{\alpha ij')},\end{gathered} \tag{2.155}$$

остальные коммутаторы равны нулю. Генераторы $D(2,1;\alpha)$ удовлетворяют условиям эрмитовости

$$(Q_{\alpha ii'})^\dagger = \epsilon^{ij}\epsilon^{i'j'}Q_{\alpha jj'}\,, \qquad (J_{ij})^\dagger = \epsilon^{ik}\epsilon^{jl}J_{kl}\,, \qquad (I_{i'j'})^\dagger = \epsilon^{i'k'}\epsilon^{j'l'}I_{k'l'}\,. \tag{2.156}$$

Генераторы $T_{\alpha\beta}$ образуют алгебру $o(2,1)$ (2.5), тогда как J_{ij} и $I_{i'j'}$ – взаимно-коммутирующие алгебры $o(3)$, образующие вместе алгебру $o(4)$. Индексы $\alpha,\beta,\gamma = 1,2$ являются $o(2,1)$ спинорными индексами и $i,j,k = 1,2$; $i',j',k' = 1,2$ есть дублетные индексы двух алгебр $o(3)$. Всюду мы принимаем, что $\epsilon_{12} = \epsilon^{21} = 1$. Фермионные $o(2,1)$ спинорные суперзаряды $Q_{\alpha ii'}$ объединяют в себе стандартные d=1 суперзаряды $Q_{ii'} = Q_{1ii'}$ и генераторы суперконформных бустов $S_{ii'} = Q_{2ii'}$. В комплексных обозначениях, когда только одна $O(3)$ симметрия является явной, суперзаряды записываются как $Q^{i1'} = -Q^i$, $Q^{i2'} = -\bar{Q}^i$, $(Q^i)^\dagger = \bar{Q}_i$ и $S^{i1'} = S^i$, $S^{i2'} = \bar{S}^i$, $(S^i)^\dagger = \bar{S}_i$. Супералгебра $D(2,1;\alpha)$, параметризованная вещественным параметром α, включает в себя следующие $\mathcal{N}=4$ суперконформные алгебры:

$$\begin{aligned} &\alpha=0, \quad \alpha=-1 &: \qquad & D(2,1;\alpha) \cong su(1,1|2) \Supset su(2)\,, \\ &\alpha=1, \quad \alpha=-2 &: \qquad & D(2,1;\alpha) \cong osp(4^*|\,2)\,, \\ &\alpha=-1/2 &: \qquad & D(2,1;\alpha) \cong osp(4|\,2)\,. \end{aligned} \tag{2.157}$$

Дискретное преобразование $\alpha \leftrightarrow -(1{+}\alpha)$ меняют роли двух алгебр $su(2)$, представленных генераторами J_{ij} и $I_{i'j'}$. Дискретное преобразование $\alpha \leftrightarrow$

α^{-1} обменивает генераторы $T_{\alpha\beta}$ некомпактной алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ и генераторы J_{ij} компактной алгебры of $su(2)$, поэтому такая замена плохо определена в случае вещественной $D(2,1;\alpha)$ супералгебры, которую мы обсуждаем.

В вырожденных случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$ одна из алгебр $su(2)$ отщепляется, оставшиеся восемь фермионных генераторов $Q_{\alpha i i'}$ и шесть бозонных генераторов $T_{\alpha\beta}$ и J_{ij} или $I_{i'j'}$, образуют супералгебру $su(1,1|2)$, которую можно расширить дополнительными центральными зарядами (для определенности мы берем случай $\alpha = -1$):

$$\{Q_{\alpha i i'}, Q_{\beta j j'}\} = 2\left(\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}T_{\alpha\beta} - \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{i'j'}J_{ij} - \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}C_{i'j'}\right), \tag{2.158}$$

где центральные заряды $C_{i'j'}$ коммутируют со всеми другими генераторами

$$[Q_{\alpha i i'}, C_{k'j'}] = [T_{\alpha\beta}, C_{k'j'}] = [J_{ij}, C_{k'j'}] = 0\,. \tag{2.159}$$

Используя SU(2) преобразования, действующие на индексы i', j', мы можем оставить только один ненулевой центральный заряд, например, его третью компоненту: $C = C_{1'2'} \neq 0$, $C_{1'1'} = C_{2'2'} = 0$.

Оператор Казимира второго порядка полной супергруппы $D(2,1;\alpha)$ определяется выражением

$$C_2^{(\mathcal{N}=4)} = T^2 + \alpha\, J^2 - (1{+}\alpha)\, I^2 + \tfrac{i}{4}\, Q^{\alpha i i'} Q_{\alpha i i'}\,, \tag{2.160}$$

где $T^2 = \frac{1}{2}\, T^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$, $J^2 = \frac{1}{2}\, J^{ik}J_{ik}$, $I^2 = \frac{1}{2}\, I^{i'k'}I_{i'k'}$ и $Q^{\alpha i i'}Q_{\alpha i i'} = [Q^i, \bar{S}_i] + [\bar{Q}_i, S^i]$.

2.3.1. Суперконформные модели в стандартном $\mathcal{N}{=}\,4$ суперпространстве

Простейшим методом формулировки $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ суперсимметричных теорий является суперполевая формулировка в $\mathcal{N}{=}\,4, d{=}1$ суперпространстве [47], параметризованном координатами $(t, \theta_i, \bar{\theta}^i)$, $\bar{\theta}^i = (\overline{\theta_i})$, $i = 1, 2$. Спинорные ковариантные производные имеют вид (1.245). Один из двух SU(2) факторов полной R-симметричной (автоморфической) группы $\mathrm{SO}(4)_R$ действует на дублетные индексы i и будет обозначаться посредством $\mathrm{SU}(2)_R$. Вторая SU(2) перемешивает θ_i с ее комплексно сопряженной координатой и не является явной в рассматриваемом подходе.

Одночастичная модель

Одночастичная суперконформная модель строится с помощью супермультиплета (**1,4,3**), который описывается четным вещественным суперполем $\mathcal{X}$, подчиненным связям (1.244). Суперконформное действие мультиплета (**1,4,3**) имеет вид ($\alpha \neq 0$)

$$S_{\mathcal{X}} = -\tfrac{1}{4(1+\alpha)} \int dt\, d^4\theta\, \mathcal{X}^{\,-1/\alpha}\,. \tag{2.161}$$

Отметим, что действие (2.161) не является сингулярным при $\alpha = -1$. В самом деле, поскольку $\int \mu_H \,\mathcal{X}$ есть интеграл от полной производной, действие (2.161) имеет эквивалентную запись $S_{\mathcal{X}} = -\tfrac{1}{4(1+\alpha)} \int dt\, d^4\theta\, \left(\mathcal{X}^{\,-1/\alpha} - \mathcal{X}\right)$, которая в пределе $\alpha = -1$ дает действие $S_{\mathcal{X}}\Big|_{\alpha=-1} = -\tfrac{1}{4} \int dt\, d^4\theta\, \mathcal{X}\, \ln\mathcal{X}$.

Действие (2.161) инвариантно относительно глобальной $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной симметрии $D(2,1;\alpha)$, преобразования которой заключены в замыкании супертрансляций и суперконформных бустов. Инвариантность действия (2.161) относительно супертрансляций ($\bar\varepsilon^i = \overline{(\varepsilon_i)}$)

$$\delta t = i(\varepsilon_k \bar\theta^k - \theta_k \bar\varepsilon^k), \qquad \delta\theta_k = \varepsilon_k, \qquad \delta\bar\theta^k = \bar\varepsilon^k \tag{2.162}$$

явная в $\mathcal{N}{=}\,4$ суперполевом подходе. Используя координатную реализацию суперконформных бустов $D(2,1;\alpha)$ [205, 222, 69] ($\bar\eta^i = \overline{(\eta_i)}$):

$$\delta' t = it(\theta_k \bar\eta^k + \bar\theta^k \eta_k) - (1{+}\alpha)\, \theta_i \bar\theta^i (\theta_k \bar\eta^k + \bar\theta^k \eta_k)\,, \tag{2.163}$$

$$\delta' \theta_i = -\eta_i t - 2i\alpha\, \theta_i (\theta_k \bar\eta^k) + 2i(1{+}\alpha)\, \theta_i (\bar\theta^k \eta_k) - i(1{+}2\alpha)\, \eta_i (\theta_k \bar\theta^k)\,, \tag{2.164}$$

$$\delta' \bar\theta^i = -\bar\eta^i t - 2i\alpha\, \bar\theta^i (\bar\theta^k \eta_k) + 2i(1{+}\alpha)\, \bar\theta^i (\theta_k \bar\eta^k) + i(1{+}2\alpha)\, \bar\eta^i (\theta_k \bar\theta^k)\,, \tag{2.165}$$

$\delta'(dt d^4\theta) = -\alpha^{-1}\,(dt d^4\theta)\,\Lambda_0$, где $\Lambda_0 = 2i\alpha(\theta_k \bar\eta^k + \bar\theta^k \eta_k)$ и суперполевые преобразования (здесь мы используем "пассивную" интерпретацию их)

$$\delta' \mathcal{X} = -\Lambda_0\, \mathcal{X}\,, \tag{2.166}$$

легко проверяем инвариантность действия (2.161).

Подставляя решение связей (1.246), интегрируя по грассмановым переменным и исключая вспомогательные поля N^{ik} с помощью их алгебраических уравнений движения, получаем действие одночастичной $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной механики на массовой поверхности

$$S=\int dt\,\Big[\dot{x}\dot{x}+i\left(\bar{\psi}_k\dot{\psi}^k-\dot{\bar{\psi}}_k\psi^k\right)\Big]+\tfrac{2}{3}\,(1{+}2\alpha)\!\int\! dt\,\frac{\psi^i\bar{\psi}^k\psi_{(i}\bar{\psi}_{k)}}{x^2}\,. \qquad (2.167)$$

Как видим, на классическом уровне это действие не содержит конформный потенциал, но он возникает в гамильтониане при квантования вследствие упорядочения фермионов в последнем члене. Мы не приводим здесь выражения для сохраняющихся зарядов: ниже будет рассмотрена система, в которой одночастичная модель (2.161) возникает как подсистема. Поэтому, используя предельный переход в соответствующих формулах для расширенной системы (например, (2.185)–(2.192)), мы можем восстановить генераторы $\mathcal{N}{=}\,4$ superконформной $D(2,1;\alpha)$ симметрии для системы (2.161) (смотрите также [55, 223, 61] для аналогичной реализации суперконформной алгебры $su(1,1|2)$ как частного случая супералгебры $D(2,1;\alpha)$).

В случае симметрии $su(1,1|2)$, когда $su(2)_L$ симметрия может быть нарушенной (см. (2.157)), связи (1.244) для четного вещественного суперполя $\mathcal{X}$ могут быть ослаблены [47] добавлением ненулевых констант в их правые части:

$$\text{(a)}\quad D^iD_i\,\mathcal{X}=0\,,\quad \bar{D}_i\bar{D}^i\,\mathcal{X}=0\,;\qquad \text{(b)}\quad [D^i,\bar{D}_i]\,\mathcal{X}=m\,, \qquad (2.168)$$

где константа m обеспечивает центральный заряд для алгебры $su(1,1|2)$. Решением уравнений (2.168) есть сумма решения (1.246) и дополнительного члена $-\frac{1}{4}\theta\bar{\theta}m$. Действие (2.161) при $\alpha{=}{-}1$ для такого суперполя [47]

$$\tilde{S}=\int dt\,\Big[\dot{x}\dot{x}+i\left(\bar{\psi}_k\dot{\psi}^k-\dot{\bar{\psi}}_k\psi^k\right)-\frac{\left(m+\bar{\psi}_k\psi^k\right)^2}{x^2}\Big] \qquad (2.169)$$

генерирует дополнительные члены в гамильтониане, пропорциональные m^2/x^2 и $m\psi\bar{\psi}/x^2$. Они индуцируют новые члены в нётеровских суперзарядах супералгебры $su(1,1|2)$ с центральным зарядом, пропорциональным m. Таким образом, в этом случае конформный потенциал возникает уже на классическом уровне и его напряженность равна квадрату центрального заряда m. Отметим, что действие (2.169) и действие (2.150) для суперполя Y эквивалентны друг другу. Вместо (2.168), суперполе Y подчинено связям

$$\text{(a)}\quad D^iD_i\,Y=m\,,\quad \bar{D}_i\bar{D}^i\,Y=m\,;\qquad \text{(b)}\quad [D^i,\bar{D}_i]\,Y=0\,. \qquad (2.170)$$

Связи (2.168) и (2.170), как и действия (2.169) и (2.150), связаны друг с другом SU(2)-преобразованиями, которые перемешивают θ с $\bar{\theta}$ [47].

Многочастичные модели с $D(2,1;\alpha)$ симметрией

Несмотря на важность, многочастичные системы с $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной симметрией изучены не достаточно. В отличие от многочастичных $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформных систем, прямые обобщения $\mathcal{N}{=}\,4$ одночастичных суперконформнных систем не позволяют получить многочастичные $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформные системы калоджеровского типа. Именно по этой причине, исследования $\mathcal{N}{=}\,4$ многочастичных суперконформных систем проводится не только в обычном суперпространстве, но и прямо на компонентном уровне [55, 223, 61, 224]. Кроме того, оказывается, что реализация $D(2,1;\alpha)$ суперконформной симметрии на многочастичном фазовом пространстве при $\alpha \neq -1$ или 0 требует, по крайней мере, одну пару (бозонных) изоспиновых переменных $\{u^i, \bar{u}_i |\, i{=}1,2\}$, параметризующих внутреннюю два-сферу [224]. В следующем подразделе мы рассмотрим построение новых многочастичных $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформных систем с использованием мощного аппарата гармонического суперпространства.

2.3.2. Суперконформные модели в гармоническом $\mathcal{N}{=}\,4$ суперпространстве

Описание различных супермультиплетов в гармоническом $\mathcal{N}{=}\,4$, $d{=}1$ суперпространстве было представлено в Разделе 1.4.1. Здесь кратко опишем известные $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформные модели, построенные на их самодействии.

$\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформно-инвариантные сигма-модельные действия для (**3,4,1**) мультиплета (1.251) имеют вид (2.161), в котором мы должны сделать подстановку [69, 205, 222, 72, 73] $\mathcal{X} \;\to\; L^{-1}$, где $L := \sqrt{L^{ik}L_{ik}} = \sqrt{2[L^{++}L^{--} - (L^{+-})^2]}$. Суперконформное действие для L^{++} [205, 69] может также содержать весс-зуминовскую часть, каждая из которых суперконформно-инвариантная по отдельности относительно $D(2,1;\alpha)$). При этом, суперконформный весс-зуминовский член соответствует одномонопольному потенциалу $\mathcal{U}$ в (1.287). Исключение вспомогательного поля B генерирует конформный потенциал для v^{ik} и SU(2)/U(1) член Весса-Зумино с напряженностью, определяемой коэффициентом перед суперполевым членом Весса-Зумино. Полное бозонное действие в параметризации v^{ik} с разделенными радиальной и угловой частями дается выражением (2.55) с $g = (2\alpha)^{-2}$. Суперконформное действие для (**4,4,0**) мультиплета (1.258) имеет вид (2.161), в котором следует сделать подстановку $\mathcal{X} \to q^{-2}$, где $q^2 := q^{ia}q_{ia} = 2q^{-a}q^+_a$. Структура суперконформного сигма-модельного действия для мультиплета (**4,4,0**) рассматривалась в [69, 222].

Суперпотенциальный член для суперполя q^{+a} представляется в виде интеграла по аналитическому суперпространству от аналитического лагранжиана, зависящего от суперполя q^{+a} и гармоник [69]. Как показано в [69], такой член Весса-Зумино, использующий только (**4,4,0**) супермультиплет, не может быть суперконформно-инвариантным. Некоторые способы получения конформного потенциала для мультиплета (**4,4,0**) методом калибрования и посредством суперконформного взаимодействия с другими $\mathcal{N}{=}\,4$ мультиплетами обсуждались в [72, 73]. Ниже мы рассмотрим такую модификацию весс-зуминовского члена для мультиплета (**4,4,0**) посредством взаимодействия с (**1,4,3**)-препотенциалом.

Отметим, что весс-зуминовские потенциальные члены для всех $\mathcal{N}{=}\,4$ супермультиплетов могут быть представлены в явной $\mathcal{N}{=}\,4$ суперполевой форме только в гармоническом суперпространстве – в обычном $\mathcal{N}{=}\,4$ суперпространстве такие члены или включают явно θ-координаты [205] или выражаются через подходящие препотенциалы со сложной прекалибровочной свободой. Такие весс-зуминовские члены важны для описания изоспиновых супермультиплетов, используемых при построении новых интегрируемых суперсимметричных систем, включая суперконформно-инвариантные.

Взаимодействие различных $\mathcal{N}{=}\,4$ супермультиплетов в гармоническом суперпространстве позволяет построить новые $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформно-инвариантные модели, что и будет рассмотрено в следующем подразделе.

Одночастичные модели с изоспиновыми степенями свободы

Пострим нетривиальную модель $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной механики, в которой конформный потенциал генерируется методом калибрования и с использованием “полу-динамического” $\mathcal{N}\!=4$ изоспинового супермультиплета. Эта модель использует три типа внемассовых $\mathcal{N}\!=4$ супермультиплетов: динамический (**1,4,3**), “изоспиновый” (**4,4,0**) и калибровочный (“топологический”). Действие является суммой трех членов

$$S = S_{\mathcal{X}} + S_{FI} + S_{WZ}\,, \tag{2.171}$$

где первый член является действием (2.161) для мультиплета (**1,4,3**).

Второй член в (2.171) – это член Файе-Илиопоулоса (ФИ)

$$S_{FI} = -\tfrac{i}{2}\,c\int \mu_A^{(-2)}\,V^{++} \tag{2.172}$$

для калибровочного супермультиплета. Четное аналитическое калибровочное суперполе $V^{++}(\zeta,u)$, $D^+V^{++}=0$, $\bar{D}^+V^{++}=0\,$, определено с точностью до калибровочных преобразований

$$V^{++\prime} = V^{++} - D^{++}\lambda, \quad \lambda=\lambda(\zeta,u)\,, \tag{2.173}$$

которые позволяют откалибровать локально все компонентные поля в V^{++}. Однако, последнее суперполе содержит компоненту, которая не может быть исключена глобально. По этой причине этот d=1 супермультиплет назван “топологическим” в [72].

Последний член в (2.171) является членом Весса-Зумино (ВЗ)

$$S_{WZ} = -\tfrac{1}{2}\int \mu_A^{(-2)}\,\mathcal{V}\,\tilde{\mathcal{Z}}^+\,\mathcal{Z}^+\,. \tag{2.174}$$

Здесь комплексное аналитическое суперполе $\mathcal{Z}^+, \tilde{\mathcal{Z}}^+$ $(D^+\mathcal{Z}^+ = \bar{D}^+\mathcal{Z}^+ = 0)\,$, подчинено гармоническим связям

$$\mathcal{D}^{++}\,\mathcal{Z}^+ \equiv (D^{++} + i\,V^{++})\,\mathcal{Z}^+ = 0\,, \qquad \mathcal{D}^{++}\,\tilde{\mathcal{Z}}^+ \equiv (D^{++} - i\,V^{++})\,\tilde{\mathcal{Z}}^+ = 0 \tag{2.175}$$

и представляет калибровочно-ковариантизованную версию $\mathcal{N}\!=4$ мультиплета (**4,4,0**). Соответствующие калибровочные преобразования имеют вид

$$\mathcal{Z}^{+\prime} = e^{i\lambda}\mathcal{Z}^+, \qquad \tilde{\mathcal{Z}}^{+\prime} = e^{-i\lambda}\tilde{\mathcal{Z}}^+\,. \tag{2.176}$$

Суперполе $\mathcal{V}(\zeta,u)$ в (2.174) является препотенциалом (1.250) для $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ суперполя $\mathcal{X}$. Взаимодействие к мультиплетом $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ в (2.174) вводится так, чтобы обеспечить $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформную $D(2,1;\alpha)$ инвариантность. Координатная реализация суперконформных бустов из $D(2,1;\alpha)$ в аналитическом базисе имеет вид [69, 72]:

$$\delta' t_A = \alpha^{-1}\Lambda t_A\,, \quad \delta'\theta^+ = -\eta^+ t_A + 2i(1{+}\alpha)\eta^-\theta^+\bar\theta^+\,, \quad \delta' u^+_i = \Lambda^{++}u^-_i\,, \tag{2.177}$$

$\delta'\mu_H = \mu_H\big(2\Lambda - \alpha^{-1}(1{+}\alpha)\Lambda_0\big)$, $\delta'\mu^{(-2)}_A = 0$, где $\Lambda = 2i\alpha(\bar\eta^-\theta^+ - \eta^-\bar\theta^+)$, $\Lambda^{++} = D^{++}\Lambda = 2i\alpha(\bar\eta^+\theta^+ - \eta^+\bar\theta^+)$. Действие (2.171) и гармонические связей суперконформно-инвариантны, при этом преобразования присутствующих здесь суперполей равны [69]

$$\delta'\mathcal{V} = -2\Lambda\,\mathcal{V}\,, \qquad \delta'\mathcal{Z}^+ = \Lambda\,\mathcal{Z}^+\,, \qquad \delta' V^{++} = 0\,. \tag{2.178}$$

Связи (1.242), (1.243) и (2.175), также как и действия (2.172) и (2.174), инвариантны относительно преобразований $D(2,1;\alpha)$ при произвольном параметре α. Отметим, что инвариантность действия (2.174) имеет место благодаря присутствию в нем аналитического препотенциала $\mathcal{V}$.

Рассмотрим модель в калибровке Весса-Зумино. Используя U(1) локальную симметрию (2.173), (2.176), мы можем наложить калибровку

$$V^{++} = 2i\,\theta^+\bar\theta^+ A(t_A)\,. \tag{2.179}$$

Используя компонентное разложение (1.250) и решение связи (2.175) в калибровке Весса-Зумино (2.179)

$$\mathcal{Z}^+ = z^i u^+_i + \theta^+\varphi + \bar\theta^+\phi - 2i\,\theta^+\bar\theta^+\nabla_{t_A} z^i u^-_i\,, \qquad \nabla z^k := \dot z^k + iA\,z^k\,,$$

а также исключая вспомогательные поля и делая переопределение

$$x' = x^{-\frac{1}{2\alpha}}\,, \qquad \psi'_k = -\tfrac{1}{2\alpha}\,x^{-\frac{1}{2\alpha}-1}\psi_k\,, \qquad z'^i = x^{1/2}\,z^i\,, \tag{2.180}$$

мы получаем действие (2.171) на массовой поверхности (штрих в обозначениях x, ψ и z опущен) [1]

$$S = \int dt\,\Big[p\,\dot x + i\left(\bar\psi_k\dot\psi^k - \dot{\bar\psi}_k\psi^k\right) + \tfrac{i}{2}\,\left(\bar z_k\dot z^k - \dot{\bar z}_k z^k\right) - H\Big]\,, \tag{2.181}$$

---

[1] Получение такой системы с помощью гамильтоновой редукции смотрите в [225].

$$H = \tfrac{1}{4}\, p^2 + \alpha^2\, \frac{(\bar{z}_k z^k)^2}{4x^2} - 2\alpha\, \frac{\psi^i \bar{\psi}^k z_{(i}\bar{z}_{k)}}{x^2} - (1{+}2\alpha)\, \frac{\psi_i \psi^i\, \bar{\psi}^k \bar{\psi}_k}{2x^2}\,. \tag{2.182}$$

Поле $A(t)$, играющее роль $d{=}1$ $U(1)$-связности, является множителем Лагранжа для связи первого рода

$$D^0 - c \equiv \bar{z}_k z^k - c \approx 0\,, \tag{2.183}$$

которая должна быть наложена на волновую функцию в квантовом случае.

Скобки Дирака производят следующую квантовую алгебру операторов координат и импульсов

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\,, \qquad [\hat{z}^i, \hat{\bar{z}}_j] = \delta^i_j\,, \qquad \{\hat{\psi}^i, \hat{\bar{\psi}}_j\} = \tfrac{1}{2}\,\delta^i_j\,. \tag{2.184}$$

Генераторы супертрансляций и суперконформных бустов

$$Q^i = \hat{p}\hat{\psi}^i + 2i\alpha \frac{\hat{z}^{(i}\hat{\bar{z}}^{k)}\hat{\psi}_k}{\hat{x}} + i(1{+}2\alpha)\frac{\langle\hat{\psi}_k\hat{\psi}^k\hat{\bar{\psi}}^i\rangle}{\hat{x}}\,, \tag{2.185}$$

$$\bar{Q}_i = \hat{p}\hat{\bar{\psi}}_i - 2i\alpha \frac{\hat{z}_{(i}\hat{\bar{z}}_{k)}\hat{\bar{\psi}}^k}{\hat{x}} + i(1{+}2\alpha)\frac{\langle\hat{\bar{\psi}}^k\hat{\bar{\psi}}_k\hat{\psi}_i\rangle}{\hat{x}}\,, \tag{2.186}$$

$$S^i = -2\,\hat{x}\hat{\psi}^i + t\,Q^i, \qquad \bar{S}_i = -2\,\hat{x}\hat{\bar{\psi}}_i + t\,\bar{Q}_i\,, \tag{2.187}$$

где символ $\langle\ldots\rangle$ означает вейлевское упорядочение, определяют полный набор квантовых генераторов суперконформной алгебры $D(2,1;\alpha)$:

$$\begin{aligned}
H \;&=\; \tfrac{1}{4}\,\hat{p}^2 + \alpha^2 \frac{(\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k)^2 + 2\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k}{4\hat{x}^2} - 2\alpha \frac{\hat{z}^{(i}\hat{\bar{z}}^{k)}\hat{\psi}_{(i}\hat{\bar{\psi}}_{k)}}{\hat{x}^2} \qquad (2.188)\\
&\quad - (1{+}2\alpha)\frac{\langle\hat{\psi}_i\hat{\psi}^i\,\hat{\bar{\psi}}^k\hat{\bar{\psi}}_k\rangle}{2\hat{x}^2} + \frac{(1{+}2\alpha)^2}{16\hat{x}^2}\,,\\
K \;&=\; \hat{x}^2 - t\,\tfrac{1}{2}\,\{\hat{x},\hat{p}\} + t^2\,H\,, \qquad (2.189)\\
D \;&=\; -\tfrac{1}{4}\,\{\hat{x},\hat{p}\} + t\,H\,, \qquad (2.190)\\
J^{ik} \;&=\; i\left[\hat{z}^{(i}\hat{\bar{z}}^{k)} - 2\hat{\psi}^{(i}\hat{\bar{\psi}}^{k)}\right]\,, \qquad (2.191)\\
I^{1'1'} \;&=\; i\hat{\psi}_k\hat{\psi}^k\,, \qquad I^{2'2'} = -i\hat{\bar{\psi}}^k\hat{\bar{\psi}}_k\,, \qquad I^{1'2'} = \tfrac{i}{2}\,[\hat{\psi}_k, \hat{\bar{\psi}}^k]\,. \qquad (2.192)
\end{aligned}$$

Генераторы (2.185)-(2.192) удовлетворяют (анти)коммутационным соотношениям супералгебры $D(2,1;\alpha)$ (2.153)–(2.155).

При реализации (2.185)-(2.192) оператор Казимира второго порядка (2.160) алгебры $D(2,1;\alpha)$ принимает значение

$$C_2 = \tfrac{1}{4}\,\alpha(1{+}\alpha)\Big[(\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k)^2 + 2\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k + 1\Big]. \tag{2.193}$$

На физической волновой функции, которая подчинена связи (2.183)

$$D^0\Phi = \hat{\bar{z}}_i\hat{z}^i\Phi = c\,\Phi\,, \tag{2.194}$$

оператор Казимира (2.193) принимает фиксированное значение. Таким образом, гамильтониан (2.188) и оператор Казимира алгебры $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (2.6) могут быть представлены в квантовом случае в виде

$$H = \frac{1}{4}\left(\hat{p}^{\,2} + \frac{\hat{g}}{\hat{x}^2}\right), \qquad T^2 = \tfrac{1}{4}\,\hat{g} - \tfrac{3}{16}\,, \tag{2.195}$$

где $\hat{g} \;\equiv\; 4\alpha^2\frac{1}{2}\,\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k\left(\frac{1}{2}\,\hat{\bar{z}}_k\hat{z}^k + 1\right) \;-\; 8\alpha\,\hat{z}^{(i}\hat{\bar{z}}^{k)}\hat{\psi}_{(i}\hat{\bar{\psi}}_{k)} \;-\; 2(1{+}2\alpha)\langle\hat{\psi}_i\hat{\psi}^i\,\hat{\bar{\psi}}^k\hat{\bar{\psi}}_k\rangle \;+$ $\frac{1}{4}\,(1{+}2\alpha)^2$. Операторы (2.195) формально выглядят точно также, как в модели [42]. Однако, имеет место существенное различие: величина $\hat{g}$ является константой в модели [42], тогда как в нашем случае $\hat{g}$ – оператор, принимающий фиксированные, но различные, постоянные значения на разных компонентах волновой функции.

Для нахождения квантового спектра операторов (2.195) мы используем реализацию $\hat{\bar{z}}_i = v_i^+$, $\hat{z}^i = \partial/\partial v_i^+$ для бозонных операторов Z^k, $\bar{Z}_k$ и $\hat{\psi}^i = \psi^i$, $\hat{\bar{\psi}}_i = \frac{1}{2}\,\partial/\partial\psi^i$ для нечетных операторов Ψ^i, $\bar{\Psi}_i$, где ψ^i есть комплексные грассмановы переменные. Тогда, волновая функция определяется как

$$\Phi = A_1 + \psi^i B_i + \psi^i\psi_i A_2\,. \tag{2.196}$$

Требование однозначности волновой функции $\Phi(v^+)$ приводит к квантованию константы c: $c \in \mathbb{Z}$. Мы берем c положительным для обеспечения соответствия с чисто бозонным пределом, когда c является $\mathrm{SU}(2)$-спином. Тогда (2.194) говорит нам, что волновая функция $\Phi(v^+)$ есть однородный полином по v_i^+ степени c:

$$\Phi = A_1^{(c)} + \psi^i B_i^{(c)} + \psi^i\psi_i A_2^{(c)}\,, \tag{2.197}$$

$$A_{i'}^{(c)} = A_{i',k_1\ldots k_c}v^{+k_1}\ldots v^{+k_c}\,, \tag{2.198}$$

$$B_i^{(c)} = B_i^{\prime(c)} + B_i^{\prime\prime(c)} = v_i^+ B'_{k_1\dots k_{c-1}} v^{+k_1}\dots v^{+k_{c-1}} + B''_{(ik_1\dots k_c)} v^{+k_1}\dots v^{+k_c}\,. \quad (2.199)$$

В (2.199) мы выделили SU(2) неприводимые части $B'_{(k_1\dots k_{c-1})}$ and $B''_{(ik_1\dots k_c)}$ компонентной волновой функции с SU(2)-спинами, равными $(c-1)/2$ и $(c+1)/2$ соответственно.

На компонентах волновой функции операторы Казимира бозонных подгрупп $\mathrm{SU}(1,1)$, $\mathrm{SU}(2)_R$ and $\mathrm{SU}(2)_L$ принимают значения, приведенные в таблице 2.1. При этом, значения квантовых чисел r_0, j и i, определяемых посредством

Таблица 2.1. Значения операторов Казимира бозонных подгрупп и $\frac{i}{4}Q^{ai'i}Q_{ai'i}$

	T^2	J^2	I^2	$\frac{i}{4}Q^{ai'i}Q_{ai'i}$
$A_{k'}^{(c)}$	$\frac{\alpha^2(c+1)^2-1}{4}$	$\frac{(c+1)^2-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1+\alpha$
$B_k^{\prime(c)}$	$\frac{\alpha^2(c+1)^2-2\alpha(c+1)}{4}$	$\frac{(c+1)^2-2(c+1)}{4}$	0	$\alpha(c+1)$
$B_k^{\prime\prime(c)}$	$\frac{\alpha^2(c+1)^2+2\alpha(c+1)}{4}$	$\frac{(c+1)^2+2(c+1)}{4}$	0	$-\alpha(c+1)$

$$T^2 = r_0(r_0-1)\,, \qquad J^2 = j(j+1)\,, \qquad I^2 = i(i+1)\,, \qquad (2.200)$$

приведены в таблице 2.2. Поля B'_i и B''_i образуют дублеты группы $\mathrm{SU}(2)_R$, генерируемой J^{ik}, тогда как компонентные поля $A_{i'} = (A_1, A_2)$ образуют дублет группы $\mathrm{SU}(2)_L$, генерируемой $I^{i'k'}$. Если волновая функция (2.196) является бозонной (фермионной), то поля $A_{i'}$ описывают бозоны (фермионы), тогда как поля B'_i, B''_i являются фермионами (бозонами). На каждой из компонент волновой функции $A_{i'}$, B'_i, B''_i реализованы бесконечномерные унитарные представления дискретной серии универсальной накрывающей группы, соответствующей одномерной конформной группе SU(1,1). Такие представления характеризируются положительным числом r_0 [38, 218] (для унитарных представлений группы SU(1,1) константа $r_0 > 0$ должна быть (полу)целой).

Таблица 2.2. Квантовые числа SU$(1,1)$, SU$(2)_R$ и SU$(2)_L$ представлений

	r_0	j	i
$A^{(c)}_{k'}(x,v^+)$	$\frac{\lvert\alpha\rvert(c+1)+1}{2}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{1}{2}$
$B'^{(c)}_{k}(x,v^+)$	$\frac{\lvert\alpha\rvert(c+1)+1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(\alpha)$	$\frac{c}{2} - \frac{1}{2}$	0
$B''^{(c)}_{k}(x,v^+)$	$\frac{\lvert\alpha\rvert(c+1)+1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(\alpha)$	$\frac{c}{2} + \frac{1}{2}$	0

Напомним, что базисные функции этих представлений являются собственными векторами компактного SU(1,1) генератора

$$T_0 = \tfrac{1}{2}\left(mK + m^{-1}H\right), \tag{2.201}$$

где m есть константа размерности массы (смотрите определение в (2.2)). Соответствующие собственные значения равны $r = r_0 + n$, $n \in \mathbb{N}$ [38, 218, 42].

Подчеркнем особенности построенной $D(2,1;\alpha)$ квантовой механики.

- В противоположность стандартной SU$(1,1|2)$ суперконформной механике [47, 50, 55], конструкция, представленная здесь, существенно использует переменные z_i (или v^+_i), параметризующие два-сферу S^2 в дополнении к стандартной (дилатонной) координате x.

- Присутствие дополнительных “(изо)спиновых” S^2-переменных приводит к богатому квантовому спектру. Кроме того, соответствующая волновая функция несет представления двух независимых групп SU(2), в отличие от SU$(1,1|2)$ моделей работ [47, 50, 55, 223, 61], где была реализована только одна SU(2) на фермионных переменных.

- В противоположность к ранее рассмотренным моделям, здесь естественно возникает квантование константы конформного взаимодействия, которая выражается в виде оператора Казимира группы SU(2), принимающего целые или полуцелые собственные значения. Это возникает уже в чисто бозонном секторе модели и обеспечивается присутствием S^2-переменных.

- Переменные v_i^+ в разложениях (2.198) и (2.199) могут быть идентифицированы с половиной гармонических переменных $v_i^\pm$ в таргетном пространстве (хотя и без стандартных связей $v^{+i}v_i^- \sim const$).

Отметим, что подобная модель $\mathcal{N}{=}\,4$ механики была построена в [226]. Однако в нашей модели [146, 147, 148] калибровочный $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ мультиплет генерирует дополнительную алгебраическую связь (2.183), которая отсутствует в [226]. В квантовой теории эта связь (2.194) фиксирует значение оператора Казимира второго порядка C_2 в (2.193) и, поэтому, выделяет только одно неприводимое представление в спектре. Без этой связи пространство квантовых состояний модели (2.181) содержит бесконечную башню неприводимых представлений.

Отметим, что спиновые переменные можно описать также с помощью фермионных степеней свободы, что было осуществлено в недавней работе [153], где спиновые степени свободы в моделях $\mathcal{N}{=}\,4$ механики описывались нечетными полями $(\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{4})$ мультиплета.

Многочастичные модели с $D(2,1;\alpha)$ симметрией

Матричные обобщения калибровочной модели, рассмотренной в предыдущем подразделе, позволяют построить новые многочастичные системы с $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной симметрией. Такие модели описываются следующим гармоническим суперпространственным действием

$$S = -\tfrac{1}{4(1+\alpha)} \int \mu_H \mathrm{tr}\left(\mathcal{X}^{\,-1/\alpha}\right) - \tfrac{1}{2} \int \mu_A^{(-2)} \mathcal{V}_0\, \widetilde{\mathcal{Z}}^{a\,+} \mathcal{Z}_a^+ - \tfrac{i}{2}\, c \int \mu_A^{(-2)}\, \mathrm{Tr}\, V^{++}\,. \tag{2.202}$$

Первый член в (2.202) является калибровочным действием $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ мультиплетов, которые описываются эрмитовым $n{\times}n$-матричным суперполем $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_a^b)$, $a,b = 1,\ldots,n$, преобразуются по присоединенному представлению группы $\mathrm{U}(n)$ и подчинены калибровочно-ковариантным связям

$$\mathcal{D}^{++}\,\mathcal{X} = 0, \qquad \mathcal{D}^{+}\mathcal{D}^{-}\,\mathcal{X} = 0, \qquad (\mathcal{D}^{+}\bar{\mathcal{D}}^{-} + \bar{\mathcal{D}}^{+}\mathcal{D}^{-})\,\mathcal{X} = 0\,. \tag{2.203}$$

Второй член в (2.202) является действием Весса-Зумино (ВЗ), описывающим n коммутирующих аналитических суперполей $\mathcal{Z}^+_a$, которые принадлежат фундаментальному представлению группы $\mathrm{U}(n)$, описывают $\mathcal{N}{=}4$ мультиплеты (**4,4,0**) вне массовой поверхности и удовлетворяют связям

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{Z}^+ = 0, \qquad \mathcal{D}^+\mathcal{Z}^+ = 0\,, \qquad \bar{\mathcal{D}}^+\mathcal{Z}^+ = 0\,. \tag{2.204}$$

Связи (2.203), (2.204) содержат ковариантную производную $\mathcal{D}^{++} = D^{++} + i\,V^{++}$, где U(n)-калибровочная матричная связность $V^{++}(\zeta, u)$ является аналитическим суперполем. Калибровочные связности, присутствующие в спинорных ковариантных производных в (2.203), явно выражаются через $V^{++}(\zeta, u)$ [72]. Параметры калибровочной группы $\mathrm{U}(n)$ являются аналитическими, что подразумевает $\mathcal{D}^+ = D^+$, $\bar{\mathcal{D}}^+ = \bar{D}^+$. Отметим, что поскольку $\mathcal{X}$ принадлежит присоединенному представлению группы $\mathrm{U}(n)$, то $\mathcal{D}^{++}\mathcal{X} = D^{++}\mathcal{X} + i\,[V^{++}, \mathcal{X}]$, и т.п.

Третий член в (2.202) является членом Файе-Илиопоулоса (ФИ) для V^{++}, где вещественная константа c – его напряженность. Только следовая часть матричного суперполя V^{++} (т. е., U(1)-связность) дает вклад в член ФИ. Суперполе $\mathcal{V}_0(\zeta, u)$ является вещественным аналитическим калибровочным препотенциалом для $\mathrm{U}(n)$-синглетного (**1,4,3**) суперполя $\mathcal{X}_0 \equiv \mathrm{tr}\,(\mathcal{X})$ и связан с последним интегральным преобразованием (1.249).

Действие (2.202) инвариантно относительно $\mathcal{N}{=}4$ суперконформной симметрии $D(2,1;\alpha)$ (см. (2.178)). Отметим, что эта инвариантность обеспечивается присутствием суперполевого множителя $\mathcal{V}_0$ во втором члене действия (2.202).

Локальные $\mathrm{U}(n)$ преобразования, оставляющие действие (2.202) инвариантным, имеют вид

$$\mathcal{X}' = e^{i\lambda}\mathcal{X}e^{-i\lambda}, \qquad \mathcal{Z}^{+\prime} = e^{i\lambda}\mathcal{Z}^+, \qquad V^{++\,\prime} = e^{i\lambda}\,V^{++}\,e^{-i\lambda} - i\,e^{i\lambda}(D^{++}e^{-i\lambda}),$$

где $\lambda_a^b(\zeta, u^\pm) \in u(n)$ является “эрмитовым” аналитическим матричным параметром, $\widetilde{\lambda} = \lambda$. Используя эту калибровочную свободу мы можем выбрать калибровку ВЗ

$$V^{++} = 2i\,\theta^+\bar{\theta}^+A(t_A). \tag{2.205}$$

Ниже мы рассмотрим случай $\alpha = -1/2$, соответствующий свободному конформно-инвариантному действию для $\mathcal{X}$ в (2.202).

Подставляя компонентные разложения суперполей в калибровке ВЗ в действие (2.202) и исключая вспомогательные поля с помощью их уравнений движения, мы получаем компонентное действие

$$
\begin{aligned}
S_4 &= S_b + S_f, && (2.206)\\
S_b &= \int dt \Big[\mathrm{tr}\,(\nabla X \nabla X + c\,A) + \tfrac{n}{8}(\bar Z^{(i}Z^{k)})(\bar Z_i Z_k) && (2.207)\\
&\qquad\qquad + \tfrac{i}{2}\,X_0\left(\bar Z_k \nabla Z^k - \nabla \bar Z_k\, Z^k\right)\Big], &&\\
S_f &= i\,\mathrm{tr}\int dt\left(\bar\Psi_k \nabla \Psi^k - \nabla\bar\Psi_k \Psi^k\right) - \int dt\, \frac{\Psi_0^{(i}\bar\Psi_0^{k)}(\bar Z_i Z_k)}{X_0}\,, && (2.208)
\end{aligned}
$$

где $X_0 := \mathrm{tr}(X)$, $\Psi_0^i := \mathrm{tr}(\Psi^i)$, $\bar\Psi_0^i := \mathrm{tr}(\bar\Psi^i)$. Рассмотрим бозонный предел в S_4, то есть действие (2.207).

Наложим калибровку $X_a^b = 0$, $a \neq b$ для остаточной калибровочной инвариантности $X' = e^{i\lambda}\,X\,e^{-i\lambda}$, $Z'^k = e^{i\lambda}Z^k$, $A' = e^{i\lambda}\,A\,e^{-i\lambda} - i\,e^{i\lambda}(\partial_t e^{-i\lambda})$, где $\lambda_a^b(t) \in u(n)$ – d=1 калибровочные параметры. В результате этого и после исключения полей A_a^b, $a \neq b$ с помощью уравнений движения, действие (2.207) принимает следующий вид (вместо Z_a^i мы вводим новые поля $Z'^i_a = (X_0)^{1/2}\,Z_a^i$ и опускаем черту в обозначениях этих полей),

$$
S_b = \int dt \left\{ \sum_a \dot x_a \dot x_a + \tfrac{i}{2}\sum_a (\bar Z_k^a \dot Z_a^k - \dot{\bar Z}{}_k^a Z_a^k) + \sum_{a\neq b} \frac{\mathrm{tr}(S_a S_b)}{4(x_a - x_b)^2} - \frac{n\,\mathrm{Tr}(\hat S \hat S)}{2(X_0)^2} \right\}, \tag{2.209}
$$

где поля Z_a^k подчиняются связям (здесь нет суммирования по a)

$$
\bar Z_i^a Z_a^i = c \qquad \forall\, a\,, \tag{2.210}
$$

и обладают остаточной абелевой калибровочной $[\mathrm{U}(1)]^n$ симметрией, $Z_a^k \to e^{i\varphi_a} Z_a^k$, с локальными параметрами $\varphi_a(t)$. В (2.209) мы используем следующие обозначения:

$$
(S_a)_i{}^j := \bar Z_i^a Z_a^j, \qquad (\hat S)_i{}^j := \sum_a \left[(S_a)_i{}^j - \tfrac{1}{2}\delta_i^j (S_a)_k{}^k \right]. \tag{2.211}
$$

Отметим, что нетривиальное взаимодействие существует только при $c \neq 0$: при $c = 0$ связь (2.210) подразумевает $Z_a^i = 0$. Кроме того, в $\mathcal{N}$=4 случае не все бозонные переменные Z^i_a исключаются фиксацией калибровки и решением связей: выживает ненулевой ВЗ член для них в действии (2.209). После квантования эти переменные становятся U(2)-спиновыми степенями свободы.

Член ВЗ для Z в (2.209) приводит к скобкам Дирака

$$[\bar{Z}^a_i, Z^j_b]_D = i\delta^a_b\delta^j_i\,, \tag{2.212}$$

в отношении которых величины (2.211) для каждого a образуют $su(2)$ алгебры

$$[(S_a)_i{}^j, (S_b)_k{}^l]_D = i\delta_{ab}\left\{\delta^l_i(S_a)_k{}^j - \delta^j_k(S_a)_i{}^l\right\}. \tag{2.213}$$

Величины $(\hat{S})_i{}^j$, определенные в (2.211), являются нетеровскими зарядами для SU(2)-симметрии системы (2.209), поэтому числитель в члене с $(X_0)^{-2}$ в (2.209) постоянен на уравнениях движения для $Z^i_a, \bar{Z}^a_i$. Таким образом, в противоположность $\mathcal{N}=1,2$ случаям, $\mathcal{N}=4$ калибровочное многочастичное действие содержит конформный потенциал также в секторе центра масс (подобно как в [223, 61, 62]). С точностью до этого конформного потенциала (последний член в (2.209)), бозонный предел построенной $\mathcal{N}=4$ системы является не чем иным, как интегрируемой U(2)-спиновой моделью Калоджеро в формулировке [227].

Отметим, что в [154] была построена многочастичная система с $SU(2|1)$ деформированной суперсимметрией с использованием рассмотренного здесь калибрования матричной $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперполевой системы, с введением дополнительного гармонического пространства.

2.4. Модели с конформной группой Галилея

В последнее время имеет место возрастающий интерес к применению известного AdS/CFT соответствия [39, 40, 41] к нерелятивистской конформной полевой теории [228, 229] (смотрите также [230] и ссылки там). В рамках AdS/CFT соответствия важную роль играет (супер)конформная квантовая механика как простейший пример многомерной (супер)конформной теории поля. Для расширения AdS/CFT соответствия на нерелятивистский случай желательно рассмотреть различные нерелятивистские версии (супер)конформной механики. Изучение таких моделей позволяет получить более глубокое понимание физических и математических аспектов нерелятивистской конформной симметрии и может быть использовано при анализе соответствующих (супер)струнных и полевых теорий.

Основной целью настоящего раздела является построение новых моделей частиц, инвариантных относительно конформной симметрии Галилея, с помощью метода нелинейных реализаций [231, 232]. Как мы обсуждали ранее, конформная механика АФФ [42], как и ее суперсимметричные расширения [45, 46, 47], может быть описана в рамках нелинейных реализаций $D{=}\,0{+}1$ конформной группы SL(2,R)$\sim$SO(1,2) [211] и ее суперсимметричных расширений [47, 50] с использованием механизма обратного эффекта Хиггса [212]. Здесь мы применяем формализм один-форм Маурера-Картана (МК) для описания нелинейных реализаций галилеевской конформной (ГК) группы и построения физических систем, обладающих данной симметрией. ГК группа расширяет одномерную конформную симметрию АФФ [42] до конформной симметрии $D{=}\,d{+}1$-мерного пространства-времени с $d \geq 1$ пространственными измерениями. В течение долгого времени, начиная с работ [209], название нерелятивистской конформной симметрии относилось к симметрии Шредингера, которая является ковариантностью уравнения Шредингера, описывающего нерелятивистскую массивную частицу. Однако, соответствующая алгебра Шредингера не требуют зануления массовых параметров и не содержит нерелятивистского аналога конформных пространственных ускорений. Конформная алгебра Галилея (КАГ) является более предпочтитедьным кандидатом на роль нерелятивистской конформной симметрии, так как она может быть получена контракцией $\frac{(d+2)(d+3)}{2}$ -мерной релятивистской конформной алгебры $o(d+1,2)$ при сохранении числа генераторов [64, 65, 66].

КАГ в d пространственных измерениях имеет структуру полупрямой суммы

$$\mathcal{C}^{(d)} = \Big(o(2,1) \oplus o(d) \Big) \ltimes \mathcal{A}^{(3d)}\,, \quad (d \geq 2)\,, \qquad (2.214)$$

и $\mathcal{C}^{(1)} = o(2,1) \ltimes \mathcal{A}^{(3)}$, $\mathcal{C}^{(0)} = o(2,1)$. Здесь, $o(2,1)$ описывает описывает конформные симметрии на мировой линии [42, 211], $o(d)$ генерирует пространственные вращения и $\mathcal{A}^{(3d)}$ представляет $3d$-мерную абелеву подалгебру пространственных трансляций, галилеевских бустов и нерелятивистских постоянных ускорений.

2.4.1. Конформная алгебра Галилея и один-формы МК

Конформная алгебра Галилея (КАГ) $\mathcal{C}^{(d)}$ в $D=d+1$, определенная в (2.214), получается добавлением к алгебре $\mathcal{C}^{(0)} = o(2,1)$ (2.1) алгебры Ли пространственных вращений $o(d)$, коммутирующей с $\mathcal{C}^{(0)}$,

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i\left(\delta_{ac}\, J_{bd} - \delta_{ad}\, J_{bc} + \delta_{bd}\, J_{ac} - \delta_{bc} J_{ad}\right)\,, \tag{2.215}$$

$$[J_{ab}, H] = [J_{ab}, D] = [J_{ab}, K] = 0\,, \tag{2.216}$$

а также $3d$-мерной абелевой подалгебры $\mathcal{A}^{(3d)}$, образованной генераторами P_a, B_a и F_a со следующими коммутаторами

$$\begin{array}{lll} [H,P_a]=0\,, & [H,F_a]=2iB_a\,, & [H,B_a]=iP_a\,, \\ {[K,P_a]}=-2iB_a\,, & [K,F_a]=0\,, & [K,B_a]=-iF_a\,, \\ {[D,P_a]}=-iP_a\,, & [D,F_a]=iF_a\,, & [D,B_a]=0\,, \end{array} \tag{2.217}$$

$$[J_{ab}, \mathcal{A}_{r,c}] = i\left(\delta_{ac}\mathcal{A}_{r,b} - \delta_{bc}\mathcal{A}_{r,a}\right)\,, \tag{2.218}$$

$$[\mathcal{A}_{r,a}, \mathcal{A}_{q,b}] = 0\,, \tag{2.219}$$

где $\mathcal{A}_{1,a} = P_a$, $\mathcal{A}_{2,a} = B_a$, $\mathcal{A}_{3,a} = F_a$ и в этом разделе $r = 0, 1, 2$, $a = 1, \ldots, d$. Операторы B_a генерируют галилеевские бусты, тогда как F_a производят постоянные нерелятивистские ускорения и их присутствие подразумевает отсутствие каких-либо дополнительных центральных зарядов при $d > 2$. При $d = 2$ можно добавить центральный заряд без нарушения тождеств Якоби полной ГК алгебры $\mathcal{C}^{(2)}$, что будет использовано ниже.

Осцилляторная твистороподобная реализация ГКА для обычного пространства-времени (d=3) была получена в [149]. При такой реализации спектр гамильтониана индефинитен, что предполагает альтернативное рассмотрение систем с ГК симметриями с помощью других подходов. В этом разделе будут построены ГК модели методом нелинейых реализаций.

Конфигурационные пространства физических систем с ГК симметрией будут определены на фактор-пространстве $\mathcal{K}^{(d)} = \mathcal{C}^{(d)}/\mathcal{H}$, $\mathcal{H} = \mathrm{SO}(d)$, со следующей параметризацией

$$\mathcal{K}^{(d)} = G_0\, e^{ix_aP_a}\, e^{if_aF_a}\, e^{iv_aB_a}\,, \tag{2.220}$$

где $\mathcal{C}^{(0)} = G_0$ определена в (2.14). Лево-ковариантные один-формы МК, определенные посредством

$$\mathcal{K}^{(d)-1}d\mathcal{K}^{(d)} = i\Big(\omega_H H + \omega_K K + \omega_D D + \omega_{P,a}P_a + \omega_{F,a}F_a + \omega_{B,a}B_a\Big)\,, \quad (2.221)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{P,a} &= dx_a + x_a\,\omega_D - v_a\,\omega_H\,, & (2.222)\\ \omega_{F,a} &= df_a - f_a\,\omega_D + v_a\,\omega_K\,, & (2.223)\\ \omega_{B,a} &= dv_a + 2\,x_a\,\omega_K - 2\,f_a\,\omega_H\,, & (2.224) \end{aligned}$$

тогда как остальные формы ω_H, ω_K and ω_D совпадают с формами (2.15). Записывая (2.221) в виде

$$\mathcal{K}^{(d)-1}d\mathcal{K}^{(d)} = i\omega_H\Big(H + \mathcal{D}z\,K + \mathcal{D}u\,D + \mathcal{D}x_a\,P_a + \mathcal{D}f_a\,F_a + \mathcal{D}v_a\,B_a\Big) \quad (2.225)$$

мы получаем плотность мировой линии E

$$\omega_H = dt\,E\,, \quad E = e^{-u}\,, \quad (2.226)$$

и временные ковариантные производные

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}z = e^{2u}\left(\dot z + z^2\right)\,, \qquad \mathcal{D}u = e^{u}\left(\dot u - 2z\right)\,,\\ &\mathcal{D}x_a = e^{u}\dot x_a + x_a\,\mathcal{D}u - v_a\,,\\ &\mathcal{D}f_a = e^{u}\dot f_a - f_a\,\mathcal{D}u + v_a\,\mathcal{D}z\,,\\ &\mathcal{D}v_a = e^{u}\dot v_a + 2\,x_a\,\mathcal{D}z - 2\,f_a\,. \end{aligned} \quad (2.227)$$

Формы (2.15) и (2.222)-(2.224) инвариантны относительно инфинитезимальных преобразований параметров фактор-пространства

$$\begin{aligned} &\delta t = a + bt^2 + ct \equiv \alpha(t)\,, \quad \delta z = b(1-2tz) - cz\,, \quad \delta u = 2bt + c\,,\\ &\delta x_a = e^{-u}\left[a_a + t^2 b_a + tc_a\right]\,,\\ &\delta f_a = e^{u}\left[z^2 a_a + (1-tz)^2 b_a - z(1-tz)c_a\right]\,,\\ &\delta v_a = -2za_a + 2t(1-tz)b_a + (1-2tz)c_a\,. \end{aligned} \quad (2.228)$$

и коваринтны при преобразованиях SO(d), которые действуют как стандартные вращения векторного индекса a.

По аналогии с алгеброй $o(2,1)$, мы будем использовать также базис в абелевой подалгебре $\mathcal{A}^{(3d)}$ с генераторами

$$A^{\pm}_a = \tfrac{1}{2}\left(\gamma F_a \pm \gamma^{-1} P_a\right) \,, \qquad B_a \,, \tag{2.229}$$

коммутационные соотношения для которых

$$\begin{array}{lll} [R^{\pm}, A^{\pm}_a] = 0 \,, & [R^{\pm}, A^{\mp}_a] = \pm i B_a \,, & [R^{\pm}, B_a] = -i A^{\mp}_a \,, \\ [D, A^{\pm}_a] = i A^{\mp}_a \,, & [D, B_a] = 0 \,. & \end{array} \tag{2.230}$$

Явные выражения для соответствующих один-форм МК

$$\omega^{\pm}_{A,a} = \gamma^{-1}\omega_{F,a} \pm \gamma\omega_{P,a} \,, \qquad \omega_{B,a} \tag{2.231}$$

имеют вид

$$\omega^{\pm}_{A,a} = d\mathcal{X}^{\pm}_a - \mathcal{X}^{\mp}_a\,\omega_D + v_a\,\omega^{\mp}_R \,, \qquad \omega_{B,a} = dv_a + \mathcal{X}^{+}_a\,\omega^{-}_R - \mathcal{X}^{-}_a\,\omega^{+}_R \,, \tag{2.232}$$

где введены новые групповые переменные

$$\mathcal{X}^{\pm}_a = \pm\,\gamma\, x_a + \gamma^{-1} f_a \,, \tag{2.233}$$

ковариантные производные которых равны

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}\mathcal{X}^{\pm}_a & = & e^u \dot{\mathcal{X}}^{\pm}_a - \mathcal{X}^{\mp}_a\,\mathcal{D}u - \gamma^{-1} v_a \left(\mathcal{D}z \mp \gamma^2\right) \,, \\ \mathcal{D}v_a & = & e^u \dot{v}_a - \gamma^{-1}\mathcal{X}^{-}_a\left(\mathcal{D}z + \gamma^2\right) + \gamma^{-1}\mathcal{X}^{+}_a\left(\mathcal{D}z - \gamma^2\right) \,. \end{array} \tag{2.234}$$

В случае $D\!=\!2\!+\!1$ в ГК алгебру можно дополнить центральным зарядом Θ, который появляется в следующих коммутаторах ($i\!=\!1,2$)

$$[B_a, B_b] = i\,\epsilon_{ab}\,\Theta \,, \qquad [P_a, F_b] = -2i\,\epsilon_{ab}\,\Theta \,. \tag{2.235}$$

Параметризация фактор-пространства $\tilde{\mathcal{K}}^{(2)} = \tilde{\mathcal{C}}^{(2)}/\mathrm{SO}(2)$, где $\tilde{\mathcal{C}}^{(2)}$ является центрально-расширенной ГК группой для $d\!=\!2$, может быть выбрана в виде

$$\tilde{\mathcal{K}}^{(2)} = G_0\, e^{i x_a P_a}\, e^{i f_a F_a}\, e^{i v_a B_a}\, e^{i\phi\Theta} \,. \tag{2.236}$$

Ковариантные один-формы МК, определяемые посредством

$$\tilde{\mathcal{K}}^{(2)-1} d\tilde{\mathcal{K}}^{(2)} = i\Big(\omega_H H + \omega_K K + \omega_D D + \omega_{P,a} P_a + \omega_{F,a} F_a + \omega_{B,a} B_a + \omega_\Theta \Theta\Big), \tag{2.237}$$

даются выражениями (2.15), (2.222)-(2.224) и

$$\omega_\Theta = d\phi - 2\epsilon_{ab} f_a\,\omega_{P,b} + \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ab}\, v_a\,\omega_{B,b} + \epsilon_{ab}\, v_a\left(f_b\,\omega_H + x_b\,\omega_K\right) \,. \tag{2.238}$$

Один-форма ω_Θ будет использоваться ниже при построении нового ГК-инвариантного действия.

2.4.2. Обратный эффект Хиггса и полевые уравнения

Получим сначала уравнения движения в системах, инвариантных относительно конформной симметрии Галилея. Выбор независимых динамических степеней свободы физических систем определяется выбором фактор-пространств и соответствующих условий обратного эффекта Хиггса. Динамические уравнения формулируются также как связи, накладываемые на один-формы МК.

Поскольку мы рассматриваем обобщение стандартной конформной механики, то имеют место связи (2.17), которые в терминах ковариантных производных принимают вид

$$\text{(a)}\quad \mathcal{D}u = 0\,, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \mathcal{D}z = \gamma^2\,. \tag{2.239}$$

Тогда остальные один-формы МК (2.232) даются выражениями

$$\omega^+_{A,a} \;=\; d\mathcal{X}^+_a\,, \tag{2.240}$$

$$\omega^-_{A,a} \;=\; d\mathcal{X}^-_a + v_a\,\omega^+_R = d\mathcal{X}^-_a + 2\gamma\, v_a\,\omega_H\,, \tag{2.241}$$

$$\omega_{B,a} \;=\; dv_a - \mathcal{X}^-_a\,\omega^+_R = dv_a - 2\gamma\,\mathcal{X}^-_a\,\omega_H\,. \tag{2.242}$$

Мы используем “конформный” базис (2.230), (2.231), в котором переменная $\mathcal{X}^+_a$ отщепляется от других векторных переменных $\mathcal{X}^-_a$, v_a и она присутствует только в форме $\omega^+_{A,a}$.

Помимо (2.17), мы накладываем также дополнительные связи

$$\text{(a)}\quad \omega_{B,a} = 0\,, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \omega^-_{A,a} = 0\,, \tag{2.243}$$

которые приводят к уравнениям

$$\text{(a)}\quad \rho^2\dot{v}_a - 2\gamma\mathcal{X}^-_a = 0\,, \qquad \text{(b)}\quad \rho^2\dot{\mathcal{X}}^-_a + 2\gamma v_a = 0\,, \tag{2.244}$$

где $\rho = e^{u/2}$. Исключая v_a с помощью условия обратного эффекта Хиггса (2.244 b), мы получаем следующие динамические уравнения 2-го порядка

$$\rho^2\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\mathcal{X}}^-_a\right) + 4\gamma^2\mathcal{X}^-_a = 0 \tag{2.245}$$

для переменных $\mathcal{X}^-_a(t)$.

Уравнения движения для $\mathcal{X}_a^+$ определяются связями на формы $\omega^+_{A,a}$. Например, допустимые ГК-ковариантные связи $\omega^+_{A,a} = 0$, приводят к постоянному вектору $\mathcal{X}_a^+$. Более интересным является случай, когда уравнения движения для $\mathcal{X}_a^+$ имеют второй порядок по временной производной. Уравнения такого типа

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2 \dot{\mathcal{X}}{}_a^+\right) = 0 \qquad (2.246)$$

ковариантны относительно ГК преобразований (2.228): вариации уравнений (2.246) пропорциональны уравнениям движения дилатона (2.9) ГК-ковариантность уравнений (2.244), (2.245) и (2.246) становится явной после записи их в терминах ковариантных производных (2.234). С точностью до уравнений (2.239), уравнения (2.244) принимают вид

$$\text{(a)}\quad \mathcal{D}v_a = 0\,, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \mathcal{D}\mathcal{X}{}_a^- = 0\,, \qquad (2.247)$$

тогда как (2.245) и (2.246) –

$$\text{(a)}\quad \mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{X}{}_a^- - 2\gamma\mathcal{D}v_a = 0\,, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{X}{}_a^+ = 0\,. \qquad (2.248)$$

Таким образом, расширенная конформная механика описывается динамическими переменными ρ и $\mathcal{X}_a^\pm$. Переменная ρ здесь по-прежнему подчиняется уравнению (2.9), но при этом она связана с переменными фактор-пространства $\mathcal{X}_a^\pm$ через уравнения (2.245) и (2.246).

Существует иная динамическая система, которая инвариантная относительно ГК симметрии, но содержит меньшее число степеней свободы: вместо полного вектора $\mathcal{X}{}_a^-$ присутствует только его ковариантная проекция

$$X \equiv \mathcal{X}{}_a^- \mathcal{D}\mathcal{X}{}_a^+\,. \qquad (2.249)$$

Учитывая (2.239), мы получаем, что $X{=}\,\rho^2\, \mathcal{X}{}_a^-\, \dot{\mathcal{X}}{}_a^+$. Уравнения (2.245) дают динамическое уравнение для X:

$$\rho^2 \frac{d}{dt}\left(\rho^2 \dot{X}\right) + 4\gamma^2 X = 0\,. \qquad (2.250)$$

Действие такой системы с динамическими переменными ρ, $\mathcal{X}{}_a^+$ и X будет представлено ниже. Отметим, что уравнение (2.250) является проекцией уравнений (2.248a) на ковариантно-постоянный вектор $\mathcal{D}\mathcal{X}{}_a^+$ (смотрите (2.248b)).

