

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Тихоокеанский государственный университет

На правах рукописи

Мазур Игорь Александрович

**Исследование резонансных ядерных процессов в
микроскопических подходах с использованием
осцилляторного базиса**

Специальность: 01.04.16 – Физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук
Широков Андрей Михайлович

Хабаровск – 2017

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Метод SS-HORSE анализа состояний рассеяния нейтральных частиц. Описание $n\alpha$-рассеяния методом SS-HORSE.	13
1.1. Введение	13
1.2. Формализм HORSE	15
1.3. Метод SS-HORSE	19
1.4. Применение метода к модельной задаче	29
1.5. Описание упругого рассеяния нейтрона на α -частице на основе микроскопических расчётов в NCSM	51
1.6. Заключение к главе 1	77
Глава 2. Предсказание резонансного состояния в системе четырёх нейтронов на основе расчётов в NCSM	79
2.1. Введение	79
2.2. Обобщение метода SS-HORSE для процессов истинно многочастичного рассеяния	81
2.3. Резонансные состояния системы четырёх нейтронов	84
2.4. Заключение к главе 2	94
Глава 3. Метод описания рассеяния на основе осцилляторного базиса и алгоритма Ланцоша	96
3.1. Введение	96
3.2. Алгоритм Ланцоша	97
3.3. Двухчастичное рассеяние	98
3.4. Рассеяние нейтрона на ядре	101
3.5. Применение метода к модельной задаче	104
3.6. Заключение к главе 3	106

Заключение	108
Список литературы	111

Введение

Актуальность темы исследования. Одна из главных целей теории атомного ядра состоит в понимании структуры ядер, процессов рассеяния и ядерных реакций.

В настоящее время активно развиваются подходы *ab initio* — безмодельные подходы к описанию ядер и ядерных реакций, где в качестве входной информации берётся только реалистическое взаимодействие между нуклонами, включающее в себя нуклон-нуклонные (NN), а при необходимости — и трёхнуклонные ($3N$) силы.

В последние 20 лет были созданы эффективные методы описания структуры ядра, такие как метод Монте-Карло для функции Грина (англ. Green Function's Monte Carlo, GFMC) [1–4], модель оболочек без инертного кора (англ. No-Core Shell Model, NCSM) [5, 6], метод связанных кластеров (англ. Coupled-Cluster Method, CCM) [7,8], ядерные расчёты на решётке в рамках эффективной теории поля (англ. Nuclear Lattice Effective Field Theory) [9,10] и другие. Эти методы значительно улучшили понимание свойства связанных состояний лёгких ядер.

С нашей точки зрения одним из наиболее перспективных методов описания ядра является NCSM. NCSM использует многочастичный осцилляторный базис, включающий все возможные состояния A -частичной ядерной системы с числом осцилляторных квантов возбуждения, не превышающим некоторое значения N_{\max} , которое является параметром метода. В NCSM полностью отделяется движение центра масс ядра. Однако, как и в случае любого другого подхода *ab initio*, размер базиса быстро растёт с числом нуклонов A , и надёжность предсказаний NCSM в случае достаточно тяжёлых ядер падает из-за необходимости введения все более сильного обрезания многочастичного базиса за счёт уменьшения параметра N_{\max} . В настоящее время возможности современных суперкомпьютеров позволяют рассчитывать в NCSM с разумной точностью ядра

с массой $A \lesssim 20$.

Расчёт энергий основных и возбуждённых состояний ядра в NCSM (равно как и в других версиях модели оболочек) начинается с нахождения зависимости $E_\nu(\hbar\Omega)$ связанного состояния ν в некотором модельном пространстве. Минимум такой зависимости ассоциируется с энергией этого состояния. Сходимость расчётов и их точность предсказания энергии оценивается при сопоставлении результатов, полученных в соседних модельных пространствах. В целях улучшения точности теоретических предсказаний недавно были предложены различные методы экстраполяции [11–21], которые позволяют оценивать значения собственной энергии в полных бесконечных оболочечных базисах.

За последнее десятилетие был достигнут значительный прогресс в описании реакций в трёх- и четырёхнуклонных системах. Методы уравнений Фаддеева, Фаддеева–Якубовского [22], метод Альта–Грассбергера–Сандхаса [23] — наиболее известные методы *ab initio*, способные описать наблюдаемые реакции на основе реалистических NN и $3N$ сил. В атомной физике также развиваются методы *ab initio* для описания систем из трёх и четырёх частиц (см., например, работы [24, 25]).

Для описания рассеяния в системах, состоящих более чем из четырёх нуклонов, в настоящее время также предложены методы *ab initio*, описания рассеяния: метод гиперсферических гармоник (см. обзор [26]), метод интегральных преобразований Лоренца [27]. Также, в методе GFMC были рассчитаны [28] характеристики низколежащих резонансных состояний $n\alpha$ -рассеяния с $J^\pi = \frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$, а также нерезонансного состояния $\frac{1}{2}^+$ с энергией ниже 5 МэВ в системе центра масс. Свойства ядерных резонансов могут быть исследованы с помощью модели оболочек, учитывающей Гамовские состояния, в частности версией *ab initio* такой модели, не использующей понятия инертного кора (англ. No-core Gamow shell model, NCGSM) [29]. Существует подход, который заключается в комбинировании NCSM и метода резонирующих групп (англ. Resonant Group Method, RGM [30]), который известен под названиями NCSM/RGM или NCSMC

(No-Core Shell Model with Continuum) [6, 31–34]. Этот метод в настоящее время используется для ряда процессов, включающих в себя вплоть до $A = 11$ нуклонов.

Приведённые выше подходы NCGSM и NCSMC основаны на модели оболочек и существенно усложняют расчёты. Возможно ли без усложнения расчётов выделить информацию о состояниях непрерывного спектра непосредственно из результатов, полученных в модели оболочек? Обычно полагается, что энергии оболочечных состояний в континууме ассоциируются с резонансными энергиями. Однако, как было показано в работах [35, 36], состояния модели оболочек могут оказываться выше области резонанса, особенно в случае широких резонансов. Более того, анализ в работах [35, 36] демонстрирует, что модель оболочек должна также генерировать некоторые состояния в нерезонансном континууме.

В настоящей работе предлагается метод SS-HORSE (Single State Harmonic Oscillator Representation of Scattering Equations) описания состояний непрерывного спектра, в том числе резонансных, на основе реалистического NN -взаимодействия. В качестве первого этапа в рамках этого метода нужно получить зависимость собственных значений E_ν гамильтониана NCSM от модельных параметров — параметра обрезания базиса \mathbb{N} и параметра осцилляторного базиса $\hbar\Omega$. Второй этап заключается в расчёте зависимости сдвига фаз от энергии и резонансных параметров (если они есть). Т. к. второй этап не предполагает сложных вычислений, то потенциально с помощью метода SS-HORSE можно рассчитывать характеристики процессов рассеяния с участием $A \lesssim 20$ нуклонов.

Вызывает интерес возможность применения метода SS-HORSE к описанию состояний непрерывного спектра и особенно резонансных состояний экзотических систем нуклонов. Особенно это касается системы четырёх нейтронов, интерес к которой возник вновь после недавнего эксперимента [37], который дал указание на существование резонансной структуры в системе $4n$ с энергией 0.83 ± 0.65 (стат) ± 1.25 (сист) МэВ и с верхней оценкой ширины в 2.6 МэВ. Дан-

ный эксперимент набрал достаточно малую статистику, однако вскоре планируется осуществить новые эксперименты по исследованию данной системы [38–40].

Вопрос об изучении экзотической структуры $4n$ был поднят около полувека назад (история вопроса кратко изложена в работе [41]). За это время был осуществлён ряд экспериментов по поиску связанного или резонансного состояния тетранейтрона, однако такое состояние обнаружено не было [42–47]. По результатам эксперимента [48] утверждалось, что было найдено связанное состояние, однако, этот результат не был подтверждён другими исследованиями.

К настоящему времени проведён ряд теоретических исследований системы четырёх нейтронов. Показано, что согласно современным представлениям о ядерном взаимодействии связанного состояния в такой системе быть не может [49]. Вопрос о существовании и характеристиках резонансного состояния остаётся открытым.

Цели и задачи диссертационной работы. Цель настоящей работы заключается в развитии подходов *ab initio* к описанию состояний резонансного и нерезонансного рассеяния.

Задачами являются:

- Разработка метода SS-HORSE для описания упругого рассеяния и резонансов на основе вариационных расчётов с осцилляторным базисом и его верификация в модельной задаче.
- Использование метода SS-HORSE для описания упругого рассеяния $n\alpha$ и анализа резонансов $\frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$ на основе расчётов *ab initio* в модели оболочек без инертного кора с реалистическим NN -взаимодействием ядер ${}^5\text{He}$ и ${}^4\text{He}$.
- Обобщение метода SS-HORSE на случай истинно многочастичного рассеяния $4 \rightarrow 4$, анализ резонансных свойств системы четырёх нейтронов на основе расчетов в модели оболочек без инертного кора с реалистическим NN -взаимодействием.

- Разработка последовательного метода описания рассеяния нуклона на ядре в рамках модели оболочек без инертного кора на основе алгоритма Ланцоша и формализма осцилляторного представления уравнений теории рассеяния и его верификация в модельной задаче.

Научная новизна.

- Предложен метод SS-HORSE описания состояний рассеяния в ядерных процессах на основе расчётов в NCSM с реалистическим NN -взаимодействием. Метод апробирован на двухчастичной задаче, моделирующей рассеяние нейтрона на α -частице.
- Метод SS-HORSE применён к описанию рассеяния нейтрона на α -частице с использованием расчётов ядер ${}^5\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ в NCSM с реалистическим NN -взаимодействием JISP16. Полученные сдвиги фаз и резонансные характеристики находятся в согласии с результатами анализа экспериментальных данных.
- Метод SS-HORSE обобщён на случай многочастичного рассеяния в приближении демократического распада. Рассмотрена система четырёх нейтронов в NCSM с реалистическим взаимодействием JISP16. Предсказано существование резонансного состояния, определены его энергия и ширина, а также поведение сдвига фаз в низкоэнергетической области.
- Предложен теоретически обоснованный подход анализа состояний рассеяния в NCSM, основанный на свойствах осцилляторного базиса и алгоритма Ланцоша. Метод апробирован на модельной задаче.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа является теоретическим исследованием. Задача описания процессов рассеяния *ab initio* является актуальной задачей ядерной физики. Кроме общетеоретического значения, разработанный метод может быть использован для оценки

характеристик рассеяния экспериментально неизученных или слабо изученных процессов. Такая информация необходима для постановки экспериментов в области ядерной физики. В частности, в данной работе предсказано резонансное состояние в системе четырёх нейтронов.

Результаты, представленные в данной работе, могут найти применение в теоретических и экспериментальных исследованиях в области ядерной физики, которые проводятся в российских и зарубежных научных центрах, в частности в ТОГУ (г. Хабаровск), МГУ имени М. В. Ломоносова (г. Москва), НИЦ “Курчатовский институт” (г. Москва), ОИЯИ (г. Дубна), НИЯУ МИФИ (г. Москва), СПбГУ (г. Санкт-Петербург), ВГУ (г. Воронеж), Rare Isotope Science Project (Республика Корея), Iowa State University (США), RIKEN (Япония), Texas A&M University (США), University of Notre Dame (США), Grand Accélérateur National d’Ions Lourds (Франция).

Методология и методы исследования. В работе используются методы квантовой теории рассеяния и структуры ядра.

Степень достоверности. Разработанный метод SS-HORSE для микроскопического описания упругого рассеяния основан на надёжных и апробированных подходах в квантовой теории рассеяния и структуры атомного ядра.

Предложенный в работе метод анализа состояний рассеяния, как показано ниже, с высокой точностью воспроизводит результаты модельной двухчастичной задачи, тем самым демонстрируя возможность применения и в многочастичных задачах.

При описании резонансного рассеяния на основе многочастичных расчётов использовалось реалистическое нуклон-нуклонное взаимодействие JISP16, достаточно успешно описывающее многие ядра с числом нуклонов вплоть до $A = 16$.

Как показано ниже, метод SS-HORSE даёт разумные результаты в случае использования небольших модельных пространств NCSM. Это означает, что данный метод “предсказывает” собственные энергии NCSM в непрерывном

спектре в больших модельных пространствах.

Положения, выносимые на защиту:

- Предложен метод SS-HORSE описания состояний непрерывного спектра в ядерных системах на основе расчётов в модели оболочек без инертного кора.
- Метод SS-HORSE успешно применён для описания рассеяния нейтрона на α -частице на основе расчётов в модели оболочек без инертного кора ядер ${}^5\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ с реалистическим NN -взаимодействием JISP16. Полученные характеристики резонансного и нерезонансного рассеяния находятся в разумном согласии с экспериментальными данными.
- Метод SS-HORSE обобщён и использован для описания многочастичного рассеяния в приближении демократического распада. Обобщённый метод применён для поиска резонансного состояния системы четырёх нейтронов на основе расчётов в модели оболочек без инертного кора с NN -взаимодействием JISP16. Получено, что в такой системе существует резонансное состояние с энергией около 0.8 МэВ и шириной около 1.4 МэВ. Этот результат согласуется с недавно проведённым экспериментом.
- На основе свойств осцилляторного базиса и алгоритма Ланцоша предложен последовательный метод описания состояний континуума в ядерных системах в рамках модели оболочек без инертного кора.

Апробация результатов. Основные результаты диссертационной работы докладывались автором на следующих конференциях:

- XII региональная научная конференция “Физика: Фундаментальные и Прикладные Исследования, Образование” (г. Хабаровск, 28–31 октября 2013 года);

- Международная конференция “Nuclear Theory in the Supercomputing Era – 2014” (г. Хабаровск, 23–27 июня 2014 года);
- Всероссийская молодежная научная конференция “Физика: Фундаментальные и Прикладные Исследования, Образование” (г. Благовещенск, 23–27 сентября 2014 года);
- XIV международный семинар “Electromagnetic Interactions of Nuclei – 2015” (г. Москва, 5–8 октября 2015 года);
- Международная конференция “Nuclear Theory in the Supercomputing Era – 2016” (г. Хабаровск, 19–23 сентября 2016 года).

Публикации. Материалы диссертационной работы опубликованы в 9 печатных работах, из них 4 в рецензируемых журналах [A1–A4] и 5 в сборниках трудов конференций [A5–A9].

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Автор диссертационной работы принимал непосредственное участие, как на этапах постановки задач, так и на этапах вывода формул, проведения численных расчётов, а также обсуждения полученных результатов и подготовки публикаций. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объём диссертации составляет 119 страниц, из них 110 страниц текста, включая 74 рисунка. Библиография включает 105 наименований на 9 страницах.

Основное содержание работы изложено в трёх главах.

Глава 1 посвящена построению метода SS-HORSE, его применению к модельной двухчастичной задаче и использованию для описания $n\alpha$ -рассеяния на основе нуклон-нуклонного взаимодействия JISP16. Рассчитаны энергии и ши-

рины резонансных состояний $\frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$, рассчитана зависимость сдвига фаз от энергии для состояний рассеяния $\frac{3}{2}^-$, $\frac{1}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^+$.

В *главе 2* производится обобщение метода SS-HORSE для описания процессов демократического распада нейтральных частиц. Обобщённый метод применяется для получения зависимости сдвига фазы, энергии и ширины резонансного состояния в системе четырёх нейтронов.

Глава 3 посвящена построению метода описания рассеяния на основе свойств осцилляторного базиса и алгоритма Ланцоша и его применению к модельной двухчастичной задаче.

Глава 1

Метод SS-HORSE анализа состояний рассеяния нейтральных частиц. Описание $n\alpha$ -рассеяния методом SS-HORSE.

1.1. Введение

Общее поведение положительных собственных энергий (также как и энергий выше различных порогов реакций), полученных в модели оболочек, в настоящее время не изучено достаточно хорошо, и до сих пор не существовало методов экстраполяции в бесконечное модельное пространство для резонансных состояний. Описание ядерного континуума в настоящее время возможно с помощью расширения модели оболочек на основе J -матричного формализма теории рассеяния. Первоначально формализм J -матрицы был предложен в атомной физике [50, 51]. Позднее этот формализм был независимо открыт заново в ядерной физике [52–54] и был успешно использован в рамках модели оболочек [55–58]. Метод J -матрицы зарекомендовал себя как один из наиболее эффективных и точных методов решения широкого круга задач атомной и ядерной физики (см., например, тематический сборник [59]). Формализм J -матрицы использует диагонализацию гамильтониана в одном из двух базисов: лагеровском базисе, который представляет интерес для атомной физики, и в актуальном для ядерной физики осцилляторном базисе. Версия формализма J -матрицы с осцилляторным базисом известна также как алгебраическая версия RGM [52, 53, 60, 61] и как осцилляторное представление уравнений теории рассеяния (англ. Harmonic Oscillator Representation of Scattering Equations, HORSE) [62]. В дальнейшем мы будем использовать именно этот вариант формализма J -матрицы.

Отметим, что прямое применение формализма HORSE в современных расчётах в NCSM с большими базисами является неоправданно сложным. Для вычисления сдвигов фаз и других характеристик рассеяния необходимы все результаты диагонализации гамильтониана модели оболочек, что технически очень сложно для модельных пространств, включающие в себя миллионы осцилляторных состояний в NCSM. Более подробно этот факт обсуждается в разделе 1.3.

Мы будем использовать формализм HORSE при собственных энергиях гамильтониана NCSM, поскольку в этом случае расчёт существенно упрощается и, как показано в главе 3, ускоряется сходимость расчёта сдвигов фаз, S -матрицы, резонансных параметров (при их наличии) и т. д. Расчёт сдвига фаз рассеяния при собственной энергии гамильтониана в осцилляторном базисе и получение зависимости сдвига фаз от энергии при варьировании параметров базиса недавно было представлено в работе [14] с использованием другого (не HORSE) метода. Детальное исследование сдвига фаз при собственной энергии гамильтониана в произвольном \mathcal{L}^2 базисе было произведено в работах [63, 64]. Это исследование опирается на теорию функций спектрального сдвига, предложенную около 70 лет назад [65–67], которая позднее была фактически забыта физиками, хотя и используется ныне математиками (например, работа [68]).

Существует также другой метод получения сдвига фаз из расчётов связанных состояний в осцилляторном базисе, который характеризуется тем, что в нём используется дополнительный осцилляторный потенциал [69]. Применение этого метода к описанию нуклон-нуклонного рассеяния показало, что он требует больших базисов для расчётов характеристик низконеэнергетического рассеяния.

В данной работе предлагается более простой и более мощный метод. Ниже мы формулируем метод Single State HORSE (SS-HORSE) для расчёта сдвигов фаз низкоэнергетического рассеяния, вычисления резонансных энергий E_r и ширины Γ на основе результатов расчётов в модели оболочек, или, более общо, на основе результатов любых вариационных расчётов с использованием осцил-

ляторного базиса. Метод SS-HORSE применяется для нахождения S -матрицы в интервале энергий, полученном при вычислении собственных энергий NCSM E_r с различными значениями параметров базиса N_{\max} и $\hbar\Omega$. Используется низкоэнергетическое представление S -матрицы, параметры которого подгоняются. В результате подгонки параметров получаются сдвиги фаз δ_ℓ , резонансные энергии E_r и ширины Γ .

Получены соотношения, описывающие общее поведение собственных энергий состояний, ассоциирующихся с резонансным и нерезонансным континуумом как функций $\hbar\Omega$ и параметра обрезания матрицы гамильтониана.

Этот метод апробирован в расчётах сдвига фаз и резонансных параметров двухчастичного рассеяния с модельным потенциалом. Далее, метод был использован для расчёта резонансного и нерезонансного континуума рассеяния на основе расчётов в NCSM ядер ^5He и ^4He . В качестве входных данных взято реалистическое NN -взаимодействие JISP16 [70].

Структура данной главы следующая. В разделе 1.2 описан формализм. Затем в разделе 1.3 введён метод SS-HORSE, в подразделе 1.3.2 которого вводятся параметризации фаз в соответствии с аналитическими свойствами S -матрицы. В разделе 1.4 производится верификация метода на модельной задаче. В разделе 1.5 обсуждается описание $n\alpha$ -рассеяния методом SS-HORSE на основе расчётов в NCSM.

1.2. Формализм HORSE

Как было отмечено во введении, надёжным методом описания двухчастичного рассеяния или рассеяния частицы на потенциале является формализм HORSE. В этом разделе будет представлен краткий обзор данного формализма.

В задачах рассеяния волновую функцию обычно представляют в виде раз-

ложения по парциальным волнам

$$\psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} e^{\pm i\delta_{\ell}} u_{\ell}(k, r) Y_{\ell m}^*(\Omega_{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\Omega_{\mathbf{r}}), \quad (1.1)$$

здесь \mathbf{k} — волновой вектор, $\Omega_{\mathbf{k}}$, $\Omega_{\mathbf{r}}$ — угловые переменные в импульсном и координатном пространстве соответственно, $Y_{\ell m}$ — сферическая функция [71] (символ $(*)$ обозначает комплексное сопряжение), δ_{ℓ} — сдвиг фаз рассеяния в парциальной волне с угловым моментом ℓ . Радиальная волновая функция $u_{\ell}(k, r)$ удовлетворяет радиальному уравнению Шрёдингера

$$H^{\ell} u_{\ell}(k, r) = E u_{\ell}(k, r), \quad (1.2)$$

волновой вектор и энергия E связаны соотношением $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$, где μ — приведённая масса рассеивающихся частиц.

Решение этого уравнения будем искать в виде разложения по бесконечному набору осцилляторных функций с параметром $\hbar\Omega$

$$u_{\ell}(k, r) = \sum_{N=N_0, N_0+2, \dots, \infty} a_{N\ell}(k) R_N^{\ell}(r), \quad (1.3)$$

где $R_N^{\ell}(r)$ — радиальные осцилляторные функции, $N = 2n + \ell$ — число квантов, причём n — радиальное квантовое число, $N_0 = \ell$ — минимальное число квантов.

Радиальные осцилляторные функции в формуле (1.3) имеют вид

$$R_N^{\ell}(r) = (-1)^{(N-\ell)/2} \sqrt{\frac{2\Gamma(N/2 - \ell/2 + 1)}{r_0 \Gamma(N/2 + \ell/2 + 3/2)}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\ell+1} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right) L_{(N-\ell)/2}^{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right). \quad (1.4)$$

Здесь $r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\Omega}}$ — осцилляторный радиус, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $L_n^{\alpha}(x)$ — обобщённый полином Лагерра [72].

Подстановка разложения (1.3) в уравнение (1.2) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\sum_{N'=N_0, N_0+2, \dots, \infty} (H_{NN'}^{\ell} - \delta_{NN'} E) a_{N'\ell}(k) = 0, \quad N = N_0, N_0 + 2, \dots, \infty, \quad (1.5)$$

где $\delta_{NN'}$ — символ Кронекера, а $H_{NN'}^\ell$ — матричные элементы гамильтониана

$$H_{NN'}^\ell = \int_0^\infty R_N^\ell(r) H^\ell R_{N'}^\ell(r) dr. \quad (1.6)$$

Матричные элементы короткодействующего потенциала $V_{NN'}^\ell$, определённые как

$$V_{NN'}^\ell = \int_0^\infty R_N^\ell(r) V^\ell R_{N'}^\ell(r) dr, \quad (1.7)$$

быстро убывают при росте $N, N' \rightarrow \infty$, вследствие чего матрица гамильтониана $H_{NN'}^\ell = T_{NN'}^\ell + V_{NN'}^\ell$ при достаточно больших N и N' практически полностью определяется матрицей кинетической энергии, элементы $T_{NN'}^\ell$ которой определены как

$$T_{NN'}^\ell = \int_0^\infty R_N^\ell(r) T^\ell R_{N'}^\ell(r) dr. \quad (1.8)$$

Поэтому исходное взаимодействие V^ℓ можно аппроксимировать нелокальным сепарабельным потенциалом \tilde{V}^ℓ с матричными элементами

$$\tilde{V}_{NN'}^\ell = \begin{cases} V_{NN'}^\ell, & \text{если } N \text{ и } N' \leq \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } N \text{ или } N' > \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Это приближение формализма HORSE является единственным. Задача теории рассеяния в такой постановке имеет точное решение. Число \mathbb{N} является параметром формализма HORSE.

Матрица кинетической энергии в осцилляторном базисе имеет трёхдиагональный вид и её ненулевые элементы даются выражениями

$$T_{NN}^\ell = \frac{1}{2} \hbar \Omega (N + 3/2), \quad (1.10a)$$

$$T_{N,N+2}^\ell = T_{N+2,N}^\ell = -\frac{1}{4} \hbar \Omega \sqrt{(N - \ell + 2)(N + \ell + 3)}. \quad (1.10b)$$

Аппроксимация потенциала (1.9) влечёт за собой разделение пространства состояний на внутреннюю ($N \leq \mathbb{N}$) область, в которой учитывается взаимодействие, и внешнюю ($N > \mathbb{N}$) область, соответствующую свободному дви-

жению. Далее внутреннюю область пространства состояний будем называть P -пространством, а внешнюю — Q -пространством.

Бесконечная система уравнений в Q -пространстве состоит из уравнений:

$$T_{N,N-2}^\ell a_{N-2,\ell}^{(as)}(k) + (T_{NN}^\ell - E)a_{N\ell}^{(as)}(k) + T_{N,N+2}^\ell a_{N+2,\ell}^{(as)}(k) = 0, \quad (1.11)$$

фундаментальной системой решений которого является совокупность функций [62]

$$S_{N\ell}(E) = \sqrt{\frac{\pi r_0 \Gamma(N/2 - \ell/2 + 1)}{\Gamma(N/2 + \ell/2 + 3/2)}} q^{\ell+1} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) L_{(N-\ell)/2}^{\ell+1/2}(q^2), \quad (1.12)$$

$$C_{N\ell}(E) = (-1)^\ell \sqrt{\frac{\pi r_0 \Gamma(N/2 - \ell/2 + 1)}{\Gamma(N/2 + \ell/2 + 3/2)}} \frac{q^{-\ell}}{\Gamma(-\ell + 1/2)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) \Phi(-N/2 - \ell/2 - 1/2, -\ell + 1/2; q^2), \quad (1.13)$$

где $\Phi(a, b; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [72], q — безразмерный импульс, связанный с энергией соотношением

$$E = \frac{q^2}{2} \hbar \Omega. \quad (1.14)$$

Решения (1.12) и (1.13) выбраны таким образом, что

$$\sum_{N=N_0, N_0+2, \dots, \infty} S_{N\ell}(E) R_N^\ell(r) = kr j_\ell(kr), \quad (1.15)$$

и в пределе при $r \rightarrow \infty$

$$\sum_{N=N_0, N_0+2, \dots, \infty} C_{N\ell}(E) R_N^\ell(r) \rightarrow -kr n_\ell(kr), \quad (1.16)$$

где $j_\ell(x)$ и $n_\ell(x)$ — сферические функции Бесселя и Неймана.

Функции $S_{N\ell}$ и $C_{N\ell}$ образуют пару фундаментальных решений разностного уравнения (1.11): определитель Казорати $\mathcal{K}_N(C, S) \equiv C_{N+2,\ell} S_{N\ell} - C_{N\ell} S_{N+2,\ell}$, играющий для разностных уравнений роль Вронскиана, всегда отличен от нуля и равен [73]

$$T_{N,N+2}^\ell \mathcal{K}_N(C, S) = \frac{qr_0}{\pi} \hbar \Omega. \quad (1.17)$$

Таким образом, решением системы (1.5) во внешней области является функция

$$a_{N\ell}^{(as)}(k) = \cos \delta_\ell S_{N\ell}(E) + \sin \delta_\ell C_{N\ell}(E). \quad (1.18)$$

В P -пространстве функции $a_{N\ell}(k)$ определяются через $a_{N+2,\ell}^{(as)}$:

$$a_{N\ell}(k) = G_{NN}(E) T_{N,N+2}^\ell a_{N+2,\ell}^{(as)}(k), \quad N = N_0, N_0 + 2, \dots, \mathbb{N}. \quad (1.19)$$

Здесь

$$G_{NN'}(E) = - \sum_{\nu=0}^{\mathcal{N}} \frac{\langle \nu | N\ell \rangle \langle N'\ell | \nu \rangle}{E_\nu - E}, \quad (1.20)$$

где E_ν и $\langle N\ell | \nu \rangle$ — собственные значения и векторы ($\nu = 0, 1, \dots, \mathcal{N} - 1$; здесь \mathcal{N} — размерность базиса), которые могут быть получены как решение задачи

$$\sum_{N'=N_0, N_0+2, \dots, \mathbb{N}} H_{NN'}^\ell \langle N'\ell | \nu \rangle = E_\nu \langle N\ell | \nu \rangle, \quad N = N_0, N_0 + 2, \dots, \mathbb{N}. \quad (1.21)$$

На основе условия сшивки $a_{N\ell}(k) = a_{N\ell}^{(as)}(k)$ можно получить формулу для сдвига фаз рассеяния

$$\text{tg } \delta_\ell(E) = - \frac{S_{N\ell}(E) - G_{NN}(E) T_{N,N+2}^\ell S_{N+2,\ell}(E)}{C_{N\ell}(E) - G_{NN}(E) T_{N,N+2}^\ell C_{N+2,\ell}(E)}. \quad (1.22)$$

Аналогично можно получить формулу для расчёта S -матрицы

$$S(E) = - \frac{C_{N\ell}^{(-)}(E) - G_{NN}(E) T_{N,N+2}^\ell C_{N+2,\ell}^{(-)}(E)}{C_{N\ell}^{(+)}(E) - G_{NN}(E) T_{N,N+2}^\ell C_{N+2,\ell}^{(+)}(E)}, \quad (1.23)$$

где

$$C_{N\ell}^{(\pm)}(E) = C_{N\ell}(E) \pm i S_{N\ell}(E). \quad (1.24)$$

В этой работе используется одноканальная версия формализма HORSE. Подробно многоканальная версия HORSE обсуждается в работах [51, 62, 73].

1.3. Метод SS-HORSE

Непосредственное применение формализма HORSE для описания состояний рассеяния в современных расчётах в модели оболочек невозможно. Отметим, что уравнение (1.22) включает в себя сумму по всем собственным энергиям с данными значениями спина и чётности, т. е. более миллиона или даже

миллиарды состояний в современных расчётах в NCSM. Эти состояния необходимо аккуратно отделить от возбуждения в движении центра масс. К сожалению, невозможно ограничиться в (1.22) небольшим набором состояний: даже если энергия E будет достаточно близка к низколежащей собственной энергии E_ν , вклад некоторых высоколежащих состояний в (1.22) может оказаться существенным — в модельной двухчастичной задаче, описывающей, например, $n\alpha$ -рассеяние рост знаменателя компенсируется ростом числителя; в расчётах в NCSM ядра ${}^5\text{He}$ многочастичные состояния концентрируются вокруг собственных состояний модельного двухчастичного гамильтониана и хотя вклад каждого конкретного собственного состояния в NCSM мал, сумма таких вкладов велика и близка к вкладу соответствующего состояния модельного гамильтониана. Вычисление большого числа многочастичных состояний требует больших вычислительных ресурсов. Отметим, что в многочастичных задачах также необходимо вычислять компоненты $\langle \nu | \mathbb{N}\ell \rangle$ волновой функции, которые должны быть спроектированы на интересующий канал рассеяния; такое проектирование требует численного применения трансформаций Тальми–Мошинского, которые усложняют численные расчёты и усложняют задачу достижения разумной точности расчёта суммы в (1.20) в силу потери точности при численных расчётах.

Для преодоления этих трудностей мы предлагаем метод SS-HORSE, который требует вычисления S -матрицы или сдвига фаз только при значении энергии $E = E_\nu$, т. е. при энергии, равной энергии наинизшего собственного состояния, лежащего выше порога реакции. Тогда уравнения (1.22) и (1.23) упрощаются и принимают вид:

$$\text{tg } \delta_\ell(E_\nu) = -\frac{S_{\mathbb{N}+2,\ell}(E_\nu)}{C_{\mathbb{N}+2,\ell}(E_\nu)} \quad (1.25)$$

и

$$S(E_\nu) = \frac{C_{\mathbb{N}+2,\ell}^{(-)}(E_\nu)}{C_{\mathbb{N}+2,\ell}^{(+)}(E_\nu)}. \quad (1.26)$$

Варьируя параметры \mathbb{N} и $\hbar\Omega$, можно получить собственные энергии E_ν и соответствующие сдвиги фаз и S -матрицу в некотором интервале энергий. Параметризация $\delta_\ell(E)$ и S -матрицы в этом энергетическом интервале даёт возможность экстраполировать их значения в бóльший интервал энергий и определить значения резонансной энергии и ширины.

Использование формул (1.25) и (1.26) радикально упрощает расчёты в многочастичных задачах. Для использования метода SS-HORSE необходима информация об одном или нескольких низколежащих состояниях, которые должны быть рассчитаны относительно соответствующего порога реакции, например, в случае $n\alpha$ -рассеяния необходимо из энергий состояния ${}^5\text{He}$ вычесть энергии основного состояния ${}^4\text{He}$. Другое интересное и важное свойство метода SS-HORSE состоит в том, что формулы (1.25) и (1.26) не включают в себя информацию о собственных векторах $\langle \nu | N \ell \rangle$. Это существенно упрощает расчёты, информация о конкретном рассматриваемом канале присутствует только в энергии порога, используемой для вычисления собственных энергий E_ν , и в выборе орбитального момента канала ℓ . Ниже в главе 3 будет показано, что использование информации о сдвигах фаз только при собственных энергиях E_ν и аккуратных параметризаций фаз существенно ускоряет сходимость расчётов фаз рассеяния в низкоэнергетической области по сравнению со стандартной версией формализма HORSE. Формулы (1.25) и (1.26) устанавливают некоторые корреляции между рассеянием в разных каналах в том случае, когда связью каналов можно пренебречь. Эта тема заслуживает изучения, однако она находится за рамками настоящей работы.

Формулы (1.25) и (1.26) используются для получения сдвига фаз и S -матрицы на основе результатов диагонализации гамильтониана. Однако, эти формулы могут быть использованы и в рамках обратной задачи: в случае, если из анализа экспериментальных данных рассеяния известны сдвиги фаз, уравнение (1.25) может быть решено относительно собственных значений E_ν , которые должны получаться в результате диагонализации гамильтониана модели

оболочек, чтобы быть в согласии с данными рассеяния. Прямое использование (1.25) существенно упрощает метод обратной задачи нуклон-ядерного рассеяния, предложенный в работах [35, 36].

1.3.1. Скейлинг

Сдвиги фаз рассеяния определяются универсальной функцией

$$f_{\mathbb{N}\ell}(E) = -\operatorname{arctg} \left[\frac{S_{\mathbb{N}+2,\ell}(E)}{C_{\mathbb{N}+2,\ell}(E)} \right]. \quad (1.27)$$

Это гладкая монотонно убывающая функция энергии E , причём $\operatorname{tg}(f_{\mathbb{N}\ell}(0)) = 0$.

При условии низких энергий, таких что

$$E \ll \frac{1}{8} \hbar \Omega (\mathbb{N} + 2 - \ell)^2, \quad (1.28)$$

можно заменить функции $S_{\mathbb{N}+2,\ell}(E)$ и $C_{\mathbb{N}+2,\ell}(E)$ асимптотическими выражениями для больших значений \mathbb{N} (см. работу [73])

$$f_{\mathbb{N}\ell}(E) \approx f_{\ell}^{l.e.}(E) = \operatorname{arctg} \left[\frac{j_{\ell}(2\sqrt{E/s})}{n_{\ell}(2\sqrt{E/s})} \right], \quad (1.29)$$

где

$$s = \frac{\hbar \Omega}{\mathbb{N} + 7/2}. \quad (1.30)$$

Если при этом ещё соблюдается условие

$$E \gg \frac{1}{4} s = \frac{\hbar \Omega}{4(\mathbb{N} + 7/2)}, \quad (1.31)$$

то в (1.29) можно использовать асимптотические выражения сферических функций Бесселя и Неймана. Тогда (1.27) обретает простую форму

$$f_{\mathbb{N}\ell}(E) \approx -2\sqrt{\frac{E}{s}} + \frac{\pi \ell}{2}. \quad (1.32)$$

Графики универсальной функции $f_{\mathbb{N}\ell}$ и её низкоэнергетических аппроксимаций (1.29) и (1.32) приведены на рис. 1.1. Базисные пространства в модели

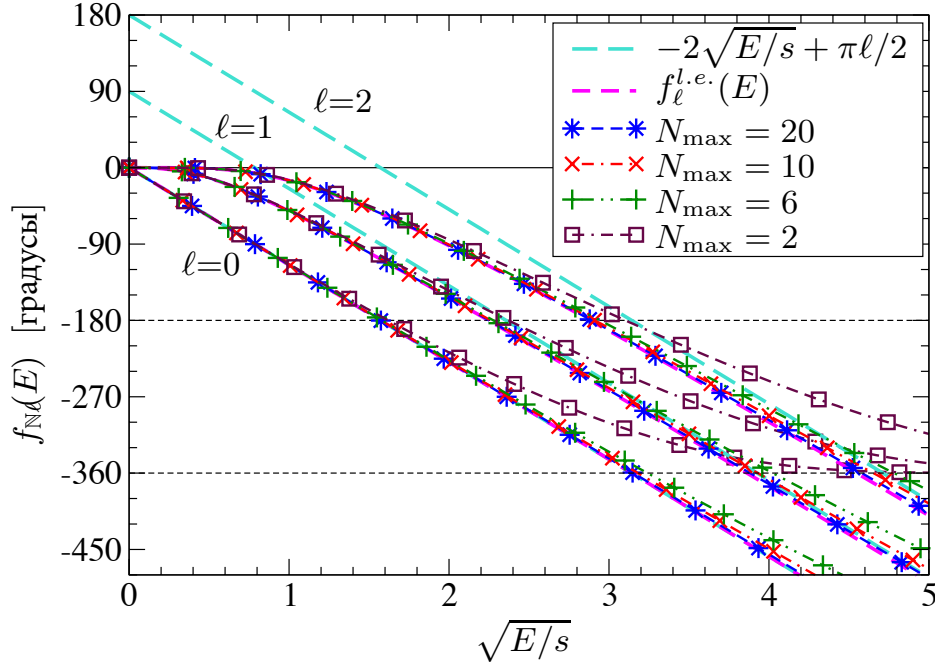


Рис. 1.1. Функция $f_{N\ell}(E)$ (символы) для различных значений N и ℓ и её низкоэнергетические аппроксимации $f_{\ell}^{l.e.}(E)$ [см. (1.29)] и $-2\sqrt{E/s} + \pi\ell/2$ [см. (1.32)]

оболочек принято различать максимальным числом квантов возбуждения N_{\max} . На рис. 1.1 используется число N_{\max} для обозначения функции $f_{N\ell}(E)$, соответствующую разным значениям модельным пространствам. Очевидно, что

$$N = N_{\max} + \ell \quad (1.33)$$

в двухчастичной задаче рассеяния. Аппроксимация (1.29) является очень точной при низких энергиях даже для малых значений N_{\max} . Это низкоэнергетическое приближение, как и следовало ожидать, отличается от функции $f_{N\ell}(E)$ при достаточно больших энергиях E ; интервал энергий где аппроксимация (1.29) достаточно точно выполняется $f_{N\ell}(E)$ расширяется с ростом N или N_{\max} в соответствии с неравенством (1.28). В случае $\ell = 0$ простое выражение (1.32) эквивалентно формуле (1.29) и, следовательно, аппроксимирует функцию $f_{N\ell}(E)$ с такой же точностью. Для $\ell > 0$ упрощённая аппроксимация (1.32) отличается от (1.29) и при низких энергиях может использоваться только в относительно узком интервале энергий, определённым неравенствами (1.28) и (1.31).

Вследствие (1.29), формула (1.25) при низких энергиях принимает вид

$$\operatorname{tg} \delta_\ell(E_\nu) = \frac{j_\ell(2\sqrt{E_\nu/s})}{n_\ell(2\sqrt{E_\nu/s})}. \quad (1.34)$$

Это уравнение демонстрирует свойство скейлинга при низких энергиях: параметры осцилляторного базиса \mathbb{N} и $\hbar\Omega$ не являются независимыми, а входят в уравнения для сдвига фаз и S -матрицы только в комбинации s . Свойство скейлинга полезно для данного метода в качестве способа отбора собственных энергий E_ν , полученных с различными \mathbb{N} и $\hbar\Omega$, для дальнейшего анализа сдвига фаз и полюсов S -матрицы: сходимость сдвигов фаз достигается в некотором интервале значений $\hbar\Omega$ начиная с некоторого значения \mathbb{N} ; результаты для E_ν должны описывать сдвиг фаз, следовательно, в силу скейлинга (1.34), такие значения E_ν , нанесённые на график зависимости от скейлингового параметра s , должны примерно лежать на одной кривой. Построением графика зависимости E_ν от s становится возможным выделение для дальнейшего анализа только тех E_ν , которые формируют некоторую кривую, как будет показано ниже.

Свойство скейлинга в различных вариационных расчётах связанных состояний с осцилляторным базисом было предложено в работе [12]. В данной работе область применения этого свойства обобщается для применения в расчётах состояний непрерывного спектра. Мы считаем предпочтительным определение скейлингового параметра s в энергетических единицах в отличие от λ_{sc} , введённого в работе [12] в единицах импульса, или скейлингового параметра

$$L = \sqrt{2(\mathbb{N} + 7/2)} r_0 \quad (1.35)$$

определённого в единицах длины, предложенного в работе [14]. Параметр L включает небольшие поправки к параметру скейлинга, предложенному в [12], возникшие на основе анализа численных результатов. В данной работе эти поправки получены автоматически. Подразумевая эту поправку, получаем, что

$$s \sim \lambda_{sc}^2 \sim 1/L^2; \quad (1.36)$$

другими словами, мы в данной работе предлагается обобщение параметра скейлинга, который обсуждался в работах [12–19], для расчётов состояния рассеяния.

В данной работе получено свойство скейлинга в совершенно другом подходе, нежели чем в работах [12–14]. Следовательно, интересно было бы более детально сопоставить это свойство в разных подходах. При аналитическом продолжении функций (1.25) и (1.26) в комплексную плоскость энергий или импульсов, в частности, можно использовать выражения при отрицательных энергиях, соответствующих связанным состояниям. Используя асимптотические выражения для $C_{\mathbb{N}+2,\ell}^{(+)}(E)$ и $C_{\mathbb{N}+2,\ell}^{(-)}(E)$ для больших \mathbb{N} и отрицательных энергий E (см. [73]), получаем из уравнения (1.26):

$$S(E_\nu) = (-1)^\ell \exp\left(4\sqrt{\frac{|E_\nu|}{s}}\right), \quad E_\nu < 0. \quad (1.37)$$

С другой стороны, S -матрица при отрицательных энергиях E_ν в окрестности энергии $E_b < 0$ связанного состояния может быть представлена как [74]

$$S(E_\nu) = \frac{D_\ell}{i\kappa_\nu - ik_b}, \quad (1.38)$$

где $E_\nu = -\frac{\hbar^2 \kappa_\nu^2}{2m}$, $E_b = -\frac{\hbar^2 k_b^2}{2m}$, импульсы κ_ν и k_b предполагаются положительными, и D_ℓ может быть представлено через асимптотическую нормировочную константу A_ℓ [74]:

$$D_\ell = (-1)^{\ell+1} i |A_\ell|^2. \quad (1.39)$$

Комбинируя выражения (1.37)–(1.39), получаем:

$$\kappa_\nu - k_b = -|A_\ell|^2 \exp\left(-\frac{4\kappa_\nu \hbar}{\sqrt{2ms}}\right). \quad (1.40)$$

Это выражение может быть использовано для экстраполяции собственных энергий E_ν (или соответствующих импульсов κ_ν), полученных в конечных осцилляторных базисах, на случай бесконечного базиса в предположении, что $E_\nu \rightarrow E_b$ при $\mathbb{N} \rightarrow \infty$.

Соответствующее выражение для экстраполяции собственных энергий в осцилляторном базисе в работах [12–14] в обозначениях данной работы определяется как:

$$E_\nu - E_b = C_\ell \exp\left(-\frac{4k_b\hbar}{\sqrt{2ms}}\right). \quad (1.41)$$

Видно некоторое сходство, однако существует и существенное различие между (1.40) и (1.41). Оба выражения имеют схожие экспоненты в правой части, однако экспонента в (1.40) зависит от импульса κ_ν , связанного с собственной энергией E_ν , в то время как выражение (1.41) содержит импульс k_b , связанный с сошедшимся значением энергии E_b в пределе $\mathbb{N} \rightarrow \infty$. В окрестности полюса S -матрицы (см. формулу (1.38)) импульс κ_ν не должен сильно отличаться от k_b ; отметим однако, что k_b подразумевается обычно как дополнительный параметр (см. работы [12–19]), т. е. предполагается, что $E_b \neq -\frac{\hbar^2 k_b^2}{2m}$, и, следовательно, может возникнуть заметная разница между κ_ν и k_b в конкретных приложениях. Ещё более важным является то, что экспонента в правой части определяет разность энергий E_ν и E_b в (1.41), в то время как в нашей формуле (1.40) экспонента определяет разность между импульсами $\kappa_\nu \sim \sqrt{|E_\nu|}$ и $k_b \sim \sqrt{|E_b|}$. Вопрос более детального сравнения экстраполяций (1.40) и (1.41) выходит за рамки данной работы.

Уравнения (1.25) и (1.26) могут быть использованы для расчёта сдвига фаз и S -матрицы в некотором диапазоне энергий, определённым собственными энергиями E_ν , которые в свою очередь получены при различных значениях параметров \mathbb{N} и $\hbar\Omega$. Для того, чтобы экстраполировать полученные сдвиги фаз и S -матрицу за пределы такого интервала энергий, необходимо получить точные формулы для сдвига фаз и S -матрицы как функции энергии, которые будут описаны в следующем разделе.

1.3.2. Параметризация сдвига фаз

S -матрица рассеяния как функция комплексного импульса k , как известно [74, 75], обладает следующими свойствами симметрии:

$$S(-k) = \frac{1}{S(k)}, \quad (1.42a)$$

$$S(k^*) = \frac{1}{S^*(k)}, \quad (1.42b)$$

$$S(-k^*) = S^*(k). \quad (1.42c)$$

S -матрица может иметь полюса только в нижней полуплоскости или на мнимой оси импульсов [74, 75]. Полюсы в нижней полуплоскости $k = \kappa_r \equiv k_r - i\gamma_r$ ($k_r, \gamma_r > 0$) вследствие симметрии (1.42) являются парными с полюсами $k = -\kappa_r^* \equiv -k_r - i\gamma_r$ и ассоциируются с резонансными состояниями с энергией

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2m}(k_r^2 - \gamma_r^2) \quad (1.43)$$

и шириной

$$\Gamma = \frac{2\hbar^2}{m}k_r\gamma_r. \quad (1.44)$$

Связанные состояния с энергией $E_b = -\hbar^2 k_b^2/2m$ соответствуют полюсам на положительной части мнимой оси импульсов $k = ik_b$ ($k_b > 0$). Однако не все полюсы на положительной полупрямой мнимой оси импульсов могут быть ассоциированы со связанными состояниями: часть является так называемыми ложными состояниями [74], которые не соответствуют связанным состояниям. Полюсы на отрицательной части мнимой оси импульсов $k = -ik_v$ ($k_v > 0$) соответствуют виртуальным состояниям с энергией $E_v = \hbar^2 k_v^2/2m$.

Если S -матрица имеет полюс, близкий к точке $k = 0$ в нижней полуплоскости или на мнимой оси импульсов, то она может быть представлена выражением

$$S(k) = \Theta(k) S_p(k), \quad (1.45)$$

где $\Theta(k)$ — гладкая функция импульса k и полюсной член $S_p(k)$ в случае связанного или ложного ($p = b$), виртуального ($p = v$) или резонансного состояния ($p = r$) принимает форму [75]:

$$S_b(k) = \frac{k_b - ik}{k_b + ik}, \quad (1.46a)$$

$$S_v(k) = \frac{k_v + ik}{k_v - ik}, \quad (1.46b)$$

$$S_r(k) = \frac{(k + \kappa_r)(k - \kappa_r^*)}{(k - \kappa_r)(k + \kappa_r^*)}. \quad (1.46c)$$

S -матрица связана со сдвигом фаз $\delta_\ell(k)$ посредством

$$S(k) = e^{2i\delta_\ell(k)}, \quad (1.47)$$

следовательно, соответствующий уравнению (1.45) сдвиг фаз

$$\delta_\ell(k) = \phi(k) + \delta_p(k), \quad (1.48)$$

где вклад полюсного члена $\delta_p(k)$ для связанного состояния имеет форму

$$\delta_b(E) = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{E}{|E_b|}}, \quad (1.49a)$$

π возникает вследствие теоремы Левинсона [75]. Вклады ложных, виртуальных и резонансных полюсов

$$\delta_f(E) = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{E}{|E_f|}}, \quad (1.49b)$$

$$\delta_v(E) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{E}{E_v}}, \quad (1.49c)$$

$$\delta_r(E) = -\operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{E}}{E - b^2}, \quad (1.49d)$$

где резонансная энергия E_r и ширина Γ выражаются через параметры a и b как

$$E_r = b^2 - a^2/2, \quad (1.50)$$

$$\Gamma = a\sqrt{4b^2 - a^2}. \quad (1.51)$$

Следствием формулы (1.47) и симметрии S -матрицы (1.42а) является тот факт, что сдвиг фаз $\delta_\ell(E)$ должен быть нечётной функцией импульса k и его разложение в ряд Тейлора по $\sqrt{E} \sim k$ около точки $k = 0$ включает только нечётные степени \sqrt{E} :

$$\delta_\ell(E) = c\sqrt{E} + d(\sqrt{E})^3 + \dots \quad (1.52)$$

Более того, т. к. сдвиг фаз ведёт себя в пределе $k \rightarrow 0$ как $\delta_\ell \sim k^{2\ell+1}$, то $c = 0$ в случае p -волнового рассеяния, $c = d = 0$ в случае d -волнового рассеяния, и т. д.

В применении к нерезонансному $n\alpha$ -рассеянию в состоянии $\frac{1}{2}^+$ ($\ell = 0$), мы должны применять следующую параметризацию сдвига фаз:

$$\delta_0(E) = \pi - \arctg \sqrt{\frac{E}{|E_b|}} + c\sqrt{E} + d(\sqrt{E})^3 + f(\sqrt{E})^5. \quad (1.53)$$

Здесь вклад связанного состояния объясняется наличием так называемого запрещённого состояния. Сдвиг фазы для резонансов $n\alpha$ -рассеяния в состояниях $\frac{1}{2}^-$ и $\frac{3}{2}^-$ ($\ell = 1$) параметризуется как

$$\delta_1(E) = -\arctg \frac{a\sqrt{E}}{E - b^2} - \frac{a}{b^2}\sqrt{E} + d(\sqrt{E})^3. \quad (1.54)$$

Такая форма гарантирует, что $\delta_1 \sim k^3$ в пределе $E \rightarrow 0$.

1.4. Применение метода к модельной задаче

Для того, чтобы проверить работоспособность метода SS-HORSE, найдём сдвиги фаз и резонансные параметры $n\alpha$ -рассеяния в двухчастичном подходе, в котором нейтрон и α -частица предполагаются бесструктурными частицами, взаимодействие которых описывается потенциалом типа Вудса–Саксона

$$V_{n\alpha} = \frac{V_0}{1 + \exp[(r - R_0)/\alpha_0]} + (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{V_{ls}}{1 + \exp[(r - R_1)/\alpha_1]} \quad (1.55)$$

с параметрами $V_0 = -43$ МэВ, $V_{ls} = -40$ МэВ·фм², $R_0=2.0$ фм, $\alpha_0=0.70$ фм, $R_1=1.5$ фм, $\alpha_1=0.35$ фм [76]. В дальнейшем мы будем обозначать этот потенциал аббревиатурой WSBG. Также будем обозначать этой аббревиатурой гамильтониан, включающий кинетическую энергию движения нейтрона относительно α -частицы и потенциал (1.55).

Для состояний естественной чётности $\frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$ матрица такого гамильтониана WSBG в осцилляторном базисе была диагонализирована с использованием значений параметра $\hbar\Omega$ в пределах от 2.5 до 50 МэВ с шагом в 2.5 МэВ и N_{\max} вплоть до 20 для состояний естественной чётности $\frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$

Целью данной главы является применение метода SS-HORSE для микроскопического описания $n\alpha$ -рассеяния на основе расчётов в NCSM ядер ^5He и ^4He . Ориентируясь на расчёты в NCSM, для состояния рассеяния $\frac{1}{2}^+$ нам необходимо переопределить число N_{\max} . Обычно число квантов возбуждения N_{\max} используется в определении базиса в многочастичном модельном пространстве NCSM, а полное число квантов входит в уравнения метода SS-HORSE. Состояние $\frac{1}{2}^+$ для ядра ^5He является состоянием с неестественной чётностью, следовательно N_{\max} принимает нечётные значения в NCSM. Минимальное число квантов равно $N_0 = 1$, значит, полное число квантов

$$\mathbb{N} = N_{\max} + N_0 \quad (1.56)$$

является чётным. Чтобы сохранить соответствие с NCSM, будем использовать N_{\max} для определения осцилляторного базиса и в модельной двухчастичной задаче. Отметим, что в этом случае формально N_{\max} связано с \mathbb{N} посредством формулы (1.33), где $\ell = 0$ и N_{\max} должно быть чётным, если чётно \mathbb{N} . Для более близкого соответствия с NCSM, чтобы связать N_{\max} с \mathbb{N} , будем использовать соотношение (1.56) с $N_0 = 1$ вместо (1.33), другими словами, вследствие определения по аналогии с NCSM, собственные состояния $\frac{1}{2}^+$ нумеруются нечётными значениями N_{\max} . Отметим, что определения (1.33) и (1.56) совпадают в случае состояниях отрицательной чётности $\frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния. В соответствии

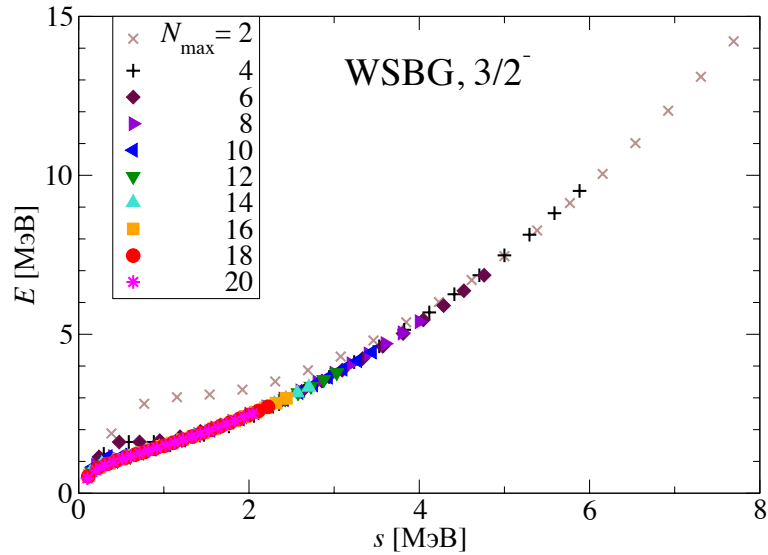


Рис. 1.2. Нижайшие собственные значения E_0 состояния $\frac{3}{2}^-$ модельного гамильтониана с потенциалом WSBG, полученные с различными N_{\max} и $\hbar\Omega$, зависимости от скейлингового параметра s .

с таким определением N_{\max} , диагонализировать гамильтониан WSBG в осцилляторном базисе с параметрами $\hbar\Omega$ в пределах от 2.5 до 50 МэВ с шагом в 2.5 МэВ и N_{\max} вплоть до 19 для состояния с неестественной чётностью $\frac{1}{2}^+$.

1.4.1. Резонансное состояние рассеяния $\frac{3}{2}^-$

Нижайшие собственные энергии E_0 , полученные диагонализацией модельного гамильтониана с потенциалом WSBG представлены на рис. 1.2 как функции скейлингового параметра s . Видно, что собственные энергии, полученные с большим N_{\max} , формируют одну кривую на рис. 1.2. Однако, собственные энергии, полученные с относительно небольшими N_{\max} , отклоняются от этой кривой при малых значениях $\hbar\Omega$, которые соответствуют малым значениям s , отражая свойства сходимости расчётов фазовых сдвигов. Эти свойства яснее проявляются на графике сдвигов фаз, полученных для энергии E_0 по формуле (1.25) (см. рис. 1.3). Для дальнейшего анализа нужно исключить собственные энергии, которые отклоняются от общей кривой на рис. 1.2 и 1.3.

Как мы уже упоминали, свойство скейлинга в SS-HORSE имеет много общего со свойством скейлинга, предложенном в [12]. Используя логику и терминологию

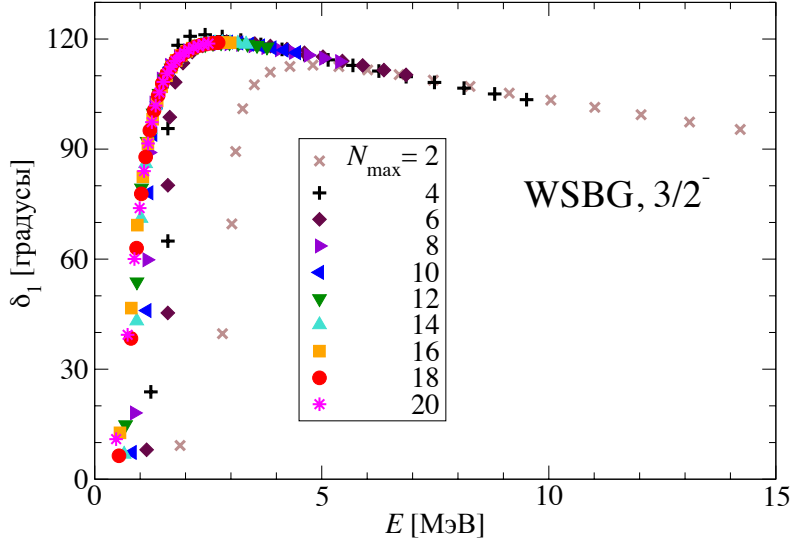


Рис. 1.3. Сдвиг фазы состояния $\frac{3}{2}^-$, рассчитанный по формуле (1.25) для собственных энергий E_0 в модельной задаче.

логию работы [12], мы должны использовать только собственные значения E_0 , которые соответствуют инфракрасному режиму. Согласно [12], такие собственные энергии получаются с N_{\max} и $\hbar\Omega$, удовлетворяющие неравенству

$$\Lambda \equiv \sqrt{m\hbar\Omega(N_{\max} + \ell + 3/2)} > \Lambda_0, \quad (1.57)$$

где Λ_0 зависит от взаимодействия между частицами. Для потенциала WSBG оказывается адекватным значение $\Lambda_0 = 385$ МэВ/с для разумного выбора собственных энергий E_0 . Выбор собственных энергий на основе такого критерия показан на рис. 1.4 заштрихованной областью. На этом графике собственные энергии E_0 показаны как функции от $\hbar\Omega$ при различных значениях N_{\max} . Эти выбранные собственные энергии, нанесённые на график зависимости от s (рис. 1.5), и соответствующие им сдвиги фаз (рис. 1.6), как видно, хорошо ложатся на одну кривую.

Зависимость сдвига фаз от энергии низкоэнергетического резонансного $n\alpha$ -рассеяния в состоянии $\frac{3}{2}^-$ описывается формулой (1.54). Необходимо подогнать значения параметров a , b и d . Комбинируя (1.25), (1.33) и (1.54), получаем следующее уравнение для резонансного $n\alpha$ -рассеяния в состоянии $\frac{3}{2}^-$, которое

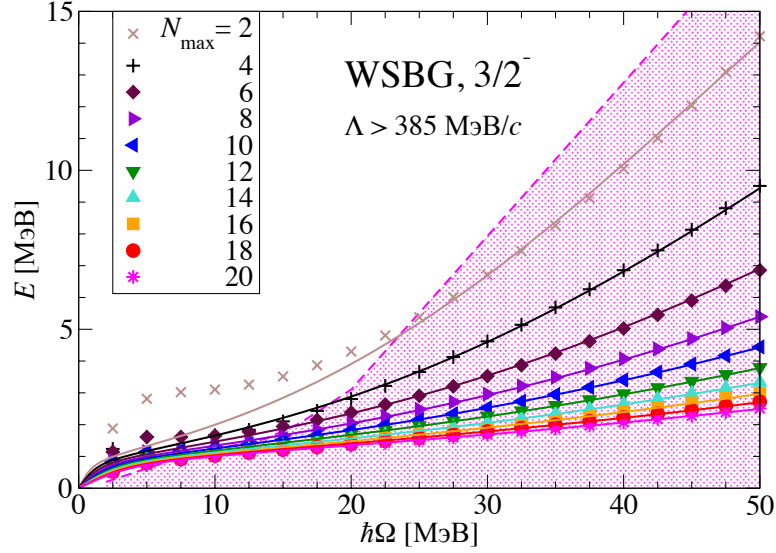


Рис. 1.4. Нижайшие собственные энергии E_0 состояния $\frac{3}{2}^-$ модельного WSBG гамильтониана, полученные с различными N_{\max} (символы), как функции $\hbar\Omega$ и их выборка на основе неравенства $\Lambda > 385$ МэВ/с. Заштрихованная область выделяет выбранные значения E_0 . Сплошные кривые — решения уравнения (1.58) для E_0 с параметрами a , b и d , полученными в результате подгонки.

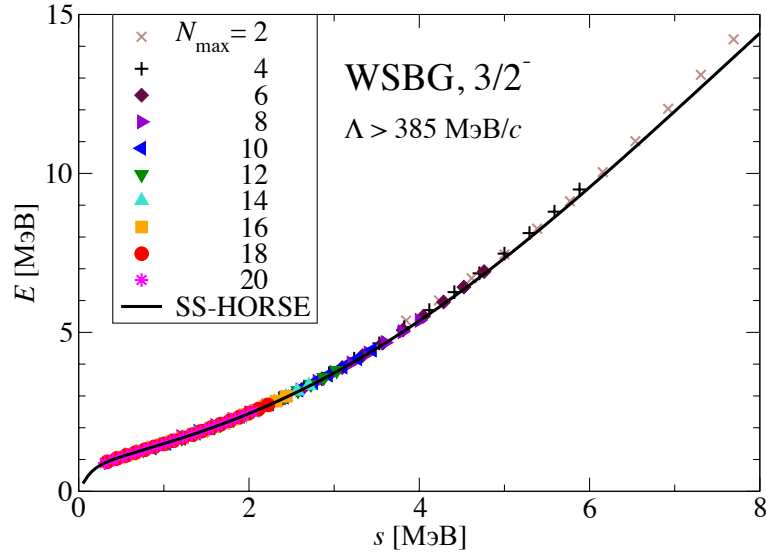


Рис. 1.5. Нижайшие собственные энергии E_0 состояния $\frac{3}{2}^-$ в задаче с гамильтонианом WSBG, выбранные в соответствии с критерием $\Lambda > 385$ МэВ/с, как функции скейлингового параметра s . Сплошная кривая обозначает решение уравнения (1.58) для E_0 с параметрами a , b и d , полученными в результате подгонки.

может быть использовано также для состояния $\frac{1}{2}^-$ (а обоих случаях $\ell = 1$):

$$-\frac{S_{N_{\max}+3,1}(E_0)}{C_{N_{\max}+3,1}(E_0)} = \operatorname{tg} \left(-\operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{E_0}}{E_0 - b^2} - \frac{a}{b^2} \sqrt{E_0} + d(\sqrt{E_0})^3 \right). \quad (1.58)$$

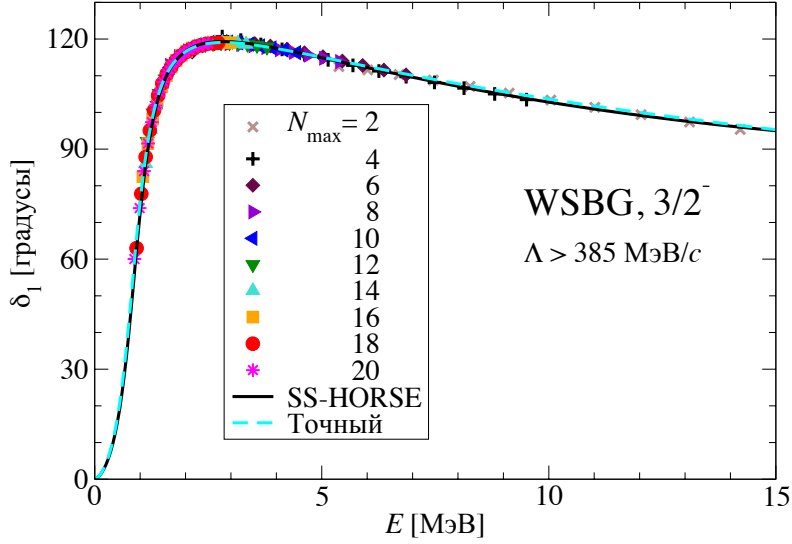


Рис. 1.6. Сдвиг фазы состояния $\frac{3}{2}^-$ в $n\alpha$ -рассеянии с модельным потенциалом WSBG, полученный с помощью формулы (1.25) для собственных энергий E_0 , выбранных на основе критерия $\Lambda > 385$ МэВ/с (символы). Сплошная кривая обозначает сдвиг фаз, рассчитанный формуле (1.54) с параметрами a , b и d , подогнанными по выборке собственных энергий. Штриховая кривая обозначает сдвиги фаз, полученные численным интегрированием уравнения Шрёдингера.

Подставив некоторые значения параметров a , b и d , можно разрешить это уравнение и найти набор значений E_0 , $\mathcal{E}_0^{(i)} = E_0(N_{\max}^i, \hbar\Omega^i)$, $i = 1, 2, \dots, D$, для каждой комбинации N_{\max} и $\hbar\Omega$ (отметим, что $\hbar\Omega$ входит в определение функций $S_{N\ell}(E)$ и $C_{N\ell}(E)$, см. (1.12)–(1.14)). Полученное таким образом множество $\mathcal{E}_0^{(i)}$ сопоставляется с набором собственных энергий $E_0^{(i)}$, найденных при диагонализации гамильтониана с такими же N_{\max} и $\hbar\Omega$. Для нахождения оптимальных значений параметров a , b и d , найдём минимум среднеквадратичного отклонения

$$\Xi = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \left(E_0^{(i)} - \mathcal{E}_0^{(i)} \right)^2}. \quad (1.59)$$

Полученные таким образом параметры представлены в таблице 1.1. Рассчитанные по формулам (1.50) и (1.51) резонансные энергия и ширина также представлены в таблице 1.1. Отметим точность подгонки параметров: среднеквадратичное отклонение 156 подогнанных энергий составляет всего 37 кэВ.

Поведение E_0 как функции $\hbar\Omega$, определённой уравнением (1.58) с подо-

Таблица 1.1. Резонансное состояние $\frac{3}{2}^-$ в $n\alpha$ -рассеянии с модельным потенциалом WSBG: подогнанные параметры a , b и d уравнения (1.58), энергия E_r и ширина Γ резонанса, среднеквадратичное отклонение подогнанных энергий Ξ и число подогнанных данных D для различных выборок собственных значений в сравнении с точными данными для E_r и Γ , полученными посредством численного нахождения полюса S -матрицы. Для выборки $N_{\max} \leq 6$, Ξ и D для всех энергий из предыдущей выборки показаны в скобках.

Выборка	a (МэВ $^{\frac{1}{2}}$)	b^2 (МэВ)	$d \cdot 10^3$ (МэВ $^{-\frac{3}{2}}$)	E_r (МэВ)	Γ (МэВ)	Ξ (кэВ)	D
$\Lambda > 385$ МэВ/ c	0.412	0.948	5.41	0.863	0.785	37	156
$N_{\max} \leq 6$	0.411	0.948	5.30	0.863	0.782	70(38)	38(156)
Точные				0.836	0.780		

гнанными значениями параметров для различных N_{\max} , показана сплошными кривыми на рис. 1.4 и 1.5. Видно, что кривые точно описывают выбранные собственные значения E_0 , полученные диагонализацией гамильтониана. Отметим, однако, что на рис. 1.5 кривая отклоняется от результатов диагонализации, полученных с $N_{\max} = 2$ при больших энергиях в силу того, что нарушается условие скейлинга (1.28). Сдвиг фазы $\delta_1(E)$, рассчитанный по формуле (1.54) с подогнанными параметрами, представлен на рис. 1.6. Видно, что полученные методом SS-HORSE сдвиги фаз находятся в хорошем согласии с результатами численного интегрирования уравнения Шрёдингера. Энергия и ширина резонансного состояния $\frac{3}{2}^-$ так же хорошо воспроизводятся этим методом (см. таблицу 1.1).

Мы рассмотрели работу метода SS-HORSE с использованием модельных пространств с значениями параметра N_{\max} вплоть до $N_{\max} = 20$. Такое большое значение N_{\max} легко достижимо в двухчастичной задаче, но как правило недостижимо в современных многочастичных расчётах в модели оболочек. Следовательно, очень важно проверить, существует ли возможность получить достаточно точный сдвиг фаз и резонансные характеристики при использовании

в SS-HORSE достаточно маленьких значений N_{\max} .

Для этого можно поступить следующим образом: убрать из выборки собственных энергий, взятой для анализа состояния $\frac{3}{2}^-$, энергии $E_0^{(i)}$, которые получены в модельных пространствах с $N_{\max} > 6$, т. е. взять для анализа выборку, показанную на рис. 1.7 и 1.8. Все такие собственные энергии лежат за пределами резонансной области, как видно из рис. 1.9, на котором изображён сдвиг фаз как функция энергии. Тем не менее, метод SS-HORSE хорошо воспроизводит точные резонансные характеристики (см. таблицу 1.1) и сдвиги фаз (см. рис. 1.9). Для того, чтобы достичь такой точности, очень важно задать правильную параметризацию сдвига фаз (1.54), которая гарантирует корректное поведение в области низких энергий $\delta_\ell \sim k^{2\ell+1}$ и учитывает точное резонансное поведение (1.49d). Предыдущее исследование [A4] продемонстрировало, что невозможно воспроизвести параметры резонанса и сдвиги фаз в широком интервале энергий без требования правильного поведения в нуле, а с использованием лишь менее точной параметризации Брейта–Вигнера вместо полюсного члена (1.49d) даже в том случае, когда используются собственные энергии E_0 , получены с большими N_{\max} . В таком случае использование только модельных пространств с небольшим N_{\max} заведомо не даст никаких разумных результатов.