С учетом уравнения (2.239), уравнение (2.250) может быть записано эквивалентно в явно ковариантном виде

$$\mathcal{D}\mathcal{D}X - 2\gamma\mathcal{D}V = 0\,, \tag{2.251}$$

где $V \equiv v_a \mathcal{D}\mathcal{X}^{\,+}_{a}$, $\mathcal{D}V = \mathcal{D}v_a \mathcal{D}\mathcal{X}^{\,+}_{a}$ и $\mathcal{D}X = \mathcal{D}\mathcal{X}^{\,-}_{a}\mathcal{D}\mathcal{X}^{\,+}_{a}$.

2.4.3. Лагранжианы ГК-инвариантных моделей

Билинейные действия в ковариантных производных

Рассмотрим следующий общий класс действий для ГК-расширений механики АФФ

$$S_1 = \int dt\, E\, m_{pq}\, \mathcal{D}Y^p_a \mathcal{D}Y^q_a\,, \tag{2.252}$$

где $Y^p_a = (x_a, v_a, f_a)$ и m_{pq} является постоянной матрицей. Явная ГК-инвариантность этого действия очевидна. Отметим, что следуя предложению Д.В. Волкова [232], это действие можно эквивалентно переписать в геометрическом виде $\int \dfrac{m_{pq}\omega^p_a\omega^q_a}{\omega_H}$, где ω^p_a являются один-формами МК, соответствующие переменным Y^p_a.

Рассмотрим более детально случай

$$S_1 = \int dt\, L_1 = \tfrac{1}{2}\int dt\, E\, \mathcal{D}\mathcal{X}^+_a \mathcal{D}\mathcal{X}^+_a\,, \tag{2.253}$$

где $\mathcal{D}\mathcal{X}^+_a = e^u\Big[\dot{\mathcal{X}}^+_a - \mathcal{X}^-_a\left(\dot u - 2z\right) + \gamma^{-1}v_a\Big(e^u\left(\dot z + z^2\right) - \gamma^2 e^{-u}\Big)\Big]$, $E = e^{-u}$. Можно показать, что модель с действием (2.253) представляет собой одну из динамических систем, описываемую величинами ρ, $\mathcal{X}^+_a$ и X с уравнениями движения (2.9), (2.246) и (2.250). Исключая в (2.253) вспомогательную переменную z с помощью алгебраического уравнения движения и вводя новую переменную $\rho = e^{u/2}$, мы получаем эквивалентный лагранжиан

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\,\rho^2\Big[\dot{\mathcal{X}}^+_a + \gamma^{-1}v_a\Big(\rho\ddot\rho - \gamma^2\rho^{-2}\Big)\Big]^2. \tag{2.254}$$

В гамильтоновой формулировке система (2.253) описывается первичными связями

$$\mathcal{P}_{v_a} \approx 0\,, \qquad\qquad \mathcal{P}^-_a \approx 0\,, \tag{2.255}$$

$$\mathcal{F}_u \equiv p_u + \mathcal{X}^-_a\mathcal{P}^+_a \approx 0\,, \qquad \mathcal{F}_z \equiv p_z - \gamma^{-1}e^u v_a\mathcal{P}^+_a \approx 0\,, \tag{2.256}$$

где канонические пары суть

$$\{\mathcal{X}^{\pm}_a, \mathcal{P}^{\pm}_b\}_{{}_P} = \delta_{ab}\,, \quad \{v_a, \mathcal{P}_{v_b}\}_{{}_P} = \delta_{ab}\,, \quad \{z, p_z\}_{{}_P} = 1\,, \quad \{u, p_u\}_{{}_P} = 1\,. \quad (2.257)$$

Канонический гамильтониан равен

$$H_1 = \tfrac{1}{2}\, e^{-u}\mathcal{P}^+_a\mathcal{P}^+_a - \Big[2z\mathcal{X}^-_a + \gamma^{-1}v_a\Big(e^u z^2 - \gamma^2 e^{-u}\Big)\Big]\,\mathcal{P}^+_a\,.$$

Ненулевые скобки Пуассона связей (2.255)-(2.256)

$$\{\mathcal{F}_u, \mathcal{P}^-_a\}_{{}_P} = \mathcal{P}^+_a\,, \qquad \{\mathcal{F}_z, \mathcal{P}_{v_a}\}_{{}_P} = -\gamma^{-1}e^u\mathcal{P}^+_a\,, \qquad \{\mathcal{F}_u, \mathcal{F}_z\}_{{}_P} = \gamma^{-1}e^u v_a\mathcal{P}^+_a$$

показывают, что связи (2.255)-(2.256) представляют собой смесь связей первого и второго рода: связи $\mathcal{F}_u \approx 0$, $\mathcal{F}_z \approx 0$, $\mathcal{P}_{v_a}\mathcal{P}^+_a \approx 0$, $\mathcal{P}^-_a\mathcal{P}^+_a \approx 0$ второго рода, а связями первого рода являются компоненты связей $\mathcal{P}_{v_a} \approx 0$ и $\mathcal{P}^-_a \approx 0$, ортогональные к $\mathcal{P}^+_a$. Используя связи первого рода, мы исключаем компоненты векторов v_a, $\mathcal{P}_{v_a}$, $\mathcal{X}^-_a$ и $\mathcal{P}^-_a$, ортогональные к $\mathcal{P}^+_a$. Оставшимися после этого фазовыми переменными являются $\tilde{\mathcal{X}}^+_a$, $\mathcal{P}^+_a$, u, p_u, z, p_z и проекции векторов v_a, $\mathcal{P}_{v_a}$, $\mathcal{X}^-_a$, $\mathcal{P}^-_a$:

$$V \equiv v_a\mathcal{P}^+_a\,, \quad P_V\,; \qquad X \equiv \mathcal{X}^-_a\mathcal{P}^+_a\,, \quad P_X\,. \qquad (2.258)$$

Важно, что скобки Дирака для оставшихся переменных совпадают с их каноническими скобками Пуассона. Оставшиеся связи второго рода принимают вид

$$P_V \approx 0\,, \quad P_X \approx 0\,, \qquad \mathcal{F}_u \equiv p_u + X \approx 0\,, \quad \mathcal{F}_z \equiv p_z - \gamma^{-1}e^u V \approx 0\,. \quad (2.259)$$

Вводя скобки Дирака для них и исключая переменные p_u, p_z, P_V и P_X, мы остаемся с переменными u, z, V и X, ненулевые скобки Дирака которых

$$\{u, X\}_{{}_D} = -1, \quad \{z, V\}_{{}_D} = \gamma e^{-u}, \quad \{V, X\}_{{}_D} = V, \quad \{\mathcal{X}^+_a, \mathcal{P}^+_b\}_{{}_D} = \delta_{ab}. \quad (2.260)$$

Гамильтониан при этом принимает вид

$$H_1 = \tfrac{1}{2}\, e^{-u}\mathcal{P}^+_a\mathcal{P}^+_a - 2zX - \gamma^{-1}\Big(e^u z^2 - \gamma^2 e^{-u}\Big)V\,. \qquad (2.261)$$

Выражения (2.260), (2.261) полностью определяет динамику модели (2.253).

В переменных

$$\rho \equiv e^{u/2}\,, \qquad p_\rho \equiv -2e^{-u/2}X, \qquad y \equiv -2e^{u}V\,, \qquad p_y \equiv \gamma^{-1}z, \tag{2.262}$$

которые образуют две канонические пары, $\{\rho, p_\rho\}_{D} = 1$, $\{y, p_y\}_{D} = 1$, (другие скобки Дирака равны нулю), гамильтониан (2.261) сводится к следующему виду

$$H_1 = \tfrac{1}{2}\,\rho^{-2}\mathcal{P}^+_a\mathcal{P}^+_a + \gamma\,(\rho p_\rho + y p_y)\,p_y - \gamma\rho^{-4}y\,. \tag{2.263}$$

Следовательно, в формализме первого порядка действие системы имеет вид

$$S_1 = \int dt\left[\mathcal{P}^+_i\dot{\mathcal{X}}^+_i + p_\rho\dot\rho + p_y\dot y - \tfrac{1}{2}\,\rho^{-2}\mathcal{P}^+_a\mathcal{P}^+_a - \gamma\,(\rho p_\rho + y p_y)\,p_y + \gamma\rho^{-4}y\right].$$

Исключая импульсы $\mathcal{P}^+_a$, p_ρ and p_y посредством их уравнений движения, мы получаем

$$S_1 = \int dt\left[\frac{1}{2}\,\rho^2\dot{\mathcal{X}}^+_a\dot{\mathcal{X}}^+_a + \frac{1}{\gamma\rho}\left(\dot y\dot\rho - \frac{y}{\rho}\,\dot\rho\dot\rho\right) + \frac{\gamma y}{\rho^4}\right]. \tag{2.264}$$

Это действие является обобщением действия конформная механики (2.8), но помимо инвариантности относительно одномерной конформной симметрии SO(2, 1), действующей на ρ и y, модель (2.264) инвариантна также относительно полной ГК симметрии.

Действия с квадратным корнем

Второй способ введения динамики в сектор векторных параметров фактор-пространства обеспечивается лагранжианом в виде квадратного корня от произведения векторных один-форм, подобно модели свободной релятивистской частицы. Соответствующее действие имеет вид

$$S_2 = m\int\sqrt{\omega^+_{A,a}\omega^+_{A,a}}\;, \tag{2.265}$$

где m – константа. Отметим, что действие (2.265) является частным случаем более общего действия

$$S_2 = m\int\sqrt{m_{pq}\,\omega^p_a\omega^q_a}\;, \tag{2.266}$$

где ω^a_i есть векторные один-формы МК.

Модель (2.265) подобна модели (2.253), но динамика в секторе векторной переменной $\mathcal{X}^+_a$ теперь другая. В отличие от модели (2.253), величины $\mathcal{P}^+_a =$

$m\,\mathcal{D}\mathcal{X}^{\,+}_{a}\left(\mathcal{D}\mathcal{X}^{\,+}_{b}\mathcal{D}\mathcal{X}^{\,+}_{b}\right)^{-1/2}$, которые являются сопряженными импульсами для $\mathcal{X}^{+}_{a}$ в гамильтоновом формализме, подчиняются дополнительной связи

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{P}^{+}_{a}\mathcal{P}^{+}_{a} - m^2 = 0\,. \qquad (2.267)$$

Связь (2.267) означает, что импульсный вектор $\mathcal{P}^{+}_{a}$ параметризует сферу $S^{\,d-1}$ и постоянная m играет роль ее радиуса. После фиксации калибровки для связей первого рода, представленных в (2.255), (2.256), исключения вспомогательных переменных и введения новых переменных (2.262), которые являются каноническими относительно скобки Дирака, мы находим, что модель (2.265) описывается следующим гамильтонианом (сравните с (2.263)):

$$H_2 = \lambda\left(\mathcal{P}^{+}_{a}\mathcal{P}^{+}_{a} - m^2\right) + \gamma\left(\rho p_\rho + y p_y\right)p_y - \gamma\rho^{-4}y\,. \qquad (2.268)$$

Здесь, первый член отражает присутствие связи первого рода (2.267), где $\lambda(t)$ является лагранжевым множителем.

Таким образом, применение метода нелинейных реализаций позволило построить действия (2.253) и (2.265), инвариантные относительно ГК симметрии. Следует отметить, что дополнительные векторные переменные $\mathcal{X}^{+}_{a}$ и $\mathcal{P}^{+}_{a}$, которые являются характерной чертой новых ГК-инвариантных моделей, играют роль некоторых "угловых" переменных в многомерных механических моделях с SO(2, 1)-инвариантностью, где стандартная конформная механика описывает радиальную степень свободы.

"Экзотический" $D{=}\,2{+}1$ случай

В этом случае, присутствие один-формы (2.238), связанной с центральным зарядом, позволяет рассмотреть ГК механику, определяемую действием

$$\tilde{S} \;= \tilde{S}_{conf} + \tilde{S}_{\theta} = -\gamma\int\omega^{+}_{R} + \theta\int\omega_{\Theta}\,. \qquad (2.269)$$

Первый член описывает сектор стандартной конформной механики [42, 211], тогда как сектор векторных полей фактор-пространства представлен членом Весса-Зумино.

Для получения минимальной формулировки мы используем условия обратного эффекта Хиггса

$$\omega_{P,\,a} = 0\,, \qquad \omega_{B,\,a} = 0 \qquad (2.270)$$

в действии (2.269). Подставляя в действие (2.269) выражения

$$v_a = e^u \left[\dot{x}_a + (\dot{u} - 2z)x_a\right] , \qquad f_a = e^u \left[\tfrac{1}{2}\,\dot{v}_a + e^u(\dot{z} + z^2)x_a\right] , \tag{2.271}$$

которые следуют из обратного эффекта Хиггса (2.270), а также выражения для один-форм (2.15), мы получаем

$$\omega_\Theta = \left[\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ab}\dot{y}_a\ddot{y}_b + \frac{d}{dt}\left(\phi - z\epsilon_{ab}y_a\dot{y}_b\right)\right] dt\,. \tag{2.272}$$

Исключение поля z с помощью его алгебраического уравнения движения дает действие

$$\tilde{S} = \int dt \left(\dot{\rho}^2 - \frac{\gamma^2}{\rho^2} + \frac{\theta}{2}\,\epsilon_{ab}\dot{y}_a\ddot{y}_b\right) , \tag{2.273}$$

где $y_a \equiv e^u x_a$. Таким образом, мы получаем расщепленную пару ГК-инвариантных $D{=}\,2{+}1$ моделей. Одна из них является конформной механикой АФФ с действием (2.8), тогда как другая описывается действием Весса-Зумино.

2.5. Суперконформная симметрия Галилея

Релятивистское AdS/CFT соответствие [39, 40, 41] имеет свое лучшее обоснование в суперсимметричных теориях (например, соответствие $D=5$ супергравитации и $N=4$ $D=4$ теории супер-Янг-Миллса). Поэтому является актуальным изучение нерелятивистской суперконформной симметрии для более глубокого понимания нерелятивистской конформной теории. В этом разделе мы ограничимся исследованиями суперсимметричных расширений конформных алгебр Галилея. Супералгебры суперконформной симметрии Галилея были построены в [233, 234] из релятивистских конформных супералгебр методами контракции. Здесь мы установим связь суперконформных алгебр Галилея (СУСИ КАГ) с супералгебрами, описывающими модели расширенной суперконформной механики. Мы получим, что суперсимметризация абелевого сектора трансляций, галилеевских бустов и постоянных ускорений требует добавления подходящего сектора градуированных абелевых фермионных суперзарядов и, возможно, дополнительных бозонных абелевых зарядов.

Мы будем строить суперконформные алгебры Галилея с помощью расширения простых стандартных суперралгебр посредством бозонных и фермионных градуированных абелевых зарядов. Конечно, суперконформная алгебра Галилея должна содержать как подалгебру конформную алгебру Галилея (2.214), которая описывается следующей полупрямой суммой $\mathcal{C}^{(d)} = \Big(o(2,1) \oplus o(d)\Big) \ltimes \mathcal{A}^{(3d)}$ с вещественными генераторами T_r $(r = 0,1,2)$, $J_{ab} = -J_{ba}$ $(a,b = 1,...,d)$, $A_{r,a} = (P_a, B_a, F_a)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (2.3), (2.215)-(2.219) (соотношения (2.217) имеют вид $[T_r, A_{s,a}] = i\,\epsilon_{rs}{}^t\, A_{t,a}$).

Мы используем следующую схему построения суперконформных алгебр Галилея. Во-первых, мы вводим простую суперралгебру $G_+^{(d)}$, которая содержат $O(2,1) \oplus O(d)$ как бозонную подалгебру. Далее мы расширяем суперралгебру $G_+^{(d)}$ посредством градуированной абелевой суперралгебры $G_-^{(d)} = (\mathcal{B}_-^{(d)}, \mathcal{Q}_-^{(d)})$,

$$[\mathcal{B}_-^{(d)}, \mathcal{B}_-^{(d)}] = 0\,, \qquad [\mathcal{B}_-^{(d)}, \mathcal{Q}_-^{(d)}] = 0\,, \qquad \{\mathcal{Q}_-^{(d)}, \mathcal{Q}_-^{(d)}\} = 0\,, \tag{2.274}$$

и постулируем, что генераторы $A_{r,a}$ принадлежат суперралгебре $G_-^{(d)}$ $(A_{r,a} \in \mathcal{B}_-^{(d)})$. В нашей СУСИ КАГ, которую мы будем обозначать посредством $G^{(d)}$, градуированные абелевы генераторы подалгебры $G_-^{(d)} = (\mathcal{B}_-^{(d)}, \mathcal{Q}_-^{(d)})$ удовлетворяют (2.274) и

$$[G_+^{(d)}, G_-^{(d)}\} \subset G_-^{(d)}\,. \tag{2.275}$$

Следовательно, СУСИ КАГ имеет структуру полупрямой суммы

$$G^{(d)} = G_+^{(d)} \ltimes G_-^{(d)}\,. \tag{2.276}$$

Структура (2.276) подразумевается также процедурой фактор-пространственной контракции Иноню-Вигнера [235] релятивистских конформных симметрий.

2.5.1. N-расширенные $d{=}3$ суперконформные алгебры Галилея

В $d{=}3$ простейшей суперсимметризацией полупростой части конформной алгебры Галилея $g^{(3)} = (O(2,1) \oplus O(3)) \ltimes \mathcal{A}^{(9)} = h^{(3)} \ltimes k^{(3)}$ является $OSp(3|2) \equiv OSp(3|2;\mathbb{R})$. Но можно показать, что невозможно расширить такую супералгебру посредством градуированного абелевого сектора, содержащего $\mathcal{A}^{(9)} = (P_a, B_a, F_a)$ $(a = 1, 2, 3)$. Следующим кандидатом для суперсимметризации $h^{(3)}$ является супергруппа $OSp(4|2) \equiv OSp(4|2;\mathbb{R})$, имеющая внутренний сектор $O(4) = O(3) \oplus O(3)$. При таком способе суперсимметризации $O(2,1) \oplus O(3)$ мы добавляем еще один дополнительный фактор $O(3)$. Но такая бозонная симметрия имеет место в $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной механике. Поэтому, мы будем рассматривать в качестве возможного выбора $G_+^{(3)}$ самую общую $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформную алгебру $D(2,1;\alpha)$.

Супералгебра $D(2,1;\alpha)$ [221, 148] образована генераторами (2.152), (2.156), ненулевые (анти)коммутаторы которых определены в (2.153)-(2.155) и $Q^+_{\alpha ii'} \equiv Q_{\alpha ii'}$. Построим градуированное абелевое расширение супералгебры $D(2,1;\alpha)$ добавлением генераторов

$$G_-^{(3)} = \left(Q^-_{\alpha ii'}; A_{\alpha\beta,ij}, A_0\right)\ , \tag{2.277}$$

где $A_{\alpha\beta,ij}$ описывает в спинорных обозначениях три 3-вектора $A_{r,a} \cong (P_a, B_a, F_a)$. Генераторы (2.277) образует абелеву подалгебру. Помимо условий ковариантности $[T_{\alpha\beta}, Q^-_{\gamma ii'}] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q^-_{\beta)\alpha A}$, $[T_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta,ij}] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}A_{\beta)\delta,ij} - i\,\epsilon_{\delta(\alpha}A_{\beta)\gamma,ij}$, $[T_{ab}, A_0] = 0$ и т.д., нетривиальными перекрестными антикоммутаторы $G_-^{(3)}$ и $G_+^{(3)} = D(2,1;\alpha)$ являются

$$\{Q^+_{\alpha ii'}, Q^-_{\beta jj'}\} = \beta\,\epsilon_{i'j'}A_{\alpha\beta,ij} + \gamma\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}A_0\,, \tag{2.278}$$

$$[Q^+_{\alpha ii'}, A_{\beta\gamma,jk}] = -4i\,\epsilon_{\alpha(\beta}\epsilon_{i(j}Q^-_{\gamma)k)i'}\,, \qquad [Q^+_{aii'}, A_0] = i\,Q^-_{aii'}\,, \tag{2.279}$$

Но выполнение тождества Якоби для (Q^+, Q^+, Q^-) приводит к единственным возможным значениям констант β и γ в (2.278):

$$\beta = \gamma = 1\,. \tag{2.280}$$

Более того, эти тождества фиксируют значение $\alpha = 1$ для параметра α, характеризирующего супералгебру $D(2,1;\alpha)$. Но $D(2,1;\alpha{=}1)$ является супералгеброй $OSp(4^*|\,2)$. Мы видим, что суперрасширение $d{=}\,3$ КАГ однозначно выбирает из однопараметрического семейства $D(2,1;\alpha)$ суперсимметрий только один представитель – $OSp(4^*|\,2)$.

Для получения N-расширенной суперсимметризации предположим, что

$$G_+^{(3)} \ = \ OSp\,(4^*|\,2N)\,. \tag{2.281}$$

Базис этой супералгебры образован генераторами

$$G_{+}^{(3)} = \left\{ Q_{\alpha i A}^{+}; R_{(\alpha\beta)}, J_{[ab]}, T^{+A}_{\ \ B} \right\} \,, \tag{2.282}$$

где генераторы $T^{+A}_{\ \ B}$ $(A, B = 1, ..., 2N)$ описывают внутреннюю кватернионную алгебру $U(N|\mathbb{H}) \cong USp(2N)$. $8N$ суперзарядов $Q_{\alpha i A}^{+}$ удовлетворяют Майорана-симплектическому условию вещественности (см., например, [236]).

Получим N-расширенную $d{=}\,3$ СУСИ КАГ с такой структурой как результат контракции Иноню-Вигнера (ИВ) $2N$-расширенной релятивистской D=3+1 суперконформной алгебры $SU(2,2|2N)$. Для этого сделаем следующее разложение $2N$-расширенной конформной супералгебры

$$SU(2,2|2N) \;=\; OSp(4^{*}|2N) \subset\!\!\!\!+ \frac{SU(2,2|2N)}{OSp(4^{*}|2N)} \;=\; \mathrm{H}_{N}^{(3)} \subset\!\!\!\!+ \mathrm{K}_{N}^{(3)} \tag{2.283}$$

и осуществим контракцию ИВ $\lambda \to \infty$ после масштабных преобразований генераторов фактор-пространства

$$\mathrm{H}_{N}^{(3)} = \hat{\mathrm{H}}_{N}^{(3)} \,, \qquad \mathrm{K}_{N}^{(3)} = \lambda \, \hat{\mathrm{K}}_{N}^{(3)}; \qquad\qquad \hat{\mathrm{H}}_{N}^{(3)} = G_{+}^{(3)} \,, \qquad \hat{\mathrm{K}}_{N}^{(3)} = G_{-}^{(3)} \,. \tag{2.284}$$

При выполнении этого выделяем $O(3)$-ковариантные величины из $O(3,1)$-векторных операторов и $U(N|\mathbb{H}) \cong USp(2N)$ майорановские спиноры из $U(2N)$-спинорных суперзарядов. Генераторы внутренней симметрии T^{A}_{B} расщепляются посредством

$$T^{\pm A}_{\ \ B} \equiv T^{A}_{B} \pm \Omega^{AC} \, T^{D}_{C} \, \Omega_{DB} \tag{2.285}$$

на следующие два множества

$$\left(T^{+A}_{\ \ B} \right) = USp(2N) \,, \qquad\qquad \left(T^{-A}_{\ \ B} \right) = \frac{SU(2N)}{USp(2N)} \,. \tag{2.286}$$

Здесь вещественная матрица $\Omega = (\Omega^{AB})$ $(\Omega_{AB} \equiv (\overline{\Omega^{AB}}) = \Omega^{AB})$ является $2N \times 2N$ симплектической метрикой, $\Omega^{2} = -1$, $\Omega^{T} = -\Omega$. После контракции $USp(2N)$-майорановские суперзаряды разделяются на множества $Q^{\pm}$. Аналогичная ситуация имеет место с генераторами R-симметрии $T^{\pm A}_{\ \ B}$.

2.5.2. N-расширенные суперконформные механики и их связь с суперконформными алгебрами Галилея при $d = 1, 2, 4, 5$

<u>$d = 1$</u>

Множество $G_{+}^{(1)}$ состоит из вещественных генераторов (2.81), образующих супералгебру $OSp\,(1|2)$ и описывающих градуированные симметрии $\mathcal{N}=1$ суперконформной механики [50]. Ненулевыми антикоммутаторами являются (2.5), (2.82). Градуированное расширение алгебры $OSp\,(1|2)$ дается генераторами

$$G_{-}^{(1)} = \left(Q_{\alpha}^{-}; A_{\alpha\beta}\right), \qquad (Q_{\alpha}^{-})^{\dagger} = Q_{\alpha}^{-}\,, \qquad (A_{\alpha\beta})^{\dagger} = A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}\,, \tag{2.287}$$

которые образуют абелеву подалгебру $\{Q_{\alpha}^{-}, Q_{\beta}^{-}\} = [Q_{\alpha}^{-}, A_{\beta\gamma}] = [A_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta}] = 0$ и преобразуются по представлению $OSp\,(1|2)$:

$$\{Q_{\alpha}^{+}, Q_{\beta}^{-}\} = b\, A_{\alpha\beta}\,, \qquad [Q_{\alpha}^{+}, A_{\beta\gamma}] = 2i\, \epsilon_{\alpha(\beta} Q_{\gamma)}^{-}\,, \tag{2.288}$$

$$[T_{\alpha\beta}, Q_{\gamma}^{-}] = -i\, \epsilon_{\gamma(\alpha} Q_{\beta)}^{-}\,, \qquad [T_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta}] = -i\, \epsilon_{\gamma(\alpha} A_{\beta)\delta} - i\, \epsilon_{\delta(\alpha} A_{\beta)\gamma}\,, \tag{2.289}$$

где вещественный параметр b фиксируется значением $b = 1$, следующим из выполнения тождеств Якоби (Q^{+}, Q^{+}, Q^{-}).

Конечномерная $D{=}d+1{=}2$ конформная супералгебра является суммой $d{=}0$ галилеевских конформных супералгебр $OSp(1|2)\oplus OSp(1|2)$. $d{=}1$ простая СУСИ КАГ может быть получена ИВ-контракцией разложения

$$OSp(1|2)\oplus OSp(1|2) = OSp(1|2)_D \in\!\!\!\!+ \frac{OSp(1|2)_L \oplus OSp(1|2)_R}{OSp(1|2)_D}\,, \tag{2.290}$$

где генераторы $G_{+}^{(1)} = OSp(1|2)_D$ получаются из диагональных сумм $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{g}_L + \hat{g}_R) = \hat{g}_D$ левых и правых генераторов. Контракция масштабно-преобразованных разностей $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{g}_L - \hat{g}_R)$ производит 3 генераторы подалгебры $A_{\alpha\beta}$.

Семейство расширенных $d{=}1$ СУСИ КАГ параметризованно парой чисел (N, M), которые могут быть определены как подходящие ИВ контракции фактор-пространственных разложений супералгебр $OSp(N|2)_L\oplus OSp(M|2)_R$.

<u>$d = 2$</u>

Генераторы (2.84), (2.85) множества $G_{+}^{(2)}$ образуют супералгебру $SU(1,1|1)\cong OSp\,(2|2)$ с одним центральным зарядом [45, 46, 47, 50], ненулевые (анти)коммутаторы которой (2.5), (2.86)-(2.88). Для получения расширения супералгебры $SU(1,1|1)$, соответствующего $d{=}2$ СУСИ КАГ, мы добавляем генераторы

$$G_-^{(2)} = \left(Q^-_\alpha, \bar{Q}^-_\alpha; A_{\alpha\beta}, \bar{A}_{\alpha\beta}\right), \quad (Q^-_\alpha)^\dagger = \bar{Q}^-_\alpha\,, \quad (A_{\alpha\beta})^\dagger = \bar{A}_{\alpha\beta} = \bar{A}_\beta\,, \qquad (2.291)$$

которые образуют абелеву подалгебру $\{Q^-_\alpha, Q^-_\beta\} = \{Q^-_\alpha, \bar{Q}^-_\beta\} = [Q^-_\alpha, A_{\beta\gamma}] = [Q^-_\alpha, \bar{A}_{\beta\gamma}] = [A_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta}] = [A_{\alpha\beta}, \bar{A}_{\gamma\delta}] = 0$ и преобразуются посредством следующих представлений суперруппы $SU(1,1|1)$ (см. (2.275))

$$\{Q^+_\alpha, Q^-_\beta\} = 2\,b\,A_{\alpha\beta}\,, \qquad \{\bar{Q}^+_\alpha, \bar{Q}^-_\beta\} = 2\,b\,\bar{A}_{\alpha\beta}\,, \qquad (2.292)$$

$$[Q^+_\alpha, \bar{A}_{\beta\gamma}] = -2i\,\epsilon_{\alpha(\beta}\bar{Q}^-_{\gamma)}\,, \qquad [\bar{Q}^+_\alpha, A_{\beta\gamma}] = -2i\,\epsilon_{\alpha(\beta}Q^-_{\gamma)}\,, \qquad (2.293)$$

$$[C, Q^-_\alpha] = -2\,b\,Q^-_\alpha\,, \qquad [C, A_{\alpha\beta}] = -2\,b\,A_{\alpha\beta}\,,\,, \qquad (2.294)$$

$$[T_{\alpha\beta}, Q^-_\gamma] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q^-_{\beta)}\,, \quad [T_{\alpha\beta}, A_{\gamma\delta}] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}A_{\beta)\delta} - i\,\epsilon_{\delta(\alpha}A_{\beta)\gamma}\,, \qquad (2.295)$$

$$[J, Q^-_\alpha] = -Q^-_\alpha\,, \qquad [J, A_{\alpha\beta}] = -2\,A_{\alpha\beta}\,, \qquad (2.296)$$

где введены два вещественных параметра b и c. Выполнение тождеств Якоби $\left(Q^+, \bar{Q}^+, Q^-\right)$ приводят к фиксации этих констант: $b = c = 1$. Отметим, что для согласованности полученной алгебры $G^{(2)}$ необходим генератор C, который является центральным зарядом в $G^{(2)}_+$, но в полной супералгебре $G^{(2)}$ он генерирует $U(1)$ преобразования, действующего на $G^{(2)}_-$.

Для получения N-расширенной СУСИ КАГ мы берем центральное расширение супералгебры $SU(1,1|\,N)$

$$G^{(2)}_+ = SU(1,1|\,N) \oplus U(1) \qquad (2.297)$$

в качестве супералгебры $G^{(2)}_+$ и вводим ее в фактор-пространственное разложение $D{=}\,1{+}2$ релятивистской конформной супералгебры $OSp\,(4|\,2N)$

$$OSp\,(4|\,2N) = \Big(SU(1,1|\,N) \oplus U(1)\Big) \in\!\!\!\!+ \frac{OSp\,(4|\,2N)}{SU(1,1|\,N) \oplus U(1)} = \mathrm{H}^{(2)}_N \in\!\!\!\!+ \mathrm{K}^{(2)}_N\,.$$

Фактор $\mathrm{K}^{(2)}_N = \frac{OSp\,(2N|\,4)}{SU(1,1|\,N)\oplus U(1)}$ содержит произведение двух бозонных факторов $\frac{Sp\,(4)}{SU(1,1)\oplus U(1)} \cdot \frac{O(2N)}{U(N)}$. После контракции ИВ $\mathrm{H}^{(2)}_N \in\!\!\!\!+ \mathrm{K}^{(2)}_N \to G^{(2)}_+ \in\!\!\!\!+ G^{(2)}_-$ первый фактор $\frac{Sp\,(4)}{SU(1,1)\oplus U(1)}$ производит множество генераторов (P_a, B_a, F_a), $a = 1, 2$, тогда как второй фактор $\frac{O(2N)}{U(N)}$ дает внутренние бозонные абелевы заряды N-расширенной $d{=}\,2$ СУСИ КАГ.

$\underline{d=4}$

В этом случае простейшая релятивистская $D{=}\,5$ суперконформная алгебра описывается исключительной супералгеброй $F(4)$, или, более точно, ее вещественной формой, определяемой супералгеброй $F(4)\,=\,F(4;2)$ [221], которая содержит бозонную подалгебру $O(5,2){\oplus}\,O(3)$. Этот выбор бозонной формы отличается от другой вещественной супералгебры $F(4)\,=\,F(4;0)\,\ni\,O(2,1){\oplus}\,O(7)$, используемой в $\mathcal{N}{=}\,8$ суперконформной механике. Отметим, что $N{>}\,1$ $D{=}\,5$ суперконформная алгебра может быть получена только из размерной редукции $D{=}\,6$ суперконформных алгебр (см., например, [237, 238]).

Суперсимметричное обобщение $G_+^{(4)}$ бозонной полупростой алгебры $O(2,1)\oplus O(4)$ приводит, как и в случае $d{=}\,3$, к супералгебре $G_+^{(3)}\;=\;OSp\,(4^*|\,2)$, определенной в (2.153)-(2.155). Вводя разложение

$$F(4;2) = OSp\,(4^*|\,2) \mathbin{\in\!\!\!\!|} \frac{F(4;2)}{OSp\,(4^*|\,2)} = \mathrm{H}_N^{(4)} \mathbin{\in\!\!\!\!|}\, \mathrm{K}_N^{(4)} \qquad (2.298)$$

и выполняя контракцию ИВ $\mathrm{H}_N^{(4)} \mathbin{\in\!\!\!\!|}\, \mathrm{K}_N^{(4)} \to G_+^{(4)} \mathbin{\in\!\!\!\!|}\, G_-^{(4)}$ мы получаем $d{=}\,4$ СУСИ КАГ. Фактор-пространство $\mathrm{K}_N^{(4)}$ становится градуированной абелевой супералгеброй $G_-^{(4)}$ с 8 фермионными градуированными абелевыми суперзарядами $Q^-_{\alpha iA}$ и 15 бозонными абелевыми зарядами, получаемыми из контракции $\frac{O(5,2)\oplus O(3)}{O(2,1)\oplus O(4)}$ и включающими $d{=}\,4$ генераторы (P_a, B_a, F_a).

$\underline{d=5}$

N-расширенной $D{=}\,6$ суперконформной алгеброй [236], которая содержит $D{=}\,6$ конформную алгебру $O(6,2)$, является супералгебра $OSp\,(8^*|\,2N)$ с $16N$ вещественными суперзарядами и бозонным сектором $O(6,2)\oplus USp(2N)$. Для получения супералгебры $G_+^{(5)}$ необходимо суперсимметризовать бозонный сектор $O(2,1)\oplus O(5)$. Минимальной супералгеброй есть $G_+^{(5)}\;=\;OSp\,(4^*|\,4)$ с 16 вещественными суперзарядами и бозонной подалгеброй $O(3)\oplus O(2,1)\oplus O(5)$.

$N{=}\,1$ $d{=}\,5$ СУСИ КАГ получается посредством ИВ контракции следующего фактор-пространственного разложения $D{=}\,6$ $N{=}\,2$ релятивистской конформной супералгебры

$$OSp\,(8^*|\,4) = OSp\,(4^*|\,4) \in\!\!\!\!+ \frac{OSp\,(8^*|\,4)}{OSp\,(4^*|\,4)} = \mathrm{H}^{(5)} \in\!\!\!\!+ \mathrm{K}^{(5)}\,. \qquad (2.299)$$

После ИВ контракции $\mathrm{H}^{(5)} \in\!\!\!\!+ \mathrm{K}^{(5)} \to G_+^{(5)} \in\!\!\!\!+ G_-^{(5)}$ фактор-алгебра $\mathrm{K}^{(5)}$ становится градуированной абелевой супералгеброй $G_-^{(5)}$ с 16 фермионными градуированными абелевыми зарядами и 22 бозонными абелевыми зарядами, которые включают $d{=}\,5$ генераторы (P_a, B_a, F_a), получаемые из контракции $\frac{O(6,2)}{O(2,1)\oplus O(3)}$.

При $N{>}\,1$ необходимо рассмотреть контракцию $D{=}\,6$ суперконформной алгебры с четным $N = 2n$, $G_+^{(5)} = OSp\,(4^*|\,4n)$, и N-расширенная $d{=}\,5$ СУСИ КАГ получается из контракции ИВ средующего фактор-разложения

$$OSp\,(8^*|\,4n) = OSp\,(4^*|\,4n) \in\!\!\!\!+ \frac{OSp\,(8^*|\,4n)}{OSp\,(4^*|\,4n)} = \mathrm{H}_N^{(5)} \in\!\!\!\!+ \mathrm{K}_N^{(5)}\,. \qquad (2.300)$$

Градуированная супералгебра $G_-^{(5)}$, получаемая из $\mathrm{K}_N^{(5)}$, содержит $16n$ фермионных антикоммутирующих зарядов и 22 бозонных абелевых зарядов. Как видим, число бозонных генераторов в подалгебре $G_-^{(5)}$ не зависит от n.

2.6. Резюме

В данной главе построены новые квантово-механические модели, обладающие $d{=}1$ конформной и суперконформной симметрией, а также системы с конформной и суперконформной симметрией Галилея, являющиеся определенными обобщениями первых.

Модели конформной механики и многочастичные модели Калоджеро получены из калибрования нединамическими $d{=}1$ калибровочными полями специальной матричной модели. Кроме того, расширение стандартной конформной механики “полу-динамическими” изоспиновыми переменными обеспечивает новый механизм генерации конформного потенциала.

Подробно изучены $\mathcal{N}{=}\,1$ and $\mathcal{N}{=}\,2$ суперрасширения конформной группы с рассмотрением моделей соответствующей суперконформной механики как на суперполевом, так и на компонентном уровнях. С использованием суперсимметричной версии процедуры калибрования разработаны новые $\mathcal{N}{=}\,1$

и $\mathcal{N}{=}\,2$ суперконформные расширения бозонной модели Калоджеро, отличные от ранее известных моделей, например, от $\mathcal{N}{=}\,2$ модели супер-Калоджеро в формулировке Фридмана-Менде.

В этой главе представлены также новые модели $\mathcal{N}{=}\,4$ суперконформной механики, как в одночастичном, так и в многочастичном случаях. Данные модели, и одночастичные системы и $\mathcal{N}{=}\,4$ суперсимметризации модели Калоджеро, являются составными $\mathcal{N}{=}\,4$ квантово-механическими моделями и описывают внемассовое взаимодействие динамических $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ и спиновых $(\mathbf{4{,}4{,}0})$ мультиплетов. Они наследуют суперконформную $D(2,1;\alpha)$-инвариантность динамической $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ системы и, при этом, обладают новым механизмом появления конформного потенциала $\sim\, x^{-2}$ с квантованной напряженностью для бозонного поля $x(t)$ в мультиплете $(\mathbf{1{,}4{,}3})$ вследствие присутствия спиновых переменных. Бозонные переменные спинового $(\mathbf{4{,}4{,}0})$ мультиплета [147, 148] образуют SU(2) дублеты и после квантования по Дираку производят алгебру Гейзенберга бозонных осцилляторов, определяющих размытую сферу в результате применения квантовой версиии расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$.

В данной главе проведено исследование систем с симметриями относительно конформной группы Галилея в произвольной пространственно-временной размерности $D = d{+}1$, являющейся обобщением одномерной конформной группы. До недавнего времени единственной известной лагранжевой моделью классической механики с конформной симметрией Галилея была система, которая описывалась действием черн-саймоновского типа с высшими производными в “экзотической” размерности $D{=}\,2{+}1$. Трудности с поиском динамических реализаций при $d{\neq}\,2$ были одними из проблемных особенностей конформной симметрии Галилея. С помощью подхода нелинейных реализаций нами получены новые динамические модели, в том числе для произвольной пространственной размерности d. Анализ один-форм Маурера-Картана с подходящими условиями обратного эффекта Хиггса и динамическими ковариантными связями позволил построить множество моделей классической механики с конформной симметрией Галилея, которые содержат, помимо скалярной координаты фактор-пространства, также дополнительные нерелятивистские векторные переменные.

Целью этой главы было также явное описание алгебраической структуры суперконформной алгебры Галилея (СУСИ КАГ) в $1 \leq d \leq 5$ пространственных измерениях. Сначала была рассмотрена простая $N = 1$ d=3 СУСИ КАГ, получаемая как подходящее расширение простейшей суперсимметризации алгебры $O(2,1) \oplus O(3) = O^*(4)$, и было показано, что возможность суперсимметризации абелевой подалгебры выбирает из бесконечного семейства суперaлгебр $D(2,1;\alpha)$, описывающего различные версии $\mathcal{N} = 4$ суперконформной механики [47, 50, 69, 147, 148], только одно значение $\alpha = 1$, при котором $D(2,1;\alpha) \cong OSp\,(4^*|\,2)$. Рассмотрены также N-расширенные суперсимметричные КАГ при $d = 1,2,3,4,5$ алгебры с обсуждением контракции Иноню-Вигнера релятивистских конформных суперсимметрий. Получение N-расширенных СУСИ КАГ из расширения полупростых супералгебр $G_+^{(d)}$ предполагает использовать в качестве последних $\mathcal{N}$-расширенные суперсимметрии в моделях суперконформной механики

$$G_+^{(d)} = \begin{cases} OSp\,(1|2) & \text{при} \quad d = 1 & \cong & \mathcal{N} = 1\,, \\ SU(1,1|\,1) \oplus U(1) & \text{при} \quad d = 2 & \cong & \mathcal{N} = 2\,, \\ OSp\,(4^*|2) & \text{при} \quad d = 3 \text{ и } d = 4 & \cong & \mathcal{N} = 4\,, \\ OSp\,(4^*|4) & \text{при} \quad d = 5 & \cong & \mathcal{N} = 8\,. \end{cases} \qquad (2.301)$$

Результаты настоящей главы опубликованы в работах [146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154] и трудах конференций [155, 156, 157].

Глава 3

Твисторные формулировки спиновой частицы и суперчастицы

3.1. Предварительные комментарии и постановка задачи

Целью данной главы будет постороение и изучение твисторных моделей релятивистских частиц, как безмассовых, так и массивных, обладающих произвольным фиксированным спином (спиральностью, в безмассовом случае). Также будут рассмотрены обобщения предложенных конструкций на случаи наличия суперсимметрии в таргетном пространстве моделей. Вследствие фундаментального значения данной задачи, следует дать определенные комментарии, проясняющие поставленные задачи и полученные результаты.

Решение данных задач требует преодоления двух важных проблем.

Во-первых, необходимо определить описание состояний массивных частиц в твисторном формализме, изначально развитом и по своему определению предназначенном для описания безмассовых частиц. Хорошо известно, что описание массивных состояний в твисторном подходе требует использование в минимальном случае битвисторного формализма. Но твисторное описание массивных частиц развито пока недостаточно и в данной главе мы останавливаемся на его принципиальных моментах на примерах классических твисторных моделей релятивистской массивной частицы и массивной суперчастицы и их последующего канонического квантования.

Второй проблемой является описание спина релятивистской частицы. Одним из способов описания спиновых состояний в твисторной теории связан с введением комплексифицированного пространства-времени. Но такой вариант введения в теорию спиновых степеней свободы не является геометрическим и не проясняет связь пространственно-временного и твисторного описаний состояний частицы. Описание спина является фундаментальной задачей и предполагает ее решение уже в пространственно-временном формализме. При этом, построенное пространственно-временное описание спина позволит увидеть дополнительные возможности в твисторном формализме.

Хорошо известно, что на классическом уровне спин описывается в теории посредством введения дополнительных координат, часть из которых могут быть вспомогательными. Эти спиновые переменные, коммутирующие или антикоммутирующие, являться разными тензорными объектами группы Лоренца. Выбор спиноров в качестве основных спиновых переменных является выделенным, поскольку определение спина в пространстве состояний связано с пространством неприводимого представления малой группы, квантовомеханическим аналогом которой для массивной частицы является спинорная группа SU(2), имеющая в качестве надлежащего комплексного расширения квантовомеханическую группу Лоренца $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Применение вейлевского "унитарного" трюка связывает неприводимые унитарные представления компактной группы SU(2) с неприводимыми представлениями группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Построение модели массивной частицы со спином может быть реализовано в системе покоя двумя способами: используя либо коммутирующие (бозонные) координаты или антикоммутирующими (фермионные или грассмановы) переменные.

При использовании бозонных спиновых переменных нерелятивистский спин описывается лагранжианом первого порядка $\alpha i(\zeta\dot{\bar{\zeta}} - \dot{\zeta}\bar{\zeta}) - \lambda(\zeta\bar{\zeta} - 1)$, где точка обозначает производную по параметру эволюции τ, λ является множителем Лагранжа, α является вещественной постоянной. Здесь использованы безиндексные обозначения для сверток спинора ζ и его комплексно сопряженного $\bar{\zeta}$. Спиновая связь $\zeta\bar{\zeta} - 1 \approx 0$, присутствующая в действии, ограничивает конфигурационное пространство до группового многообразия SU(2). Пара комплексно-сопряженных первичных связей $p_\zeta \approx -i\alpha\bar{\zeta}$ и $p_{\bar{\zeta}} \approx i\alpha\zeta$ принадлежит второму роду.

Для получения релятивистских расширений этих моделей следует построить лагранжиан, в котором "спинорная часть" в системе покоя сводится к выражениям, приведенным выше. Это достигается за счет очевидных преобразований кинетической и потенциальной частей

$$\alpha i(\zeta\dot{\bar{\zeta}} - \dot{\zeta}\bar{\zeta}) \to i(\zeta\hat{p}\dot{\bar{\zeta}} - \dot{\zeta}\hat{p}\bar{\zeta}), \qquad (\zeta\bar{\zeta} - 1) \to (\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j).$$

Здесь p_μ является вектором энергии-импульса, $\hat{p}$ является его сверткой с матрицами Паули σ^μ, так что в системе покоя $\hat{p} = m\sigma_0$, где m является массой частицы. В этих преобразованиях были сделаны естественные переопределения: спинор приобрел размерность и стал вейлевским спинором группы Лоренца. Лагранжиан частицы возникает после добавления кинетического члена $p\dot{x}$ и потенциала $-\frac{e}{2}(p^2 - m^2)$ для координат фазового пространства свободной частиц без спина, где e является айнбайном. Таким образом получаем эвристическое описание используемого в этой главе действия спиновой частицы [158, 159], где знак энергии частицы совпадает со знаком “классического спина” j из-за связи $\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j = 0$. Волновая функция такой модели является скаляром и представляет собой свертку по всем индексам обычного спин-тензорного поля с компонентами спинора ζ. Поэтому, этот спинор назван индексным.

Кинетический член этой модели можно записать через бозонную суперформу $dx - i(d\zeta\sigma\bar{\zeta} - \zeta\sigma d\bar{\zeta})$, которая инвариантна относительно бозонной суперсимметрией $\zeta \to \zeta + \varepsilon$, $x \to x + i(\zeta\sigma\bar{\varepsilon} - \varepsilon\sigma\bar{\zeta})$, где ε является постоянным коммутирующим спинором. Эта симметрия нарушается спинорным потенциальным членом $\lambda(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j)$ в действии. В случае использования в качестве ζ нечетного спинора и без введения связи для фиксации спина возникает суперсимметричное действие Касалбуони-Бринка-Шварца [22, 23], которое может быть обобщено на случай расширенной суперсимметрии [75].

В обоих случаях, как бозонном, так и фермионном, имеется возможность описать безмассовую частицу в пределе $m \to 0$. Такие модели обладают связями первого и второго родов. Но в случае бозонных спинорных координат не возникает проблем с ковариантным и неприводимым разделением связей по родам с использованием проекторов, построенным из спиноров ζ и $\hat{p}\bar{\zeta}$.

Имеются и другие подходы, которые используют коммутирующие спиноры в качестве переменных, описывающих спин. Прежде всего – это использование элементов матрицы фундаментального представления определенной группы симметрии рассматриваемой теории. Эти переменные называются гармониками, впервые использованные в суперполевых $\mathcal{N}$=2, 4D теориях [67]. Как отмечалось в [81], в моделях частиц гармоники могут рассматриваться как чисто калибровочные вспомогательные переменными, которые параметризуют произвольную систему по отношению к выбранной канонической и определяют мост, связывающий представления группы с представлениями ее подгруппы. Они приобретают динамический статус только после частичного закрепления калибровки в моделях частиц, когда некоторые начальные динамических переменные передают им часть своих динамических функций. Вместе со связями первого рода, которые обеспечивают чисто калибровочный характер гармоник, их матрицы должны быть ограничены связями, которые определяют соответствующую группу. Таким образом, теория с гармониками сильно ограничена. Тщательный учет этих связей в процедуре квантования часто довольно нетривиальный [88] и, поэтому, зачастую рассмотрение проводится в рамках квазигармонического подхода с динамическими “гармониками” [84]. Неклассическая природа спинорной группы в высших измерениях [82, 83, 85, 86, 87] является дополнительным аргументом для использования индексных переменных в дополнении к гармоническим.

В безмассовом случае, приспосабливая гармоническую систему отсчета к вектору энергии-импульса, то есть направляя один из своих базисных векторов вдоль изотропного вектора энергии-импульса, можно решить массовую связь $p^2 \approx 0$ в терминах гармонических спиноров v и $\bar{v}$ в виде $p \sim v\sigma\bar{v}$. Тогда, после соответствующей фиксации калибровки, динамическая роль пространственно-временных переменных передается гармоникам v и их канонически-сопряженным импульсам. Именно таким образом возникают твисторные формулировки [77, 78, 79, 80, 89, 82, 83, 90]. Конечно, введение твисторов может и не следовать описанной схеме, то есть можно ввести твисторы безотносительно к гармоникам. Кроме того, можно ввести твисторы параллельно с индексным спинором, который затем можно откалибровать. Важно, что использование даже явно калибровочных гармонических переменных существенно меняет фазовое пространство физических моделей за счет новых топологически-нетривиальных конфигураций. Именно это дает возможность получать различные спины в безмассовом случае без введения некалибровочных переменных [88].

В этой главе будет рассмотрены твисторные формулировки массивных и безмассовых частиц произвольного спина и изучена взаимосвязь их с пространственно-временными формулировками.

3.2. Твисторная формулировка безмассовой (супер)частицы ненулевой (супер)спиральности

В этом разделе мы рассмотрим безмассовую частицу в четырехмерном (D=4) пространстве-времени. Рассматривая стандартную твисторную формулировку Пенроуза, мы увидим необходимость обобщения некоторых конструкций при описании уже безмассовых частиц ненулевой спиральности. Это вызвано тем, что стандартные выражения твисторных преобразований Пенроуза, связывающих твисторное и пространственно-временное описания, предполагают нулевую спиральность при рассмотрении вещественного пространства-времени. В этом разделе будет показано, что стандартная модель безмассовой спиновой частицы в твисторном формализме генерирует пространственно-временное описание, которое использует как вещественные векторные координаты, так и дополнительные спинорные координаты в качестве спиновых переменных, и соответствует модели спиновой безмассовой частицы с индексным спинором, предложенной в [158] и изученой детально в [159, 239].

3.2.1. Твисторы Пенроуза и твисторная формулировка безмассовой частицы нулевой спиральности

Важным свойством твисторного формализма является линейная реализация в нем конформных преобразований, которые в фазовом пространстве (x^μ, p_μ), $\mu = 0,1,2,3$ пространственно-временного описания представлены следующими нелинейными преобразованиями

$$\delta x^\mu = a^\mu + l^{\mu\nu} x_\nu + c x^\mu + 2(k\cdot x) x^\mu - x^2 k^\mu \,, \qquad (3.1)$$

$$\delta p_\mu = l_{\mu\nu} p^\nu - c p_\mu + 2(k\cdot p) x_\mu - 2(k\cdot x) p_\mu - 2(x\cdot p) k_\mu \,, \qquad (3.2)$$

генераторы которых

$$P_\mu = p_\mu \,, \quad M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \,, \quad D = x^\mu p_\mu \,, \quad K_\mu = 2(x\cdot p) x_\mu - x^2 p_\mu \quad (3.3)$$

образуют конформную алгебру $so(2,4)$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}]_{{}_P} = \eta_{\mu\lambda} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\lambda} - (\mu \leftrightarrow \nu) \,, \qquad (3.4)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda]_{_P} = \eta_{\mu\lambda} P_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)\,, \qquad [M_{\mu\nu}, K_\lambda]_{_P} = \eta_{\mu\lambda} K_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)\,, \qquad (3.5)$$

$$[P_\mu, K_\nu]_{_P} = 2M_{\mu\nu} - 2\eta_{\mu\nu} D\,, \qquad [P_\mu, D]_{_P} = -P_\mu\,, \qquad [K_\mu, D]_{_P} = K_\mu \qquad (3.6)$$

группы симметрии 6–мерного пространства с двумя временами $SO(2,4)$. Соответствующей спинорной группой является группа $SU(2,2)$. Следовательно, имеется принципиальная возможность переформулировки конформно инвариантных систем в терминах координат, преобразующихся по тензорным (обычно, фундаментальным, для охвата всех возможных представлений) представлениям $SO(2,4)$ или $SU(2,2)$. Тогда все конформные преобразования, линейные однородные, неоднородные и нелинейные, реализуются в виде линейных преобразований, 6-мерных вращений или спинорных преобразований, соответствующих пространств. Выполнение этого предположения привело Р. Пенроуза [77] к введению твисторов.

В твисторной теории конформно-инвариантные системы формулируются в пространстве, параметризованном коммутирующим $SU(2,2)$-спинором Z_a, $a = 1, ..., 4$. Это пространство заменяет, фактически, обычное фазовое пространство, образованное 4-векторами x^μ и p_μ.

Для получения результатов в терминах обычных $4D$ спин-тензорных полей удобно рассматривать представление, где в $SU(2,2)$-спиноре

$$Z_a = (\lambda_\alpha, \mu^{\dot\alpha}) \qquad (3.7)$$

выделены два $4D$ вейлевских спинора ($\alpha = 1,2$, $\dot\alpha = 1,2$) противоположной киральности: λ_α и $\mu^{\dot\alpha}$. Важно, что эти спиноры являются коммутирующими (c-числовыми). Используя сопряженные спиноры $\bar\lambda_{\dot\alpha} = (\overline{\lambda_\alpha})$, $\bar\mu^\alpha = (\overline{\mu^{\dot\alpha}})$ $\bar Z_{\dot a} = (\bar\lambda_{\dot\alpha}, \bar\mu^\alpha)$ и $SU(2,2)$-инвариантный тензор $g^{a\dot b}$, который в выбранном представлении (3.7) имеет вид $g^{a\dot b} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\alpha_\beta \\ -\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} & 0 \end{pmatrix}$, мы можем определить $SU(2,2)$-спинор

$$\bar Z^a = g^{a\dot b} \bar Z_{\dot b} = (\bar\mu^\alpha, -\bar\lambda_{\dot\alpha})\,, \qquad (3.9)$$

который преобразуется с помощью обратной $SU(2,2)$–матрицы.[1]

---

[1] Здесь проявляется отличие вейлевских спиноров группы $Spin(1,3) \simeq SL(2,C)$ и $Spin(2,4) \simeq SU(2,2)$. В случае $4D$ вейлевских спиноров, антисимметричный тензор поднимает и опускает точечные или неточечные индексы: $\lambda^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\lambda_\beta$, $\bar\lambda^{\dot\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\lambda_{\dot\beta}$. В случае $6D$ и сигнатуры $- - + + ++$ неточечные нижние (верхние) индексы можно трансформировать в точечные верхние (нижние). Детальный анализ свойств спиноров в произвольных размерностях и при произвольных сигнатурах сделан в [236].

Свертка спинора (3.7) и его сопряженного (3.9) определяет эрмитову форму

$$\Lambda \equiv \tfrac{i}{2}\,\bar{Z}^a Z_a = \tfrac{i}{2}\,g^{a\dot{b}}\bar{Z}_{\dot{b}} Z_a = \tfrac{i}{2}\,(\bar{\mu}^\alpha \lambda_\alpha - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \mu^{\dot{\alpha}})\,, \tag{3.10}$$

которая есть $SU(2,2)$-инвариант и является нормой $SU(2,2)$-спинора Z_a.

По определению, твисторное пространство $\mathbf{T}$ – это спинорное пространство (пространство $\mathbf{C}^4$) конформной группы $SU(2,2)$ с эрмитовой формой (3.10). $SU(2,2)$-спиноры Z_a, определенные на этом пространстве, называются твисторами [77, 78, 79]. В зависимости от значения эрмитовой формы (3.10), выделяются следующие подмножества твисторного пространства: пространство положительных твисторов $\mathbf{T}_+$, когда $\Lambda > 0$; пространство отрицательных твисторов $\mathbf{T}_-$, когда $\Lambda < 0$ и пространство изотропных твисторов $\mathbf{T}_0$, когда $\Lambda = 0$. Конформные преобразования (3.1)-(3.2) реализованы в твисторном пространстве линейными преобразованиями

$$\delta\lambda_\alpha = l_{\alpha\beta}\lambda^\beta \,-\, \tfrac{1}{2}\,c\,\lambda_\alpha \,-\, k_{\alpha\dot{\beta}}\mu^{\dot{\beta}}\,, \qquad \delta\mu^{\dot{\alpha}} = \bar{l}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\mu_{\dot{\beta}} \,+\, \tfrac{1}{2}\,c\,\mu^{\dot{\alpha}} \,+\, a^{\dot{\alpha}\beta}\lambda_\beta\,, \tag{3.11}$$

генерируемыми билинейными комбинациями твисторных компонент

$$P_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\,, \qquad M_{\alpha\beta} = \lambda_{(\alpha}\bar{\mu}_{\beta)}\,, \qquad \bar{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \bar{\lambda}_{(\dot{\alpha}}\mu_{\dot{\beta})}\,, \tag{3.12}$$

$$D = \tfrac{1}{2}\,(\bar{\mu}^\alpha \lambda_\alpha + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\mu^{\dot{\alpha}})\,, \qquad K^{\dot{\alpha}\alpha} = \mu^{\dot{\alpha}}\bar{\mu}^\alpha\,. \tag{3.13}$$

Генераторы (3.12)-(3.13) образуют конформную алгебру (3.4)-(3.6) относительно твисторных скобок Пуассона

$$[\bar{Z}^a, Z_b]_{{}_P} = \delta^a_b\,, \tag{3.14}$$

которые в спинорных компонентах имеют вид

$$[\bar{\mu}^\alpha, \lambda_\beta]_{{}_P} = \delta^\alpha_\beta\,, \qquad [\mu^{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}]_{{}_P} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,. \tag{3.15}$$

В терминах 4-компонентных твисторов генераторы (3.12)-(3.13) представляются в виде безследового произведения твистора (3.7) и его сопряженного (3.9): $\bar{Z}^a Z_b - \frac{1}{4}\,\delta^a_b\,\bar{Z}^c Z_c$.

Имея линейную реализацию конформной симметрии в терминах твисторных переменных, можно найти соответствующую твисторную формулировку безмассовой безспиновой частицы и, далее, получить соответствующее пространственно-временное описание.

Связь пространственно-временных и твисторных переменных определяется соотношениями

$$p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha}\,, \tag{3.16}$$

$$\mu^{\dot\alpha} = x^{\dot\alpha\beta}\lambda_\beta\,, \qquad \bar\mu^\alpha = \bar\lambda_{\dot\beta}x^{\dot\beta\alpha}\,, \tag{3.17}$$

где использованы стандартные соотношения связи 4-векторных и 2-спинорных величин: $p_{\alpha\dot\alpha} = p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}$, $p^{\dot\alpha\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}p_{\beta\dot\beta}$ и т.д. При этом, здесь и ниже σ-матрицы удовлетворяют соотношению $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}(\sigma^\nu)^{\dot\gamma\beta} + (\sigma^\nu)_{\alpha\dot\gamma}(\sigma^\mu)^{\dot\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha$, как в [77, 78, 79]. Соотношения (3.16), (3.17) суть твисторные преобразования Пенроуза для координат фазового пространства, имеющие прозрачный физический и геометрический смысл. Уравнение (3.16) подразумевает автоматически изотропность 4-импульса: из (3.16) следует $p^2 = 0$ с учетом тождества $\lambda^\alpha\lambda_\alpha \equiv 0$, справедливого для коммутирующих $4D$ спиноров. Условия инцидентности (3.17) устанавливают связь координат пространства Минковского с твисторными переменными. В частности, для фиксированного твистора решение уравнений (3.17) $x^{\dot\alpha\alpha} = x_0^{\dot\alpha\alpha} + a\lambda^\alpha\bar\lambda^{\dot\alpha}$ содержит произвольную вещественную константу a, параметризующую светоподобную прямую (траекторию безмассовой частицы) в пространстве Минковского с направляющим вектором $\lambda^\alpha\bar\lambda^{\dot\alpha}$.

Помимо геометрического смысла, уравнения (3.17) имеют важное физическое следствие, поскольку подразумевают изотропность фигурирующщего в них твистора:

$$\Lambda = \tfrac{i}{2}\,\bar Z^a Z_a = \tfrac{i}{2}\,(\bar\mu^\alpha\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}) = 0\,. \tag{3.18}$$

В получении (3.18) является важным эрмитовость присутствующей в (3.17) матрицы $x^{\dot\alpha\alpha}$, что отражает вещественность пространственно-временного вектора x^μ. Но твисторное условие изотропности имеет важный физический смысл, который находится после вычисления вектора Паули–Любаньского $W_\mu = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}P^\nu M^{\lambda\rho}$. В твисторной реализации генераторов группы Пуанкаре (3.12)–(3.13) имеем

$$W_{\alpha\dot\alpha} = \Lambda P_{\alpha\dot\alpha}\,, \tag{3.19}$$

где Λ – норма твистора, определенная в (3.10). Таким образом, норма твистора совпадает со спиральностью безмассовой частицы, которую он описывает. Следовательно, твисторные преобразования (3.16), (3.17) связывают пространственно-временную и твисторную формулировки безмассовой частицы нулевой спиральности.

Аналогичная ситуация возникает и в суперсимметричном случае, когда суперсимметричное обобщение преобразований Пенроуза [80]

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\,; \tag{3.20}$$

$$\mu^{\dot{\alpha}} = x^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_\alpha + i\,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\chi\,, \qquad \bar{\mu}^{\alpha} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}x^{\dot{\alpha}\alpha} - i\bar{\chi}\,\theta^\alpha\,; \tag{3.21}$$

$$\chi = \theta^\alpha\lambda_\alpha\,, \qquad \bar{\chi} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\,. \tag{3.22}$$

связывают супертвисторные переменные $\mathcal{Z}_A = (\lambda_\alpha, \mu^{\dot{\alpha}}, \chi)$ (супертвистор Фербера) с суперпространственными координатами $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. При таком определении суперсимметричных преобразований Пенроуза норма супертвистора, совпадающая с суперспиральностью безмассовой суперчастицы, равна

$$\mathcal{N} \equiv \tfrac{i}{2}\,\bar{\mathcal{Z}}^A\mathcal{Z}_A = \tfrac{i}{2}\,(\mu^\alpha\lambda_\alpha - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\mu}^{\dot{\alpha}}) - \bar{\chi}\chi = 0\,. \tag{3.23}$$

То есть, фундаментальные твисторные преобразования (3.20)-(3.22) соответствуют, в действительности, суперчастице нулевой суперспиральности. Корректные условия инцидентности для ненулевой (супер)спиральности должны давать ненулевые нормы, в отличие от (3.18) или (3.23).