Сплошные кривые на рис. 1.4 и 1.7 изображают собственные энергии E_0 для различных N_{\max} как функции $\hbar\Omega$, полученные с соответствующей параметризацией сдвига фаз. Видно, что правильное описание присутствует не только в заштрихованной области, а в более широкой области, соответствующей более широкому интервалу по $\hbar\Omega$. Более интересен тот факт, что в случае, показанном на рис. 1.7, где в анализе используются только энергии, полученные с $N_{\max} \leq 6$, воспроизводятся собственные значения, полученные с большими значениями N_{\max} , при этом среднеквадратичное отклонение не сильно отличается от случая анализа собственных энергий при всех N_{\max} (см. таблицу 1.1). Другими словами, метод SS-HORSE, анализируя результаты диагонализации

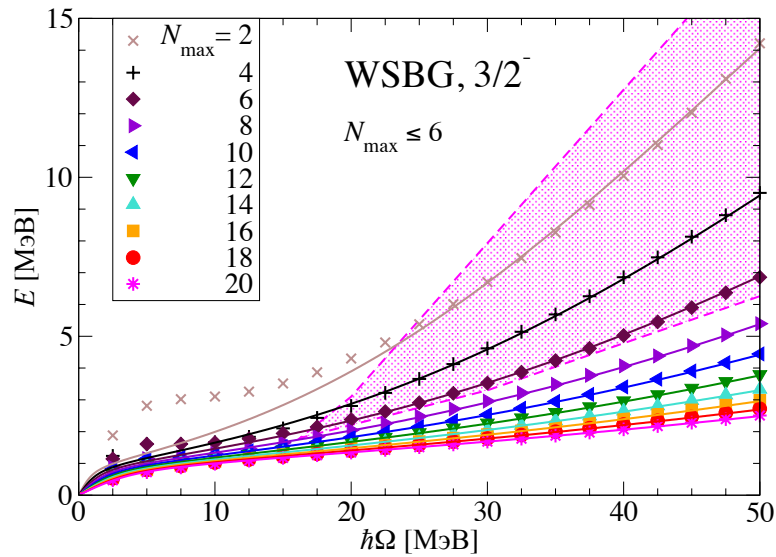


Рис. 1.7. Нижайшие собственные значения E_0 состояния $\frac{3}{2}^-$ в задаче с гамильтонианом WSBG и выборка $N_{\max} \leq 6$ из них (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.4.

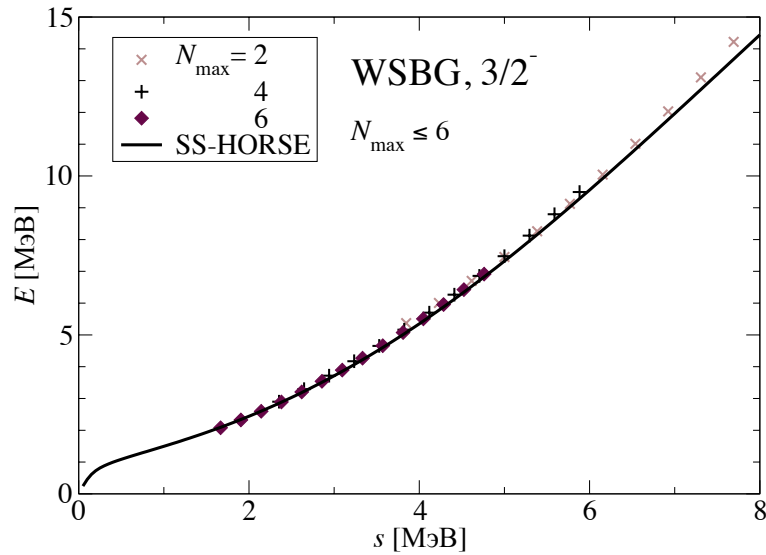


Рис. 1.8. Собственные значения E_0 состояния $\frac{3}{2}^-$ в задаче с гамильтонианом WSBG из выборки $N_{\max} \leq 6$ как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.5.

зации в небольших базисах, может предсказывать результаты диагонализации в больших базисах. Факт того, что метод SS-HORSE приводит в модельной задаче к разумным результатам с небольшими базисами и предсказывает собственные значения в больших базисах, даёт надежду на возможность получения разумных результатов с небольшими модельными пространствами в многочастичных задачах.

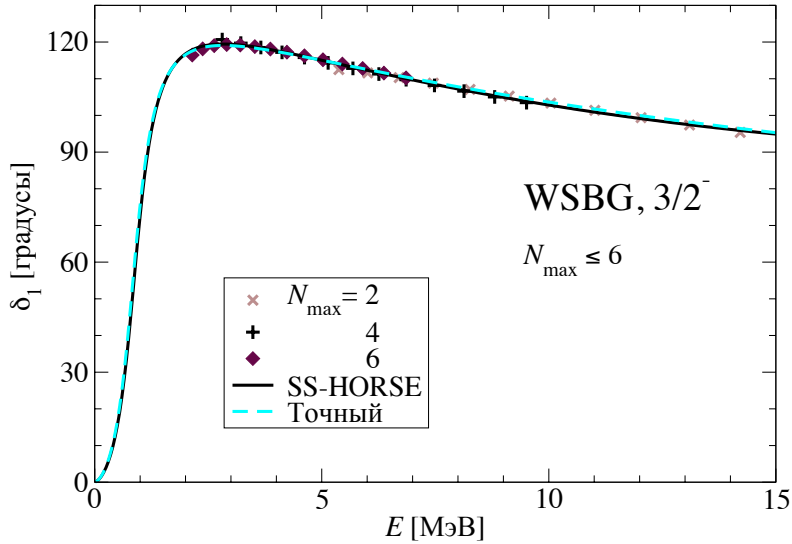


Рис. 1.9. Сдвиг фазы состояния $\frac{3}{2}^-$, полученный для собственных энергий E_0 выборки $N_{\max} \leq 6$. Обозначения аналогичны рис. 1.6.

1.4.2. Резонансное состояние рассеяния $\frac{1}{2}^-$

Зависимость нижайших собственных энергий E_0 состояния $\frac{1}{2}^-$ модельного гамильтониана WSBG для различных N_{\max} как функций $\hbar\Omega$ изображена на рис. 1.10, как функции скейлингового параметра s — на рис. 1.11. Все собственные энергии в этом состоянии лежат примерно на одной кривой на рис. 1.11. Однако, график сдвига фаз, соответствующий этим собственным энергиям (см. рис. 1.12), проявляет отклонения от общей кривой для собственных состояний, полученных с малым значением N_{\max} . Это означает, что сдвиг фаз более чувствителен к выборке собственных энергий.

Как и в случае состояния $\frac{3}{2}^-$, можно начать с выборки собственных значений по критерию $\Lambda > 385$ МэВ/с, что проиллюстрировано на рис. 1.13 и заштрихованной областью на рис. 1.10. Параметры a , b и d для этого состояния были получены таким же способом, как и в предыдущем разделе для состояния $\frac{3}{2}^-$. Полученные параметры представлены в таблице 1.2. Таким образом получены разумные результаты с небольшим значением среднеквадратичного отклонения в 80 кэВ для 156 точек, участвующих в анализе. Полученная зависимость сдвига фаз от энергии, представленная на рис. 1.14, и точная зависимость

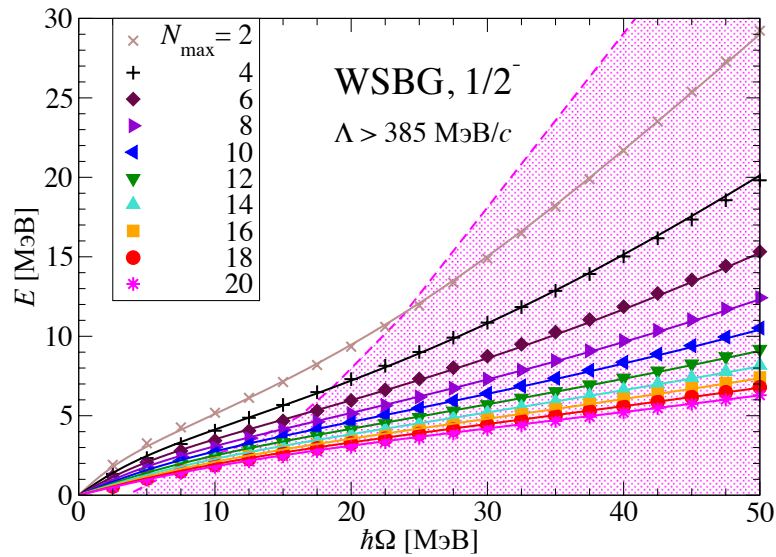


Рис. 1.10. Нижайшие собственные энергии E_0 состояния $\frac{1}{2}^-$ задачи с модельным гамильтонианом WSBG (символы) и выборка по критерию $\Lambda > 385$ МэВ/с (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.4.

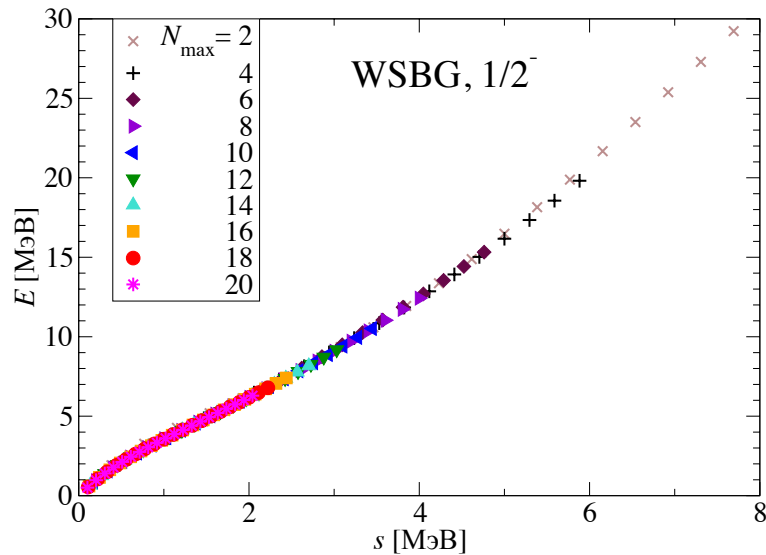


Рис. 1.11. Нижайшие собственные энергии E_0 состояния $\frac{1}{2}^-$ задачи с модельным гамильтонианом WSBG как функции скейлингового параметра s .

сдвига фаз, полученная интегрированием уравнения Шрёдингера, очень близки вплоть до энергий 17 МэВ. При более высоких энергиях видны различия между точным сдвигом фаз и сдвигом фаз, полученным методом SS-HORSE, который в этой области определяется только собственными значениями, полученными с $N_{\max} = 2$, для которых не ожидается полной сходимости. Отметим также, что в отличие от случая состояния $\frac{3}{2}^-$ полученные резонансные характе-

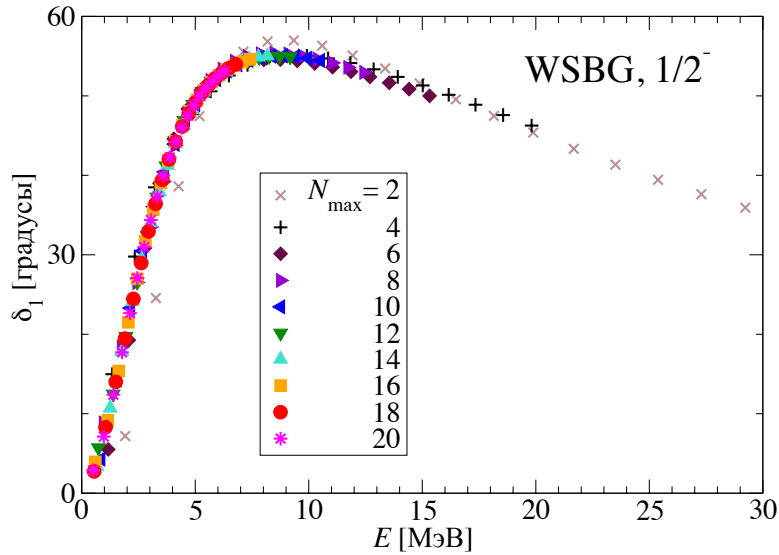


Рис. 1.12. Сдвиг фазы состояния $\frac{1}{2}^-$, полученный из формулы (1.25) на основе нижайших собственных энергий E_0 гамильтониана WSBG.

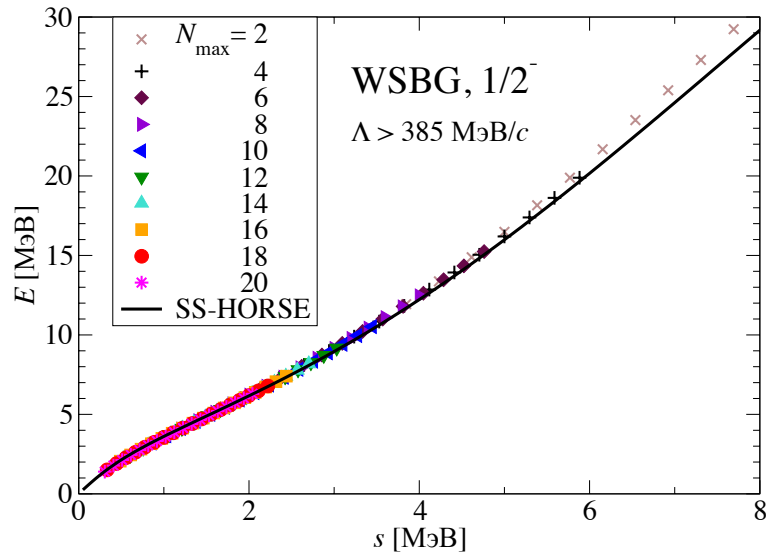


Рис. 1.13. Нижайшие собственные энергии E_0 состояния $\frac{1}{2}^-$ задачи с модельным гамильтонианом WSBG из выборки, полученной по критерию $\Lambda > 385$ МэВ/с состояния $\frac{1}{2}^-$ как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.5.

ристики отличаются примерно на 0.5 МэВ от точных, полученных с помощью поиска полюса S -матрицы. Резонансный полюс состояния $\frac{1}{2}^-$ находится далеко от действительной оси и мы полагаем, что на сдвиги фаз могут влиять другие полюсы, не учтённые явно в параметризации (1.54).

Следует исследовать возможность описания сдвига фаз и резонансных характеристик состояния $\frac{1}{2}^-$ с использованием только собственных энергий, полу-

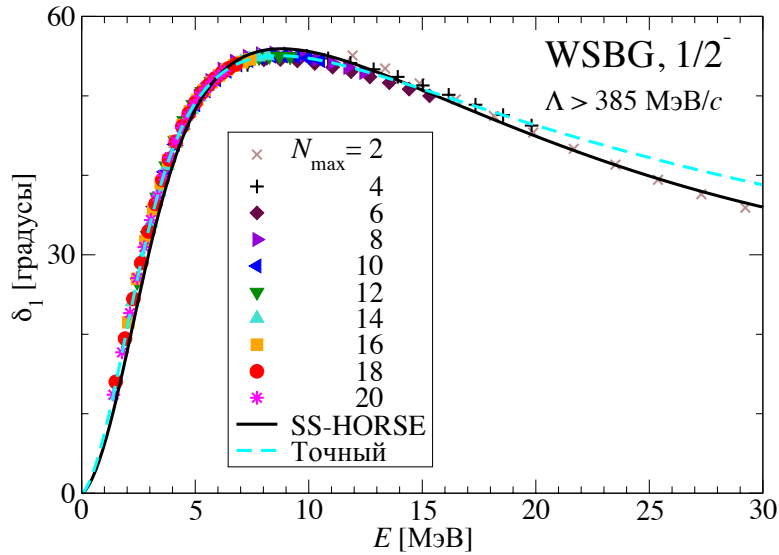


Рис. 1.14. Сдвиги фаз, соответствующие нижайшим собственным энергиям E_0 из выборки, составленной по критерию $\Lambda > 385 \text{ MeV}/c$ состояния $\frac{1}{2}^-$ задачи с модельным гамильтониана WSBG как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.6.

ченных в модельных пространствах с $N_{\max} \leq 6$, в рамках метода SS-HORSE. Для этого оставим в выборке собственных энергий, основанном на критерии $\Lambda > 385 \text{ MeV}/c$, только собственные энергии, полученные в модельных пространствах с $N_{\max} \leq 6$, что показано на рис. 1.15; такая выборка собственных состояний изображена также на рис. 1.16. Энергии E_0 таких собственных состояний находятся за пределами резонансной области, как видно из рис. 1.17. Тем не менее, метод SS-HORSE воспроизводит зависимость сдвига фаз и резонансные характеристики (см. рис. 1.17 и таблицу 1.2) практически с такой же точностью, как и в предыдущей выборке. Более того, достаточно точно удаётся предсказать собственные энергии в больших модельных пространствах (см. сплошные кривые на рис. 1.15): среднеквадратическое отклонение для 156 точек с $\Lambda > 385 \text{ MeV}/c$ составляет всего 84 кэВ.

1.4.3. Состояние рассеяния $\frac{1}{2}^+$

В состоянии $\frac{1}{2}^+$ $n\alpha$ -рассеяния нет резонанса. Однако, как было показано в работе [35], модель оболочек должна генерировать состояния рассеяния вне интервалов резонансных энергий, чтобы корректно описывать наблюдаемые рас-

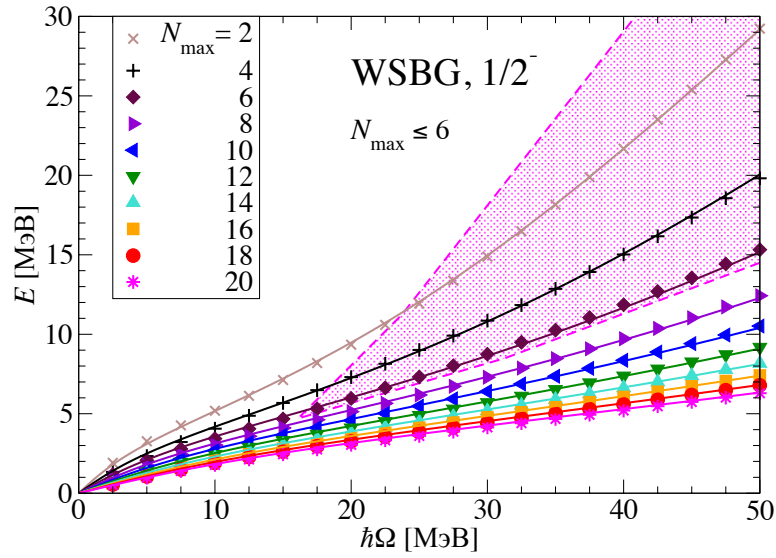


Рис. 1.15. Нижайшие собственные энергии E_0 состояния $\frac{1}{2}^-$ WSBG гамильтониана (символы). Заштрихованная область соответствует выборке $N_{\max} \leq 6$. Обозначения аналогичны рис. 1.4.

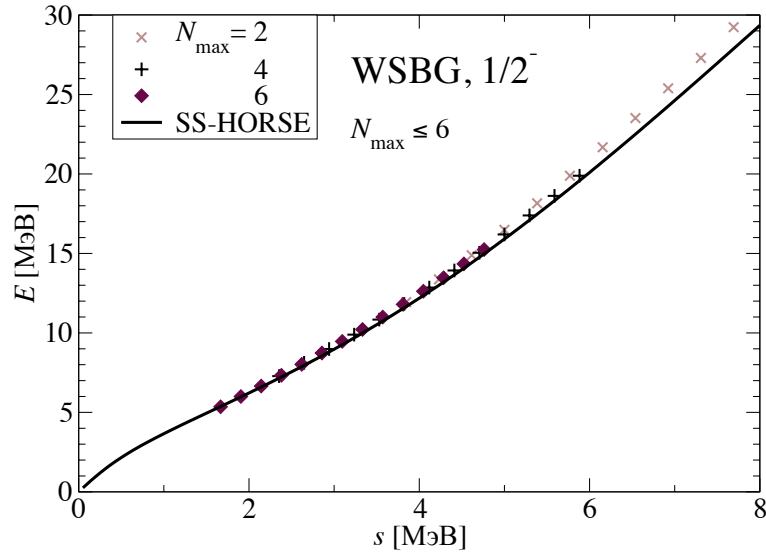


Рис. 1.16. Нижайшие собственные энергии E_0 состояния $\frac{1}{2}^-$ гамильтониана WSBG из выборки $N_{\max} \leq 6$, представленные как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.5.

сеяния. Интересно проверить работу метода SS-HORSE на примере задачи с гамильтонианом WSBG для описания состояния $\frac{1}{2}^+$ нерезонансного $n\alpha$ -рассеяния.

Сдвиг фазы состояния $\frac{1}{2}^+$ $n\alpha$ -рассеяния в области низких энергий описывается формулой (1.53). Для того, чтобы обеспечить такую же точность описания, что и в случае резонансного рассеяния с отрицательной чётностью, следует оставить в фоновой части члены вплоть до пятой степени \sqrt{E} в ряде Тейлора. Таким

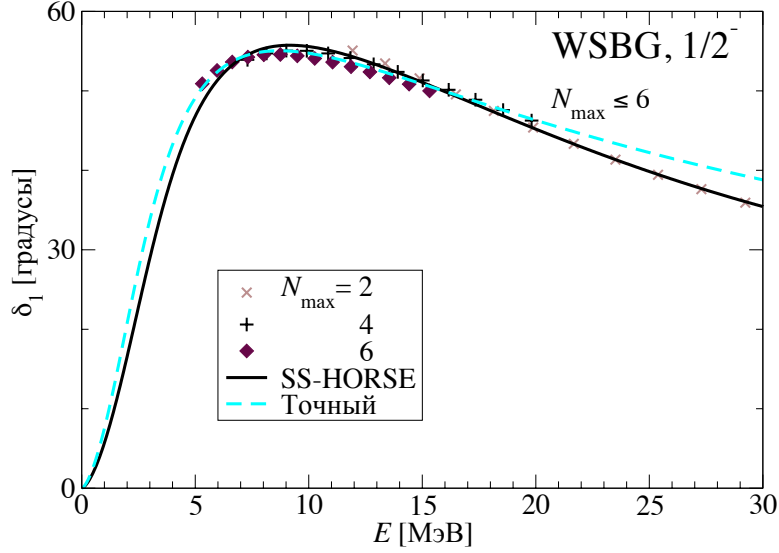


Рис. 1.17. Сдвиги фаз состояния $\frac{1}{2}^-$ полученные для нижайших собственных энергий E_0 WSBG гамильтониана из выборки $N_{\max} \leq 6$. Обозначения аналогичны рис. 1.6.

Таблица 1.2. Параметры состояния $\frac{1}{2}^-$ в задаче с гамильтонианом WSBG. Обозначения такие же, как и в таблице 1.1.

Выборка	a (МэВ $^{\frac{1}{2}}$)	b^2 (МэВ)	$d \cdot 10^3$ (МэВ $^{-\frac{3}{2}}$)	E_r (МэВ)	Γ (МэВ)	Ξ (кэВ)	D
$\Lambda > 385$ МэВ/ c	1.780	3.636	3.18	2.05	6.00	80	156
$N_{\max} \leq 6$	1.822	3.818	2.77	2.16	6.30	75(84)	38(156)
Точные				1.66	5.58		

образом в (1.53) больше членов, чем в (1.54). Потенциал WSBG имеет связанное состояние с энергией E_b , которое запрещено принципом Паули для системы $n\alpha$. Однако, будем считать E_b дополнительным параметром, чтобы смоделировать нахождение сдвига фаз в многочастичных расчётах с использованием NCSM, где такое состояние не возникает. Для анализа в методе SS-HORSE мы будем использовать первое возбуждённое состояние $E_1 > 0$.

Комбинируя уравнения (1.25), (1.53) и (1.56), получаем уравнение для состояния $\frac{1}{2}^+$ $n\alpha$ -рассеяния:

$$-\frac{S_{N_{\max}+3,0}(E_\nu)}{C_{N_{\max}+3,0}(E_\nu)} = \operatorname{tg}\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{E_\nu}{|E_b|}} + c\sqrt{E_\nu} + d(\sqrt{E_\nu})^3 + f(\sqrt{E_\nu})^5\right), \quad (1.60)$$

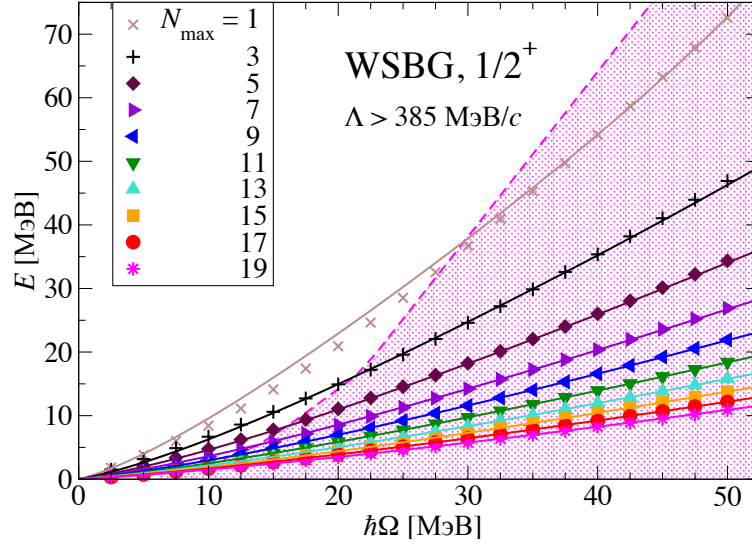


Рис. 1.18. Нижайшие собственные энергии состояния $\frac{1}{2}^+$ в задаче с WSBG гамильтонианом E_1 , принадлежащие континууму (символы) как функции параметра $\hbar\Omega$ и выборка из них по критерию $\Lambda > 385$ МэВ/с (заштрихованная область). Сплошные кривые — решения уравнения (1.60) для E_1 с параметрами E_b , c , d и f , полученных при подгонке с такой выборкой собственных энергий.

где $\nu = 1$. Для нахождения параметров E_b , c , d и f сдвига фаз нужно найти для каждой пары N_{\max} и $\hbar\Omega$ значение энергии E_1 , $\mathcal{E}_1^{(i)} = E_1(N_{\max}^i, \hbar\Omega^i)$, $i = 1, 2, \dots, D$ и минимизировать среднеквадратичное отклонение (1.59) (где в этом случае вместо нижнего индекса 0 должен быть индекс 1).

Энергии E_1 нижайшего состояния в континууме $\frac{1}{2}^+$ задачи с модельным гамильтонианом WSBG как функции $\hbar\Omega$ для различных N_{\max} показаны на рис. 1.18, а как функции скейлингового параметра s — на рис. 1.19. Все собственные энергии в этом случае на рис. 1.19 лежат на общей кривой, однако, как и в случае состояний рассеяния с отрицательной чётностью, отклонения от общей кривой более заметны для сдвигов фаз (см. рис. 1.20), которые более чувствительны к выборке собственных состояний.

Как и в случае состояний с отрицательной чётностью мы используем выборку собственных состояний на основе критерия $\Lambda > 385$ МэВ/с, которая представлена на рис. 1.18 заштрихованной областью. Полученные с такой выборкой параметры E_b , c , d и f представлены в таблице 1.3. Интересно, что подогнанное

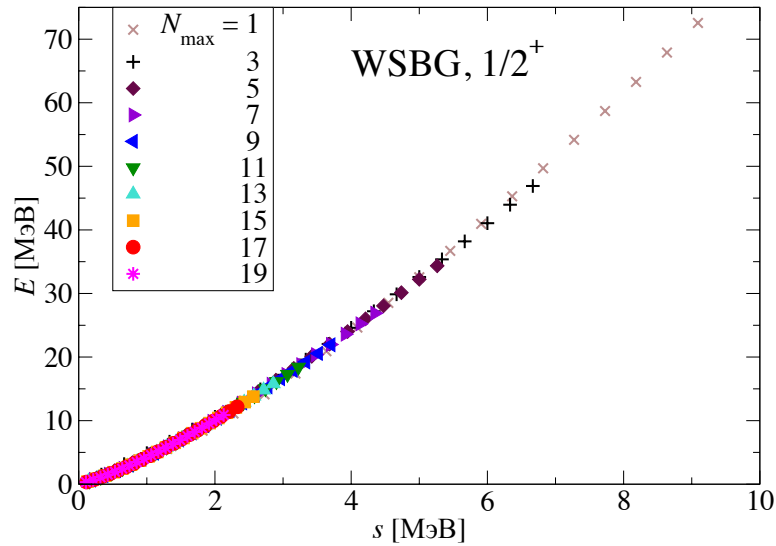


Рис. 1.19. Нижайшие собственные энергии состояния $\frac{1}{2}^+$ в задаче с гамильтонианом WSBG E_1 , принадлежащие континууму как функции скейлингового параметра s .

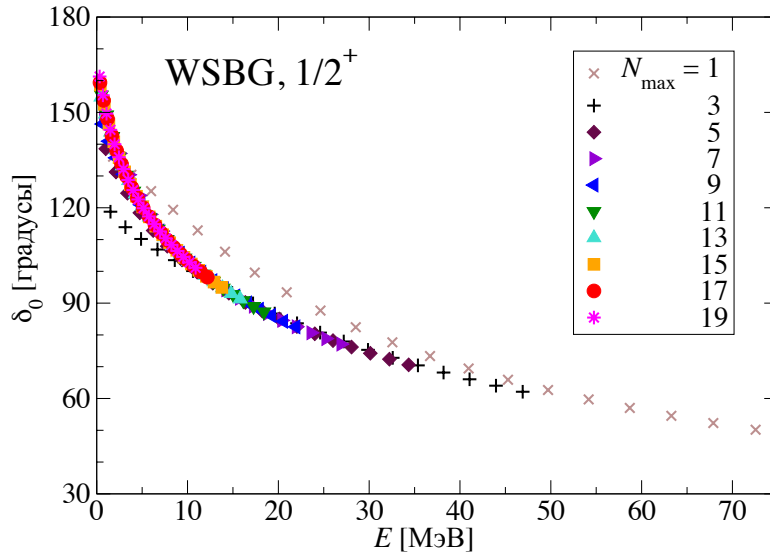


Рис. 1.20. Сдвиги фаз состояния $\frac{1}{2}^+$, полученные с помощью формулы (1.25) на основе нижайших собственных энергий в задаче с гамильтонианом WSBG E_1 .

значение E_b отличается от точного значения энергии, которое имеет связанное состояние в задаче с гамильтонианом WSBG. Отметим, что соответствующий полюс S -матрицы находится далеко от действительной оси импульсов и, следовательно, оказывает небольшое влияние на поведение сдвига фаз. В свою очередь, сдвиги фаз состояния $\frac{1}{2}^+$ на рис. 1.22 выглядят достаточно близкими к точным сдвигам фаз до энергий порядка 70 МэВ, где сдвиги фаз SS-HORSE, полученные с $N_{\max} = 1$, немного отличаются от точных значений. Этот резуль-

Таблица 1.3. Состояние $\frac{1}{2}^+$ $n\alpha$ -рассеяния с модельным WSBG потенциалом: параметры E_b , c , d и f уравнения (1.60), среднеквадратичное отклонение Ξ , число данных в выборке D . Для выборки $N_{\max} \leq 5$ Ξ и D для всех энергий из предыдущей выборки указаны в скобках.

Выборка	E_b (МэВ)	c (МэВ $^{-\frac{1}{2}}$)	$d \cdot 10^3$ (МэВ $^{-\frac{3}{2}}$)	$f \cdot 10^5$ (МэВ $^{-\frac{5}{2}}$)	Ξ (кэВ)	D
$\Lambda > 385$ МэВ/ c	-6.841	-0.157	1.19	-0.888	163	151
$N_{\max} \leq 5$	-6.853	-0.156	1.19	-0.888	332(163)	35(151)
Точное	-9.85					

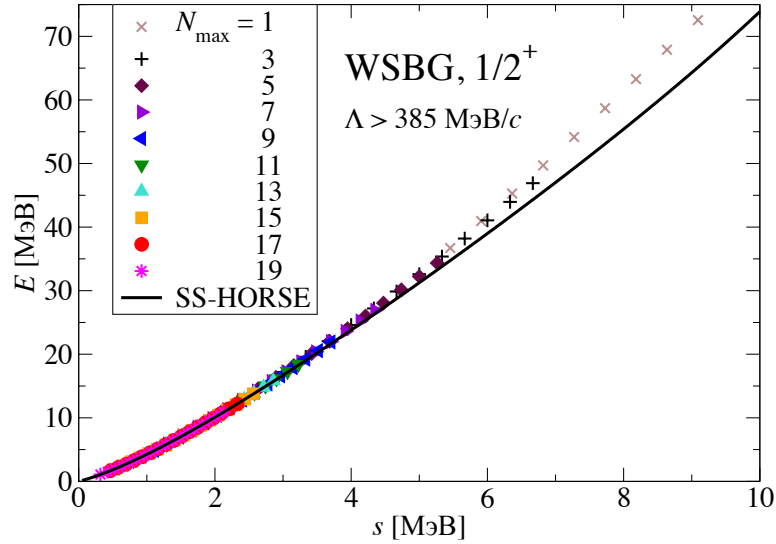


Рис. 1.21. Выборка собственных энергий E_1 состояния $\frac{1}{2}^+$ в задаче с WSBG гамильтонианом по критерию $\Lambda > 385$ МэВ/ c как функции s . Сплошная кривая обозначает решения уравнения (1.60) для E_1 с параметрами E_b , c , d и f , полученными при подгонке по выборке собственных энергий.

тат указывает на то, что энергии связанных состояний сложно оценивать только по данным рассеяния, особенно для глубоко связанных состояний.

Для исследования возможности описания сдвига фаз состояния $\frac{1}{2}^+$ при низких энергиях с использованием результатов диагонализации только в малых модельных пространствах, из предыдущей выборки собственных состояний были исключены состояния, полученные с $N_{\max} > 5$ (см. рис. 1.23 и 1.24). При такой выборке были получены близкие результаты (см. таблицу 1.3). Наиболь-

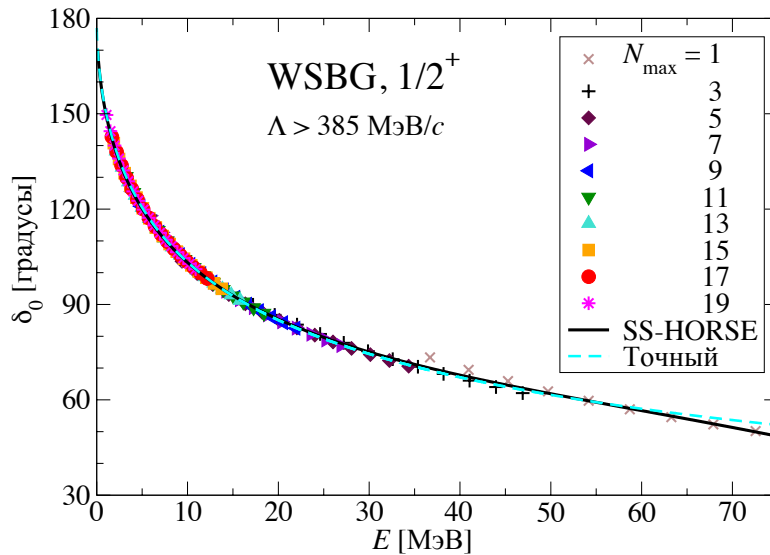


Рис. 1.22. Сдвиги фаз состояния $\frac{1}{2}^+$, полученные по собственным энергиям E_1 , в задаче с WSBG гамильтонианом из выборки $\Lambda > 385 \text{ МэВ}/c$ (символы). Сплошная кривая соответствует сдвигу фаз, рассчитанному по формуле (1.53) с параметрами E_b , c , d и f , полученными при подгонке по указанной выше выборке собственных энергий. Штриховая кривая соответствует сдвигу фаз, полученному при численном интегрировании уравнения Шрёдингера с WSBG гамильтонианом.

шие отличия наблюдаются в значении E_b , но, как было отмечено, это значение не играет большой роли при описании поведения сдвига фаз. Из рис. 1.25 видно, что метод SS-HORSE даёт хорошие результаты и в этом случае. Рисунок 1.23 также показывает, что хорошо описываются не только собственные энергии E_1 , включённые в анализ, но и энергии, полученные в больших модельных пространствах. Среднеквадратичное отклонение в этом случае точно такое же, как если бы все собственные энергии из выборки $\Lambda > 385 \text{ МэВ}/c$ были бы включены в анализ.