Модификация условий инцидентности (3.17) в рамках используемых переменных не приводит к желаемому результату. Так, изменение определения спинора μ в (3.17) “твисторным сдвигом” [240] на величину, пропорциональную спинору λ (при этом вводится некоторая элементарная длина для согласования размерностей), по прежнему сохраняет норму твистора. Описание спиральности безмассовой частицы требует рассмотрения пространств, расширенных дополнительными координатами. С физической точки зрения, эти дополнительные координаты призваны описывать спиновые степени свободы.

Один из способов введения дополнительных координат – рассмотрение вместо вещественного пространства Минковского с координатами $(x^{\dot{\alpha}\beta})^+ = x^{\dot{\beta}\alpha}$ его комплексификации с координатами $z^{\dot{\alpha}\beta} \neq (z^{\dot{\beta}\alpha})^+$, соответстующими невещественному четыре-вектору z^μ. Тогда, модифицированные условия инцидентности

$$\mu^{\dot{\alpha}} = z^{\dot{\alpha}\beta}\lambda_\beta\,, \qquad \bar{\mu}^{\alpha} = \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}\bar{z}^{\dot{\beta}\alpha} \tag{3.24}$$

не предполагают нулевую норму твистора, которая связана с нулевой мнимой частью комплексифицированной координаты $z^{\dot{\alpha}\beta}$. Такой способ описания ненулевого спина используется в твисторной теории Пенроуза, применяемый, фактически, на уровне полевого подхода. Пространственно-временные поля, генерируемые твисторными преобразованиями (3.33) в комплексифицированном пространстве Минковского, являются аналогами полей аксиоматической теории поля. Но при использовании комплексифицированного пространства Минковского полностью теряется важный элемент твисторной программы, связанный с пространственно-временным описанием на уровне квантово-механического действия, что является желательным при анализе современных теорий, как то струнной и суперструнной теорий.

В твисторной програме безмассовой частицы нулевой спиральности, ее пространственно–временное описание и его связь посредством твисторных преобразований Пенроуза с твисторной формулировкой хорошо определены. Для частиц с ненулевой спиральностью твисторная формулировка также однозначно определена. Но возникает два важных вопроса относительно двух других элементов твисторной програмы: какой вид имеют твисторные преобразования в случае ненулевой спиральности и какая пространственно-временная система соответствует твисторной в этом случае? Ответы на эти вопросы требуют восстановления всей твисторной программы на уровне классических лагранжианов частиц, что важно для эффективного применения твисторов в струнной теории.

3.2.2. Твисторная формулировка спиновой безмассовой частицы

Поскольку в твисторной формулировке спиральность частицы определяется твисторной нормой (3.10), фазовое пространство безмассовой частицы спиральности j должно быть ограничено связью

$$\Lambda - j = \tfrac{i}{2}\bar{Z}^a Z_a - j = \tfrac{i}{2}(\bar{\mu}^\alpha \lambda_\alpha - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\mu^{\dot{\alpha}}) - j \approx 0\,, \tag{3.25}$$

обобщающей связь (3.18) для частицы нулевой спиральности. Действие

$$S_s^{twistor} = \int d\tau \left[\tfrac{1}{2}\,(\bar{Z}^a \dot{Z}_a - \dot{\bar{Z}}^a Z_a) - l\,(\tfrac{i}{2}\,\bar{Z}^a Z_a - j) \right]\,, \tag{3.26}$$

в котором l является лагранжевым множителем для связи (3.25), определяет твисторную формулировку безмассовой частицы спиральности s.

При переходе к квантовой теории скобки Пуассона (3.14) переходят в коммутатор

$$[\hat{\bar{Z}}^a, \hat{Z}_b] = i\delta^a_b\,. \tag{3.27}$$

Квантование твисторной частицы удобно проводить в голоморфном представлении (представлении Пенроуза), когда операторы $\hat{Z}_a$ диагональны, а $\hat{\bar{Z}}^a$ реализованы как операторы дифференцирования

$$\hat{\bar{Z}}^a = i\frac{\partial}{\partial Z_a}\ : \qquad \hat{\bar{\lambda}}_{\dot{\alpha}} = -i\frac{\partial}{\partial \mu^{\dot{\alpha}}}\,, \quad \hat{\bar{\mu}}^{\alpha} = i\frac{\partial}{\partial \lambda_{\alpha}}\,. \tag{3.28}$$

Твисторная волновая функция $\Psi(Z)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\Lambda}\Psi(Z) = j\Psi(Z)\,, \tag{3.29}$$

являющимся квантовым аналогом классической связи (3.25). Проводя вейлевское упорядочение в операторе спиральности

$$\Lambda = \tfrac{i}{2}\,\bar{Z}^a Z_a \qquad \rightarrow \qquad \hat{\Lambda} = \tfrac{i}{4}\,(\hat{\bar{Z}}^a\hat{Z}_a + \hat{Z}_a\hat{\bar{Z}}^a) = \tfrac{i}{2}\,\hat{Z}_a\hat{\bar{Z}}^a - 1 = -\tfrac{1}{2}\,Z_a\frac{\partial}{\partial Z_a} - 1\,,$$

получаем, что уравнение (3.29) для твисторной волновой функции имеет вид

$$\tfrac{1}{2}Z_a\frac{\partial}{\partial Z_a}\Psi = -(1+j)\Psi\,. \tag{3.30}$$

Таким образом, твисторное поле безмассовой частицы спиральности j – голоморфная однородная функция степени однородности $(-2-2j)$:

$$\Psi^{(-2-2j)}(\alpha Z) = \alpha^{-2-2j}\Psi^{(-2-2j)}(Z)\,, \tag{3.31}$$

где α – произвольное комплексное число.

Обычное пространственно-временное поле получается из твисторного (3.31) посредством твисторного преобразования Пенроуза для полей. Оно строится следующим образом. В твисторном поле спинор μ разрешается с помощью условия инцидентности (3.17)

$$\Psi^{(-2-2j)}(Z)\Big|_{\mu^{\dot{\alpha}} = x^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_{\alpha}} = \Psi^{(-2-2j)}(\lambda_{\alpha}, x^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_{\alpha})\,. \tag{3.32}$$

Благодаря однородности (3.31) функция (3.32) определена, фактически, на комплексном проективном пространстве $\mathbf{CP}^1$ и зависит эффективно от одной комплексной переменной, если учесть однородность (3.31). Например, от $z \equiv \lambda_1/\lambda_2$ при $\lambda_2 \neq 0$. Интегрируя по этой переменной твисторное поле с надлежащим весом, получаем обычное пространственно-временное. В ковариантной записи, не зависящей от выбора независимой координаты на $\mathbf{CP}^1$, поле (3.32) интегрируется с мерой $\lambda d\lambda \equiv \lambda^{\alpha} d\lambda_{\alpha}$. Кроме того, подинтегральное выражение должно содержать $2s$ компонент спинора λ для компенсации отрицательного веса твисторного поля, чтобы подинтегральное выражение было инвариантом преобразования $\lambda \to \alpha\lambda$, т. е. (3.31) для твисторного поля. В итоге, интегральное преобразование

$$\Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2j}}(x) = \oint (\lambda d\lambda)\, \lambda_{\alpha_1} \ldots \lambda_{\alpha_{2j}} \Psi^{(-2-2j)}(\lambda_{\alpha}, x^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_{\alpha}) \tag{3.33}$$

сопоставляет твисторному полю (3.31) обычное пространственно-временное поле $\Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2j}}(x)$. В интегральном преобразовании (3.33), определяющим твисторное полевое преобразование Пенроуза, интегрирование проводится по замкнутому контуру пространства независимой комплексной переменной, охватывающем полюса твисторного поля. Важно, что полученное в результате преобразования поле $\Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2j}}(x)$ автоматически симметрично в отношении спинорных индексов вследствие коммутативности твисторных компонент, $\Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2j}} = \Phi_{(\alpha_1 \ldots \alpha_{2j})}$, и удовлетворяет уравнению Дирака

$$\partial^{\dot{\alpha}\alpha_1} \Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2j}}(x) = 0\,. \tag{3.34}$$

То есть, комплексное поле (3.33) является самодуальной напряженностью безмассовой частицы спиральности j. Выполнение уравнения (3.34) является результатом зависимости твисторного поля от $x^{\dot{\alpha}\alpha}$ только в комбинации $x^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_{\alpha}$ с коммутирующим спинором λ_{α}.

3.2.3. Модифицированная твисторная и пространственно-временная формулировки частицы ненулевой спиральности

Построим динамическую систему, эквивалентную твисторной формулировке безмассовой спиновой частицы (3.26), но, в то же время, позволяющую сделать переход к соответствующему пространственно-временному описанию, который сгенерирует модифицированные твисторные преобразования. В качестве такой системы будем рассматривать систему, описываемую действием

$$S_s = \int d\tau \left[\tfrac{1}{2} \left(\bar{Z}^a \dot{Z}_a - \dot{\bar{Z}}^a Z_a \right) + i(\dot{\bar{\xi}}\xi - \bar{\xi}\dot{\xi}) - \ell \left(\tfrac{i}{2} \bar{Z}^a Z_a - \xi\bar{\xi} \right) \right. \\ \left. - v \left(\xi\bar{\xi} - j \right) \right]. \tag{3.35}$$

Помимо твистора Пенроуза Z_a, среди динамических переменных системы (3.35) присутствует комплексный c-числовой скаляр ξ, $\bar{\xi} = (\bar{\xi})$, компоненты которого канонически самосопряжены: их канонические скобки равны

$$[\, \xi, \bar{\xi} \,]_{\mathrm{P}} = \tfrac{i}{2} \tag{3.36}$$

благодаря кинетическому члену для ξ в действии (3.26).

Кроме этих дополнительных степеней свободы, если сравнивать с действием (3.26), действие (3.35) содержит дополнительную связь

$$\xi\bar{\xi} - j \approx 0\,. \tag{3.37}$$

Очевидно, она первого рода и исключает как раз две степени свободы, присутствующие в ξ. В частности, условие $\arg \xi = const$ фиксирует калибровку для локальных преобразований, генерируемых связью (3.37). Таким образом, после исключения переменной ξ мы получаем систему (3.26). Отметим, что введение скобки Дирака для связи (3.37) и фиксации калибровки не изменяет канонических скобок для твисторных переменных.

Имея формулировку твисторной частицы ненулевой спиральности в виде системы (3.35), мы можем восстановить как твисторные преобразования, так и пространственно-временную формулировку, если воспользоваться аналогиями с твисторной формулировкой Фербера [80] для суперчастицы (3.20)-(3.22). Твисторные преобразования для частицы ненулевой спиральности, связывающие твисторную формулировку (3.35) с соответствующей пространственно-временной, определим следующим образом:

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\,; \tag{3.38}$$

$$\mu^{\dot{\alpha}} = x^{\dot{\alpha}\alpha} \lambda_\alpha + i\,\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \xi\,, \qquad \bar{\mu}^{\alpha} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} x^{\dot{\alpha}\alpha} - i\bar{\xi}\,\zeta^{\alpha}\,; \tag{3.39}$$

$$\xi = \zeta^{\alpha}\lambda_{\alpha}\,, \qquad \bar{\xi} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\,. \tag{3.40}$$

В выражениях (3.38)–(3.40) естественным образом возникает вейлевский спинор ζ^{α}, $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} = (\overline{\zeta^{\alpha}})$, принадлежащий пространственно–временной формулировке, который, в отличие от суперслучая, является c-числовым. Как увидим ниже, он описывает спиновые степени свободы релятивистской частицы.

Модифицированные твисторные преобразования (3.38)–(3.40) решают поставленную выше задачу – описание твистора ненулевой нормы. Именно, соотношения (3.39), (3.40) разрешают присутствующую в действии (3.35) связь

$$\tfrac{i}{2}\bar{Z}^{a}Z_{a} - \xi\bar{\xi} \approx 0\,, \tag{3.41}$$

которая, с учетом связи (3.37), эквивалентна определению (ненулевой при $s \neq 0$) твисторной нормы (3.25). Таким образом, мы получаем твисторную формулировку с неизотропным твистором, которая связана с пространственно-временной формулировкой благодаря присутствию вторых членов в условиях инцидентности (3.39).

Отметим, что условия (3.39), определяющие спинор μ, могут быть представлены в виде твисторного сдвига $\mu^{\dot{\alpha}} \to \mu^{\dot{\alpha}} - i\xi\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}$, $\bar{\mu}^{\alpha} \to \bar{\mu}^{\alpha} + i\bar{\xi}\zeta^{\alpha}$ вдоль спинора ζ. Поскольку ζ и λ ортогональны, $\zeta\lambda \neq 0$, мы получаем изменение значения спиральности $\frac{i}{2}(\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\mu^{\dot{\alpha}} - \bar{\mu}^{\alpha}\lambda_{\alpha}) \to \frac{i}{2}(\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\mu^{\dot{\alpha}} - \bar{\mu}^{\alpha}\lambda_{\alpha}) + j$. Этот твисторный сдвиг отличается от твисторного сдвига $\mu^{\dot{\alpha}} \to \mu^{\dot{\alpha}} + l\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$, $\bar{\mu}^{\alpha} \to \bar{\mu}^{\alpha} + l\lambda^{\alpha}$ вдоль спинора λ, используемого в работе [120]. Здесь, l – постоянная размерности длины. Такого типа сдвиг приводит к модификации взаимодействия частицы (или струны) с фоновыми полями [120] и не приводит к изменению спиральности, поскольку при этом сдвиге $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\mu^{\dot{\alpha}} - \bar{\mu}^{\alpha}\lambda_{\alpha} = \mathrm{inv}$.

Переменные твисторной формулировки (3.35) – координаты твистора $Z_a = (\lambda_{\alpha}, \mu^{\dot{\alpha}})$ и комплексный скаляр ξ – могут быть объединены в величину $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = (Z_a; \xi) = (\lambda_{\alpha}, \mu^{\dot{\alpha}}; \xi)$, которая имеет пять комплексных компонент и может быть названа бозонным супертвистором. Вводя сопряженные величины $\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{\mathcal{A}}} = (\bar{Z}_{\dot{a}}; \bar{\xi}) = (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \bar{\mu}^{\alpha}; \bar{\xi})$, $\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}} = g^{\mathcal{A}\dot{\mathcal{B}}}\bar{\mathcal{Z}}_{\dot{\mathcal{B}}} = (\bar{Z}^{a}; -2i\bar{\xi}) = (\bar{\mu}^{\alpha}, -\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}; -2i\bar{\xi})$, мы видим, что лагранжиан (3.35) без последнего члена $-v(\bar{\xi}\xi - j)$ принимает вид $\frac{1}{2}(\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}\dot{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}} - \dot{\bar{\mathcal{Z}}}^{\mathcal{A}}\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}) - \ell\,\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$.

В переменных α, β, γ, δ, введенных посредством $\lambda_1 = i(\alpha + \beta)$, $\lambda_2 = i(\gamma + \delta)$, $\mu^1 = \alpha - \beta$, $\mu^2 = \gamma - \delta$, норма бозонного супертвистора

$\frac{i}{2}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \frac{i}{2}(\bar{\mu}^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\mu^{\dot{\alpha}}) + \bar{\xi}\xi$ принимает вид $\frac{i}{2}\bar{\mathcal{Z}}^{\mathcal{A}}\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \bar{\beta}\beta + \bar{\delta}\delta + \bar{\xi}\xi - \bar{\alpha}\alpha - \bar{\gamma}\gamma$ и является квадратичной эрмитовой формой сигнатуры $(+++--)$. Таким образом, лагранжиан (3.35) без последнего слагаемого, описываеющий безмассовые частицы всех возможных спиральностей, инвариантен относительно глобальных преобразований группы $U(3,2)$, которая играет роль бозонной суперконформной группы в твисторном формализме. При переходе к пространственно-временной формулировке эти $U(3,2)$-преобразования становятся нелинейными преобразованиями, включающими конформные преобразования, “бозонные суперсимметричные” трансляции и “бозонные супербусты”.

Подставляя твисторные преобразования (3.38)–(3.40) в твисторное действие безмассовой спиновой частицы (3.35), мы получаем эквивалентную пространственно-временную формулировку в конфигурационном пространстве $(z^A) = (x^{\mu}, \zeta^{\alpha}, \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}})$, параметризованном пространственно-временной координатой $x^{\dot{\alpha}\alpha}$ и коммутирующим вейлевским спинором ζ^{α}. Действие данной системы в формализме первого порядка имеет вид [158]

$$S = \int d\tau \left(p\,\omega - e(p^2 - m^2) - \lambda(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j)\right) , \tag{3.42}$$

где кинетический член определяется бозонной “суперформой”

$$\omega = \dot{x} - i\dot{\zeta}\sigma\bar{\zeta} + i\zeta\sigma\dot{\bar{\zeta}} \,. \tag{3.43}$$

Здесь p_{μ} – импульс частицы массы m, так как модель (3.42) позволяет универсально описывать единым образом как безмассовую, так и массивную спиновую частицу, а также частицу высших спинов с некоторой модификацией, как увидим ниже. Одномерные поля e и λ являются лагранжевыми множителями в действии (3.42). Безразмерная константа j играет роль классического спина. В спинорных обозначениях лагранжиан действия (3.42) имеет вид $L = p_{\alpha\dot{\alpha}}\omega^{\dot{\alpha}\alpha} + \frac{1}{2}\,e(p_{\alpha\dot{\alpha}}p^{\dot{\alpha}\alpha} - m^2) - \lambda(\zeta^{\alpha}p_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} - j)$, где “бозонная суперформа” в спинорных обозначениях равна $\omega^{\dot{\alpha}\alpha} = \dot{x}^{\dot{\alpha}\alpha} - i\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\dot{\zeta}^{\alpha} + i\dot{\bar{\zeta}}^{\dot{\alpha}}\zeta^{\alpha}$.

Кинетический член $p\dot{\omega}$ представляет собой сумму стандартного кинетического члена для бесспиновой частицы $p\dot{x}$ и спиновой части, которая принимает стандартный осцилляторный вид $im(\zeta\sigma_0\dot{\bar{\zeta}} - \dot{\zeta}\sigma_0\bar{\zeta})$ в системе покоя. Форма ω (3.43) совпадает с $\mathcal{N}$=1 суперсимметричной ω-формой после замены индексного спинора на грассмановый спинор. Следует подчеркнуть, что это совпадение не является результатом какого-то прямого или наивного обобщения известного выражения из суперсимметричных теорий. На самом деле, это обстоятельство отражает общую черту описания спина в терминах антикоммутирующими и коммутирующих переменных. Как отмечалось в первом разделе этой главы, оба эти описания возникают прямо из релятивизации представлений малой группы в терминах c-чисел и a-чисел соответственно, то есть, из построения соответствующих индуцированных представлений группы Пуанкаре. Естественным образом это индуцирование приводит к бозонной и фермионной суперсимметрии соответствующих кинетических членов в механических системах. "К сожалению" бозонная суперсимметрия разрушается необходимым ограничением в бозонном конфигурационном пространстве введением спиновой связи [158], которая присутствует в лагранжиане [158] с множителем Лагранжа. В последней главе будет рассмотрена система без этой связи и с бозонной симметрией и будет показано, что она описывает частицу высшего спина.

В действии (3.42) заложены следующие скалярные связи: массовая связь

$$T \equiv \tfrac{1}{2}(p^2 - m^2) \approx 0\,, \tag{3.44}$$

генерируемая картановским разрешением 4-импульса (3.38), и связь (3.37), которая в новых переменных имеет вид

$$\zeta^{\alpha} p_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} - j \approx 0\,. \tag{3.45}$$

Система (3.42) обладает также бозонными спинорными связями

$$\nabla_{\alpha} \equiv \pi_{\alpha} + i p_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \approx 0\,, \qquad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} \equiv \bar{\pi}_{\dot{\alpha}} - i \zeta^{\alpha} p_{\alpha\dot{\alpha}} \approx 0\,, \tag{3.46}$$

возникающими при определении импульсов π_{α} и $\bar{\pi}_{\dot{\alpha}}$, сопряженных спинорным координатам ζ^{α} и $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}$: $[\zeta^{\alpha}, \pi_{\beta}]_{\mathrm{P}} = \delta^{\alpha}_{\beta}$, $[\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\dot{\beta}}]_{\mathrm{P}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$. Система связей (3.44)–(3.46) – смесь связей первого и второго родов. Очевидно, массовая связь (3.44) – первого рода. Поскольку $\frac{i}{2}(\zeta\nabla - \bar{\nabla}\bar{\zeta}) + (\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j) = \frac{i}{2}(\zeta\pi - \bar{\pi}\bar{\zeta}) - j$, связь (3.45) эквивалентна на поверхности спинорных связей (3.46) связи

$$S \equiv S_{\zeta} - j \equiv \frac{i}{2}(\zeta\pi - \bar{\pi}\bar{\zeta}) - j \approx 0\,, \tag{3.47}$$

которая коммутирует в слабом смысле со всеми остальными связями, $\{S, \nabla\} = \frac{i}{2}\nabla$, $\{S, \bar{\nabla}\} = -\frac{i}{2}\bar{\nabla}$, и является связью первого рода.

Следует отметить, что с точки зрения твисторных переменных v и ω спинорные связи ∇ и $\bar{\nabla}$ принимают вид $v \sim \hat{p}\bar{\omega}$ и к. с. и являются в некотором смысле дуальными твисторным условиям $\omega = \hat{x}\bar{v}$ и к. с. Можно сказать, что индексные спиноры ζ, p_ζ и твисторные спиноры ω, v сменяют друг друга при преобразовании Фурье в описании безмассовых частиц.

Ненулевые скобки Пуассона спинорных связей (3.46) суть

$$[\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}]_{\text{P}} = 2ip_{\alpha\dot{\alpha}}\,. \tag{3.48}$$

В случае массивной частицы $\hat{p}\tilde{p} = m^2 > 0$ все спинорные связи (3.46) второго рода. В безмассовом случае, когда $m = 0$ и матрица $\hat{p}$ сингулярна, половина спинорных связей – связи первого рода, выделяемые проекцией на спинор $p_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}$ и ему комплексно–сопряженный:

$$F \equiv \bar{\zeta}_{\dot{\alpha}} p^{\dot{\alpha}\alpha}\nabla_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar{F} \equiv \bar{\nabla}_{a\dot{\alpha}} p^{\dot{\alpha}\alpha}\zeta_\alpha \approx 0\,. \tag{3.49}$$

Связи второго рода, присутствующие в спинорных связях, – это

$$G \equiv \zeta^\alpha \nabla_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar{G} \equiv \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \approx 0\,. \tag{3.50}$$

Таким образом, система (3.42) описывается связями первого (3.44), (3.47), (3.49) и второго (3.50) рода, разделение которых произведено ковариантным способом благодаря присутствию бозонного спинора ζ в системе. Такая структура связей позволяет выполнить гупта–блейлеровское квантование.

В безмассовом случае квантовыми условиями, определяющими волновую функцию частицы $\Phi(x, \zeta, \bar{\zeta})$, являются уравнения

$$\Box\Phi = 0\,, \qquad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0\,, \qquad \partial^{\dot{\alpha}\alpha}\nabla_\alpha\Phi = 0\,, \tag{3.51}$$

$$\frac{1}{2}\left(\zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial\zeta^\alpha} - \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}}\right)\Phi = j\Phi\,, \tag{3.52}$$

где операторы $\nabla_\alpha \equiv -i(\dfrac{\partial}{\partial\zeta^\alpha} + i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}})$, $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \equiv -i(\dfrac{\partial}{\partial\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}} - i\zeta^\alpha p_{\alpha\dot{\alpha}})$ являются квантовыми аналогами связей (3.46). Решением уравнений (3.51), (3.52) является поле

$$\Phi(x_{\scriptscriptstyle L}, \zeta) = \zeta^{\alpha_1}\ldots\zeta^{\alpha_{2j}}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}(x_{\scriptscriptstyle L})\,, \tag{3.53}$$

определенное, благодаря второму уравнению в (3.51), на пространстве, параметризованном координатами $x_{_L}^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha} + i\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\alpha$ и ζ^α. Уравнение (3.52) определяет степень однородности поля (3.53) в отношении спинора ζ, что, в свою очередь, определяет тип компонентного поля $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2j}}$. Это пространственно-временное поле удовлетворяет уравнению Дирака-Паули-Фирца (3.34) благодаря третьему уравнению в (3.51), симметрично по $2j$ спинорным индексам и, следовательно, описывает безмассовую частицу спиральности j.

Поле (3.53) можно разрешить через твисторное поле (3.31) с помощью интегральное преобразования, аналогичного твисторным преобразованиям (3.33). Именно, преобразование

$$\Phi(x_{_L},\zeta) = \oint(\lambda d\lambda)\,\xi^{2j}\,\Psi^{(-2-2j)}(\lambda_\alpha,\mu^{\dot\alpha})\Big|_{\mu^{\dot\alpha}=x_{_L}^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha\,,\;\xi=\zeta^\alpha\lambda_\alpha} \tag{3.54}$$

восстанавливает поле (3.53) по твисторному полю (3.31). Отметим, поле

$$\Psi(\lambda,\mu,\xi) = \xi^{2j}\,\Psi^{(-2-2j)}(\lambda,\mu)\,,$$

присутствующее в (3.54) как подинтегральное выражение, является, фактически, волновой функцией системы (3.35).

3.3. Битвисторная формулировка массивной спиновой частицы

В определении твисторов заложена явно конформная симметрия, что приводит к естественному описанию безмассовых частиц в твисторном подходе. Но одной из задач твисторного подхода является описание, альтернативное пространственно-временной формулировке, физического мира, включающего конформно-неинвариантные системы. В физике частиц естественным примером последних является массивная частица, обладающая, в общем, ненулевым спином. В этом разделе будет рассмотрено твисторное описание релятивистских систем с массой.

Помимо специфики описания массивного спина, обладающего иным числом физических степеней свободы по сравнению с безмассовым случаем, отличия возникают также при описании времениподобного импульса. Если в безмассовом случае светоподобный вектор импульса разрешается в виде единственного спинора посредством (3.16), спинорное представление временитподобного импульса массивной частицы $p^2 = m^2$ должно использовать как минимум два спинора

$$p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda^i_\alpha \, \bar\lambda_{\dot\alpha\, i}, \tag{3.55}$$

где $\bar\lambda_{\dot\alpha\, i} = (\overline{\lambda^i_\alpha})$. Интерпретируя, по аналогии с безмассовым случаем, спиноры λ^i как половины твисторов, получаем, что массивная частица, независимо от ее спина, должна использовать как минимум битвисторное описание. Кроме того, при описании элементарной частицы с фиксированной массой, используемые два спинора должны быть ограничены дополнительной связью

$$|\lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i}|^2 = 2\, m^2 \tag{3.56}$$

или, возможно, более сильными условиями, например

$$\lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i} = \sqrt{2}m\,, \qquad \bar\lambda_{\dot\alpha i}\bar\lambda^{\dot\alpha i} = \sqrt{2}\, m\,, \tag{3.57}$$

которые нарушают конформную симметрию до группы Пуанкаре.

Другим важным вопросом является вид пространственно-временного описания массивной спиновой частицы, которое должно быть связано с твисторной формулировкой соответствующими преобразованиями Пенроуза. Для этой цели из всех пространственно-временных формулировок наиболее подходящей является такая, в которой спиновые степени свободы описываются с помощью коммутирующих переменных. Кроме того, является желательным, чтобы такие формулировки использовали спиноры в качестве спиновых переменных (для получения произвольных спинов, в том числе полуцелых) и описывали единообразно произвольные спины. Формулировка релятивистской спиновой частицы с индексным спинором [158] с действием (3.42) является наиболее удобной формулировкой для этих целей. Преимущества этой формулировки демонстрируются не только каноническим квантованием модели, выполненным в [158], а также квантованием с помощью BFV-BRST подхода [241, 242, 243, 244]. Последнее квантование массивной частицы с индексным спинором, проведенное в [159, 160], производит правильные пропагаторы после вычисления соответствующих функциональных интегралов.

3.3.1. Получение твисторной формулировки из гармонического подхода

Введем в пространственно-временную формулировку (3.42) чисто калибровочные переменные, в качестве которых возьмем лоренцевы гармоники [81, 84, 88] – два спинора v^i_α, $\bar{v}_{\dot{\alpha}i} = \overline{(v^i_\alpha)}$, $i = 1, 2$, образующие 2×2 комплексную матрицу с единичным детерминантом, что отражено в наличии связей

$$h \equiv v^{\alpha i} v_{\alpha i} - 2 \approx 0\,, \quad \bar{h} \equiv \bar{v}_{\dot{\alpha} i} \bar{v}^{\dot{\alpha} i} - 2 \approx 0\,. \tag{3.58}$$

где $v_{\alpha i} = \epsilon_{ij} v^j_\alpha$, $\bar{v}^i_{\dot{\alpha}} = \epsilon^{ij} \bar{v}_{\dot{\alpha} j}$. Условия (3.58) могут быть записаны в эквивалентном виде $v^{\alpha i} v^\beta_i + \epsilon^{\alpha\beta} \approx 0$, $\bar{v}_{\dot{\alpha} i} \bar{v}^i_{\dot{\beta}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \approx 0$. Мы добавляем к лагранжиану (3.42) кинетический член для гармоник v^i_α, $\bar{v}_{\dot{\alpha} i}$ и канонически-сопряженных переменных ${p_v}^\alpha_i$, ${\bar{p}_v}^{\dot{\alpha} i}$, $\{v^i_\alpha, {p_v}^\beta_j\} = \delta^\beta_\alpha \delta^i_j$, $\{\bar{v}_{\dot{\alpha} i}, {\bar{p}_v}^{\dot{\beta} j}\} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \delta^j_i$, а также линейную комбинацию полного множества связей, коэффициенты в которой – лагранжевы множители. Число связей должно быть достаточным для исключения всех гармонических переменных. В дополнении к кинематическим связям (3.58), мы накладываем следующий естественный набор связей для гармонических переменных

$${p_v}^\alpha_i \approx 0\,, \qquad {\bar{p}_v}^{\dot{\alpha} i} \approx 0\,. \tag{3.59}$$

Система связей (3.58) и (3.59) содержит две пары связей второго рода и шесть связей первого рода. Разделение связей (3.59) по родам осуществляется проектированием их на спиноры v^i_α, $\bar{v}_{\dot{\alpha} i}$. Вследствие несингулярности гармонической матрицы v^i_α (3.58), множество связей (3.59) и набор лоренц-инвариантных связей

$${p_v}^\alpha_i v^j_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar{v}_{\dot{\alpha} i} {\bar{p}_v}^{\dot{\alpha} j} \approx 0 \tag{3.60}$$

эквивалентны.

Следовые части связей (3.60) ${p_v}^\alpha_i v^i_\alpha \approx 0$, $\bar{v}_{\dot{\alpha} i} {\bar{p}_v}^{\dot{\alpha} i} \approx 0$ канонически сопряжены кинематическим связям (3.58). В вещественных обозначениях связи

$$i(h - \bar{h}) = i(v^{\alpha i} v_{\alpha i} - \bar{v}_{\dot{\alpha} i} \bar{v}^{\dot{\alpha} i}) \approx 0\,, \quad h + \bar{h} = v^{\alpha i} v_{\alpha i} + \bar{v}_{\dot{\alpha} i} \bar{v}^{\dot{\alpha} i} + 4 \approx 0 \tag{3.61}$$

$$\mathcal{D}_0 \equiv i({p_v}^\alpha_i v^i_\alpha - \bar{v}_{\dot{\alpha} i} {\bar{p}_v}^{\dot{\alpha} i}) \approx 0\,, \quad \mathcal{B}_0 \equiv {p_v}^\alpha_i v^i_\alpha + \bar{v}_{\dot{\alpha} i} {\bar{p}_v}^{\dot{\alpha} i} \approx 0 \tag{3.62}$$

образуют пары $(i(h - \bar{h}), \mathcal{D}_0)$, $(h + \bar{h}, \mathcal{B}_0)$ сопряженных связей второго рода.

Бесследовые части связей (3.60) коммутируют со связями (3.61) и (3.62) и являются связями первого рода. Удобно представить эти связи в виде лоренц-инвариантных 3-векторов

$$\mathcal{D}_r \equiv \tfrac{i}{2}(\sigma_r)_i{}^j(p_{v}{}_j^{\alpha}v^i_\alpha - \bar v_{\dot\alpha j}\bar p_v{}^{\dot\alpha i}) \approx 0\,, \quad \mathcal{B}_r \equiv \tfrac{1}{2}(\sigma_r)_i{}^j(p_{v}{}_j^{\alpha}v^i_\alpha + \bar v_{\dot\alpha j}\bar p_v{}^{\dot\alpha i}) \approx 0 \quad (3.63)$$

где σ_r, $r=1,2,3$ есть обычные эрмитовы матрицы Паули.

Таким образом, спиновая частица с дополнительным чисто калибровочным гармоническим сектором описывается фазовыми переменными x^μ, p_μ; ζ^α, $\bar\zeta^{\dot\alpha}$, $p_{\zeta\alpha}$, $\bar p_{\zeta\dot\alpha}$; v^i_α, $\bar v_{\dot\alpha i}$, $p_{v}{}_i^{\alpha}$, $\bar p_v{}^{\dot\alpha i}$ и связями (3.44), (3.45), (3.46), (3.58), (3.62), (3.63). Исключая с помощью части связей переменные x, p, ζ, p_ζ и им комплексно сопряженные, используемые в пространственно-временной формулировке, мы получим твисторную формулировку массивной спиновой частицы.

Связи $\mathcal{B}_r$ в (3.63) являются генераторами преобразования Вигнера в гармоническом базисе с координатами $x^{(0)} = \frac{1}{2}\,\bar v_{\dot\alpha k}x^{\dot\alpha\alpha}v^k_\alpha$, $x_{(r)} = \frac{1}{2}\,\bar v_{\dot\alpha j}x^{\dot\alpha\alpha}v^i_\alpha(\sigma_r)_i{}^j$. С помощью этих преобразований мы можем преобразовать четыре-импульс в гармоническом базисе к стандартному виду, когда

$$p_{(r)} = \tfrac{1}{2}\,v^\alpha_j p_{\alpha\dot\alpha}\bar v^{\dot\alpha i}(\sigma_r)_i{}^j \approx 0\,, \quad r=1,2,3\,. \qquad (3.64)$$

Эти условия фиксируют калибровку для связей $B_r \approx 0$, которые определяют $x_{(r)} = \frac{1}{2}\,\bar v_{\dot\alpha j}x^{\dot\alpha\alpha}v^i_\alpha(\sigma_r)_i{}^j$ в гармоническом базисе. Из-за разрешенного вида условий фиксации калибровки (3.64), скобки Пуассона для других переменных совпадают со скобками Дирака. Массовое условие $p^2=m^2$ для состояний положительной энергии в гармоническом базисе принимает теперь вид

$$p_{(0)} + m = \tfrac{1}{2}\,v^\alpha_k p_{\alpha\dot\alpha}\bar v^{\dot\alpha k} + m \approx 0\,. \qquad (3.65)$$

Фиксацией калибровки для нее есть условие

$$x^{(0)} = \tfrac{1}{2}\,\bar v_{\dot\alpha k}x^{\dot\alpha\alpha}v^k_\alpha \approx 0\,, \qquad (3.66)$$

которое также имеет разрешенный вид.

После этих фиксаций калибровки и введения новых переменных

$$\xi^i = (m/\sqrt{2})^{1/2}\zeta^\alpha v^i_\alpha\,, \quad \bar\xi_i = (m/\sqrt{2})^{1/2}\bar v_{\dot\alpha i}\bar\zeta^{\dot\alpha}\,, \qquad (3.67)$$

$$\lambda^i_\alpha = (m/\sqrt{2})^{1/2}v^i_\alpha\,, \quad \bar\lambda_{\dot\alpha i} = (m/\sqrt{2})^{1/2}\bar v_{\dot\alpha i}\,, \qquad (3.68)$$

связи (3.45), (3.46) принимают вид

$$\bar{\xi}_i \xi^i - j \approx 0\,, \tag{3.69}$$

$$\psi_i \equiv ip_{\xi i} - \bar{\xi}_i \approx 0\,, \qquad \bar{\psi}^i \equiv i\bar{p}^i_\xi + \xi^i \approx 0\,. \tag{3.70}$$

Связи (3.70) $\psi_i \approx 0$, $\bar{\psi}^i \approx 0$ являются парами связей второго рода, $\{\psi_i, \bar{\psi}^j\} = -2i\delta_i^j$. После введения скобок Дирака для них $\{A,B\}^* = \{A,B\} - \frac{i}{2}\left(\{A,\psi_i\}\{\bar{\psi}^i, B\} - \{A,\bar{\psi}^i\}\{\psi_i, B\}\right)$ переменные $p_{\xi i}$, $\bar{p}^i_\xi$ исключаются, тогда как оставшиеся переменные ξ^i, $\bar{\xi}_i$ имеют следующие скобки Дирака $\{\xi^i, \bar{\xi}_j\}^* = -\frac{i}{2}\delta^i_j$, то есть переменные ξ^i и $\bar{\xi}_i$ канонически-сопряжены друг другу. Это условие генерируется автоматически соответствующим кинетическим членом для ξ^i и $\bar{\xi}_i$ в лагранжиане.

Таким образом, мы исключили полностью пространственно-временные переменные и получили систему с фазовыми переменными: спинорами λ^i_α, $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}$; канонически-сопряженными к ним спинорами $\bar{\mu}^\alpha_i$, $\mu^{\dot{\alpha}i}$ и скалярами ξ^i, $\bar{\xi}_i$, ограниченными связями

$$h \equiv \lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i} - \sqrt{2}m \approx 0\,, \qquad \bar{h} \equiv \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}i} - \sqrt{2}m \approx 0\,, \tag{3.71}$$

$$D_0 = \mathcal{D}_0 + 2\bar{\xi}_i\xi^i = i(\bar{\mu}^\alpha_i\lambda^i_\alpha - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\mu^{\dot{\alpha}i}) + 2\bar{\xi}_i\xi^i \approx 0\,, \tag{3.72}$$

$$D_r = \mathcal{D}_r + (\sigma_r)_i{}^j\bar{\xi}_j\xi^i = (\sigma_r)_i{}^j\left[\tfrac{i}{2}(\bar{\mu}^\alpha_j\lambda^i_\alpha - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}j}\mu^{\dot{\alpha}i}) + \bar{\xi}_j\xi^i\right] \approx 0\,, \tag{3.73}$$

$$S - j \equiv \bar{\xi}_i\xi^i - j \approx 0\,, \tag{3.74}$$

$$B_0 = \mathcal{B}_0 = \bar{\mu}^\alpha_i\lambda^i_\alpha + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\mu^{\dot{\alpha}i} \approx 0\,. \tag{3.75}$$

Связи $B_0 \approx 0$ (3.75), $h + \bar{h} \approx 0$ образуют пару сопряженных связей второго рода. Мы можем рассматривать связь $B_0 \approx 0$ как условие фиксации калибровки для связи $h + \bar{h} \approx 0$. Тогда мы получаем эквивалентную систему, имеющую связи (3.71)-(3.74), а связь $B_0 \approx 0$ накладывается при необходимости.

Легко проверить, что число физических степеней свободы равно 8 и в твисторной системе со связями (3.71)-(3.74) и в модели массивной спиновой частицы (3.42). Отметим также, что связи (3.72) и (3.73) объединяются в виде тензора

$$D_i{}^j \equiv \tfrac{i}{2}\left(\bar{\mu}^\alpha_i\lambda^j_\alpha - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\mu^{\dot{\alpha}j}\right) + \bar{\xi}_i\xi^j \approx 0\,. \tag{3.76}$$

Тогда $D_0 \approx 0$ определяется следовой частью тензора $D_i{}^j \approx 0$, $D_0 = D_i{}^i$, тогда как $D_r \approx 0$ пропорциональны бесследовым частям $D_i{}^j - \frac{1}{2}\delta_i{}^j D_k{}^k \approx 0$, $D_r = (\sigma_r)_i{}^j D_j{}^i$.

3.3.2. Твисторные преобразования и твисторный лагранжиан массивной спиновой частицы

Выражения, полученные в предыдущем подразделе, позволяют нам получить полный набор уравнений, определяющих твисторные преобразования.

После фиксации калибровок (3.64), (3.65) мы получаем твистороподобное представление времениподобного четыре-импульса (3.55). Уравнения (3.67), (3.68) дают выражения новых переменных ξ^i, $\bar{\xi}_i$ через спинорные

$$\xi^i = \zeta^\alpha \lambda_\alpha^i \,, \qquad \bar{\xi}_i = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i} \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \,. \tag{3.77}$$

Из явного вида канонических преобразований от базиса с координатами x^μ, p_μ и др. к базису, параметризованном $x^{(0)}$, $x_{(r)}$, $p^{(0)}$, $p_{(r)}$ и др. (смотрите [161]), и используя условия (3.64), (3.65), (3.59), мы получаем условия инцидентности

$$\bar{\mu}_i^\alpha = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i} x^{\dot{\alpha}\alpha} + i\bar{\xi}_i \zeta^\alpha \,, \qquad \mu^{\dot{\alpha}i} = x^{\dot{\alpha}\alpha} \lambda_\alpha^i - i\xi^i \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \,, \tag{3.78}$$

которые определяют спинор μ через другие переменные. Таким образом, мы получаем твисторные преобразования (3.55), (3.78), (3.77) для массивной спиновой частицы, связывающие пространственно-временную формулировку с фазовыми переменными x^μ, p_μ; ζ^α, $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}$ и твисторную формулировку с фазовыми переменными λ_α^i, $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}$, $\bar{\mu}_i^\alpha$, $\mu^{\dot{\alpha}i}$; ξ^i, $\bar{\xi}_i$. Отметим, что в твисторной формулировке спин массивной частицы описывается двумя комплексными скалярными переменными ξ^i, $\bar{\xi}_i$, $i = 1, 2$.

Твисторные преобразования (3.55)-(3.78) дают нам желаемый вид кинетического члена в твисторных переменных:

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} \Pi^{\dot{\alpha}\alpha} = -\tfrac{1}{2}(d\bar{\mu}_i^\alpha \, \lambda_\alpha^i - d\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i} \, \mu^{\dot{\alpha}i} - \bar{\mu}_i^\alpha \, d\lambda_\alpha^i + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i} \, d\mu^{\dot{\alpha}i}) + i(d\bar{\xi}_i \, \xi^i - \bar{\xi}_i \, d\xi^i) \,. \tag{3.79}$$

В терминах битвистора

$$Z_a^i = \left(\lambda_\alpha^i \,, \ \mu^{\dot{\alpha}i}\right) \tag{3.80}$$

и его сопряженного

$$\bar{Z}^a = g^{a\dot{b}} \bar{Z}_{\dot{b}} = \left(\bar{\mu}_i^\alpha \,, \ -\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\right) \,, \tag{3.81}$$

(см. (3.7), (3.9)) кинетический член (3.79) записывается в виде

$$p_\mu \Pi^\mu = \frac{1}{2} p_{\alpha\dot\alpha} \Pi^{\dot\alpha\alpha} = -\tfrac{1}{2}(d\bar Z_i^a\, Z_a^i - \bar Z_i^a\, dZ_a^i) + i(d\bar\xi_i\, \xi^i - \bar\xi_i\, d\xi^i)\,. \tag{3.82}$$

Таким образом, твисторная формулировка массивной спиновой частицы описывается лагранжианом

$$\begin{aligned} L \ = \ & -\tfrac{1}{2}\left(\dot{\bar Z}_i^a\, Z_a^i - \bar Z_i^a\, \dot Z_a^i\right) + i\left(\dot{\bar\xi}_i\, \xi^i - \bar\xi_i\, \dot\xi^i\right) \\ & - M\,(S-j) - N_j{}^i D_i{}^j - Kh - \bar K \bar h\,, \end{aligned} \tag{3.83}$$

где M, $N_j{}^i$, K и $\bar K$ – лагранжевы множители для связей (3.74), (3.76) и (3.71).

Отметим, что твисторные “массовые” связи (3.71) могут быть записаны в виде

$$h = Z_a^i I^{ab} Z_{bi} + \sqrt{2}m \approx 0\,, \quad \bar h = \bar Z_i^a I_{ab} \bar Z^{bi} - \sqrt{2}m \approx 0\,, \tag{3.84}$$

где введены бесконечные (асимптотические) твисторы

$$I^{ab} = \left(\begin{array}{cc} \epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right), \quad I_{ab} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{array} \right),$$

а связи (3.76) – в виде ковариантных сверток твисторов

$$D_i{}^j = \tfrac{i}{2} \bar Z_i^a Z_a^j + \bar\xi_i \xi^j \approx 0\,. \tag{3.85}$$

Мы можем ввести также так называемые “бозонные супертвисторы”

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^i = (Z_a^i; \xi^i)\,, \quad \bar{\mathcal{Z}}_i^{\mathcal{A}} = (\bar Z_i^a; -2i\bar\xi_i)\,, \tag{3.86}$$

в виде которых кинетические члены лагранжиана (3.83) записываются как $-\frac{1}{2}\left(\dot{\bar{\mathcal{Z}}}_i^{\mathcal{A}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^i - \bar{\mathcal{Z}}_i^{\mathcal{A}} \dot{\mathcal{Z}}_{\mathcal{A}}^i\right)$, а связи (3.85) – в виде $D_i{}^j = \frac{i}{2} \bar{\mathcal{Z}}_i^{\mathcal{A}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}^j \approx 0$.

3.3.3. Квантование твисторной массивной частицы

Выполним каноническое квантование по Дираку массивной спиновой частицы в твисторной формулировке, определяемой связями (3.71)–(3.74)

Связь $D_0 = 2D_i{}^i$ является условием фиксации калибровки для связи $h - \bar h \approx 0$. Мы накладываем также фиксацию калибровки (3.75) $B_0 = \lambda_\alpha^i \bar\mu_i^\alpha + \mu^{\dot\alpha i} \bar\lambda_{\dot\alpha i} \approx 0$ для связи $h + \bar h \approx 0$ и считаем, что связи D_0, B_0, h, $\bar h$

выполняются в сильном смысле. Введение скобок Дирака для них не изменяет коммутационные соотношения для других связей [23], [24] и мы можем рассматривать твисторные переменные μ и λ со стандартными коммутационными соотношениями

$$\{\lambda^i_\alpha, \bar{\mu}^\beta_j\} = \delta^\beta_\alpha \delta^i_j\,, \quad \{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}, \mu^{\dot{\beta}j}\} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \delta^j_i \tag{3.87}$$

в $SU(2)$-связях (3.73). Мы будем реализовывать квантовые коммутаторы спинорных переменных

$$[\bar{\mu}^\alpha_i, \lambda^j_\beta] = -i\delta^\alpha_\beta \delta^j_i\,, \quad [\mu^{\dot{\alpha}i}, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}j}] = -i\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \delta^i_j$$

в виде дифференциальных операторов. Для определенности мы берем представление с диагональным спинором λ, тогда как реализация спинора ω в связи (3.73) будет

$$\bar{\mu}^\alpha_i = -i\partial/\partial\lambda^i_\alpha\,, \quad \mu^{\dot{\alpha}i} = -i\partial/\partial\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\,.$$

Кинетический член в (3.83) приводит к следующим скобкам Дирака для переменных ξ

$$\{\bar{\xi}_i, \xi^j\}^* = -\tfrac{i}{2}\delta^j_i\,. \tag{3.88}$$

Квантовой алгеброй ξ-переменных является

$$[\xi^i, \bar{\xi}_j] = -\tfrac{1}{2}\delta^i_j\,.$$

Тогда переменные

$$a_i \equiv \sqrt{2}\bar{\xi}_i\,, \quad a^{+i} \equiv \sqrt{2}\xi^i \tag{3.89}$$

являются операторами уничтожения и рождения двухмерного осциллятора

$$\left[a_i, a^{+j}\right] = \delta^j_i\,.$$

Волновая функция $\Psi(\lambda, \bar{\lambda})$ берется в пространстве чисел заполнения этих операторов. Она подчинена связям первого рода

$$(S-J)\,\Psi \equiv \left(\tfrac{1}{2}a^{+i}a_i - J\right)\Psi = 0\,, \tag{3.90}$$

$$D_r\Psi = (\mathcal{D}_r + \Delta_r)\,\Psi = 0\,, \quad r = 1,2,3\,, \tag{3.91}$$

где

$$\mathcal{D}_r \equiv \tfrac{1}{2}\left[\lambda^i_\alpha(\sigma_r)_i{}^j\frac{\partial}{\partial\lambda^j_\alpha} - \frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}}(\sigma_r)_i{}^j\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}j}\right], \qquad \Delta_r \equiv \tfrac{1}{2}a^{+i}(\sigma_r)_i{}^j a_j\,. \tag{3.92}$$

Константа J в связи (3.90) есть классическая константа j в (3.74), перенормированная константами упорядочения.

Операторы $\mathcal{D}_r$ и Δ_r образуют алгебры $SU(2)$:

$$[\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_s] = i\epsilon_{rsp}\mathcal{D}_p\,, \quad [\Delta_r, \Delta_s] = i\epsilon_{rsp}\Delta_p\,.$$

Аналогично, квантовая алгебра связей первого рода D_r также $SU(2)$,

$$[D_r, D_s] = i\epsilon_{rsp}D_p\,,$$

и возможные константы упорядочения в операторах $\mathcal{D}_3$ и Δ_3 компенсируют взаимно друг друга.

Найдем значения квантовых чисел состояний спектра, которые определяются собственными значениями операторов Казимира группы Пуанкаре.

Оператор трансляций в пространстве волновых функций $\Psi(\lambda, \bar{\lambda})$ имеет вид $P_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda^i_\alpha\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}$, тогда как операторы преобразований Лоренца –

$$M_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = 2i(\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}M_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta}\bar{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}})\,, \tag{3.93}$$

где $M_{\alpha\beta} = \lambda^i_{(\alpha}\frac{\partial}{\partial\lambda^{\beta)i}}$, $\bar{M}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \bar{\lambda}_{(\dot{\alpha}i}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}^{\dot{\beta})i}}$.

Вследствие условий нормировки (3.71) для λ-спиноров, имеем

$$P^2 = m^2\,, \tag{3.94}$$

то есть, физические состояния описывают частицу массы m.

Прямыми вычислениями получаем, что псевдо-вектор Паули-Любаньского

$$W_{\alpha\dot{\alpha}} = P_\alpha^{\dot{\beta}}\bar{M}_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} - P_{\dot{\alpha}}^{\beta}M_{\beta\alpha}$$

принимает вид

$$W_{\alpha\dot{\alpha}} = iu_{r\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{D}_r\,, \tag{3.95}$$

где

$$u_{r\alpha\dot{\alpha}} \equiv \lambda^i_\alpha(\sigma_r)_i{}^j\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}j}\,, \quad u_r\cdot u_s = -m^2\delta_{rs}$$

и операторы $\mathcal{D}_r$ определены в (3.92). Отметим, что $[D_r, u_{s\alpha\dot{\alpha}}] = \epsilon_{rsp} u_{p\alpha\dot{\alpha}}$. То есть,

$$W^2 = m^2 \mathcal{D}_r \mathcal{D}_r \,. \tag{3.96}$$

Из (3.91) следует, что на физических состояниях $\mathcal{D}_r = D_r - \Delta_r$ и $\mathcal{D}_r \mathcal{D}_r = D_r D_r - 2\Delta_r D_r + \Delta_r \Delta_r$, поэтому на состояниях спектра

$$W^2 = m^2 \Delta_r \Delta_r \,. \tag{3.97}$$

Но прямое вычисление дает нам

$$\Delta_r \Delta_r = \tfrac{1}{2} a^{+i} a_i (\tfrac{1}{2} a^{+i} a_i + 1) = S(S+1) \,.$$

Вследствие связи (3.90) оператор S равен J на физических состояниях. Следовательно, на состояниях спектра

$$W^2 = m^2 S(S+1) \tag{3.98}$$

то есть, данная твисторная модель описывает массивную частицу спина J.

Операторы Δ_r образуют алгебру $SU(2)$, реализованную операторами двух осцилляторов. Пусть целые ненулевые числа n_1 и n_2 являются числами заполнения, то есть n_1 и n_2 есть собственные значения операторов $a^{+1}a_1$ и $a^{+2}a_2$. Связи (3.90) дают условие $\frac{1}{2}(n_1 + n_2) = J \geq 0$. Тогда $\frac{1}{2}(n_1 - n_2) \equiv M$ принимает $(2J+1)$ значений $M = -J, -J+1, ..., J-1, J$. В нормированном базисе действие операторов $\Delta_\pm = \Delta_1 \pm i\Delta_2$, Δ_3 на волновую функцию, имеющую внешний индекс M, $\Psi_M(\lambda, \bar{\lambda})$, имеет вид

$$\Delta_3 \Psi_M = M \Psi_M \,, \qquad \Delta_\pm \Psi_M = \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, \Psi_{M\pm1} \,.$$

Тогда связи (3.91) на $(2J+1)$-компонентной волновой функции $\Psi_M(\lambda, \bar{\lambda})$ принимают значения

$$\mathcal{D}_3 \Psi_M = -M \Psi_M \,, \qquad \mathcal{D}_\pm \Psi_M = -\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\, \Psi_{M\pm1} \,, \tag{3.99}$$

где $\mathcal{D}_\pm = \mathcal{D}_1 \pm i\mathcal{D}_2$. Все $(2J+1)$ компоненты волновой функции могут быть получены из одной компоненты, например, из компоненты высшего Ψ_{+J} или низшего Ψ_{-J} весов

$$\Psi_M = \sqrt{\frac{(J \pm M)!}{(J \mp M)!(2J)!}} (-1)^M (\mathcal{D}_\mp)^{J \mp M} \Psi_{\pm J} \,.$$

Эти компоненты $\Psi_{\pm J}$ определяются уравнениями

$$\mathcal{D}_3\Psi_{\pm J} = \pm J\Psi_{\pm J}\,, \quad \mathcal{D}_\pm\Psi_{\pm J} = 0\,, \quad (\mathcal{D}_\mp)^{2J+1}\Psi_{\pm J} = 0\,. \tag{3.100}$$

Операторы $\mathcal{D}_r$ являются генераторами $SU(2)$-преобразований, действующих на индексы $i, j, k, ...$ в $SL(2,C)$-матрице λ^i_α. Связи (3.99) утверждают, что волновая функция $\Psi_M(\lambda,\bar\lambda)$ определена с точностью до локальных преобразований, действующих на индекс M

$$\Psi'_M(\lambda') = \mathbf{D}^J_{MN}(h)\Psi_N(\lambda)\,, \tag{3.101}$$

где $h \in SU(2)$ и $\lambda'^i_\alpha = h^i_j\lambda^j_\alpha$. Здесь, $\mathbf{D}^J_{MN}$ матрица $SU(2)$-преобразований веса J. Таким образом, волновая функция определена в действительности на однородном пространстве $\mathcal{M} = G/H = SL(2,C)/SU(2)$.

Представляя индекс M как собирательный индекс $M = (i_1 \dots i_{2J})$ $SU(2)$-индексов $i = 1, 2$, мы представляем твисторное поле массивной спиновой частицы в виде мультиспинорного поля

$$\Psi_M(\lambda,\bar\lambda) = \Psi_{i_1\dots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)\,, \tag{3.102}$$

полностью симметричного по внешним индексам: $\Psi_{i_1\dots i_{2J}} = \Psi_{(i_1\dots i_{2J})}$.

Гармоническое разложение волновой функции, определенной на $SL(2,C)$, имеет вид [245]

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= -\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left(F(\chi)T^{-1}_\chi(\lambda)\right)c(\chi)d\chi \\ &= -\frac{1}{32\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d\rho(n^2+\rho^2)\mathrm{Tr}\left(F(\chi)T^{-1}_\chi(\lambda)\right)\,,\end{aligned} \tag{3.103}$$

где преобразование Фурье $F(\chi)$ индекса χ действует посредством

$$F(\chi)\varphi(z) \equiv \int \Phi(\lambda)T_\chi(\lambda)\varphi(z)d\lambda$$

в пространстве функций $\varphi(z)$, определенных на двухмерной комплексной плоскости с координатами $z = z^\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Здесь $T_\chi(\lambda)$ есть оператор $SL(2,C)$-преобразований:

$$T_\chi(\lambda)\varphi(z) = \varphi(z\lambda)\,.$$

В разложении (3.103) сумма берется только по представлениям основной серии, имеющим ннлекс $\chi = ((n+i\rho)/2, (-n+i\rho)/2)$, $c(\chi) = n^2 + \rho^2$.

Для $SU(2)$-ковариантной функции, подчиненной условиям (3.101), мы имеем

$$n = M\,.$$

Поэтому, волновая функция массивной частицы спина J имеет гармоническое разложение по представлениям основной серии следующего вида [245]

$$\Psi_M(\lambda) = -\frac{1}{32\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(M^2+\rho^2)\mathrm{Tr}\left(F_M(\chi)T_\chi^{-1}(\lambda)\right)\,, \qquad (3.104)$$

где

$$\chi = ((M+i\rho)/2, (-M+i\rho)/2)\,.$$

Связь обычных пространственно-временных спин-тензорных полей $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J}}(x)$ с твисторными полями (3.102) устанавливается с помощью интегрального преобразования следующего вида. Мы строим $SU(2)$-инвариантные выражения с помощи сверток твисторных полей $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$ и твисторных спиноров $\lambda^{i_1}_{\alpha_1},\ldots,\lambda^{i_{2J}}_{\alpha_{2J}}$. Получаемые выражения являются лоренцевыми спин-тензорами, определенными на однородном пространстве $SL(2,C)/SU(2)$. Интегрируя их с инвариантной на $SL(2,C)/SU(2)$ мерой $d^3\lambda$ со стандартной Фурье-экспонентой $e^{ix^\mu p_\mu}$, где $p_\mu = p_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\dot\alpha\alpha}_\mu = \lambda^i\sigma_\mu\bar\lambda_i$, мы получаем обычные пространственно-временные поля[2]

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\,\alpha_{2J}}(x) = \int d^3\lambda e^{ix^\mu\lambda^k\sigma_\mu\bar\lambda_k}\lambda^{i_1}_{\alpha_1}\ldots\lambda^{i_{2J}}_{\alpha_{2J}}\Psi_{i_1\ldots\,i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)\,. \qquad (3.105)$$

Эти поля полностью симметричны по спинорным индексам $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J}}(x) = \Phi_{(\alpha_1\ldots\alpha_{2J})}(x)$ и дают стандартное $(2J+1)$-компонентное описание массивной частицы спина J. Вследствие присутствия экспоненты в интегральном преобразовании для полей (3.105), они автоматически удовлетворяют массивному уравнению Клейна-Гордона $(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\,\Phi_{\alpha_1\ldots\,\alpha_{2J}}(x) = 0$.

---

[2] Подобные интегральные преобразования для безмассовых твисторных полей рассматривались в [86, 96]

Используя данное твисторное поле, мы можем построить другое, но эквивалентное, пространствено-временное описание (поле) массивной частицы спина J. $SU(2)$-инварианты могут быть построены свертками твисторного поля $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$ с твисторными спинорами $\bar\lambda^i_{\dot\alpha}$. В этом случае мы получаем пространственно-временное поле только с точечными индексами. Когда при построении $SU(2)$-инвариантов часть $SU(2)$-индексов твисторного поля $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$ сворачивается с n спинорами λ^i_α и $2J-n$ спинорами $\bar\lambda^i_{\dot\alpha}$, мы получаем спин-тензорное поле $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J}}(x)$ с n неточечными и $2J-n$ точечными спинорными индексами. По построению, это поле симметрично по всем неточечным и всем точечным индексам, удовлетворяет массивному уравнению Клейна-Гордона, а также условию поперечности $\partial^\mu\sigma_{\mu\dot\alpha_{n+1}}^{\alpha_1}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J}}(x) = 0$. Такие поля при фиксированном J описывают массивную частицу спина J и связаны друг с другом уравнениями Паули-Фирца $i\,\partial^\mu\,\sigma_\mu^{\dot\beta\alpha_n}\,\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{2J-n}} = m\,\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{2J-n}\dot\beta}$, $i\,\partial^\mu\,\sigma_{\mu\beta\dot\alpha_n}\,\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J-n}}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_n} = m\,\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J-n}\beta}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{n-1}}$. Обьединяя эти поля $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J}}(x)$ при фиксированном значении J в одно спин-тензорное поле поле с внешними спинорными дираковскими индексами, мы получим описание массивной частицы спина J в формализме Баргмана-Вигнера (или подходе Рариты-Швингера при другом объединении спин-тензорных полей).

Отметим, что в [164] была рассмотрена массивная спиновая суперчастица в битвисторной формулировке с дополнительными спиновыми переменными, описывающими после квантования координаты размытой сферы. Квантовый спектр модели [164] совпадает со спектром твисторной модели этого раздела.

3.4. Обобщение модели Ширафуджи для массивной частицы со спином

Есть три эквивалентных способа описания безмассовых релятивистских частиц. Помимо пространственно-временного и чисто твисторного описания широко используется (см., например, [168]) смешанное твисторное–пространственно-временное описание с первичными пространственно-временными координатами, составным импульсом $p_{\alpha\dot\beta} = \lambda_\alpha\bar\lambda_{\dot\beta}$ и лагранжианом Ширафуджи [117]

$$L_0 = \lambda_\alpha\bar\lambda_{\dot\beta}\dot x^{\alpha\dot\beta}\,. \tag{3.106}$$

В этом разделе мы обобщим безмассовую модель Ширафуджи на модель массивных частиц со спином и электрическим зарядом.

Последовательное построение механических систем определяется соответствующими один-формами Лиувилля [246, 247]. Для битвистора (3.80), (3.81) свободная один-форма Лиувилля имеет следующий вид

$$\Theta_2 = \frac{1}{2}\left(\bar\mu^\alpha{}_i d\lambda_{\alpha i} + \bar\lambda_{\dot\alpha i}d\mu^{\dot\alpha i} - h.c.\right)\,. \tag{3.107}$$

Используя битвисторное обобщение комплексных преобразований Пенроуза (3.24), где мнимая часть комплексного четыре-вектора $z^{\alpha\dot\beta} = x^{\alpha\dot\beta} + iy^{\alpha\dot\beta}$ описывает спиновые степени свободы, мы получаем

$$\Theta_2' = \lambda_\alpha{}^i\bar\lambda_{\dot\beta i}dx^{\alpha\dot\beta} + iy^{\alpha\dot\beta}(\lambda_\alpha{}^i d\bar\lambda_{\dot\beta i} - \bar\lambda_{\dot\beta i}d\lambda_\alpha{}^i)\,. \tag{3.108}$$

Вводя новые спиновые переменные

$$s^i{}_j = -2y^{\alpha\dot\beta}\lambda^i_\alpha\bar\lambda_{\dot\beta j} = \overline{(s^j{}_i)}\,, \tag{3.109}$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\bar\lambda_{\dot\alpha k}\bar\lambda^{\dot\alpha k}\,, \qquad \bar f = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\lambda_{\alpha k}\lambda^{\alpha k}\,, \tag{3.110}$$

мы получаем из (3.108)

$$\Theta_2' = p_{\alpha\dot\beta}dx^{\alpha\dot\beta} + is_i{}^j\left[\frac{1}{\sqrt{2}\bar f}\,\lambda^\alpha{}_k d\lambda_{\alpha j}\epsilon^{ki} + \frac{1}{\sqrt{2}f}\,\bar\lambda^{\dot\alpha i}d\bar\lambda_{\dot\alpha}{}^k\epsilon_{kj}\right]\,. \tag{3.111}$$

Один-форма Лиувилля (3.111) определяет модель частицы, являющейся двух-твисторным обобщением на массивный случай действия Ширафуджи (3.106). Соответстующие значения спина и электрического заряда будут определяться постулированием подходящих физических связей.

3.4.1. Действие, законы сохранения и физические связи модели

Мы описываем динамику массивной спиновой частицы в обобщенном координатном пространстве, параметризованном $\big(x^\mu(\tau), \lambda_{\alpha k}(\tau), \bar\lambda^k_{\dot\alpha}(\tau), s_k{}^j(\tau)\big)$, где x^{μ} – вектор положения, $\lambda_{\alpha k}$, $\bar{\lambda}^{k}_{\dot{\alpha}} = \overline{(\lambda_{\alpha k})}$ $(k,j=1,2)$ – две пары коммутирующих вейлевских спиноров и четыре величины $s_k{}^j = \overline{(s_j{}^k)}$, – лоренцевы скаляры. Форма (3.111) генерирует действие

$$S = \int d\tau\, \mathcal{L} = \int d\tau\, \left[p_{\alpha\dot{\beta}} \dot{x}^{\alpha\dot{\beta}} + i s_k{}^j \left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{f}}}\, \lambda^{\alpha k} \dot{\lambda}_{\alpha j} + \frac{1}{\sqrt{2f}}\, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{j} \dot{\bar{\lambda}}^{k}_{\dot{\alpha}} \right) + \ell^a T_a \right], \tag{3.112}$$

где T_a являются связями, которые мы определим из требуемых физических условий ниже, а переменные $\ell^a(\tau)$ – лагранжевы множители для них.

Выражения для импульсов, полученные из лагранжиана (3.112), приводят к шестнадцати первичным связям

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} - \lambda^{i}_{\alpha}\, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}\, i} \approx 0\,, \tag{3.113}$$

$$P^{\alpha j} - \frac{i}{\sqrt{2\bar{f}}}\, \lambda^{\alpha k} s_k{}^j \approx 0\,, \qquad \bar{P}^{\dot{\alpha}}_{j} - \frac{i}{\sqrt{2f}}\, s_j{}^k \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{k} \approx 0\,, \tag{3.114}$$

$$P_{(s)}{}^{k}{}_{j} \approx 0\,, \tag{3.115}$$

где $P^{\alpha j}$, $\bar{P}^{\dot{\alpha}}_{j}$, $P_{(s)}{}^{k}{}_{j}$ – сопряженные импульсы для $\lambda_{\alpha j}$, $\bar{\lambda}^{j}_{\dot{\alpha}}$, $s_k{}^j$, соответственно.

Связи T_a определяются операторами Казимира группы Пуанкаре, для рассматриваемой системы имеющим вид $P_\mu P^\mu = p_\mu p^\mu = f\bar{f}$, $W^\mu W_\mu = -f\bar{f}\,\mathbf{s}^2$. Поэтому, мы рассматриваем в действии (3.112) следующие четыре связи T_a $(a=1,2,3,4)$:

$$T_1 : \qquad T \equiv f\bar{f} - m^2 \approx 0\,, \tag{3.116}$$

$$T_2 : \qquad S \equiv \mathbf{s}^2 - s(s+1) \approx 0\,, \tag{3.117}$$

$$T_3 : \qquad S_3 \equiv s_3 - m_3 \approx 0\,, \tag{3.118}$$

$$T_4 : \qquad Q \equiv s_0 - q \approx 0\,. \tag{3.119}$$

Вещественные величины $\mathbf{s} = (s_r) = (s_1, s_2, s_3)$ и s_0, которые присутствуют в (3.117)-(3.119), определены как следовая и бесследовые части переменных s^j_k:

$$s_0 = \frac{1}{2}\, s_k{}^k\,, \qquad s_r = \frac{1}{2}\, s_k{}^j (\sigma_r)_j{}^k\,, \qquad r = 1,2,3\,, \tag{3.120}$$

где $(\sigma_r)_j{}^k$ – матрицы Паули. Конечно, связь (3.116) определяет массу m частицы. Связи (3.117) и (3.118) введены в действие (3.112) для получения фиксированных значений спина s и его “ковариантной проекции” s_3, тогда как связь (3.119) определяет $U(1)$ заряд q частицы. Таким образом, полный набор связей состоит из физических связей (3.116)-(3.119) и связей (3.113)-(3.115). Вторичные связи не возникают в данной модели.

3.4.2. Анализ связей и решение связей второго рода

После преобразований двенадцати связей (3.113), (3.114) к эквивалентному набору лоренц-инвариантных связей с помощью сверток их со спинорами $\lambda_{\alpha k}$ и $\bar\lambda^k_{\dot\alpha}$ (матрицы $\lambda^k_\alpha, \bar\lambda^k_{\dot\alpha}$ обратимы благодаря (3.116)) анализ связей упрощается и их разделение по родам становится наглядным. Связи (3.114) эквивалентны следующему множеству связей:

$$D_k{}^j \equiv \mathcal{D}_k{}^j + s_k{}^j \approx 0\,, \qquad B_k{}^j \equiv \mathcal{B}_k{}^j \approx 0\,, \tag{3.121}$$

где величины (см. также (3.63))

$$\mathcal{D}_k{}^j \equiv i(\lambda_{\alpha k}P^{\alpha j} - \bar P_k^{\dot\alpha}\bar\lambda^j_{\dot\alpha})\,, \qquad \mathcal{B}_k{}^j \equiv \lambda_{\alpha k}P^{\alpha j} + \bar P_k^{\dot\alpha}\bar\lambda^j_{\dot\alpha} \tag{3.122}$$

содержат только спинорные фазовые переменные.

После свертки со спинорами четыре связи (3.113) принимают вид

$$C_k{}^l \equiv \mathcal{P}_k{}^l + m^2\delta_k{}^l \approx 0\,, \tag{3.123}$$

где

$$\mathcal{P}_k{}^l \equiv 4\lambda_{\alpha k}P^{\alpha\dot\beta}\bar\lambda_{\dot\beta}{}^l\,. \tag{3.124}$$

Алгебра связей (3.121), (3.123) и (3.115) становится прозрачной после введения следующих $SU(2)$-скалярных и векторных величин:

$$\mathcal{D}_r = \frac{1}{2}\mathcal{D}_k{}^j(\sigma_r)_j{}^k\,, \quad \mathcal{D}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{D}_k{}^k; \quad \mathcal{B}_r = \frac{1}{2}\mathcal{B}_k{}^j(\sigma_r)_j{}^k\,, \quad \mathcal{B}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{B}_k{}^k; \tag{3.125}$$

$$\mathcal{P}_r = \frac{1}{2}\mathcal{P}_k{}^j(\sigma_r)_j{}^k\,, \quad \mathcal{P}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{P}_k{}^k; \quad \mathcal{P}^{(s)}_r = \frac{1}{2}P^{(s)j}_k(\sigma_r)_j{}^k\,, \quad P^{(s)}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{P}^{(s)k}_k\,. \tag{3.126}$$

В терминах переменных (3.125) и (3.126) связи (3.121), (3.123) и (3.115) принимают вид

$$R_r \equiv P^{(s)}_r \approx 0\,, \qquad R_0 \equiv P^{(s)}_0 \approx 0\,, \tag{3.127}$$

$$D_r \equiv \mathcal{D}_r + s_r \approx 0\,, \qquad D_0 \equiv \mathcal{D}_0 + s_0 \approx 0\,, \tag{3.128}$$

$$B_r \equiv \mathcal{B}_r \approx 0\,, \qquad B_0 \equiv \mathcal{B}_0 \approx 0\,, \tag{3.129}$$

$$C_r \equiv \mathcal{P}_r \approx 0\,, \qquad C_0 \equiv \mathcal{P}_0 + m^2 \approx 0\,. \tag{3.130}$$

Таким образом, наша система описывается четырьма физическими связями (3.116)-(5.102) и шестнадцатью связями (3.127)-(3.130).

Скобки Пуассона $\{x^\mu, P_\nu\} = \delta^\mu_\nu$, $\{s_k{}^j, P_{(s)}{}^n{}_l\} = \delta^n_k \delta^j_l$, $\{\lambda_{\alpha k}, P^{\beta j}\} = \delta^\beta_\alpha \delta^j_k$, $\bar\lambda^k_{\dot\alpha}, \bar P^{\dot\beta}_j\} = \delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\delta^k_j$, $\{s_0, P_{(s)0}\} = \frac{1}{2}$, $\{s_r, P_{(s)q}\} = \frac{1}{2}\delta_{rq}$ дают ненулевыми скобки для величин (3.125)-(3.126)

$$\{\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_p\} = -\epsilon_{rpq}\mathcal{D}_q\,, \quad \{\mathcal{D}_r, \mathcal{B}_p\} = -\epsilon_{rpq}\mathcal{B}_q\,, \quad \{\mathcal{B}_r, \mathcal{B}_p\} = -\epsilon_{rpq}\mathcal{D}_q\,, \tag{3.131}$$

$$\{\mathcal{P}_r, \mathcal{D}_p\} = -\epsilon_{rpq}\mathcal{P}_q\,, \quad \{\mathcal{P}_r, \mathcal{B}_p\} = i\delta_{rp}\mathcal{P}_0\,, \quad \{\mathcal{P}_0, \mathcal{B}_r\} = i\mathcal{P}_r\,, \tag{3.132}$$

$$\{\mathcal{P}_r, \mathcal{B}_0\} = i\mathcal{P}_r\,, \quad \{\mathcal{P}_0, \mathcal{B}_0\} = i\mathcal{P}_0\,. \tag{3.133}$$

Мы видим из (3.131), что $\mathcal{D}_r$ являются генераторами $SO(3)$, а $\mathcal{B}_r$ расширяют алгебру $\mathcal{SO}(3)$ до лоренцевой алгебры $SO(3,1) \simeq sl(2;\mathbb{C})$. Величины $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_r$ расширяют лоренцеву алгебру генераторов $(\mathcal{D}_r, \mathcal{B}_r)$ до алгебры Пуанкаре.

Полный гамильтониан равен линейной комбинации всех связей

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^C \;=\; & \ell^{(D)}_r D_r + \ell^{(D)}_0 D_0 + \ell^{(B)}_r B_r + \ell^{(B)}_0 B_0 + \ell^{(C)}_r C_r + \ell^{(C)}_0 C_0 + \\ & + \ell^{(R)}_r R_r + \ell^{(R)}_0 R_0 + \ell^{(T)} T + \ell^{(S)} S + \ell^{(S_3)} S_3 + \ell^{(Q)} Q\,. \end{aligned} \tag{3.134}$$

Из сохранения всех связей во времени находим, что четыре лагранжевых множителя являются произвольными и гамильтониан (5.96) принимает следующий окончательный вид

$$\mathcal{H} = \ell^{(C)}_0 \mathcal{F} + \ell^{(S)}\mathcal{S} + \ell^{(S_3)}\mathcal{S}_3 + \ell^{(Q)}\mathcal{Q}\,, \tag{3.135}$$

где

$$\mathcal{F} = C_0 + \frac{1}{2}T \simeq 0\,, \tag{3.136}$$

$$\mathcal{S} = S - 2s_r D_r \simeq 0\,, \tag{3.137}$$

$$\mathcal{S}_3 = S_3 - D_3 - 2\epsilon_{3rq} s_q R_r \simeq 0\,, \tag{3.138}$$

$$\mathcal{Q} = Q - D_0 \simeq 0 \tag{3.139}$$

описывают четыре связи первого рода. Оставшиеся шестнадцать связей могут быть представлены как восемь пар канонически-сопряженных связей вторго рода

$$D_r \equiv \mathcal{D}_r + s_r \approx 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad R_r \equiv P_{(s)r} \approx 0\,, \tag{3.140}$$

$$D_0 \equiv \mathcal{D}_0 + s_0 \approx 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad R_0 \equiv P_{(s)0} \approx 0\,, \tag{3.141}$$

$$B_r \equiv \mathcal{B}_r \approx 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad C_r \equiv \mathcal{P}_r \approx 0\,, \tag{3.142}$$

$$B_0 \equiv \mathcal{B}_0 \approx 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad T \approx 0\,. \tag{3.143}$$

Четыре пары связей (3.140)-(3.141) имеют так называемый разрешенный вид[3]. Следовательно, если мы исключим переменные s_r, s_0 и $P_{(s)r}$, $P_{(s)0}$ с помощью связей (3.140), (3.141),

$$s_r = -\mathcal{D}_r\,, \qquad s_0 = -D_0\,, \qquad P_{(s)r} = 0\,, \qquad P_{(s)0} = 0\,. \tag{3.144}$$

скобки Дирака для оставшихся переменных будут совпадать с каноническими скобками Пуассона.

Для учета трех пар связей второго рода (3.142) удобно ввести в фазовое пространство новые переменные, которые являются канонически сопряженными к связям $\mathcal{P}_r$. Тогда связи (3.142) будут также иметь разрешенный вид и введение соответствующей скобки Дирака не будет изменять скобок Пуассона для остальных переменных. После выполнения этой процедуры мы остаемся с восемнадцатью переменными фазового пространства

$$\widetilde{x}_0\,,\ \mathcal{P}_0; \qquad \lambda_{\alpha k}\,,\ \mathcal{P}^{\alpha k}; \qquad \bar\lambda^k_{\dot\alpha}\,,\ \bar{\mathcal{P}}^{\dot\alpha}_k, \tag{3.145}$$

которые ограничены двумя оставшимися связями второго рода

$$T = f\overline{f} - m^2 \ = \ 0\,, \tag{3.146}$$

$$B_0 = \mathcal{B}_0 - i\widetilde{x}_0\mathcal{P}_0 \ = \ 0\,. \tag{3.147}$$

---

[3] Пара связей $A \approx 0, B \approx 0$ имеет разрешенный вид в фазовом пространстве (x_i, p_i) $i = 1, \dots, N$, если эти связи представимы в виде $A = x_1 - f(x_r, p_r) \approx 0$, $B = p_1 \approx 0$, $r = 2, 3, \dots, N$. В этом случае скобки Дирака совпадают со скобками Пуассона [248].

В дальнейшем мы вводим скобки Дирака в отношении них. Отметим, что соотношение (3.146) редуцирует одну спинорную степень свободы, то есть, мы остаемся с семью неограниченными спинорными координатами.

3.4.3. Первичное квантование и решение связей первого рода

После обработки связей второго рода четыре связи первого рода (3.136)-(3.139) записываются в следующем виде

$$\mathcal{P}_0 + m^2 \approx 0\,, \tag{3.148}$$

$$\mathcal{D}_r\mathcal{D}_r - s(s+1) \approx 0\,, \tag{3.149}$$

$$\mathcal{D}_3 + m_3 \approx 0\,, \tag{3.150}$$

$$\mathcal{D}_0 + q \approx 0\,, \tag{3.151}$$

где константы m, s, m_3 и q описывают массу, спин, проекцию спина и внутренний абелев (электрический) заряд.

Для определения связей первого рода (3.148)-(3.151) как волновых уравнений мы рассматриваем представление Шредингера для квантованных переменных (3.145) с коммутирующими координатами $(\widetilde{x}_0, \lambda_{\alpha j}, \bar{\lambda}^j_{\dot{\alpha}})$. С учетом скобки Дирака для связей второго рода (3.146), (3.147) соответствующие импульсы $(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}^{\beta j}, \overline{\mathcal{P}}^{\dot{\beta}}{}_j)$ имеют следующую реализацию:

$$\mathcal{P}_0 = -i\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}_0}\,, \tag{3.152}$$

$$\mathcal{P}^{\beta j} = -i\frac{\partial}{\partial\lambda_{\beta j}} + i\frac{f}{2m^2}\,\lambda^{\beta j}\left(\lambda_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial\lambda_{\alpha k}} + \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}} - 2\widetilde{x}_0\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}_0}\right)\,, \tag{3.153}$$

$$\bar{\mathcal{P}}^{\dot{\beta}}_j = -i\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}^j_{\dot{\beta}}} - i\frac{\bar{f}}{2m^2}\,\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}_j\left(\lambda_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial\lambda_{\alpha k}} + \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}} - 2\widetilde{x}_0\frac{\partial}{\partial\widetilde{x}_0}\right)\,. \tag{3.154}$$

Эти выражения приводят к простым выражениям для операторов $\mathcal{D}_r, \mathcal{D}_0$, определяющих связи первого рода (5.157)-(3.151) $(r = 1, 2, 3)$:

$$\mathcal{D}_0 = \frac{1}{2}\left(\lambda_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial\lambda_{\alpha k}} - \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}}\right)\,, \quad \mathcal{D}_r = \frac{1}{2}(\tau_r)_j{}^k\left(\lambda_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial\lambda_{\alpha j}} - \bar{\lambda}^j_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}}\right)\,. \tag{3.155}$$

Волновая функция имеет следующую координатную зависимость

$$\Psi = \Psi(\widetilde{x}_0, \lambda_{\alpha k}, \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}})\,. \qquad (3.156)$$

Подставляя (3.152) и (3.155) в (3.148)-(3.151), мы получаем обобщенные волновые уравнения. Будем решать их последовательно.

i) Массовая связь (3.148).

Общее решение связи (3.148)

$$i\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_0}\Psi(\widetilde{x}_0, \lambda_{\alpha k}, \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}) = m^2 \Psi(\widetilde{x}_0, \lambda_{\alpha k}, \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}})\,, \qquad (3.157)$$

имеет вид

$$\Psi(\widetilde{x}_0, \lambda_{\alpha k}, \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}) = e^{-im^2 \widetilde{x}_0}\, \Phi(\lambda_{\alpha k}, \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}})\,. \qquad (3.158)$$

Используя выражения для $\widetilde{x}_0$ через исходные переменные, мы получаем, что экспонента в волновой функции (5.59) имеет стандартный вид плоской волны

$$\Psi(\widetilde{x}_0, \lambda_{\alpha k}, \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}) = e^{-ix_\mu p^\mu}\, \Phi(\lambda_{\alpha k}, \bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}})\,, \qquad (3.159)$$

где четыре-импульс p_μ является составным, $p_{\alpha\dot{\beta}} = \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}$.

ii) Нормированные спиноры и электрический заряд.

Переменные $\lambda_{\alpha k}$, $\bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}$ описывают две вещественные степени свободы, соответствующие

$$\lambda^{\alpha k}\lambda_{\alpha k} = \sqrt{2}\bar{f}\,, \qquad \bar{\lambda}_{\dot{\alpha} k}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha} k} = \sqrt{2} f\,, \qquad (3.160)$$

и шесть степеней свободы, определяемых нормированными спинорами

$$u_{\alpha i} = \left(\frac{\bar{f}}{f}\right)^{-1/4} \lambda_{\alpha i}\,, \qquad \bar{u}^i_{\dot{\alpha}} = \overline{(u_{\alpha i})} = \left(\frac{\bar{f}}{f}\right)^{1/4} \bar{\lambda}^i_{\dot{\alpha}}\,, \qquad (3.161)$$

играющие роль спинорных лоренцевых гармоник (см., например, [84, 88]). В результате связи (3.146) модуль f определяется массовым параметром $|f| = m$, а фазовая переменная $y \equiv \bar{f}/f$, $y \in S^1$ исключается связью (3.151).

Спиноры $\lambda_{\alpha k}$, $\bar{\lambda}^k_{\dot{\alpha}}$ удовлетворяют уравнениям дираковского вида с комплексной массой f

$$\sqrt{2}\, p_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha} i} = f\lambda^i_\alpha\,, \qquad \sqrt{2}\, p^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_{\alpha i} = \bar{f}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_i\,. \qquad (3.162)$$

Подставляя (3.161) в (3.162) мы получаем стандартные уравнения Дирака с вещественной массой m для двух-компонентных вейлевских спиноров

$$\sqrt{2}\, p_{\alpha\dot\alpha}\bar{u}^{\dot\alpha i} = m\, u^i_\alpha\,, \qquad \sqrt{2}\, p^{\dot\alpha\alpha}u_{\alpha i} = m\,\bar{u}^{\dot\alpha}_i\,. \tag{3.163}$$

В терминах переменных y, $u_{\alpha i}$, $\bar{u}^i_{\dot\alpha}$ дифференциальные операторы (3.155) принимают вид

$$\mathcal{D}_0 = 2y\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad \mathcal{D}_r = \frac{1}{2}(\tau_r)_j{}^k\left(u_{\alpha k}\frac{\partial}{\partial u_{\alpha j}} - \bar{u}^j_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^k_{\dot\alpha}}\right)\,. \tag{3.164}$$

Теперь связь первого рода (3.151) становится следующим уравнением

$$(2y\frac{\partial}{\partial y} + q)\Phi_m(y, u_{\alpha k}, \bar{u}^k_{\dot\alpha}) = 0, \tag{3.165}$$

решением которого есть

$$\Phi_m(y, u_{\alpha k}, \bar{u}^k_{\dot\alpha}) = y^{-q/2}\tilde{\Phi}_m(u_{\alpha k}, \bar{u}^k_{\dot\alpha})\,, \tag{3.166}$$

где функция $\tilde{\Phi}_m(u_{\alpha k}, \bar{u}^k_{\dot\alpha})$ зависит только от спиноров $u_{\alpha i}$ и $\bar{u}^i_{\dot\alpha}$.

iii) Описание спина.

Найдем теперь решение связей (5.157), (5.156) для функции $\tilde{\Phi}(u_{\alpha k}, \bar{u}^k_{\dot\alpha})$, предполагая полиномиальную зависимость ее от спинорных переменных

$$\tilde{\Phi}(u_{\alpha k}, \bar{u}^k_{\dot\alpha}) = \sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,n!}\,u_{\alpha_1 i_1}\ldots u_{\alpha_k i_k}\bar{u}^{j_1}_{\dot\beta_1}\ldots\bar{u}^{j_n}_{\dot\beta_n}\,\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}{}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu)\,. \tag{3.167}$$

Компонентные поля $\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}{}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu)$ являются симметричными по всем индексам одного типа

$$\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}{}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu) = \phi^{(\alpha_1\ldots\alpha_k)(\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n)(i_1\ldots i_k)}{}_{(j_1\ldots j_n)}(p_\mu)\,, \tag{3.168}$$

и удовлетворяют условиям бесследовости

$$\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i i_2\ldots i_k}{}_{i j_2\ldots j_n}(p_\mu) = 0\,. \tag{3.169}$$

Решением уравнения (5.157) является

$$\tilde{\Phi}(u_{\alpha k}, \bar{u}^k_{\dot\alpha}) = \sum_{k,n;\, k+n=2s}\frac{1}{k!\,n!}\,u_{\alpha_1 i_1}\ldots u_{\alpha_k i_k}\bar{u}^{j_1}_{\dot\beta_1}\ldots\bar{u}^{j_n}_{\dot\beta_n}\,\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}{}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu)\,, \tag{3.170}$$

где в разложении присутствуют только спинорные полиномы степени $2s$ ($k = k_1 + k_2$, $n = n_1 + n_2$),

$$k + n = 2s\,. \tag{3.171}$$

k_i ($i = 1, 2$) обозначает число спиноров u_i^α и n_i ($i = 1, 2$) – число спиноров $\overline{u}_i^{\dot\alpha}$.

Соотношения (3.163) между спинорами $u_{\alpha k}$, $\overline{u}_\alpha^k$ приводят к уравнениям для компонент волновой функции. Подставляя эти соотношения в (3.170), мы находим, что компонентные поля удовлетворяют обобщенным уравнениям Дирака

$$\sqrt{2}\,p_{\beta\dot\beta_1}\phi_{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}^{\dot\beta_1\dot\beta_2\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu) + m\,\phi_{\beta\alpha_1\ldots\alpha_k}{}^{\dot\beta_2\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu) = 0\,, \tag{3.172}$$

$$\sqrt{2}\,p^{\dot\alpha\alpha_1}\phi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}{}^{\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu) + m\,\phi_{\alpha_2\ldots\alpha_k}{}^{\dot\alpha\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu) = 0 \tag{3.173}$$

и условиям поперечности

$$p_{\alpha_1\dot\beta_1}\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\beta_1\ldots\dot\beta_n i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_n}(p_\mu) = 0\,. \tag{3.174}$$

Уравнение (5.156), с учетом

$$(\mathcal{D}_3 - s_3)(u_{\alpha_1 i_1}\cdots u_{\alpha_k i_k}\overline{u}^{j_1}_{\dot\beta_1}\cdots\overline{u}^{j_n}_{\dot\beta_n}) = 0, \tag{3.175}$$

оставляет в спектре компонентные поля с фиксированной ковариантной проекцией спина

$$s_3 = k_1 - k_2 - (n_1 - n_2)\,. \tag{3.176}$$

3.5. Заключительные замечания

В этом главе рассмотрена модель безмассовой частицы с произвольной фиксированной спиральностью, которая взаимосвязана с твисторной формулировкой обобщенными преобразованиями Пенроуза при вещественном четыре-векторе координаты. Данная пространственно-временная формулировка использует в качестве спиновых степеней свободы индексный спинор и имеет прямое обобщение на массивный случай. Используя эту пространственно-временную формулировку массивной спиновой частицы, вводя в нее чисто калибровочные гармонические переменные и выполняя частичные фиксации калибровок, мы получили твисторную формулировку массивной частицы с произвольным фиксированным спином. Эта формулировка описывается двумя твисторами (битвистором) и двумя комплексными скалярами. В результате канонического преобразования мы получаем выражения твисторных преобразований Пенроуза. Было проведено квантование твисторной спиновой частицы. На физических состояниях операторы Казимира группы Пуанкаре принимают значения, соответствующее массивной частице фиксированного ненулевого спина. Волновая функция твисторной массивной частицы определена на однородном пространстве $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$ и имеет гармоническое разложение по представлениях основной серии группы Лоренца. Также были построены интегральные преобразования, связывающие массивные твисторные поля с обычными пространственно-временными полями.

Мы обобщили также модель Ширафуджи [117] для безмассовых частиц с пространственно-временной координатой и составным четыре-импульсом на модель массивных частиц со спином и электрическим зарядом. Основными переменными в модели являются пространственно-временной четыре-вектор, четыре скаляра, описывающие спиновые и зарядовые степени свободы, а также пара спиноров Вейля. Геометрическое описание, предложенное в этом разделе, представляет промежуточный шаг между свободной чисто твисторной моделью в битвисторном пространстве, в котором и пространственно-временные четыре-векторы координаты и импульса составные, и стандартной моделью частицы, где эти векторы явдяются элементарными. Мы квантуем модель и явно находим первично-квантованные волновые функции, описывающие релятивистские частицы с массой, спином и электрическим зарядом.

Результаты настоящей главы опубликованы в работах [158, 159, 160, 161, 162, 163, 164] и трудах конференций [165, 166, 167].

Глава 4

Спиновая частица и суперчастица в тензорном пространстве

Ряд суперсимметричных теорий допускают в супералгебре помимо скалярных центральных зарядов, которые присутствуют в традиционной суперсимметрии Пуанкаре, также тензорные центральные заряды [91]. Несмотря на то, что тензорные центральные заряды в алгебре суперсимметрии обычно связаны с топологическими вкладами от протяженных объектов в конструкциях M-теории [92, 93, 94, 95, 91], они также полезны в суперсимметричной механике, при рассмотрении моделей суперчастиц, обладающих этой обобщенной суперсимметрией. В безмассовом случае такие суперсимметричные модели частиц были получены в [96, 97] для $D = 4$ с двумя или тремя локальными κ-симметриями. Аналогичная модель массивной суперчастицы с сохранением 1/4 таргетных суперсимметрий была сформулирована в [102, 103], но без явной лоренцевой ковариантности. Целью данной главы будет изучение моделей релятивистских частиц и суперчастиц, обладающих суперсимметриями с тензорными центральными зарядами. Важным элементом в нашем рассмотрении является сохранение лоренц-ковариантности моделей, для чего конфигурационное пространство расширяется дополнительными спинорными координатами, помимо тензорных координат.

Вовлечение тензорных координат в описание суперчастицы позволит нам обобщить на массивный случай замечательную эквивалентность модели спиновой частицы в псевдоклассической механике [16, 22] с грассмановыми векторными переменными и суперчастицы Касалбуони-Бринка-Шварца [22, 23]. В безмассовом случае [98, 99] спиновая частица эквивалентна, по крайней мере на классическом уровне, суперчастице Касалбуони-Бринка-Шварца без каких-либо центральных зарядов. Этот факт идентификации локальной фермионной инвариантности в модели спиновой частицы как фермионной κ-симметрии в модели суперчастицы имеет важное значение для суперполевой формулировке безмассовой суперчастицы [98, 99] и последующих обобщений на супербраны [100, 101]. Мы продолжим эту эквивалентность на массивный случай, но необходимым элементом для этого является введение в действие суперчастицы тензорных координат центральных зарядов.

В данной главе рассмотрено также применение тензорных переменных при описании систем с симметрией Максвелла [104, 105], описывающей взаимодействие релятивистской частицы с внешним постоянным электромагнитным полем [105, 106]. В этом случае используется расширенное пространство-время с дополнительными тензорными координатами, которые соответствуют напряженностям постоянного электромагнитного поля.

4.1. Массивная суперчастица с тензорными центральными зарядами

В этом разделе, основанном на работе [169], будет построена модель массивной $N = 1$ $D = 4$ суперчастицы с тензорными центральными зарядами, обладающей одной или двумя локальными κ-симметриями. Будет показано, что в обычной пространственно-временой размерности $D = 4$ суперчастица с одной κ-симметрией классически эквивалентна обычной спиновой (спина 1/2) частице [15, 17, 18, 19, 20, 21] в секторе положительной энергии.

В псевдоклассическом подходе лагранжиан спиновой частицы имеет следующий вид [15, 17, 18, 19, 20, 21]

$$L_{1/2} = p^\mu \dot{x}_\mu + \frac{i}{2}\left(\psi^\mu \dot{\psi}_\mu - \psi_5 \dot{\psi}_5\right) - \frac{e}{2}\left(p^2 - m^2\right) - i\chi\left(p\psi - m\psi_5\right) . \tag{4.1}$$

Спиновые переменные в этом описании – грассманов (псевдо)вектор ψ_μ и грассманов (псевдо)скаляр ψ_5. Помимо массовой связи $T \equiv p^2 - m^2 \approx 0$ в гамильтоновом формализме физический сектор модели подчиняется шести грассмановым связям, одна из которых является связью первого рода и генерирует уравнение Дирака

$$D \equiv p^\mu \psi_\mu - m\psi_5 \approx 0, \tag{4.2}$$

а пять самосопраженных связей на грассмановы переменные

$$g^\mu \equiv p^\mu_\psi - \frac{i}{2}\,\psi^\mu \approx 0\,, \qquad g_5 \equiv p_{\psi 5} + \frac{i}{2}\,\psi_5 \approx 0 \tag{4.3}$$

– связи второго рода. Таким образом, число физических грассмановых переменных в модели (4.1) равно [число переменных (ψ_μ, ψ_5, $p_{\psi\mu}$, $p_{\psi 5}$)] – [число связей 2-го рода (g_μ, g_5)] – 2[число связей 1-го рода (D)] = 3.

Обычная модель массивной суперчастицы Касалбуони-Бринка-Шварца [22, 23] с грассмановыми спинорными координатами θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$ описывается следующими фермионными спинорными связями

$$d_{\theta\alpha} \equiv -ip_{\theta\alpha} - (\hat{p}\bar\theta)_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar{d}_{\theta\dot\alpha} \equiv -i\bar{p}_{\theta\dot\alpha} - (\theta\hat{p})_{\dot\alpha} \approx 0,$$

которые все являются связями второго рода. Здесь число физических грассмановых степеней свободы равно [число переменных (θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$, $p_{\theta\alpha}$, $\bar{p}_{\theta\dot\alpha}$)] – [число связей второго рода (d_θ, $\bar{d}_\theta$)] = 4. Чтобы получить желаемых три физических степеней свободы необходимо, чтобы из четырех фермионных связей три связи были второго рода, а одна связь – первого рода. Такая ситуация с несимметричным разделением фермионных связей по родам была предложена в моделях безмассовой [96, 97] и массивной суперчастицы [102]. Именно ситуция с одной фермионной связью первого рода была представлена в [102] при построении $N = 4 \to N = 1$ частичного нарушения глобальной симметрии в $d = 1$. Таким образом, в массивном случае можно ожидать эквивалентность массивной спиновой частицы и массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами с одной κ-симметрией. Ниже мы построим ковариантный переход, при сохранении физического содержания, от модели массивной спиновой частицы к системе с грассмановыми спинорными переменными.

Ковариантный переход от грассманового вектора ψ_μ и грассманового скаляра ψ_5 к грассмановым спинорным переменным θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$ требует использования коммутирующих спинорных переменных. Для этого мы вводим динамические спиноры ζ^α, $\bar\zeta^{\dot\alpha} = \overline{(\zeta^\alpha)}$ и канонически сопряженные им переменные v_α, $\bar{v}_{\dot\alpha}$. Введенные спиноры подчиняются условию

$$r - j \equiv \zeta\hat{p}\bar\zeta - j \approx 0 \qquad (r \equiv \zeta\hat{p}\bar\zeta)\,. \tag{4.4}$$

Эта связь, присущая подходу с индексным спинором [158, 159, 160], который детально описан в предыдущей главе, дает условие полноты

$$r\delta_\alpha^\beta = \zeta_\alpha(\bar\zeta\tilde{p})^\beta + (\hat{p}\bar\zeta)_\alpha\zeta^\beta$$

для ζ, $\hat{p}\zeta$ в спинорном пространстве. Здесь матрица $\tilde{p}$ является сверткой пространственно-временного импульса и σ-матриц с верхними спинорными индексами, $\tilde{p} \equiv p^{\mu}\tilde{\sigma}_{\mu}$, $\tilde{p} = (p^{\dot{\alpha}\alpha})$. Соответствующая матрица с нижними индексами обозначается посредством $\hat{p}$, $\hat{p} = p^{\mu}\sigma_{\mu} = (p_{\alpha\dot{\alpha}})$. Численная константа $j \neq 0$ играет роль “классического спина” в формализме индексного спинора [158, 159, 160]. Мы предполагаем, что динамика бозонных спинорных переменных определяется следующим лагранжианом

$$L_{\mathrm{b.s.}} = \dot{\zeta}\pi + \bar{\pi}\dot{\bar{\zeta}} - \lambda(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j)\,. \tag{4.5}$$

Конечно, можно исключить переменные ζ с помощью их уравнений движения. Тогда мы получаем лагранжиан второго порядка

$$L^{(2)}_{\mathrm{b.s.}} = \Lambda^{-1}\left[m^{-1}\dot{v}\hat{p}\dot{\bar{v}} + \Lambda^{2}(j/m)\right]$$

с $\Lambda \equiv m\lambda$. Этот лагранжиан описывает движение точки в комплексном двухмерном пространстве, параметризованном вейлевским спинором v, где константа j/m играет роль “массы”. Канонически сопряженное пространство, параметризованное спинором ζ, ограничено связью (4.4) и изоморфно компактному групповому многообразию $SU(2)$.

Система, которую мы рассматриваем как исходную при переходе к грассмановым спинорам, является суммой двух секторов – сектора массивной спиновой частицы с лагранжианом (4.1) и сектора бозонного спинора с лагранжианом (4.5), взаимодействующих через пространственно-временные координаты. То есть, лагранжиан исходной системы имеет следующий вид

$$\begin{aligned} L &= p\dot{x} + \frac{i}{2}(\psi\dot{\psi} + \psi_5\dot{\psi}_5) - \frac{e}{2}(p^2 - m^2) - i\chi(p\psi + m\psi_5) \\ &\quad + \dot{\zeta}v + \bar{v}\dot{\bar{\zeta}} - \lambda(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j)\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Благодаря связи $\zeta\hat{p}\bar{\zeta} = j$ знак константы j определяет знак энергии. Ниже мы рассматриваем сектор с положительной энергией, когда $j > 0$.

4.1.1. Массивная суперчастица с тензорными центральными зарядами. Лагранжиан.

Преобразование модели спиновой частицы, описываемой грассмановыми переменными ψ_{μ}, ψ_5, в модель с грассмановыми спинорными переменными

θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$ реализуется посредством следующих разрешений [159]

$$\psi_\mu = r^{-1/2}(\theta\sigma_\mu\tilde{p}\zeta + \bar\zeta\tilde{p}\sigma_\mu\bar\theta) - m\rho\zeta\sigma_\mu\bar\zeta\,, \tag{4.7}$$

$$\psi_5 = r^{-1/2}m(\zeta\theta + \bar\theta\bar\zeta) - r\rho - \tilde\psi_5\,. \tag{4.8}$$

Исходные грассмановы переменные ψ_μ, ψ_5 (5 переменных) выражаются через два грассмановых скаляра ρ, $\tilde\psi_5$ и три компоненты спинора θ. Проекции вектора $\psi_\mu \equiv \frac{1}{2}\,\tilde\sigma_\mu{}^{\dot\alpha\alpha}\hat\psi_{\alpha\dot\alpha}$ в спинорном базисе ζ^α, $(\bar\zeta\tilde{p})^\alpha$ имеют следующие выражения

$$\zeta\hat\psi\bar\zeta = 2r^{1/2}(\zeta\theta + \bar\theta\bar\zeta)\,, \quad \bar\zeta\tilde{p}\hat\psi\tilde{p}\zeta = 2mr^2\rho\,, \tag{4.9}$$

$$\zeta\hat\psi\tilde{p}\zeta = 2r^{1/2}(\zeta\hat{p}\bar\theta)\,, \quad \bar\zeta\tilde{p}\hat\psi\bar\zeta = 2r^{1/2}(\theta\hat{p}\bar\zeta)\,, \tag{4.10}$$

где $\hat\psi = \psi^\mu\sigma_\mu$. Четвертая компонента спинора

$$\phi = i(\theta\zeta - \bar\zeta\bar\theta) \tag{4.11}$$

не учавствует в выражениях для ψ-переменных. Обращение выражений (4.7), (4.8), (4.11) имеет вид

$$\theta_\alpha = \frac{1}{4}r^{-3/2}\left[(\zeta\hat\psi\bar\zeta)(\hat{p}\bar\zeta)_\alpha + 2(\bar\zeta\tilde{p}\hat\psi\bar\zeta)\zeta_\alpha\right] + \frac{i}{2}r^{-1}\phi(\hat{p}\bar\zeta)_\alpha\,,$$

$$\bar\theta_{\dot\alpha} = \frac{1}{4}r^{-3/2}\left[(\zeta\hat\psi\bar\zeta)(\zeta\hat{p})_{\dot\alpha} + 2(\zeta\tilde{\hat\psi}\hat{p}\zeta)\bar\zeta_{\dot\alpha}\right] - \frac{i}{2}r^{-1}\phi(\zeta\hat{p})_{\dot\alpha}\,,$$

$$\rho = \frac{1}{2m}r^{-2}(\bar\zeta\tilde{p}\hat\psi\tilde{p}\zeta)\,, \quad \tilde\psi_5 = -\frac{1}{m}(p^\mu\psi_\mu + m\psi_5) + (2mr)^{-1}(\zeta\hat\psi\bar\zeta)(p^2 - m^2)\,.$$

В новых переменных дираковская связь принимает простой вид:

$$D = p\psi - m\psi_5 = m\tilde\psi_5 \approx 0\,. \tag{4.12}$$

Преобразования локальной фермионной симметрии [15, 17, 18, 19, 20, 21] (суперсимметрии на мировой линии)

$$\delta\chi = \dot\epsilon\,, \quad \delta e = -2i\epsilon\chi\,, \quad \delta\psi_\mu = -\epsilon p_\mu\,, \quad \delta\psi_5 = \epsilon m\,, \quad \delta x_\mu = i\epsilon\psi_\mu$$

в новых переменных принимают вид

$$\delta\theta_\alpha = -\frac{1}{4}\epsilon r^{-1/2}(\hat{p}\bar\zeta)_\alpha\,, \quad \delta\bar\theta_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}\epsilon r^{-1/2}(\zeta\hat{p})_{\dot\alpha}\,,$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{2}\epsilon m r^{-1}\,, \quad \delta\tilde{\psi}_5 = -\frac{1}{2m}\epsilon(p^2+m^2) \approx 0\,.$$

Единственными преобразующимися переменными есть ρ и $\delta(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\,\epsilon r^{1/2}$. Следовательно, комбинация их $\rho+mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})$ инвариантна относительно калибровочных преобразований, $\delta[\rho+mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})] = 0$, тогда как

$$\rho - mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta}) \qquad (4.13)$$

является чисто калибровочной степенью свободы, $\delta[\rho - mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})] = -mr^{-1}\epsilon$.

Учитывая уравнение движения для бозонного спинора $\dot{\zeta} = 0$ и подставляя выражения (4.7), (4.8) для ψ_μ, ψ_5 в лагранжиан (4.6), мы приходим к функции Лагранжа

$$\begin{aligned} L \;=\;& p(\dot{x} - i\dot{\theta}\sigma\bar{\theta} + i\dot{\theta}\sigma\dot{\bar{\theta}}) - im^2r^{-1}(\theta\zeta\bar{\zeta}\dot{\bar{\theta}} - \dot{\theta}\zeta\bar{\zeta}\bar{\theta}) \\ &+ \frac{i}{2}r^2\left[\rho + mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})\right]\left[\dot{\rho} + mr^{-3/2}(\dot{\theta}\zeta+\bar{\zeta}\dot{\bar{\theta}})\right] \\ &+ \frac{i}{2}r\left[\rho - mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})\right]\dot{\tilde{\psi}}_5 + \frac{i}{2}r\tilde{\psi}_5\left[\dot{\rho} - mr^{-3/2}(\dot{\theta}\zeta+\bar{\zeta}\dot{\bar{\theta}})\right] \\ &- \frac{i}{2}\tilde{\psi}_5\dot{\tilde{\psi}}_5 - im\chi\tilde{\psi}_5 - \frac{e}{2}(p^2-m^2) \\ &+ \dot{\zeta}v + \bar{v}\dot{\bar{\zeta}} - \lambda(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j)\,. \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Следует подчеркнуть, что уравнение $\dot{\zeta} = 0$ для бозонного спинора, которое было использовано при получении лагранжиана (4.14), воспроизводится также лагранжианом (4.14). Как мы видим, калибровочная переменная (4.13) $\rho - mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})$ определяет сопряженную переменную для $\tilde{\psi}_5$, что генерирует локальные преобразования. Простейшее условие фиксации калибровки $\rho - mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta}) = 0$ разрешает скаляр ρ в терминах спинорной проекции $(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})$. Мы будем рассматриваем более общее условие

$$\rho - mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta}) = 2(k-1)mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta}), \qquad (4.15)$$

которое фиксирует калибровку при всех $k \neq 0$.

Подставляя в лагранжиан (4.14) условие связи $\tilde{\psi}_5 = 0$ (уравнение движения для лагранжевого множителя χ) и выражение $\rho = (2k-1)mr^{-3/2}(\theta\zeta+\bar{\zeta}\bar{\theta})$, следующее из условия фиксации калибровки (4.15), получаем лагранжиан

$$\begin{aligned} L &= p\,\dot{\omega}_\theta + iZ_{\alpha\beta}\theta^\alpha\dot{\theta}^\beta + i\bar{Z}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\beta}} + iZ_{\alpha\dot{\beta}}(\theta^\alpha\dot{\bar{\theta}}^{\dot{\beta}} - \dot{\theta}^\alpha\bar{\theta}^{\dot{\beta}}) - \frac{e}{2}(p^2+m^2) \\ &\quad + \dot{\zeta}v + \bar{v}\dot{\bar{\zeta}} - \lambda(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j)\,. \end{aligned} \tag{4.16}$$

В этом выражении $\omega_\theta \equiv \dot{\omega}_\theta\, d\tau = dx - id\theta\sigma\bar{\theta} + i\theta\sigma d\bar{\theta}$ является обычной $\mathcal{N}=1$ суперинвариантной ω-формой. Величины $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$, $\bar{Z}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \overline{(Z_{\alpha\beta})}$ и $Z_{\alpha\dot{\beta}} = \overline{(Z_{\beta\dot{\alpha}})}$ выражаются в терминах бозонного спинора ζ следующим образом (см. [96, 97])

$$Z_{\alpha\beta} = 2k^2m^2j^{-1}\zeta_\alpha\zeta_\beta\,, \qquad Z_{\alpha\dot{\beta}} = (2k^2-1)m^2j^{-1}\zeta_\alpha\bar{\zeta}_{\dot{\beta}}\,. \tag{4.17}$$

Величины $Z_{\alpha\beta}$ и $\bar{Z}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ являются тензорными центральными зарядами (типов $(1,0)$ и $(0,1)$), а $Z_{\alpha\dot{\beta}}$ – векторным центральным зарядом (типа $(1/2,1/2)$) для $D=4$ $\mathcal{N}=1$ алгебры суперсимметрии [92, 93, 94, 95, 91].

Другим способом доказательства эквивалентности систем (4.6) и (4.16) является их взаимосвязь посредством канонических преобразований в гамильтоновом формализме. Для выполнения этого, необходимо уравнять количество грассмановыми переменных в моделях посредством введения чисто калибровочной переменной ϕ в модель (4.6). Ее калибровочных характер достигается наличием связи первого рода

$$p_\phi \approx 0\,. \tag{4.18}$$

То есть, в каноническом преобразовании мы считаем, что член $p_\phi\dot{\phi} - \mu p_\phi$ добавлен в лагранжиан (4.6), где μ – лагранжев множитель. Разрешение переменной ϕ через спиноры дается выражением (4.11).

В качестве производящей функции канонического преобразования от системы с координатами ψ_μ, ψ_5, ϕ, x^μ, ζ^α, $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}$ к системе с координатами θ^α, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$, ρ, $\tilde{\psi}_5$, x'^μ, ζ'^α, $\bar{\zeta}'^{\dot{\alpha}}$ мы берем

$$\begin{aligned} F &= -p^\mu_\psi\psi_\mu(p_\mu,\zeta,\theta,\rho) - p_{\psi5}\psi_5(\zeta,\theta,\rho,\tilde{\psi}_5) - p_\phi\phi(\zeta,\theta) \\ &\quad + \zeta^\alpha v'_\alpha + \bar{v}'_{\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} - p^\mu x'_\mu\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Здесь используются выражения (4.7), (4.8), (4.11) старых переменных через новые переменные. Такая конструкция производящей функции (4.19) воспроизводит выражения (4.7), (4.8), (4.11) исходных грассмановых переменных через спиноры посредством $\psi_\mu = -\partial_l F/\partial p^\mu_\psi$, $\psi_5 = -\partial_l F/\partial p_{\psi5}$, $\phi = -\partial_l F/\partial p_\phi$ и оставляет инвариантными бозонные спинорные координаты $\zeta'^{\alpha} = \partial F/\partial v'_{\alpha} = \zeta^{\alpha}$, $\bar\zeta'^{\dot\alpha} = \partial F/\partial \bar v'_{\dot\alpha} = \bar\zeta^{\dot\alpha}$ и векторный импульс $p'_{\mu} = -\partial F/\partial x'^{\mu} = p_{\mu}$. Выражения новых грассмановых импульсов в терминах исходных имеют вид

$$p_{\theta\alpha} = -\partial_r F/\partial\theta^{\alpha} = r^{-1/2}(\sigma_{\mu}\tilde p\zeta)_{\alpha}p^{\mu}_{\psi} - mr^{-1/2}\zeta_{\alpha}p_{\psi 5} + i\zeta_{\alpha}p_{\phi}\,,$$

$$\bar p_{\theta\dot\alpha} = -\partial_r F/\partial\bar\theta^{\dot\alpha} = r^{-1/2}(\bar\zeta\tilde p\sigma_{\mu})_{\dot\alpha}p^{\mu}_{\psi} - mr^{-1/2}\bar\zeta_{\dot\alpha}p_{\psi 5} - i\bar\zeta_{\dot\alpha}p_{\phi}\,,$$

$$p_{\rho} = -\partial_r F/\partial\rho = -m(\zeta\sigma_{\mu}\bar\zeta)p^{\mu}_{\psi} + rp_{\psi 5}\,, \quad p_{\tilde\psi 5} = -\partial_r F/\partial\tilde\psi_5 = -p_{\psi 5}\,.$$

Явный вид выражений исходных бозонных спинорных импульсов $v_{\alpha} = \partial F/\partial\zeta^{\alpha}$, $\bar v_{\dot\alpha} = \partial F/\partial\bar\zeta^{\dot\alpha}$ и пространственно-временной координаты $x_{\mu} = -\partial F/\partial p^{\mu}$ в терминах новых фазовых переменных нам не понадобится ниже, поскольку все связи не зависят от этих переменных.

Теперь исключим переменные $\tilde\psi_5$, $p_{\tilde\psi 5}$ с помощью дираковской связи (1.99) и фиксации калибровки для нее

$$p_{\tilde\psi 5} - i(k-1)mr^{-1/2}\left[\theta\zeta + \bar\zeta\bar\theta\right] \approx 0 \tag{4.20}$$

при $k \neq 0$. После выполнения дополнительного калибровочного преобразования $p_{\rho} \to p_{\rho'} = p_{\rho} - ikmr^{1/2}\left[\theta\zeta + \bar\zeta\bar\theta\right]$, которое приводит к разрешенному виду $p_{\rho'} \approx 0$ одной фермионной связи из (4.3), мы исключаем переменные ρ, p_{ρ} с помощью двух из пяти фермионных связей второго рода (4.3). Вследствие разрешенного вида связей относительно исключаемых переменных, $\tilde\psi_5 \approx 0$ и $p_{\rho'} \approx 0$, скобки Дирака для остальных переменных совпадают со скобками Пуассона. После этого, оставшиеся фермионные связи принимают вид

$$\bar\zeta\tilde p p_{\theta} - \bar p_{\theta}\tilde p\zeta \approx 0\,, \tag{4.21}$$

$$\left[\bar\zeta\tilde p p_{\theta} + \bar p_{\theta}\tilde p\zeta\right] - 4ik^2m^2\left[\theta\zeta + \bar\zeta\bar\theta\right] \approx 0\,, \tag{4.22}$$

$$\zeta\left[-ip_{\theta} - \hat p\bar\theta\right] \approx 0\,, \qquad \left[-i\bar p_{\theta} - \theta\hat p\right]\bar\zeta \approx 0, \tag{4.23}$$

которые являются не чем иным, как проекциями на спиноры ζ, $\hat p\bar\zeta$ фермионных спинорных связей

$$d_{\theta\alpha} \equiv -ip_{\theta\alpha} - (\hat p\bar\theta)_{\alpha} - \theta^{\beta}Z_{\beta\alpha} - Z_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta} \approx 0\,, \tag{4.24}$$

$$\bar d_{\theta\dot\alpha} \equiv -i\bar p_{\theta\dot\alpha} - (\theta\hat p)_{\dot\alpha} - \bar Z_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta} - \theta^{\beta}Z_{\beta\dot\alpha} \approx 0 \tag{4.25}$$

с величинами $Z_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\dot\beta}$, определенными в (4.17). Вследствие инвариантности переменных ζ^α, $\bar\zeta^{\dot\alpha}$, p_μ при каноническом преобразовании все бозонные связи, т. е. $p^2 - m^2 \approx 0$ и $\zeta\hat{p}\bar\zeta - j \approx 0$, не изменяются. Система с оставшимися переменными и связями воспроизводится выше приведенным лагранжианом (4.16).

Таким образом, мы установили классическую эквивалентность модели с лагранжианом $L = L_{1/2} + L_{\rm b.s.}$ и модели с лагранжианом $L = L_{\rm super} + L_{\rm b.s.}$. Здесь $L_{1/2}$ является лагранжианом (4.1) массивной частицы спина 1/2, тогда как $L_{\rm super}$ – лагранжиан массивной $\mathcal{N} = 1$ суперчастицы с тензорными центральными зарядами (4.17)

$$L_{\rm super} = p\dot\omega_\theta + iZ_{\alpha\beta}\theta^\alpha\dot\theta^\beta + i\bar Z_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\alpha}\dot{\bar\theta}^{\dot\beta} + iZ_{\alpha\dot\beta}(\theta^\alpha\dot{\bar\theta}^{\dot\beta} - \dot\theta^\alpha\bar\theta^{\dot\beta}) - \frac{e}{2}(p^2 - m^2)\,. \quad (4.26)$$

Лагранжианы $L_{\rm b.s.}$ для бозонного спинора в обоих эквивалентных формулировках совершенно идентичны.

Отметим, что константа k в формуле (4.17) для центральных зарядов суперчастицы ненулевая, $k \neq 0$, в случае эквивалентности к модели спиновой частицы. Но, в общем, значение $k = 0$ не запрещено в модели суперчастицы с центральными зарядами. В последующем мы будем рассматривать случаи как с $k \neq 0$, так и с $k = 0$. Как увидим, при $k \neq 0$ или $k = 0$ мы получаем модели суперчастицы с одной или двумя κ-симметриями соответственно.

Дополнительным аргументом классической эквивалентности массивной частицы спина 1/2 (4.1) и массивной суперчастицы с центральными зарядами (4.16) (при $k \neq 0$), обладающей одной κ-симметрией есть получение одной и той же модели посредством редукции обоих моделей к физическим степеням свободы. В рассматриваемом секторе положительной энергии после выбора калибровки $\psi_+ = \psi_0 + \psi_5 = 0$ для дираковской связи и исключения $\psi_- = \psi_0 - \psi_5$ с помощью условий связи мы получаем, что для физических степеней свободы спиновой частицы лагранжиан (4.1) принимает вид $L^{\rm (ph)}_{1/2,{\rm Gr}} = \frac{i}{2}\vec\psi\dot{\vec\psi}$. С другой стороны, грассманова часть лагранжиана суперчастицы $L_{\rm super}$ в терминах переменных

$$\eta = mr^{-1/2}(\theta\zeta + \bar\zeta\bar\theta)\,, \quad \sigma = -imr^{-1/2}(\theta\zeta - \bar\zeta\bar\theta)\,, \quad (4.27)$$

$$q = r^{-1/2}(\theta\hat{p}\bar\zeta)\,, \quad \bar q = r^{-1/2}(\zeta\hat{p}\bar\theta) \quad (4.28)$$

принимает вид

$$L^{(\mathrm{ph})}_{\mathrm{super,Gr}} = i\bar q\dot q - iq\dot{\bar q} + 2k^2 i\eta\dot\eta\,.$$

Вводя переменные $q = (\psi_1 + i\psi_2)/2$, $\bar q = (\psi_1 - i\psi_2)/2$, $\eta = \psi_3/2k$ мы получаем тот же лагранжиан для грассмановой части

$$L^{(\mathrm{ph})}_{\mathrm{super,Gr}} = L^{(\mathrm{ph})}_{1/2,\mathrm{Gr}} = \frac{i}{2}\vec\psi\dot{\vec\psi}\,. \tag{4.29}$$

Отметим, что такой же лагранжиан для физических грассмановых переменных возникает также в [102] в нековариантном грассмановом секторе модели с $\mathcal{N}$=4 $\to$ $\mathcal{N}$=1 частичным нарушением глобальной симметрии. В формализме первого порядка лагранжиан этой работы имеет вид

$$L = \vec P\vec\Pi - P^0\Pi^0 + \frac{e}{2}(P^{02} - \vec P^2 - 1) - \Theta\dot\Theta - \vec\Psi\dot{\vec\Psi}\,, \tag{4.30}$$

где $\Pi^0 = \dot X^0 + \Theta\dot\Theta + \vec\Psi\dot{\vec\Psi}$, $\vec\Pi = \dot{\vec Y} - \dot\Theta\vec\Psi + \Theta\dot{\vec\Psi}$ (здесь используются обозначения из [102]). Вводя переменные

$$\vec\psi = \sqrt{2}(P^0+1)^{1/2}\left[\vec\Psi - \frac{1}{P^0+1}\vec P\Theta\right],$$

мы получаем в точности лагранжиан (4.29) для грассмановых переменных.

4.1.2. Инвариантности модели

Массивная суперчастица с тензорными центральными зарядами (4.16) обладает суперсимметрией таргетного пространства

$$\delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha\,, \quad \delta\bar\theta^{\dot\alpha} = \bar\epsilon^{\dot\alpha}\,, \quad \delta x_\mu = i\theta\sigma_\mu\delta\bar\theta - i\delta\theta\sigma_\mu\bar\theta \tag{4.31}$$

с постоянным грассмановым параметром ϵ^α. Генераторы преобразований суперсимметрии

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + (\hat p\bar\theta)_\alpha + \theta^\beta Z_{\beta\alpha} + Z_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\,, \\ \bar Q_{\dot\alpha} &= \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + (\theta\hat p)_{\dot\alpha} + \bar Z_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta} + \theta^\beta Z_{\beta\dot\alpha} \end{aligned} \tag{4.32}$$

содержат дополнительные “аномальные” члены с центральными зарядами (4.17) [75, 92]. Алгебра генераторов суперсимметрии

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2Z_{\alpha\beta}\,, \quad \left\{Q_\alpha, \bar Q_{\dot\beta}\right\} = 2(p_{\alpha\dot\beta} + Z_{\alpha\dot\beta}) \tag{4.33}$$

является $N = 1$ $D = 4$ алгеброй суперсимметрии, расширенной центральными зарядами [92, 93, 94, 95, 91].

Система (4.16) обладает также локальной κ-симметрией. При локальных преобразований грассманового спинора

$$\delta\theta^{\alpha} = i\kappa(\bar{\zeta}\tilde{p})^{\alpha}\,, \qquad \delta\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = -i\bar{\kappa}(\tilde{p}\zeta)^{\dot{\alpha}} \tag{4.34}$$

и стандартных преобразований [75, 76] пространственно-временной координаты

$$\delta x_{\mu} = -i\theta\sigma_{\mu}\delta\bar{\theta} + i\delta\theta\sigma_{\mu}\bar{\theta} \tag{4.35}$$

с локальным комплексным грассмановым параметром $\kappa(\tau)$ вариация лагранжиана с точностью до полной производной равна

$$\begin{aligned} \delta L \;=\; & -2k^2m^2(\theta\zeta + \bar{\zeta}\bar{\theta})(\kappa - \bar{\kappa})^{\cdot} + 2k^2m^2(\theta\zeta + \bar{\zeta}\bar{\theta})^{\cdot}(\kappa - \bar{\kappa}) \\ & - 4km^2j^{-1}[(\theta\hat{p}\bar{\zeta})\zeta\dot{\zeta} + (\zeta\hat{p}\bar{\theta})\dot{\bar{\zeta}}\bar{\zeta}](\kappa - \bar{\kappa})\,. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Как видим, $\delta L = 0$ при вещественном $\kappa = \bar{\kappa}$ и произвольном значении константы k. Но при $k = 0$ имеет место $\delta L = 0$ для произвольного комплексного параметра κ. Таким образом, при $k \neq 0$, когда присутствует тензорный центральный заряд $Z_{\alpha\beta}$, модель обладает одной κ-симметрией с вещественным параметром $\kappa = \bar{\kappa}$. Но при $k = 0$, когда есть только векторный центральный заряд $Z_{\alpha\dot{\beta}}$, имеется две κ-симметрии с комплексным параметром κ.

С каждой локальной инвариантностью связана связь первого рода в гамильтоновом формализме. Как отмечалось, наши системы описываются фермионными связями (ковариантными производными) (4.24), (4.25). Алгебра их скобок Пуассона

$$\{d_{\theta\alpha}, d_{\theta\beta}\} = 2iZ_{\alpha\beta}\,, \qquad \left\{d_{\theta\alpha}, \bar{d}_{\theta\dot{\beta}}\right\} = 2i\left(p_{\alpha\dot{\beta}} + Z_{\alpha\dot{\beta}}\right) \tag{4.37}$$

содержит центральные заряды (4.17). Ковариантное разделение фермионных связей по родам достигается проектированием их на спиноры ζ_{α}, $(\hat{p}\bar{\zeta})_{\alpha}$. Положим

$$\chi_{\theta} \equiv \zeta d_{\theta} = -i\zeta p_{\theta} - \zeta\hat{p}\bar{\theta} \approx 0\,, \quad \bar{\chi}_{\theta} \equiv \bar{d}_{\theta}\bar{\zeta} = -i\bar{p}_{\theta}\bar{\zeta} - \theta\hat{p}\bar{\zeta} \approx 0\,, \tag{4.38}$$

$$g_{\theta} \equiv \bar{\zeta}\tilde{p}d_{\theta} + \bar{d}_{\theta}\tilde{p}\zeta = -i(\bar{\zeta}\tilde{p}p_{\theta} + \bar{p}_{\theta}\tilde{p}\zeta) - 4k^2m^2(\theta\zeta + \bar{\zeta}\bar{\theta}) \approx 0\,, \tag{4.39}$$

$$f_\theta \equiv i(\bar{\zeta}\tilde{p}d_\theta - \bar{d}_\theta\tilde{p}\zeta) = \bar{\zeta}\tilde{p}p_\theta - \bar{p}_\theta\tilde{p}\zeta \approx 0\,. \qquad (4.40)$$

Ненулевые скобки Пуассона этих проекций равны

$$\{\chi_\theta, \bar{\chi}_\theta\} = 2ij\,, \qquad \{g_\theta, g_\theta\} = 16k^2m^2ij\,. \qquad (4.41)$$

Таким образом, связи χ_θ, $\bar{\chi}_\theta$ являются всегда связями второго рода, тогда как связь f_θ – всегда связь первого рода, генерирующая одну κ-симметрию с локальным параметром $(\kappa+\bar{\kappa})$: $\delta(\theta\zeta - \bar{\zeta}\bar{\theta}) = ir(\kappa+\bar{\kappa})$. Связь g_θ является связью второго рода при $k \neq 0$. Но при $k = 0$ эта связь g_θ становится связью первого рода и генерирует дополнительную κ-симметрию с локальным параметром $i(\kappa-\bar{\kappa})$: $\delta(\theta\zeta + \bar{\zeta}\bar{\theta}) = ir(\kappa-\bar{\kappa})$.

Суммируя, мы получили модели $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами, обладающие одной или двумя κ-симметриями. На языке супербранных теорий эти модели соответствуют БПС бранным конфигурациям, сохраняющим 1/4 или 1/2 часть суперсимметрии (см. [95] и ссылки там).