1.4.4. Общие свойства сходимости положительных собственных энергий в вариационных расчетах с осцилляторным базисом

Как уже было отмечено, свойство скейлинга собственных состояний конечных матриц гамильтониана в осцилляторном базисе было предложено в работе [12] для исследования свойств сходимости для связанных состояний. Ав-

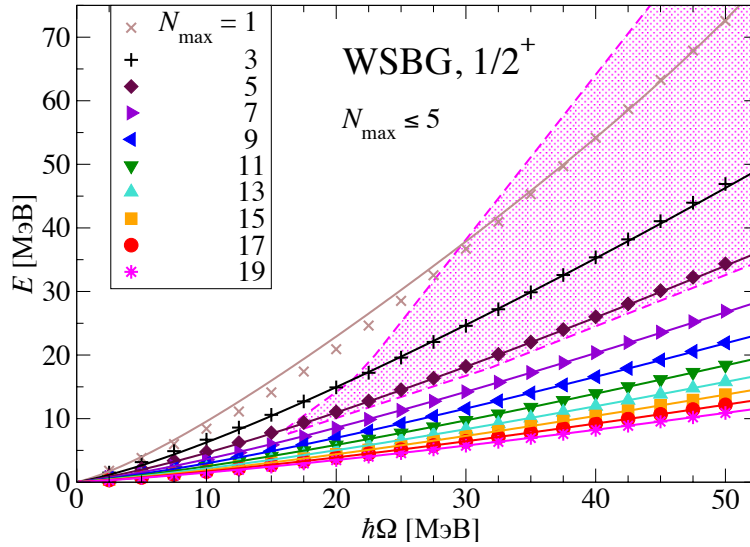


Рис. 1.23. Энергии E_1 нижайшего собственного состояния $\frac{1}{2}^+$ в задаче с WSBG гамильтонианом (символы) и выборка $N_{\max} \leq 5$ из них (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.4.

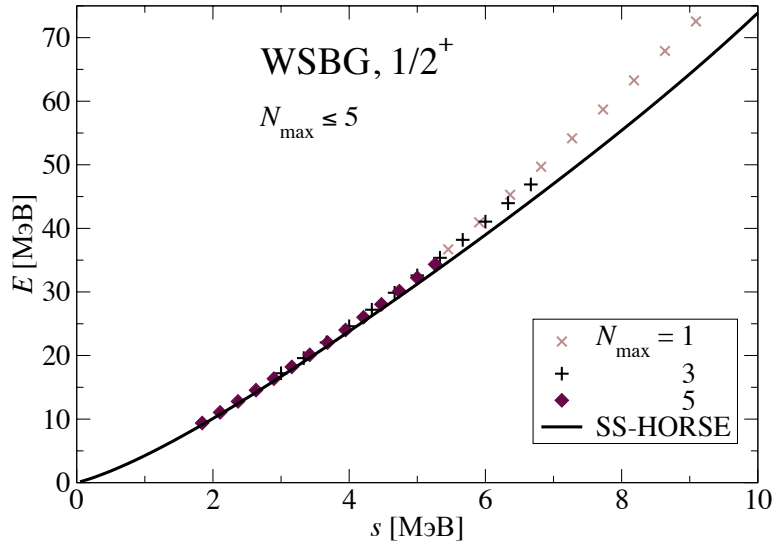


Рис. 1.24. Энергии E_1 нижайшего собственного состояния $\frac{1}{2}^+$ в задаче с WSBG гамильтонианом из выборки $N_{\max} \leq 5$ как функции параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.21.

торы работы [12] продемонстрировали, что собственные энергии E_ν как функции $\lambda_{sc} \sim \sqrt{s}$ стремятся к константе в пределе $\lambda_{sc} \rightarrow 0$, и эта константа является пределом сходимости собственного значения в бесконечном модельном пространстве. Настоящая работа распространила применение скейлингового свойства базиса гармонического осциллятора на случай состояний в континууме. В таком случае собственные значения стремятся к нулю при неограниченном

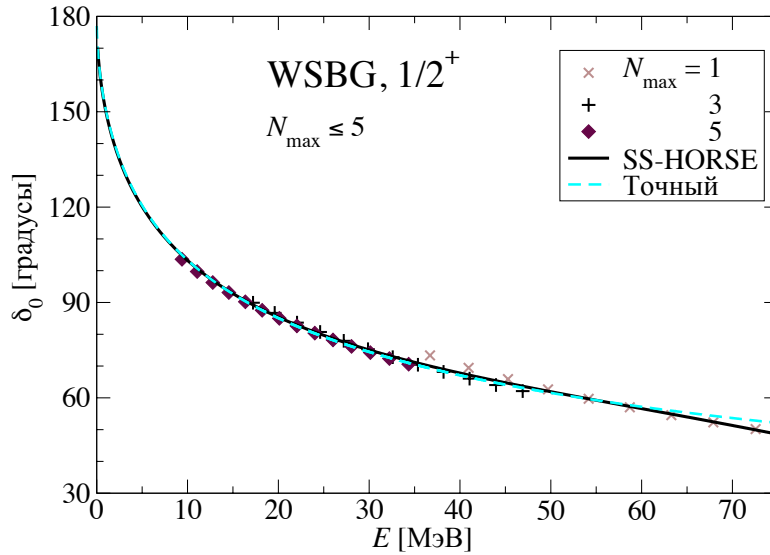


Рис. 1.25. Сдвиги фаз, полученные на основе энергий E_1 собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ в задаче с WSBG гамильтонианом из выборки $N_{\max} \leq 5$. Обозначения аналогичны рис. 1.22.

росте базиса модельного пространства. Сплошные кривые на рис. 1.21 и 1.24 демонстрируют такое поведение для собственного значения E_1 в зависимости от s в системе, которая имеет связанное состояние, и не имеет резонансов при низких энергиях, описывается формулой (1.53), общей для такого случая. Собственные значения представляются гладкой монотонной функцией s (или λ_{sc}), которая, как и ожидается, стремится к нулю при $s \rightarrow 0$.

Сплошные кривые на рис. 1.5, 1.8, 1.13 и 1.16 демонстрируют поведение собственных состояний E_0 в зависимости от s в случае, когда сдвиг фаз при низких энергиях даётся формулой (1.54), которая является общей для систем без связанного состояния, но с наличием низкоэнергетического резонанса. Видно, что в этом случае $E_0(s)$ представляет из себя гладкую монотонно возрастающую функцию, производная $\frac{dE_0}{ds}$ которой имеет относительно большую величину при больших s . По мере уменьшения s , т. е. при приближении к области резонанса, $\frac{dE_0}{ds}$ уменьшается, такое уменьшение более выражено для узких резонансов, что можно увидеть при сопоставлении рис. 1.5 и 1.13. Рисунок 1.26, где функция $E_0(s)$ из рис. 1.5 показана в большем масштабе и дополнительно отмечена резонансная область, демонстрирует, что при дальнейшем уменьшении s сильно увеличивается производная функции при энергиях ниже резонансной.

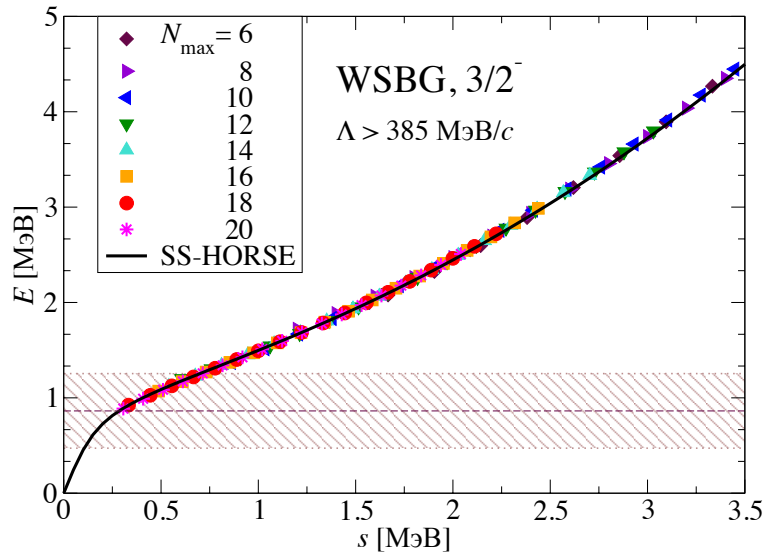


Рис. 1.26. Часть рис. 1.5 в увеличенном масштабе. Штриховая линия соответствует резонансной энергии E_r , заштрихованная область обозначает резонансную ширину.

Когда при малых значениях s функция $E_0(s)$ покидает резонансную область, следующее собственное значение $E_1(s)$ (не показано на рисунке) вступает в резонансную область со стороны больших энергий.

В этом заключаются главные свойства сходимости положительных собственных значений, полученных в осцилляторном базисе.

В заключение отметим, что в этом разделе была продемонстрирована работа метода SS-HORSE на примере двухчастичной задачи с потенциалом WSBG. Показано, что данный метод адекватно описывает сдвиг фаз при низких энергиях и резонансные энергии E_r и ширины Γ . Весьма интересным фактом для многочастичных расчётов в модели оболочек заключается в том, что резонансные параметры и сдвиг фаз могут быть получены с разумной точностью при использовании собственных энергий, полученных в модельных пространствах с относительно малым базисом. Более того, существует возможность достаточно точно предсказывать собственные значения в больших базисах на основе собственных энергий, в малых базисах.

1.5. Описание упругого рассеяния нейтрона на α -частице на основе микроскопических расчётов в NCSM

Обсудим применение метода SS-HORSE к описанию $n\alpha$ -рассеяния, нахождению его парциальных сдвигов фаз и резонансных параметров на основе многочастичных расчётов *ab initio* ядра ${}^5\text{He}$ с NN -взаимодействием JISP16. Расчёты в NCSM были выполнены с использованием комплекса программ MFDn [77, 78] с числом квантов возбуждения в пределах $2 \leq N_{\text{max}} \leq 18$ для состояний отрицательной чётности и $3 \leq N_{\text{max}} \leq 17$ для состояний положительной чётности со значением параметра $\hbar\Omega$ в пределах от 10 до 40 МэВ с шагом 2.5 МэВ.

Выше было отмечено, что для анализа методом SS-HORSE необходимо отсчитывать энергию ядра ${}^5\text{He}$ относительно порога реакции $n + \alpha$. Следовательно, для каждой энергии ${}^5\text{He}$ нечётного (чётного) собственного состояния необходимо вычесть энергию основного состояния ядра ${}^4\text{He}$, полученного с таким же значением $\hbar\Omega$ и таким же значением N_{max} (с $(N_{\text{max}} - 1)$) квантов возбуждения. В дальнейшем именно такие энергии E_ν будем называть собственными энергиями, полученными в NCSM, т. е. будут обсуждаться только энергии ${}^5\text{He}$, отсчитанные от порога $n + \alpha$.

Отметим, что NCSM использует обрезание базиса по числу квантов возбуждения N_{max} , в то время как SS-HORSE требует обрезания по числу квантов относительного движения в системе нейтрона и α -частицы. Мы используем N_{max} для анализа методом SS-HORSE, что было бы совершенно обоснованно, если бы волновая функция α -частицы описывалась бы низжайшей многочастичной осцилляторной функцией с нулём квантов возбуждения, $N_{\text{max}}^\alpha = 0$. Физически ясно, что такое приближение должно работать хорошо и в более общем случае, когда волновая функция α -частицы включает состояния с $N_{\text{max}}^\alpha > 0$, в силу того, что состояние с $N_{\text{max}}^\alpha = 0$ имеет большой вес. Вместо того, чтобы строго обосновать использование N_{max} как числа квантов относительного движения в методе SS-HORSE, мы предлагаем обосновать это *a posteriori*: ниже

мы продемонстрируем, что полученные сдвиги фаз $n\alpha$ -рассеяния согласуются с расчётами в NCSM, полученными в широком диапазоне N_{\max} и $\hbar\Omega$; более того, мы имеем возможность предсказывать результаты NCSM в базисах с большими N_{\max} на основе результатов с относительно небольшим значением N_{\max} . Ясно, что эта предсказательная сила и согласованность результатов для фаз рассеяния, полученных в широком диапазоне значений N_{\max} и $\hbar\Omega$, демонстрирует разумность всего предлагаемого подхода SS-HORSE-NCSM.

В главе 3 настоящей работы будет приведён последовательный метод описания рассеяния нейтрона на ядре, состояние которого описывается суперпозицией осцилляторных состояний, в том числе и с $N_{\max}^A > 0$.

1.5.1. Резонансное состояние рассеяния $\frac{3}{2}^-$

Для подгонки параметров сдвига фаз состояний $\frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$ при низких энергиях мы используем уравнение (1.58), такое же как и в соответствующих состояниях модельной задачи. Единственная разница заключается в том, что собственные энергии E_0 получены в данном случае из многочастичных расчётов в NCSM. Нижайшие состояния $\frac{3}{2}^-$ в NCSM показаны на рис. 1.27 как функции $\hbar\Omega$ для различных значений N_{\max} . На рис. 1.28 показаны собственные энергии E_0 в зависимости от скейлингового параметра s . На рис. 1.29 показаны сдвиги фаз состояния $\frac{3}{2}^-$ полученные по формуле (1.25). Рисунок 1.29 ясно демонстрирует необходимость выборки состояний, т. к. много точек отклоняются от общей кривой, которые формируют остальные точки. С другой стороны, этот рисунок демонстрирует сходимость фаз, достигаемую при больших N_{\max} : при увеличении N_{\max} увеличивается интервал по $\hbar\Omega$ точек, принадлежащих общей кривой. В конечном счёте для $N_{\max} = 16, 18$ остаётся лишь пара точек с $\hbar\Omega < 15$ МэВ, которые выпадают из этой кривой.

Первая выборка состояний основана на неравенстве $\Lambda > 600$ МэВ/с. Это значение в неравенстве определено для взаимодействия JISP16 в работе [12]. Полученная выборка изображена на рис. 1.27. Собственные энергии E_0 фор-

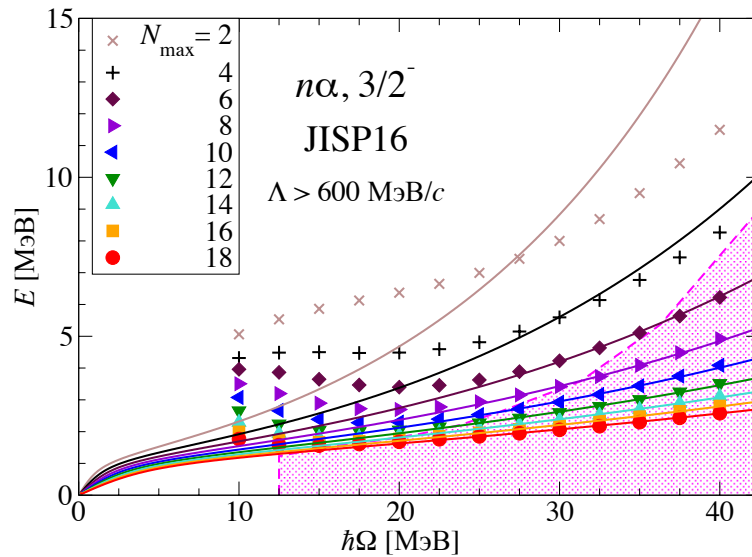


Рис. 1.27. Нижайшие энергии E_0 собственных состояний $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, полученные в NCSM при различных N_{\max} (символы), представленные как функции $\hbar\Omega$. Заштрихованная область показывает выборку состояний, удовлетворяющих неравенству $\Lambda > 600$ МэВ/с. Сплошные кривые — решения уравнения (1.58) для собственных энергий E_0 с параметрами a , b и d , полученных при подгонке для вышеуказанной выборки состояний.

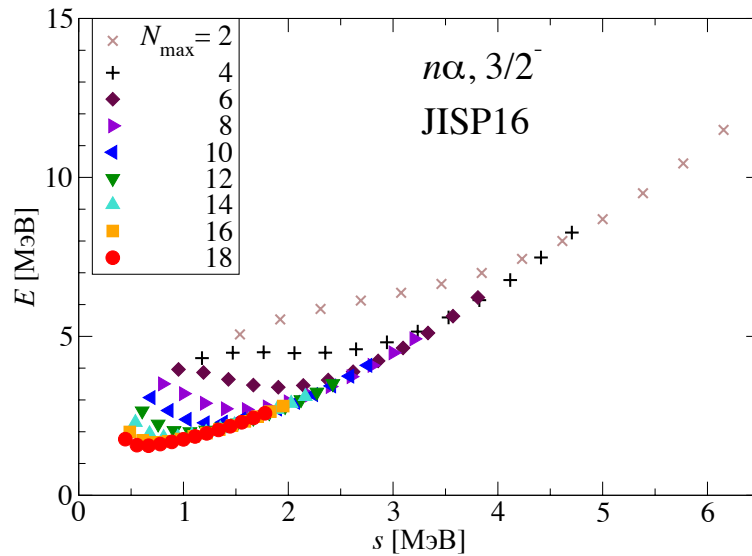


Рис. 1.28. Нижайшие энергии E_0 собственных состояний $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, полученные в NCSM при различных N_{\max} представленные как функции s .

мируют общую кривую на графике зависимости собственных энергий E_0 от скейлингового параметра s (рис. 1.30) и на графике зависимости сдвига фаз от энергии, полученного из формулы (1.25) (рис. 1.31). Мы подогнали параметры сдвига фазы с такой выборкой и получили значение среднеквадратичного от-

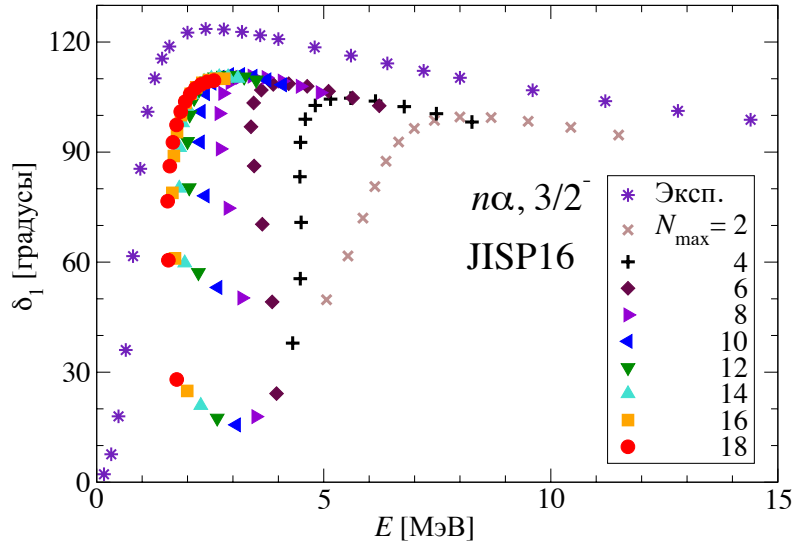


Рис. 1.29. Сдвиг фазы состояния $\frac{3}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния, полученные для собственных энергий E_0 ядра ${}^5\text{He}$ по формуле (1.25) и сдвиги фаз, полученные при анализе экспериментальных данных [79].

клонения 31 кэВ. Полученные параметры a , b , d уравнения (1.58), резонансная энергия E_r и ширина Γ для состояния рассеяния $\frac{3}{2}^-$ представлены в таблице 1.4. Точность подгонки параметров проиллюстрирована сплошными кривыми на рис. 1.27, 1.30 и 1.31, которые построены на основе полученных параметров и воспроизводят собственные энергии E_0 NCSM на рис. 1.27 и 1.30 и согласуются со сдвигами фаз на рис. 1.31.

На рис. 1.31 хорошо видно, что сдвиг фаз состояния $\frac{3}{2}^-$, полученный с взаимодействием JISP16, воспроизводит качественно, но не количественно результаты фазового анализа [79] экспериментальных данных $n\alpha$ -рассеяния. Так, полученная в этом методе энергия резонанса E_r оказалась немного выше экспериментального значения, разница составляет примерно 0.2 МэВ. Ширина резонанса Γ также завышена, разница с истинным значением составляет 0.4 МэВ (см. таблицу 1.4). В этой таблице также представлен результат подгонки параметров сдвига фаз по формуле (1.54) из сдвига фазы, полученного на основе экспериментальных данных [79]. Видно, что таким образом полученные параметры явно отличаются от полученных в рамках NCSM-SS-HORSE подхода.

Возвращаясь к собственным энергиям состояния $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, изображён-

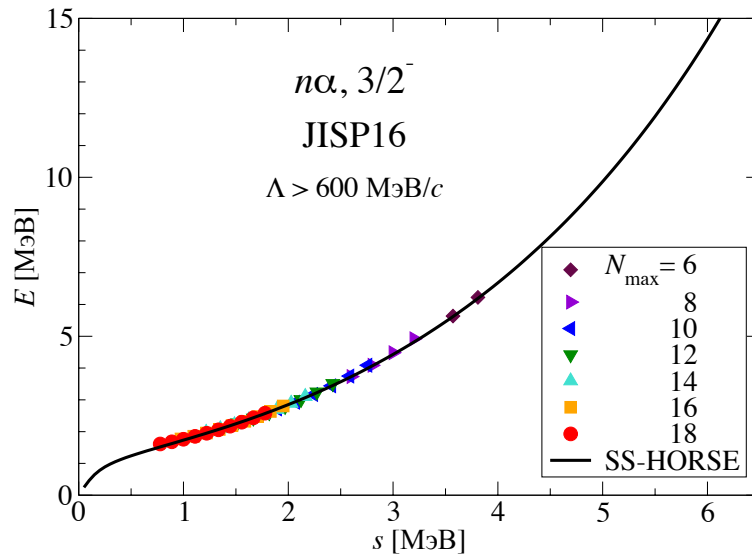


Рис. 1.30. Энергии E_0 собственных состояний $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, выбранных в соответствии с $\Lambda > 600 \text{ МэВ}/c$, представленные как функции скейлингового параметра s (символы). Все остальные обозначения аналогичны рис. 1.5.

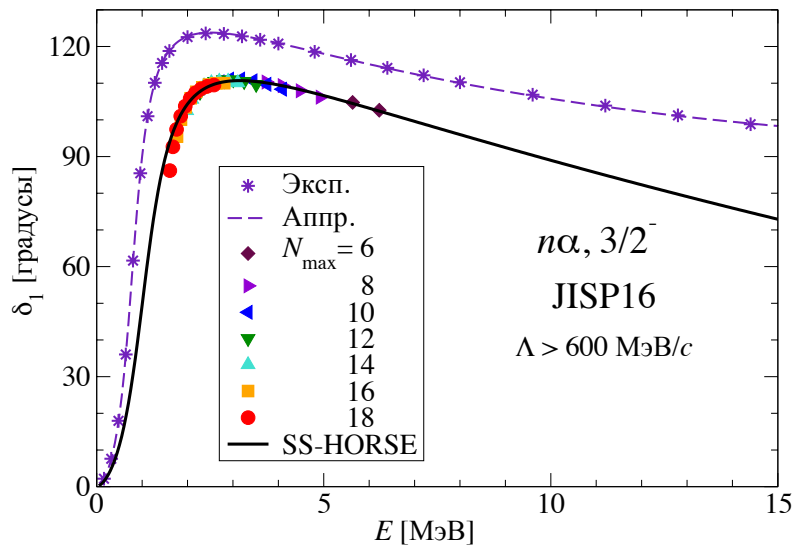


Рис. 1.31. Сдвиг фазы, полученный на основе формулы (1.25) для энергий E_0 состояния $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, удовлетворяющих условию $\Lambda > 600 \text{ МэВ}/c$ (символы). Сплошная кривая обозначает сдвиг фаз, полученный по формуле (1.54) с параметрами a , b и d , подогнанными по этой выборке собственных состояний. Звёздочки и штриховая кривая обозначают сдвиги фаз, полученные на основе экспериментальных данных [79], и сдвиг фаз, полученный по формуле (1.54) на основе подгонки параметров по этим данным.

ным на рис. 1.27, мы видим, что сплошные кривые хорошо согласуются не только с точками из выборки $\Lambda > 600 \text{ МэВ}/c$ (заштрихованная область), но и с другими точками, не включёнными в данную выборку. Это говорит о том,

Таблица 1.4. Параметры резонансного состояния $\frac{3}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния, полученные на основе расчётов в NCSM ядра ${}^5\text{He}$ с NN -взаимодействием JISP16: параметры сдвига фаз a , b , d уравнения (1.58), резонансные энергия E_r и ширина Γ , среднеквадратичное отклонение энергии Ξ и число данных D для различных выборок собственных состояний в сравнении результатами анализа экспериментальных данных в разных подходах [80] и [35] и подгонкой параметров по сдвигу фаз по формуле (1.54) на основе экспериментальных данных [79]. Для выборки $N_{\max} \leq 4$ Ξ и D для всех данных для выборки “А” показаны в скобках.

Выборка	a (МэВ $^{\frac{1}{2}}$)	b^2 (МэВ)	$d \cdot 10^4$ (МэВ $^{-\frac{3}{2}}$)	E_r (МэВ)	Γ (МэВ)	Ξ (кэВ)	D
$\Lambda > 600$ МэВ/ c	0.505	1.135	-0.9	1.008	1.046	31	46
“А”	0.506	1.019	93.2	0.891	0.989	70	68
$N_{\max} \leq 4$	0.515	1.025	101	0.892	1.008	106(81)	11(68)

На основе эксперимента:

R -матрица [80]				0.80	0.65		
J -матрица [35]				0.772	0.644		
δ_1 по [79]	0.358	0.839	55.9	0.774	0.643	0.21°	26

что критерий $\Lambda > 600$ МэВ/ c является слишком сильным: можно использовать больше состояний, полученных в NCSM для анализа в методе SS-HORSE. Учитывая этот факт, мы составили выборку, в которую включены все собственные энергии, формирующие общую кривую на рис. 1.28 и, особенно, на рис. 1.29, т. к., как мы уже отмечали, сдвиг фаз более чувствителен к сходимости. Существует, однако, ограничение: невозможно принять к рассмотрению собственные энергии E_ν , полученные с некоторым значением N_{\max} в тех диапазонах $\hbar\Omega$, где E_ν убывает с ростом $\hbar\Omega$. Другими словами мы должны оставить состояния, полученные с любым данным N_{\max} , у которых производная $\frac{\partial E_\nu}{\partial(\hbar\Omega)} > 0$. Уравнения (1.58) и (1.60) не исключают математическую возможность для $\frac{\partial E_\nu}{\partial(\hbar\Omega)} < 0$, однако такая ситуация отвечает нефизическим значениям параметров этих уравнений.

В целях улучшения точности подгонки параметров необходимо использовать в методе SS-HORSE как можно больше собственных состояний NCSM, тем самым увеличивая интервал энергий. В таком случае, выборка состояний на основе неравенства $\Lambda > \Lambda_0$ не является оптимальной. Такое неравенство исключает состояния с $\hbar\Omega < \hbar\Omega_0$, где $\hbar\Omega_0$ зависит от N_{\max} и убывает с его ростом. Как можно увидеть из исследования модельной задачи, в особенности из рис. 1.3, 1.4, 1.10, 1.12, 1.18, 1.20, мы можем использовать для анализа в SS-HORSE состояния с достаточно большим значением N_{\max} и очень малым значением $\hbar\Omega$; подобный вывод также следует из исследования *ab initio* континуума многочастичной системы четырёх нейтронов (тетранейтрона), приведённого в главе 2 настоящей работы и в работе [A2]. В соответствии с правилом $\Lambda > \Lambda_0$ мы либо исключаем состояния с большими N_{\max} и малыми $\hbar\Omega$, либо включаем в анализ некоторые состояния с малым N_{\max} , которые сильно отклоняются от общей кривой на графиках E_ν от s и/или δ_ℓ от E .

Ультрафиолетовое обрезание $\Lambda > \Lambda_0$ было предложено в работе [12], на основе идеи, что осцилляторный базис должен быть способен описать поведение многочастичной системы на малых расстояниях (при больших импульсах) с использованием двухчастичных сил; то есть значение $\hbar\Omega$ не может быть слишком малым вследствие того, что осцилляторные функции с малым $\hbar\Omega$ имеют большой радиус (соответственно, малый импульс) и не имеют возможности описать особенности NN -взаимодействия на малых расстояниях. В ядрах, находящихся далеко от линии стабильности, где энергия связи не так велика, волновая функция не чувствительна к поведению NN -взаимодействия на малых расстояниях или при относительно больших импульсах. Более того, важен радиус рассматриваемого состояния, т. е. можно ожидать адекватного описания основного состояния, только если осцилляторная функция имеет по крайней мере один узел в пределах радиуса состояния, два узла необходимы для описания первого возбуждённого состояния и так далее. Следовательно, минимальное приемлемое значение $\hbar\Omega$ сильно зависит от того, какое состояние рассматри-

вается, и вполне возможно, что оно не чувствительно к межкулонному взаимодействию. Это утверждение особенно важно для слабосвязанных состояний или для состояний рассеяния при низких энергиях. В случае рассеяния для описания волновой функции при низких энергиях, которая может иметь первый узел на большом расстоянии, не только разумно, но и обязательно использование осцилляторных функций с очень малым значением $\hbar\Omega$ и, следовательно, с большим радиусом.

Мы не можем сформулировать математического правила для оптимальной выборки состояний для метода SS-HORSE, вместо этого мы выбираем ручную собственные состояния с энергиями E_0 , находящимися справа от минимума зависимости от $\hbar\Omega$ для каждого N_{\max} на рис. 1.27 и лежащие на или около общей кривой на рис. 1.28 и 1.29. Назовём такую выборку “А”. Выбранные таким образом собственные состояния и соответствующие сдвиги фаз представлены на рис. 1.32, 1.33 и 1.34. Результаты подгонки параметров на основе выборки “А” представлены в таблице 1.4 на второй строке. В этом случае получено среднеквадратичное отклонение 70 кэВ. Это число, конечно, зависит от критерия выборки состояний, таких как приемлемое отклонение от общей кривой, формируемой остальными точками на рис. 1.33 и 1.34. При сопоставлении рис. 1.27 и 1.32 можно увидеть, что такая ручная выборка делает возможным описание рассеяния при использовании состояний с малыми N_{\max} . Такие состояния имеют большие энергии и их включение в анализ SS-HORSE расширяет описание сдвига фаз на более высокие энергии и приближает его к результату анализа экспериментальных данных $n\alpha$ -рассеяния (см. рис. 1.34). Эти изменения поведения сдвига фаз при высоких энергиях соответствует резкому изменению параметра d , который является коэффициентом при наиболее высокой степени, учтённой в разложении (1.54). При меньших энергиях, включающих резонансную область, подгонка параметров на основе выборок “А” и $\Lambda > 600$ МэВ/с даёт похожие результаты и мы имеем близкие значения соответствующих параметров a и b и, следовательно, малые различия для E_r и Γ .

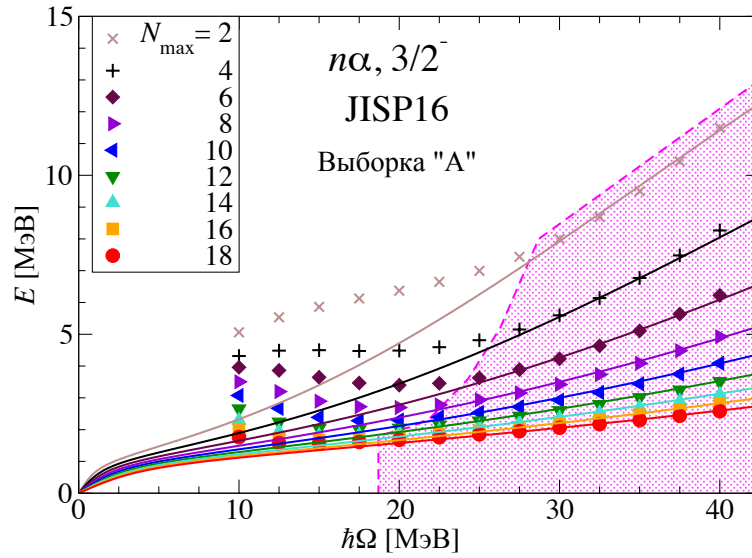


Рис. 1.32. Энергии E_0 нижайших состояний $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и выборка “А” из них (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.27.

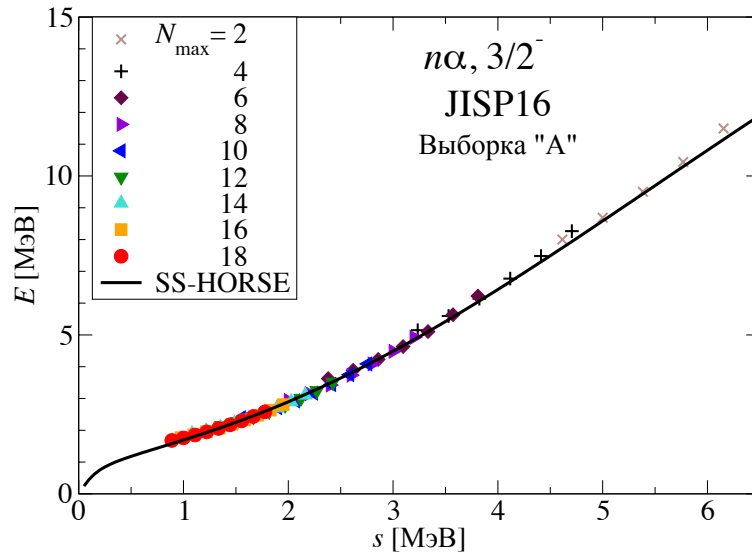


Рис. 1.33. Энергии E_0 состояния $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ из выборки “А” в зависимости от скейлингового параметра s (Символы). Остальные обозначения аналогичны рис. 1.5.

Интересно изучить возможность получения разумных результатов на основе NCSM расчётов, выполненных только с небольшими модельными пространствами. Поэтому для анализа SS-HORSE мы исключаем из выборки “А” состояния, полученные с $N_{\max} > 4$. Такая выборка “ $N_{\max} \leq 4$ ” и результаты с ней приведены на рис. 1.35, 1.36 и 1.37. Все собственные энергии E_0 такой выборки находятся существенно выше резонансной области (см. рис. 1.37). Тем не менее сдвиг фаз, полученный на основе 11 состояний этой выборки, близок к сдвигу

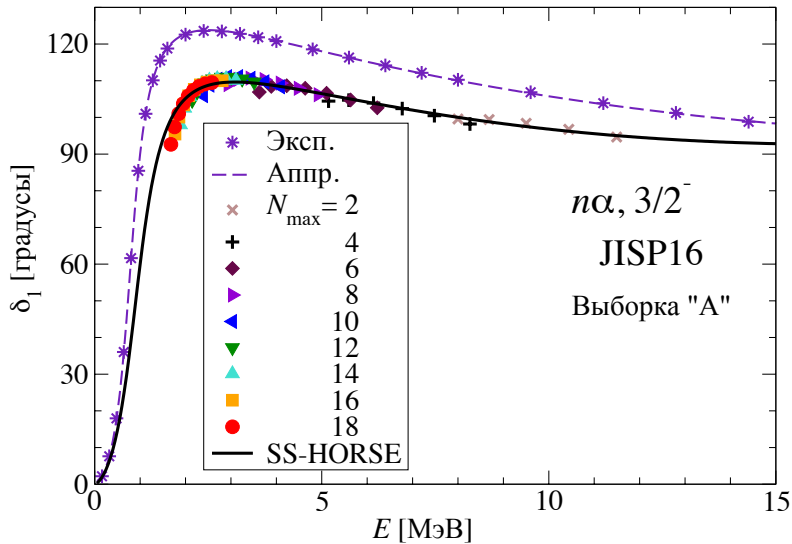


Рис. 1.34. Сдвиг фазы состояния $\frac{3}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния, полученные для энергий E_0 собственных состояний ядра ${}^5\text{He}$ из выборки “А”. Обозначения аналогичны рис. 1.31.