Следует отметить, что постоянная k при построении модели суперчастицы возникает в результате фиксации калибровки при переходе от спиновой частицы. Поэтому, модели при всех $k \neq 0$ эквивалентны и при преобразованиях,

$$\theta^\alpha \to \theta^\alpha + br^{-1}(\theta\zeta + \bar{\zeta}\bar{\theta})(\bar{\zeta}\tilde{p})^\alpha\,, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \to \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + br^{-1}(\theta\zeta + \bar{\zeta}\bar{\theta})(\tilde{p}\zeta)^{\dot{\alpha}}\,, \qquad (4.42)$$

которые можно рассматривать как канонические преобразования, где b является вещественным числом, лагранжиан L (или L') переходит в лагранжиан с ak вместо k, где $a \equiv 1+2b$. Таким образом, на уровне свободной суперчастицы у нас есть две существенно различные модели массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами. Первая из них, при $k = 1/\sqrt{2}$, имеет только тензорный центральный заряд $Z_{\alpha\beta}$ и обладает одной κ-симметрией. Вторая модель, при $k = 0$, имеет только векторный центральный заряд $Z_{\alpha\dot{\beta}}$ и обладает двумя κ-симметриями.

4.2. Твистороподобная формулировка суперчастицы с тензорными центральными зарядами

В предыдущем разделе была рассмотрена релятивистская формулировка массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами, которая описывает суперчастицу с БПС-нарушением двух или трех $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ суперсимметрий таргетного пространства. Целью данного раздела является анализ твистороподобной формулировки суперчастицы с тензорными центральными зарядами, в которой массивный и безмассовый случаи описаны единообразно.

4.2.1. Супералгебра с тензорными центральными зарядами

Произвольное центральное расширение нерасширенной алгебры $D = 4$ суперсимметрии [249, 96] с майорановскими зарядами Q может быть записано в виде

$$\{Q, Q\} = 2\mathcal{Z} \,. \tag{4.43}$$

Здесь, $\mathcal{Z}^T = \mathcal{Z}$ – матрица с десятью независимыми вещественными компонентами. Операторы центральных зарядов возникают в разложении

$$\mathcal{Z}C = (\gamma^\mu)P_\mu + \frac{i}{2}(\gamma^{\mu\nu})Z_{\mu\nu} \,. \tag{4.44}$$

Вектор P_μ является в общем суммой вектора энергии-импульса и векторного “струнного заряда”. Мы предполагаем, что P_μ удовлетворяет спектральному свойству: он или времениподобный или светоподобный вектор, $P^2 = m^2$, где m – масса. Шесть вещественных зарядов $Z_{\mu\nu} = -Z_{\nu\mu}$ определяют стандартным образом комплексные спин-тензоры $Z_{\alpha\beta}$ и $\bar{Z}_{\dot\alpha\dot\beta} = (\overline{Z_{\alpha\beta}})$, являющимися самодуальной и антисамодуальной частями центральных зарядов.

Левая часть уравнения на собственные значения матрицы $\mathcal{Z}$

$$\Pi(\lambda) \equiv \det(\mathcal{Z} - \lambda) = 0$$

может быть представлена в виде полинома [91] по λ,

$$\Pi(\lambda) = \sum_{k=0}^{4} \Pi_k \lambda^k \,,$$

$$\Pi_0 = [(P_0)^2 - a]^2 + 8bP_0 - 4c\,, \quad \Pi_1 = 4P_0[(P_0)^2 - a] + 8b\,,$$
$$\Pi_2 = 2[3(P_0)^2 - a]\,, \quad \Pi_3 = 4P_0\,, \quad \Pi_4 = 1\,.$$

Здесь,

$$a = \mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 + \mathbf{P^2}\,, \quad \mathbf{b} = \mathbf{P}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})\,, \quad \mathbf{c} = |\mathbf{P} \times \mathbf{E}|^\mathbf{2} + |\mathbf{P} \times \mathbf{H}|^\mathbf{2} + |\mathbf{E} \times \mathbf{H}|^\mathbf{2}\,,$$

тогда как

$$E_i = Z^{0i}\,, \quad H_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}Z^{jk}$$

– электрический и магнитный векторы тензорных центральных зарядов.

Массивная суперчастица с одной ненарушенной суперсимметрией ($\Pi_0 = 0$, $\Pi_1 \neq 0$) получается при

$$(m^2 - \mathbf{E^2} - \mathbf{H^2})^\mathbf{2} = \mathbf{4}|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|^\mathbf{2} \neq \mathbf{0}\,.$$

С точностью до вращений, множество таких конфигураций характеризуется модулями неколлинеарных векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и углом ϑ между ними. На границе этой области параметров, когда $m^2 = \mathbf{E^2} + \mathbf{H^2} \neq \mathbf{0}$ и при колинеарных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, у нас есть две сохраняющиеся суперсимметрии ($\Pi_0 = \Pi_1 = 0$, $\Pi_2 \neq 0$). Условия для сохранения более чем двух суперсимметрий ($\Pi_0 = \Pi_1 = \Pi_2 = 0$) в массивном случае противоречивы.

В безмассовом случае есть два типа конфигураций, сохраняющих одну суперсимметрию. Одна из них имеет место при коллинеарных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с неколлинеарным к ним $\mathbf{P}$ и если $\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 = 4\mathbf{H}^2 \sin^2\varphi \neq 0$, где φ – угол между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$. Другая возникает при взаимной ортогональности трех векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{P}$, образующих правую тройку, $\mathbf{PEH} > 0$, и при равенстве двух модулей, $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}| \neq P^0$. На границе первой из этих конфигураций мы получаем сектор обычной безмассовой частицы без центральных зарядов ($\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$), сохраняющей две суперсимметрии. Две сохраняющиеся суперсимметрии получаются также, если три взаимно ортогональных вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{P}$ образуют левую тройку $\mathbf{PEH} < 0$ и два из них имеют равные длины

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}| \neq P^0\,.$$

На границе этой области, когда все три векторы имеют равные длины

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}| = P^0\,,$$

сохраняется три суперсимметрии. Все суперсимметрии не могут сохраняться, так как $\Pi_3 = 4P_0 \neq 0$.

Таблица 4.1. Условия на ‘электрический’ и ‘магнитный’ векторы тензорных центральных зарядов и вектор энергии-импульса для состояний $N = 1$ $D = 4$ безмассовой ($m = 0$) и массивной ($m \neq 0$) суперчастицы, сохраняющей 1/4, 1/2 и 3/4 таргетной суперсимметрии. Здесь $\varepsilon = +1$ при $\mathbf{PEH} > 0$ и $\varepsilon = -1$ при $\mathbf{PEH} < 0$.

<table>
<tr><th></th><th>1/4</th><th>1/2</th><th>3/4</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$m = 0$</td><td rowspan="2">$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0$, $\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 = 4P_0^2$
$(\mathbf{PE} = \mathbf{PH} = 0)$
или
$\mathbf{EH} = 0$, $|\mathbf{E}| - \varepsilon|\mathbf{H}| = \pm P^0$
$(\mathbf{PE} = \mathbf{PH} = 0)$</td><td colspan="2">$\mathbf{EH} = 0$,
$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = 0$,
$\mathbf{PE} = \mathbf{PH} = 0$,</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 \neq 2P_0^2$</td><td>$\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 = 2P_0^2$</td></tr>
<tr><td>$m \neq 0$</td><td>$(m^2 - \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 =$
$= 4|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|^2 \neq 0$</td><td>$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0$,
$\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 = m^2$</td><td>нет</td></tr>
</table>

За исключением случая безмассовой суперчастицы с 1/4 ненарушенной суперсимметрией, в Таблице 4.1 приведен полный набор необходимых условий. Для безмассовых суперчастицы ($m = 0$) с 1/4 ненарушенной суперсимметрией эти условия являются сложными. В таблице приведены только необходимые условия для этого, когда вектора $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ортогональны к $\mathbf{P}$.

В дальнейшем мы представляем твисторную формулировку суперчастицы с тензорными центральными зарядами, в которой все разрешенные случаи нарушения суперсимметрии реализованы как для массивных, так и для безмассовых суперчастиц.

4.2.2. Лагранжиан твисторной суперчастицы с тензорными центральными зарядами

Параметризуем траекторию суперчастицы обычными суперпространственными координатами x^μ, θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$ и координатами тензорных центральных зарядов $y^{\alpha\beta} = y^{\beta\alpha}$, $\bar{y}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\overline{y^{\alpha\beta}})$. Для описания энергии-импульса суперчастицы мы используем пару бозонных спиноров (спиноров битвистора) ${\lambda_\alpha}^i$, $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i} = (\overline{{\lambda_\alpha}^i})$, $i = 1, 2$. Тензорные центральные заряды определяются четными спинорными переменными ${v_\alpha}^i$, $\bar{v}_{\dot{\alpha}i} = (\overline{{v_\alpha}^i})$. Индексы i, j, k …, которыми обладают спиноры ${\lambda_\alpha}^i$, $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}$ и ${v_\alpha}^i$, $\bar{v}_{\dot{\alpha}i}$, поднимаются и опускаются как $SU(2)$ индексы.

Для описания суперчастицы с тензорными центральными зарядами, как безмассовой, так и массивной, мы используем действие $S = \int d\tau L$ с лагранжианом [172] твистороподобного вида

$$L = P_\mu \Pi^\mu_\tau + Z_{\alpha\beta}\Pi^{\alpha\beta}_\tau + \bar{Z}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\Pi}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}_\tau - \ell_v h_v - \bar{\ell}_v \bar{h}_v - \ell_u h_u - \bar{\ell}_u \bar{h}_u \,. \tag{4.45}$$

Здесь, один-формы

$$\Pi^\mu \equiv d\tau \Pi^\nu_\tau = dx^\mu - i d\theta\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu d\bar{\theta}\,, \qquad \Pi^{\alpha\beta} \equiv d\tau\Pi^{\alpha\beta}_\tau = dy^{\alpha\beta} + i\theta^{(\alpha}d\theta^{\beta)}$$

инвариантны относительно преобразований глобальной суперсимметрии

$$\delta\theta^\alpha = \epsilon^\alpha\,; \qquad \delta x^\mu = i\theta\sigma^\mu\delta\bar{\theta} - i\delta\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,; \qquad \delta y^{\alpha\beta} = i\theta^{(\alpha}\delta\theta^{\beta)}\,,$$

действующей в расширенном суперпространстве с координатами x^μ, θ^α, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$; $y^{\alpha\beta}$, $\bar{y}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

Величины P_μ, $Z_{\alpha\beta}$, $\bar{Z}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\overline{Z_{\alpha\beta}})$ в действии, играющие роль импульсов для x^μ, $y^{\alpha\beta}$, $\bar{y}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, разрешены через бозонные вейлевские спиноры ${\lambda_\alpha}^i$, $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}$ и ${v_\alpha}^i$, $\bar{v}_{\dot{\alpha}i}$ посредством

$$P_{\alpha\dot{\beta}} = P_\mu \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} = {\lambda_\alpha}^i \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\,, \qquad Z_{\alpha\beta} = {v_\alpha}^i {v_\beta}^j C_{ij}\,, \quad \bar{Z}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \bar{v}_{\dot{\alpha}i}\bar{v}_{\dot{\beta}j}\bar{C}^{ij} \tag{4.46}$$

где C_{ij}, $\bar{C}^{ij} = (\overline{C_{ij}})$ являются симметричными матрицами.

Последний член в лагранжиане (4.45) есть сумма кинематических связей

$$h_\lambda \equiv \lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i} - \sqrt{2}m \approx 0\,, \qquad \bar{h}_\lambda \equiv \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}i} - \sqrt{2}m \approx 0\,; \tag{4.47}$$

$$h_v \equiv v^{\alpha i}v_{\alpha i} - 2 \approx 0\,, \quad \bar{h}_v \equiv \bar{v}_{\dot{\alpha}i}\bar{v}^{\dot{\alpha}i} - 2 \approx 0 \tag{4.48}$$

с лагранжевыми множителями. Связи (4.47) использовались ранее (см. (3.71)) в определении битвистора в твисторной формулировке массивной частицы, тогда как связи (4.48) являются кинематическими связями спинорных лоренцевых гармоник (см. (3.58)).

Благодаря связям (4.47), которые эквивалентны $\lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha j} = \frac{m}{\sqrt{2}}\delta^i_j$, $\bar\lambda_{\dot\alpha i}\bar\lambda^{\dot\alpha j} = \frac{m}{\sqrt{2}}\delta^j_i$, мы имеем $P^2 \equiv P^\mu P_\mu = m^2$. То есть, константа $|m|$ играет роль массы и мы используем твисторное разрешение [77, 78] вектора энергии-импульса через бозонные спиноры, обсуждаемое в предыдущей главе. Но в безмассовом случае ($m = 0$) спиноры $\lambda_\alpha{}^1$ и $\lambda_\alpha{}^2$ пропорциональны друг другу, $\lambda_\alpha{}^1 \propto \lambda_\alpha{}^2$, вследствие связи (4.47) $\lambda^{\alpha 1}\lambda_\alpha{}^2 = 0$.

Благодаря связям (4.48), спиноры $v_\alpha{}^i$, $\bar v_{\dot\alpha i}$ играют роль гармонических переменных [67, 68, 84, 88] и параметризуют некоторое фактор-пространство группы Лоренца, конкретный тип которого определяется как видом вектора энергии-импульса, так и видом тензорных центральных зарядов.

Кроме кинематических связей (4.47), (4.48) бозонные спиноры модели подчинены связям на спинорные импульсы $p_\lambda \approx 0$, $p_v \approx 0$ и к.с. Некоторые из этих связей канонически сопряжены связям (4.46)-(4.48) и являются связями второго рода. Остальные связи на спинорные импульсы, которые сохраняют связи (4.46), – связи первого рода, генерирующие подгруппу стабильности группы Лоренца, действующей на индексы i, j. Выбор калибровки для этих связей связывает гармонические и твисторные спиноры для определенных случаев центральных зарядов и массы частицы.

4.2.3. Состояния суперчастицы, сохраняющие произвольную долю суперсимметрии таргетного пространства

Выражения (4.46) для $Z_{\alpha\beta}$, $\bar Z_{\dot\alpha\dot\beta}$ содержат шесть вещественных постоянных, собранных в симметричные матрицы C_{ij}, $\bar C^{ij}$, которые раскладываются по симметричным матрицам Паули $(\sigma_r)_{ij} = \epsilon_{jk}(\sigma_r)_i{}^k$, $(\sigma_r)^{ij} = \epsilon^{ik}(\sigma_r)_k{}^j$, где $(\sigma_r)_i{}^j$, $r = 1, 2, 3$ – обычные матрицы Паули, в виде

$$C_{ij} = C_r(\sigma_r)_{ij}\,, \quad \bar C^{ij} = -\bar C_r(\sigma_r)^{ij}$$

где $\bar C_r = (\overline{C_r})$. Имеет место

$$C_{ij}C^{jk} = -C_rC_r\delta^k_i = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 + 2i\mathbf{E}\mathbf{H})\delta^k_i\,, \quad C_{ij}\bar C^{ij} = 2C_r\bar C_r = 2(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\,,$$

где вещественные 3-векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ определяются равенством

$$\mathbf{C} = i(\mathbf{E} + i\mathbf{H})\,.$$

Векторы **E** и **H** являются ‘электрическим’ и ‘магнитным’ векторами центральных зарядов, которые определены в базисе, задаваемом лоренцевыми гармониками ${v_\alpha}^i$, $\bar v_{\dot\alpha i}$. В этом базисе компоненты энергии-импульса равны

$$P^{(0)} = \frac{1}{2}\,P_i^{\;i}\,, \quad P^{(r)} = \frac{1}{2}\,P_i^{\;j}(\sigma_r)_j^{\;i},$$

где матрицы $P_i^{\;j}$ and $P_{\alpha\dot\beta}$ связаны преобразованиями Лоренца, генерируемыми гармонической матрицей ${v_\alpha}^i$, т.е.

$$P_{\alpha\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\,{v_\alpha}^i\bar v_{\dot\beta j}P_i^{\;j}\,.$$

Таким образом, условие

$$\tfrac{1}{2}\,{v_\alpha}^i\bar v_{\dot\beta j}P_i^{\;j} = {\lambda_\alpha}^i\bar\lambda_{\dot\beta i} \tag{4.49}$$

связывает битвисторное представление энергии-импульса и представление его в гармоническом базисе.

Для данного вектора энергии-импульса **P** доля сохраняющихся суперсимметрий определяется выбором ‘электрического’ **E** и ‘магнитного’ **H** векторов. Поскольку центральные заряды записаны в терминах гармоник, любой выбор **E** и **H** не приводит к нарушению лоренцевой инвариантности. В последующем удобно проводить анализ в базисе стандартного импульса.

4.2.4. Массивный ($m \neq 0$) случай

В базисе стандартного импульса $P^{(0)}{=}m$, $P^{(r)}{=}0$ выражение (4.49) дает

$$m{v_\alpha}^i\bar v_{\dot\beta i} = 2{\lambda_\alpha}^i\bar\lambda_{\dot\beta i}\,.$$

Следовательно, гармонические ${v_\alpha}^i$ и твисторные ${\lambda_\alpha}^i$ спиноры совпадают с точностью до унитарных преобразований, действующих на индекс i. Без потери общности, мы берем

$$m^{1/2}{v_\alpha}^i = \sqrt{2}{\lambda_\alpha}^i\,.$$

Это отожествление может быть получено посредством фиксации калибровки гармонических степеней свободы, которые являются чисто калибровочными степенями свободы в исходном действии (4.45). Как результат этого, мы получаем модель суперчастицы только с твисторными спинорами. Такая модель рассматривалась в [172] и давала все возможные случаи сохранения суперсимметрии таргетного пространства для массивной суперчастицы.

1/2 ненарушенной суперсимметрией достигается, если коэффициенты центральных зарядов удовлетворяют условиям

$$C^{ij}\bar{C}_{ij} = 2m^2\,, \quad C^{ij}C_{ij}\bar{C}^{kl}\bar{C}_{kl} = 4m^4\,, \tag{4.50}$$

которые эквивалентны $\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 = m^2$, $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = 0$. Как было показано в [172], условия (4.50) приводят к условиям унитарности матрицы коэффициентов центральных зарядов $C^{ij}\bar{C}_{jk} = m^2\delta^i_k$. Без потери общности, мы можем взять диагональную матрицу C^{ij} с модулями диагональных членов, равными m, когда оба векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ лежат в плоскости XY.

Случай с 1/4 ненарушенной суперсимметрией получается при $\mathbf{E}\times\mathbf{H} \neq 0$ и при выполнении

$$|\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2 - m^2| = 2|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|\,,$$

когда только один из двух членов диагональной матрицы C_{ij} равен m.

4.2.5. Безмассовый ($m = 0$) случай

Перейдем в (ковариантизованый) базис стандартного импульса безмассовой частицы

$$P^{(\mu)} = (P^{(0)}, 0, 0, P^{(0)})\,, \qquad P_i^{\;j} = 2P^{(0)}(\sigma_+)_i^{\;j},$$

где $\sigma_+ = (1_2 + \sigma_3)/2$. В безмассовом случае твисторные спиноры пропорциональные друг другу и могут быть выбраны равными $\lambda_\alpha \equiv {\lambda_\alpha}^1 = {\lambda_\alpha}^2$. Тогда, выражение (4.49) приводит к

$$P^{(0)}{v_\alpha}^1\bar{v}_{\dot{\beta}1} = 2\lambda_\alpha\bar{\lambda}_{\dot{\beta}}$$

и, следовательно, один гармонический спинор ${v_\alpha}^1$ с точностью до фазового преобразования совпадает с твисторным спинором λ_α. Поэтому, мы можем оставить твисторный спинор λ_α и один гармонический спинор ${v_\alpha}^2$, тогда как второй гармонический спинор задается твисторным (например, в виде ${v_\alpha}^1 = (\frac{P^{(0)}}{2})^{-1/2}\lambda_\alpha$). При этом, матрица центральных зарядов принимает следующий вид

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} H_1 - E_2 - i(H_2 + E_1) & -H_3 + iE_3 \\ -H_3 + iE_3 & -H_1 - E_2 - i(H_2 - E_1) \end{pmatrix}.$$

В случаях 1/2 и 3/4 ненарушенной суперсимметрии векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогональны друг другу и к вектору $\mathbf{P}$ (см. Таблицу 4.1), направленному вдоль третьей оси. Следовательно, $E_3 = H_3 = 0$ и матрица C_{ij} диагональна. Также в этих случаях векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют равные длины $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}| \equiv V$. Ненулевые элементы матрицы C_{ij} равны $C_{11} = 2Ve^{-i\phi}$ в случае $\mathbf{PEH} > 0$ и $C_{22} = -2Ve^{i\phi}$ при $\mathbf{PEH} < 0$, где ϕ – угол между первой осью и вектором $\mathbf{H}$. В случае 1/2 ненарушенной суперсимметрии выполняется $V \neq P^{(0)}$, тогда как при 3/4 ненарушенной суперсимметрии имеет место $V = P^{(0)}$. Случай с $\mathbf{PEH} > 0$ и единственным ненулевым $C_{11} \neq 0$ соответствует твисторной модели суперчастицы с тензорными центральными зарядами, рассмотренной в [96, 97].

Состояния безмассовой суперчастицы, сохраняющие 1/4 суперсимметрии, реализуются при $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{H}|$ и когда $\mathbf{EH} = 0$. При этих условиях матрица C_{ij} имеет два ненулевых диагональных элемента:

$$C_{11} = (|\mathbf{E}| + |\mathbf{H}|)e^{-i\phi}, \quad C_{22} = (|\mathbf{E}| - |\mathbf{H}|)e^{i\phi}$$

когда $\mathbf{PEH} > 0$ или

$$C_{11} = -(|\mathbf{E}| - |\mathbf{H}|)e^{-i\phi}, \quad C_{22} = -(|\mathbf{E}| + |\mathbf{H}|)e^{i\phi}$$

при $\mathbf{PEH} < 0$. Таким образом, случай безмассовой суперчастицы лишь с одной κ-симметрией имеет место только при наличиии двух спиноров в модели – использование одного твисторного спинора, как в [96, 97], является недостаточным для этого. Другими словами, более сильное нарушение таргетной суперсимметрии требует использования большего числа гармонических спиноров, определяющих центральные заряды алгебры суперсимметрии.

4.3. Новая модель частицы в тензорном пространстве с симметрией Максвелла

Расширение пространства Минковского до тензорного пространства является эффективным при описании системы безмассовых полей высших спинов, обладающих обобщенной конформной симметрией $Sp(8)$ (см., например, [96, 97, 176]). В данном разделе, используя подход тензорного пространства, мы рассмотрим формулировку расширения симметрий группы Пуанкаре до группы Максвелла [104, 105].

Введение дополнительных тензорных степеней свободы ($x^\mu \to X^M = (x^\mu, y^{\mu\nu})$) в моделях с симметрией Максвелла, описывающих системы с постоянным электромагнитным фоновым полем в пространстве-времени Минковского, было предложено в [105, 106], но роль и физическая интерпретация дополнительных координат осталась там неясной.

Лагранжиан скалярной релятивистской частицы, взаимодействующей с постоянным электромагнитным (ЭМ) полем $f^{(0)}_{\mu\nu}$ с потенциалом $A^{(0)}_\mu = -\frac{1}{2}\, f^{(0)}_{\mu\nu} x^\nu$ ($F^{(0)}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{(0)}_\nu - \partial_\nu A^{(0)}_\mu = f^{(0)}_{\mu\nu}$), имеет вид

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + eA^{(0)}_\mu \dot{x}^\mu\,. \tag{4.51}$$

Внешнее постоянное поле $f^{(0)}_{\mu\nu}$ нарушает симметрию Пуанкаре и сохраняет только алгебру Бакри-Комбе-Ричарда (БКР) [104] с шестью генераторами $G = M^{\mu\nu} f^{(0)}_{\mu\nu}$, $G = M^{\mu\nu} f^{(0)\,*}_{\mu\nu}$, P_μ, где ($M_{\mu\nu}$, P_μ) – алгебра Пуанкаре и $f^{(0)\,*}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} f^{(0)\,\lambda\rho}$. Алгебра БКР имеет двухмерное центральное расширение [104]

$$[P_\mu, P_\nu] = i\, f^{(0)}_{\mu\nu}\, Z_e + i\, f^{(0)\,*}_{\mu\nu}\, Z_g\,. \tag{4.52}$$

Для модели (4.51) центральные заряды равны $(Z_e, Z_g) = (e, 0)$.

Можно рассмотреть обобщение системы (4.51), в которой постоянные $f^{(0)}_{\mu\nu}$ повышаются до новых шести динамических степеней свободы $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ и вводится соответствующий калибровочный потенциал $A_\mu = -\frac{1}{2}\, f_{\mu\nu} x^\nu$ с независящей от пространственных координат полевой напряженностью $F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}$. Ковариантизованные импульсы в присутствии такого электромагнитного поля $\pi_\mu = p_\mu + \frac{1}{2}\, e\, f_{\mu\nu} x^\nu$, где $\{x^\mu, p_\nu\}_P = \delta^\mu_\nu$, не коммутируют: $\{\pi_\mu, \pi_\nu\}_P = e\, f_{\mu\nu}$. Известно [106], что модель (4.51) с $f^{(0)}_{\mu\nu} \to f_{\mu\nu}$ и $A^{(0)}_\mu \to A_\mu$ обеспечивает реализацию алгебры Максвелла, которая получается из алгебры Пуанкаре заменой коммутатирующих генераторов P_μ на некоммутирующие: $[P_\mu, P_\nu] = ie\, Z_{\mu\nu}$, $Z_{\mu\nu} = -Z_{\nu\mu}$, где e – константа электромагнитного взаимодействия. Эта процедура реализует переход от алгебры БКР к алгебре Максвелла, которая, как и алгебра Пуанкаре, не имеет центрального расширения. Новые тензорные генераторы $Z_{\mu\nu}$ абелевы и описывают так называемые тензорные центральные заряды. Дополняя соотношениями $[Z_{\mu\nu}, Z_{\lambda\rho}] = [Z_{\mu\nu}, P_\lambda] = 0$, мы получаем десятимерную алгебру Ли группы максвелловских трансляций.

В максвелловской модификации лагранжиана (4.51) [106]

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + f_{\mu\nu}\left(\dot{y}^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\, e\, x^{[\mu}\dot{x}^{\nu]}\right) \tag{4.53}$$

значения генераторов $Z_{\mu\nu}$ описываются новой тензорной переменной $f_{\mu\nu}$. Уравнения движения, следующие из (4.53) в калибровке собственного времени $\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 1$, имеют вид

$$m\ddot{x}_\mu = -f_{\mu\nu}\dot{x}^\nu\,, \qquad \dot{y}^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\, e\, x^{[\mu}\dot{x}^{\nu]}\,, \qquad \dot{f}_{\mu\nu} = 0\,. \tag{4.54}$$

Первое уравнение в (4.54) описывает стандартную динамику заряженной частицы в ЭМ поле, описывающей силой Лоренца. Второе уравнение в (4.54) описывает движение в тензорном подпространстве $y^{\mu\nu}$ обобщенного максвелловского пространства-времени $X^M = (x^\mu, y^{\mu\nu})$, $M = 1, \ldots, 10$. В этом разделе мы построим более общую максвелл-инвариантную модель частицы в тензорном пространстве-времени $(x^\mu, y^{\mu\nu})$, которая обеспечивает фиксированные значения трех операторов Казимира алгебры Максвелла посредством связей первого рода, и проведем первичное квантование модели с выяснением физического смысла волновой функциии и операторов Казимира.

4.3.1. Алгебра Максвелла и максвелловское пространство-время

Определим алгебру Максвелла, ее операторы Казимира и рассмотрим преобразование симметрии Максвелла в обобщенном максвелловском пространстве-времени.

Алгебра Максвелла $\mathfrak{m}$ [104, 105] получается посредством расширения алгебры Пуанкаре (P_μ, $M_{\mu\nu}$) шестью тензорными зарядами $Z_{\mu\nu} = -Z_{\nu\mu} = (Z_{\mu\nu})^+$

$$[P_\mu, P_\nu] = i\, e\, Z_{\mu\nu}, \qquad [Z_{\mu\nu}, Z_{\lambda\rho}] = [Z_{\mu\nu}, P_\lambda] = 0\,, \tag{4.55}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = 2i\, \eta_{\lambda[\mu}\, P_{\nu]}\,, \qquad [M_{\mu\nu}, Z_{\lambda\rho}] = 2i\left(\eta_{\lambda[\mu}\, Z_{\nu]\rho} - \eta_{\rho[\mu}\, Z_{\nu]\lambda}\right)\,, \tag{4.56}$$

где $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} = (M_{\mu\nu})^+$ являются генераторами алгебры Лоренца. Таким образом, алгебра Максвелла $\mathfrak{m} = (P_\mu, M_{\mu\nu}, Z_{\mu\nu})$ является полупрямой суммой алгебры Лоренца $\mathfrak{l} = (M_{\mu\nu}) \cong sl(2, \mathbb{C})$ и подалгебры $\mathfrak{g} = (P_\mu, Z_{\mu\nu})$: $\mathfrak{m} = \mathfrak{l} \mathbin{\in\!\!\!\!+} \mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{g}$ (4.55) является идеалом, тогда как $\mathfrak{m}$ – максимальной нильпотентной подалгеброй в полной алгебре Максвелла. Операторы Казимира алгебры Максвелла имеют вид [104, 105]

$$\begin{aligned} C_1 &= P^\mu P_\mu + e\, Z^{\mu\nu} M_{\mu\nu}\,, && (4.57)\\ C_2 &= \tfrac{1}{2}\, Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu}\,, && (4.58)\\ C_3 &= \tfrac{1}{2}\, Z^{\mu\nu} Z^*_{\mu\nu}\,, && (4.59)\\ C_4 &= P^\mu P^\nu Z^*_{\mu\lambda} Z^{*\lambda}_{\nu} + \tfrac{1}{4}\, e\, Z^{\mu\nu} Z^*_{\mu\nu}\, M^{\lambda\rho} Z^*_{\lambda\rho} && (4.60) \end{aligned}$$

где $Z^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} Z^{\lambda\rho}$ – дуальный тензор.

Введем координаты $(x^\mu,\ y^{\mu\nu})$, $y^{\mu\nu}{=}-y^{\nu\mu}$, дуальные к генераторам P_μ, $Z_{\mu\nu}$. Обобщенное пространство-время, параметризованное этими координатами, описывается фактор-пространством

$$G = \frac{\mathfrak{M}}{O(3,1)} = e^{i\, x^\mu P_\mu} e^{i\, y^{\mu\nu} Z_{\mu\nu}}\,, \tag{4.61}$$

где $\mathfrak{M}$ – многообразие группы Максвелла. Один-формы Маурера-Картана, получаемые из $\Omega = -iG^{-1}dG = e^\mu P_\mu + \omega^{\mu\nu} Z_{\mu\nu}$, равны

$$e^\mu = dx^\mu\,, \qquad \omega^{\mu\nu} = dy^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\, e\, x^{[\mu} dx^{\nu]}\,. \tag{4.62}$$

Формы (4.62) инвариантны относительно пространственно-временных (параметры a^μ) и тензорных (параметры $b^{\mu\nu} = -b^{\nu\mu}$) трансляций

$$\delta x^\mu = a^\mu\,, \qquad \delta y^{\mu\nu} = b^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, e\, a^{[\mu} x^{\nu]} \tag{4.63}$$

и ковариантны при лоренцевых преобразованиях (параметры $\ell^{\mu\nu} = -\ell^{\nu\mu}$)

$$\delta x^\mu = \ell^\mu{}_\lambda x^\lambda\,, \qquad \delta y^{\mu\nu} = 2\ell^{[\mu}{}_\lambda y^{\nu]\lambda}\,. \tag{4.64}$$

Если обозначим групповые параметры в $\mathfrak{M}$ через $(\Lambda, a, b) \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu, a^\mu, b^{\mu\nu})$, где $\eta^{\nu\rho}\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\lambda{}_\rho = \eta^{\mu\lambda}$, закон групповой композиции выглядит следующим образом

$$(\Lambda, a, b)\, (\Lambda', a', b') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a', b + \Lambda b' + e\, a \wedge (\Lambda a'))\,, \tag{4.65}$$

где $\wedge$ обозначает антисимметризацию в отношении свободных векторных индексов. Отметим, что групповой закон (4.65) определяет композицию двух пространственно-временных трансляций a, a' как тензорную трансляцию с параметром $a \wedge a'$. При постоянных значениях $F_{\mu\nu}$ и квантово-механической реализации это преобразование определяет фазовое преобразование $\exp\{ie\, a_\mu F^{\mu\nu} a'_\nu\}$ в проективном представлении группы БКР [105].

4.3.2. Модель частицы в тензорном пространстве-времени

Используя один-формы (4.62), мы строим динамическую реализацию симметрии Максвелла, определяемой действием

$$S = -m \int \sqrt{e{\cdot}e} - \kappa \int \sqrt{\omega{\cdot}\omega + i\,\omega{\cdot}\omega^*} - \bar{\kappa} \int \sqrt{\omega{\cdot}\omega - i\,\omega{\cdot}\omega^*}\,. \qquad (4.66)$$

В (4.66) и ниже мы используем обозначения $e{\cdot}e = e^\mu e_\mu$, $\omega{\cdot}\omega = \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}$, $\omega{\cdot}\omega^* = \omega^{\mu\nu}\omega^*_{\mu\nu}$ и $\omega^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\omega^{\lambda\rho}$. Вещественная постоянная m и комплексная константа $\kappa = \kappa_1{+}i\kappa_2$ ($\bar{\kappa} = \kappa_1{-}i\kappa_2$) параметризуют модель и, как будет видно ниже, определяют значения трех операторов Казимира алгебры Максвелла.

Канонические импульсы определяются выражениями

$$p_\mu = -m\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{e}{\cdot}\dot{e}}} - \tfrac{1}{2}\, e\, f_{\mu\nu}x^\nu\,, \quad f_{\mu\nu} = -\kappa\frac{\dot{\omega}_{\mu\nu} + i\,\dot{\omega}^*_{\mu\nu}}{\sqrt{\dot{\omega}{\cdot}\dot{\omega} + i\,\dot{\omega}{\cdot}\dot{\omega}^*}} - \bar{\kappa}\frac{\dot{\omega}_{\mu\nu} - i\,\dot{\omega}^*_{\mu\nu}}{\sqrt{\dot{\omega}{\cdot}\dot{\omega} - i\,\dot{\omega}{\cdot}\dot{\omega}^*}}\,,$$

где $e^\mu = \dot{e}^\mu d\tau$, $\omega^{\mu\nu} = \dot{\omega}^{\mu\nu} d\tau$. Уравнения Эйлера-Лагранжа для модели (4.66) могут быть записаны в виде

$$\dot{p}_\mu - \tfrac{1}{2}\, e\, f_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = 0\,, \qquad \dot{f}_{\mu\nu} = 0\,. \qquad (4.67)$$

Первое уравнение (4.67) воспроизводит первое уравнение (4.54) в калибровке собственного времени. Второе уравнение (4.67) совпадает с третьим уравнением (4.54), тогда как подстановка (4.3.2) в (4.67) дает полевые уравнения второго порядка для координат $y^{\mu\nu}(\tau)$.

Из выражений импульсов мы получаем следующие связи

$$\phi_1 = \pi{\cdot}\pi - m^2 \approx 0\,, \qquad (4.68)$$

$$\phi_2 = \tfrac{1}{2}\, f{\cdot}f - c_2 \approx 0\,, \qquad (4.69)$$

$$\phi_3 = \tfrac{1}{2}\, f{\cdot}f^* - c_3 \approx 0\,, \qquad (4.70)$$

где

$$\pi_\mu = p_\mu + \tfrac{1}{2}\, e\, f_{\mu\nu} x^\nu \,, \tag{4.71}$$

$$c_2 = \kappa^2 + \bar{\kappa}^2 = 2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)\,, \qquad c_3 = -i(\kappa^2 - \bar{\kappa}^2) = 4\kappa_1\kappa_2\,. \tag{4.72}$$

При анализе связей мы используем равенства $\dot{\omega}^{**} = -\dot{\omega}$, $\dot{\omega}^*{\cdot}\dot{\omega}^* = -\dot{\omega}{\cdot}\dot{\omega}$, $(\dot{\omega} + i\dot{\omega}^*){\cdot}(\dot{\omega} - i\dot{\omega}^*) = 0$ и канонические скобки Пуассона

$$\{x^\mu, p_\nu\}_{{}_P} = \delta^\mu_\nu \,, \qquad \{y^{\mu\nu}, f_{\lambda\rho}\}_{{}_P} = \delta^{[\mu}_\lambda \delta^{\nu]}_\rho \,. \tag{4.73}$$

Динамика нашей модели полностью описывается связями (4.68)-(4.70), которые являются связями первого рода и представляют уравнения на собственные значения для первых трех операторов Казимира (4.57)-(4.59). Так, нетеровские заряды, генерирующие преобразования Максвелла (4.63)-(4.64) в нашей модели, определяются выражениями

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu - \tfrac{1}{2}\, e\, f_{\mu\nu} x^\nu \,, \quad \mathcal{M}_{\mu\nu} = 2\left(x_{[\mu} p_{\nu]} + 2 y_{[\mu}{}^\lambda f_{\nu]\lambda}\right)\,, \quad \mathcal{Z}_{\mu\nu} = -f_{\mu\nu}\,, \tag{4.74}$$

для которых выполняется равенство

$$C_1 = \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu + e\, \mathcal{M}^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{\mu\nu} = \pi^\mu \pi_\mu \,. \tag{4.75}$$

Таким образом, связь (4.68) описывает реализацию в фазовом пространстве первого оператора Казимира C_1 с собственным значением m^2, тогда как оставшиеся связи (4.69), (4.70) реализуют операторы Казимира C_2, C_3 с собственными значениями (4.72). Отметим также, что уравнения движения (4.67) являются законами сохранения для нетеровских зарядов ($\dot{\mathcal{P}}_\mu = 0$, $\dot{\mathcal{Z}}_{\mu\nu} = 0$).

Импульсные переменные имеют следующий закон преобразований

$$\delta p_\mu = \tfrac{1}{2}\, e\, a^\nu f_{\nu\mu} + \ell_\mu{}^\lambda p_\lambda \,, \qquad \delta f_{\mu\nu} = 2\ell_{[\mu}{}^\lambda f_{\nu]\lambda} \tag{4.76}$$

относительно максвелловских преобразований. Переменные (4.71) являются ковариантными импульсами. Они инвариантны относительно пространственно-временных и тензорных трансляций и преобразуются линейно относительно преобразований Лоренца

$$\delta \pi_\mu = \ell_\mu{}^\lambda \pi_\lambda \,. \tag{4.77}$$

Модель (4.66) имеет эквивалентную формулировку первого порядка

$$S=\int\Big(\pi_\mu e^\mu+f_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\Big)+\tfrac{1}{2}\int d\tau\Big[g_1\Big(\pi\cdot\pi-m^2\Big)+g_2\Big(f\cdot f-2c_2\Big)+g_3\Big(f\cdot f^*-2c_3\Big)\Big]\,, \tag{4.78}$$

где π_μ, $f_{\mu\nu}$ являются независимыми переменными, а g_1, g_2 и g_3 – множители Лагранжа. Отметим, что мы можем расширить действие первого порядка (4.78) дополнительным членом

$$S_4=\tfrac{1}{2}\int d\tau g_4\Big(\pi^\mu\pi^\nu f^*_{\mu\lambda}f^{*\lambda}_\nu-c_4\Big) \tag{4.79}$$

и рассмотреть модель с действием $\tilde{S}=S+S_4$. Член (4.79) фиксирует значение Казимира C_4, определенного выражением (4.60), так как в реализации (4.74) имеет место следующее равенство

$$C_4=\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}^\nu\mathcal{Z}^*_{\mu\lambda}\mathcal{Z}^{*\lambda}_\nu+\tfrac{1}{4}\,e\,\mathcal{Z}^{\mu\nu}\mathcal{Z}^*_{\mu\nu}\mathcal{M}^{\lambda\rho}\mathcal{Z}^*_{\lambda\rho}=\eta^{\lambda\rho}(\pi^\mu f^*_{\mu\lambda})(\pi^\nu f^*_{\nu\rho})\,. \tag{4.80}$$

Ниже увидим, что собственное значение c_4 четвертого Казимира (4.80) пропорционально квадрату энергии.

4.3.3. Первично-квантованная теория и орбиты Ландау

Рассмотрим следующую реализацию квантовых операторов:

$$\hat{x}^\mu=i\frac{\partial}{\partial p_\mu}\,,\qquad \hat{p}_\mu=p_\mu\,,\qquad \hat{y}^{\mu\nu}=i\frac{\partial}{\partial f_{\mu\nu}}\,,\qquad \hat{f}_{\mu\nu}=f_{\mu\nu}\,. \tag{4.81}$$

Отметим, что компоненты антисимметричного тензора $f_{\mu\nu}$ могут быть выражены через три-векторы электрического поля $\mathbf{E}=(E_i)$, $i=1,2,3$ и магнитного поля $\mathbf{H}=(H_i)$ следующим образом

$$f_{0i}=E_i\,,\qquad f_{ij}=-\epsilon_{ijk}H_k\,,\qquad f^*_{0i}=H_i\,,\qquad f^*_{ij}=\epsilon_{ijk}E_k\,. \tag{4.82}$$

Тогда, лоренц-инварианты, описывающие связи (4.69), (4.70), равны

$$f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}=2\left(\mathbf{H}^2-\mathbf{E}^2\right),\qquad f^{\mu\nu}f^*_{\mu\nu}=-4\mathbf{E}\mathbf{H}\,. \tag{4.83}$$

Отметим, что $\det(f_{\mu\nu})=\det(f^*_{\mu\nu})=\frac{1}{16}\,(f^{\mu\nu}f^*_{\mu\nu})^2=(\mathbf{E}\mathbf{H})^2$.

Физическая интерпретация модели зависит от значений операторов Казимира, определяющих четыре случая (мы пренебрегаем тривиальным случаем $f_{\mu\nu}=0$):

$$\textbf{\textit{I)}} \qquad \det(f_{\mu\nu}) \neq 0\,; \tag{4.84}$$

$$\textbf{\textit{II)}} \qquad \det(f_{\mu\nu}) = 0 \quad \left[\begin{array}{llll} \textbf{\textit{a)}} & f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} > 0 & - & \text{магнитный случай,} \\ \textbf{\textit{b)}} & f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} < 0 & - & \text{электрический случай,} \\ \textbf{\textit{c)}} & f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} = 0 & - & \text{радиационный случай.} \end{array} \right. \tag{4.85}$$

Ниже мы рассмотрим подробно случай ***IIa)***, который в частном лоренцевом базисе соответствует нулевому электрическому полю и ненулевому постоянному магнитному полю.

В случае $\det(f)=0$ важную роль играет четыре-вектор

$$q_\mu \equiv p^\nu f^*_{\nu\mu}\,, \tag{4.86}$$

который является инвариантным относительно пространственно-временнных и тензорных трансляций, преобразуется линейно относительно преобразований Лоренца, $\delta q_\mu = \ell_\mu{}^\lambda q_\lambda$, и имеет следующее описание в терминах 3-векторов

$$q_\mu = (q_0, q_i) = (\mathbf{pH}\,,\, p_0\mathbf{H} + \mathbf{p}\times\mathbf{E})\,, \tag{4.87}$$

где $p_\mu = (p_0, \mathbf{p})$. В магнитном случае можно взять $\mathbf{E}=0$ и направить магнитное поле вдоль третьей оси $\mathbf{H}=(H_1,H_2,H_3)=(0,0,\mathrm{H})$. Тогда

$$q_\mu = (q_0; q_1, q_2, q_3) = \mathrm{H}(p_3; 0, 0, p_0) \tag{4.88}$$

и $c_3=0$. Волновая функция, определенная на десятимерном импульсном пространстве Максвелла $\Psi=\Psi(p_\mu, f_{\mu\nu})$ удовлетворяет следующим уравнениям связей

$$(C_1 - c_1)\,\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \pi^\mu\pi_\mu\,\Psi = m^2\,\Psi\,, \tag{4.89}$$

$$(C_2 - c_2)\,\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}\,\Psi = 2c_2\,\Psi\,, \tag{4.90}$$

$$(C_3 - c_3)\,\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f^{\mu\nu}f^*_{\mu\nu}\,\Psi = 0\,, \tag{4.91}$$

$$(C_4 - c_4)\,\Psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q^\mu q_\mu\,\Psi = c_4\,\Psi\,, \tag{4.92}$$

где π_μ принимает вид дифференциального оператора

$$\pi_\mu = p_\mu + \tfrac{i}{2}\, e\, f_{\mu\nu}(\partial/\partial p_\nu) \tag{4.93}$$

и вектор q_μ дан в (4.86).

Переход в магнитном случае от тензора $f_{\mu\nu}$ к тензору $\tilde{f}_{\mu\nu}$ с $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = (0, 0, \mathrm{H})$ осуществляется посредством подходящих преобразований Лоренца

$$f_{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\lambda \tilde{\Lambda}_\nu{}^\rho \tilde{f}_{\lambda\rho}\,. \tag{4.94}$$

Матрица преобразований Лоренца $\tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu$ является функцией переменных $f_{\mu\nu}$ ($\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(f)$), которые не зависят от времени благодаря второму уравнению (4.67). Так как мы предположили, что единственными ненулевыми компонентами $\tilde{f}_{\mu\nu}$ являются $\tilde{f}_{12} = -\tilde{f}_{21} = -\mathrm{H}$, соотношение (4.94) принимает вид

$$f_{\mu\nu} = -\mathrm{H}\, \epsilon_{ab}\, u^a_\mu u^b_\nu\,, \qquad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1\,, \tag{4.95}$$

где $u^a_\mu := \tilde{\Lambda}_\mu{}^a$, $a = 1, 2$. Благодаря свойствам ортогональности лоренцевой матрицы $\tilde{\Lambda}$ векторы u^a_μ удовлетворяют условиям $u^{a\mu} u^b_\mu = -\delta^{ab}$ и описывают пятимерное фактор-пространство $\mathrm{O}(3,1)/\mathrm{O}(1,1)$. Соотношения (4.95) инвариантны относительно локальных O(2)-преобразований

$$\delta\, u^1_\mu = \cos\varphi\ u^2_\mu\,, \qquad \delta\, u^2_\mu = -\sin\varphi\ u^1_\mu\,, \qquad \varphi = \varphi(u)\,. \tag{4.96}$$

То есть, переменные $f_{\mu\nu}$, определенные формулой (4.95) и ограниченные двумя связями $f{\cdot}f = 2c_2$, $f{\cdot}f^* = 0$, содержат только четыре независимых степеней свободы. Применяя преобразования (4.94) в уравнениях (4.90), (4.91), мы находим, что константа c_2 определяет напряженность магнитного поля

$$c_2 = \mathrm{H}^2\,, \tag{4.97}$$

постоянного на массовой поверхности (см. второе уравнение (4.67)).

После преобразований Лоренца $\tilde{\Lambda}$, $p_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu \tilde{p}_\nu$, мы получаем четыре-импульс $\tilde{p}_\mu = (\tilde{p}_0; \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$. Из (4.86) следует, что вектор q_μ имеет вид (4.88) в компонентах ‘тильдованого’ импульса, т.е.

$$\tilde{q}_\mu = \mathrm{H}\,(\tilde{p}_3; 0, 0, \tilde{p}_0)\,. \tag{4.98}$$

Кроме того, можно выполнить следующее преобразование Лоренца $\tilde{p}_\mu = \tilde{\tilde{\Lambda}}_\mu{}^\nu \tilde{\tilde{p}}_\nu$ в плоскости $(0,3)$, которое приводит к занулению третьей пространственной компоненты четыре-импульса $\tilde{\tilde{p}}_\mu = (\tilde{\tilde{p}}_0; \tilde{\tilde{p}}_1, \tilde{\tilde{p}}_2, 0)$. Используя (4.88), мы получаем

$$\tilde{\tilde{q}}_\mu = \mathrm{H}\,(0; 0, 0, \tilde{\tilde{p}}_0)\,. \tag{4.99}$$

Таким образом, связь (4.92) определяет значения энергии стационарных состояний $\mathcal{E} \equiv |\tilde{\tilde{p}}_0|$ в 'дважды-тильдованном' базисе:

$$c_4 = \mathrm{H}^2\,\mathcal{E}^2\,. \tag{4.100}$$

Отметим, что преобразования $\tilde{\tilde{\Lambda}}$ оставляют инвариантным тензор $\tilde{f}_{\mu\nu}$ с единственными ненулевыми компонентами $\tilde{f}_{12} = -\tilde{f}_{21}$.

Для анализа оставшегося уравнения (4.89) сравним его с уравнением (4.92) в лоренцевом базисе после $\tilde{\Lambda}$-преобразования (4.94). Вычитая уравнение (4.92), записанное в 'тильдованном' лоренцевом базисе (4.98)

$$\left[(\tilde{p}_0)^2 - (\tilde{p}_3)^2\right]\Psi = \mathcal{E}^2\,\Psi\,, \tag{4.101}$$

из уравнения (4.89)

$$\left[(\tilde{p}_0)^2 - (\tilde{p}_3)^2 - \left(\tilde{p}_1 - \frac{ie\mathrm{H}}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_2}\right)^2 - \left(\tilde{p}_2 + \frac{ie\mathrm{H}}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_1}\right)^2\right]\Psi = m^2\,\Psi\,, \tag{4.102}$$

мы получаем двухмерное уравнение

$$\left[\left(\tilde{p}_1 - \frac{ie\mathrm{H}}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_2}\right)^2 + \left(\tilde{p}_2 + \frac{ie\mathrm{H}}{2}\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_1}\right)^2\right]\Psi = \varepsilon^2\,\Psi\,, \qquad \varepsilon^2 = \mathcal{E}^2 - m^2\,. \tag{4.103}$$

Уравнение (4.103) описывает двухмерные планарные квантовые состояния в проблеме Ландау и может быть получено из уравнения Клейна-Гордона в постоянном магнитном поле [250]. Оператор в левой части (4.103) можно представить в виде одномерного осциллятора частоты $\omega = 2e\mathrm{H}$ с квантованными собственными значениями энергии. В случае квадратично-интегрируемой волновой функции в (4.103) разрешены только дискретные значения ε^2, которые приводят к дискретным энергетическим уровням $\mathcal{E}_n$, где $\varepsilon^2 = \mathcal{E}_n^2 - m^2$

равен $\omega(n+\frac{1}{2})=e\mathrm{H}(2n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$. Таким образом, мы получаем квантованные энергетические уровни Ландау

$$\mathcal{E}_n=\pm\left[m^2+e\,\mathrm{H}\,(2n+1)\right]^{1/2}\,,\qquad n\in\mathbb{Z}\,,\tag{4.104}$$

где дисперсионное соотношение для вектора энергии-импульса $\mathcal{E}=\pm\left(\varepsilon^2+m^2\right)^{1/2}$ следует из уравнения Клейна-Гордона (4.102).

4.4. Резюме

В этой главе изучены модели частицы и суперчастицы, конфигурационное пространство которых содержит тензорные координаты. Последние соответствуют изометриям, генерируемым тензорными центральными зарядами обобщенной алгебры симметрий моделей.

Мы построили твистороподобную формулировку $D=4$ суперчастицы с тензорными центральными зарядами, в которой массивный и безмассовый случаи описаны в единообразной форме. Модель использует одновременно как координаты центральных зарядов, так и вспомогательные бозонные спинорные переменные – твисторные переменные и спинорные лоренцевы гармоники. Использование спиноров позволяет значительно упростить анализ при сохранении его ковариантности. При нулевой массе наша модель сводится к твисторной формулировке безмассовой суперчастицы с тензорными центральными зарядами. В массивном случае мы получаем битвисторную формулировку массивной суперчастицы с тензорными центральными зарядами, сохраняющую 1/4 или 1/2 таргетных суперсимметрий. Мы показали, что в массивная $D=4$ суперчастица с одной κ-симметрией классически эквивалентна обычной спиновой (спина 1/2) частице в секторе положительной энергии.

Мы рассмотрели также применение тензорных переменных в системах с симметрией Максвелла. Новизна предложенного здесь подхода заключается в описании квантово-механических состояний частицы, взаимодействующей с постоянным электромагнитным полем, как первично-квантованного свободного движения частицы в тензорном пространстве-времени, обладающем симметрией Максвелла. То есть, в нашем подходе используется новая концепция расширенного пространства-времени, с дополнительными измерениями, связанными с описанием взаимодействий. Алгебра Максвелла и дополнительные тензорные координаты соответствуют взаимодействию частицы с напряженностями постоянного электромагнитного поля.

Отметим, что в главе рассмотрена только частица нулевого спина в максвелл-ковариантной формулировке. Одна из возможностей описания частиц с ненулевыми спинами в этом подходе состоит в максвелл-инвариантном обобщении спиновой частицы в псевдоклассическом подходе с векторными грассмановыми переменными [17, 18, 20]. В случае частицы со спином $1/2$ обобщение действия (4.78) имеет вид

$$\begin{aligned} S_1 = & \int \Big(\pi_\mu e^\mu + f_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu}\Big) \qquad (4.105)\\ & + \tfrac{1}{2}\int d\tau \Big[g_1\Big(\pi{\cdot}\pi + \tfrac{i}{2}\,e\,f_{\mu\nu}\psi^\mu\psi^\nu - m^2\Big) + g_2\Big(f{\cdot}f - 2c_2\Big) + g_3\Big(f{\cdot}f^* - 2c_3\Big)\Big]\\ & + \int d\tau \Big[\tfrac{i}{2}\,\psi_\mu\dot\psi^\mu - \tfrac{i}{2}\,\psi_5\dot\psi_5 + \chi\Big(\pi_\mu\psi^\mu - m\psi_5\Big)\Big]\,, \end{aligned}$$

где ψ_μ, ψ_5 и χ – грассмановы переменные. Модель (4.105) продуцирует связи (4.69), (4.70) и следующую модификацию связи (4.68)

$$\pi{\cdot}\pi + \tfrac{i}{2}\,e\,f_{\mu\nu}\psi^\mu\psi^\nu - m^2 \approx 0\,. \qquad (4.106)$$

Кроме того, мы получаем дополнительную фермионную связь

$$\pi_\mu\psi^\mu - m\psi_5 \approx 0\,, \qquad (4.107)$$

представляющую собой обобщение псевдоклассического аналога уравнения Дирака (4.2). Так как после квантования переменные ψ_μ, ψ_5 реализуются посредством матриц Дирака γ_μ, волновая функция является дираковским спинором $\Psi_\alpha(p, f)$, удовлетворяющим уравнениям (4.90), (4.91) и модифицированному уравнению (4.89), которое описывает максвелловское расширение уравнения Фейнмана-ГеллМанна [251] ($\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$) $\Big(\pi_\mu\pi^\mu + e\,f_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\Big)\,\Psi = m^2\,\Psi$. Кроме того, из (4.107) следует уравнение Дирака в присутствии постоянного электромагнитного поля $\Big(\pi_\mu\gamma^\mu - m\Big)\,\Psi = 0$, где π_μ определяется формулой (4.93). Отметим, что аналогичное обобщение для частиц произвольного спина, равного $N/2$, проводится в рамках подхода [20]

$(N = 1, 2, \ldots)$ с введением в модель N копий векторных грассмановых переменных. Это обобщение может прояснить проблему взаимодействия высших спинов с постоянным электромагнитным полем, включая сектора, описываемые соотношениями (4.85b,c), а также с отличным от нуля значением оператора Казимира C_2 (см. (4.84)).

Результаты настоящей главы опубликованы в работах [169, 170, 171] и трудах конференций [172, 173, 174].

Глава 5

Твисторные модели частиц высших спинов и протяженных объектов

В предыдущих главах рассматривались модели (супер)частиц, безмассовых и массивных, имеющих фиксированный (супер)спин. Помимо спиновых (супер)частиц с конечным числом (супер)спинов, в последнее время интенсивно изучаются модели (супер)частиц высших спинов, квантовый спектр которых содержат бесконечное число состояний, описывающих все (или почти все) спины.

Помимо самостоятельного интереса к проблеме полей высшего спина [109, 110, 111], как то разные формулировки лагранжевого описания с включением калибровочного и гравитационного взаимодействия, теория высших спинов тесно связана со струнной теорией [10, 13], оперирующей также с бесконечными башнями спиновых состояний в физическом спектре. Один из вариантов связи этих теорий заключается в том, что струнную теорию можно рассматривать как некоторую фазу спонтанного нарушения теории высших спинов, обладающей более широкой симметрией. Если это так, то теория безмассовых полей высших спинов является более фундаментальной теорий.

Ряд наиболее интересных формулировок теорий высших спинов (ВС) используют (супер)пространства с дополнительными бозонными координатами (см., например, [112, 113, 114, 115]). Простым и, в то же время, эффективным инструментом в анализе геометрической структуры таких (супер)пространств является изучение состояний (супер)частиц, распространяющихся в них. В частности, развернутая формулировка теории ВС [115] воспроизводится путем квантования тензорной частицы [96, 97] или эквивалентной частицы ВС [115] с откалиброваными тензорными координатами. Такие формулировки обладают $Sp(8)$ и $OSp(1|8)$ симметриями, которые скрыты во второй формулировке. Также существует другая формулировка частиц ВС, проявляющая инвариантность относительно четного аналога суперсимметрии [162, 185]. Квантование этой модели производит мультиплеты ВС со всеми спиральностями, точно как и в случае развернутой частицы ВС. В данной главе будет представлена формулировка такой модели с описанием симметрий ВС.

Симметрия системы полей высших спинов является прозрачной и наглядной при использовании твисторного формализма (см., например, [78]), который применялся при описании частиц и суперчастиц [80, 117, 118, 99, 90, 247], а также струн и суперструн [119, 120, 121, 122, 123, 130, 124, 125]. Основные результаты, вытекающие из моделей открытых твисторных струн [122, 123], тесно связаны с калибровочными теориями супер-Янга-Миллса, что привело к новому твисторному представлению деревесных и петлевых амплитуд в суперсимметричных калибровочных теориях (см., например, [126, 127]. Замкнутая суперструна без натяжения также применялась в описании сектора конформной супергравитации [130]; взаимосвязь с амплитудами стандартной (Пуанкаре) супергравитации впоследствии была получена путем добавления членов, нарушающих конформную симметрию, и введения размерного параметра. Следует добавить также, что связь между теорией Янга-Миллса и твисторной струной имеет дальнейшее продолжение в построении действия Янга-Миллса (в $D = 4$) в терминах полей на твисторном пространстве [128, 129].

Твисторные струнные модели, разработанные в [122, 123, 130, 124, 125], описывались струной без натяжения, которая является одномерным аналогом безмассовых точечных частиц. Как обсуждалось в Главе 3, описание массивных (супер)частиц требует введение би-(супер)твисторной геометрии. В данной главе, учитывая работу [119] и используя битвисторное таргетное пространство, мы представим также новую формулировку твисторной струны с натяжением, которая классически эквивалентна струне Намбу-Гото и после соответствующей фиксации калибровки производит билинейный твисторный лагранжиан со стандартными твисторными коммутационными соотношениями [119, 252].

5.1. Симметрии высших спинов

Система, состоящая из бесконечного числа безмассовых полей произвольных спинов (спиральностей), с необходимостью обладает бесконечномерной симметрией. Основным требованием к такой симметрии – она должна быть бесконечномерным расширением конформной симметрии. По этой причине, твисторы, реализующие линейно конформную симметрию, играют важную роль в построении теории высших спинов. В иных переменных, например, в терминах лоренцевых тензоров, полная группа симметрии высших спинов скрытая и, зачастую, малопонятная. Следует отметить, что другие вопросы, как то лагранжева формулировка полей высших спинов, построение взаимодействия и иные проблемы, по-видимому требуют использования, помимо твисторов, других переменных.

Рассмотрим вначале бесконечномерное расширение конформной группы. Расширение суперконформной группы имеет ряд особых свойств и будет рассмотрено в следующем разделе.

Симметрия в теории высших спинов обычно характеризуется ее алгеброй. Сразу отметим, что алгебра высших спинов, являющаяся расширением конформной алгебры, не единственна. В зависимости от ее выбора получаем разный набор спиновых состояний, на которых замыкаются преобразования, реализующие эту симметрию. Ниже опишем два способа расширения конформной алгебры.

5.1.1. $Sp(8)$ и ее расширение

Генераторы конформной алгебры (3.12)-(3.13) образованы всеми билинейными комбинациями компонент твистора и его сопряженного, сохраняющими твисторную норму (3.10). Помимо 16 билинейных величин (3.12)-(3.13), (3.10), другие 20 произведений второй степени суть

$$Z_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \lambda_\beta \,, \qquad \bar{Z}_{\dot\alpha\dot\beta} = \bar\lambda_{\dot\alpha} \bar\lambda_{\dot\beta} \,, \tag{5.1}$$

$$\tilde{Z}^{\alpha\beta} = \bar\mu^\alpha \bar\mu^\beta \,, \qquad \bar{\tilde{Z}}^{\dot\alpha\dot\beta} = \mu^{\dot\alpha} \mu^{\dot\beta} \,, \tag{5.2}$$

$$F_\alpha{}^{\dot\beta} = \lambda_\alpha \mu^{\dot\beta} \,, \qquad \bar{F}_{\dot\alpha}{}^{\beta} = \bar\lambda_{\dot\alpha} \bar\mu^\beta \,. \tag{5.3}$$

В отличие от генераторов (3.12)-(3.13), (3.10), образованных произведениями компонент твистора и его сопряженного, генераторы (5.1)-(5.3) в терминах $SU(2,2)$-спиноров имеют вид

$$Z_a Z_b = (Z_{\alpha\beta}, \bar{\tilde{Z}}^{\dot\alpha\dot\beta}, F_\alpha{}^{\dot\beta}) \,, \qquad \bar{Z}^a \bar{Z}^b = (\bar{Z}_{\dot\alpha\dot\beta}, \tilde{Z}^{\alpha\beta}, \bar{F}_{\dot\alpha}{}^{\beta}) \,. \tag{5.4}$$

Относительно скобок Пуассона (3.14) генераторы (5.1)-(5.3) вместе с генераторами (3.12)-(3.13), (3.10) образуют алгебру $Sp(8)$ – одно из конечномерных расширений конформной алгебры [116, 96, 97, 115]. Твисторы определяют, фактически, осцилляторное представление алгебр $SU(2,2)$ и $Sp(8)$.