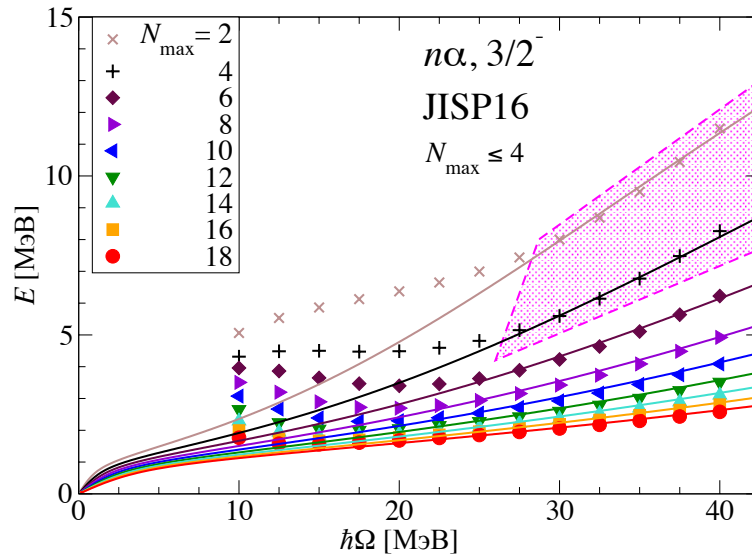


Рис. 1.35. Энергии E_0 нижайших состояний $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и выборка “ $N_{\max} \leq 4$ ” (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.27.

гу фаз, полученному с 68 состояниями выборки “А”. Близки также параметры параметризации сдвига фаз и резонансные характеристики, которые приведены в таблице 1.4. Рисунок 1.35 демонстрирует, что как и в случае модельной задачи на основе собственных значений E_0 , полученных в NCSM с $N_{\max} \leq 4$, можно с высокой точностью предсказать собственные энергии в модельных пространствах с бóльшим значением N_{\max} : так среднеквадратичное отклонение по энергии составляет 81 кэВ для 68 точек из выборки “А”.

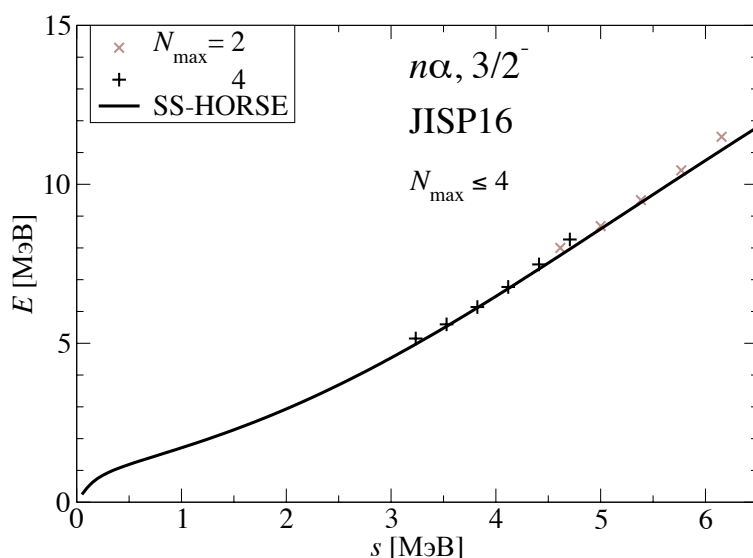


Рис. 1.36. Энергии E_0 нижайших состояний $\frac{3}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, полученные в расчётах NCSM из выборки “ $N_{\max} \leq 4$ ” в зависимости от s . Остальные обозначения аналогичны рис. 1.5.

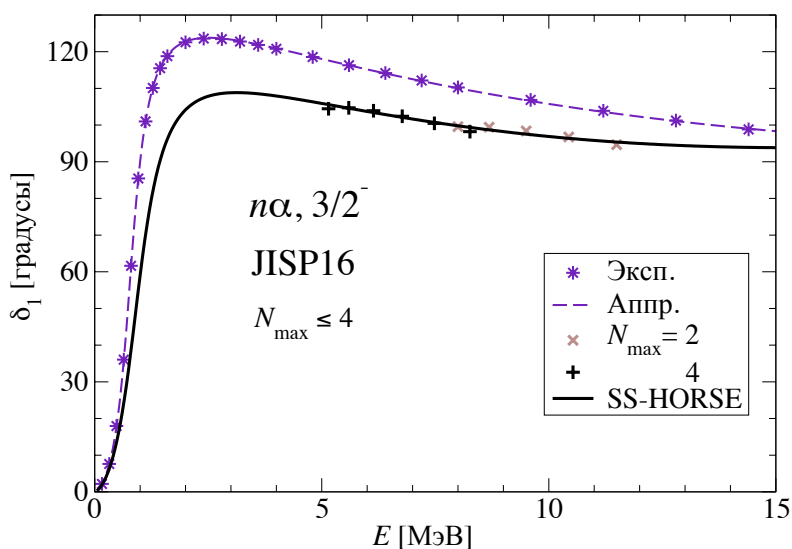


Рис. 1.37. Сдвиг фазы состояния $\frac{3}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния, полученные для энергий E_0 собственных состояний ядра ${}^5\text{He}$, полученных в NCSM с $N_{\max} \leq 4$. Обозначения аналогичны рис. 1.31.

1.5.2. Резонансное состояние рассеяния $\frac{1}{2}^-$

Нижайшие собственные состояния $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, полученные в NCSM с NN -взаимодействием JISP16, представлены на рис. 1.38 как функции $\hbar\Omega$ и на рис. 1.39 как функции скейлингового параметра s . На рис. 1.40 представлен соответствующий сдвиг фаз $n\alpha$ -рассеяния. Видно, что часть состояний на рис. 1.39 и 1.40 ложатся на общие кривые, что демонстрирует сходимость сдвигов фаз.

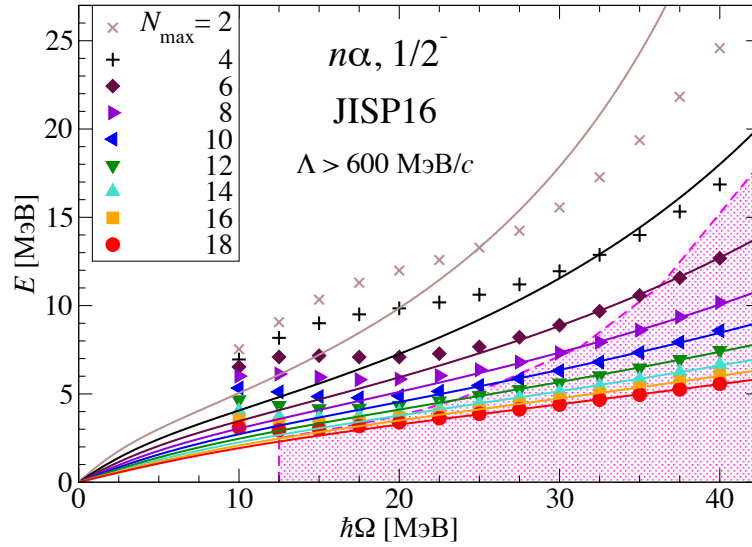


Рис. 1.38. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и выборка из них на основе неравенства $\Lambda > 600 \text{ MeV}/c$ (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.27.

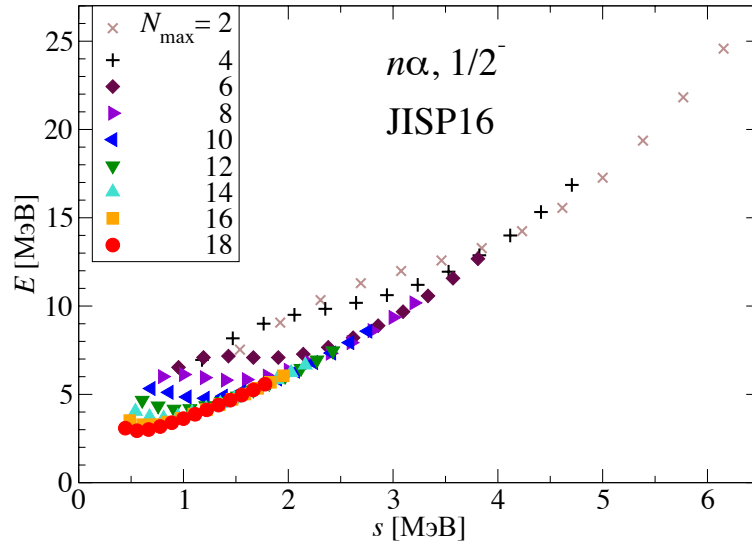


Рис. 1.39. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ как функции скейлингового параметра s .

В то же время, имеются точки, которые отклоняются от таких кривых, и мы должны исключить подобные точки из анализа в методе SS-HORSE.

Как и в случае состояния рассеяния $\frac{3}{2}^-$ начнём с выборки состояния в соответствии с неравенством $\Lambda > 600 \text{ MeV}/c$, рекомендованным в работе [12] для NN -взаимодействия JISP16. Полученная таким образом выборка показана на рис. 1.38 и 1.41, соответствующие этим энергиям сдвиги фаз показаны

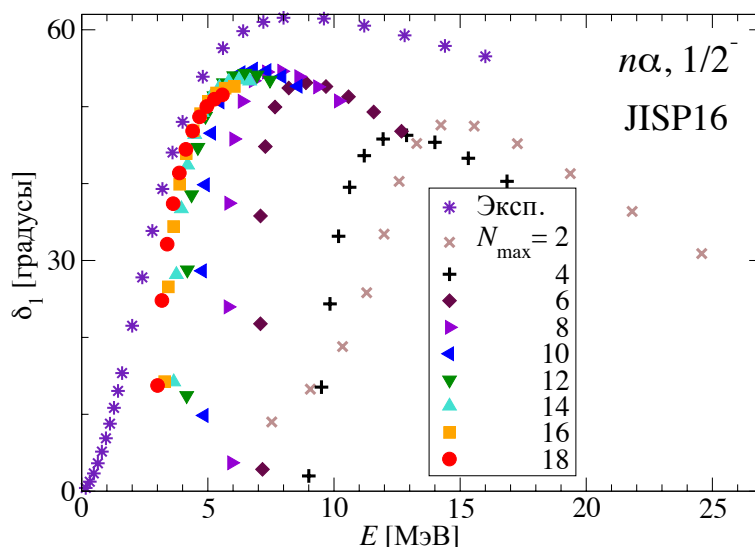


Рис. 1.40. Сдвиг фазы, полученный для энергий E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ при помощи формулы (1.25). Обозначения аналогичны рис. 1.29.

на рис. 1.42. Выбранные состояния формируют достаточно гладкие кривые на рис. 1.41 и 1.42, позволяют получить параметры параметризации сдвига фаз, которые приведены в таблице 1.5. Таким образом, мы получаем описание состояния $\frac{1}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния с разумной точностью. Оно качественно, хотя и не количественно согласуется с фазами $n\alpha$ -рассеяния, полученными на основе фазового анализа эксперимента (см. рис. 1.42). Отметим, что параметры сдвига фаз, полученные на основе экспериментальных данных и результатах с JISP16 (см. таблицу 1.5) близки за исключением параметра d , который даёт малый вклад при энергиях ниже 20 МэВ. Из рис. 1.38 видно, что хорошо воспроизводятся не только собственные энергии из заштрихованной области, по которым производилась подгонка параметров, но и много других не включённых в анализ собственных энергий, особенно полученных с малыми значениями N_{max} . Таким образом, разумно осуществить выборку собственных состояний для SS-HORSE вручную, которая должна включить в себя гораздо больше состояний.

Составленная таким образом выборка собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ (назовём её “В”) показана на рис. 1.43 и 1.44, соответствующие энергиям из выборки “В” сдвиги фаз представлены на рис. 1.45, результаты подгонки параметров показаны в таблице 1.5. Как и в случае состояния $\frac{3}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния,

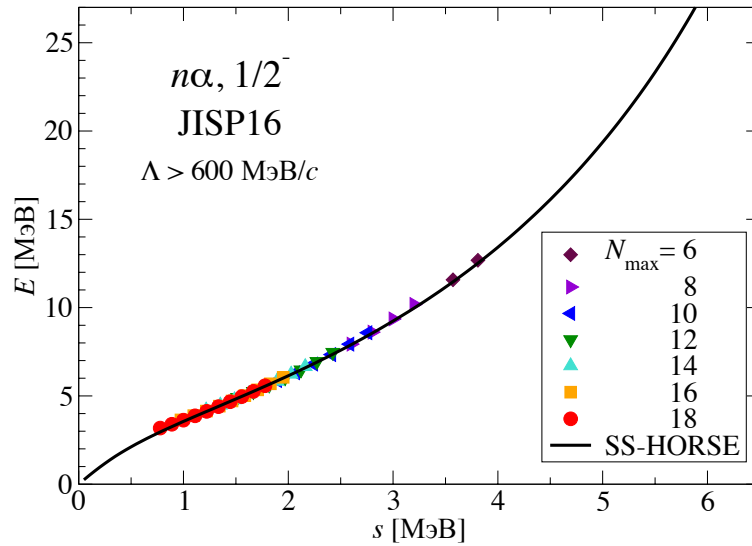


Рис. 1.41. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, удовлетворяющих неравенству $\Lambda > 600$ МэВ/с, как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.5.

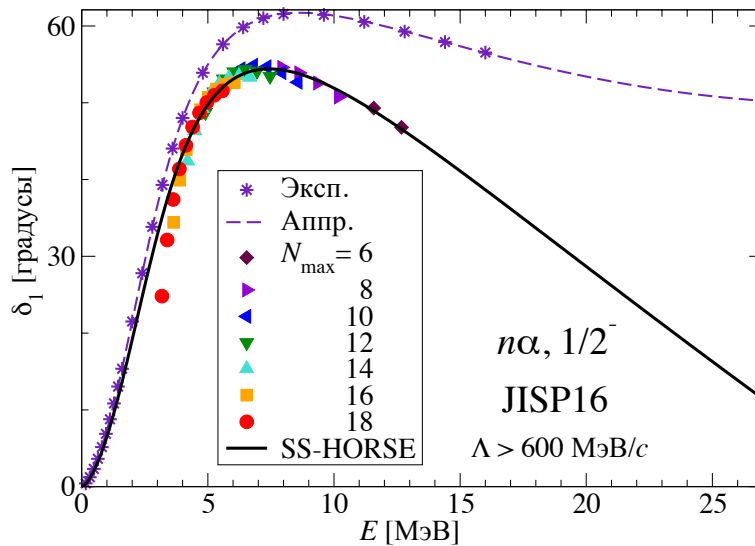


Рис. 1.42. Сдвиг фазы, полученный при помощи формулы (1.25) для энергий E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$, удовлетворяющих неравенству $\Lambda > 600$ МэВ/с. Обозначения аналогичны рис. 1.31.

включение дополнительных состояний в анализ сдвигает вверх сдвиг фаз при высоких энергиях в направлении сдвига фаз, полученного на основе экспериментальных данных. Из этих результатов видно, что значительно меняется лишь параметр d , влияние которого существенно только при достаточно высоких энергиях.

Таблица 1.5. Параметры резонансного состояния $\frac{1}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния, полученные на основе расчётов ядра ${}^5\text{He}$ в NCSM с NN -взаимодействием JISP16. Обозначения аналогичны таблице 1.4.

Выборка	a (МэВ $^{\frac{1}{2}}$)	b^2 (МэВ)	$d \cdot 10^4$ (МэВ $^{-\frac{3}{2}}$)	E_r (МэВ)	Γ (МэВ)	Ξ (кэВ)	D
$\Lambda > 600$ МэВ/ c	1.680	3.443	-3.6	2.031	5.559	61	46
“В”	1.699	3.299	21.3	1.856	5.456	11	60
$N_{\max} \leq 4$	2.460	6.734	-0.15	3.710	11.24	109	9
						(893)	(60)
$4 \leq N_{\max} \leq 6$	1.718	3.310	25.0	1.834	5.511	25	10
						(92)	(60)

На основе эксперимента:

R -матрица [80]				2.07	5.57		
J -матрица [35]				1.97	5.20		
δ_1 по [79]	1.622	3.276	46.3	1.960	5.249	0.038°	26

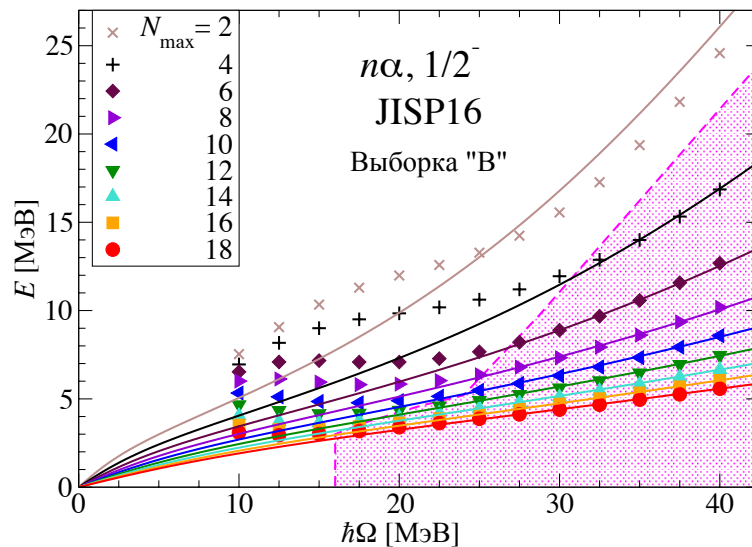


Рис. 1.43. Энергии E_0 собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и выборка “В” из них (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.27.

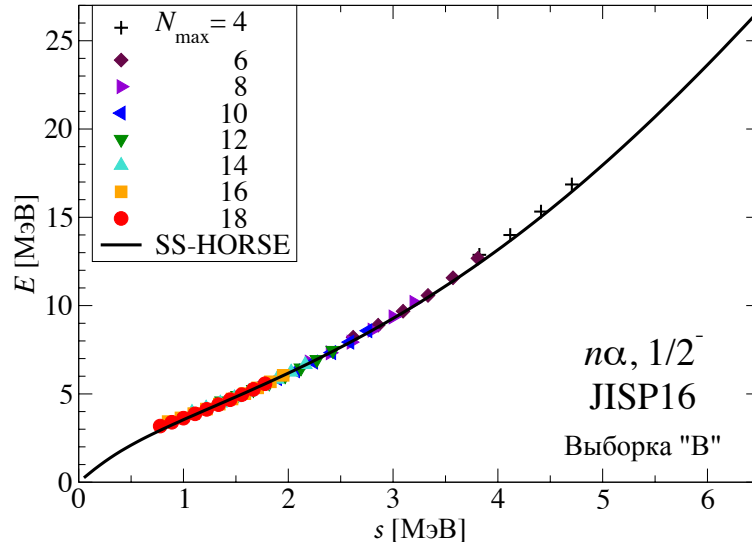


Рис. 1.44. Энергии E_0 собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ из выборки “B” как функции скейлингового параметра s (символы). Обозначения аналогичны рис. 1.5.

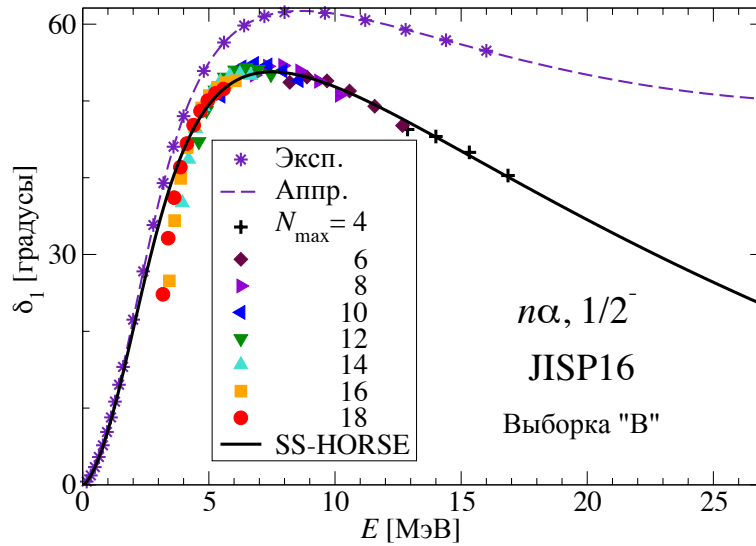


Рис. 1.45. Сдвиг фазы, полученный на основе энергий E_0 собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ из выборки “B”. Обозначения аналогичны рис. 1.31.

Очень важно исследовать возможность получения разумного описания резонансного состояния $\frac{1}{2}^-$ $n\alpha$ -рассеяния на основе собственных состояний, полученных в многочастичных расчётах в NCSM, только с малыми значениями N_{max} . В случае состояния $\frac{3}{2}^-$ мы установили, что при использовании модельных пространств с $N_{\text{max}} \leq 4$ возможно получение разумных результатов. Попробуем и в случае состояния $\frac{1}{2}^-$ получить результаты с использованием модельных пространств с $N_{\text{max}} \leq 4$. Результаты показаны на рис. 1.46, 1.47 и 1.48.

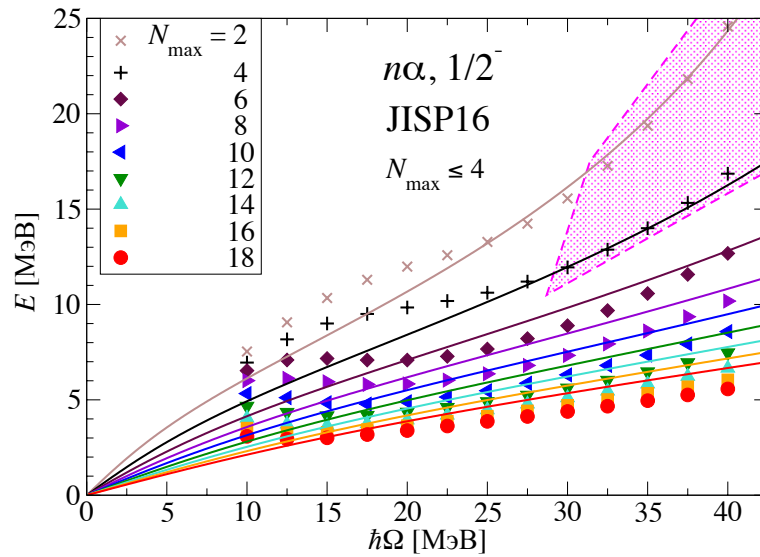


Рис. 1.46. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и выборка с $N_{\max} \leq 4$ (заштрихованная область). Остальные обозначения аналогичны рис. 1.27.

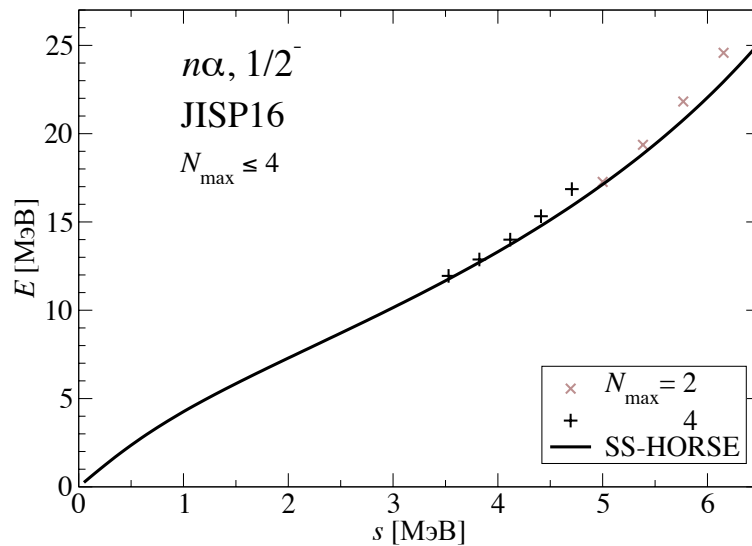


Рис. 1.47. Энергии E_0 полученных с $N_{\max} \leq 4$ нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.5.

Видно, что в данном случае воспроизвести результаты, согласующиеся с результатами по выборке “В”, не получается. На рис. 1.46 также видно, что такая выборка входных данных для SS-HORSE не позволяет воспроизвести результаты диагонализации для больших модельных пространств. Данный факт не является неожиданным, т. к. из рис. 1.39 и 1.40 видно, что состояния с $N_{\max} \leq 4$ не принадлежат общим кривым.

Однако, совершенно иной результат получается при выборке для SS-HORSE

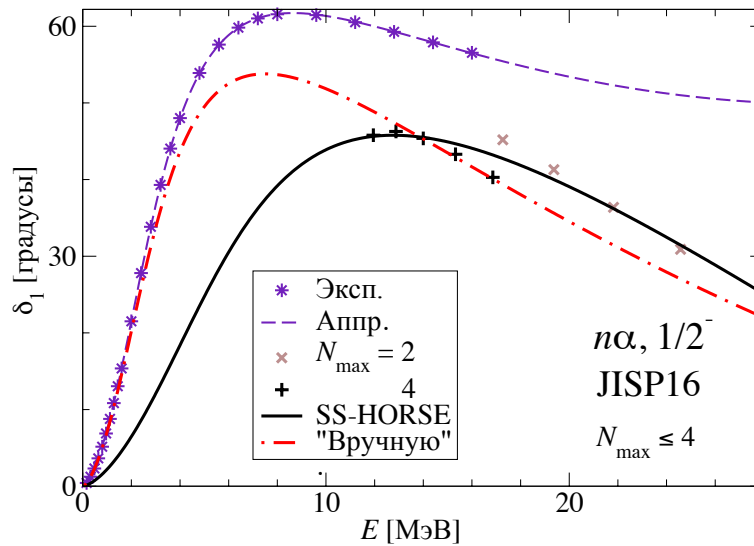


Рис. 1.48. Сдвиг фазы, полученный на основе энергий E_0 полученных с $N_{\max} \leq 4$ собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$. Красная штрихпунктирная линия обозначает сдвиг фаз полученный с выборкой “В” состояний. Обозначения аналогичны рис. 1.31.

состояний, полученных с $4 \leq N_{\max} \leq 6$. Для такой выборки было взято 10 собственных состояний из 60 состояний выборки “В”, полученных с $4 \leq N_{\max} \leq 6$. Результаты для такой выборки отражены на рис. 1.49, 1.50 и 1.51. Энергии на рис. 1.50 и сдвиги фаз на рис. 1.51 формируют общие кривые, и, таким образом, мы получаем результаты, схожие с результатами, полученные с выборкой “А” (см. таблицу 1.5). Рисунок 1.49 демонстрирует, что используя 10 собственных состояний, полученных с малыми N_{\max} , можно с высокой точностью предсказать энергии собственных состояний с большими N_{\max} : среднеквадратичное отклонение Ξ для 60 состояний с параметрами, полученными при анализе этих 10 состояний, составляет 92 кэВ (см. таблицу 1.5). Конечно, отклонение, составляющее 92 кэВ, существенно больше, чем 11 кэВ, полученное при подгонке всех 60 состояний выборки “В”, однако такой показатель всё равно демонстрирует высокое качество предсказания энергий E_0 собственных состояний, полученных в многочастичных расчётах NCSM с большими N_{\max} в широком интервале по $\hbar\Omega$.

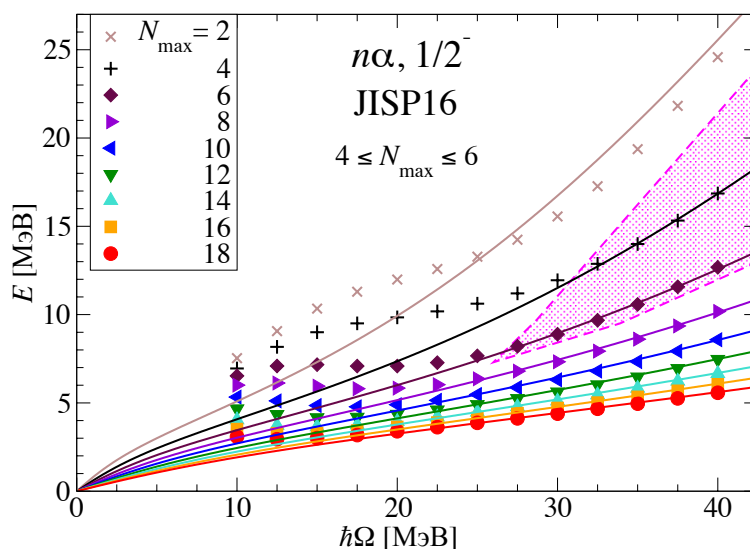


Рис. 1.49. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и их выборка с $4 \leq N_{\max} \leq 6$ (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.27.

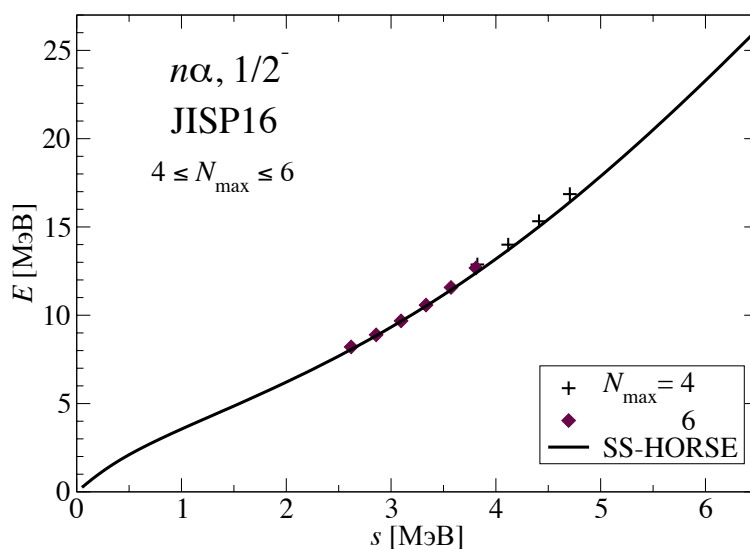


Рис. 1.50. Энергии E_0 полученных с $4 \leq N_{\max} \leq 6$ нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$ как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.5.

1.5.3. Состояние рассеяния $\frac{1}{2}^+$

В этом разделе мы исследуем возможность описания нейтрон-ядерного нерезонансного рассеяния методом SS-HORSE на основе многочастичных расчётов в модели оболочек. Разница с анализом резонансных состояний заключается в том, что сдвиг фаз нерезонансного низкоэнергетического $n\alpha$ -рассеяния в состоянии $\frac{1}{2}^+$ параметризуется формулой (1.53) в отличие от резонансного сдвига

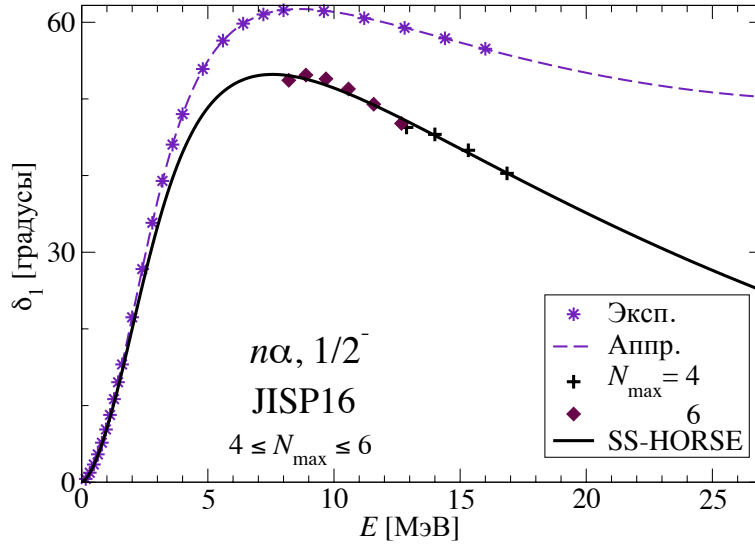


Рис. 1.51. Сдвиг фазы, полученный на основе энергий E_0 полученных с $4 \leq N_{\max} \leq 6$ собственных состояний $\frac{1}{2}^-$ ядра ${}^5\text{He}$. Обозначения аналогичны рис. 1.31.

фаз (1.54). Параметры нерезонансного рассеяния подбираются на основе уравнения (1.60), а не (1.58). Параметр E_b играет в этом уравнении роль энергии запрещённого принципом Паули состояния в $n\alpha$ -рассеянии. В сравнении с рассмотрением состояния рассеяния $\frac{1}{2}^+$ в задаче с модельным потенциалом WSBG, в которой присутствует это запрещённое состояние, в расчётах ядра ${}^5\text{He}$ такого состояния нет. Следовательно, мы должны использовать для анализа в методе SS-HORSE нижайшее собственное состояние $\frac{1}{2}^+$, полученное в NCSM, и положить в уравнении (1.60) $\nu = 0$.

Энергии E_0 нижайших состояний ядра ${}^5\text{He}$ как функции параметра $\hbar\Omega$ для различных N_{\max} показаны на рис. 1.52, как функции скейлингового параметра s — на рис. 1.53. Можно увидеть, что существует тенденция стремления собственных состояний к общей гладкой кривой при всё меньших $\hbar\Omega$ для увеличивающихся значений N_{\max} . Данный факт говорит о сходимости сдвигов фаз. Такая тенденция более явно выражена на рис. 1.54, где показаны сдвиги фаз, соответствующие энергиям E_0 . Эти рисунки демонстрируют также необходимость выборки данных для анализа в методе SS-HORSE.

Сначала сделаем выборку собственных состояний на основе неравенства $\Lambda > 600 \text{ МэВ}/c$, которая изображена на рис. 1.52 и 1.55, соответствующие сдвиги

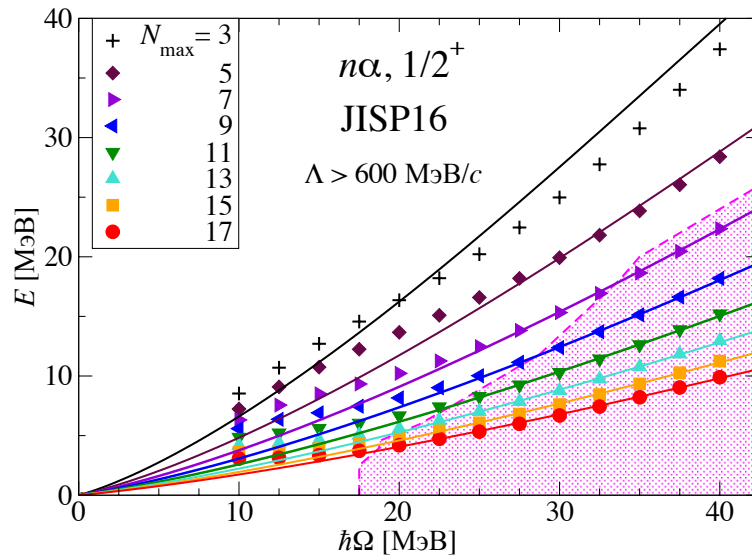


Рис. 1.52. Энергии E_0 нижайших состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и выборка по критерию $\Lambda > 600$ МэВ/с (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.18.

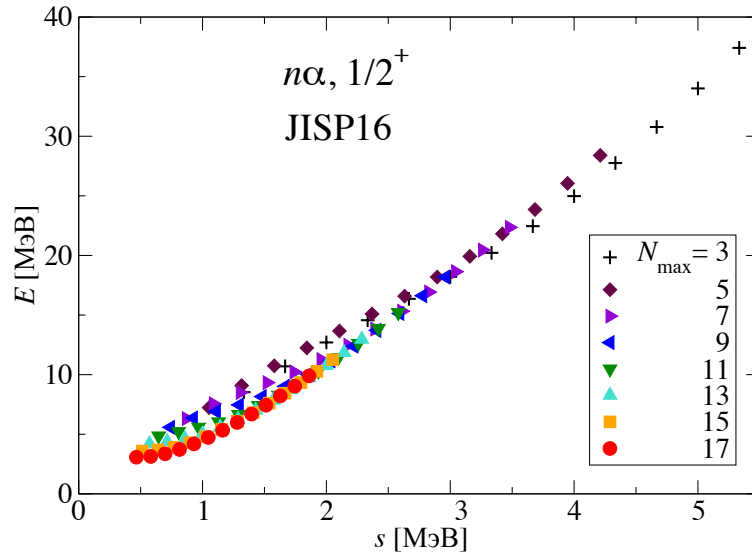


Рис. 1.53. Энергии E_0 нижайших состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$ как функции скейлингового параметра s .

ги фаз — на рис. 1.56. Полученные в результате подгонки параметры приведены в таблице 1.6. Сдвиги фаз, определённые NN -взаимодействием JISP16, качественно, хотя и не количественно согласуются с результатами фазового анализа экспериментальных данных. Подгонка параметров формулы (1.53) на основе данных фазового анализа приводит к тому, что сдвиг фаз при энергиях выше 20 МэВ возрастает, что выглядит нефизично. Однако, при этих энергиях не существует данных для сдвига фаз, полученного из экспериментальных данных.

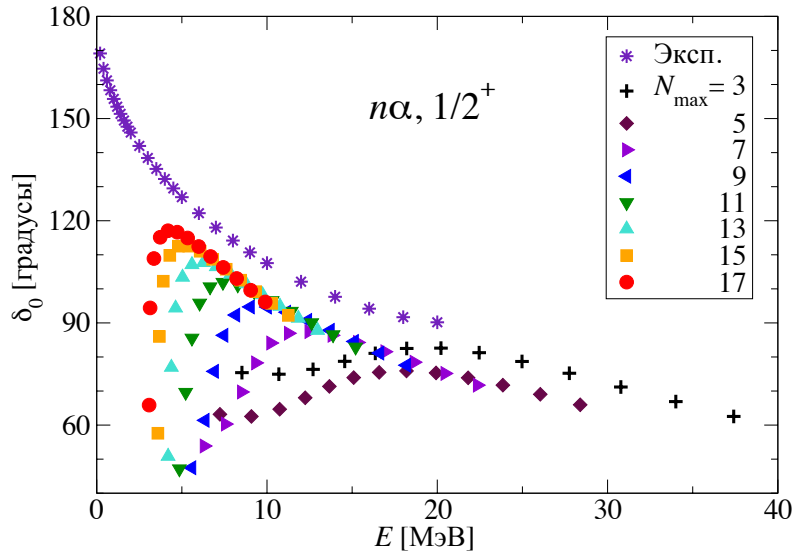


Рис. 1.54. Сдвиг фазы $n\alpha$ -рассеяния, полученный на основе энергий E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$ по формуле (1.25). Остальные обозначения аналогичны рис. 1.29.

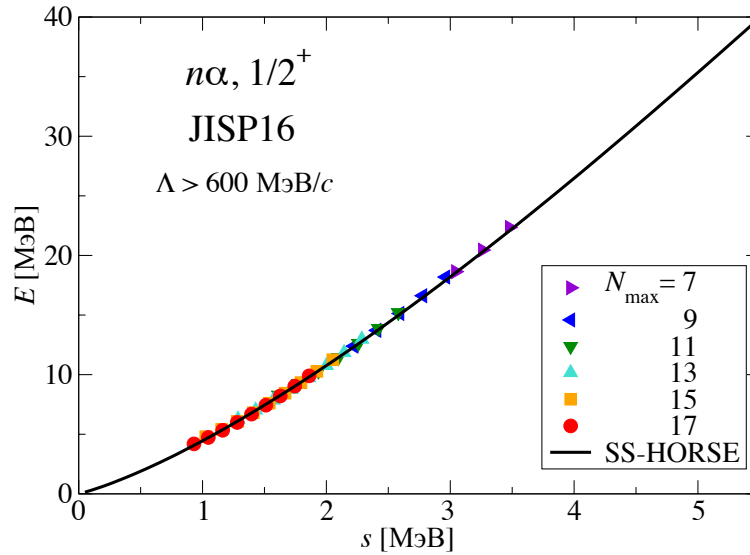


Рис. 1.55. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$, удовлетворяющие неравенству $\Lambda > 600 \text{ МэВ}/c$ как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.21.

В данной области полученный в методе NCSM-SS-HORSE сдвиг фаз выглядит более реалистическим.

Рисунок 1.52 демонстрирует, что необходимо осуществить ручную выборку собственных состояний, другими словами включить в анализ больше состояний и тем самым увеличить интервал энергий, в котором подбираются параметры сдвига фаз. Такая выборка (назовём её “С”) представлена на рис. 1.57, 1.58,

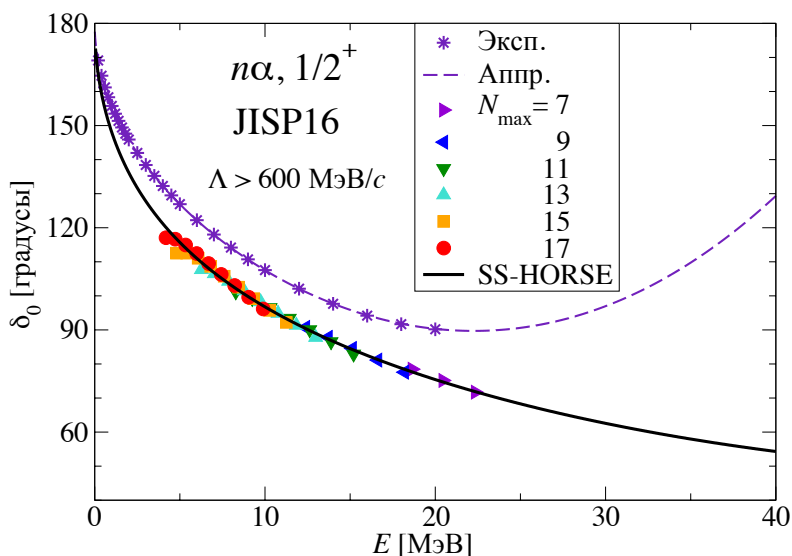


Рис. 1.56. Сдвиг фазы, полученный на основе энергий E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$, удовлетворяющих неравенству $\Lambda > 600 \text{ МэВ}/c$. Сплошная кривая — сдвиг фаз, полученный по формуле (1.53) с параметрами E_b , c , d и f , полученными при анализе выборки состояний. Звёздочки — сдвиги фаз, полученный на основе экспериментальных данных [79], штриховая кривая — сдвиг фаз по формуле (1.53) на основе этих сдвигов фаз.

1.59, а подогнанные для неё параметры представлены в таблице 1.6. Некоторые параметры сильно изменились в результате добавления состояний в анализ, однако на поведении сдвига фаз это практически не отразилось, за исключением интервала энергий $E > 30 \text{ МэВ}$, где сдвиги фаз стали лежать выше. Сдвиги фаз, полученные на основе фазового анализа экспериментальных данных, в данной области отсутствуют, поэтому невозможно судить, улучшает ли такая выборка состояний описание сдвига фаз в данной области или нет.

Важно исследовать возможность описания собственных энергий и сдвига фаз нерезонансного рассеяния, полученных в больших модельных пространствах на основе применения метода SS-HORSE к состояниям из малых модельных пространств. Как и в случае состояния рассеяния $\frac{1}{2}^-$ не получается сделать подобное описание на основе состояний $N_{\max} = 3$ и 5. Отметим, что в обоих этих случаях собственные состояния с $N_{\max} = 2$ для $\frac{1}{2}^-$ и $N_{\max} = 3$ для $\frac{1}{2}^+$ не включены в выборки “В” и “С”. Однако, анализ в методе SS-HORSE выборки, составленной из части состояний выборки “С”, полученных с $5 \leq N_{\max} \leq 7$, да-

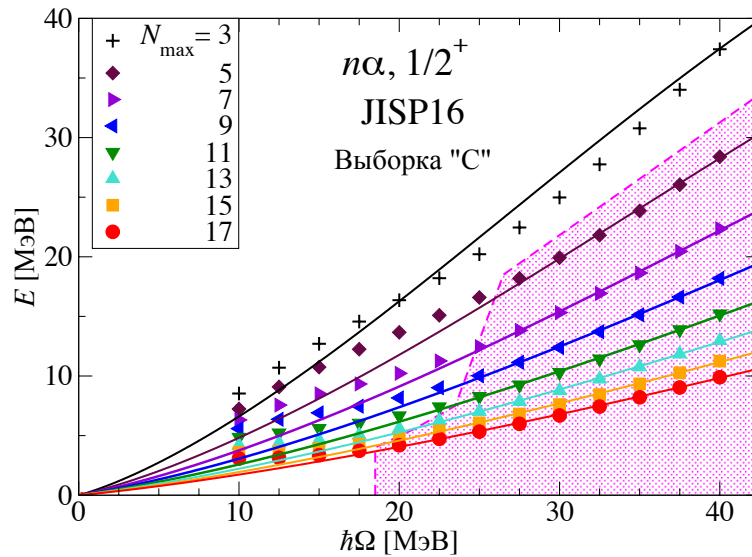


Рис. 1.57. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$ (символы) и выборка “С” из них (затрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.18.

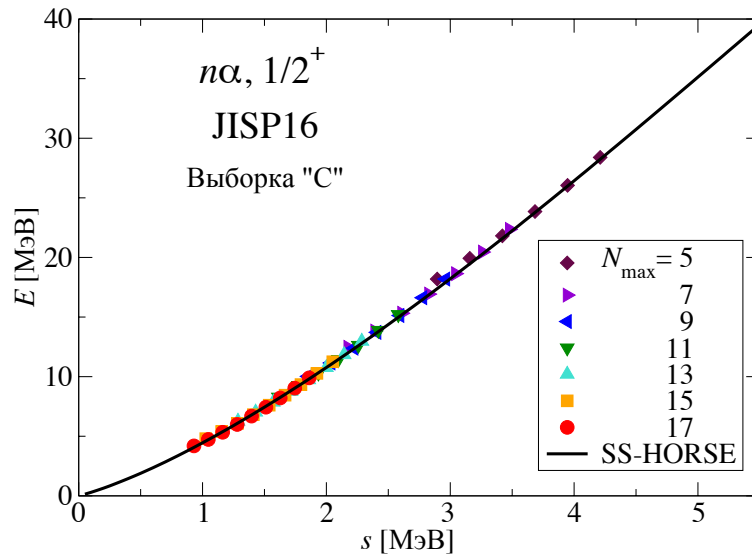


Рис. 1.58. Энергии E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$ из выборки “С” в зависимости от скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.21.

ёт разумные результаты для сдвига фаз и способен предсказывать собственные энергии с большими N_{max} , см. рис. 1.60, 1.61 и 1.62. Интересно, что сдвиг фаз, полученный при помощи трёх выборок выглядит примерно одинаково, хотя параметры параметризации сдвига фаз существенно различаются. Среднеквадратичное отклонение для 53 состояний из выборки “С” по результатам подгонки параметров по 13 состояниям из выборки “ $5 \leq N_{\text{max}} \leq 7$ ” составляет 259 кэВ, что существенно хуже, чем в случае предсказаний для состояний отрицательной

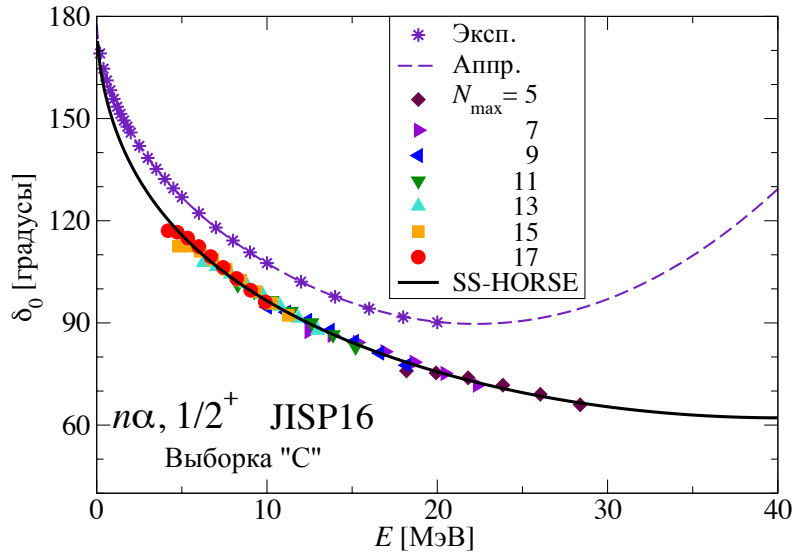


Рис. 1.59. Сдвиг фазы, полученный на основе собственных энергий E_0 из выборки “С”. Остальные обозначения аналогичны рис. 1.56.

Таблица 1.6. Параметры сдвига фаз (1.60) состояния $\frac{1}{2}^+$ $n\alpha$ -рассеяния на основе NCSM расчётов ядра ${}^5\text{He}$ с NN -взаимодействием JISP16 E_b , c , d и f , среднеквадратичное отклонение Ξ и число собственных состояний участвующих в анализе D для различных выборок в сравнении с подгонкой параметров по формуле (1.53) сдвига фаз δ_0 по результатам анализа экспериментальных данных [79]. Для выборки $5 \leq N_{\max} \leq 7$ Ξ и D для всех данных выборки “С” показаны в скобках.

Выборка	E_b (МэВ)	c (МэВ $^{-\frac{1}{2}}$)	$d \cdot 10^3$ (МэВ $^{-\frac{3}{2}}$)	$f \cdot 10^5$ (МэВ $^{-\frac{5}{2}}$)	Ξ (кэВ)	D
$\Lambda > 600$ МэВ/ c	-5.996	-0.171	-8.02	6.48	85	41
“С”	-6.733	-0.183	-13.0	30.8	120	53
$5 \leq N_{\max} \leq 7$	-3.347	-0.151	63.0	-86.7	168(259)	13(53)
δ_0 по [79]	-13.75	-0.156	-429	220	0.018°	26

чётности. Мы полагаем, что это связано с тем фактом, что собственные состояния $\frac{1}{2}^+$ лежат выше по энергии, чем $\frac{3}{2}^-$ и $\frac{1}{2}^-$, и метод SS-HORSE, особенно при использовании состояний с малым N_{\max} , включает в себя сдвиги фаз при больших энергиях, где разложение сдвига фаз менее точно и требует использования большего числа членов ряда Тейлора и большего числа параметров сдвига фаз.

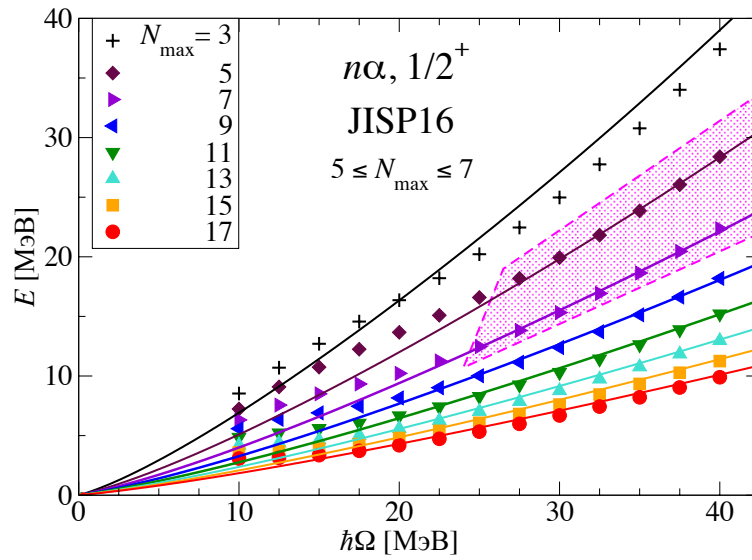


Рис. 1.60. Выборка энергий E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$ с $5 \leq N_{\max} \leq 7$ (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 1.18.

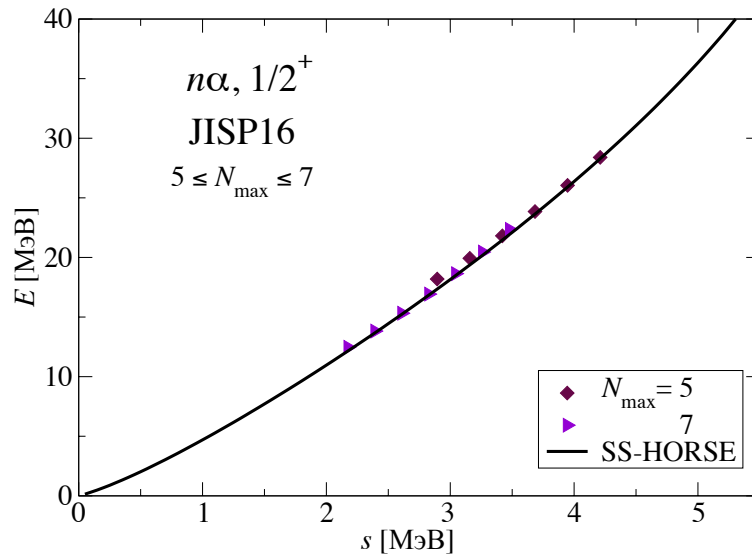


Рис. 1.61. Выборка энергий E_0 нижайших собственных состояний $\frac{1}{2}^+$ ядра ${}^5\text{He}$ с $5 \leq N_{\max} \leq 7$ как функции скейлингового параметра s . Обозначения аналогичны рис. 1.21.

Более существенным может оказаться то, что мы, вероятно, не учитываем в параметризации сдвига фазы влияние полюсов S -матрицы, имеющих достаточно большую энергию и ширину.

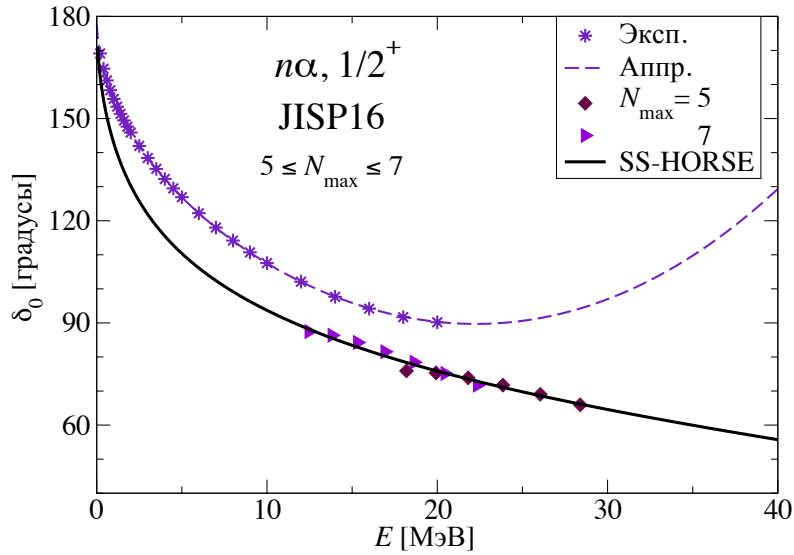


Рис. 1.62. Сдвиг фазы, полученный на основе собственных энергий E_0 из выборки с $5 \leq N_{\max} \leq 7$. Остальные обозначения аналогичны рис. 1.56.

1.6. Заключение к главе 1

В данной главе развит метод SS-HORSE, который предназначен для получения сдвига фаз, резонансных энергий и ширин на основе расчетов *ab initio* в NCSM с реалистическими NN-, а при необходимости, и NNN-взаимодействиями. Метод SS-HORSE основан на общих свойствах осцилляторного базиса, на формализме HORSE (формализм J -матрицы) теории рассеяния и использует низкоэнергетическое разложение сдвига фаз, основанное на общих свойствах S -матрицы, включающей в себя полюсы, соответствующие связанным, ложным, виртуальным и резонансным состояниям.

Метод SS-HORSE апробирован в модельной двухчастичной задаче с потенциалом типа Вудса–Саксона. Показано, что с помощью этого метода возможно получать с разумной точностью сдвиг фаз и резонансные характеристики даже при использовании только малых модельных пространств. После этого, метод SS-HORSE успешно использован в исследовании $n\alpha$ -рассеяния на основе расчётов в NCSM ядра ${}^5\text{He}$ с реалистическим NN-взаимодействием JISP16.

В методе SS-HORSE были получены и обобщены свойство скейлинга, предложенного в работе [12], для состояний, лежащих выше порогов распада ядер.

Свойство скейлинга заключается в том, что собственные энергии зависят не от максимального числа квантов возбуждения N_{\max} и параметра осцилляторного базиса $\hbar\Omega$ по отдельности, а от их комбинации s (или от λ_{sc} , предложенной в [12], $s \sim \lambda_{sc}^2$). Была продемонстрирована типичная зависимость собственных энергий в континууме от параметра s в случае присутствия или отсутствия резонанса в системе. Свойство скейлинга важно для экстраполяции результатов, полученных в небольших модельных пространствах, на большие модельные пространства. Была продемонстрирована возможность предсказания собственных энергий в больших модельных пространствах как в двухчастичной модельной, так и в многочастичной задаче.

Мы полагаем, что построенный метод будет полезным для оболочечных исследований низкоэнергетических ядерных резонансов.

Глава 2

Предсказание резонансного состояния в системе четырёх нейтронов на основе расчётов в NCSM

2.1. Введение

Данная глава посвящена теоретическому исследованию возможности существования резонансной структуры в системе четырёх нейтронов (тетранейтрон) методом SS-HORSE на основе расчётов в NCSM с NN -взаимодействием JISP16 [70]. Интерес к системе четырёх нейтронов (см., например, обсуждение в работе [81]) вызван недавним экспериментом [37], целью которого было установление факта существования резонансного состояния в такой системе, а также готовящимися экспериментами по данной теме [38–40]. Как уже было сказано во введении, состоявшийся эксперимент зафиксировал несколько событий, которые по мнению авторов можно интерпретировать как резонансное состояние системы четырёх нейтронов с энергией 0.83 ± 0.65 (стат) ± 1.25 (сист) МэВ и шириной не более 2.6 МэВ. Исследование тетранейтрона осуществлялось с помощью реакции между ядром ${}^4\text{He}$ и слабосвязанным изотопом ${}^8\text{He}$. Как показано в работе [82], четыре нейтрона в ${}^8\text{He}$ обладают относительно компактной геометрией. Следовательно, экспериментальное исследование столкновений ${}^4\text{He} + {}^8\text{He}$ является перспективным направлением для выделения системы $4n$. К сожалению, эксперимент набрал довольно малую статистику — было зафиксировано лишь 6, которых можно были отнести к кандидатам на роль тетранейтронного резонанса.

Одни из первых попыток обнаружить связанное состояние тетранейтрона были предприняты в реакциях распада урана и висмута [83, 84]. Однако, эти эксперименты не обнаружили связанного или резонансного состояния тетранейтрона (см. обзор экспериментальных результатов [42]). Позже, при изме-

рении спектра пионов и полного сечения реакции двойной перезарядки пионов ${}^4\text{He}(\pi^-, \pi^+)4n$ для различных энергий тетранейтрон обнаружен не был [43–45]. Затем экспериментальное изучение тетранейтрона велось на основе реакций ${}^7\text{Li}({}^{11}\text{B}, {}^{14}\text{O})4n$ [46], ${}^7\text{Li}({}^7\text{Li}, {}^{10}\text{C})4n$ [47]. Тетранейтрон также обнаружен не был. Около 15 лет назад была предположена возможность существования связанного состояния $4n$ [48], возникающего в процессе распада ${}^{14}\text{Be}$ на систему ${}^{10}\text{Be} + 4n$. Однако этот экспериментальный результат не был подтверждён.

В первых расчётах системы $4n$ в небольших базисах [85] было получено, что такая система несвязанна и её энергия оценивается около 18.5 МэВ. Более поздние теоретические расчёты показали [49, 86–92] подтверждают, что связанное состояние согласно современной теории существовать не может. Что касается резонансных состояний, расчёты методом комплексного скейлинга [88–90] показывают, что если резонанс в системе $4n$ и существует, то он должен иметь очень большую ширину (порядка 15 МэВ), что не позволит его детектировать экспериментально. Однако тетранейтрон может быть связанным в сильных внешних полях. Такой эффект наблюдается в ядре ${}^8\text{He}$, где ядерное среднее поле является достаточно сильным для связывания системы четырёх нейтронов под влиянием кора α -частицы. Если же такое поле исчезает из-за выбивания из ${}^8\text{He}$ α -частицы предполагается, что оставшийся тетранейтрон быстро распадается из-за большой ширины.

В работе [91] также было изучено влияние континуума на свойства тетранейтрона. Вывод этого исследования заключается в том, что может существовать резонансоподобная структура с энергией порядка 4–5 МэВ. Однако проявление такой структуры зависит от механизма реакции образования тетранейтрона, и общий вывод состоит в том, что система $4n$ не может быть интерпретирована как явно выраженный резонанс.

Тем не менее, современные знания о ядерном взаимодействии в совокупности с многочастичными методами дают новые возможности для изучения экзотических состояний, находящихся выше различных порогов. Мотивацией

для данной работы служит вывод работы [49]: хотя существование связанного тетранейтрона невозможно, экстраполяция результатов с искусственно усиленным взаимодействием указывает на то, что резонансное состояние системы $4n$ может существовать с энергией около 2 МэВ.

Полное исследование тетранейтрона как резонансного состояния должно включать расчёты реакции ${}^4\text{He}({}^8\text{He}, {}^8\text{Be})4n$, которая используется в эксперименте. В настоящее время такие расчёты невозможны, хотя развитие теории [93, 94] позволяет надеяться на возможность их проведения в будущем.

В настоящей работе мы рассматриваем систему $4n$ с нерелятивистским гамильтонианом, включающим в себя кинетическую энергию и реалистическое взаимодействие JISP16 [70] между каждой парой нейтронов. Для нахождения положения полюса S -матрицы и соответствующих резонансных параметров мы используем NCSM и анализ полученных результатов методом SS-HORSE, который необходимо обобщить на случай учёта каналов распада на четыре частицы.

2.2. Обобщение метода SS-HORSE для процессов истинно многочастичного рассеяния

Для описания четырёхчастичного распадного канала в методе SS-HORSE мы используем приближение демократического распада [95, 96]. Демократическим называется распад системы на A частиц, никакая комбинация которых не образует связанной подсистемы исходной распадающейся системы. Тетранейтрон представляет один из ярких примеров ядерной системы, распадающейся по демократическому каналу, и одним из первых приложений приближения демократического распада было исследование тетранейтрона [97–100]. Демократические распады описываются с использованием базиса гиперсферических гармоник. В практических приложениях используется ограниченный набор гиперсферических гармоник, адекватно описывающий распадный канал.

Общая теория демократического распада на основе формализма HORSE

была предложена в работе [73]. Волновая функция системы A частиц с энергией E и другими квантовыми числами, характеризуемыми мультииндексом β представляется в виде

$$|E\beta\rangle = \sum_{NK\gamma} \langle NK\gamma|E\beta\rangle |NK\gamma\rangle, \quad (2.1)$$

где базисные функции являются функциями $(3A - 3)$ -мерного осциллятора

$$|NK\gamma\rangle = \varphi_{NK}(\rho)\eta_{K\gamma}(\omega). \quad (2.2)$$

Здесь N — число осцилляторных квантов, K — гипермомент, γ — набор остальных квантовых чисел, характеризующих угловую часть $\eta_{K\gamma}(\omega)$, ρ — гиперрадиус, определяемый формулой

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^A (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2} \quad (2.3)$$

(\mathbf{r} — радиус-вектор i -ой частицы, \mathbf{R} — радиус-вектор центра масс), а $\varphi_{NK}(\rho)$ определяется как

$$\varphi_{NK}(\rho) = \rho^{-\frac{3A-4}{2}} R_N^{\mathcal{L}}(\rho). \quad (2.4)$$

$R_N^{\mathcal{L}}$ определяется формулой (1.4), \mathcal{L} связано с гипермоментом

$$\mathcal{L} = K + \frac{3A - 6}{2}. \quad (2.5)$$

Применение разложения (2.2) для волновой функции в одноканальном случае (при одном значении гипермомента K) приводит к представлению уравнения Шрёдингера как бесконечной системы алгебраических уравнений. Как и в двухчастичном формализме HORSE, можно сделать приближение (1.9) для потенциала. Т. к. матрица кинетической энергии в выбранном базисе трёхдиагональна, то для сдвига фаз δ и S -матрицы рассеяния S могут быть получены

формулы, аналогичные формулам (1.22) и (1.23):

$$\operatorname{tg} \delta(E) = -\frac{S_{\mathbb{N}\mathcal{L}}(E) - G_{\mathbb{N}\mathbb{N}}(E)T_{\mathbb{N},\mathbb{N}+2}^{\mathcal{L}}S_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}(E)}{C_{\mathbb{N}\mathcal{L}}(E) - G_{\mathbb{N}\mathbb{N}}(E)T_{\mathbb{N},\mathbb{N}+2}^{\mathcal{L}}C_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}(E)}, \quad (2.6)$$

$$S(E) = -\frac{C_{\mathbb{N}\mathcal{L}}^{(-)}(E) - G_{\mathbb{N}\mathbb{N}}(E)T_{\mathbb{N},\mathbb{N}+2}^{\mathcal{L}}C_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}^{(-)}(E)}{C_{\mathbb{N}\mathcal{L}}^{(+)}(E) - G_{\mathbb{N}\mathbb{N}}(E)T_{\mathbb{N},\mathbb{N}+2}^{\mathcal{L}}C_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}^{(+)}(E)}, \quad (2.7)$$

где $S_{n\ell}$ определяется формулой (1.12), $C_{n\ell}$ — формулой (1.13), $C_{n\ell}^{(\pm)}$ — формулой (1.24), $T_{\mathbb{N},\mathbb{N}+2}^{\mathcal{L}}$ — формулой (1.10), $G_{\mathbb{N}\mathbb{N}}$ — формулой (1.20). Отметим, что формула (1.13) справедлива для чётного числа частиц, на которые распадается система.

В методе SS-HORSE сдвиг фазы считается при энергии, совпадающей с собственной энергией ($E = E_\nu$)

$$\operatorname{tg} \delta(E_\nu) = -\frac{S_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}(E_\nu)}{C_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}(E_\nu)}, \quad (2.8)$$

$$S(E_\nu) = \frac{C_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}^{(-)}(E_\nu)}{C_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}^{(+)}(E_\nu)}. \quad (2.9)$$

Отметим, что тетранейтрон полностью распадается на составляющие его четыре нейтрона, в распадном канале нет связанных систем, состоящих из двух или нескольких нейтронов. Таким образом, в этом случае не возникает вопроса о разных границах обрезания матриц гамильтониана в NCSM и SS-HORSE, который мы обсуждали в случае рассеяния нейтрона на α -частице. Следовательно использование метода SS-HORSE в комбинации с NCSM в этой системе является полностью обоснованным.

Дальнейшая логика полностью аналогична той, что применялась выше при исследовании резонансов в рассеянии $n\alpha$: при варьировании в расчетах в NCSM осцилляторного параметра $\hbar\Omega$ (входит также в определение $S_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}$ и $C_{\mathbb{N}+2,\mathcal{L}}$) и параметра обрезания базиса \mathbb{N} можно получить сдвиг фаз в некотором диапазоне энергии. Следующим шагом является выборка энергий, для которых считается, что достигается сходимость сдвигов фаз. В конечном счёте полученная выборка параметризуется некоторым выражением, полученным на

основе аналитических свойств S -матрицы.

2.3. Резонансные состояния системы четырёх нейтронов

В настоящей работе мы используем минимальное приближение для распада системы четырёх нейтронов, т. е. используем гиперсферические гармоники только с гипермоментом $K = K_{\min} = 2$. Эта аппроксимация обосновывается тем, что гиперсферические гармоники с $K > K_{\min}$ сильно подавлены большим гиперсферическим центробежным барьером $\frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{\rho^2}$, где $\mathcal{L} = K + 3$. Отметим, что все возможные гиперсферические гармоники сохраняются в базисе NCSM. Точность такого приближения была подтверждена в исследованиях демократических распадов в кластерных моделях [101–103].

Для системы $4n$ полное число осцилляторных квантов связано с числом квантов возбуждения

$$\mathbb{N} = N_{\max} + N_0 = N_{\max} + 2, \quad (2.10)$$

где $N_0 = 2$ — минимально возможное число квантов, которое может быть в системе четырёх нейтронов. В NCSM с помощью программы MFDn [77, 78] были рассчитаны энергии E_0 основного состояния 0^+ системы $4n$ в модельных пространствах с $N_{\max} = 2, 4, \dots, 18$ при значениях параметра $\hbar\Omega = 1.0, 2.0, \dots, 8.0, 10.0, 12.5, 20.0, 25.0, \dots, 40.0$ МэВ с NN -взаимодействием JISP16. Полученные собственные энергии изображены на рис. 2.1. На рис. 2.2 показана зависимость собственных энергий от скейлингового параметра s , определённого формулой (1.30), а на рис. 2.3 — зависимость сдвигов фаз, полученных для собственных энергий E_0 по формуле (2.8).

На рис. 2.2 и рис. 2.3 видно, что часть состояний формируют общие кривые. Можно считать, что общим кривым на этих рисунках принадлежат состояния с $N_{\max} \geq 10$, причём для всё больших значений N_{\max} расширяется интервал по $\hbar\Omega$, при которых состояния формируют общие кривые. Наконец, все

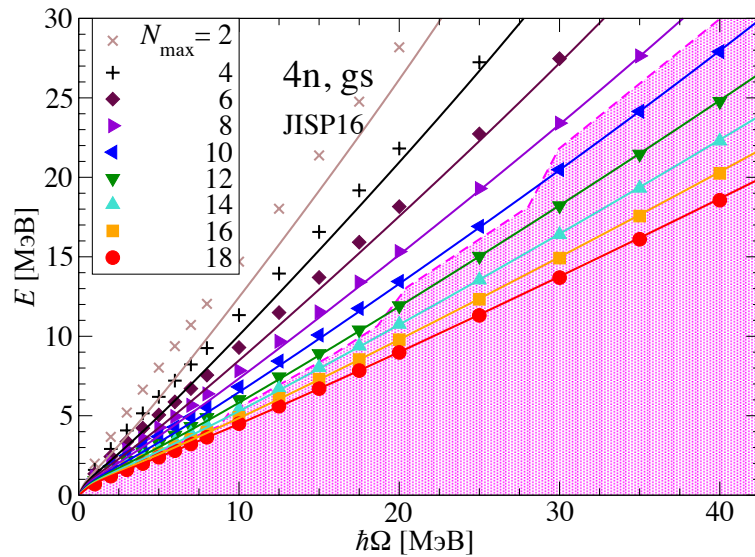


Рис. 2.1. Энергии E_0 нижайших собственных состояний, полученных для системы $4n$ в NCSM с различными N_{\max} , в зависимости от $\hbar\Omega$ (символы). Заштрихованная область отмечает выборку состояний, использованных для анализа в SS-HORSE. Сплошные кривые получены путём решения уравнения (2.16) с параметрами a , b , c и d , полученных в результате подгонки.

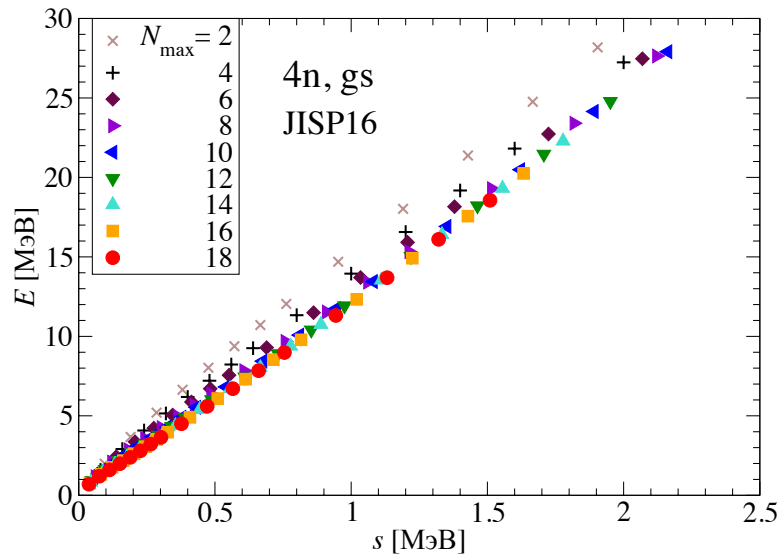


Рис. 2.2. Энергии E_0 нижайших собственных состояний, полученные для системы $4n$ в NCSM с различными N_{\max} , в зависимости от скейлингового параметра s (см. формулу (1.30)).