Бесконечномерное расширение конформной симметрии получается ослаблением требования билинейности по твисторам для генераторов симметрии. В терминах мономов n-ой степени твисторов

$$Z_{a(k)} \equiv Z_{a_1} \dots Z_{a_k}\,, \quad \bar{Z}^{b(l)} \equiv \bar{Z}^{b_1} \dots \bar{Z}^{b_l} \tag{5.5}$$

и их спинорных компонент

$$\begin{aligned} &\lambda_{\alpha(k)} \equiv \lambda_{\alpha_1} \dots \lambda_{\alpha_k}\,, \qquad &&\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}(l)} \equiv \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}_1} \dots \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}_l}\,, \\ &\bar{\mu}^{\beta(m)} \equiv \bar{\mu}^{\beta_1} \dots \bar{\mu}^{\beta_m}\,, \qquad &&\mu^{\dot{\beta}(n)} \equiv \mu^{\dot{\beta}_1} \dots \mu^{\dot{\beta}_n} \end{aligned} \tag{5.6}$$

генераторами бесконечномерной симметрии являются следующие величины [115]

$$G^{b(r)}_{a(p)} = Z_{a(p)}\, \bar{Z}^{b(r)}\,, \tag{5.7}$$

которые в терминах спинорных величин имеют вид

$$G^{\beta(m),\dot{\alpha}(n)}_{\alpha(k),\dot{\beta}(l)} = \lambda_{\alpha(k)}\, \bar{\lambda}_{\dot{\beta}(l)}\, \bar{\mu}^{\beta(m)}\, \mu^{\dot{\alpha}(n)}\,, \tag{5.8}$$

где $k{+}n = p$, $m{+}l = r$. Генераторы (5.7), (5.8) образуют замкнутую алгебру. В обозначениях $G^{(N)} \equiv G^{b(r)}_{a(p)}$, $N = p + r$ алгебра генераторов имеет следующий символический вид

$$[G^{(N_1)}, G^{(N_2)}]_{{}_P} = G^{(N_1+N_2-2)}\,, \tag{5.9}$$

где для наглядности опущены в правой части структурные константы.

Элементы $G^{(1)}$ – образующие алгебры (5.7) – являются чистыми твисторами и коммутируют на единичную матрицу. Элементы $G^{(N)}$ с $N \geq 2$ образуют бесконечномерную алгебру Ли. Как видим из (5.9), генераторы $G^{(2)}$, объединяющие в себе генераторы (3.12)-(3.13), (3.10) и (5.1)-(5.3), образуют конечномерную подалгебру, $[G^{(2)}, G^{(2)}]_{{}_P} = G^{(2)}$, которая является алгеброй $Sp(8)$. Минимальное расширение алгебры генераторами $G^{(3)}$ генерирует бесконечный набор генераторов: $[G^{(3)}, G^{(3)}]_{{}_P} = G^{(4)}$, $[G^{(3)}, G^{(4)}]_{{}_P} = G^{(5)}\,, \cdots$

Алгебра, образованная генераторами (5.7), (5.8), приводима и содержит в себе другие (бесконечномерные) подалгебры. Из (5.9) следует, что генераторы $G^{(N)}$ четной степени образуют подалгебру. Дальнейшее сужение возникает при выделении неприводимых представлений в генераторах (5.7). Отметим, рассматриваемая задача предполагает выделение неприводимых $SU(2,2)$ конформных представлений, а не неприводимых $SL(2,C)$ лоренцевых представлений, что является более сильным условием. Выделение в $SU(2,2)$ тензорах (5.7) неприводимых представлений происходит посредством выделения следовых частей, образованных здесь твисторной нормой $(\frac{i}{2}Z_a\bar{Z}^a)$, и бесследовых частей. Последние будут обозначаться скобками $\langle\,\rangle$, то есть тензоры в скобках $\langle\,\rangle$ по определению бесследовы: $\langle M^{ab\ldots}_{ac\ldots}\rangle \equiv 0$. Неприводимыми генераторами являются

$$T^{(n)}{}^{b(r)}_{a(p)} = (\tfrac{i}{2}Z_c\bar{Z}^c)^n \,\langle Z_{a(p)}\,\bar{Z}^{b(r)}\rangle\,. \tag{5.10}$$

Коммутирующими с оператором (3.10) есть генераторы (5.10) с $p=r$:

$$T^{(n)}{}^{b(p)}_{a(p)} = (\tfrac{i}{2}Z_c\bar{Z}^c)^n \,\langle Z_{a(p)}\,\bar{Z}^{b(p)}\rangle\,. \tag{5.11}$$

Эти генераторы определяют серию конформных алгебр высших спинов как фактор-алгебр (детали смотрите, например, в [112, 219, 253, 114]).

Твисторная формулировка безмассовой частицы, инвариантная относительно бесконечномерной симметрии высших спинов, генерируемых операторами (5.7), получается из модели (3.26) снятием фиксации спина, которая достигалась связью (3.25). Опуская эту связь, получаем действие [96, 97]

$$S^{twistor}_{s} = \tfrac{1}{2}\int d\tau\,(\bar{Z}^a\dot{Z}_a - \dot{\bar{Z}}^a Z_a) = \int d\tau(\dot{\bar{\mu}}^{\alpha}\lambda_{\alpha} + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\dot{\mu}^{\dot{\alpha}})\,. \tag{5.12}$$

Твисторная волновая функция модели (5.12) является голоморфной функцией компонент твистора

$$\Psi(Z) = \Psi(\lambda_{\alpha},\mu^{\dot{\alpha}}) \tag{5.13}$$

без дополнительных уравнений связи, как то (3.30), и описывает бесконечную башню безмассовых состояний всех спиральностей, которые описываются однородными составляющими. Обычные пространственно-временные поля спиральности s, описываемые твисторным полем (5.13), можно получить посредством интегрального преобразования

$$\Phi_{\alpha_1\dots\alpha_{2s}}(x) = \oint (\lambda d\lambda)\,\lambda_{\alpha_1}\dots\lambda_{\alpha_{2s}}\Psi(\lambda_\alpha, x^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha)\,, \tag{5.14}$$

которое автоматически выделяет слагаемое с правильной степенью однородности, как в (3.33); члены с другими однородностями вклада не дают.

Симметрии высших спинов, включая случай группы $Sp(8)$ и ее суперсимметричного обобщения $OSp(1|8)$, реализуются естественным образом в (супер)пространствах с дополнительными бозонными координатами (см., например, [112, 113, 114, 115, 254, 255, 256]). Первой реализацией $Sp(8)$ симметрии была модель тензорной суперчастицы [96, 97], которая воспроизводит после квантования развернутую формулировку суперполевой теории высших спинов [115].

Существует также версия развернутой формулировки, которая не использует дополнительных тензорных координат [115, 254] (построение конформных токов ВС в такой формулировке была предметом работы [257]). Эта версия является более экономичной, хотя здесь симметрия $Sp(8)$ (и $OSp(1|8)$) скрыта. В чистом бозонная случае основное уравнение для ВС поля $\Phi(y, \bar y, x)$ [115] имеет вид

$$\left(\partial_{\alpha\dot\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar y^{\dot\alpha}}\right)\Phi = 0\,, \tag{5.15}$$

где y^α – коммутирующий вейлевский спинор, $\bar y^{\dot\alpha} = \overline{(y^\alpha)}$. В решении развернутого уравнения (5.15)

$$\Phi(x, y, \bar y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} y^{\alpha_1}\dots y^{\alpha_m}\bar y^{\dot\alpha_1}\dots \bar y^{\dot\alpha_n}\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_m\dot\alpha_1\dots\dot\alpha_n}(x) \tag{5.16}$$

независимыми пространственно-временными полями есть самодуальные $\varphi_{\alpha_1\dots\alpha_m}$ и антисамодуальные $\varphi_{\dot\alpha_1\dots\dot\alpha_n}$ полевые напряженности всех спиральностей (в том числе, полуцелых). Остальные поля выражены как x-производные этих базисных полей. Классическим аналогом этой формулировки является механическая система с действием [115]

$$S_1^{HS} = \int d\tau\,\left(\lambda_\alpha\bar\lambda_{\dot\alpha}\dot x^{\dot\alpha\alpha} + \lambda_\alpha\dot y^\alpha + \bar\lambda_{\dot\alpha}\dot{\bar y}^{\dot\alpha}\right)\,, \tag{5.17}$$

где λ_α, $\bar\lambda_{\dot\alpha}$ – канонические импульсы для y^α, $\bar y^{\dot\alpha}$. Связи первого рода

$$T_{\alpha\dot\alpha} \equiv P_{\alpha\dot\alpha} - \lambda_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha} \approx 0 \tag{5.18}$$

воспроизводят после квантования развернутое уравнение (5.15).

5.1.2. $SU(3,2)$ и ее расширение

Другой способ получения мультиплетов ВС упоминался в Главе 3 и состоит в добавлении коммутирующих спинорных переменных ζ^α, $\bar\zeta^{\dot\alpha} = (\overline{\zeta^\alpha})$ к четырем пространственно-временным координатам $x^{\alpha\dot\beta}$. Отличительной особенностью данной модели является ее явная ковариантность относительно четного аналога $4D$ суперсимметрии и ее действие подобно действию для обычной безмассовой $N=1$ суперчастицы

$$S_2^{HS} = \int d\tau \left(p_{\alpha\dot\alpha}\omega^{\dot\alpha\alpha} - e p_{\alpha\dot\alpha} p^{\alpha\dot\alpha} \right), \tag{5.19}$$

где $\omega^{\dot\alpha\alpha}$ определена в (3.43). Множество гамильтоновых связей в системе включает в себя массовую связь $p_{\alpha\dot\alpha}p^{\alpha\dot\alpha} \approx 0$ и четные спинорные связи (3.46). Спинорные связи образуют алгебру скобок Пуассона (5.114), которая представляет собой классическую версию четной “алгебры суперсимметрии” ковариантных производных с коммутаторами вместо антикоммутаторов. Волновая функция частицы с четной “суперсимметрией”, полученная квантованием по методу Гупты-Блейлера, является четным аналогом кирального $N=1$ суперполя

$$\Psi(x_L, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{\alpha_1} \ldots \zeta^{\alpha_n} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_L), \tag{5.20}$$

зависящего от $x_L^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha} + i\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\alpha$, ζ^α и подчиняющегося уравнениям (3.51), благодаря которым поля в разложении (5.20) являются комплексными самодуальными полевыми напряженностями безмассовых частиц всех спиральностей. Как результат этого, спектр данной модели содержит все спиральности. При этом, ненулевые спиральности присутствуют по разу, тогда как скалярное поле является комплексным, в отличие от вещественного скалярного поля в поле ВС (5.16) развернутой формулировки.

Четные супертрансляции действия (5.19) имеют вид

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = i(\bar\epsilon^{\dot\alpha}\zeta^\alpha - \bar\zeta^{\dot\alpha}\epsilon^\alpha)\,, \quad \delta\zeta^\alpha = \epsilon^\alpha\,, \quad \delta\bar\zeta^{\dot\alpha} = \bar\epsilon^{\dot\alpha} \tag{5.21}$$

где ϵ^α – постоянный коммутирующий спинор. Остальные симметрии становятся прозрачными после перехода к твисторным переменным посредством бозонного аналога супертвисторных соотношений инцидентности [80]

$$\bar\mu^{\dot\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha + i\,\bar\zeta^{\dot\alpha}\xi\,, \qquad \xi = \zeta^\alpha\lambda_\alpha \quad \text{и} \quad \text{c.c.}\,, \tag{5.22}$$

где скаляр ξ является бозонной переменной. После подстановки твисторных преобразований (5.22) в действие (5.19), мы получаем твисторную формулировку

$$S = \int d\tau\,\Big(\lambda_\alpha\dot{\bar\mu}^\alpha + \bar\lambda_{\dot\alpha}\dot\mu^{\dot\alpha} + i(\dot{\bar\xi}\xi - \bar\xi\dot\xi) - \Lambda U\Big)\,. \tag{5.23}$$

Связь, добавленная в (5.23) с лагранжевым множителем Λ, имеет вид

$$U \equiv i(\bar\mu^\alpha\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}) - 2\bar\xi\xi \approx 0 \tag{5.24}$$

и следует из эрмитовости матрицы $x^{\alpha\dot\alpha}$.

Конечномерные симметрии модели (5.23) генерируются билинейными произведениями переменных $(\lambda_\alpha, \mu^{\dot\alpha}, \xi)$, сохраняющих связь (5.24):

- Генераторы $SU(2,2)$ преобразований (3.12), (3.13);
- Генераторы четных супертрансляций и четных суперконформных бустов

$$R_\alpha = -2i\,\bar\xi\lambda_\alpha\,, \qquad \bar R_{\dot\alpha} = 2i\,\xi\bar\lambda_{\dot\alpha}\,, \tag{5.25}$$

$$C^\alpha = -2i\,\xi\,\bar\mu^\alpha\,, \qquad \bar C^{\dot\alpha} = 2i\,\bar\xi\,\mu^{\dot\alpha}\,; \tag{5.26}$$

- Генератор $U(1)$ преобразований

$$A = \tfrac{i}{2}(\bar\mu^\alpha\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}) + 4\bar\xi\xi\,. \tag{5.27}$$

Генераторы (3.12), (3.13), (5.26), (5.27) образуют осцилляторное представление алгебры $SU(3,2)$. Мы приведем здесь лишь бозонные аналоги антикоммутаторов суперальгебры $SU(2,2|1)$:

$$[R_\alpha, \bar R_{\dot\alpha}]_{\text{P}} = -2iP_{\alpha\dot\alpha}\,, \qquad [C^\alpha, \bar C^{\dot\alpha}]_{\text{P}} = 2iK^{\dot\alpha\alpha}\,,$$

$$[R_\alpha, C^\beta]_{\rm P} = 2iM_\alpha{}^\beta + i(D - iA)\delta_\alpha{}^\beta\,, \qquad [\bar R_{\dot\alpha}, \bar C^{\dot\beta}]_{\rm P} = -2i\bar M_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} - i(D + iA)\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\,.$$

Переменные $(\lambda_\alpha, \mu^{\dot\alpha}, \xi)$ образуют $SU(3,2)$-спинор, который может быть назван $SU(3,2)$ твистором из-за интерпретации $SU(3,2)$ как расширенной конформной группы. Величина U в (5.24) является его инвариантной нормой. Отметим, что генераторы (5.25), (5.26) производят следующие бозонные суперсимметричные преобразования

$$\delta\lambda_\alpha = 2i\rho_\alpha\xi\,, \qquad \delta\mu^{\dot\alpha} = 2i\bar\epsilon^{\dot\alpha}\xi\,, \qquad \delta\xi = \epsilon^\alpha\lambda_\alpha - \bar\rho_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}\,, \tag{5.28}$$

где ϵ^α и ρ_α есть параметры четной суперсимметрии и четных суперконформных бустов.

Бесконечномерная алгебра симметрий высших спинов, основанная на расширении $SU(3,2)$, будет описана в разделе 5.3.4 после изучения соответствующих механических моделей.

5.2. Массивная частица высших спинов с бозонной суперсимметрией

В этом разделе мы рассмотрим модель массивной релятивистской частицы, расширенной $\mathcal{N}$ коммутирующими вейлевскими спинорами при $\mathcal{N}=1$ и $\mathcal{N}=2$ и инвариантной относительно бозонного аналога $D=4$ суперсимметрии. В отличие от супералгебра $\mathcal{N}=1$ суперсимметрии с шестью тензорными зарядами (4.43), (4.44), ее бозонный аналог

$$[R_a, R_b] = 2(\gamma^\mu\gamma_5 C)_{ab}P_\mu + 2C_{ab}Z^{(1)} + 2(\gamma_5 C)_{ab}Z^{(2)} \tag{5.29}$$

образован бозонными суперзарядами R_a, образующим майорановский спинор, и содержит скалярный $Z^{(1)}$ и псевдоскалярный $Z^{(2)}$ центральные заряды, которые связаны с массовым параметром рассматриваемых систем.

5.2.1. Массивная частица с $\mathcal{N}=1$ бозонной суперсимметрией.

Рассмотрим действие $S = \displaystyle\int d\tau\, \mathcal{L}$ со следующим лагранжианом

$$\mathcal{L} = -m(\omega_\mu\omega^\mu)^{1/2} - i(z\dot\zeta^\alpha\zeta_\alpha - \bar z\bar\zeta_{\dot\alpha}\dot{\bar\zeta}^{\dot\alpha}) \tag{5.30}$$

где инвариантная относительно (5.21) форма ω^μ определена в (3.43), постоянная m является массой частицы, тогда как z – произвольный комплексный параметр размерности массы. Выполняя подходящие фазовые преобразования $\zeta'_\alpha = e^{ia}\zeta_\alpha$, $\bar\zeta'_{\dot\alpha} = e^{-ia}\bar\zeta_{\dot\alpha}$, где $a = \frac{1}{2}\,arg\,z$, можно добиться вещественности параметра z.

Сохраняющиеся нётеровские спинорные заряды равны

$$R_\alpha \equiv \pi_\alpha - ip_{\alpha\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta} - iz\zeta_\alpha\,, \qquad \bar R_{\dot\alpha} \equiv \bar\pi_{\dot\alpha} + i\zeta^\beta p_{\beta\dot\alpha} + i\bar z\bar\zeta_{\dot\alpha} \tag{5.31}$$

где p_μ, π_α, $\bar\pi_{\dot\alpha}$ – канонические импульсы для x^μ, ζ^α, $\bar\zeta^{\dot\alpha}$, образуют алгебру

$$\{R_\alpha, \bar R_{\dot\beta}\} = -2ip_{\alpha\dot\beta}\,, \qquad \{R_\alpha, R_\beta\} = 2iz\epsilon_{\alpha\beta}\,, \quad \{\bar R_{\dot\alpha}, \bar R_{\dot\beta}\} = -2i\bar z\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \tag{5.32}$$

которая эквивалентна алгебре (5.29) при $Z = Z^{(1)} + iZ^{(2)} = z$. Кроме того, определения импульсов дают массовую связь $T \equiv p^2 - m^2 \approx 0$ и четыре спинорные связи

$$\nabla_\alpha \equiv \pi_\alpha + ip_{\alpha\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta} + iz\zeta_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar\nabla_{\dot\alpha} \equiv \bar\pi_{\dot\alpha} - i\zeta^\beta p_{\beta\dot\alpha} - i\bar z\bar\zeta_{\dot\alpha} \approx 0 \tag{5.33}$$

Канонический гамильтониан равен нулю $\mathcal{H} = \dot x^\mu p_\mu + \dot\zeta^\alpha\pi_\alpha + \bar\pi_{\dot\alpha}\dot{\bar\zeta}^{\dot\alpha} - \mathcal{L} = 0$ и полный гамильтониан является линейной комбинацией связей первого рода с лагранжевыми множителями. Связи (5.33) удовлетворяют следующим скобкам Пуассона

$$\{\nabla_\alpha, \bar\nabla_{\dot\beta}\} = 2ip_{\alpha\dot\beta}\,, \qquad \{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = -2iz\epsilon_{\alpha\beta}\,, \qquad \{\bar\nabla_{\dot\alpha}, \bar\nabla_{\dot\beta}\} = 2i\bar z\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,. \tag{5.34}$$

Скалярная связь $T \approx 0$ является связью первого рода, тогда как все спинорные связи (5.33) – второго рода: детерминант матрицы скобок Пуассона спинорных связей равен $16(p^2 + |z|^2)^2$.

Первичное квантование модели может быть выполнено посредством введения скобки Дирака для связей второго рода. Другим способом является квантование по методу Гупты-Блейлера. Такой метод подразумевает разделение связей второго рода на комплексно-сопряженные пары, в которых голоморфные и антиголоморфные части образуют отдельно подалгебры связей первого рода. Алгебра (5.34 связей (5.33) не удовлетворяет этому требованию. Однако, новые связи

$$\mathcal{D}_\alpha = \nabla_\alpha + \tfrac{b}{\bar z}p_{\alpha\dot\beta}\bar D^{\dot\beta}\,, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = \bar\nabla_{\dot\alpha} + \tfrac{\bar b}{z}D^\beta p_{\beta\dot\alpha}\,, \tag{5.35}$$

$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = (\overline{\mathcal{D}_\alpha})$, где константа b удовлетворяет уравнению $(b^2 - 2b)\frac{m^2}{|z|^2} - 1 = 0$ (то есть, при $b = (1 \pm \sqrt{1 + \frac{|z|^2}{m^2}}))$ подчиняются алгебре

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} = \tfrac{2i}{\bar z}\epsilon_{\alpha\beta}T\,, \qquad \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\} = -4b(1 + \tfrac{m^2}{|z|^2})ip_{\alpha\dot\beta} - \tfrac{2b^2 i}{|z|^2}p_{\alpha\dot\beta}T\,.$$

То есть, связи (5.35) пригодны для использования в квантовании по Гупте-Блейлеру. Следует отметить, что преобразование от связей $(\nabla_\alpha, \bar\nabla_{\dot\alpha})$ к связям $(\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha})$ является обратимым.

Благодаря массовой связи $T \approx 0$, волновая функция удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона. Поэтому, на массовой поверхности связи (5.35) принимают вид

$$\mathcal{D}_\alpha = \pi'_\alpha - 2b(1+\tfrac{m^2}{|z|^2})ip_{\alpha\dot\beta}\bar\lambda'^{\dot\beta} \approx 0\,, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} = \bar\pi'_{\dot\alpha} + 2b(1+\tfrac{m^2}{|z|^2})i\lambda'^{\beta}p_{\beta\dot\alpha} \approx 0\,, \quad (5.36)$$

где новые переменные введены посредством канонического преобразования

$$\pi'_\alpha \equiv \pi_\alpha + \tfrac{b}{\bar z}p_{\alpha\dot\beta}\bar\pi^{\dot\beta}\,, \qquad \bar\pi'_{\dot\alpha} \equiv \bar\pi_{\dot\alpha} + \tfrac{b}{z}\pi^{\beta}p_{\beta\dot\alpha}\,, \quad (5.37)$$

$$\zeta'^{\alpha} \equiv \tfrac{|z|^2}{|z|^2+b^2p^2}(\zeta^\alpha - \tfrac{b}{z}\bar\zeta_{\dot\beta}p^{\dot\beta\alpha})\,, \qquad \bar\zeta'^{\dot\alpha} \equiv \tfrac{|z|^2}{|z|^2+b^2p^2}(\bar\zeta^{\dot\alpha} - \tfrac{b}{\bar z}p^{\dot\alpha\beta}\zeta_\beta)\,. \quad (5.38)$$

В реализации $\pi'_\alpha = -i\partial/\partial\zeta'^\alpha$, $\bar\pi'_{\dot\alpha} = -i\partial/\partial\bar\zeta'^{\dot\alpha}$ волновая функция $\Psi = \Psi(p_\mu, \zeta'^\alpha, \bar\zeta'^{\dot\alpha})$, удовлетворяющая $\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Psi = 0$, то есть

$$(-\partial/\partial\bar\zeta'^{\dot\alpha} + 2b(1 + \tfrac{m^2}{|z|^2})\zeta'^{\beta}p_{\beta\dot\alpha})\Psi = 0\,, \quad (5.39)$$

имеет вид

$$\Psi(p_\mu, \zeta'^\alpha, \bar\zeta'^{\dot\alpha}) = e^{2b(1+\frac{m^2}{|z|^2})\zeta'^\beta p_{\beta\dot\alpha}\bar\zeta'^{\dot\alpha}}\,\tilde\Psi(p_\mu, \zeta'^\alpha)\,, \quad (5.40)$$

где поле $\tilde\Psi(p_\mu, \zeta'^\alpha)$ зависит только от вейлевского спинора ζ'^α и является бозонным аналогом $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ кирального суперполя.

Благодаря бозонной природе спинора ζ'^α, в разложении поля $\tilde\Psi(p_\mu, \zeta'^\alpha)$ присутствует бесконечное число полей $\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(p) = \psi_{(\alpha_1\cdots\alpha_n)}(p)$, $n = 0, 1, \ldots, \infty$. Массовое условие после выполнения преобразования Фурье приводит к уравнению Клейна-Гордона ($\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu$)

$$(\Box + m^2)\Psi(x; \zeta, \bar\zeta) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\Box + m^2)\psi_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x) = 0\,. \quad (5.41)$$

Таким образом, при квантовании массивной частицы с $\mathcal{N} = 1$ бозонной суперсимметрией мы не получаем в спектре уравнений Дирака для компонентных полей. Эти необходимые уравнения возникают в случае безмассовой частицы с $\mathcal{N}=1$ бозонной суперсимметрией (см. Раздел 5.1.2) и в массивном случае с $\mathcal{N}=2$ бозонной суперсимметрией, который мы рассмотрим сейчас.

5.2.2. Массивная частица высших спинов с $\mathcal{N}=2$ бозонной суперсимметрией.

В этом случае будем использовать два коммутирующих вейлевских спинора ζ_i^α, $\bar\zeta_i^{\dot\alpha}=(\overline{\zeta_i^\alpha})$ $(i=1,2)$. Естественным обобщением лагранжиана (5.30) является

$$\mathcal{L}=-m(\omega_\mu\omega^\mu)^{1/2}-i(z_{ij}\dot\zeta_i^\alpha\zeta_{\alpha j}-\bar z_{ij}\bar\zeta_{\dot\alpha j}\dot{\bar\zeta}_i^{\dot\alpha})\,, \qquad (5.42)$$

где постоянная матрица z_{ij} является симметричной, $z_{ij}=z_{ji}$. Наиболее общими $\mathcal{N}=2$ ω-формами есть

$$\omega^\mu=\dot x^\mu-i\kappa_{ij}(\dot\zeta_i^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\zeta_j^{\dot\beta}-\zeta_j^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\dot{\bar\zeta}_i^{\dot\beta})\,, \qquad (5.43)$$

где $\kappa_{ij}=\kappa_{ji}$ – 2×2 эрмитова матрица. Учитывая возможные переопределения спиноров ζ_i^α, мы можем взять без потери общности $\kappa_{ij}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\kappa\end{pmatrix}$, где κ является вещественой ненулевой константой.

Выражения для канонических импульсов производят массовую связь $T\equiv p^2-m^2\approx0$ и спинорные связи

$$\nabla_{\alpha i}\equiv\pi_{\alpha i}+i\kappa_{ij}p_{\alpha\dot\beta}\bar\zeta_j^{\dot\beta}+iz_{ij}\zeta_{\alpha j}\approx0\,,\quad \bar\nabla_{\dot\alpha i}\equiv\bar\pi_{\dot\alpha i}-i\kappa_{ij}\zeta_j^\beta p_{\beta\dot\alpha}-i\bar z_{ij}\bar\zeta_{\dot\alpha j}\approx0\,, \quad (5.44)$$

ненулевые скобки Пуассона которых

$$\{\nabla_{\alpha i},\bar\nabla_{\dot\beta j}\}=2i\kappa_{ij}p_{\alpha\dot\beta}\,,\quad \{\nabla_{\alpha i},\nabla_{\beta j}\}=-2iz_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}\,,\quad \{\bar\nabla_{\dot\alpha i},\bar\nabla_{\dot\beta j}\}=2i\bar z_{ij}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,. \qquad (5.45)$$

Связь $T\approx0$ является связью первого рода. Детерминант матрицы скобок Пуассона спинорных связей (5.44) равен $\sim[\det(\hat z\hat{\bar z}+p^2\hat\kappa\hat{\bar z}^{-1}\hat\kappa\hat{\bar z})]^2$, где 'шляпка' обозначает соответствующие матрицы, то есть $\hat z=(z_{ij})$, $\hat{\bar z}=(\bar z_{ij})$ и $\hat\kappa=(\kappa_{ij})$. Имеет место два случая:

i) В случае диагональной матрицы $\hat z=(z_{ij})$ имеет место $\det(\hat z\hat{\bar z}+p^2\hat\kappa\hat{\bar z}^{-1}\hat\kappa\hat{\bar z})=(|z_1|^2+p^2)(|z_2|^2+p^2\kappa^2)\neq0$ при произвольных κ, z_1,z_2 и все связи (5.44) второго рода.

ii) В случае антидиагональной матрицы $(z_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix}$ получаем $\det(\hat{z}\hat{\bar{z}} + p^2\hat{\kappa}\hat{\bar{z}}^{-1}\hat{\kappa}\hat{\bar{z}}) = (|z|^2 + p^2\kappa)^2$. То есть, при $\kappa = -\frac{|z|^2}{m^2} < 0$ в модели присутствуют связи первого рода. Легко показать, что при $z = m$, то есть, когда $\kappa = -1$, унитарный тензор κ_{ij} подразумевает инвариантность формы ω_μ (смотрите (5.43)) относительно $U(1,1)$ симметрии. Однако присутствие центрального заряда редуцирует эту симметрию до группы инвариантности $O(1,1) = U(1,1) \cap O(2;c)$ и только в этом случае в модели (5.42) присутствуют связи первого рода. Именно этот физический выбор $z = m$, $\kappa = -1$ мы будем рассматривать ниже.

Вводя четыре-компонентный дираковский спинор $\psi_a = \begin{pmatrix} \zeta_{1\alpha} \\ \bar{\zeta}_2^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$, $\bar{\psi}^a = (\zeta_2^\alpha, \bar{\zeta}_{1\dot{\alpha}})$, $a = 1,2,3,4$, мы получаем, что лагранжиан (5.42) принимает следующий простой вид

$$\mathcal{L} = -m(\dot{\omega}_\mu\dot{\omega}^\mu)^{1/2} - im(\dot{\bar{\psi}}\psi - \bar{\psi}\dot{\psi})\,, \tag{5.46}$$

где

$$\dot{\omega}^\mu = \dot{x}^\mu + i(\dot{\bar{\psi}}\gamma^\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\dot{\psi})\,. \tag{5.47}$$

Связи (5.44) при $z = m$ $(\kappa = -1)$ записываются в дираковских обозначениях в виде

$$\nabla^a \equiv \pi^a + i\bar{\psi}^b(\hat{p} - m)_b{}^a \approx 0\,, \qquad \bar{\nabla}_a \equiv \bar{\pi}_a - i(\hat{p} - m)_a{}^b\psi_b \approx 0\,. \tag{5.48}$$

Здесь π^a и $\bar{\pi}_a$ являются сопряженными импульсами для ψ_a и $\bar{\psi}^a$. Также мы используем здесь обозначения $\hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$. Скобки Пуассона связей (5.48) равны

$$\{\bar{\nabla}_a, \nabla^b\} = -2i(\hat{p} - m)_a{}^b\,, \qquad \{\nabla^a, \nabla^b\} = 0\,, \qquad \{\bar{\nabla}_a, \bar{\nabla}_b\} = 0\,, \tag{5.49}$$

поэтому массовая связь и половина спинорных связей (5.48) являются связями первого рода.

Разделение спинорных связей по родам в (5.48) осуществляется проекторами $\mathcal{P}_\pm \equiv \frac{1}{2m}(m \pm \hat{p})$, $1 = (\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-)$, для которых на массовой поверхности $p^2 = m^2$ выполняется $\mathcal{P}_\pm\mathcal{P}_\pm = \mathcal{P}_\pm$, $\mathcal{P}_+\mathcal{P}_- = 0$. Восемь вещественных спинорных связей (5.48) эквивалентны следующим множествам приводимых связей

$$F^a = \nabla^b(\hat{p} + m)_b{}^a\,, \qquad \bar{F}_a = (\hat{p} + m)_a{}^b\bar{\nabla}_b\,; \tag{5.50}$$

$$G^a = \nabla^b(\hat{p} - m)_b{}^a \,, \qquad \bar{G}_a = (\hat{p} - m)_a{}^b \bar{\nabla}_b \,. \tag{5.51}$$

Вследствие соотношений

$$F^b(\hat{p} - m)_b{}^a = 0 \,, \qquad (\hat{p} - m)_a{}^b \bar{F}_b = 0 \,;$$

$$G^b(\hat{p} + m)_b{}^a = 0 \,, \qquad (\hat{p} + m)_a{}^b \bar{D}_b = 0 \,,$$

имеющих место на массовой поверхности, наборы связей $(F^a, \bar{F}_a)$ и $(G^a, \bar{G}_a)$ также содержат по четыре независимых вещественных связей. Обратные выражения связей (5.48) через связи (5.50), (5.51) имеют вид

$$\nabla^a = \tfrac{1}{2m}(F^a - G^a) \,, \qquad \bar{\nabla}_a = \tfrac{1}{2m}(\bar{F}_a - \bar{G}_a) \,.$$

Связи (5.50), (5.51) удовлетворяют следующей алгебре скобок Пуассона

$$\{\bar{F}_a, F^b\} = -2i(\hat{p} + m)_a{}^b T \,, \qquad \{F^a, F^b\} = \{\bar{F}_a, \bar{F}_b\} = 0 \,,$$

$$\{\bar{F}_a, G^b\} = \{\bar{G}_a, F^b\} = -2i(\hat{p} - m)_a{}^b T \,, \qquad \{\bar{F}_a, \bar{G}_b\} = \{F^a, G^b\} = 0 \,,$$

$$\{\bar{G}_a, G^b\} = -8im^2(\hat{p}+m)_a{}^b - 2i[2m\delta^b_a + (\hat{p}+m)_a{}^b]T \,, \qquad \{G^a, G^b\} = \{\bar{G}_a, \bar{G}_b\} = 0 \,.$$

Из восьми спинорных связей, присутствующих в (5.48), четыре независимые связи в $(F^a, \bar{F}_a)$ являются связями первого рода, тогда как четыре независимые связи в $(G^a, \bar{G}_a)$ – второго рода.

Выполним квантование методом Гупты-Блейлера путем наложения на волновую функцию всех связей первого рода (T, F^a, $\bar{F}_a$) и половины связей второго рода (G^a или $\bar{G}_b$). Мы получаем два варианта:

– бозонное киральное квантование со связями

$$T|\Psi\rangle = 0 \,, \qquad F^a|\Psi\rangle = 0 \,, \qquad \bar{F}_a|\Psi\rangle = 0 \,, \qquad \bar{G}_a|\Psi\rangle = 0 \,; \tag{5.52}$$

– бозонное антикиральное квантование со связями

$$T|\Psi\rangle = 0 \,, \qquad F^a|\Psi\rangle = 0 \,, \qquad \bar{F}_a|\Psi\rangle = 0 \,, \qquad G^a|\Psi\rangle = 0 \,. \tag{5.53}$$

Приводимые связи $\bar{F}_a$ и $\bar{G}_a$ эквивалентны первичным связям $\bar{\nabla}_a$; подобно, связи F^a и G^a эквивалентны ∇^a. Следовательно, мы можем представить волновые уравнения (5.52), (5.53) эквивалентным способом в виде

– бозонное киральное квантование:

$$T|\Psi\rangle = 0\,, \qquad \bar{\nabla}_a|\Psi\rangle = 0\,, \qquad F^a|\Psi\rangle = 0 \tag{5.54}$$

– бозонное антикиральное квантование:

$$T|\Psi\rangle = 0\,, \qquad \nabla^a|\Psi\rangle = 0\,, \qquad \bar{F}_a|\Psi\rangle = 0\,. \tag{5.55}$$

Рассмотрим случай (5.54). При реализации $\pi^a = -i\partial/\partial\psi_a$, $\bar{\pi}_a = -i\partial/\partial\bar{\psi}^a$ и импульсном представлении для волновой функции $\Psi(p,\psi,\bar{\psi})$ соотношения (5.54) принимают вид

$$\bar{\nabla}_a\Psi = -i[\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}^a} + (\hat{p}-m)_a{}^b\psi_b]\Psi = 0\,, \tag{5.56}$$

$$F^a\Psi = -i\frac{\partial}{\partial\psi_b}(\hat{p}+m)_b{}^a\Psi = 0\,, \tag{5.57}$$

$$T\Psi = (p^2+m^2)\Psi = 0\,. \tag{5.58}$$

Уравнение (5.56) имеет следующее общее решение

$$\Psi(p,\psi,\bar{\psi}) = e^{-\bar{\psi}(\hat{p}-m)\psi}\tilde{\Psi}(p,\psi)\,, \tag{5.59}$$

где волновая функция $\tilde{\Psi}(p,\psi)$ зависит только от ψ и имеет разложение

$$\tilde{\Psi}(p,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_{a_1}\cdots\psi_{a_n}\phi^{a_1\cdots a_n}(p)\,. \tag{5.60}$$

Вследствие коммутативности спинора ψ_a, компонентные поля $\phi^{a_1\cdots a_n}(p)$ полностью симметричны $\phi^{a_1\cdots a_n}(p) = \phi^{(a_1\cdots a_n)}(p)$. Уравнения (5.57) приводят к уравнениям Дирака для этих полей

$$(\hat{p}+m)_{a_1}{}^b\phi^{a_1a_2\cdots a_n}(p) = 0\,. \tag{5.61}$$

Таким образом, мультиспинорные поля $\phi^{a_1\cdots a_n}(p)$ являются полями Баргмана-Вигнера, описывающими частицы спина $n/2$.

5.3. Мастер-частица высших спинов

В этом разделе мы представим модель безмассовой частицы высших спинов, которая обладает только связями первого рода и играет роль “мастер-системы” как для модели частицы (5.17), соответствующей развернутой формулировке, так и для модели (5.19) с явной четной “суперсимметрией”.

5.3.1. Действие и связи

Мастер-система включает в себя переменные обеих систем (5.17), (5.19), а также дополнительный комплексный скаляр η, и описывается действием

$$\begin{aligned} S^{HS}_{mast} \;=\; \int d\tau \Big[& \lambda_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha} \omega^{\dot\alpha\alpha} + \lambda_\alpha \dot y^\alpha + \bar\lambda_{\dot\alpha} \dot{\bar y}^{\dot\alpha} + i(\eta \dot{\bar\eta} - \dot\eta \bar\eta) \\ & -2i\bar\eta \dot\zeta^\alpha \lambda_\alpha + 2i\eta \bar\lambda_{\dot\alpha} \dot{\bar\zeta}^{\dot\alpha} - l\,(\mathcal{N} - c) \Big]. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Действие инвариантно относительно локальных фазовых преобразований присутствующих комплексных полей, кроме ζ, $\bar\zeta$. Эти фазовые преобразования генерируются $U(1)$ током

$$\mathcal{N} \equiv i\,(y^\alpha \lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha} \bar y^{\dot\alpha}) - 2\eta\bar\eta\,. \tag{5.63}$$

Поле l играет роль лагранжевого множителя для связи

$$i\,(y^\alpha \lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha} \bar y^{\dot\alpha}) - 2\eta\bar\eta - c \approx 0\,, \tag{5.64}$$

являющейся ВС-обобщением “спиновой” связи (3.47) безмассовой частицы фиксированной спиральности. Константа c – напряженность $1D$ члена “Файе-Илиопоулоса”.

Помимо (5.64), действие (5.62) приводит также к первичным связям, среди которых – массовая связь (5.18) и спинорные связи

$$\mathcal{D}_\alpha \equiv \nabla_\alpha + 2i\bar\eta\lambda_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha} \equiv \bar\nabla_{\dot\alpha} - 2i\eta\bar\lambda_{\dot\alpha} \approx 0\,, \tag{5.65}$$

где ∇_α and $\bar\nabla_{\dot\alpha}$ определены в (3.46). Связи второго рода

$$p_\eta + i\bar\eta \approx 0\,, \quad \bar p_\eta - i\eta \approx 0\,, \tag{5.66}$$

следующие также из (5.62), можно рассматривать в сильном смысле, вводя скобки Дирака для них. Тогда комплексный скаляр η и его комплексно сопряженный образуют каноническую пару

$$[\eta,\bar\eta]_{{}_D}=\tfrac{i}{2}\,. \qquad (5.67)$$

Канонические скобки для остальных переменных не изменяются:

$$[x^{\dot\alpha\alpha},P_{\beta\dot\beta}]_{{}_D}=\delta^\alpha_\beta\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\,,\qquad [\zeta^\alpha,\pi_\beta]_{{}_D}=\delta^\alpha_\beta\,,\qquad [y^\alpha,\lambda_\beta]_{{}_D}=\delta^\alpha_\beta \qquad (5.68)$$

и к.с. Единственными ненулевыми скобками Пуассона связей (5.64)-(5.65) являются

$$[\mathcal{D}_\alpha,\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}]_{{}_D}=2i\,T_{\alpha\dot\alpha}\,. \qquad (5.69)$$

Следовательно, все связи (5.64)-(5.65) первого рода и процедура квантования для них прямолинейная.

Мастер-система (5.62) калибровочно-эквивалентна системам частиц ВС (5.19) и (5.17).

Эквивалентность систем (5.19) и (5.62) можно доказать с помощью метода коверсии связей, предложенного впервые в [89] для случая обычной суперчастицы. Чтобы преобразовать две связи второго рода, содержащиеся в спинорных связях (3.46), в связи первого рода введем две дополнительные степени свободы, которые несет комплексное скалярное поле η. Введем также коммутирующий вейлевский спинор λ_α для обеспечения Лоренц-ковариантности новых спинорных связей (5.65). Замыкание алгебры новых спинорных связей (5.69) дает связь (5.18), разрешающую четыре-импульс через произведение спиноров. Это разрешение определяется с точностью до произвольного фазового преобразования λ_α $\bar\lambda_{\dot\alpha}$. Чтобы обеспечить эту калибровочную $U(1)$-инвариантноств в полном модифицированном действии, мы вынуждены добавить связь (5.64). Эвристическим аргументом этой эквивалентности является одинаковое число $n_{ph}=\mathbf{8}$ физических степеней свободы в обоих моделях (5.19) и (5.62).

Модель частицы (5.17) следует из мастер-модели (5.62) после частичной фиксации калибровки. Спинорные связи (5.65) и условия фиксации калибровки $\zeta^\alpha\approx 0$ вместе с их комплексно-сопряженными могут быть использованы для исключения переменных ζ^α, π_α и к.с. Тогда связь (5.64) может быть использована для откалибрования переменной η. Связь (5.64) линейна по $\rho \equiv \eta\bar{\eta}$ и генерирует произвольные локальные преобразования переменной $\varphi - i\ln(\eta/\bar{\eta})$. Эта связь и фиксация калибровки $\chi \equiv \varphi - const \approx 0$ исключают переменные ρ, φ в пользу переменных λ_α, y^α, $\bar{\lambda}_{\dot\alpha}$, $\bar{y}^{\dot\alpha}$. Так как условие фиксации калибровки содержит только φ, скобки для остальных переменных не изменяются. Как результат, мы получаем систему (5.17).

5.3.2. Первично-квантованная теория

В представлении, где операторы $\hat{P}_{\alpha\dot\alpha}$, $\hat{\pi}_\alpha$, $\hat{\bar{\pi}}_{\dot\alpha}$, $\hat{\lambda}_\alpha$, $\hat{\bar{\lambda}}_{\dot\alpha}$ и $\hat{\bar{\eta}}$ реализованы как дифференциальные операторы, уравнения на волновую функцию $F^{(q)}(x,\zeta,\bar{\zeta},y,\bar{y},\eta)$ имеют вид (см. (5.15))

$$\left(\partial_{\alpha\dot\beta} + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\dot\beta}}\right)F^{(q)} = 0\,, \tag{5.70}$$

$$\text{(a)}\quad \left(\nabla_\alpha + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)F^{(q)} = 0\,, \qquad \text{(b)}\quad \left(\bar{\nabla}_{\dot\alpha} - 2\eta\frac{\partial}{\partial\bar{y}^{\dot\alpha}}\right)F^{(q)} = 0\,, \tag{5.71}$$

$$\left(y^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \bar{y}^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{y}^{\dot\alpha}} - \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)F^{(q)} = q\,F^{(q)}\,. \tag{5.72}$$

Здесь, операторы $\nabla_\alpha = -i(\partial_\alpha + i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar{\zeta}^{\dot\alpha})$ и $\bar{\nabla}_{\dot\alpha} = -i(\bar{\partial}_{\dot\alpha} - i\zeta^\alpha\partial_{\alpha\dot\alpha})$ являются квантовыми аналогами “ковариантных импульсов” (3.46).

Внешний $U(1)$-заряд q, определенный в (5.72), является квантовым аналогом “классической” константы c, присутствующей в связи (5.64), но теперь учитывающей неопределенность в упорядочении операторов. Уравнение (5.72) подразумевает $U(1)$-ковариантность волновой функции

$$F^{(q)}(x,\zeta,\bar{\zeta},e^{i\varphi}y,e^{-i\varphi}\bar{y},e^{-i\varphi}\eta) = e^{qi\varphi}F^{(q)}(x,\zeta,\bar{\zeta},y,\bar{y},\eta)\,. \tag{5.73}$$

Требование однозначности функции $F^{(q)}$ ограничивает q целыми значениями. Важно отметить, что эта $U(1)$-ковариантность подразумевает, что любой моном заряженных координат в разложении волновой функции $F^{(q)}$ имеет тот же фиксированный заряд q. В этом отношении, q напоминает “гармонический $U(1)$-заряд” в подходе гармонического пространства [12, 67], а оператор в (5.72) является аналогом $U(1)$-оператора D^0 этого подхода.

Хотя система уравнений (5.70)-(5.72) содержит развернутое векторное уравнение Васильева (5.70), последнее следует из спинорных уравнений (5.71) как условие интегрируемости. Следовательно, основными независимыми уравнениями в системе (5.70)-(5.72) есть бозонные спинорные уравнения (5.71) и $U(1)$-условие (5.72).

Решим уравнения (5.71)-(5.72). В переменных ζ^α, $\bar\zeta^{\dot\alpha}$, y^α, η и

$$x_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha} + i\,\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\alpha\,, \qquad \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha} = \bar y^{\dot\alpha} + 2i\,\eta\,\bar\zeta^{\dot\alpha}\,. \tag{5.74}$$

уравнения (5.71)-(5.72) принимают вид

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \left[-i\left(\partial_\alpha + i\dfrac{\partial}{\partial\eta}\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) + 2\bar\zeta^{\dot\alpha}\left(\partial_{\scriptscriptstyle L\,\alpha\dot\alpha} + i\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\dfrac{\partial}{\partial \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha}}\right)\right]F^{(q)} = 0\,, \\ \text{(b)} & \bar\partial_{\dot\alpha}F^{(q)} = 0\,, \end{array} \tag{5.75}$$

$$\left(y^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha}} - \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)F^{(q)} = q\,F^{(q)}\,. \tag{5.76}$$

Уравнение (5.75b) является условием бозонной киральности и приводит к тому, что $F^{(q)}$ не зависит от $\bar\zeta^{\dot\alpha}$ в новых переменных, $F^{(q)} = F^{(q)}(x_{\scriptscriptstyle L}, \zeta, y, \bar y_{\scriptscriptstyle L}, \eta)$. Тогда, уравнение (5.75a) равнозначно уравнениям

$$\left(\partial_\alpha + i\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)F^{(q)} = 0\,, \tag{5.77}$$

$$\left(\partial_{\scriptscriptstyle L\,\alpha\dot\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha}}\right)F^{(q)} = 0\,. \tag{5.78}$$

Решение уравнений (5.76), (5.77) и (5.78) может быть найдено несколькими эквивалентными способами. В одном из них, по аналогии с (5.20) мы предполагаем полиномиальную зависимость волновой функции от ζ^α

$$F^{(q)}(x_{\scriptscriptstyle L}, \zeta, y, \bar y_{\scriptscriptstyle L}, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{\alpha_1}\ldots\zeta^{\alpha_n}\Phi^{(q)}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_{\scriptscriptstyle L}, y, \bar y_{\scriptscriptstyle L}, \eta)\,. \tag{5.79}$$

Уравнение (5.77) выражает все коэффициенты в этом разложении как производные первого коэффициента $\Phi^{(q)}(x_{\scriptscriptstyle L}, y, \bar y_{\scriptscriptstyle L}, \eta)$, удовлетворяющего

$$\text{(a)}\ \left(\partial_{\scriptscriptstyle L\,\alpha\dot\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha}}\right)\Phi^{(q)} = 0\,, \quad \text{(b)}\ \left(y^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar y_{\scriptscriptstyle L}^{\dot\alpha}} - \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Phi^{(q)} = q\,\Phi^{(q)}\,. \tag{5.80}$$

Подобно (5.79), считаем, что $\Phi^{(q)}(x_L, y, \bar{y}_L, \eta)$ имеет несингулярное полиномиальное разложение по дополнительной координате. Тогда уравнение (5.80b) подразумевает

$$\Phi^{(q)}(x_L, y, \bar{y}_L, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \varphi^{(q+k)}(x_L, y, \bar{y}_L)\,, \tag{5.81}$$

$$\left(y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} - \bar{y}_L^{\dot\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_L^{\dot\alpha}} \right) \varphi^{(q+k)} = (q+k)\, \varphi^{(q+k)}\,. \tag{5.82}$$

Редуцированное $U(1)$-условие (5.82) фиксирует зависимость функций $\varphi^{(q+k)}$ от $y, \bar{y}$ следующего вида

$$\varphi^{(q+k)} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^{\alpha_1} \ldots y^{\alpha_{q+k+n}} \bar{y}_L^{\dot\beta_1} \ldots \bar{y}_L^{\dot\beta_n}\, \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q+k+n} \dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}(x_L)\,, & (q+k) \geq 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^{\alpha_1} \ldots y^{\alpha_n} \bar{y}_L^{\dot\beta_1} \ldots \bar{y}_L^{\dot\beta_{|q+k|+n}}\, \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \dot\beta_1 \ldots \dot\beta_{|q+k|+n}}(x_L)\,, & (q+k) < 0. \end{cases}$$

Найем ограничения на поля $\varphi^{(q+k)}$, следующие из (5.80a).

Легко видеть, что при $q = 0$ уравнение (5.80a) выражает все поля $\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k+n} \dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}$ с $n > 0$ в $\varphi^{(k)}$ как x-производные низшей компоненты – самодуального поля $\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$. Последнее удовлетворяет уравнениям Дирака $\partial^{\dot\beta \alpha_1} \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0$ и Клейна-Гордона $\partial^{\dot\alpha \alpha} \partial_{\alpha \dot\alpha}\, \phi = 0$. Таким образом, в случае $q = 0$ пространство физических состояний модели состоит из комплексных самодуальных полевых напряженностей $\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, безмассовых частиц всех целых и полуцелых спиральностей, составляющих стандартный мультиплет ВС из [115].

При $q > 0$ уравнение (5.80a) выражает все поля $\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q+k+n} \dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}$ с $n > 0$ в виде $\partial_{\alpha\dot\alpha}$-производных самодуальных полей $\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q+k}}$ и генерирует уравнения Дирака $\partial^{\dot\beta \alpha_1} \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_{q+k}} = 0$ для независимых полей. Таким образом, в случае $q > 0$ пространство физических состояний модели состоит из самодуальных полевых напряженностей для безмассовых частиц со спиральностями $\frac{q}{2}, \frac{q}{2} + \frac{1}{2}, \frac{q}{2} + 1, \ldots$.

При $q < 0$ разложение (5.81) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(q)}(x_L, y, \bar{y}_L, \eta) \;=\; & \eta^{|q|} \tilde{\Phi}^{(0)}(x_L, y, \bar{y}_L, \eta) + \\ & + \sum_{k=1}^{|q|} \sum_{m=0}^{\infty} \eta^{|q|-k}\, y^{\alpha_1} \ldots y^{\alpha_m} \bar{y}_L^{\dot\beta_1} \ldots \bar{y}_L^{\dot\beta_{m+k}}\, \phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_m \dot\beta_1 \ldots \dot\beta_{m+k}}(x_L)\,. \end{aligned} \tag{5.83}$$

Таким образом, мы имеем дело с полем ВС $\tilde{\Phi}^{(0)}$, имеющим тот же состав спиральностей, как и для $q = 0$ мультиплета, плюс дополнительные члены с полями $\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_m \dot\beta_1 \ldots \dot\beta_{m+k}}$. Множество независимых полей в этом разложении состоит из самодуальных полей $\phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, присутствующих в поле $\Phi^{(0)}$, и антисамодуальных полей $\phi_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}$, $k = 1, \ldots, |q|$. Уравнение (5.80a) выражает все другие пространственно-временные поля в виде производных этих базисных полей и дает уравнения Дирака и Клейна-Гордона для последних. Таким образом, при $q < 0$ физические поля в спектре описывают безмассовые частицы со всеми неотрицательными спиральностями и конечное число безмассовых состояний с отрицательными спиральностями $-\frac{1}{2}, -1, \ldots, -\frac{|q|}{2}$. Естественно этот мультиплет назвать мультиплетом “с переворотом спиральности”.

В [177] представлен другой способ решения уравнений (5.76), (5.77) и (5.78), который производит поля высших спинов с явной бозонной суперсимметрией.

5.3.3. Твисторная формулировка мастер-частицы ВС

Твисторная формулировка мастер-частицы ВС (5.62) [177, 180] является обобщением на высшие спины хорошо известной твисторной формулировки безмассовой частицы фиксированной спиральности. Данная формулировка описывается двумя вейлевскими спинорами λ_α, $\bar\mu^{\dot\alpha}$ и комплексным скаляром ξ и определяется следующими твисторными преобразованиями:

$$\bar\mu^{\alpha} = y^{\alpha} + \bar\lambda_{\dot\beta}(x^{\dot\beta\alpha} - i\bar\zeta^{\dot\beta}\zeta^{\alpha}) - 2i\,\bar\eta\,\zeta^{\alpha}\,, \qquad \xi = \eta + \zeta^{\beta}\lambda_{\beta} \tag{5.84}$$

и к.с. Спиноры λ_α, $\mu^{\dot\alpha}$ являются компонентами твистора ($SU(2,2)$ спинора) $Z_a = (\lambda_\alpha, \mu^{\dot\alpha})$, $a = 1, ..., 4\,$.

С точностью до поверхностного члена, действие (5.62) принимает в твисторных переменных следующий вид

$$S^{HS-tw.} = \int d\tau \left[\lambda_\alpha \dot{\bar\mu}^{\alpha} + \bar\lambda_{\dot\alpha}\dot\mu^{\dot\alpha} + i(\xi\dot{\bar\xi} - \dot\xi\bar\xi) - l\ (U - c)\right]. \tag{5.85}$$

Здесь, $U(1)$-связь

$$U - c \equiv i(\bar\mu^{\alpha}\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}) - 2\xi\bar\xi - c \approx 0 \tag{5.86}$$

является условием (5.64), записанным в твисторных переменных (5.84).

Твисторная формулировка (5.85) частицы BC воспроизводит твисторную частицу BC, рассмотренную в [96, 97]. Вследствие связи (5.86), мы можем откалибровать переменные ξ, $\bar\xi$ как делалось раньше. Как результат этого, мы получим систему, описываемую действием (5.12). Твисторная система (5.12) может быть получена также прямо из системы (5.17) посредством следующих стандартных твисторных преобразований $\bar\mu^\alpha = y^\alpha + \bar\lambda_{\dot\beta} x^{\dot\beta\alpha}$, $\mu^{\dot\alpha} = \bar y^{\dot\alpha} + x^{\dot\alpha\beta}\lambda_\beta$. Это обеспечивает дополнительное доказательство эквивалентности систем (5.17) и (5.62).

Квантование в твисторной формулировке (5.85) порождает тот же спектр, что был получен ранее. В "твисторном представлении", когда λ_α, $\mu^{\dot\alpha}$ и ξ являются диагональными, твисторная волновая функция $G^{(q-2)}(\lambda,\mu,\xi)$ удовлетворяет квантовому аналогу связей (5.86)

$$\left(-\lambda_\alpha\frac{\partial}{\partial\lambda_\alpha} - \mu^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\mu^{\dot\alpha}} - \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) G^{(q-2)} = (q-2)\, G^{(q-2)}\,. \tag{5.87}$$

Волновая функция в пространственно-временном описании получается по аналогии со стандартным твисторным подходом [78]. Мы подставляем условия инцидентности (5.84) для переменных $\mu^{\dot\alpha}$ и ξ в твисторную волновую функцию и выполняем следующее интегральное преобразование

$$F^{(q)}(x_{\scriptscriptstyle L},\zeta,y,\bar y_{\scriptscriptstyle L},\eta) = \int d^2\lambda\, e^{iy^\alpha\lambda_\alpha} G^{(q-2)}(\lambda_\alpha, \bar y^{\dot\alpha}_{\scriptscriptstyle L} + x^{\dot\alpha\beta}_{\scriptscriptstyle L}\lambda_\beta, \eta + \zeta^\beta\lambda_\beta)\,. \tag{5.88}$$

Отметим, что подинтегральное выражение в (5.88) содержит Фурье-экспоненту, в отличие от интегрального преобразования Пенроуза [78].

Используя функциональную зависимость твисторного поля $G^{(q-2)}$, легко проверить, что поле $F^{(q)}$, определенное в (5.88), автоматически удовлетворяет уравнениям (5.76), (5.77) и (5.78). Таким образом, твисторная формулировка разрешает уравнения (5.76), (5.77) и (5.78) в терминах неограниченного "препотенциала" $G^{(q-2)}(\lambda,\mu,\xi)$.

5.3.4. Симметрии мультиплетов BC

Анализ симметрий "мастер-модели" является более простым в твисторной формулировке, когда различные мультиплеты, обладающие

$U(1)$-зарядом q, определяются единственным уравнением (5.87). Мы можем найти симметрии следуя методам, используемым в [115]. Поля ВС зависят от твисторных переменных $Z_a = (\lambda_\alpha, \mu^{\dot\alpha})$, $a = 1, ..., 4$, и комплексного скаляра ξ. Генераторы симметрии являются произведениями мономов Z_a, ξ произвольной степени и их производных $\frac{\partial}{\partial Z_a}$, $\frac{\partial}{\partial \xi}$ и сохраняющими уравнение (5.87), записываемое в виде

$$\left(\hat U - \hat q\right) G^{(\hat q)} = 0\,, \qquad \hat U \equiv -Z_a \frac{\partial}{\partial Z_a} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi}\,, \qquad \hat q \equiv q - 2\,. \tag{5.89}$$

Рассмотрим генераторы

$$T^{\{\mathcal N\}}(Z,\xi) \equiv T^{\langle N;K\rangle}(Z,\xi) = T^{\langle N\rangle}(Z)\cdot T^{\langle K\rangle}(\xi)\,, \qquad \mathcal N = N + K\,, \tag{5.90}$$

в которых операторы

$$T^{\langle N\rangle}(Z) \equiv T^{(n,m)}(Z) \equiv T^{b_1\cdots b_m}_{a_1\cdots a_n}(Z) = Z_{a_1}\cdots Z_{a_n}\frac{\partial}{\partial Z_{b_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial Z_{b_m}}\,, \qquad N = n + m \tag{5.91}$$

действуют в твисторном секторе, тогда как

$$T^{\langle K\rangle}(\xi) \equiv T^{(k,l)}(\xi) = \xi^k \frac{\partial^l}{\partial \xi^{\,l}}\,, \qquad K = k + l \tag{5.92}$$

действуют на скаляр ξ. Генераторы (5.90) образуют бесконечномерную алгебру (по модулю некоторых коэффициентов)

$$\left[T^{\{\mathcal N\}}, T^{\{\mathcal M\}}\right] = \sum_{\mathcal L=0}^{\mathcal N+\mathcal M-2} T^{\{\mathcal L\}}\,. \tag{5.93}$$

Алгебра симметрии состояний, описываемых полем ВС $G^{(\hat q)}$, образована генераторами $F^{(n,\,m;\,k,\,l)}$ из (5.90), коммутирующими с оператором (5.89):

$$\left[F^{(n,\,m;\,k,\,l)}, \hat U\right] = 0\,. \tag{5.94}$$

Используя $\left[T^{(n,\,m;\,k,\,l)}, \hat U\right] = (n + k - m - l)\,T^{(n,\,m;\,k,\,l)}$ мы находим, что генераторами симметрии $F^{(n,\,m;\,k,\,l)}$ являются генераторы (5.90) с $n + k = m + l$. Мы обозначаем эту бесконечномерную алгебру посредством $hsc(3,2)$ (абревиатура *hsc* обозначает *higher spin conformal*), чтобы подчеркнуть присутствие конечномерной подалгебры $u(3,2)$ с генераторами

$$F_a{}^b = Z_a \frac{\partial}{\partial Z_b}\,, \qquad F_a = Z_a \frac{\partial}{\partial \xi}\,, \qquad F^b = \xi \frac{\partial}{\partial Z_b}\,, \qquad F = \xi \frac{\partial}{\partial \xi}\,. \tag{5.95}$$

Генераторы ${F_a}^b$ образуют алгебру $u(2,2)$, которая есть расширением конформной алгебры $su(2,2)$ генератором твисторных фазовых преобразований (5.89). Операторы F_a, F^b генерируют трансляции бозонной суперсимметрии и бозонные суперконформные бусты [178]. Подалгебра $hsc(2,2)$, образованная чисто твисторными генераторами (5.91) с $n = m$, производит алгебры высших спинов, изученных в [253, 114, 115].

Алгебра $hsc(3,2)$ не является простой, поскольку содержит идеалы $I_{\hat{q}}$, натянутые на элементы

$$H^{(n,m;k,l)} = \left(\hat{U} - \hat{q}\right) F^{(n,m;k,l)} \,. \tag{5.96}$$

Однако, операторы (5.96) становятся тривиальными на мультиплете ВС $G^{(\hat{q})}$. Следовательно, поле $G^{(\hat{q})}$ ассоциировано с фактор-алгеброй $hsc_{\hat{q}}(3,2) = hsc(3,2)/I_{\hat{q}}$. Следовательно, фактор-алгебры $hsc_{\hat{q}}(3,2)$ играют роль “первичных” алгебр симметрии для мультиплетов ВС $G^{(\hat{q})}$, рассматриваемых как модули. Здесь мы не рассматриваем другие симметрии мультиплетов ВС, которые являются скрытыми в твисторной формулировке (см. комментарии в [177, 180]).

5.4. Безмассовая $D = 4$ суперчастица высших спинов с $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией и ее бозонным аналогом

Целью этого раздела является построение модели безмассовой четырехмерной суперчастицы, обладающей обычной $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрией и ее бозонным аналогом. Как было показано в Разделе 5.1, такая система в чисто бозонном пределе (5.19) обладает $SU(3,2) \supset SU(2,2)$ симметрией, которая является альтернативой $Sp(8) \supset SU(2,2)$ симметрии высших спинов в случае тензорной частицы и представляет собой бозонный аналог $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ суперконформной симметрии $SU(2,2|1)$. В этом разделе мы рассмотрим $\mathcal{N} = 1$ суперрасширение модели (5.19). Суперсимметризация модели (5.19) будет осуществляться переходом к суперчастице, движущейся в спинорно-расширенном пространстве Минковского $(x^{\alpha\dot\alpha}, \zeta^\alpha, \bar\zeta^{\dot\alpha}, \theta^\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha})$, где θ^α – грассманова спинорная координата. Обобщенная конформная суперсимметрия этой модели описывается супергруппой $SU(3,2|1)$, которая является замыканием стандартной четырехмерной $\mathcal{N} = 1$ суперконформной симметрии $SU(2,2|1)$ и ее бозонного аналога – группы $SU(3,2)$. Таким образом, в этом разделе мы завершим анализ всех возможных суперсимметризаций конформной группы, которые могут быть проиллюстрированы следующей диаграммой

$$\begin{tikzcd} SU(2,2) \arrow[r] \arrow[d] & SU(2,2|1) \arrow[d] \\ SU(3,2) \arrow[r] & SU(3,2|1)\,, \end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки указывают “бозонную суперсимметризацию”, тогда как горизонтальные – стандартную нечетную $\mathcal{N} = 1$ суперсимметризацию.