состояния, полученные с $N_{\max} = 16, 18$, формируют общие кривые на рис. 2.2 и рис. 2.3. Окончательно можно сказать, что сходимость расчётов NCSM достигается для состояний с модельными параметрами, изображёнными в заштрихованной области на рис. 2.1. Выборка состояний показана также на рис. 2.4

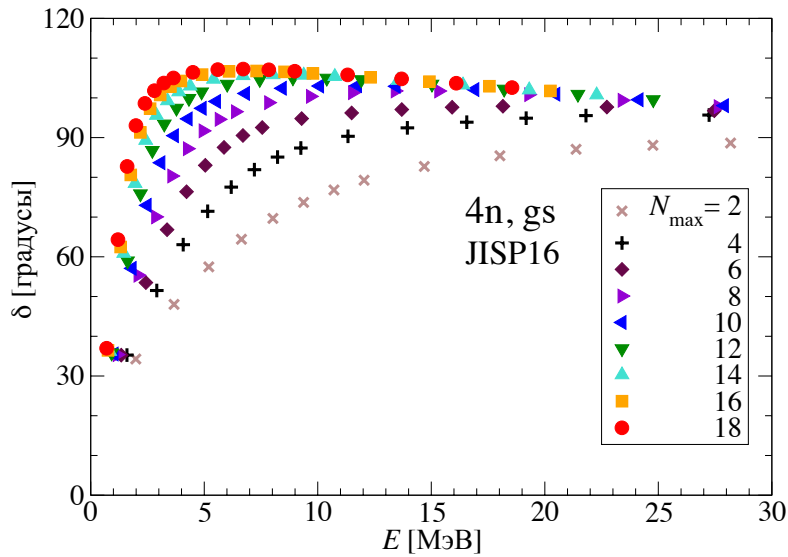


Рис. 2.3. Сдвиги фазы, полученные для энергий E_0 нижайших собственных состояний в системе $4n$ по формуле (1.25).

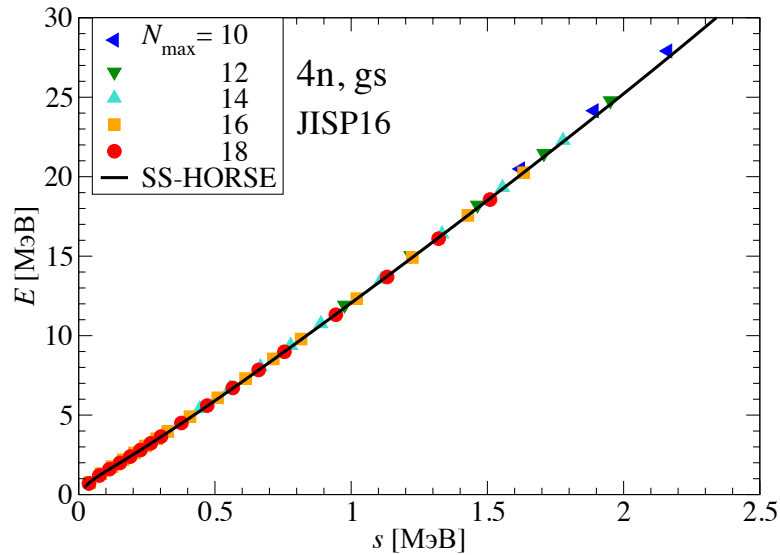


Рис. 2.4. Энергии E_0 , принадлежащие заштрихованной области на рис. 2.1 в зависимости от скейлингового параметра s . Сплошной кривой обозначена зависимость $E(s)$, определённая уравнением (2.16), с параметрами a , b , c и d , полученными в результате подгонки.

и 2.5.

2.3.1. Параметризация сдвига фаз с одним резонансным полюсом

Вид полученной кривой сдвига фаз говорит о существовании резонансного состояния. Поэтому сдвиг фаз разумно параметризовать выражением

$$\delta = \delta_r + \phi, \quad (2.11)$$

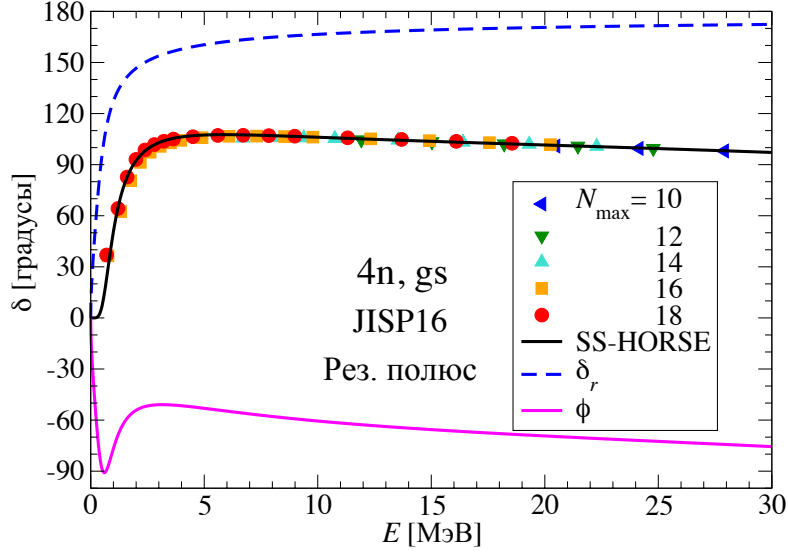


Рис. 2.5. Сдвиг фазы рассеяния, полученный в параметризации с одним резонансным полюсом (сплошная чёрная кривая). Сдвиги фаз, рассчитанные по формуле (1.25) из энергий E_0 , принадлежащих заштрихованной области на рис. 2.1. Штриховой кривой обозначен вклад резонансного члена δ_r в сдвиге фаз (2.11). Сплошной розовой кривой обозначен фоновый сдвиг фазы ϕ .

где δ_r — вклад резонансного полюса в сдвиг фаз — определяется формулой (1.49d), а ϕ — фоновый сдвиг фаз.

Отметим что, как и в двухчастичном случае, S -матрица обладает свойствами симметрии (1.42). Следовательно, сдвиг фаз так же разлагается в ряд Тейлора возле нуля по импульсу k только по нечётным степеням $k \sim \sqrt{E}$:

$$\delta(E) = v_1\sqrt{E} + v_3(\sqrt{E})^3 + \dots + v_{11}(\sqrt{E})^{11} + \dots \quad (2.12)$$

Опыт главы 1 показал, что для успешной работы метода SS-HORSE в параметризации сдвига фаз необходимо учесть правильное его поведение в низкоэнергетической области. В силу того, что в низкоэнергетическом пределе сдвиг фаз имеет поведение $\delta \sim k^{2\mathcal{L}+1} \sim (\sqrt{E})^{11}$, коэффициенты $v_1 = v_3 = \dots = v_9 = 0$. Резонансный сдвиг фаз не обладает подобным поведением, следовательно, фоновый сдвиг фаз должен быть таким, чтобы общий сдвиг фаз имел правильный предел в нуле.

При описании резонансных состояний $n\alpha$ -рассеяния, которые имеют орбитальный момент $\ell = 1$, оказалось достаточным, чтобы фоновый сдвиг фаз

содержал слагаемое $-\frac{a}{b^2}\sqrt{E}$. Однако, в случае системы $4n$ степень полинома, который компенсировал нужное число степеней ряда Тейлора, высока и полученный сдвиг фаз резко увеличивается по абсолютной величине с ростом энергии E . Вместо этого фоновый сдвиг фаз ϕ можно параметризовать Паде-аппроксимантом:

$$\phi(E) = -\frac{w_1\sqrt{E} + w_3(\sqrt{E})^3 + c(\sqrt{E})^5}{1 + w_2E + w_4E^2 + w_6E^3 + dE^4}, \quad (2.13)$$

в котором коэффициенты w_i , $i = 1, 2, 3, 4, 6$ определяются как

$$w_1 = q_1, \quad (2.14a)$$

$$w_2 = -\frac{-q_2^2c + q_2^2q_3 - q_2q_4q_1 + q_1^3d + cq_3q_1 - q_3^2q_1 + q_5q_1^2}{-2q_1q_2q_3 + q_1^2q_4 + q_2^3}, \quad (2.14b)$$

$$w_3 = -\frac{-q_1q_2^2c + 3q_1q_2^2q_3 - 2q_2q_4q_1^2 + q_1^4d + cq_3q_1^2 - q_3^2q_1^2 + q_5q_1^3 - q_2^4}{-2q_1q_2q_3 + q_1^2q_4 + q_2^3}, \quad (2.14c)$$

$$w_4 = \frac{-cq_2q_3 + cq_1q_4 - q_2^2q_4 + q_2q_1^2 + q_2q_3^2 + q_2q_5q_1 - q_3q_1q_4}{-2q_1q_2q_3 + q_1^2q_4 + q_2^3}, \quad (2.14d)$$

$$w_6 = -\frac{-2q_3q_2q_4 - q_1^2q_3d - q_3^2c + q_3^3 - q_1q_3q_5 + q_2cq_4 + q_2^2q_1d + q_2^2q_5 + q_4^2q_1}{-2q_1q_2q_3 + q_1^2q_4 + q_2^3}, \quad (2.14e)$$

где q_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ имеют смысл коэффициентов при степенях \sqrt{E} в разложении δ_r в ряд Тейлора и определяются как:

$$q_1 = \frac{a}{b^2}, \quad (2.15a)$$

$$q_2 = \frac{a}{b^4} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{b^6}, \quad (2.15b)$$

$$q_3 = -\frac{2}{5} \frac{a^3}{b^8} + \frac{a}{b^6} + \frac{1}{5} \frac{a^3(-3b^2 + a^2)}{b^{10}}, \quad (2.15c)$$

$$q_4 = -\frac{3}{7} \frac{a^3}{b^{10}} + \frac{a}{b^8} + \frac{2}{7} \frac{a^3(-3b^2 + a^2)}{b^{12}} - \frac{1}{7} \frac{a^3(-5a^2b^2 + 5b^4 + a^4)}{b^{14}}, \quad (2.15d)$$

$$q_5 = -\frac{4}{9} \frac{a^3}{b^{12}} + \frac{a}{b^{10}} + \frac{1}{3} \frac{a^3(-3b^2 + a^2)}{b^{14}} - \frac{2}{9} \frac{a^3(-5a^2b^2 + 5b^4 + a^4)}{b^{16}} + \frac{1}{9} \frac{a^3(14a^2b^4 - 7b^6 - 7a^4b^2 + a^6)}{b^{18}}. \quad (2.15e)$$

Таблица 2.1. Параметры для системы четырёх нейтронов, полученные методом SS-HORSE на основе расчётов в NCSM с NN -взаимодействием JISP16. Параметры параметризации сдвига фаз a , b , c и d уравнения (2.16) для параметризации только с резонансным полюсом и параметры a , b , c , d и E_f уравнения (2.21) для параметризации с резонансным и ложным полюсами, резонансная энергия E_r и ширина Γ , среднеквадратичное отклонение энергии Ξ и число данных D в выборках собственных состояний. Для выборок $N_{\max} \leq 12$ в скобках приведены значения Ξ и D для всех состояний выборок $N_{\max} \leq 18$.

Выборка	a (МэВ $^{\frac{1}{2}}$)	b^2 (МэВ)	c (МэВ $^{-\frac{5}{2}}$)	d (МэВ $^{-4}$)	E_r (МэВ)	Γ (МэВ)	E_f (кэВ)	Ξ (кэВ)	D
Параметризация только с резонансным полюсом:									
$N_{\max} \leq 18$	0.724	0.448	0.941	$-9.1 \cdot 10^{-4}$	0.186	0.815	—	5.8	50
$N_{\max} \leq 12$	0.724	0.448	0.941	$-8.6 \cdot 10^{-4}$	0.186	0.815	—	8.8	8
								(6.5)	(50)

Параметризация с резонансным и ложными полюсами:

$N_{\max} \leq 18$	0.701	1.089	-27.0	0.281	0.844	1.378	-54.9	6.2	50
$N_{\max} \leq 12$	0.700	1.089	-26.8	0.301	0.844	1.378	-54.9	14.8	8
								(7.1)	(50)

Из формул (2.8) и (2.11) можно получить уравнение

$$-\frac{S_{N_{\max}+4,5}(E_0)}{C_{N_{\max}+4,5}(E_0)} = \operatorname{tg} \left(-\operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{E_0}}{E_0 - b^2} - \frac{w_1\sqrt{E_0} + w_3(\sqrt{E_0})^3 + c(\sqrt{E_0})^5}{1 + w_2E_0 + w_4E_0^2 + w_6E_0^3 + dE_0^4} \right). \quad (2.16)$$

На основе этого уравнения можно найти оптимальные значения параметров a , b , c и d , которые минимизируют среднеквадратичное отклонение (1.59). Полученные таким образом параметры, а также резонансные энергия и ширина (полученные по формулам (1.50)), среднеквадратичное отклонение приведены в таблице 2.1. На рис. 2.5 показан полученная зависимость сдвига фаз.

Для того, чтобы продемонстрировать сходимость расчётов и возможность предсказания собственных значений с большими значениями параметра N_{\max} , уменьшив выборку, показанную на рис. 2.1, оставив в ней лишь состояния, рас-

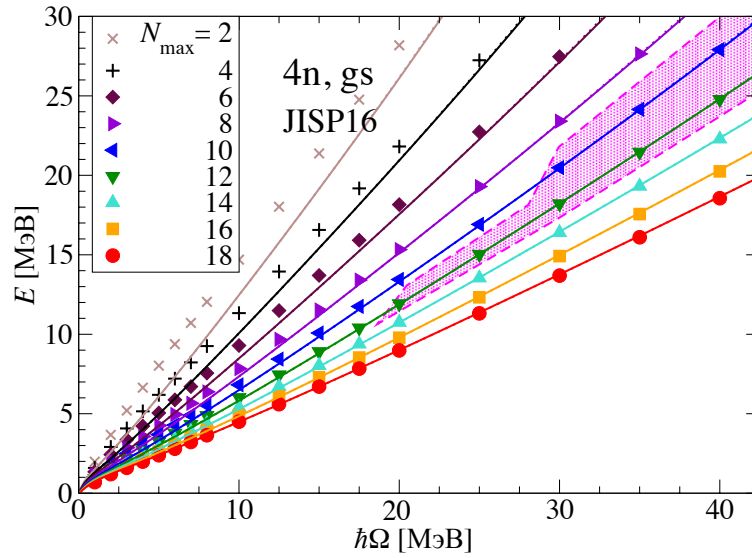


Рис. 2.6. Энергии E_0 основного состояния в системе $4n$ и выборка из них с $N_{\max} = 10, 12$ (заштрихованная область). Обозначения аналогичны рис. 2.1.

считанные в базисах с $N_{\max} = 10$ и 12 . Такая выборка показана на рис. 2.6. Рисунок 2.7 демонстрирует, что сдвиг фаз, полученный таким образом практически неотличим от сдвига фаз, подогнанного с состояниями, рассчитанными в модельных пространствах с $N_{\max} \leq 18$ (см. также таблицу 2.1). Это означает, что в расчётах сдвига фаз и резонансных параметров E_r и Γ достигнута сходимость. Рисунок 2.6 демонстрирует, что метод SS-HORSE и для такой системы способен предсказывать значения собственных энергий обрезанного гамильтониана для достаточно больших модельных пространств на основе сравнительно маленьких модельных пространств. Такая сходимость расчётов обусловлена требованием для поведения сдвига фаз в нуле по энергии.

Отметим, что полученные резонансные характеристики очень сильно отличаются от значений, которых можно было бы ожидать для такой зависимости сдвига фаз. Данные значения E_r и Γ отвечают положению полюса S -матрицы в комплексной плоскости энергий, в то время как обычно резонансную энергию ассоциируют с перегибом графика $\delta(E)$, который в данном случае находится при энергии $E = 0.8$ МэВ. Это различие показано на рис. 2.5 где перегиб графика сдвига фаз δ находится существенно правее перегиба графика вклада δ_r в сдвиг фаз от резонансного полюса S -матрицы (показан штрихованной линией),

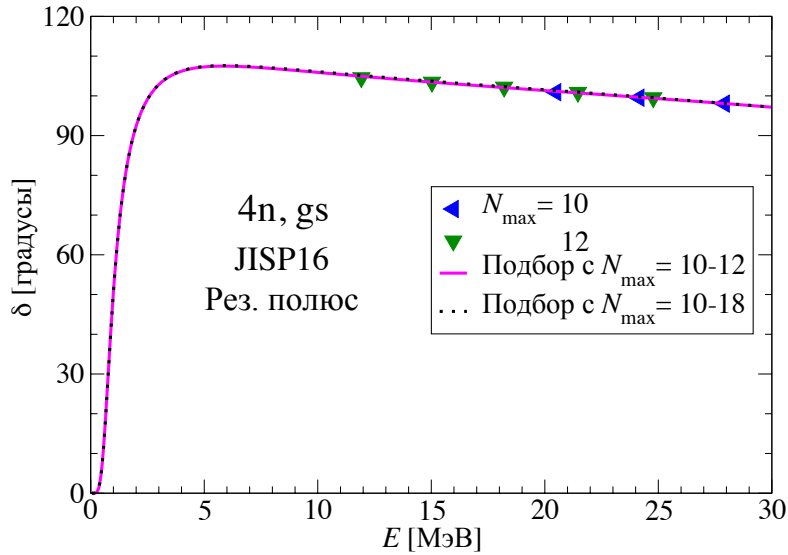


Рис. 2.7. Сдвиг фазы, полученный с параметризацией (2.11) для энергий из выборки, показанной заштрихованной областью на рис 2.6 (розовая кривая) в сравнении со сдвигом фаз, показанным на рис. 2.5, который показан здесь пунктирной линией. Символы обозначают сдвиги фаз, полученные для энергий состояний с $N_{\max} = 10, 12$.

перегиб которого находится при энергии около полученного значения резонансной энергии.

С другой стороны на рис. 2.5 приведён вклад ϕ в сдвиг фазы, который, во-первых достаточно большой в сравнении с δ_r в широком диапазоне энергий, а во-вторых достаточно резко изменяется в области низких энергий. Такие особенности указывают на существование дополнительных полюсов S -матрицы в системе $4n$.

В связи с этим мы пробуем параметризовать фазовые сдвиги с учётом дополнительных особенностей S -матрицы.

2.3.2. Параметризация сдвига фаз с резонансным и ложным полюсами.

В случае, когда у S -матрицы есть полюс виртуального состояния:

$$S(k) = \Theta(k)S_v(k), \quad (2.17)$$

фаза

$$\delta = \delta_v + \phi, \quad (2.18)$$

где δ_v имеет вид (1.49с). В параметризации (2.18) не удается получить удовлетворительного описания фаз.

Далее, мы параметризовали сдвиг фазы с учётом двух полюсов S -матрицы — резонансным и ложным:

$$S(k) = \Theta(k) S_r(k) S_f(k). \quad (2.19)$$

Соответствующий сдвиг фаз представим в виде

$$\delta = \delta_r + \delta_f + \phi, \quad (2.20)$$

где вклад ложного полюса определяется формулой (1.49b).

Из формул (2.8) и (2.20) можно составить уравнение

$$-\frac{S_{N_{\max}+4,5}(E_0)}{C_{N_{\max}+4,5}(E_0)} = \operatorname{tg} \left(-\operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{E_0}}{E_0 - b^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{E}{|E_f|}} - \frac{w_1\sqrt{E_0} + w_3(\sqrt{E_0})^3 + c(\sqrt{E_0})^5}{1 + w_2E_0 + w_4E_0^2 + w_6E_0^3 + dE_0^4} \right), \quad (2.21)$$

где w_i , $i = 1, 2, 3, 4, 6$ определяются формулами (2.14), в которых q_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ имеют вид

$$q_1 = \frac{a}{b^2} - \frac{1}{\sqrt{E_f}}, \quad (2.22a)$$

$$q_2 = \frac{a}{b^4} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{b^6} + \frac{1}{3} E_f^{-3/2}, \quad (2.22b)$$

$$q_3 = -\frac{2}{5} \frac{a^3}{b^8} + \frac{a}{b^6} + \frac{1}{5} \frac{a^3(-3b^2 + a^2)}{b^{10}} - \frac{1}{5} E_f^{-5/2}, \quad (2.22c)$$

$$q_4 = -\frac{3}{7} \frac{a^3}{b^{10}} + \frac{a}{b^8} + \frac{2}{7} \frac{a^3(-3b^2 + a^2)}{b^{12}} - \frac{1}{7} \frac{a^3(-5a^2b^2 + 5b^4 + a^4)}{b^{14}} + \frac{1}{7} E_f^{-7/2}, \quad (2.22d)$$

$$q_5 = -\frac{4}{9} \frac{a^3}{b^{12}} + \frac{a}{b^{10}} + \frac{1}{3} \frac{a^3(-3b^2 + a^2)}{b^{14}} - \frac{2}{9} \frac{a^3(-5a^2b^2 + 5b^4 + a^4)}{b^{16}} + \frac{1}{9} \frac{a^3(14a^2b^4 - 7b^6 - 7a^4b^2 + a^6)}{b^{18}} - \frac{1}{9} E_f^{-9/2}. \quad (2.22e)$$

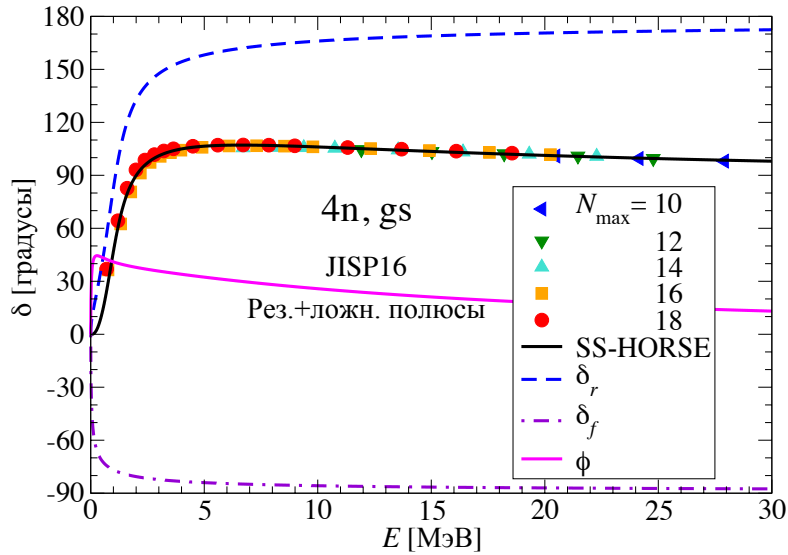


Рис. 2.8. Такой же рисунок, как и 2.5, только параметризация сдвига фаз включает резонансный и ложный полюсы. Штрих-пунктирная линия обозначает вклад δ_f ложного полюса в сдвиг фаз.

На основе уравнения (2.21) можно провести поиск параметров a , b , c , d и E_f . Последний параметр имеет смысл энергии ложного полюса. Для выборки состояний, изображенной заштрихованной областью на рис. 2.1, получившиеся значения параметров приведены в таблице 2.1.

На рис. 2.8 изображён сдвиг фаз, полученный с параметризацией (2.20). Из рис. 2.9, на котором изображены фазы, полученные в предположении существования только резонансного и сочетания резонансного и ложного полюсов S -матрицы, видно, что сдвиг фаз описывается практически одинаково двумя типами параметризации. Однако, положение полюса резонансного состояния в параметризации (2.20) согласуется с принятым определением резонанса. Более того, на рис. 2.8 изображён также фоновый сдвиг фазы ϕ , который, как видно, не имеет достаточно резкого поведения в области низких энергий и имеет небольшую величину относительно δ_r и δ_f . Свойства сходимости параметров сдвига фазы при параметризации (2.20) аналогичны свойствам сходимости при параметризации (2.11): параметры и зависимость сдвига фазы практически не меняются, если оставить в анализе состояния только с $N_{\max} = 10, 12$ (см. таблицу 2.1 и рис. 2.10).

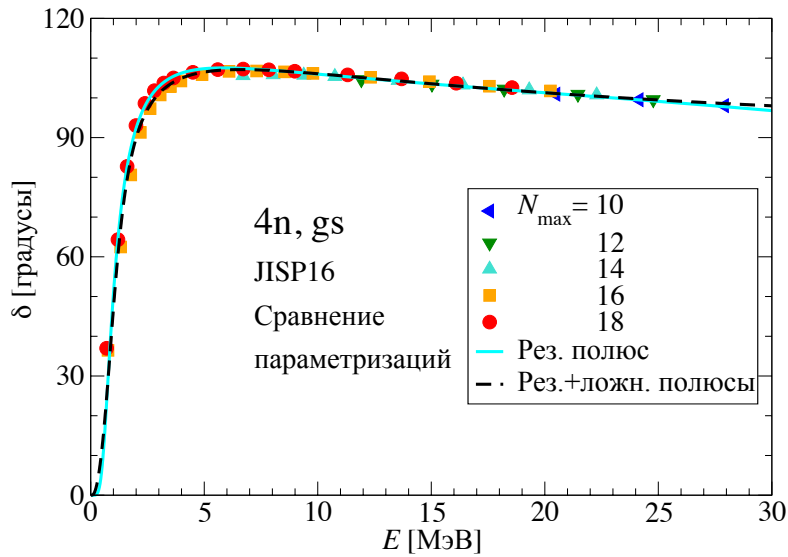


Рис. 2.9. Сравнение сдвигов фаз, полученных с помощью уравнения (2.16) и (2.21).

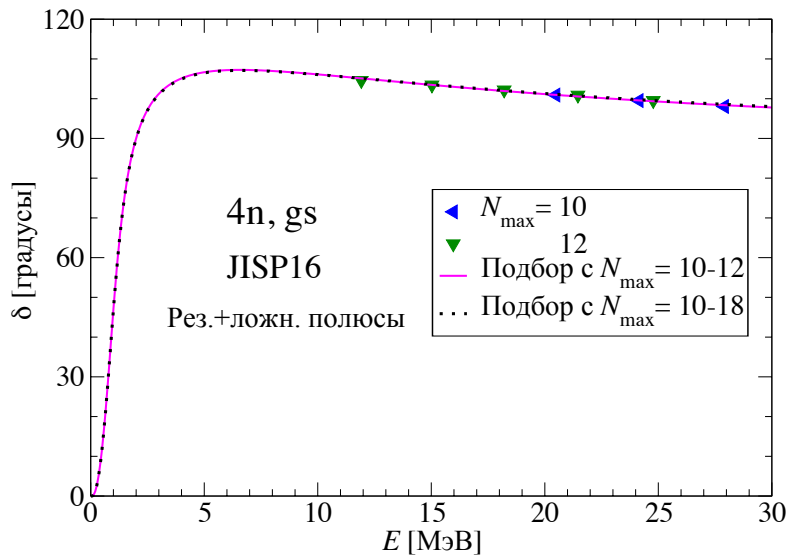


Рис. 2.10. Сдвиг фазы, полученный с параметризацией (2.20) для энергий из выборки, показанной заштрихованной областью на рис 2.6 (розовая кривая), в сравнении со сдвигом фаз, показанным на рис. 2.8, который показан здесь пунктирной линией. Символы обозначают сдвиги фаз, полученные для энергий состояний с $N_{\max} = 10, 12$.

2.4. Заключение к главе 2

Используя метод SS-HORSE и расчёты в NCSM с использованием NN -взаимодействия JISP16 мы получили, что в системе четырёх нейтронов существует резонансное состояние с энергией E_r примерно 0.8 МэВ и шириной Γ примерно 1.4 МэВ. Наш результат согласуется с результатами эксперимента [37]. Данная

работа является первой теоретической работой, которая предсказывает энергию резонанса системы четырёх нейтронов в низкоэнергетической области.

Глава 3

Метод описания рассеяния на основе осцилляторного базиса и алгоритма Ланцоша

3.1. Введение

В данной главе предложен иной подход к описанию состояний рассеяния, который основан на алгоритме Ланцоша [104]. Этот алгоритм широко используется в расчётах в модели оболочек, в частности, в программе MFDn для расчётов в NCSM [77, 78]. Алгоритм Ланцоша используется и в других приложениях, например, в работе [105] обобщённый алгоритм Ланцоша был предложен для описания ядерного отклика для оператора любой мультипольности, нахождения общих функций электрослабого отклика и электромагнитного отклика, в частности, вместе с теоретическими подходами, использующих детерминанты Слэттера, построенные на базисе функций гармонического осциллятора.

В главе 1 отмечалось, что вообще говоря при описании рассеяния отождествление числа квантов возбуждения в NCSM и числа квантов относительно движения в SS-HORSE не является полностью обоснованным, в силу того, что состояние мишени в общем случае не описывается на основе осцилляторного состояния с $N_{\max} = 0$. При микроскопическом описании $n\alpha$ -рассеяния мы лишь *a posteriori* обосновали возможность применения этого метода. С другой стороны, в задачах рассеяния, в которых отсутствуют связанные кластеры, например, в рассеянии $4 \rightarrow 4$ нейтронов, рассмотренной в главе 2, такая проблема отсутствует и метод SS-HORSE обоснован.

В данной главе приведён последовательный метод описания рассеяния, который учитывает, что мишень описывается в том числе осцилляторными состояниями с $N_{\max} > 0$.

Приведённый в этой главе метод описывает одноканальное упругое рассея-

ние нейтральных частиц. Этот ланцошевский метод эквивалентен формализму HORSE. Явное использование итераций Ланцоша в рамках предлагаемого подхода к исследованию ядерных реакций позволяет естественно интегрировать его в современные методы *ab initio* исследований ядерной структуры.

Ниже будет показано, что данный ланцошевский метод обосновывает возможность применения метода SS-HORSE, который обсуждался в главах 1 и 2.

3.2. Алгоритм Ланцоша

Алгоритм Ланцоша позволяет построить базис, в котором произвольный эрмитовый оператор A , действующий в \mathfrak{N} -мерном пространстве, представлен трёхдиагональной матрицей. Построение такой матрицы начинается с некоторого вектора $|v_1\rangle$ с нормой $\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle} = 1$. Для удобства вводятся нулевой вектор $|v_0\rangle$ и число $\beta_1 = 0$. Затем осуществляются $(\mathfrak{N} - 1)$ итераций Ланцоша по следующему алгоритму ($N = 1, 2, \dots, (\mathfrak{N} - 1)$):

1. $|w'_N\rangle = A|v_N\rangle$;
2. $\alpha_N = \langle w'_N|v_N\rangle$;
3. $|w_N\rangle = |w'_N\rangle - \alpha_N|v_N\rangle - \beta_N|v_{N-1}\rangle$;
4. $\beta_{N+1} = \sqrt{\langle w_N|w_N\rangle}$;
5. $|v_{N+1}\rangle = |w_N\rangle / \beta_{N+1}$.

Наконец, $\alpha_{\mathfrak{N}} = \langle v_{\mathfrak{N}}|A|v_{\mathfrak{N}}\rangle$.

Числа $\alpha_N, N = 1, 2, \dots, \mathfrak{N}$ и $\beta_N, N = 1, 2, \dots, (\mathfrak{N} - 1)$ имеют смысл следующих матричных элементов: $\alpha_N = \langle v_N|A|v_N\rangle, N = 1, 2, \dots, \mathfrak{N}, \beta_N = \langle v_{N-1}|A|v_N\rangle = \langle v_N|A|v_{N-1}\rangle, N = 1, 2, \dots, (\mathfrak{N} - 1)$. Остальные матричные элементы оператора A в этом базисе равны нулю.

3.3. Двухчастичное рассеяние

Радиальная часть волновой функции с энергией E , удовлетворяющая уравнению Шрёдингера (1.2), имеет асимптотику $u_\ell^{(as)}$, удовлетворяющую уравнению Шрёдингера с гамильтонианом свободного движения

$$T^\ell u_\ell^{(as)} = E u_\ell^{(as)}, \quad (3.1)$$

где T^ℓ — оператор кинетической энергии в парциальной волне ℓ .

Так как матрица оператора T^ℓ в осцилляторном базисе трёхдиагональна, применение алгоритма Ланцоша к гамильтониану свободного движения T^ℓ в парциальной волне с некоторым значением углового момента ℓ позволяет сгенерировать осцилляторный базис.

Чтобы осуществить это возьмём в качестве начального вектора в процедуре Ланцоша вектор $\phi_{N_0\ell}$ нижайшего осцилляторного состояния с угловым моментом ℓ . Действуя оператором T^ℓ на вектор $\phi_{N_0\ell}$ получаем

$$T^\ell \phi_{N_0\ell} = T_{N_0 N_0}^\ell \phi_{N_0\ell} + T_{N_0, N_0+2}^\ell \phi_{N_0+2, \ell}, \quad (3.2)$$

где $T_{NN'}^\ell = \langle \phi_{N\ell} | T^\ell | \phi_{N'\ell} \rangle$, $N, N' = N_0, N_0 + 2, \dots, \infty$ — матричные элементы оператора кинетической энергии (см. формулы (1.10)), $|\phi_{N\ell}\rangle$ — вектор осцилляторного состояния с $(N - N_0)$ квантами возбуждения и угловым моментом ℓ . После ортогонализации к $\phi_{N_0\ell}$ и нормировки вектора $\phi_{N_0+2, \ell}$ мы получаем его как второе базисное состояние осциллятора. Осуществляя вторую итерацию Ланцоша на основе вектора $\phi_{N_0+2, \ell}$ мы получаем

$$T^\ell \phi_{N_0+2, \ell} = T_{N_0+2, N_0}^\ell \phi_{N_0\ell} + T_{N_0+2, N_0+2}^\ell \phi_{N_0+2, \ell} + T_{N_0+2, N_0+4}^\ell \phi_{N_0+4, \ell}. \quad (3.3)$$

После ортогонализации $\phi_{N_0+4, \ell}$ к векторам $\phi_{N_0\ell}$ и $\phi_{N_0+2, \ell}$ и нормировки вектора $\phi_{N_0+4, \ell}$, мы получаем его как третье базисное состояние. Далее, осуществляя следующую итерацию Ланцоша на основе вектора $\phi_{N_0+4, \ell}$ мы можем получить базисный вектор $\phi_{N_0+6, \ell}$ и т. д. В конце концов, мы получим таким образом полный осцилляторный базис.

Построение осцилляторного базиса на основе алгоритма возможно не только с использованием вектора нижайшего состояния осциллятора (которую мы будем называть прямой процедурой Ланцоша), но и с любого другого, причём можно осуществлять итерации для определения векторов с меньшим числом квантов (такую процедуру Ланцоша будем называть обратной). Допустим, известны векторы $\phi_{N\ell}$ и $\phi_{N+2,\ell}$. Применим T^ℓ к $\phi_{N\ell}$, ортогонализируем результат к $\phi_{N\ell}$ и $\phi_{N+2,\ell}$ и нормируем, тогда мы получим осцилляторное состояние $\phi_{N-2,\ell}$ и т. д.

Коэффициенты $a_{N\ell}^{(as)}(E)$ разложения волновой функции $u_\ell^{(as)}$ в ряд по осцилляторным состояниям, определённые как

$$u_\ell^{(as)} = \sum_{N=N_0, N_0+2, \dots, \infty} a_{N\ell}^{(as)}(E) \phi_{N\ell}, \quad (3.4)$$

удовлетворяют соотношениям

$$T_{N, N-2}^\ell a_{N-2, \ell}^{(as)}(E) + (T_{NN}^\ell - E) a_{N\ell}^{(as)}(E) + T_{N, N+2}^\ell a_{N+2, \ell}^{(as)}(E) = 0, \quad (3.5)$$

$N = N_0 + 2, N_0 + 4, \dots, \infty$. Как уже говорилось в главе 1, фундаментальной системой решений для (3.5) является линейная комбинация функций $S_{N\ell}$ и $C_{N\ell}$, определённых формулами (1.12) и (1.13) соответственно. При этом $S_{N\ell}$ удовлетворяет однородному граничному условию

$$(T_{N_0 N_0}^\ell - E) S_{N_0 \ell}(E) + T_{N_0, N_0+2}^\ell S_{N_0+2, \ell}(E) = 0, \quad (3.6)$$

а $C_{N\ell}$ удовлетворяет неоднородному условию:

$$(T_{N_0 N_0}^\ell - E) C_{N_0 \ell}(E) + T_{N_0, N_0+2}^\ell C_{N_0+2, \ell}(E) = \frac{\mathcal{K}_{N_0}(C, S) T_{N_0, N_0+2}^\ell}{S_{N_0 \ell}} \neq 0, \quad (3.7)$$

здесь $\mathcal{K}_{N_0}(C, S)$ — определитель Казорати (1.17).