5.4.1. Действие и симметрии

Суперрасширение частицы ВС (5.19) описывается действием

$$S = \int d\tau \left(P_{\alpha\dot\alpha} W^{\dot\alpha\alpha} - e P_{\alpha\dot\alpha} P^{\alpha\dot\alpha} \right), \tag{5.97}$$

где

$$W^{\dot\alpha\alpha} = \dot x^{\dot\alpha\alpha} - i\bar\theta^{\dot\alpha}\dot\theta^{\alpha} + i\dot{\bar\theta}^{\dot\alpha}\theta^{\alpha} - i\bar\zeta^{\dot\alpha}\dot\zeta^{\alpha} + i\dot{\bar\zeta}^{\dot\alpha}\zeta^{\alpha}\,. \tag{5.98}$$

Действие (5.97) можно также трактовать как обобщение на высшие спины действия $\mathcal{N} = 1$, $D = 4$ суперчастицы Бринка-Шварца [23] посредством добавления дополнительных четных спинорных переменных ζ^{α}, $\bar\zeta^{\dot\alpha}$.

Супертвисторная формулировка модели (5.97) описывается двумя коммутирующими вейлевскими спинорами λ_{α}, $\mu^{\dot\alpha}$ и двумя скалярами ξ, χ, коммутирующим и антикоммутирующим соответственно. Вместе они образуют $SU(3,2|1)$ супертвистор. Соотношения (5.22) обобщаются к виду:

$$\mu^{\dot\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha}\lambda_{\alpha} + i\,\bar\theta^{\dot\alpha}\chi + i\,\bar\zeta^{\dot\alpha}\xi\,, \qquad \chi = \theta^{\alpha}\lambda_{\alpha}\,, \qquad \xi = \zeta^{\alpha}\lambda_{\alpha}\,. \tag{5.99}$$

Для эрмитовой матрицы $x^{\dot\alpha\alpha}$ они подразумевают условие на $SU(3,2|1)$ норму

$$\mathcal{U} \equiv i(\bar\mu^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar\lambda_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}) - 2\bar\xi\xi - 2\bar\chi\chi \approx 0\,. \tag{5.100}$$

После выполнения супертвисторных преобразований (5.99) и добавления связи (5.100) с лагранжевым множителем действие (5.97), с точностью до граничного члена, принимает вид

$$S = \int d\tau \left[\lambda_\alpha \dot{\bar\mu}^\alpha + \bar\lambda_{\dot\alpha} \dot\mu^{\dot\alpha} + i(\dot{\bar\xi}\xi - \bar\xi\dot\xi) + i(\dot{\bar\chi}\chi - \bar\chi\dot\chi) - \Lambda\mathcal{U} \right]. \tag{5.101}$$

Подобно бозонному случаю, $\mathcal{U}$ в (5.101) является $U(1)$ током, тогда как $\Lambda(\tau)$ – $U(1)$ калибровочное поле.

Шестикомпонентный $SU(3,2|1)$ супертвистор и его комплексно-сопряженный параметризуют фазовое пространство модели. Отметим, что скобки Пуассона фермионных скаляров равны $\{\chi, \bar\chi\}_{\text{P}} = \frac{i}{2}$. Полный набор генераторов суперсимметрии, сохраняющих связь (5.100), содержит генераторы (3.12), (3.13), (5.26), (5.27) и новые генераторы, содержащие нечетный скаляр χ:

- Генераторы нечетных супертрансляций и суперконформных бустов

$$Q_\alpha = 2i\,\bar\chi\lambda_\alpha\,, \qquad \bar Q_{\dot\alpha} = -2i\,\chi\bar\lambda_{\dot\alpha}\,, \tag{5.102}$$

$$S^\alpha = 2i\,\chi\,\bar\mu^\alpha\,, \qquad \bar S^{\dot\alpha} = -2i\,\bar\chi\,\mu^{\dot\alpha}\,; \tag{5.103}$$

- Генераторы дополнительных нечетных симметрий

$$I = 2i\,\bar\xi\,\chi\,, \qquad \bar I = -2i\,\xi\,\bar\chi\,; \tag{5.104}$$

- Второй $U(1)$ генератор

$$\tilde A = \tfrac{i}{2}(\bar\mu^\alpha\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}) - 4\bar\chi\chi\,. \tag{5.105}$$

Множество генераторов (3.12), (3.13), (5.26), (5.27) и (5.102)-(5.105) образуют алгебру $SU(3,2|\,1)$, имеющую следующую структуру

$$\underbrace{R_\alpha\ \ \bar R_{\dot\alpha}\ \ C^\alpha\ \ \bar C^{\dot\alpha}\ \ A\quad \rlap{$\overbrace{\phantom{P_{\alpha\dot\beta}\ \ L_{\alpha\beta}\ \ \bar L_{\dot\alpha\dot\beta}\ \ K^{\alpha\dot\beta}\ \ D\quad Q_\alpha\ \ \bar Q_{\dot\alpha}\ \ S^\alpha\ \ \bar S^{\dot\alpha}\ \ \tilde A}}^{SU(2,2|\,1)}$}P_{\alpha\dot\beta}\ \ L_{\alpha\beta}\ \ \bar L_{\dot\alpha\dot\beta}\ \ K^{\alpha\dot\beta}\ \ D}_{SU(3,2)}\quad Q_\alpha\ \ \bar Q_{\dot\alpha}\ \ S^\alpha\ \ \bar S^{\dot\alpha}\ \ \tilde A\quad I\quad \bar I\ .$$

Билинейная форма $\mathcal{U}$ в (5.100) является инвариантной нормой в градуированном пространстве $SU(3,2|\,1)$ супертвисторов.

Отметим, что генераторы нечетной суперсимметрии Q_α, $\bar Q_{\dot\alpha}$, S^α, $\bar S^{\dot\alpha}$ и нечетные $SU(1|1)$ генераторы I, $\bar I$ воспроизводят всю $SU(3,2|1)$ супералгебру как их алгебраическое замыкание. Нечетные суперсимметричные трансляции и суперконформные бусты генерируют следующие преобразования супертвисторных компонент

$$\delta\lambda_\alpha = 2i\eta_\alpha\chi\,, \qquad \delta\mu^{\dot\alpha} = 2i\bar\varepsilon^{\dot\alpha}\chi\,, \qquad \delta\chi = \varepsilon^\alpha\lambda_\alpha - \bar\eta_{\dot\alpha}\mu^{\dot\alpha}\,, \tag{5.106}$$

где ε^α и η_α являются соответствующими грассмановыми параметрами. Преобразования суперпространственных переменных в системе (5.97) могут быть получены из (5.106) и соотношений (5.99). Например,

- нечетные суперсимметричные трансляции

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = i(\bar\varepsilon^{\dot\alpha}\theta^\alpha - \bar\theta^{\dot\alpha}\varepsilon^\alpha)\,, \qquad \delta\theta^\alpha = \varepsilon^\alpha\,, \qquad \delta\zeta^\alpha = 0\,; \tag{5.107}$$

- нечетные суперконформные бусты

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = i(\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\eta_{\dot\beta}x^{\dot\beta\alpha} - x^{\dot\alpha\beta}\eta_\beta\theta^\alpha) + (\theta\eta + \bar\eta\bar\theta)\,\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^\alpha - (\bar\eta\bar\zeta)\,\bar\theta^{\dot\alpha}\zeta^\alpha + (\zeta\eta)\,\bar\zeta^{\dot\alpha}\theta^\alpha\,, \tag{5.108}$$

$$\delta\theta^\alpha = -2i(\theta\eta)\theta^\alpha - \bar\eta_{\dot\beta}(x^{\dot\beta\alpha} + i\bar\theta^{\dot\beta}\theta^\alpha + i\bar\zeta^{\dot\beta}\zeta^\alpha)\,, \qquad \delta\zeta^\alpha = -2i\,(\zeta\eta)\,\theta^\alpha\,. \tag{5.109}$$

Преобразования, производящие генераторами (5.104), переводят нечетные и четные скаляры друг в друга

$$\delta\chi = \bar\sigma\xi\,, \qquad \delta\xi = -\sigma\chi\,. \tag{5.110}$$

В терминах суперпространственных переменных преобразования (5.110) приводят к перемешиванию четных и нечетных спинорных координат

$$\delta\theta^\alpha = \bar\sigma\zeta^\alpha\,, \qquad \delta\zeta^\alpha = -\sigma\theta^\alpha\,. \tag{5.111}$$

5.4.2. Квантование

Неприводимые связи первого и второго родов

Модель (5.97) характеризуется массовой связью $T \equiv P_{\alpha\dot\alpha}P^{\alpha\dot\alpha} \approx 0$ и двумя множествами спинорных связей: нечетных спинорных связей

$$D_\alpha \equiv P_\alpha + iP_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} \approx 0\,, \qquad \bar D_{\dot\alpha} \equiv \bar P_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha P_{\alpha\dot\alpha} \approx 0 \tag{5.112}$$

и четных спинорных связей

$$\nabla_\alpha \equiv \pi_\alpha + iP_{\alpha\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha} \approx 0\,, \qquad \bar\nabla_{\dot\alpha} \equiv \bar\pi_{\dot\alpha} - i\zeta^\alpha P_{\alpha\dot\alpha} \approx 0\,, \tag{5.113}$$

где π_α, $\bar\pi_{\dot\alpha}$ и P_α, $\bar P_{\dot\alpha}$ – импульсы для ζ^α, $\bar\zeta^{\dot\alpha}$ и θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$, соответственно. Ненулевые канонические скобки Пуассона равны $[x^{\dot\alpha\alpha}, P_{\beta\dot\beta}]_{\rm P} = \delta^\alpha_\beta \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$, $\{\theta^\alpha, P_\beta\}_{\rm P} = \delta^\alpha_\beta$, $[\zeta^\alpha, \pi_\beta]_{\rm P} = \delta^\alpha_\beta$. Спинорные связи (5.112) такие же, как в суперчастице Бринка-Шварца [23], тогда как (5.113) совпадают со связями бозонной частицы ВС (см. (3.46)). Ненулевые скобки Пуассона связей равны

$$\{D_\alpha, \bar D_{\dot\alpha}\}_{\rm P} = 2iP_{\alpha\dot\alpha}\,, \qquad [\nabla_\alpha, \bar\nabla_{\dot\alpha}]_{\rm P} = 2iP_{\alpha\dot\alpha}\,. \tag{5.114}$$

Массовая связь является связью первого рода. Половина спинорных связей – связи первого рода, которые выделяются умножением спинорных связей на спинор $\bar\zeta^{\dot\alpha} P_{\alpha\dot\alpha}$ и его комплексно-сопряженный. Связи второго рода получаются в результате проектирования спинорных связей на ζ^α и к.с. Таким образом, нечетные связи (5.112) разделяются на две связи второго рода

$$G \equiv \zeta^\alpha D_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar G \equiv \bar\zeta^{\dot\alpha} \bar D_{\dot\alpha} \approx 0 \tag{5.115}$$

и две связи первого рода

$$F \equiv \bar\zeta_{\dot\alpha} P^{\alpha\dot\alpha} D_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar F \equiv \zeta_\alpha P^{\alpha\dot\alpha} \bar D_{\dot\alpha} \approx 0\,. \tag{5.116}$$

Аналогично, четные связи (5.113) содержат две связи второго рода

$$\mathcal{G} \equiv \zeta^\alpha \nabla_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar{\mathcal{G}} \equiv \bar\zeta^{\dot\alpha} \bar\nabla_{\dot\alpha} \approx 0 \tag{5.117}$$

и две связи первого рода

$$\mathcal{F} \equiv \bar\zeta_{\dot\alpha} P^{\alpha\dot\alpha} \mathcal{D}_\alpha \approx 0\,, \qquad \bar{\mathcal{F}} \equiv \zeta_\alpha P^{\alpha\dot\alpha} \bar\nabla_{\dot\alpha} \approx 0\,. \tag{5.118}$$

Скобки Пуассона связей (5.116), (5.118) пропорциональны массовой связи. Нечетные связи первого рода (5.116) генерируют (неприводимую) локальную фермионную κ-симметрию. Аналогично, четные связи первого рода (5.118) генерируют бозонную κ-симметрию.

Мы будем выполнять квантование по Гупте-Блейлеру. Принимая во внимание, например, что связи $G \approx 0$ и $F \approx 0$ эквивалентны связям $D_\alpha \approx 0$, и т.д., мы можем наложить на волновую функцию Ψ, помимо связи $T\,\Psi = 0$, один набор нечетных связей:

$$\text{нечетный киральный:} \qquad \bar D_{\dot\alpha}\,\Psi = 0\,, \qquad (\bar\zeta_{\dot\alpha} P^{\dot\alpha\alpha} D_\alpha)\,\Psi = 0\,, \tag{5.119}$$

$$\text{или нечетный антикиральный:} \qquad D_\alpha \, \Psi = 0 \,, \qquad (\zeta_\alpha P^{\dot\alpha\alpha} \bar D_{\dot\alpha}) \, \Psi = 0 \quad (5.120)$$

и один набор четных связей,

$$\text{четный киральный:} \qquad \bar\nabla_{\dot\alpha} \, \Psi = 0 \,, \qquad (\bar\zeta_{\dot\alpha} P^{\dot\alpha\alpha} \nabla_\alpha) \, \Psi = 0 \,, \qquad (5.121)$$

$$\text{или четный антикиральный:} \qquad \nabla_\alpha \, \Psi = 0 \,, \qquad (\zeta_\alpha P^{\dot\alpha\alpha} \bar\nabla_{\dot\alpha}) \, \Psi = 0 \,. \quad (5.122)$$

Суперконформная инвариантность полевых уравнений

При квантовании модели (5.97) рассматриваем волновую функцию $\Psi = \Psi(x, \zeta, \bar\zeta, \theta, \bar\theta)$, соответствующую следующей реализации импульсных операторов $\hat P_{\alpha\dot\alpha} = -i\, \partial_{\alpha\dot\alpha}$, $\hat\pi_\alpha = -i\, \partial/\partial\zeta^\alpha$, $\hat{\bar\pi}_{\dot\alpha} = -i\, \partial/\partial\bar\zeta^{\dot\alpha}$, $\hat P_\alpha = i\, \partial/\partial\theta^\alpha$, $\hat{\bar P}_{\dot\alpha} = i\, \partial/\partial\bar\theta^{\dot\alpha}$. Тогда выражения (5.112), (5.113) становятся нечетными

$$D_\alpha = i(\partial/\partial\theta^\alpha - i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}) \,, \qquad \bar D_{\dot\alpha} = i(\partial/\partial\bar\theta^{\dot\alpha} - i\theta^\alpha \partial_{\alpha\dot\alpha}) \qquad (5.123)$$

и четными

$$\nabla_\alpha = -i(\partial/\partial\zeta^\alpha + i\partial_{\alpha\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha}) \,, \qquad \bar\nabla_{\dot\alpha} = -i(\partial/\partial\bar\zeta^{\dot\alpha} - i\zeta^\alpha \partial_{\alpha\dot\alpha}) \,. \qquad (5.124)$$

ковариантными производными.

Ковариантные производные (5.123), (5.124) и $\partial^{\dot\alpha\alpha}$ преобразуются следующим образом при нечетных суперконформных бустах (5.108), (5.109)

$$\begin{aligned} \delta D_\alpha &= -2i\theta_\alpha\eta^\beta D_\beta + 2i(\bar\eta\bar\theta) D_\alpha + 2i(\zeta\eta)\nabla_\alpha \,, \\ \delta \bar D_{\dot\alpha} &= -2i\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\eta^{\dot\beta} \bar D_{\dot\beta} - 2i(\theta\eta)\bar D_{\dot\alpha} + 2i(\bar\eta\bar\zeta)\bar\nabla_{\dot\alpha} \,, \end{aligned} \qquad (5.125)$$

$$\delta\nabla_\alpha = 2i\eta_\alpha\theta^\beta\nabla_\beta - 2i(\bar\eta\bar\zeta) D_\alpha \,, \qquad \delta\bar\nabla_{\dot\alpha} = 2i\bar\eta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta}\bar\nabla_{\dot\beta} + 2i(\zeta\eta)\bar D_{\dot\alpha} \,, \qquad (5.126)$$

$$\delta\, \partial^{\dot\alpha\alpha} = 2i\partial^{\dot\alpha\beta}\theta_\beta\, \eta^\alpha - 2i\bar\eta^{\dot\alpha}\, \bar\theta_{\dot\beta}\partial^{\dot\beta\alpha} + i\bar D^{\dot\alpha}\eta^\alpha - i\bar\eta^{\dot\alpha} D^\alpha \,. \qquad (5.127)$$

Таким образом, суперконформная ковариантность требует, чтобы поле Ψ удовлетворяло или условиям киральности (5.119), (5.121) или антикиральности (5.120), (5.122). Мы получаем два возможных случая:

1) киральный случай

$$\begin{aligned} &\Box\, \Psi = 0 \,, \qquad \bar D_{\dot\alpha}\, \Psi = 0 \,, \qquad \bar\nabla_{\dot\alpha}\, \Psi = 0 \,, \\ &(\bar\zeta_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha} D_\alpha)\, \Psi = 0 \,, \qquad (\bar\zeta_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha}\nabla_\alpha)\, \Psi = 0 \,; \end{aligned} \qquad (5.128)$$

2) антикиральный случай

$$\begin{aligned} &\Box\,\Psi = 0\,, \qquad D_\alpha\,\Psi = 0\,, \qquad \nabla_\alpha\,\Psi = 0\,, \\ &(\zeta_\alpha \partial^{\dot\alpha\alpha} \bar D_{\dot\alpha})\,\Psi = 0\,, \qquad (\zeta_\alpha \partial^{\dot\alpha\alpha} \bar\nabla_{\dot\alpha})\,\Psi = 0\,, \end{aligned} \tag{5.129}$$

где $\Box \equiv \partial^{\dot\alpha\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}$. Ниже рассмотрим киральный случай (5.128) – антикиральный случай может быть восстановлен посредством сопряжения.

Из алгебры спинорных ковариантных производных (5.123), (5.124) следует, что уравнение $\Box\,\Psi = 0$ является следствием других уравнений (5.128). Применяя $\bar\nabla_{\dot\alpha}$ к последним двум уравнениям в (5.128), легко видеть, что они сводятся к $\partial^{\dot\alpha\alpha}D_\alpha\,\Psi = 0$, $\partial^{\dot\alpha\alpha}\nabla_\alpha\,\Psi = 0$. Таким образом, множество уравнений (5.128) эквивалентно более простому набору

$$\bar D_{\dot\alpha}\,\Psi = 0\,, \qquad \bar\nabla_{\dot\alpha}\,\Psi = 0\,, \qquad \partial^{\dot\alpha\alpha} D_\alpha\,\Psi = 0\,, \qquad \partial^{\dot\alpha\alpha}\nabla_\alpha\,\Psi = 0\,. \tag{5.130}$$

Проверим суперконформную инвариантность этих уравнений.

Используя (5.125)–(5.127), мы получаем следующие вариации

$$\delta\,\Box = -2i(\theta\eta - \bar\eta\bar\theta)\Box - 2i(\eta^\alpha \partial_{\alpha\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha} + \bar\eta_{\dot\alpha}\partial^{\dot\alpha\alpha}D_\alpha)\,, \tag{5.131}$$

$$\begin{aligned} \delta\,(\partial^{\dot\alpha\alpha}D_\alpha) \;&=\; 4i(\bar\eta\bar\theta)\,\partial^{\dot\alpha\alpha}D_\alpha + 2i(\zeta\eta)\,\partial^{\dot\alpha\alpha}\nabla_\alpha \\ &\quad + i\eta^\alpha D_\alpha \bar D^{\dot\alpha} - i\bar\eta^{\dot\alpha}D^\alpha D_\alpha - \underline{2\eta_\alpha\partial^{\dot\alpha\alpha}}\,, \end{aligned} \tag{5.132}$$

$$\begin{aligned} \delta\,(\partial^{\dot\alpha\alpha}\nabla_\alpha) \;&=\; -2i(\theta\eta)\,\partial^{\dot\alpha\alpha}\nabla_\alpha - 2i\bar\eta^{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta}\partial^{\dot\beta\beta}\nabla_\beta \\ &\quad -2i(\bar\eta\bar\zeta)\,\partial^{\dot\alpha\alpha}D_\alpha + i\eta^\alpha\nabla_\alpha\bar D^{\dot\alpha} - i\bar\eta^{\dot\alpha}D^\alpha\nabla_\alpha\,, \end{aligned} \tag{5.133}$$

$$\delta\,(D^\alpha D_\alpha) = 2i(\theta\eta + 2\bar\eta\bar\theta)D^\alpha D_\alpha - 4i(\zeta\eta)D^\alpha\nabla_\alpha - \underline{4\eta^\alpha D_\alpha}\,, \tag{5.134}$$

$$\delta\,(D^\alpha\nabla_\alpha) = 2i(\bar\eta\bar\theta)D^\alpha\nabla_\alpha + 2i(\bar\eta\bar\zeta)D^\alpha D_\alpha - \underline{2\eta^\alpha\nabla_\alpha}\,. \tag{5.135}$$

Эти законы преобразования приводят к двум следствиям относительно суперконформной ковариантности набора уравнений (5.130). Во-первых, единственным способом компенсации подчеркнутой части в (5.132) есть следующий закон преобразования Ψ относительно конформной суперсимметрии:

$$\delta\,\Psi = -2i(\theta\eta)\,\Psi\,. \tag{5.136}$$

Во-вторых, суперконформная ковариантность требует добавления двух волновых уравнений, дополнительно к (5.130). Именно, требуется наложить дополнительные условия $D^\alpha D_\alpha\,\Psi = 0$ и $D^\alpha\nabla_\alpha\,\Psi = 0$. Тогда, подчеркнутые члены в преобразованиях (5.134), (5.135) компенсируются благодаря закону преобразования (5.136) для Ψ. Таким образом, система уравнений

$$\bar{D}_{\dot\alpha}\,\Psi = 0\,, \qquad \bar{\nabla}_{\dot\alpha}\,\Psi = 0\,, \qquad D^\alpha D_\alpha\,\Psi = 0\,, \qquad D^\alpha \nabla_\alpha\,\Psi = 0 \tag{5.137}$$

является ковариантной относительно конформной суперсимметрии. Этот набор уравнений ковариантен также относительно $SU(1|1)$ нечетных преобразований (5.111)

$$\delta D_\alpha = \sigma \nabla_\alpha\,, \qquad \delta \bar{D}_{\dot\alpha} = -\bar\sigma \bar\nabla_{\dot\alpha}\,, \qquad \delta \nabla_\alpha = \bar\sigma D_\alpha\,, \qquad \delta \bar\nabla_{\dot\alpha} = \sigma \bar{D}_{\dot\alpha} \tag{5.138}$$

и, следовательно, ковариантен относительно замыкания этих преобразований, т.е. полной супергруппы $SU(3,2|1)$. Таким образом мы получили минимальный набор (5.137) $SU(3,2|1)$ ковариантных уравнений. Уравнения второго порядка в (5.130) теперь следуют как условия интегрируемости для уравнений (5.137).

Суперконформная волновая функция ВС

Условия киральности $\bar{D}_{\dot\alpha}\,\Psi = 0$ и $\bar\nabla_{\dot\alpha}\,\Psi = 0$ подразумевают, что волновая функция Ψ определена на киральном суперпространстве

$$x_{_L}^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha} + i\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\alpha + i\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^\alpha\,, \quad \zeta^\alpha\,, \quad \theta^\alpha\,, \tag{5.139}$$

т.е. $\Psi{=}\Psi_{_L}(x_{_L},\zeta,\theta)$. Это подпространство замкнуто относительно суперконформных преобразований. В частности, нечетные суперсимметричные трансляции и суперконформные бусты (5.107)-(5.109) действуют следующим образом

$$\begin{gathered} \delta x_{_L}^{\dot\alpha\alpha} = 2i\bar\varepsilon^{\dot\alpha}\theta^\alpha - 2i x_{_L}^{\dot\alpha\beta}\eta_\beta\theta^\alpha\,, \\ \delta\theta^\alpha = \varepsilon^\alpha - 2i(\theta\eta)\,\theta^\alpha - \bar\eta_{\dot\beta} x_{_L}^{\dot\beta\alpha}\,, \qquad \delta\zeta^\alpha = -2i(\zeta\eta)\,\theta^\alpha\,. \end{gathered} \tag{5.140}$$

Разложение суперполя $\Psi_{_L}(x_{_L},\zeta,\theta)$ по четной спинорной координате

$$\Psi_{_L} = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{\alpha_1}\ldots\zeta^{\alpha_k}\Phi^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_{_L},\theta) \tag{5.141}$$

содержит киральные суперполя с внешними спинорными индексами

$$\Phi^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_{_L},\theta) = A^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} + \theta^\beta \psi^{(k+1)}_{(\alpha_1\ldots\alpha_k\beta)} + \theta_{(\alpha_k}\varphi^{(k-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1})} + \theta^2 B^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\,. \tag{5.142}$$

Уравнения $D^\alpha D_\alpha \Psi = 0$ и $D^\alpha \nabla_\alpha \Psi = 0$ приводят к уравнения Дирака для первых двух компонентных полей

$$\partial^{\dot\alpha\alpha_1} A^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = 0\,, \qquad \partial^{\dot\alpha\alpha_1} \psi^{(k+1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}} = 0 \tag{5.143}$$

и зануляют последние две вспомогательныt компоненты

$$\varphi^{(k-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} = 0\,, \qquad B^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = 0\,. \tag{5.144}$$

Следовательно, пространство состояний нашей модели образовано бесконечным набором безмассовых супермультиплетов (5.142), которые объединены в одно киральное суперполе ВС $\Psi_{_L}(x_{_L},\zeta,\theta)$, удовлетворяющее суперконформно ковариантным уравнениям (5.137). Таким образом, мы получили полевое описание безмассовых высших спинов в терминах суперполевых напряженностей, когда уравнения (5.137) заключают в себя как динамические уравнения, так и тождества Бьянки.

Отметим, что вследствие двойного разложения по ζ и θ имеет место удвоение спиральностей, имеющее место также при квантовании тензорной суперчастицы ВС (см., например, [97]). Тем не менее, можно избежать такого удвоения, если потребовать, чтобы волновая суперфункция имела фиксированную четность при отражении бозонных спинорных координат.

5.4.3. Квантование в твисторном пространстве и твисторное преобразование для суперполей ВС

Опишем квантование чисто твисторной модели (5.101) в представлении с диагональными операторами λ_α, $\mu^{\dot\alpha}$, χ и ξ. Твисторная волновая суперфункция $\tilde\Psi = \tilde\Psi(\lambda,\mu,\chi,\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial\lambda_\alpha} + \mu^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\mu^{\dot\alpha}} + \chi\frac{\partial}{\partial\chi} + \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\tilde\Psi = c\tilde\Psi\,, \tag{5.145}$$

которое является квантовой версией связи (5.100). Константа c, определяющая степень однородности твисторной волновой суперфункции, учитывает неопределенность в упорядочении квантовых операторов.

Переход от твисторной волновой суперфункции к киральному суперполю $\Psi_{_L}(x_{_L},\zeta,\theta)$ достигается путем твисторных полевых преобразований. Для этого, мы делаем подстановки (5.99)

$$\mu^{\dot\alpha} = x_{_L}^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha\,, \qquad \chi = \theta^\alpha\lambda_\alpha\,, \qquad \xi = \zeta^\alpha\lambda_\alpha$$

в твисторном суперполе и выполняем интегральное преобразование

$$\Psi_{_L}(x_{_L},\theta,\zeta) = \oint(\lambda d\lambda)\,\hat\Psi(\lambda,\, x_{_L}\lambda,\, \theta\lambda,\, \zeta\lambda) \tag{5.146}$$

где криволинейный интеграл определен как в [80]. Твисторное суперполе $\hat\Psi$ в интегральном преобразовании (5.146) имеет степень однородности -2 и получается следующим масштабным преобразованием из $\tilde\Psi$

$$\hat\Psi(\lambda,\mu,\chi,\xi) = \xi^{-c-2}\tilde\Psi(\lambda,\mu,\chi,\xi)\,. \tag{5.147}$$

Раскладывая твисторное суперполе (5.147) в следующий ряд

$$\hat\Psi(\lambda,\, x_{_L}\lambda,\, \theta\lambda,\, \zeta\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(\zeta\lambda)^k\hat\Phi^{(k)}(\lambda,\, x_{_L}\lambda,\, \theta\lambda)\,, \tag{5.148}$$

и подставляя (5.148) в (5.146), мы получаем стандартное твисторное преобразование для киральных суперполей [80]

$$\Phi^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x_{_L},\theta) = \oint(\lambda d\lambda)\,\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda_{\alpha_k}\hat\Phi^{(k)}(\lambda,\, x_{_L}\lambda,\, \theta\lambda)\,, \tag{5.149}$$

Отметим, что киральные суперполя (5.149) содержат в подинтегральном разложении по $(\theta\lambda)$ только первые две компоненты, т.е. они определены на массовой поверхности автоматически (см. (5.143), (5.144)).

5.5. Твисторное описания $D=4$ струнных моделей

Хотя твисторы и супертвисторы [78, 80] используются в основном для описания (супер)частиц и (супер)струн как альтернативы пространственно-временному подходу (см. например, [117, 118, 99, 256]), в последнее время широкий класс пертурбативных амплитуд в $N=4$ $D=4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса [122] и конформной супергравитации (см. например, [130]) были описаны простым способом при использовании струн, движущихся в супертвисторном пространстве. Кроме того, введение комплексной структуры твисторного пространства в теорию (супер)струн дает дополнительные связи с комплексной геометрией двумерных римановых поверхностей, описывающих квантовые струны в критических размерностях [258].

Наша цель в этом разделе, который базируется на работах [179, 186], состоит в получении мастер-действия твисторной модели, которая классически эквивалентна $D = 4$ модели Намбу-Гото для струны с натяжением в отличие от других исследований, в которых рассматривались только модели твисторных нуль (супер)струн. Мы рассмотрим чисто пространственно-временную формулировку, чистое твисторное описание и промежуточную смешанную твисторно–пространственно-временую формулировку, а также взаимосвязь между этими формулировками.

Для построения взаимосвязи пространственно-временной и твисторной таргетныых геометрий необходимо найти соответствующие струнные соотношения инцидентности Пенроуза, которые описывали бы единообразно безмассовые и массивные состояния струнного спектра. Как было показано в предыдущих главах, твисторная формулировка массивных частиц со спином описываются в битвисторном пространстве. Соответствующее действие строится из следующей один-формы ($a = 1, ..., 4$ является $SU(2,2)$ индексом, $i = 1, 2$)

$$\Theta^{(1)} = \sum_{i=1}^{2} \Theta_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{2} \left(\bar{Z}^{ai} dZ_{ai} - d\bar{Z}^{ai} Z_{ai} \right) \tag{5.150}$$

с подходяще введенными связями. Действие, определяющее твисторную формулировку струны с натяжением, зададим вложением канонической два-формы Лиувилля в битвисторное пространство

$$\Theta^{(2)} = \Theta_1^{(1)} \wedge \Theta_2^{(1)} . \tag{5.151}$$

Основным требованием при построении будет классическая эквивалентность этой твисторной формулировки гамильтоновым формулировкам $D = 4$ бозонной струны или с векторными или с тензорными струнными импульсами.

5.5.1. Пространственно-временные формулировки струны с натяжением

Струна с натяжением в плоском пространстве Минковского описывается нелинейным действием Намбу-Гото [259, 260]

$$S = -T \int d^2\xi \sqrt{-\det(g_{mn})} \tag{5.152}$$

где $\xi^m = (\tau, \sigma)$ – координаты мировой поверхности,

$$g_{mn} = \partial_m X^\mu \partial_n X_\mu \tag{5.153}$$

– индуцированная метрика на струнной поверхности, T – натяжение струны. Индексы $m, n = 0, 1$ являются векторными двухмерными мировыми индексами; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ есть векторные индексы таргетного пространства.

Последовательный переход к твисторной формулировке осуществляется через гамильтонову формулировку. В случае струны с натяжением (5.152) есть следующие две гамильтоновы конструкции.

Формулировка с векторными импульсами

Формулировка первого порядка для струны с натяжением (5.152) определяется действием [261]

$$S = \int d^2\xi \left[P^m_\mu \partial_m X^\mu + \tfrac{1}{2T}(-h)^{-1/2} h_{mn} P^m_\mu P^{\mu n} \right], \tag{5.154}$$

использующим векторные импульсные переменные $P^m_\mu(\xi)$. Кинетическая часть действия (5.154) описывается два-формой

$$\tilde{\Theta}^{(2)} = P_\mu \wedge dX^\mu \tag{5.155}$$

где $P_\mu = P^m_\mu \epsilon_{mn} d\xi^n$, $dX^\mu = d\xi^m \partial_m X^\mu$, т.е. в формулировке (5.154) пара (P^0_μ, P^1_μ) обобщенных струнных импульсов определяет один-форму.

Уравнения движения для метрики на мировой поверхности h_{mn}

$$P^m_\mu P^{n\mu} - \tfrac{1}{2} h^{mn} h_{kl} P^k_\mu P^{l\mu} = 0 \tag{5.156}$$

описывают связи Вирасоро первого рода.

Выражая P^m_μ в действии (5.154) с помощью их уравнений движения

$$P^m_\mu = -T(-h)^{1/2} h^{mn} \partial_n X_\mu, \tag{5.157}$$

мы получаем действие второго порядка [262]

$$S = -\tfrac{T}{2} \int d^2\xi (-h)^{1/2} h^{mn} \partial_m X^\mu \partial_n X_\mu \,. \tag{5.158}$$

Формулировка с тензорными импульсами

Другой эквивалентной формулировкой бозонной струны (5.152) является модель с тензорными импульсами. Она получается из два-формы Лиувилля

$$\tilde{\tilde{\Theta}}^{(2)} = P_{\mu\nu} dX^\mu \wedge dX^\nu \,. \tag{5.159}$$

Такая модель непосредственно связана с интерпретацией струны как динамической мировой поверхности, описываемой элементами

$$dS^{\mu\nu} = dX^\mu \wedge dX^\nu = \partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \epsilon^{mn} d^2\xi \,. \tag{5.160}$$

Струнное действие с тензорными моментами имеет вид

$$S = \sqrt{2} \int d^{\,2}\xi \left[P_{\mu\nu}\, \partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \epsilon^{mn} - \Lambda \left(P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} + \tfrac{T^2}{4} \right) \right] . \tag{5.161}$$

Выражая $P_{\mu\nu}$ с помощью уравнений движения, мы получаем

$$P^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2\Lambda} \Pi^{\mu\nu} \,, \qquad \Pi^{\mu\nu} \equiv \epsilon^{mn} \partial_m X^\mu \partial_n X^\nu \,. \tag{5.162}$$

Важно, что решение (5.162) удовлетворяет тождественно связи $P^{\mu\nu} \tilde{P}_{\mu\nu} = 0$, где $\tilde{P}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} P^{\lambda\rho}$. Подстановка (5.162) в действие (5.161) производит действие четвертого порядка (см., например, [263])

$$S = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \int d^{\,2}\xi \left[\Lambda^{-1} \Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} - \Lambda T^2 \right] , \tag{5.163}$$

исключая в котором Λ и используя

$$\Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} = 2 \det(g_{mn}), \tag{5.164}$$

мы получаем струнное действие Намбу-Гото (5.152).

5.5.2. Струна с натяжением в смешанной твисторно – пространственно-временной формулировке

Смешанная формулировка с векторными импульсами

Чтобы получить из действия (5.154) смешанное спинорно–пространственно-временное действие (5.167) мы должны исключить четыре-импульсы P_μ^m с помощью струнного обобщения формул Картана-Пенроуза (3.16), (3.55). На кривой мировой поверхности она имеет вид [1] [179, 186]

$$P^m_{\alpha\dot\alpha} = e\,\tilde\lambda_{\dot\alpha}\rho^m\lambda_\alpha = e\,e^m_{\underline{n}}\tilde\lambda^i_{\dot\alpha}(\rho^{\underline{n}})_i{}^j\lambda_{\alpha j}\,. \tag{5.165}$$

Тогда, второй член в струнном действии (5.154) принимает вид

$$\tfrac{1}{2T}(-h)^{-1/2}h_{mn}P^m_\mu P^{n\mu} = \tfrac{1}{2T}\,e\,(\lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i})(\tilde\lambda^j_{\dot\alpha}\tilde\lambda^{\dot\alpha}_j), \tag{5.166}$$

где мы использовали $\mathrm{Tr}(\rho^m\rho^n) = 2h^{mn}$, $\rho^m = e^m_{\underline{n}}\rho^{\underline{n}}$. Подставляя (5.165) и (5.166) в действие (5.154), мы получаем струнное действие [120]

$$S = \int d^2\xi\, e\left[\tilde\lambda_{\dot\alpha}\rho^m\lambda_\alpha\,\partial_m X^{\dot\alpha\alpha} + \tfrac{1}{2T}\,(\lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i})(\tilde\lambda^j_{\dot\alpha}\tilde\lambda^{\dot\alpha}_j)\right], \tag{5.167}$$

которое обеспечивает смешанную твисторно–пространственно-временную формулировку бозонной струны. Отметим, что алгебраические полевые уравнения (5.156) после подстановки (5.165) выполняются тождественно.

Действие (5.167) инвариантно относительно локальных масштабных и фазовых преобразований:

$$\lambda'_{\alpha k} = e^{c_k + i\varphi_k}\lambda_{\alpha k}, \qquad \bar\lambda'^k_{\dot\alpha} = e^{c_k - i\varphi_k}\bar\lambda^k_{\dot\alpha}, \tag{5.168}$$

$$e'^1_m + e'^2_m = e^{-2c_1}(e^1_m + e^2_m), \qquad e'^1_m - e'^2_m = e^{-2c_2}(e^1_m - e^2_m), \tag{5.169}$$

где мы используем вейлевское представление для $D = 2$ матриц Дирака ρ_a, когда произведения $\rho_0\rho_a$ диагональны. Мы можем закрепить одно локальное

---

[1] $h_{mn} = e^{\underline{k}}_m e_{n\underline{k}}$ есть метрика на мировой поверхности, $e^{\underline{n}}_m$ – тетрада, $e^{\underline{n}}_m e^m_{\underline{k}} = \delta^{\underline{n}}_{\underline{k}}$, $e = \det(e^{\underline{n}}_m) = \sqrt{-h}$. Индексы $\underline{m}, \underline{n} = 0, 1$ являются плоскими $d = 2$ индексами, тогда как $i, j = 1, 2$ – $d = 2$ дираковские спинорные индексы. Мы используем черту для комплексного сопряжения, $\bar\lambda^i_{\dot\alpha} = (\overline{\lambda_{\alpha i}})$, и тильду – для дираковского сопряжения $d = 2$ спиноров, $\tilde\lambda^i_{\dot\alpha} = \bar\lambda^j_{\dot\alpha}(\rho^0)_j{}^i$. $(\rho^{\underline{m}})_i{}^j$ – $d = 2$ матрицы Дирака.

масштабное преобразование с $c = c_1 + c_2$ и одно локальное фазовое преобразование с $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ наложением связей

$$A \equiv \lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i} - T = 0\,, \qquad \bar{A} \equiv \bar{\lambda}^{i}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_{i} - T = 0\,, \tag{5.170}$$

подобным связям для массивной частицы (3.57). В терминах переменных $v_{\alpha i} = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\lambda_{\alpha i}$, $\bar{v}^{i}_{\dot{\alpha}} = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\bar{\lambda}^{i}_{\dot{\alpha}}$ эти связи становятся соотношениями ортонормированности (3.58) для спинорных лоренцевых гармоник [84, 88, 121].

После наложения связей (5.170) модель (5.167) принимает вид

$$S = \int d^2\xi\, \left[e\, e^{m}_{\underline{n}} \tilde{\lambda}^{i}_{\dot{\alpha}} (\rho^{\underline{n}})_{i}{}^{j} \lambda_{\alpha j}\, \partial_m X^{\dot{\alpha}\alpha} + \tfrac{T}{2}\, e + \Lambda A + \bar{\Lambda}\bar{A}\right], \tag{5.171}$$

где спиноры λ, $\bar{\lambda}$ ограничены соотношениями (5.170), которые накладываются дополнительно в (5.171) с помощью лагранжевых множителей. После введения базиса светового конуса для мировой тетрады $e^{++}_{m} = e^{0}_{m} + e^{1}_{m}$, $e^{--}_{m} = e^{0}_{m} - e^{1}_{m}$ и вейлевского представления для d=2 дираковских матриц получим действие гармонической струны [121, 125].

Смешанная формулировка с тензорными импульсами

Из уравнений движения действия (5.167) находим следующее выражение для тетрады

$$e^{\underline{n}}_{m} = \tfrac{2T}{(\lambda\lambda)(\bar{\lambda}\bar{\lambda})}\; \tilde{\lambda}^{i}_{\dot{\alpha}} (\rho^{\underline{n}})_{i}{}^{j} \lambda_{\alpha j}\; \partial_m X^{\dot{\alpha}\alpha}\,. \tag{5.172}$$

Подстановка его в (5.178) производит следующее струнное действие

$$S{=}\sqrt{2}\!\int\! d^2\xi \epsilon^{mn}\!\left(P_{\alpha\beta}\, \partial_m X^{\dot{\gamma}\alpha} \partial_n X^{\beta}_{\dot{\gamma}} {+} \bar{P}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\, \partial_m X^{\dot{\alpha}\gamma} \partial_n X^{\dot{\beta}}_{\gamma}\right), \tag{5.173}$$

где составные спиноры второго ранга

$$P_{\alpha\beta} = \tfrac{\sqrt{2}T}{(\lambda\lambda)}\, \lambda^{1}_{(\alpha}\lambda^{2}_{\beta)}\,, \qquad \bar{P}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \tfrac{\sqrt{2}T}{(\bar{\lambda}\bar{\lambda})}\, \bar{\lambda}^{1}_{(\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{2}_{\dot{\beta})}\,. \tag{5.174}$$

удовлетворяют связям

$$P^{\alpha\beta}P_{\alpha\beta} = -\tfrac{T^2}{4}\,, \qquad \bar{P}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{P}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\tfrac{T^2}{4}\,. \tag{5.175}$$

В четыре-векторных обозначениях $P_{\alpha\beta} = P_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$, $\bar{P}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -P_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ соотношения (5.175) принимают вид $P^{\mu\nu}P_{\mu\nu} = -\frac{T^2}{4}$, $P^{\mu\nu}\tilde{P}_{\mu\nu} = 0\,.$

С учетом дополнительных соотношений (5.170), формулировка (5.173) производит действие гармонической струны с тензорными струнными импульсами (см., также, [264]).

5.5.3. Чисто твисторная формулировка

Введем вторую половину твисторных координат $\mu_i^{\dot\alpha}$, $\bar\mu^{\alpha i}$ с помощью соотношений инцидентности (3.17), (3.78), обобщенных на случай струны

$$\mu_i^{\dot\alpha}(\xi) = X^{\dot\alpha\beta}(\xi)\,\lambda_{\beta i}(\xi), \qquad \bar\mu^{\alpha i}(\xi) = \bar\lambda^i_{\dot\beta}(\xi)\,X^{\dot\beta\alpha}(\xi). \tag{5.176}$$

Твисторные струнные поля имеют разные массовые размерности в отличие от твисторных координат в механике частиц. Для согласованности мы должны присвоить в (5.165), (5.176) следующие размерности: $[\lambda_{\alpha i}] = m^1$, $[\mu_i^{\dot\alpha}] = m^0$.

Условия инцидентности (5.176) с вещественной пространственно-временной струнной координатой $X^{\dot\alpha\alpha}$ подразумевают связи на твисторные переменные

$$V_i{}^j \equiv \lambda_{\alpha i}\bar\mu^{\alpha j} - \mu_i^{\dot\alpha}\bar\lambda^j_{\dot\alpha} \approx 0. \tag{5.177}$$

Матрица этих связей является антиэрмитовой, $(\overline{V_i{}^j}) = -V_j{}^i$.

Подставим соотношения (5.176) в (5.171). Используя

$$P^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m X^{\dot\alpha\alpha} = \tfrac{1}{2}\,e\,e^m_{\underline{n}}\left[\tilde\lambda_{\dot\alpha}\rho^{\underline{n}}\partial_m\mu^{\dot\alpha} - \tilde\mu^\alpha\rho^{\underline{n}}\partial_m\lambda_\alpha\right] + c.c.,$$

получаем струнное действие первого порядка в твисторной формулировке

$$\begin{aligned} S = \int d^2\xi \left\{\tfrac{1}{2}\,e\,e^m_{\underline{n}}\left[\tilde\lambda_{\dot\alpha}\rho^{\underline{n}}\partial_m\mu^{\dot\alpha} - \tilde\mu^\alpha\rho^{\underline{n}}\partial_m\lambda_\alpha + c.c.\right] + \right. \\ \left. + \tfrac{T}{2}\,e + \Lambda_j{}^i V_i{}^j + \Lambda A + \bar\Lambda\bar A\right\}, \end{aligned} \tag{5.178}$$

где $\Lambda_i{}^j = -(\overline{\Lambda_j{}^i})$, Λ, $\bar\Lambda$ – множители Лагранжа.

После введения струнных твисторов

$$Z_{ai}(\xi) = \big(\lambda_{\alpha i}(\xi),\, \mu_i^{\dot\alpha}(\xi)\big)\,, \qquad \bar Z^{ai}(\xi) = \big(\bar\mu^{\alpha i}(\xi),\, -\bar\lambda^i_{\dot\alpha}(\xi)\big)\,, \tag{5.179}$$

связи (5.177) принимают вид

$$V_i^j = Z_{ai}\bar Z^{aj} \approx 0\,. \tag{5.180}$$

Подставляя в действие (5.178) уравнения движения для тетрады $e_{m}^{\underline{n}} = -\frac{1}{T}\left[\partial_m \tilde{Z}^a \rho^{\underline{n}} Z_a - \tilde{Z}^a \rho^{\underline{n}} \partial_m Z_a\right]$, мы получаем наше основное твисторное струнное действие [179, 186]:

$$S = \int d^2\xi\, \mathcal{L}\,, \tag{5.181}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & \tfrac{1}{4T}\, \epsilon^{mn} \epsilon_{\underline{kl}} \left[\partial_m \tilde{Z}^b \rho^{\underline{k}} Z_b - \tilde{Z}^b \rho^{\underline{k}} \partial_m Z_b\right] \left[\partial_n \tilde{Z}^a \rho^{\underline{l}} Z_a - \tilde{Z}^a \rho^{\underline{l}} \partial_n Z_a\right] + \\ & + \Lambda_j{}^i V_i^j + \Lambda A + \bar{\Lambda} \bar{A}\,, \end{aligned} \tag{5.182}$$

где $\tilde{Z}^{ai} = \bar{Z}^{aj} (\rho^0)_j{}^i$.

Используя явный вид $D = 2$ матриц Дирака, мы получаем, что первый член в лагранжиане (5.182) равен

$$\tfrac{1}{T}\, \epsilon^{mn} \left[\partial_m \bar{Z}^{a1} Z_{a1} - \bar{Z}^{a1} \partial_m Z_{a1}\right] \left[\partial_n \bar{Z}^{b2} Z_{b2} - \bar{Z}^{b2} \partial_n Z_{b2}\right],$$

т.е. действие (5.182) индуцируется на мировой поверхности канонической 2-формой (5.151) с дополнительными связями (5.170) и (5.177).

5.5.4. Взаимосвязи различных формулировок струны с натяжением

Получение твисторной мастер-формулировки струны с натяжением (5.181) дает нам также замкнутую картину связей различных моделей бозонной струны, которые могут быть представлены следующей диаграммой:

Отметим, что классическая формулировка $D = 4$ мембраны в би-твисторном формализме была построена в [181].

5.6. Каноническое квантование твисторной струны

Полученное твисторное струнное действие (5.178) является четырехлинейным, что представляет серьезную трудность при выполнении процедуры квантования. В этом разделе мы получаем билинейную твисторно-струнную модель, которая возникает как фиксация калибровки в новой нелинейной твисторной струнной модели и приводит с $d = 2$ твисторно-струнным полям со стандартными правилами квантования по Пенроузу [119, 252].

Последовательность наших действий в этом разделе будет следующей. Сначала мы преобразуем действие (5.167) в 2-твисторное действие, в котором четыре-линейные члены уберем фиксацией калибровки для преобразований

(5.168), но способом отличным, чем в (5.178). В результате этого получим билинейное действие для твисторной струны.

5.6.1. Твисторная формулировка струнной модели ССТВ

Применим обобщенные соотношения инцидентности (5.176) для исключения струнного пространственно-временного поля $X_\mu(\xi)$ из (5.167). Как следует из (5.176), твисторные поля $Z_{ai}(\xi)$, $\bar{Z}^{ai}(\xi)$ должны удовлетворять четырем связям: (5.177), (5.180). Кроме того, с учетом соотношения инцидентности (5.176) мы получаем

$$\tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}\rho^m\lambda_\alpha\,\partial_m X^{\dot{\alpha}\alpha}= \tfrac{1}{2}(\partial_m\tilde{Z}^a\rho^m Z_a-\tilde{Z}^a\rho^m\partial_m Z_a). \tag{5.183}$$

Подставляя (5.183) в (5.167) и принимая во внимание связи (5.180), мы получаем действие

$$S=\tfrac{1}{2}\int d^2\xi\, e\left(\partial_m\tilde{Z}^a\rho^m Z_a-\tilde{Z}^a\rho^m\partial_m Z_a\right)-\int d^2\xi\,\left(e\tfrac{M\bar{M}}{T}+\Lambda^i_j V^j_i\right) \tag{5.184}$$

где

$$M\equiv\epsilon^{ij}I^{ab}Z_{ai}Z_{bj}=\lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i},\qquad \bar{M}\equiv-\epsilon_{ij}I_{ab}\bar{Z}^{ai}\bar{Z}^{bj}=\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}i}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}i}, \tag{5.185}$$

а I^{ab} и I_{ab} являются асимптотическими твисторами [78], описываемыми сингулярными 4×4 матрицами $I^{ab}=\begin{pmatrix}\epsilon^{\alpha\beta} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_{ab}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\end{pmatrix}$.

Отметим, что модели твисторных струн Берковица [123] и Зигеля [124] могут быть получены из действия (5.184) в пределе нулевого натяжения (см. также [125]). В вейлевском представлении для $d=2$ гамма-матриц действие принимает вид

$$\begin{aligned}S=&\int d^2\xi\, ee^m_-\left(\bar{Z}^{a1}\partial_m Z_{a1}-\partial_m\bar{Z}^{a1}Z_{a1}\right)+\\ &\int d^2\xi\, ee^m_+\left(\bar{Z}^{a2}\partial_m Z_{a2}-\partial_m\bar{Z}^{a2}Z_{a2}\right)-\int d^2\xi\,\left(e\tfrac{M\bar{M}}{T}+\Lambda^i_j V^j_i\right)\end{aligned} \tag{5.186}$$

где $e^m_\pm=\frac{1}{2}(e^m_0\pm e^m_1)$. Тогда, выполняя масштабное преобразование $Z_{ai}\to T^{1/2}Z_{ai}$, $e^m_-\to T^{-1}e^m_-$, $e^m_+\to Te^m_+$, $\Lambda^1_1\to T^{-1}\Lambda^1_1$ и переходя в предел нулевого натяжения $T \to 0$ мы получаем действие твисторной струны Зигеля [124] (с точностью до членов с токами Янга-Миллса)

$$S_{T\to 0} = \int d^2\xi \, e \left(\bar{Z}^{A1} \nabla_- Z_{A1} - \nabla_- \bar{Z}^{A1} Z_{A1} \right) \tag{5.187}$$

где $\nabla_- = e^m_- \partial_m + iA$ – ковариантная производная на мировой поверхности с $U(1)$-связностью $A = \bar{A} = \frac{i}{2e}\Lambda^1_1$. Отметим, что предел $Z_{a2} = 0$ в (5.186) также приводит к действию (5.187). Модель Берковица [123] можно рассматривать как удвоенный вариант модели Зигеля [124] с суммой двух действий (5.187): одного – для левых мод и второго – для твисторных струнных полей, движущихся вправо.

Уравнения движения для двумерной тетрады $e^{\underline{n}}_m$, следующие из действия (5.184), имеют вид

$$e^{\underline{n}}_m = \tfrac{T}{M\bar{M}} \left(\tilde{Z}^a \rho^{\underline{n}} \partial_m Z_a - \partial_m \tilde{Z}^a \rho^{\underline{n}} Z_a \right). \tag{5.188}$$

Подставляя (5.188) в (5.184) мы получаем новую нелинейную твисторную модель

$$S = \int d^2\xi \left[\tfrac{T}{M\bar{M}} \, \epsilon^{mn} \left(\partial_m Z_{a1} \bar{Z}^{a1} - Z_{a1} \partial_m \bar{Z}^{a1} \right) \left(\partial_n Z_{b2} \bar{Z}^{b2} - Z_{b2} \partial_n \bar{Z}^{b2} \right) - \Lambda^i_j V^j_i \right], \tag{5.189}$$

где $\Lambda^j_i = -(\overline{\Lambda^i_j})$.

Лагранжева плотность в действии (5.189) может быть представлена в следующем виде (мы используем обычные обозначения: $\dot{X} \equiv \frac{\partial X}{\partial \tau}$, $\acute{X} \equiv \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ и $\tau \equiv \xi^0$, $\sigma \equiv \xi^1$)

$$\mathcal{L} = \tfrac{T}{M\bar{M}} \, Q_2 \left(\dot{Z}_1 \bar{Z}^1 - Z_1 \dot{\bar{Z}}^1 \right) - \tfrac{T}{M\bar{M}} \, Q_1 \left(\dot{Z}_2 \bar{Z}^2 - Z_2 \dot{\bar{Z}}^2 \right) - \Lambda^i_j V^j_i \tag{5.190}$$

где

$$Q_1 \equiv \acute{Z}_1 \bar{Z}^1 - Z_1 \acute{\bar{Z}}^1, \qquad Q_2 \equiv \acute{Z}_2 \bar{Z}^2 - Z_2 \acute{\bar{Z}}^2$$

(в этих выражениях и ниже мы опускаем повторяющийся индекс a). Определения импульсов $P^{ai} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{Z}_{ai}$, $\bar{P}_{ai} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\bar{Z}}^{ai}$ производят связи

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{a1} &\equiv P^{a1} - \tfrac{T}{M\bar{M}} \, Q_2 \bar{Z}^{a1} \approx 0, \qquad & \mathcal{D}^{a2} &\equiv P^{a2} + \tfrac{T}{M\bar{M}} \, Q_1 \bar{Z}^{a2} \approx 0, \\ \bar{\mathcal{D}}_{a1} &\equiv \bar{P}_{a1} + \tfrac{T}{M\bar{M}} \, Q_2 Z_{a1} \approx 0, \qquad & \bar{\mathcal{D}}_{a2} &\equiv \bar{P}_{a2} - \tfrac{T}{M\bar{M}} \, Q_1 Z_{a2} \approx 0. \end{aligned} \tag{5.191}$$

Связи (5.180) и (5.191) являются первичными связями модели (5.190). Из (5.191) мы получаем следующие две связи первого рода

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= Z_{a1}\mathcal{D}^{a1} + \bar{Z}^{a1}\bar{\mathcal{D}}_{a1} = Z_{a1}P^{a1} + \bar{Z}^{a1}\bar{P}_{a1}, \\ \mathcal{F}_2 &= Z_{a2}\mathcal{D}^{a2} + \bar{Z}^{a2}\bar{\mathcal{D}}_{a2} = Z_{a2}P^{a2} + \bar{Z}^{a2}\bar{P}_{a2}, \end{aligned} \tag{5.192}$$

которые генерируют локальные масштабные преобразования (см. также (5.180)) (здесь нет суммирования по повторяющимся индексам i, j)

$$\delta Z_{ai} = c_i Z_{ai}, \qquad \delta \bar{Z}^{ai} = c_i \bar{Z}^{ai}. \tag{5.193}$$

Отметим, что нелинейные члены в (5.191) не инвариантны относительно масштабных преобразований (5.193):

$$\delta\left(Q_1/M\bar{M}\right) = -2c_2\left(Q_1/M\bar{M}\right), \quad \delta\left(Q_2/M\bar{M}\right) = -2c_1\left(Q_2/M\bar{M}\right). \tag{5.194}$$

Полный струнный лагранжиан (5.190) инвариантен относительно локальных преобразований (5.193) твисторов и преобразований $\delta\Lambda_i^j = -(c_i + c_j)\Lambda_i^j$ множителей Лагранжа.

5.6.2. Фиксация калибровки для масштабных преобразований и каноническое квантование

Условия

$$(TQ_1)/(M\bar{M}) = -1/2, \qquad (TQ_2)/(M\bar{M}) = 1/2, \tag{5.195}$$

фиксируют калибровку для локальных преобразований (5.193), (5.194). В этой калибровке действие (5.190) становится билинейным твисторным струнным действием

$$S_{gf} = \int d^2\xi \, \left[\tfrac{1}{2}\left(\dot{Z}_i\bar{Z}^i - Z_i\dot{\bar{Z}}^i\right) - \Lambda_j^i V_i^j - \Lambda_i\Phi_i\right], \tag{5.196}$$

где Z_{ai}, $\bar{Z}^{ai}$ подчинены связям (5.180) и калибровочным условиям (5.195)

$$\Phi_1 = \tfrac{1}{2}\,(\acute{Z}_1\bar{Z}^1 - Z_1\acute{\bar{Z}}^1) + \tfrac{M\bar{M}}{4T} \approx 0, \quad \Phi_2 = \tfrac{1}{2}\,(\acute{Z}_2\bar{Z}^2 - Z_2\acute{\bar{Z}}^2) - \tfrac{M\bar{M}}{4T} \approx 0. \tag{5.197}$$

В калибровке (5.195) связи (5.191) принимают вид

$$\mathcal{D}^{Ai} \to D^{Ai} \equiv P^{Ai} - \tfrac{1}{2}\,\bar{Z}^{Ai} \approx 0, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{Ai} \to \bar{D}_{Ai} \equiv \bar{P}_{Ai} + \tfrac{1}{2}\,Z_{Ai} \approx 0. \tag{5.198}$$

Используя канонические (одновременные) скобки Пуассона

$$\{Z_{Ai}(\sigma), P^{Bj}(\sigma')\}_{\text{P}} = \delta_A^B \delta_i^j \delta(\sigma - \sigma'), \qquad \{\bar{Z}^{Ai}(\sigma), \bar{P}_{Bj}(\sigma')\}_{\text{P}} = \delta_B^A \delta_j^i \delta(\sigma - \sigma'),$$

мы получаем алгебру связей

$$\{D^{Ai}(\sigma), \bar{D}_{Bk}(\sigma')\}_{\text{P}} = -\delta_B^A \delta_i^k \delta(\sigma - \sigma'). \tag{5.199}$$

То есть, связи (5.198) – второго рода. Вводя для них скобки Дирака ("T" обозначает твисторные скобки)

$$\begin{aligned} \{A(\sigma), B(\sigma')\}_{\text{T}} \;=\; & \{A(\sigma), B(\sigma')\}_{\text{P}} \\ & - \int d\sigma_1 \{A(\sigma), D^{ai}(\sigma_1)\}_{\text{P}} \{\bar{D}_{ai}(\sigma_1), B(\sigma')\}_{\text{P}} \\ & + \int d\sigma_1 \{A(\sigma), \bar{D}_{ai}(\sigma_1)\}_{\text{P}} \{D^{ai}(\sigma_1), B(\sigma')\}_{\text{P}}, \end{aligned} \tag{5.200}$$

мы получаем стандартные твисторные канонические соотношения для свободной твисторной струны

$$\{Z_{ai}(\sigma), \bar{Z}^{bj}(\sigma')\}_{\text{T}} = \delta_a^b \delta_i^j \, \delta(\sigma - \sigma'), \tag{5.201}$$

которые предполагались априори в [119] и не получались из твисторного струнного действия. Отметим, свободная двухмерная твисторная модель (5.196) постулировалась также в [252] при описании представлений супергруппы $SU(2,2|4)$.

Используя соотношения (5.201) можно найти твисторные скобки первичных связей (5.180), (5.197). Мы получаем

$$\{V_i^j(\sigma), V_k^l(\sigma')\}_{\text{T}} = -\left(\delta_k^j \, V_i^l - \delta_i^l \, V_k^j\right) \delta(\sigma - \sigma')\,, \tag{5.202}$$

$$\begin{aligned} \{\Phi_+(\sigma), \Phi_+(\sigma')\}_{\text{T}} &= \Big(\Phi_+(\sigma) + \Phi_+(\sigma')\Big)\delta'(\sigma - \sigma')\,, \\ \{\Phi_+(\sigma), \Phi_-(\sigma')\}_{\text{T}} &= \Big(\Phi_-(\sigma) + \Phi_-(\sigma')\Big)\delta'(\sigma - \sigma')\,, \\ \{\Phi_-(\sigma), \Phi_-(\sigma')\}_{\text{T}} &= \Big(\Phi_+(\sigma) + \Phi_+(\sigma')\Big)\delta'(\sigma - \sigma')\,, \end{aligned} \tag{5.203}$$

$$\{\Phi_+(\sigma), V_i^j(\sigma')\}_{\text{T}} = V_i^j(\sigma)\delta'(\sigma - \sigma')\,, \tag{5.204}$$

$$\begin{aligned}
\{\Phi_-(\sigma), V_1^1(\sigma')\}_{\text{T}} &= V_1^1(\sigma)\delta'(\sigma-\sigma')\,, \\
\{\Phi_-(\sigma), V_2^2(\sigma')\}_{\text{T}} &= -V_2^2(\sigma)\delta'(\sigma-\sigma')\,, \\
\{\Phi_-(\sigma), V_1^2(\sigma')\}_{\text{T}} &= -Q_1^2(\sigma)\delta(\sigma-\sigma')\,, \\
\{\Phi_-(\sigma), V_2^1(\sigma')\}_{\text{T}} &= Q_2^1(\sigma)\delta(\sigma-\sigma')
\end{aligned} \tag{5.205}$$

где $\Phi_\pm = \Phi_1 \pm \Phi_2$ и

$$Q_1^2 \equiv \acute{Z}_{a1}\bar{Z}^{a2} - Z_{a1}\acute{\bar{Z}}^{a2}\,, \qquad Q_2^1 \equiv \acute{Z}_{a2}\bar{Z}^{a1} - Z_{a2}\acute{\bar{Z}}^{a1}\,. \tag{5.206}$$

Связи (5.197) описывают алгебру Вирасоро, тогда как связи V_i^j (5.180) образуют $U(2)$ алгебру Каца-Муди. Однако перекрестные соотношения между этими алгебрами не замкнуты из-за последних двух скобок в (5.205) с билинейными выражениями Q_1^2, Q_2^1. Ниже увидим, что эти билинейные выражения (5.206) определяют вторичные связи в нашей модели.

5.6.3. Первичные и вторичные связи

Рассмотрим гамильтонову формулировку нашего твисторного действия (5.189) в калибровке (5.195), т.е., когда связи $\mathcal{D}^{ai}$, $\bar{\mathcal{D}}_{ai}$ заменяются на D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$. Остальные первичные связи Φ_i, V_i^j определяются выражениями (5.180), (5.197). Гамильтониан действия (5.196) имеет вид

$$H_1 = \int d\sigma \left(\Lambda_{ai}D^{ai} + \bar{\Lambda}^{ai}\bar{D}_{ai} + \Lambda_j^i V_i^j + \Lambda^i\Phi_i\right). \tag{5.207}$$

Так как струнные импульсы P^{ai}, $\bar{P}_{ai}$ присутствуют только в связях (5.198), ненулевые канонические скобки связей возникают только для D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$.

Сохранение связей D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$ во времени ($\dot{D}^{ai} = \left\{D^{ai}, H_1\right\}_{\text{P}} \approx 0$, $\dot{\bar{D}}_{ai} = \left\{\bar{D}_{ai}, H_1\right\}_{\text{P}} \approx 0$) приводит к выражениям Λ_{ai}, $\bar{\Lambda}^{ai}$ в виде линейных комбинаций лагранжевых множителей Λ_j^i, Λ^i. Временная независимость остальных связей (5.180), (5.197) ($\dot{F}_M = \{F_M, H_1\}_{\text{P}} \approx 0$; $F_M = (\Phi_i, V_i^j)$) приводит после длинных алгебраических вычислений к следующим условиям ($i = 1, 2$)

$$\dot{\Phi}_i \approx 0 \;\Rightarrow\; \Lambda_1^2 Q_2^1 - \Lambda_2^1 Q_1^2 \approx 0, \tag{5.208}$$

$$\dot{V}_i^j \approx 0 \;\Rightarrow\; \Lambda^- Q_i^j \approx 0, \quad i \neq j, \tag{5.209}$$

где $\Lambda^- \equiv \Lambda^1 - \Lambda^2$. Зануление временных производных связей V_1^1, V_2^2 не требует дополнительных условий.

После подстановки выражений для Λ_{ai}, $\bar{\Lambda}^{ai}$ через остальные лагранжевы множители гамильтониан (5.207) принимает вид

$$H_1 = \int d\sigma \left(\Lambda_j^i \hat{V}_i^j + \Lambda^i \hat{\Phi}_i \right) \tag{5.210}$$

где

$$\hat{V}_i^j \equiv Z_i P^j - \bar{P}_i \bar{Z}^j , \tag{5.211}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1 &\equiv \tfrac{1}{2} (\acute{Z}_1 P^1 - Z_1 \acute{P}^1 + \bar{P}_1 \acute{\bar{Z}}^1 - \acute{\bar{P}}_1 \bar{Z}^1) + \mathcal{R}, \\ \hat{\Phi}_2 &\equiv \tfrac{1}{2} (\acute{Z}_2 P^2 - Z_2 \acute{P}^2 + \bar{P}_2 \acute{\bar{Z}}^2 - \acute{\bar{P}}_2 \bar{Z}^2) - \mathcal{R}, \end{aligned} \tag{5.212}$$

$$\mathcal{R} \equiv \tfrac{M}{4T}(P^1 I \bar{Z}^2 + \bar{Z}^1 I P^2) - \tfrac{\bar{M}}{4T}(\bar{P}_1 I Z_2 + Z_1 I \bar{P}_2) - \tfrac{M\bar{M}}{4T}.$$

Отметим, что связи $\hat{\Phi}_i$, $\hat{V}_i^j$ отличаются от связей Φ_i, V_i^j на члены, пропорциональные связям D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$.

Уравнения (5.208)-(5.209) описывают дополнительные ограничениядля которых есть два возможных варианта.

i) Мы выбираем $\Lambda^- \neq 0$ и вторичные связи

$$Q_1^2 \approx 0, \qquad Q_2^1 \approx 0. \tag{5.213}$$

В этом случае следует добавить к (5.207) вторичные связи (5.213) и проверить их сохранение во времени.

ii) Можно выбрать в качестве альтернативы $Q_1^2 = (\overline{Q_2^1}) \neq 0$ и

$$\Lambda^- = 0\,, \qquad \Lambda_1^2 - \Lambda_2^1 = (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^1)(Q_1^2 - Q_2^1)/(Q_1^2 + Q_2^1).$$

В этом случае замыкание алгебры связей в произвольный момент времени подразумевает превращение двух первичных связей первого рода в связи второго рода. Можно показать, что в этом случае число степеней свободы твисторной струны не будет совпадать с числом физических степеней свободы бозонной струны. Далее мы будем изучать только случай **i)**.

Конечно, надо показать, что после добавления (5.213) мы получили полный набор сязей. Для этого мы должны рассмотреть гамильтониан на втором шаге гамильтонизации

$$H_2 = H_1 + \int d\sigma \left(L_2^1 Q_1^2 + L_1^2 Q_2^1 \right) \tag{5.214}$$

где H_1 определен в (5.207). Сохранение связей D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$ во времени ($\dot{D}^{ai} = \left\{D^{ai}, H_2\right\}_{\text{P}} \approx 0$, $\dot{\bar{D}}_{ai} = \left\{\bar{D}_{ai}, H_2\right\}_{\text{P}} \approx 0$) приводит снова к формулам, выражающим Λ_{ai}, $\bar{\Lambda}^{ai}$ в виде линейной комбинации Λ^i_j, Λ^i, L^1_2 and L^2_1. После подстановки этих фомул в (5.214) мы можем проверить, что связи $\hat{V}^j_i$, $\hat{\Phi}_i$ не изменяются, т.е. даются выражениями (5.211), (5.212), но вторичные связи (5.213) модифицируются и принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{Q}^2_1 &\equiv \acute{Z}_1 P^2 + \bar{P}_1 \acute{\bar{Z}}^2 - Z_1 \acute{P}^2 - \acute{\bar{P}}_1 \bar{Z}^2, \\ \hat{Q}^1_2 &\equiv \acute{Z}_2 P^1 + \bar{P}_2 \acute{\bar{Z}}^1 - Z_2 \acute{P}^1 - \acute{\bar{P}}_2 \bar{Z}^1. \end{aligned} \tag{5.215}$$

Временная независимость других связей $G_M = (V^j_i, \Phi_i, Q^2_1, Q^1_2)$, $\dot{G}_M = \left\{F_M, H_2\right\}_{\text{P}} \approx 0$, приводит с следующим новым четырем условиям

$$\dot{V}^j_i \approx 0 \;\Rightarrow\; M\bar{M}L^j_i \approx 0, \quad i \neq j, \tag{5.216}$$

$$\dot{Q}^j_i \approx 0 \;\Rightarrow\; M\bar{M}\Lambda^j_i \approx 0, \quad i \neq j. \tag{5.217}$$

Сохранение (5.216)-(5.217) приводит к занулению L^2_1, L^1_2, Λ^2_1 и Λ^1_2 в гамильтониане (5.214). Как результат, связи $\hat{V}^2_1$, $\hat{V}^1_2$ являются связями второго рода. В окончательном гамильтониане (5.214) остаются только связи первого рода $\hat{V}^1_1$, $\hat{V}^2_2$, $\hat{\Phi}_i$. Эти четыре связи имеют следующие ненулевые (одновременные) скобки (здесь нет суммирования по повторяющимся индексам i, j):

$$\left\{\hat{\Phi}_i(\sigma), \hat{\Phi}_j(\sigma')\right\}_{\text{P}} = \delta_{ij}\left(\hat{\Phi}_i(\sigma) + \hat{\Phi}_i(\sigma')\right)\delta'(\sigma - \sigma'), \tag{5.218}$$

$$\left\{\hat{\Phi}_i(\sigma), \hat{V}^j_j(\sigma')\right\}_{\text{P}} = \delta_{ij}\hat{V}^i_i(\sigma)\delta'(\sigma - \sigma'). \tag{5.219}$$

Вычисляя при фиксированном времени τ скобки Пуассона Z_{ai}, $\bar{Z}^{ai}$ с генераторами локальных симметрий нашей модели

$$\sum_{k=1}^{2} \int d\sigma \left(\varepsilon_k(\sigma,\tau)\hat{\Phi}_k(\sigma,\tau) + i\varphi_k(\sigma,\tau)\hat{V}^k_k(\sigma,\tau)\right), \tag{5.220}$$

мы получаем, что функции ε_i описывают инфинитезимальные репараметризации мировой поверхности, а φ_i дают абелевы локальные фазовые преобразования (5.168). Мы получаем, что наша твисторная модель описывается следующими связями первого рода: двумя связями Вирасоро и двумя $U(1) \bigotimes U(1)$ связями Каца - Муди для локальных фазовых преобразований.

Используя формулы (5.211)-(5.212) и (5.215), можно найти матрицу канонических скобок Пуассона связей второго рода D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$, $\hat{V}_1^2$, $\hat{V}_2^1$ и $\hat{Q}_1^2$, $\hat{Q}_2^1$. Поскольку канонические скобки Пуассона связей D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$ со всеми другими связями $\hat{\Phi}_i$, $\hat{V}_i^j$, $\hat{Q}_1^2$, $\hat{Q}_2^1$ пропорциональны D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$, то скобки Дирака, исключающие связи D^{ai}, $\bar{D}_{ai}$ (твисторные скобки), приводят к той же алгебре всех связей, как и канонические скобки Пуассона.

Подсчитаем количество физических степеней свободы в нашей модели. Неограниченные поля твисторного фазового пространства Z_{ai}, $\bar{Z}^{ai}$ содержат шестнадцать полевых переменных после введения твисторных скобок, исключающих P^{ai}, $\bar{P}_{ai}$. Связи второго рода $\hat{V}_1^2$, $\hat{V}_2^1$, $\hat{Q}_1^2$, $\hat{Q}_2^1$ исключают четыре переменых, тогда как связи первого рода $\hat{V}_1^1$, $\hat{V}_2^2$, $\hat{\Phi}_i$ исключают восемь струнных степеней свободы. Как результат, мы имеем четыре поля, описывающих физические степени свободы, как и в случае струны Намбу-Гото.

5.7. Резюме

В данной главе изучены твисторные формулировки частиц и суперчастиц высших спинов, а также струны Намбу-Гото.

После обсуждения симметрий высших спинов, мы построили модель частицы высших спинов, инвариантной относительно бозонного аналога суперсимметрии, и провели ее квантования. В отличие от случая обычной $\mathcal{N}{=}1$ суперсимметрии, алгебра бозонной суперсимметрии (5.29) содержит скалярный и псевдоскалярный центральные заряды, которые связаны с массовым параметром систем. В массивном случае мы получаем волновую функцию, удовлетворяющую уравнению Клейна-Гордона и бозонному аналогу условия киральности. В безмассовом пределе модели безмассовые поля произвольных спиральностей спектра удовлетворяют уравнению Фирца-Паули. В случае $\mathcal{N}{=}2$ бозонной суперсимметрии и при конкретном выборе внутренней симметрии ($O(1,1)$) в спектре получаются линейные уравнения Баргмана-Вигнера для $D = 4$ массивных спиновых полей.

Мы показали, что бозонной суперсимметрией в безмассовом случае является обобщенная конформная группа $SU(3,2)$. Нами была предложена новая модель безмассовой суперчастицы высших спинов, “живущая” в $\mathcal{N}{=}1$, $D{=}4$

суперпространстве, расширенном коммутирующим вейлевским спинором, и обладающая инвариантностью относительно преобразований из супергруппы $SU(3,2|1)$, которая объединяет стандартную нечетную и бозонную четную суперсимметрии. Для получения основных уравнений, определяющих суперконформное поле высших спинов, был проведен детальный анализ суперконформной инвариантности. В результате квантования предложенной модели мы получаем волновую функцию, которая описывает бесконечную башню киральных $\mathcal{N}$=1 супермультиплетов с растущим числом внешних спинорных индексов. Следует отметить, что рассмотрение суперконформной симметрии высших спинов $SU(3,2|1)$ позволяет сохранить важное понятие $\mathcal{N}$=1 киральности, лежащей в основе геометрического подхода в $\mathcal{N}$=1 супергравитации [175] и имеющей решающее значение для любой удовлетворительной суперполевой теории высших спинов, включающей соответствующие обобщения супергравитационной теории [176]. Следует также добавить, что реализации "бозонной" супер態алгебры были использованы в [265] для описания физических степеней свободы критической открытой струны с $\mathcal{N}$=2 конформной симметрией в 2+2 измерениях. Отметим, что в случае $OSp(1|8)$ киральность может быть введена только ценой добавления, помимо тензорных координат, некоторых гармонических переменных [176].

Обратим внимание также на структуру связей бозонной суперсимметрии (5.113). Эти связи в определенном смысле дуальны твисторным условиям инцидентности (3.17) – выражения переходят друг в друга после взаимной замены пространственно-временных координат и импульсов с определенной идентификацией спиноров. Более того, связи (5.113) подобны выражениям, определяющим так называемый импульсный твистор [266, 267, 268], который используется в определении дуальной суперконформной симметрии, возникающей при описании амплитуд рассеяния в $\mathcal{N}$=4 суперсимметричной теории Янга-Миллса. Это неожиданное совпадение предполагает дополнительную актуальность моделей с бозонной суперсимметрией.

В этой главе развита также новая модель частицы высших спинов, которая классически-эквивалентная одновременно и частице высших спинов развернутой формулировки, и модели частицы с бозонным аналогом суперсимметрии. Квантование мастер-системы порождает модифицированную развернутую систему уравнений, в которых бесконечные башни высших спинов определяются комплексными функциями, зависящими от новой скалярной комплексной переменной, голоморфными по ней и имеющими внешний $U(1)$-заряд, который полностью определяет соответствующий бесконечномерный спиновый мультиплет. Мы построили твисторную формулировку мастер-системы и представили общее решение ассоциированных уравнений высших спинов в терминах неограниченного твисторного “препотенциала”.

Отметим, что при выполнении диссертационного исследования были построены также другие формулировки частиц высших спинов. В частности, модель безмассовой частицы высшего спина с симметрией Максвелла, обсуждаемой в Главе 3, описывает взаимодействие спиновых полей с постоянным внешним полем [171]. В [183] была построена би-твисторная модель массивной частицы высших спинов, в которой твисторные спиноры описываются групповым многообразием ($SL(2,\mathbb{C})$ в случае $D{=}4$).

В применении твисторных методов к описанию динамики расширенных объектов мы получили твисторное действие бозонной струны с натяжением посредством рассмотрения на мировой поверхности канонической твисторной 2-формы в битвисторном пространстве. Полученная твисторная струна классически эквивалентна струне Намбу-Гото и двум импульсным формулировкам $D{=}4$ бозонной струны: с векторными и с тензорными струнными импульсами. Мы построили также альтернативное битвисторное масштабно-инвариантное действие бозонной $D{=}4$ струны Намбу-Гото. Было показано, что такая формулировка с помощью соответствующей фиксации калибровки локального масштабного преобразования приводит к билинейному твисторному действию и каноническим правилам квантования для двухмерного твисторного струнного поля. Связи первого рода билинейного твисторного действия описывают две связи Вирасоро и две $U(1)\bigotimes U(1)$ связи Каца-Муди для локальных фазовых преобразований.

Результаты настоящей главы опубликованы в работах [162, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 171, 183] и трудах конференций [184, 185, 186].

Заключение

В заключении перечислим основные результаты диссертации.

1. Построены составные сигма-модели суперсимметричной квантовой механики, основанные на взаимодействии динамических, спиновых и калибровочных мультиплетов и обладающие расширенной суперсимметрией, включая $\mathcal{N}=4$ суперконформное расширение многочастичной спиновой модели Калоджеро с $D(2,1;\alpha)$-симметрией. Найдены квантовые операторы симметрий моделей и определен их физический спектр. Установлено взаимно-однозначное соответствие между наличием $\mathcal{N}=4$ суперсимметрии в системе с полудинамическим $(\mathbf{3{,}4{,}1})$ мультиплетом и уравнениями Нама для спиновых переменных – как на классическом уровне, так и в квантовом случае.

2. Исследованы модели $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной квантовой механики, описывающие комплексы де Рама и Дальбо с кручениями, а также общие $\mathcal{N}=4$ модели с НКТ и би-НКТ геометриями, описывающие взаимодействие обычных и зеркальных $(\mathbf{4{,}4{,}0})$ мультиплетов и порождающие, в результате гамильтовой редукции, твистованные келеровы модели с дополнительными голоморфными членами в суперполевом действии. Определена структура суперзарядов, приводящая к новому геометрическому определению би-НКТ и ОКТ геометрий.

3. Изучены новые динамические системы с конформной симметрией Галилея, построенные с использованием метода нелинейных реализаций и обратного эффекта Хиггса. С помощью редукции Иноню-Вигнера релятивистских суперконформных алгебр найдены $\mathcal{N}$-расширенные суперконформные алгебры Галилея в $1\leq d\leq 5$ пространственных измерениях.

4. Построена модель релятивистской частицы, спиновые степени свободы которой описываются коммутирующим вейлевским спинором. Выполнено каноническое квантование и квантование с помощью функционального интеграла. Найден физический спектр модели, в котором вейлевский спинор играет роль индексного спинора.

5. Построены би-твисторные модели массивных релятивистских частиц с произвольным фиксированным спином, твисторные волновые функции которых определены на фактор-пространстве $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$, найдены координатные и полевые твисторные преобразования, связывающие пространственно-временное и твисторное описания, и проведено обобщение на случай массивной частицы высшего спина.

6. Изучены модели $D{=}4$ $\mathcal{N}=1$ суперчастицы с тензорными центральными зарядами, включая их твисторные формулировки, и установлена связь этих моделей с псевдоклассическим описанием спиновой частицы в массивном случае. Построена модель релятивистской частицы с дополнительными тензорными переменными, обладающая симметрией Максвелла и описывающая взаимодействие с постоянным внешним электромагнитным полем.

7. Построены и изучены новые модели безмассовых частиц и суперчастиц высших спинов, инвариантные относительно бозонного аналога суперсимметрии с сохранением условия киральности в суперсимметричном случае. Построена (супер)твисторная формулировка и найдены симметрии высших спинов в $SU(3,2)$ модели и ее суперсимметричном $SU(3,2|1)$ обобщении.

8. Представлена новая модель частицы высших спинов, в которой модель с “развернутой” формулировкой и модель частицы с бозонной суперсимметрией возникают как две разные фиксации калибровкок. Построена твисторная формулировка и представлено решение уравнений полей высших спинов через твисторный препотенциал.

9. Построено битвисторное действие бозонной струны с натяжением, генерирующее, после частичных фиксаций калибровок, билинейное твисторное действие. Выведены связи первого рода твисторной струнной модели, включающие две связи Вирасоро и две $U(1)\bigotimes U(1)$ связи Каца-Муди фазовых преобразований струнных твисторов.

Благодарности. Автор глубоко признателен Евгению Алексеевичу Иванову за постоянное внимание и многолетнее сотрудничество. Я также благодарен за помощь, многочисленные обсуждения и поддержку в первых шагах в науке моему первому научному руководителю Владимиру Григорьевичу Зиме, которого уже нет с нами. Мне также приятно поблагодарить моих соавторов Хосе Мигуэля де Азкаррагу, Олафа Лехтенфельда, Ежи Лукерского, Петра Косинского, Андрея Вольдемаровича Смилгу и Анжея Фрыдрыщака за плодотворное сотрудничество.

Большое значение имели для меня встречи и обсуждения с И.А. Бандосом, И.Л. Бухбиндером, М.А. Васильевым, А.В. Галажинским, А.А. Желтухиным, А.П. Исаевым, С.О. Кривоносом, А.П. Нерсесяном, А.П. Нурмагамбетовым, С.С. Сидоровым, Д.П. Сорокиным, А.О. Сутулиным, Я.М. Шниром. Всех их я сердечно благодарю.

Эта работа не могла бы быть успешной без поддержки и заботливого отношения со стороны руководства Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, которому я выражаю глубокую благодарность.

Список литературы

1. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1971. Т. 13. С. 452–455.
2. Волков Д. В., Акулов В. П. О возможном универсальном взаимодействии нейтрино // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1972. Т. 16. С. 621–624.
3. Wess J., Zumino B. Supergauge Transformations in Four-Dimensions // Nuclear Physics B. 1974. Vol. 70. P. 39–50.
4. Neveu A., Schwarz J. H. Quark Model of Dual Pions // Physical Review D. 1971. Vol. 4. P. 1109–1111.
5. Ramond P. Dual Theory for Free Fermions // Physical Review D. 1971. Vol. 3. P. 2415–2418.
6. Brink L., Di Vecchia P., Howe P. S. A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for the Spinning String // Physics Letters B. 1976. Vol. 65. P. 471–474.
7. Deser S., Zumino B. A Complete Action for the Spinning String // Physics Letters B. 1976. Vol. 65. P. 369–373.
8. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986. С. 184.
9. Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989. С. 328.
10. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1. С. 518.
11. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. Ideas and methods of supersymmetry and supergravity: Or a walk through superspace. Bristol, UK: IOP, 1998. P. 656.
12. Galperin A., Ivanov E., Ogievetsky V., Sokatchev E. Harmonic Superspace. UK: Cambridge University Press, 2001. P. 306.
13. Becker K., Becker M., Schwarz J. H. String theory and M-theory: A modern introduction. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2007. P. 739.
14. Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry // Nuclear Physics B. 1981. Vol. 188. P. 513–554.

15. Березин Ф. А., Маринов М. С. Классический спин и алгебра Грассмана // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1975. Т. 21. С. 678–680.
16. Berezin F., Marinov M. Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics // Annals of Physics. 1977. Vol. 104. P. 336.
17. Barducci A., Casalbuoni R., Lusanna L. Supersymmetries and the Pseudo-classical Relativistic electron // Nuovo Cimento A. 1976. Vol. 35. P. 377–399.
18. Brink L., Deser S., Zumino B., Di Vecchia P., Howe P. S. Local Supersymmetry for Spinning Particles // Physics Letters B. 1976. Vol. 64. P. 435–438.
19. Brink L., Di Vecchia P., Howe P. S. A Lagrangian Formulation of the Classical and Quantum Dynamics of Spinning Particles // Nuclear Physics B. 1977. Vol. 118. P. 76–94.
20. Гершун В. Д., Ткач В. И. Классическая и квантовая динамика частиц с произвольным спином // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 29. С. 320–324.
21. Howe P. S., Penati S., Pernici M., Townsend P. K. Wave Equations for Arbitrary Spin From Quantization of the Extended Supersymmetric Spinning Particle // Physics Letters B. 1988. Vol. 215. P. 555–558.
22. Casalbuoni R. The classical mechanics for Bose-Fermi systems // Nuovo Cimento A. 1976. Vol. 33. P. 389–431.
23. Brink L., Schwarz J. H. Quantum superspace // Physics Letters B. 1981. Vol. 100. P. 310–312.
24. Braden H. Supersymmetry with torsion // Physics Letters B. 1985. Vol. 163. P. 171–175.
25. Rohm R., Witten E. The Antisymmetric Tensor Field in Superstring Theory // Annals of Physics. 1986. Vol. 170. P. 454–489.
26. Kimura T. Index theorems on torsional geometries // Journal of High Energy Physics. 2007. Vol. 0708. P. 048.
27. Howe P. S., Papadopoulos G. Twistor spaces for HKT manifolds // Physics Letters B. 1996. Vol. 379. P. 80–86.
28. Ivanov E. A., Krivonos S. O., Leviant V. M. A New Class of Superconformal σ Models With the Wess-Zumino Action // Nuclear Physics B. 1988. Vol. 304. P. 601–627.

29. Spindel P., Sevrin A., Troost W., Van Proeyen A. Extended Supersymmetric Sigma Models on Group Manifolds. 1. The Complex Structures // Nuclear Physics B. 1988. Vol. 308. P. 662–698.
30. Gibbons G., Papadopoulos G., Stelle K. HKT and OKT geometries on soliton black hole moduli spaces // Nuclear Physics B. 1997. Vol. 508. P. 623–658.
31. Hull C. The Geometry of supersymmetric quantum mechanics. 1999. arXiv:hep-th/9910028.
32. Ivanov E. A., Smilga A. V. Quasicomplex N=2, d=1 Supersymmetric Sigma Models // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). 2013. Vol. 9. P. 069.
33. Alvarez-Gaume L. Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Communications in Mathematical Physics. 1983. Vol. 90. P. 161–173.
34. Atiyah M. F., Singer I. M. The Index of elliptic operators. 1 // Annals of Mathematics. 1968. Vol. 87. P. 484–530.
35. Atiyah M. F., Singer I. M. The Index of elliptic operators. 3. // Annals of Mathematics. 1968. Vol. 87. P. 546–604.
36. Ivanov E., Smilga A. Dirac Operator on Complex Manifolds and Supersymmetric Quantum Mechanics // International Journal of Modern Physics A. 2012. Vol. 27. P. 1230024.
37. Smilga A. V. Supersymmetric proof of the Hirzebruch-Riemann-Roch theorem for non-Kahler manifolds // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). 2012. Vol. 8. P. 003.
38. Bargmann V. Irreducible unitary representations of the Lorentz group // Annals of Mathematics. 1947. Vol. 48. P. 568–640.
39. Maldacena J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 1998. Vol. 2. P. 231–252.
40. Gubser S., Klebanov I. R., Polyakov A. M. Gauge theory correlators from noncritical string theory // Physics Letters B. 1998. Vol. 428. P. 105–114.
41. Witten E. Anti-de Sitter space and holography // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. 1998. Vol. 2. P. 253–291.
42. de Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Conformal Invariance in Quantum Me-

chanics // Nuovo Cimento A. 1976. Vol. 34. P. 569–612.

43. Calogero F. Solution of a three-body problem in one-dimension // Journal of Mathematical Physics. 1969. Vol. 10. P. 2191–2196.
44. Calogero F. Ground state of one-dimensional N body system // Journal of Mathematical Physics. 1969. Vol. 10. P. 2197–2200.
45. Акулов В. П., Пашнев А. И. Квантовая суперконформная модель в пространстве (1,2) // Теоретическая и математическая физика. 1983. Т. 56. С. 344–349.
46. Fubini S., Rabinovici E. Superconformal quantum mechanics // Nuclear Physics B. 1984. Vol. 245. P. 17–44.
47. Ivanov E., Krivonos S., Leviant V. Geometric superfield approach to superconformal mechanics // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 1989. Vol. 22. P. 4201.
48. Freedman D. Z., Mende P. F. An exactly solvable N-particle system in supersymmetric quantum mechanics // Nuclear Physics B. 1990. Vol. 344. P. 317–343.
49. Claus P., Derix M., Kallosh R., Kumar J., Townsend P. K. et al. Black holes and superconformal mechanics // Physical Review Letters. 1998. Vol. 81. P. 4553–4556.
50. de Azcarraga J., Izquierdo J., Perez Bueno J., Townsend P. Superconformal mechanics and nonlinear realizations // Physical Review D. 1999. Vol. 59. P. 084015.
51. Gibbons G., Townsend P. Black holes and Calogero models // Physics Letters B. 1999. Vol. 454. P. 187–192.
52. Ivanov E., Krivonos S., Niederle J. Conformal and superconformal mechanics revisited // Nuclear Physics B. 2004. Vol. 677. P. 485–500.
53. Bellucci S., Galajinsky A., Ivanov E., Krivonos S. AdS(2)/CFT(1), canonical transformations and superconformal mechanics // Physics Letters B. 2003. Vol. 555. P. 99–106.
54. Galajinsky A. Particle dynamics on $\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ background with two-form flux // Physical Review D. 2008. Vol. 78. P. 044014.
55. Wyllard N. (Super)conformal many body quantum mechanics with extended supersymmetry // Journal of Mathematical Physics. 2000. Vol. 41.

P. 2826–2838.

56. Bellucci S., Galajinsky A., Krivonos S. New many-body superconformal models as reductions of simple composite systems // Physical Review D. 2003. Vol. 68. P. 064010.
57. Bellucci S., Galajinsky A., Latini E. New insight into WDVV equation // Physical Review D. 2005. Vol. 71. P. 044023.
58. Witten E. On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity // Nuclear Physics B. 1990. Vol. 340. P. 281–332.
59. Dijkgraaf R., Verlinde H. L., Verlinde E. P. Topological strings in $d < 1$ // Nuclear Physics B. 1991. Vol. 352. P. 59–86.
60. Galajinsky A., Lechtenfeld O., Polovnikov K. Calogero models and nonlocal conformal transformations // Physics Letters B. 2006. Vol. 643. P. 221–227.
61. Galajinsky A., Lechtenfeld O., Polovnikov K. N=4 mechanics, WDVV equations and roots // Journal of High Energy Physics. 2009. Vol. 0903. P. 113.
62. Krivonos S., Lechtenfeld O., Polovnikov K. $N = 4$ superconformal n-particle mechanics via superspace // Nuclear Physics B. 2009. Vol. 817. P. 265–283.
63. Bellucci S., Krivonos S., Sutulin A. Dual multiplets in $N = 4$ superconformal mechanics // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2013. Vol. 46. P. 035401.
64. Barut A. Conformal group → Schrödinger group → dynamical group → the maximal kinematical group of the massive Schrödinger particle. // Helvetica Physica Acta. 1973. Vol. 46. P. 496.
65. Havas P., Plebański J. Conformal extensions of the Galilei group and their relation to the Schrödinger group. // Journal of Mathematical Physics. 1978. Vol. 19. P. 482.
66. Lukierski J., Stichel P., Zakrzewski W. Exotic Galilean conformal symmetry and its dynamical realisations // Physics Letters A. 2006. Vol. 357. P. 1–5.
67. Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E. Unconstrained N=2 matter, Yang-Mills and supergravity theories in harmonic superspace // Classical and Quantum Gravity. 1984. Vol. 1. P. 469–498.
68. Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E. Unconstrained off-shell N=3 supersymmetric Yang-Mills theory // Classical and Quantum Gravity. 1985. Vol. 2. P. 155–166.

69. Ivanov E., Lechtenfeld O. N=4 supersymmetric mechanics in harmonic superspace // Journal of High Energy Physics. 2003. Vol. 0309. P. 073.
70. Floreanini R., Percacci R., Sezgin E. Sigma models with purely Wess-Zumino-Witten actions // Nuclear Physics B. 1989. Vol. 322. P. 255–276.
71. Howe P. S., Townsend P. Chern-Simons quantum mechanics // Classical and Quantum Gravity. 1990. Vol. 7. P. 1655–1668.
72. Delduc F., Ivanov E. Gauging N=4 Supersymmetric Mechanics // Nuclear Physics B. 2006. Vol. 753. P. 211–241.
73. Delduc F., Ivanov E. Gauging N=4 supersymmetric mechanics II: (1,4,3) models from the (4,4,0) ones // Nuclear Physics B. 2007. Vol. 770. P. 179–205.
74. Green M. B., Schwarz J. H. Covariant Description of Superstrings // Physics Letters B. 1984. Vol. 136. P. 367–370.
75. de Azcarraga J. A., Lukierski J. Supersymmetric Particles with Internal Symmetries and Central Charges // Physics Letters B. 1982. Vol. 113. P. 170–174.
76. Siegel W. Hidden local supersymmetry in the supersymmetric particle action // Physics Letters B. 1983. Vol. 128. P. 397–399.
77. Penrose R. Twistor algebra // Journal of Mathematical Physics. 1967. Vol. 8. P. 345.
78. Penrose R., MacCallum M. A. Twistor theory: An Approach to the quantization of fields and space-time // Physics Reports. 1972. Vol. 6. P. 241–316.
79. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время. Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени. М.: Мир, 1988. С. 572.
80. Ferber A. Supertwistors and Conformal Supersymmetry // Nuclear Physics B. 1978. Vol. 132. P. 55–64.
81. Sokatchev E. Harmonic superparticle // Classical and Quantum Gravity. 1987. Vol. 4. P. 237–246.
82. Nissimov E., Pacheva S. Quantization of the $N = 1$, $N = 2$ Superparticle With Irreducible Constraints // Physics Letters B. 1987. Vol. 189. P. 57–62.
83. Kallosh R., Rakhmanov M. Covariant Quantization of the Green-Schwarz Superstring // Physics Letters B. 1988. Vol. 209. P. 233–238.

84. Бандос И. А. Суперчастица в лоренцевом гармоническом суперпространстве // Ядерная физика. 1990. Т. 51. С. 1429–1444.
85. Delduc F., Galperin A., Sokatchev E. Lorentz harmonic (super)fields and (super)particles // Nuclear Physics B. 1992. Vol. 368. P. 143–174.
86. Galperin A., Howe P. S., Townsend P. Twistor transform for superfields // Nuclear Physics B. 1993. Vol. 402. P. 531–547.
87. Galperin A., Howe P. S., Stelle K. The Superparticle and the Lorentz group // Nuclear Physics B. 1992. Vol. 368. P. 248–280.
88. Зима В. Г., Федорук С. А. Ковариантное квантование $d = 4$ суперчастицы Бринка–Шварца с использованием лоренцевых гармоник // Теоретическая и математическая физика. 1995. Т. 102. С. 420–445.
89. Eisenberg Y., Solomon S. The Twistor Geometry of the Covariantly Quantized Brink-Schwarz Superparticle // Nuclear Physics B. 1988. Vol. 309-732. P. 709.
90. Berkovits N. A Supertwistor Description of the Massless Superparticle in Ten-dimensional Superspace // Physics Letters B. 1990. Vol. 247. P. 45–49.
91. Gauntlett J. P., Gibbons G. W., Hull C. M., Townsend P. K. BPS states of $D = 4$ $N = 1$ supersymmetry // Communications in Mathematical Physics. 2001. Vol. 216. P. 431–459.
92. de Azcarraga J., Gauntlett J. P., Izquierdo J., Townsend P. Topological Extensions of the Supersymmetry Algebra for Extended Objects // Physical Review Letters. 1989. Vol. 63. P. 2443.
93. Townsend P. Four lectures on M theory. 1996. arXiv:hep-th/9612121.
94. Sorokin D. P., Townsend P. K. M Theory superalgebra from the M five-brane // Physics Letters B. 1997. Vol. 412. P. 265–273.
95. Gauntlett J. P., Hull C. M. BPS states with extra supersymmetry // Journal of High Energy Physics. 2000. Vol. 0001. P. 004.
96. Bandos I. A., Lukierski J. Tensorial central charges and new superparticle models with fundamental spinor coordinates // Modern Physics Letters A. 1999. Vol. 14. P. 1257–1272.
97. Bandos I. A., Lukierski J., Sorokin D. P. Superparticle models with tensorial central charges // Physical Review D. 2000. Vol. 61. P. 045002.
98. Volkov D., Zheltukhin A. On the Equivalence of the Lagrangians of Massless

Dirac and Supersymmetrical Particles // Letters in Mathematical Physics. 1989. Vol. 17. P. 141–147.

99. Sorokin D. P., Tkach V. I., Volkov D. V. Superparticles, twistors and Siegel symmetry // Modern Physics Letters A. 1989. Vol. 4. P. 901–908.
100. Bandos I. A., Sorokin D. P., Tonin M., Pasti P., Volkov D. V. Superstrings and supermembranes in the doubly supersymmetric geometrical approach // Nuclear Physics B. 1995. Vol. 446. P. 79–118.
101. Sorokin D. P. Superbranes and superembeddings // Physics Reports. 2000. Vol. 329. P. 1–101.
102. Delduc F., Ivanov E., Krivonos S. 1/4 Partial breaking of global supersymmetry and new superparticle actions // Nuclear Physics B. 2000. Vol. 576. P. 196–218.
103. Bellucci S., Galajinsky A., Ivanov E., Krivonos S. Quantum mechanics of superparticle with 1/4 supersymmetry breaking // Physical Review D. 2002. Vol. 65. P. 104023.
104. Bacry H., Combe P., Richard J. Group-theoretical analysis of elementary particles in an external electromagnetic field. 2. the nonrelativistic particle in a constant and uniform field // Nuovo Cimento A. 1970. Vol. 70. P. 289–312.
105. Schrader R. The Maxwell group and the quantum theory of particles in classical homogeneous electromagnetic fields // Fortschritte der Physik. 1972. Vol. 20. P. 701–734.
106. Bonanos S., Gomis J. Infinite Sequence of Poincare Group Extensions: Structure and Dynamics // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2010. Vol. 43. P. 015201.
107. Porrati M., Rahman R., Sagnotti A. String Theory and The Velo-Zwanziger Problem // Nuclear Physics B. 2011. Vol. 846. P. 250–282.
108. Buchbinder I. L., Snegirev T. V., Zinoviev Yu. M. Cubic interaction vertex of higher-spin fields with external electromagnetic field // Nuclear Physics B. 2012. Vol. B864. P. 694–721.
109. Vasiliev M. A. Dynamics of Massless Higher Spins in the Second Order in Curvatures // Physics Letters B. 1990. Vol. 238. P. 305–314.
110. Vasiliev M. A. More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions // Physics Letters B. 1992. Vol. 285.

P. 225–234.

111. Vasiliev M. A. Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) // Physics Letters B. 2003. Vol. 567. P. 139–151.
112. Fradkin E., Vasiliev M. A. Candidate to the Role of Higher Spin Symmetry // Annals of Physics. 1987. Vol. 177. P. 63–112.
113. Vasiliev M. A. Extended Higher Spin Superalgebras and Their Realizations in Terms of Quantum Operators // Fortschritte der Physik. 1988. Vol. 36. P. 33–62.
114. Sezgin E., Sundell P. Doubletons and 5-D higher spin gauge theory // Journal of High Energy Physics. 2001. Vol. 0109. P. 036.
115. Vasiliev M. Conformal higher spin symmetries of 4-d massless supermultiplets and osp(L,2M) invariant equations in generalized (super)space // Physical Review D. 2002. Vol. 66. P. 066006.
116. Fronsdal C. Massless Particles, Orthosymplectic Symmetry And Another Type Of Kaluza-Klein Theory // in “Essays on Supersymmetry”, Reidel, Dordrecht, 1986. P. 163–265.
117. Shirafuji T. Lagrangian Mechanics of Massless Particles With Spin // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 70. P. 18–35.
118. Bengtsson I., Cederwall M. Particles, Twistors and the Division Algebras // Nuclear Physics B. 1988. Vol. 302. P. 81–103.
119. Cederwall M. An Extension of the Twistor Concept to String Theory // Physics Letters B. 1989. Vol. 226. P. 45–47.
120. Soroka V., Sorokin D. P., Tkach V., Volkov D. On a twistor shift in particle and string dynamics // International Journal of Modern Physics A. 1992. Vol. 7. P. 5977–5993.
121. Bandos I. A., Zheltukhin A. Green-Schwarz superstrings in spinor moving frame formalism // Physics Letters B. 1992. Vol. 288. P. 77–84.
122. Witten E. Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space // Communications in Mathematical Physics. 2004. Vol. 252. P. 189–258.
123. Berkovits N. An Alternative string theory in twistor space for N=4 superYang-Mills // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. P. 011601.
124. Siegel W. Untwisting the twistor superstring. 2004.
125. Bandos I. A., de Azcarraga J. A., Miquel-Espanya C. Superspace formula-

tions of the (super)twistor string // Journal of High Energy Physics. 2006. Vol. 0607. P. 005.

126. Cachazo F., Svrcek P., Witten E. MHV vertices and tree amplitudes in gauge theory // Journal of High Energy Physics. 2004. Vol. 0409. P. 006.
127. Cachazo F., Svrcek P., Witten E. Twistor space structure of one-loop amplitudes in gauge theory // Journal of High Energy Physics. 2004. Vol. 0410. P. 074.
128. Mason L. Twistor actions for non-self-dual fields: A Derivation of twistor-string theory // Journal of High Energy Physics. 2005. Vol. 0510. P. 009.
129. Boels R., Mason L., Skinner D. Supersymmetric Gauge Theories in Twistor Space // Journal of High Energy Physics. 2007. Vol. 0702. P. 014.
130. Berkovits N., Witten E. Conformal supergravity in twistor-string theory // Journal of High Energy Physics. 2004. Vol. 0408. P. 009.
131. Hughston L. Twistors and Particles // Lecture Notes in Physics. 1979. Vol. 97. P. 153.
132. Zinoviev Yu. M. Massive N=1 supermultiplets with arbitrary superspins // Nuclear Physics B. 2007. Vol. 785. P. 98–114.
133. Zinoviev Yu. M. Frame-like gauge invariant formulation for massive high spin particles // Nuclear Physics B. 2009. Vol. 808. P. 185–204.
134. Buchbinder I. L., Snegirev T. V., Zinoviev Yu. M. Frame-like gauge invariant Lagrangian formulation of massive fermionic higher spin fields in AdS_3 space // Physics Letters B. 2014. Vol. 738. P. 258–262.
135. Buchbinder I. L., Snegirev T. V., Zinoviev Yu. M. Lagrangian formulation of the massive higher spin supermultiplets in three dimensional space-time // Journal of High Energy Physics. 2015. Vol. 10. P. 148.
136. Braden H. Sigma models with torsion // Annals of Physics. 1986. Vol. 171. P. 433–462.
137. Mavromatos N. A Note on the Atiyah-singer Index Theorem for Manifolds With Totally Antisymmetric H Torsion // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 1988. Vol. 21. P. 2279.
138. Alvarez-Gaume L., Freedman D. Z. Ricci flat Kähler manifolds and supersymmetry // Physics Letters B. 1980. Vol. 94. P. 171–173.

139. Gates S. J., Jr., Hull C. M., Rocek M. Twisted Multiplets and New Supersymmetric Nonlinear Sigma Models // Nuclear Physics B. 1984. Vol. 248. P. 157–186.
140. Fedoruk S. A., Ivanov E. A., Smilga A. V. Real and complex supersymmetric $d = 1$ sigma models with torsions // International Journal of Modern Physics A. 2012. Vol. 27. P. 1250146(1–25).
141. Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O. Nahm equations in supersymmetric mechanics // Journal of High Energy Physics. 2012. Vol. 1206. P. 147(1–33).
142. Fedoruk S., Smilga A. Bi-HKT and bi-Kähler supersymmetric sigma models // Journal of Mathematical Physics. 2016. Vol. 57. P. 042103(1–24).
143. Fedoruk S., Ivanov E., Smilga A. $\mathcal{N} = 4$ mechanics with diverse (4, 4, 0) multiplets: Explicit examples of hyper-Kahler with torsion, Clifford Kahler with torsion, and octonionic Kahler with torsion geometries // Journal of Mathematical Physics. 2014. Vol. 55. P. 052302.
144. Fedoruk S., Smilga A. Comments on HKT supersymmetric sigma models and their Hamiltonian reduction // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2015. Vol. 48, no. 21. P. 215401.
145. Fedoruk S. A., Smilga A. V. Bi-HKT and bi-Kahler supersymmetric sigma models // Journal of Mathematical Physics. 2016. Vol. 57, no. 4. P. 042103.
146. Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O. Supersymmetric Calogero models by gauging // Physical Review D. 2009. Vol. 79, no. 10. P. 105015(1–6).
147. Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O. $OSp(4|2)$ Superconformal Mechanics // Journal of High Energy Physics. 2009. Vol. 0908. P. 081.
148. Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O. New $D(2, 1, \alpha)$ Mechanics with Spin Variables // Journal of High Energy Physics. 2010. Vol. 1004. P. 129.
149. Fedoruk S., Kosinski P., Lukierski J., Maslanka P. Nonrelativistic counterparts of twistors and the realizations of Galilean conformal algebra // Physics Letters B. 2011. Vol. 699, no. 1-2. P. 129–134.
150. Fedoruk S., Ivanov E., Lukierski J. Galilean Conformal Mechanics from Nonlinear Realizations // Physical Review D. 2011. Vol. 83, no. 8. P. 085013(1–12).
151. Fedoruk S., Lukierski J. Algebraic structure of Galilean superconformal symmetries // Physical Review D. 2011. Vol. 84. P. 065002(1–12).

152. Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O. Superconformal Mechanics // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2012. Vol. 45. P. 173001.
153. Fedoruk S., Ivanov E. New realizations of the supergroup $D(2,1;\alpha)$ in $\mathcal{N}$=4 superconformal mechanics // Journal of High Energy Physics. 2015. Vol. 10. P. 087(1–33).
154. Fedoruk S., Ivanov E. Gauged spinning models with deformed supersymmetry // Journal of High Energy Physics. 2016. Vol. 11. P. 103(1–23).
155. Fedoruk S. Superconformal Calogero Models as a Gauged Matrix Mechanics // Proceedings of the 18th International Colloquium on Integrable Systems and Quantum Symmetries, 18-20 Jun 2009. Prague, Czech Republic // Acta Polytechnica. 2010. Vol. 50, no. 3. P. 23.
156. Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O. New Super Calogero Models and $OSp(4|2)$ Superconformal Mechanics // 13th International Conference on Symmetry Methods in Physics, 6-9 Jul 2009, Dubna, Russia. // Ядерная физика, 2011. Т.74. С. 870.
157. Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O. Calogero Models and Superconformal Mechanics // Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics, "Symmetries and Groups in Contemporary Physics-/ Ed. by C. Bai, J.-P.Gazeau, M.-L. Ge. Vol. 11. World Scientific, 2013. P. 467–472.
158. Зима В. Г., Федорук С. Спиновая (супер)частица с коммутирующим индексным спинором // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1995. Т. 61. С. 241–246.
159. Fedoruk S., Zima V. Weinberg propagator of free massive arbitrary spin particle from BFV - BRST path integral // Classical and Quantum Gravity. 1999. Vol. 16. P. 3653–3671.
160. Зима В. Г., Федорук С. А. Пропагатор массивной спиновой частицы как BFV-BRST-континуальный интеграл // Ядерная физика. 2000. Т. 63. С. 683–688.
161. Fedoruk S., Zima V. Bitwistor formulation of massive spinning particle // Journal of Kharkiv University. 2003. Vol. 585. P. 39–48.
162. Fedoruk S., Lukierski J. Massive relativistic particle models with bosonic counterpart of supersymmetry // Physics Letters B. 2006. Vol. 632, no. 2-3. P. 371–378.

163. Fedoruk S., Frydryszak A., Lukierski J., Miquel-Espanya C. Extension of the Shirafuji model for massive particles with spin // International Journal of Modern Physics A. 2006. Vol. 21, no. 19-20. P. 4137–4160.

164. Fedoruk S., Lukierski J. Massive twistor particle with spin generated by Souriau-Wess-Zumino term and its quantization // Physics Letters B. 2014. Vol. 733. P. 309–315.

165. Fedoruk S., Zima V. Bitwistor formulation of the spinning particle // Proceedings of the International Workshop "Supersymmetries and Quantum Symmetries" (SQS'03), 24-29 July 2003, Dubna, Moscow region, Russia. P. 391–396.

166. Fedoruk S. Twistor transform for spinning particle // "Fundamental Interactions and Twistor-like Methods", Proceedings of the 19th Max Born Symposium, Wroclaw, Poland, September 28 - October 1, 2004 / AIP Conference Proceedings. 2005. Vol. 767. P. 106–126.

167. Fedoruk S., Frydryszak A., Lukierski J., Miquel-Espanya C. Massive Particle Model with Spin from a Hybrid (spacetime-twistorial) Phase Space Geometry and Its Quantization // "Quantum, Super and Twistors", Proceedings of the 22nd Max Born Symposium, Wroclaw, Poland, 27-29 September, 2006. P. 47–58.

168. Sorokin D. P., Tkach V., Volkov D., Zheltukhin A. From the Superparticle Siegel Symmetry to the Spinning Particle Proper Time Supersymmetry // Physics Letters B. 1989. Vol. 216. P. 302–306.

169. Fedoruk S., Zima V. Massive superparticle with tensorial central charges // Modern Physics Letters A. 2000. Vol. 15. P. 2281–2296.

170. Fedoruk S., Lukierski J. New particle model in extended space-time and covariantization of planar Landau dynamics // Physics Letters B. 2012. Vol. 718. P. 646–652.

171. Fedoruk S., Lukierski J. New spinorial particle model in tensorial space-time and interacting higher spin fields // Journal of High Energy Physics. 2013. Vol. 1302. P. 128(1–20).

172. Fedoruk S., Zima V. Uniform twistor - like formulation of massive and massless superparticles with tensorial central charges // Nuclear Physics B - Proceedings Supplements. Vol. 102. 2001. P. 233–239.

173. Fedoruk S., Zima V. Superparticle with tensorial central charges preserved any number of supersymmetries // Proceedings of the 9th International Conference on Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions, Dubna, Russia, June 11-17, 2001. P. 398–401.
174. Fedoruk S., Zima V. Twistorial superparticle with tensorial central charges // Proceedings of the International Conference "Quantum Electrodynamics and Statistical Physics", Oct. 30 - Nov. 3. // Вопросы атомной науки и техники, 2001. N. 6(2). C. 60–64.
175. Ogievetsky V., Sokatchev E. Structure of Supergravity Group // Physics Letters B. 1978. Vol. 79. P. 222–224.
176. Ivanov E., Lukierski J. Higher spins from nonlinear realizations of OSp(1|8) // Physics Letters B. 2005. Vol. 624. P. 304–315.
177. Fedoruk S., Ivanov E. Master Higher-spin particle // Classical and Quantum Gravity. 2006. Vol. 23, no. 17. P. 5195–5214.
178. Fedoruk S., Ivanov E., Lukierski J. Massless higher spin D=4 superparticle with both N=1 supersymmetry and its bosonic counterpart // Physics Letters B. 2006. Vol. 641, no. 2. P. 226–236.
179. Fedoruk S., Lukierski J. Twistorial versus space-time formulations: Unification of various string models // Physical Review D. 2007. Vol. 75, no. 2. P. 026004(1–5).
180. Fedoruk S., Ivanov E. New model of higher-spin particle // Ядерная физика. 2008. T. 71, № 5. C. 868–875.
181. Fedoruk S., Lukierski J. Two-twistor description of membrane // Physical Review D. 2007. Vol. 76, no. 6. P. 066005(1–7).
182. Fedoruk S., Lukierski J. Purely twistorial string with canonical twistor field quantization // Physical Review D. 2009. Vol. 79, no. 6. P. 066006(1–6).
183. de Azcarraga J., Fedoruk S., Izquierdo J., Lukierski J. Two-twistor particle models and free massive higher spin fields // Journal of High Energy Physics. 2015. Vol. 1504. P. 010(1–38).
184. Fedoruk S., Lukierski J. Maxwell group and HS field theory // Journal of Physics: Conference Series. 2013. Vol. 474. P. 012016.
185. Fedoruk S., Lukierski J. Higher spin particles with bosonic counterpart of supersymmetry // Proceedings of the International Workshop "Supersymme-

tries and Quantum Symmetries" (SQS'05), 27-31 Jul 2005, Dubna, Moscow region, Russia. P. 58–64.

186. Fedoruk S., Lukierski J. Twistorial and space-time descriptions of D=4 string models // "Quantum, Super and Twistors", Proceedings of the 22nd Max Born Symposium, Wroclaw, Poland, 27-29 September, 2006. P. 59–68.
187. Michelson J., Strominger A. Superconformal multiblack hole quantum mechanics // Journal of High Energy Physics. 1999. Vol. 9909. P. 005.
188. Gutowski J., Papadopoulos G. Moduli spaces for four-dimensional and five-dimensional black holes // Physical Review D. 2000. Vol. 62. P. 064023.
189. Friedan D., Windey P. Supersymmetric Derivation of the Atiyah-Singer Index and the Chiral Anomaly // Nuclear Physics B. 1984. Vol. 235. P. 395–416.
190. Pashnev A., Toppan F. On the classification of N extended supersymmetric quantum mechanical systems // Journal of Mathematical Physics. 2001. Vol. 42. P. 5257–5271.
191. Freedman D. Z., Townsend P. Antisymmetric Tensor Gauge Theories and Nonlinear Sigma Models // Nuclear Physics B. 1981. Vol. 177. P. 282–296.
192. Witten E. Constraints on Supersymmetry Breaking // Nuclear Physics B. 1982. Vol. 202. P. 253–316.
193. Smilga A. V. How to quantize supersymmetric theories // Nuclear Physics B. 1987. Vol. 292. P. 363–380.
194. Ivanov E., Mezincescu L., Townsend P. K. Fuzzy $CP^{(n|m)}$ as a quantum superspace // Proceedings of the Workshop on Symmetries in Gravity and Field Theory, Salamanca, 2003. 2003. P. 385–408.
195. Zumino B. Supersymmetry and Kähler Manifolds // Physics Letters B. 1979. Vol. 87. P. 203–206.
196. Delduc F., Ivanov E. N=4 mechanics of general (4, 4, 0) multiplets // Nuclear Physics B. 2012. Vol. 855. P. 815–853.
197. Ivanov E., Lechtenfeld O., Sutulin A. Hierarchy of N=8 Mechanics Models // Nuclear Physics B. 2008. Vol. 790. P. 493–523.
198. Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S., Lechtenfeld O. N=8 superconformal mechanics // Nuclear Physics B. 2004. Vol. 684. P. 321–350.
199. Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S., Lechtenfeld O. ABC of N=8, d=1 super-

multiplets // Nuclear Physics B. 2004. Vol. 699. P. 226–252.

200. Smilga A. Supercharges in the hyper-Kähler with torsion supersymmetric sigma models // Journal of Mathematical Physics. 2012. Vol. 53. P. 122105.
201. Grantcharov G., Poon Y. S. Geometry of hyper-Kahler connections with torsion // Communications in Mathematical Physics. 2000. Vol. 213. P. 19–37.
202. Bellucci S., Krivonos S., Marrani A., Orazi E. 'Root' action for N=4 supersymmetric mechanics theories // Physical Review D. 2006. Vol. 73. P. 025011.
203. Madore J. The Fuzzy sphere // Classical and Quantum Gravity. 1992. Vol. 9. P. 69–88.
204. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry // Physics Reports. 1980. Vol. 66. P. 213–393.
205. Ivanov E., Krivonos S., Lechtenfeld O. New variant of N=4 superconformal mechanics // Journal of High Energy Physics. 2003. Vol. 0303. P. 014.
206. Nahm W. The algebraic geometry of multimonopoles // Lecture Notes in Physics. 1983. Vol. 180. P. 456.
207. Dunajski M. Harmonic functions, central quadrics, and twistor theory // Classical and Quantum Gravity. 2003. Vol. 20. P. 3427–3440.
208. Jackiw R. Introducing scale symmetry // Physics Today. 1972. Vol. 25N1. P. 23–27.
209. Hagen C. Scale and conformal transformations in galilean-covariant field theory // Physical Review D. 1972. Vol. 5. P. 377–388.
210. Hakobyan T., Krivonos S., Lechtenfeld O., Nersessian A. Hidden symmetries of integrable conformal mechanical systems // Physics Letters A. 2010. Vol. 374. P. 801–806.
211. Ivanov E., Krivonos S., Leviant V. Geometry of conformal mechanics // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 1989. Vol. 22. P. 345.
212. Иванов Е. А., Огиевецкий В. И. Обратный эфект Хиггса в нелинейных реализациях // Теоретическая и математическая физика. 1975. Т. 25. С. 164–177.
213. Rabinovici E. Spontaneous Breaking of Space-Time Symmetries // Lecture Notes in Physics. 2008. Vol. 737. P. 573–605.
214. Jackiw R. Dynamical symmetry of the magnetic monopole // Annals of

Physics. 1980. Vol. 129. P. 183–200.

215. Polychronakos A. P. Integrable systems from gauged matrix models // Physics Letters B. 1991. Vol. 266. P. 29–34.
216. Горский А. С., Некрасов Н. Квантовые интегрируемые системы частиц как калибровочные теории // Теоретическая и математическая физика. 1994. Т. 100. С. 97–103.
217. Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1990. С. 240.
218. Переломов А. М. Алгебраический подход к решению одномерной модели N взаимодействующих частиц // Теоретическая и математическая физика. 1971. Т. 6. С. 364–391.
219. Brink L., Hansson T., Vasiliev M. A. Explicit solution to the N body Calogero problem // Physics Letters B. 1992. Vol. 286. P. 109–111.
220. Galajinsky A., Lechtenfeld O. Harmonic N=2 Mechanics // Physical Review D. 2009. Vol. 80. P. 065012.
221. Frappat L., Sorba P., Sciarrino A. Dictionary on Lie superalgebras. Academic Press, 2000. P. 410.
222. Ivanov E., Krivonos S., Lechtenfeld O. N=4, d=1 supermultiplets from nonlinear realizations of $D(2,1;\alpha)$ // Classical and Quantum Gravity. 2004. Vol. 21. P. 1031–1050.
223. Galajinsky A., Lechtenfeld O., Polovnikov K. N=4 superconformal Calogero models // Journal of High Energy Physics. 2007. Vol. 0711. P. 008.
224. Krivonos S., Lechtenfeld O. Many-particle mechanics with $D(2,1;\alpha)$ superconformal symmetry // Journal of High Energy Physics. 2011. Vol. 1102. P. 042.
225. Krivonos S., Lechtenfeld O. SU(2) reduction in N=4 supersymmetric mechanics // Physical Review D. 2009. Vol. 80. P. 045019.
226. Bellucci S., Krivonos S. Potentials in N=4 superconformal mechanics // Physical Review D. 2009. Vol. 80. P. 065022.
227. Polychronakos A. P. Physics and Mathematics of Calogero particles // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2006. Vol. 39. P. 12793–12846.
228. Son D. Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization

of the Schrodinger symmetry // Physical Review D. 2008. Vol. 78. P. 046003.

229. Balasubramanian K., McGreevy J. Gravity duals for non-relativistic CFTs // Physical Review Letters. 2008. Vol. 101. P. 061601.
230. Bagchi A., Gopakumar R. Galilean Conformal Algebras and AdS/CFT // Journal of High Energy Physics. 2009. Vol. 0907. P. 037.
231. Coleman S. R., Wess J., Zumino B. Structure of phenomenological Lagrangians. 1. // Physical Review. 1969. Vol. 177. P. 2239–2247.
232. Волков Д. В. Феноменологические лагранжианы // Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ). 1973. Т. 4. С. 3–41.
233. de Azcarraga J., Lukierski J. Galilean Superconformal Symmetries // Physics Letters B. 2009. Vol. 678. P. 411–415.
234. Sakaguchi M. Super Galilean conformal algebra in AdS/CFT // Journal of Mathematical Physics. 2010. Vol. 51. P. 042301.
235. Inonu E., Wigner E. P. On the Contraction of groups and their represenations // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1953. Vol. 39. P. 510–524.
236. Kugo T., Townsend P. K. Supersymmetry and the Division Algebras // Nuclear Physics B. 1983. Vol. 221. P. 357–380.
237. Fujita T., Ohashi K. Superconformal tensor calculus in five-dimensions // Progress of Theoretical Physics. 2001. Vol. 106. P. 221–247.
238. Bergshoeff E., Cucu S., De Wit T., Gheerardyn J., Halbersma R. et al. Superconformal N=2, D = 5 matter with and without actions // Journal of High Energy Physics. 2002. Vol. 0210. P. 045.
239. Zima V., Fedoruk S. Weinberg propagator of a massive particle with an arbitrary spin // Journal of Physical Studies. 1999. Vol. 3. P. 25–32.
240. Волков Д. В., Сорока В. А., Сорокин Д. П., Ткач В. И. Твисторный сдвиг в уравнениях релятивистских частиц и струн // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1990. Т. 52. С. 1124–1126.
241. Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. Quantization of relativistic systems with constraints // Physics Letters B. 1975. Vol. 55. P. 224–226.
242. Batalin I. A., Vilkovisky G. A. Relativistic S Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints // Physics Letters B. 1977. Vol. 69. P. 309–312.

243. Fradkin E. S., Fradkina T. E. Quantization of Relativistic Systems with Boson and Fermion First and Second Class Constraints // Physics Letters B. 1978. Vol. 72. P. 343–348.
244. Batalin I. A., Lavrov P. M., Tyutin I. V. A systematic study of finite BRST-BFV transformations in generalized Hamiltonian formalism // International Journal of Modern Physics A. 2014. Vol. 29. P. 1450127.
245. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции. Вып. 5. М.: Физматгиз, 1962. С. 656.
246. Bette A., de Azcarraga J. A., Lukierski J., Miquel-Espanya C. Massive relativistic particle model with spin and electric charge from two twistor dynamics // Physics Letters B. 2004. Vol. 595. P. 491–497.
247. de Azcarraga J. A., Frydryszak A., Lukierski J., Miquel-Espanya C. Massive relativistic particle model with spin from free two-twistor dynamics and its quantization // Physical Review D. 2006. Vol. 73. P. 105011.
248. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968. С. 84.
249. Ferrara S., Porrati M. Central extensions of supersymmetry in four-dimensions and three-dimensions // Physics Letters B. 1998. Vol. 423. P. 255–260.
250. Johnson M., Lippmann B. Relativistic Motion in a Magnetic Field // Physical Review. 1950. Vol. 77. P. 702–705.
251. Feynman R., Gell-Mann M. Theory of Fermi interaction // Physical Review. 1958. Vol. 109. P. 193–198.
252. Claus P., Gunaydin M., Kallosh R., Rahmfeld J., Zunger Y. Supertwistors as quarks of SU(2, 2|4) // Journal of High Energy Physics. 1999. Vol. 9905. P. 019.
253. Fradkin E., Linetsky V. Y. Conformal superalgebras of higher spins // Annals of Physics. 1990. Vol. 198. P. 252.
254. Vasiliev M. Higher-Spin Theories and $Sp(2M)$ Invariant Space–Time // Proceedings of the 3rd International Sakharov Conference on Physics, Moscow, 26-29 June, 2002.
255. Vasiliev M. Higher spin superalgebras in any dimension and their representations // Journal of High Energy Physics. 2004. Vol. 0412. P. 046.
256. Sorokin D. Introduction to the classical theory of higher spins // AIP Con-

ference Proceedings. 2005. Vol. 767. P. 172–202.

257. Васильев М. А., Гельфонд О. А., Скворцов Е. Д. Конформные токи полей высших спинов в пространстве Минковского // Теоретическая и математическая физика. 2008. Т. 154. С. 344–353.
258. Белавин А. А., Книжник В. Г. Комплексная геометрия и теория квантовых струн // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1986. Т. 91. С. 364–390.
259. Nambu Y. Dual model of hadrons // Lectures at the Copenhagen Summer Symposium. 1970.
260. Goto T. Relativistic quantum mechanics of one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model // Progress of Theoretical Physics. 1971. Vol. 46. P. 1560–1569.
261. Siegel W. Classical Superstring Mechanics // Nuclear Physics B. 1986. Vol. 263. P. 93–104.
262. Polyakov A. M. Quantum Geometry of Bosonic Strings // Physics Letters B. 1981. Vol. 103. P. 207–210.
263. Bars I., Deliduman C., Minic D. Strings, branes and two time physics // Physics Letters B. 1999. Vol. 466. P. 135–143.
264. Гусев О. Е., Желтухин А. А. Твисторное описание мировых площадок и интеграл действия струн // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1996. Т. 64. С. 449–455.
265. Devchand C., Lechtenfeld O. Extended selfdual Yang-Mills from the N=2 string // Nuclear Physics B. 1998. Vol. 516. P. 255–272.
266. Hodges A. Eliminating spurious poles from gauge-theoretic amplitudes // Journal of High Energy Physics. 2013. Vol. 05. P. 135.
267. Korchemsky G. P., Sokatchev E. Twistor transform of all tree amplitudes in N=4 SYM theory // Nuclear Physics B. 2010. Vol. 829. P. 478–522.
268. Mason L. J., Skinner D. Dual Superconformal Invariance, Momentum Twistors and Grassmannians // Journal of High Energy Physics. 2009. Vol. 11. P. 045.