Рассмотрим применение процедуры Ланцоша к гамильтониану, в котором потенциал аппроксимирован нелокальным сепарабельным потенциалом \tilde{V}^ℓ (см. формулу (1.9)). Осуществим итерации Ланцоша для осцилляторных состояний $\phi_{N\ell}$ и $\phi_{N+2,\ell}$, где $N > \mathbb{N}$. Для таких состояний из Q -пространства итерации

Ланцоша воспроизводят осцилляторные состояния, т. е. могут быть получены векторы $\phi_{N-2,\ell}, \phi_{N-4,\ell}, \dots, \phi_{N\ell}$.

Начиная с $\phi_{N\ell}$ в итерациях Ланцоша включается потенциальная энергия в связи с переходом в P -пространство. Матричные элементы гамильтониана \bar{H}_{NN}^ℓ ($\bar{H}_{NN'}^\ell = \langle \phi_{N\ell} | H^\ell | \phi_{N'\ell} \rangle$) при $N \leq \mathbb{N}$ и $\bar{H}_{N,N+2}^\ell$ при $N < \mathbb{N}$ отличаются от $T_{N,N}^\ell$ и $T_{N,N+2}^\ell$, соответственно. При этом все элементы $\bar{H}_{N,N\pm m}^\ell$ для любых N и $m > 2$ обращаются в нуль, т. е. матрица является трёдиагональной. После процедуры Ланцоша коэффициенты $a_N(E)$ разложения волновой функции u_ℓ удовлетворяют соотношениям

$$\bar{H}_{N,N-2}^\ell a_{N-2,\ell}(E) + (\bar{H}_{NN}^\ell - E)a_{N\ell}(E) + \bar{H}_{N,N+2}^\ell a_{N+2,\ell}(E) = 0 \quad (3.8)$$

для $N = N_0 + 2, N_0 + 4, \dots, \infty$. В формуле (3.8) коэффициенты $a_{N\ell}$ определены как

$$u_\ell = \sum_{N=N_0, N_0+2, \dots, \infty} a_{N\ell}(E) \phi_{N\ell}, \quad (3.9)$$

где u_ℓ — волновая функция системы. Для $N = N_0$ справедливо однородное граничное условие

$$(\bar{H}_{N_0 N_0}^\ell - E)a_{N_0,\ell}(E) + \bar{H}_{N_0, N_0+2}^\ell a_{N_0+2,\ell}(E) = 0. \quad (3.10)$$

Для того чтобы найти $a_{N\ell}(E)$ для любого N , положим $a_{N_0\ell}(E)$ любым наперёд заданным ненулевым числом. Из граничного условия найдём $a_{N_0+2,\ell}(E)$, а затем из (3.8) последовательно найдём $a_{N_0+4,\ell}(E)$, $a_{N_0+6,\ell}(E)$ и так далее.

Коэффициенты $a_{N\ell}(E)$ с $N > \mathbb{N}$ пропорциональны комбинации $S_{N\ell}(E)$ и $C_{N\ell}(E)$, поэтому сдвиг фазы рассеяния может быть найден как

$$\text{tg } \delta_\ell(E) = \frac{S_{N\ell}(E) - S_{N'\ell}(E)a_{N\ell}(E)/a_{N'\ell}(E)}{C_{N\ell}(E) - C_{N'\ell}(E)a_{N\ell}(E)/a_{N'\ell}(E)} \quad (3.11)$$

для любых $N \neq N'$, $N > \mathbb{N}$, $N' > \mathbb{N}$.

3.4. Рассеяние нейтрона на ядре

Применим итерации Ланцоша к описанию одноканального упругого рассеяния нейтрона на ядре. Обобщение на многоканальное рассеяния этого метода осуществляется довольно просто, более того, принципиально возможно осуществить обобщение этого метода на случай рассеяния связанных кластеров. Однако, такие обобщения выходят за рамки данной работы.

Пусть P -пространство содержит все осцилляторные состояния $(A + 1)$ -частичной системы с числом квантов возбуждения $N \leq N_{\max}^{A+1}$. Гамильтониан H^{A+1} содержит кинетическую энергию относительного движения всех $(A + 1)$ частиц и потенциальную энергию их взаимодействия,

$$H^{A+1} = T^{A+1} + V^{A+1}. \quad (3.12)$$

Определим гамильтониан канала как

$$H^{ch} = T^{n-A} + H^A, \quad (3.13)$$

который включает в себя кинетическую энергию движения нейтрона T^{n-A} относительно ядра и гамильтониан A -частичной подсистемы H^A :

$$H^A = T^A + V^A, \quad (3.14)$$

при этом T^A — кинетическая энергия относительного движения A нуклонов в ядре, V^A — потенциальная энергия их взаимодействия. Оператор H^A определён в базисе A -частичных осцилляторных функций с числом квантов возбуждения $N \leq N_{\max}^A$. Волновая функция, описывающая состояние ядра удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$H^A \Psi^A = E^A \Psi^A. \quad (3.15)$$

Будем считать, что эта A -частичная система связана, то есть $E^A < 0$. Так же будем считать, что задача нахождения волновой функции Ψ^A и энергии E^A ядра решена.

Канальный гамильтониан действует в Q -пространстве, т. е.

$$PH^{ch}P = 0. \quad (3.16)$$

Однако, он имеет ненулевые матричные элементы между некоторыми состояниями в пространствах Q и P , его можно представить как:

$$\begin{aligned} H^{ch} &= PH^{ch}Q + QH^{ch}P + QH^{ch}Q \equiv \\ &\equiv (Q + P)H^{ch}Q + QH^{ch}(Q + P) - QH^{ch}Q \equiv H^{ch}Q + QH^{ch} - QH^{ch}Q, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где P — проектор на P -пространство, Q — проектор на Q -пространство и

$$P + Q = 1. \quad (3.18)$$

Гамильтониан, описывающий нашу систему имеет вид

$$H = H^{A+1} + H^{ch}. \quad (3.19)$$

Построим ланцошевский базис сверху, начиная с канальных состояний $\phi_{N\ell}\Psi^A$ и $\phi_{N+2,\ell}\Psi^A$, где $\phi_{N\ell}$ и $\phi_{N+2,\ell}$ — осцилляторные функции движения нейтрона относительно ядра с числом квантов N и $(N + 2)$ соответственно. Предполагается, что $N > \mathcal{N}_{\max}^{A+1}$, где $\mathcal{N}_{\max}^{A+1} = N_{\max}^{A+1} + \mathbb{N}^{A+1} - \mathbb{N}^A$, \mathbb{N}^A и \mathbb{N}^{A+1} — полное число квантов нижайшей конфигурации A -частичной и $(A + 1)$ -частичной систем соответственно. Очевидно, что интересующие состояния принадлежат Q -пространству и применение к ним гамильтониана эквивалентно применению канального гамильтониана H^{ch} к ним. Применяя H^{ch} к $\phi_{N\ell}\Psi^A$ мы можем последовательно получить $\phi_{N-2,\ell}\Psi^A$, $\phi_{N-4,\ell}\Psi^A$ и так далее до $\phi_{\mathcal{N}_{\max}^{A+1},\ell}\Psi^A$. Соответствующие соотношения:

$$T_{N,N-2}^{n-A} a_{N-2}(E) + (T_{NN}^{n-A} - E^{A+1} + E^A) a_N(E) + T_{N,N+2}^{n-A} a_{N+2}(E) = 0, \quad N > \mathcal{N}_{\max}^{A+1}, \quad (3.20)$$

где $a_{N\ell}$ — коэффициенты разложения волновой функции u_ℓ :

$$u_\ell = \sum_{N=N_0, N_0+2, \dots, \infty} a_{N\ell}(E) \phi_{N\ell} \Psi^A, \quad (3.21)$$

а E^{A+1} — полная энергия $(A + 1)$ -частичной системы,

$$E^{n-A} = E^{A+1} - E^A \quad (3.22)$$

— кинетическая энергия движения $n-A$.

Векторы ланцошевских состояний $\phi_{N-2,\ell}\Psi^A, \phi_{N-4,\ell}\Psi^A, \dots, \phi_{\mathcal{N}_{\max}^{A+1},\ell}\Psi^A$ могут быть найдены аналитически. Начиная с $\phi_{\mathcal{N}_{\max}^{A+1},\ell}\Psi^A$ итерации Ланцоша вступают в $(A + 1)$ -частичное P -пространство. Все ланцошевские итерации в этой области похожи на обычные ланцошевские итерации, применяемые в модели оболочек, отличие состоит только в специфическом выборе начального вектора $\phi_{\mathcal{N}_{\max}^{A+1},\ell}\Psi^A$. Отметим, что гамильтониан включает в себя дополнительный член H^{ch} и начальный вектор $\phi_{\mathcal{N}_{\max}^{A+1},\ell}\Psi^A$ вообще говоря включает в себя несколько членов с числом квантов возбуждения $N > \mathcal{N}_{\max}^{A+1}$, т. к. A -частичная волновая функция является суперпозицией A -частичных состояний Ψ_M^A с числом квантов возбуждения $M = 0, 2, 4, \dots, \mathcal{N}_{\max}^A$:

$$\Psi^A = \alpha_0 \Psi_0^A + \alpha_2 \Psi_2^A + \alpha_4 \Psi_4^A + \dots + \alpha_{\mathcal{N}_{\max}^A} \Psi_{\mathcal{N}_{\max}^A}^A. \quad (3.23)$$

В итерациях Ланцоша мы получаем соотношения

$$H_{N,N-2}^{A+1} a_{N-2}(E) + (H_{NN}^{A+1} - E^{A+1}) a_N(E) + H_{N,N+2}^{A+1} a_{N+2}(E) = 0, \quad N \leq \mathcal{N}_{\max}^{A+1}, \quad (3.24)$$

где матричные элементы гамильтониана $H_{NN'}^{A+1} = \langle \phi_{N\ell}\Psi^A | H^{A+1} | \phi_{N'\ell}\Psi^A \rangle$, а

$$H_{\mathcal{N}_{\max}^{A+1}, \mathcal{N}_{\max}^{A+1}+2}^{A+1} = T_{\mathcal{N}_{\max}^{A+1}, \mathcal{N}_{\max}^{A+1}+2}^{n-A}. \quad (3.25)$$

Итерации Ланцоша перемешивают все многочастичные состояния в системе $(A + 1)$ частиц. Число итераций Ланцоша может быть достаточно большим. Число N в соотношениях (3.24) не имеет смысла количества квантов возбуждения, оно используется только чтобы различить различные базисные векторы Ланцоша и может принимать отрицательные значения. После разумного числа итераций Ланцоша мы должны остановиться и решить систему из уравнений (3.24) и (3.20) используя физические граничные условия, аналогично тому, как было рассмотрено ранее.

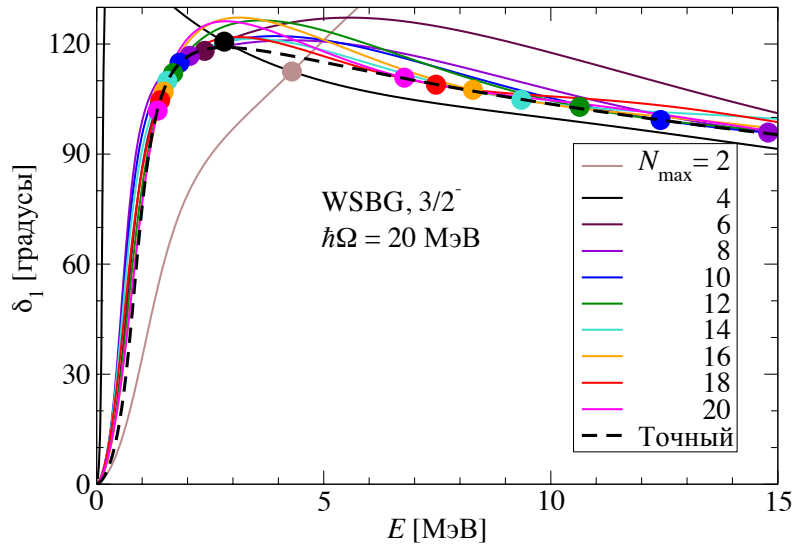


Рис. 3.1. Зависимость сдвига фаз от энергии, полученная методом для различных аппроксимаций (1.9) потенциала (в данном случае $\mathbb{N} = N_{\max} + 1$) в сравнении со сдвигом фазы, полученным численным интегрированием уравнения Шрёдингера с потенциалом WSBG. Кругками обозначены фазы, полученные по формуле (1.25) по собственным энергиям E_ν гамильтониана WSBG с различными N_{\max} и $\hbar\Omega = 20$ МэВ. Цвета кружков и кривых с одинаковым N_{\max} совпадают.

3.5. Применение метода к модельной задаче

Апробируем этот метод на модельной задаче рассеяния с потенциалом WSBG (см. формулу (1.55)) в состоянии $\frac{3}{2}^-$. Построим ланцошевский базис начиная с достаточно высоких осцилляторных состояний с $\hbar\Omega = 20$ МэВ. Получим при этом фазы для гамильтониана с различным числом $\mathbb{N} = N_{\max} + N_0 = N_{\max} + 1$. Будем изменять число N_{\max} изменяется в пределах от 2 до 20. На рис. 3.1 показаны сдвиги фаз, полученные с такими N_{\max} . Прослеживается тенденция, что с ростом N_{\max} сдвиги фаз, полученные данным методом, приближаются к точным сдвигам фаз, полученным численным интегрированием уравнения Шрёдингера с потенциалом WSBG.

Данный метод эквивалентен методу HORSE. Этот ланцошевский метод имеет тот же характер сходимости фаз, что и HORSE. Из рис 3.1 видно, что в целом фазы с ростом N_{\max} достаточно медленно сходятся к точной зависимости сдвигов фаз. Однако, полученные зависимости в отдельных точках пересекают-

ся с кривой точной фазы. На рис. 3.1 цветными кружками обозначены фазы, полученные в методе SS-HORSE по формуле (1.25), где в качестве аргумента взяты собственные энергии E_ν гамильтониана WSBG. В формулу (1.25) были подставлены те же значения параметров N_{\max} и $\hbar\Omega$, которые использовались в ланцешовском методе для расчёта фаз. Видно, что точки пересечения фаз, полученных в ланцешовском методе и точной фаз, полученных численным интегрированием уравнения Шрёдингера с потенциалом WSBG, близки к фазам, полученным в SS-HORSE для достаточно больших N_{\max} (в данном случае начиная с $N_{\max} = 6$).

Видно, что полученный набор точек обладает значительно большей скоростью сходимости по сравнению с кривыми ланцешовских фаз. Если в ланцешовском методе и методе HORSE зависимость фазы от энергии для $N_{\max} = 2$ и $\hbar\Omega = 20$ МэВ описывается очень плохо, то соответствующая единственная фаза метода SS-HORSE достаточно близка к кривой точной фазы.

Таким образом, ланцешовский метод, приведённый в данной главе, являясь переформулированным методом HORSE, проявляет гораздо лучшую сходимость метода SS-HORSE по сравнению с HORSE. Данный факт вызван тем, что сумма (1.20), необходимая для расчёта фазы в HORSE, достаточно плохо сходится. В самом деле, для расчёта данной суммы необходимы все собственные состояния, которые могут быть получены посредством решения (1.21). Однако, состояния с меньшим числом квантов являются более сошедшимися, чем состояния с большим числом квантов, в силу проведения процедуры Ланцоша. С другой стороны, для получения фазы в SS-HORSE нужны лишь энергии одного или нескольких нижайших состояний, которые являются наиболее сошедшимися.

Сдвиги фаз, полученные ланцешовских методом описания состояний рассеяния, зависят от выбора параметра $\hbar\Omega$ в процедуре Ланцоша. Найдём сдвиги фаз при $\hbar\Omega$ в пределах от 10 до 40 МэВ, если потенциал обрезается в соответствии с $N_{\max} = 20$. На рис. 3.2 показаны полученные таким образом зависимости фаз от энергии в сравнении с точными фазами. Видно, что и в этом

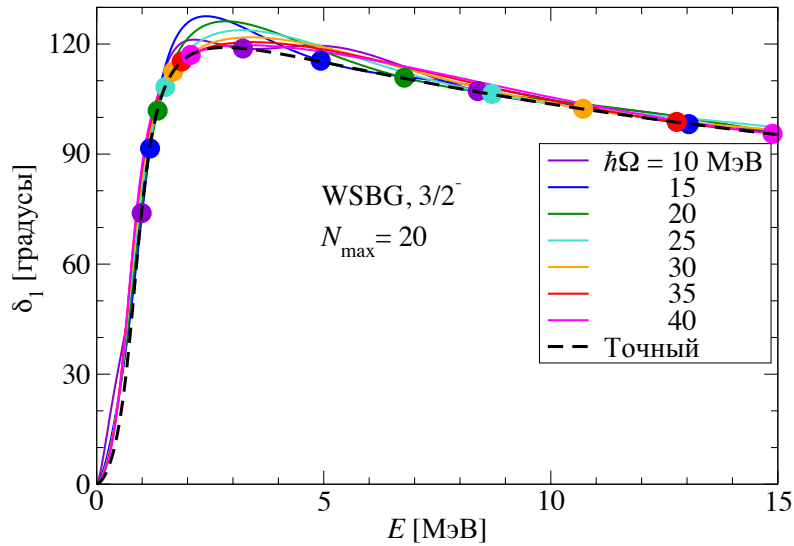


Рис. 3.2. Зависимость сдвига фаз от энергии, полученная методом при различном выборе параметра $\hbar\Omega$ в процедуре Ланцоша в сравнении со сдвигом фазы, полученным численным интегрированием уравнения Шрёдингера с потенциалом WSBG. Кружками обозначены сдвиги фаз, полученные по формуле (1.25) по собственным энергиям E_n гамильтониана WSBG с различными $\hbar\Omega$ и $N_{\max} = 20$. Цвета кружков и кривых с одинаковым $\hbar\Omega$ совпадают.

случае происходит совпадение кривых в точках, которые могут быть получены в SS-HORSE при тех же значениях параметров N_{\max} и $\hbar\Omega$.

3.6. Заключение к главе 3

В данной главе построен и апробирован ланцошевский метод описания состояний упругого рассеяния нейтральных частиц. Этот метод является более последовательным по сравнению с SS-HORSE в многочастичных задачах, где требуется учитывать порог реакции.

С другой стороны, данный метод, являясь переформулированным методом HORSE, позволяет обосновать возможность применения метода SS-HORSE. Метод явно демонстрирует свойства сходимости метода SS-HORSE, показывая, что SS-HORSE обладает скоростью сходимости выше, чем метод HORSE и ланцошевский метод.

Всё выше сказанное означает, что в ланцошевском методе необходимо при-

менять идеи метода SS-HORSE для увеличения скорости сходимости.

Заключение

- Предложен метод SS-HORSE описания состояний непрерывного спектра в ядерных системах на основе расчётов в модели оболочек без инертного кора.
- Метод SS-HORSE успешно применён для описания рассеяния нейтрона на α -частице на основе расчётов в модели оболочек без инертного кора ядер ${}^5\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ с реалистическим NN -взаимодействием JISP16. Полученные характеристики резонансного и нерезонансного рассеяния находятся в разумном согласии с экспериментальными данными.
- Метод SS-HORSE обобщён и использован для описания многочастичного рассеяния в приближении демократического распада. Обобщённый метод применён для поиска резонансного состояния системы четырёх нейтронов на основе расчётов в модели оболочек без инертного кора с NN -взаимодействием JISP16. Получено, что в такой системе существует резонансное состояние с энергией около 0.8 МэВ и шириной около 1.4 МэВ. Этот результат согласуется с недавно проведённым экспериментом.
- На основе свойств осцилляторного базиса и алгоритма Ланцоша предложен последовательный метод описания состояний континуума в ядерных системах в рамках модели оболочек без инертного кора.

В заключении выражаю признательность и искреннюю благодарность научному руководителю к. ф.-м. н., с. н. с. Лаборатории теории атомного ядра ОФАЯ НИИЯФ МГУ Андрею Михайловичу Широкову за постановку диссертационных задач, помощь при выполнении их. Также хочу поблагодарить коллектив кафедры физики ТОГУ за создание благоприятной атмосферы для научной работы.

Список работ автора

- A1. Shirokov A. M., Mazur A. I., Vary J. P., Mazur I. A. Oscillator basis, scattering and nuclear structure // J. Phys. Conf. Ser. 2012. Vol. 403. P. 012021-1–012021-7.
- A2. Shirokov A. M., Papadimitriou G., Mazur A. I., Mazur I. A., Roth R., Vary J. P. Prediction for a Four-Neutron Resonance // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117. P. 182502-1–1802502-6.
- A3. Shirokov A. M., Mazur A. I., Mazur I. A., Vary J. P. Shell model states in the continuum // Phys. Rev. C. 2016. Vol. 94. P. 064320-1–064320-24.
- A4. Mazur I. A., Shirokov A. M., Mazur A. I., Vary J. P. Description of Resonant States in the Shell Model // Phys. Part. Nucl. 2017. Vol. 48, no. 1, P. 84–89.
- A5. Широков А. М., Мазур А. И., Вэри Дж. П., Мазур И. А., И А. П. Построение осцилляторного базиса на основе алгоритма Ланцоша // Физика: фундаментальные и прикладные исследования, образование: Материалы XII региональной науч. конф., г. Хабаровск, 28–31 октября 2013 г. Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та. 2013. С. 75–79.
- A6. Mazur A. I., Shirokov A. M., Vary J. P., Maris P., Mazur I. A. *J*-Matrix Analysis of Resonant States in the Shell Model // Proceedings of the International Workshop on Nuclear Theory in the Supercomputing Era NTSE-2012, Khabarovsk, Russia, June 18–22, 2012 / Ed. A. I. Mazur, A. M. Shirokov. 2013. P. 146–162.
- A7. Мазур А. И., Мазур И. А., Широков А. М., Вэри Дж. П., Марис П., Проскуряков Е. А. *J*-матричный анализ резонансных состояний в модели оболочек // Физика: фундаментальные и прикладные исследования, образование: Материалы Всероссийской молодежной научной конферен-

ции, г. Благовещенск, 23–27 сентября 2014 г. Амурский гос. ун-т. 2014. С. 22–26.

- A8. Shirokov A. M., Papadimitriou G., Mazur A. I., Mazur I. A., Roth R., Vary J. P. Tetraneutron resonance from JISP16 NN interaction // Proceedings of the International Conference on Nuclear Theory in the Supercomputing Era NTSE-2014, Khabarovsk, Russia, June 23–27, 2014 / Ed. A. I. Mazur, A. M. Shirokov. 2016. P. 174–182.
- A9. Mazur A. I., Shirokov A. M., Mazur I. A., Vary J. P. Resonant states in the shell model // Proceedings of the International Conference on Nuclear Theory in the Supercomputing Era NTSE-2014, Khabarovsk, Russia, June 23–27, 2014 / Ed. A. I. Mazur, A. M. Shirokov. 2016. P. 183–229.

Список литературы

1. Pudliner B. S., Pandharipande V. R., Carlson J. et al. Quantum Monte Carlo calculations of nuclei with $A \leq 7$ // Phys. Rev. C. 1997. Vol. 56. P. 1720–1750.
2. Wiringa R. B., Pieper S. C., Carlson J., Pandharipande V. R. Quantum Monte Carlo calculations of $A = 8$ nuclei // Phys. Rev. C. 2000. Vol. 62. P. 014001–1–014001–23.
3. Pieper S. C., Wiringa R. B. Quantum Monte Carlo Calculations of Light Nuclei // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 2001. Vol. 51. P. 53–90.
4. Pieper S. C., Varga K., Wiringa R. B. Quantum Monte Carlo calculations of $A = 9, 10$ nuclei // Phys. Rev. C. 2002. Vol. 66. P. 044310–1–044310–14.
5. Zheng D. C., Barrett B. R., Vary J. P. et al. Large-basis shell model studies of light nuclei with a multivalued G -matrix effective interaction // Phys. Rev. C. 1995. Vol. 52. P. 2488–2498.
6. Barrett B. R., Navrátil P., Vary J. P. *Ab initio* no core shell model // Progr. Part. Nucl. Phys. 2013. Vol. 69. P. 131–181.
7. Kümmela H., Lührmann K. H., Zabolitzky J. Many-fermion theory in $\exp S$ - (or coupled cluster) form // Phys. Rep. 1978. Vol. 36. P. 1–63.
8. Hagen G., Dean D. J., Hjorth-Jensen M. et al. Benchmark calculations for ${}^3\text{H}$, ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$, and ${}^{40}\text{Ca}$ with *ab initio* coupled-cluster theory // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 76. P. 044305–1–044305–8.
9. Lee D. Lattice simulations for few- and many-body systems // Progr. Part. Nucl. Phys. 2009. Vol. 63. P. 117–154.
10. Epelbaum E., Krebs H., Lee D., Meissner U. G. *Ab initio* calculation of the Hoyle state // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 192501–1–192501–4.
11. Maris P., Vary J. P., Shirokov A. M. *Ab initio* no-core full configuration calculations of light nuclei // Phys. Rev. C. 2009. Vol. 79. P. 014308–1–014308–15.
12. Coon S. A., Avetian M. I., Kruse M. K. G. et al. Convergence properties of *ab initio* calculations of light nuclei in a harmonic oscillator basis // Phys. Rev.

- C. 2012. Vol. 86. P. 054002–1–054002–15.
13. Furnstahl R. J., Hagen G., Papenbrock T. Corrections to nuclear energies and radii in finite oscillator spaces // Phys. Rev. C. 2012. Vol. 86. P. 031301(R)–1–031301(R)–5.
 14. More S. N., Ekstrom A., Furnstahl R. J. et al. Universal properties of infrared oscillator basis extrapolations // Phys. Rev. C. 2013. Vol. 87. P. 044326–1–044326–14.
 15. Kruse M. K. G., Jurgenson E. D., Navrátil P. et al. Extrapolation uncertainties in the importance-truncated no-core shell model // Phys. Rev. C. 2013. Vol. 87. P. 044301–1–044301–15.
 16. Sääf D., Forssén C. Microscopic description of translationally invariant core + N + N overlap functions // Phys. Rev. C. 2014. Vol. 89. P. 011303–1–011303–7.
 17. Furnstahl R. J., More S. N., Papenbrock T. Systematic expansion for infrared oscillator basis extrapolations // Phys. Rev. C. 2014. Vol. 89. P. 044301–1–044301–12.
 18. König S., Bogner S. K., Furnstahl R. J. et al. Ultraviolet extrapolations in finite oscillator bases // Phys. Rev. C. 2014. Vol. 90. P. 064007–1–064007–24.
 19. Furnstahl R. J., Hagen G., Papenbrock T., Wendt K. A. Infrared extrapolations for atomic nuclei // J. Phys. G. 2015. Vol. 42, no. 3. P. 034032–1–034032–16.
 20. Wendt K. A., Forssén C., Papenbrock T., Sääf D. Infrared length scale and extrapolations for the no-core shell model // Phys. Rev. C. 2015. Vol. 91. P. 061301–1–061301–6.
 21. Coon S. A., Kruse M. K. G. Properties of infrared extrapolations in a harmonic oscillator basis // Int. J. Mod. Phys. E. 2016. Vol. 25. P. 1641011–1–1641011–30.
 22. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1980. 400 с.
 23. Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W. Reduction of the three-particle collision

- problem to multi-channel two-particle Lippmann-Schwinger equations // Nucl. Phys. B. 1967. Vol. 2, no. 2. P. 167–180.
24. Попов Ю. В., Зайцев С. А., Веницкий С. И. *J*-матричный метод вычисления трехчастичных кулоновских волновых функций и сечений физических процессов // ЭЧАЯ. 2011. Т. 42. С. 1311–1370.
 25. Серов В. В., Дебров В. Л., Сергеева Т. А., Веницкий С. И. Современные методы расчета фотоионизации и ионизации электронным ударом двух-электронных атомов и молекул // ЭЧАЯ. 2013. Т. 44. С. 1434–1499.
 26. Leidemann W., Orlandini G. Modern *ab initio* approaches and applications in few-nucleon physics with $A \geq 4$ // Prog. Part. Nucl. Phys. 2013. Vol. 68. P. 158–214.
 27. Efros V. D., Leidemann W., Orlandini G., Barnea N. The Lorentz integral transform (LIT) method and its applications to perturbation-induced reactions // J. of Phys. G. 2007. Vol. 34, no. 12. P. R459–R528.
 28. Nollett K. M., Pieper S. C., Wiringa R. B. et al. Quantum Monte Carlo calculations of neutron-alpha scattering // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. P. 022502–1–022502–4.
 29. Papadimitriou G., Rotureau J., Michel N. et al. *Ab initio* no-core Gamow shell model calculations with realistic interactions // Phys. Rev. C. 2013. Vol. 88. P. 044318–1–044318–15.
 30. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра. М.: Мир, 1980. 502 с. пер. с нем.
 31. Navrátil P., Quaglioni S., Stetcu I., Barrett B. R. Recent developments in no-core shell-model calculations // J. Phys. G. 2009. Vol. 36. P. 083101–1–083101–8.
 32. Hupin G., Langhammer J., Navrátil P. et al. *Ab initio* many-body calculations of nucleon- ^4He scattering with three-nucleon forces // Phys. Rev. C. 2013. Vol. 88. P. 054622–1–054622–16.
 33. Quaglioni S., Navrátil P., Hupin G. et al. No-Core Shell Model Analysis of

- Light Nuclei // Few-body Syst. 2013. Vol. 54. P. 877–884.
34. Hupin G., Quaglioni S., Navrátil P. Predictive theory for elastic scattering and recoil of protons from ^4He // Phys. Rev. C. 2014. Vol. 90. P. 061601(R)–1–061601(R)–5.
 35. Shirokov A. M., Mazur A. I., Vary J. P., Mazur E. A. Inverse scattering J -matrix approach to nucleon-nucleus scattering and the shell model // Phys. Rev. C. 2009. Vol. 79. P. 014610–1–014610–20.
 36. Shirokov A. M., Mazur A. I., Mazur E. A., Vary J. P. No-Core Shell Model and Continuum Spectrum States of Light Nuclei // Applied Mathematics & Information Sciences. 2009. Vol. 3(3). P. 245–271.
 37. Kisamori K., Shimoura S., Miya H. et al. Candidate Resonant Tetraneutron State Populated by the $^4\text{He}(^8\text{He}, ^8\text{Be})$ Reaction // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 116. P. 052501–1–052501–5.
 38. Shimoura S. RIKEN-RIBF proposal on “Tetraneutron resonance produced by exothermic double-charge exchange reaction” // NP1512-SHARAQ10.
 39. Kisamori K. RIKEN-RIBF proposal on “Manyneutron systems: search for superheavy ^7H and its tetraneutron decay” // NP1512-SAMURAI34.
 40. Paschalis S., Shimoura S. RIBF Experimental Proposal // NP1406-SAMURAI19.
 41. Kezerashvili R. A short summary on the search of trineutron and tetraneutron // arXiv:1608.00169. 2016. P. 1–6.
 42. Fiarman S., Meyerhof W. E. Energy Levels of Light Nuclei $A = 4$ // Nucl. Phys. A. 1973. Vol. 206. P. 1–64.
 43. Stetz A., Swenson L. W., Davis J. et al. Pion Double Charge Exchange on ^4He and Meson Exchange Currents // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 47. P. 782–785.
 44. Kinney E. R., Matthews J. L., Gram P. A. M. et al. Inclusive pion double charge exchange in ^4He // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 3152–3155.
 45. Gorringer T. P., Ahmad S., Armstrong D. S. et al. Search for the tetraneutron using the reaction $^4\text{He}(\pi^-, \pi^+)^4\text{n}$ // Phys. Rev. C. 1989. Vol. 40. P. 2390–2393.

46. Belozyorov A. V., Borcea C., Dlouhý Z. et al. Search for the tri- and tetra-neutron in reactions induced by ^{11}B and ^9Be ions on ^7Li // Nucl. Phys. A. 1988. Vol. 477. P. 131–142.
47. Александров Д. В., Глухов Ю. А., Никольский Е. Ю. и др. Поиски тетра-нейтрона в реакции $^7\text{Li}+^7\text{Li}$ // ЯФ. 1988. Т. 47. С. 3–6.
48. Marqués F. M., Labiche M., Orr N. A. et al. Detection of neutron clusters // Phys. Rev. C. 2002. Vol. 65. P. 044006–1–044006–10.
49. Pieper S. C. Can Modern Nuclear Hamiltonians Tolerate a Bound Tetraneutron? // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. P. 252501–1–252501–4.
50. Heller E. J., Yamani H. A. New L^2 approach to quantum scattering: Theory // Phys. Rev. A. 1974. Vol. 9. P. 1201–1208.
51. Yamani H. A., Fishman L. J -matrix method: Extensions to arbitrary angular momentum and to Coulomb scattering // J. Math. Phys. 1975. Vol. 16. P. 410–420.
52. Филиппов Г. Ф., Охрименко И. П. О возможности использования осцилляторного базиса для решения задач непрерывного спектра // ЯФ. 1980. Т. 32. С. 932–939.
53. Филиппов Г. Ф. Об учете правильной асимптотики в разложении по осцилляторному базису // ЯФ. 1981. Т. 33. С. 928–931.
54. Smirnov Y. F., Nechaev Y. I. The elements of scattering in the hamonic oscillator representation // Kinam. 1982. Vol. 4. P. 445–458.
55. Кныр В. А., Мазур А. И., Смирнов Ю. Ф. Расчет сечения реакции $^{16}\text{O}(K^-, \pi^-)^{16}_\Lambda\text{O}$ в осцилляторном представлении теории рассеяния // ЯФ. 1990. Т. 52. С. 754–765.
56. Кныр В. А., Мазур А. И., Смирнов Ю. Ф. Сечение реакции образования гиперядра $^7_\Lambda\text{Li}$ с учетом влияния непрерывного спектра // ЯФ. 1991. Т. 54. С. 1518–1524.
57. Кныр В. А., Мазур А. И., Смирнов Ю. Ф. Исследование реакции $^{16}\text{O}(\pi^+, K^+)^{16}_\Lambda\text{O}$ с учетом непрерывного спектра // ЯФ. 1992. Т. 56.

- C. 72–87.
58. Masur A. I., Zaitsev S. A. Effects of a Single-Particle Continuum in the Reaction $^{12}\text{C}(\pi^+, K^+)_{\Lambda}^{12}\text{C}$ // Phys. At. Nucl. 1999. Vol. 62. P. 608–615.
 59. The J -Matrix Method. Developments and Applications / Ed. by A. D. Alhaidari, E. J. Heller, H. A. Yamani, M. S. Abdelmonem. Springer, 2008. 343 p.
 60. Vasilevsky V., Nesterov A. V., Arickx F., Broeckhove J. Algebraic model for scattering in three- s -cluster systems. I. Theoretical background // Phys. Rev. C. 2001. Vol. 63. P. 034606–1–034606–16.
 61. Vasilevsky V., Nesterov A. V., Arickx F., Broeckhove J. Algebraic model for scattering in three- s -cluster systems. II. Resonances in the three-cluster continuum of ^6He and ^6Be // Phys. Rev. C. 2001. Vol. 63. P. 034607–1–034607–7.
 62. Bang J. M., Mazur A. I., Shirokov A. M. et al. P -Matrix and J -Matrix Approaches: Coulomb Asymptotics in the Harmonic Oscillator Representation of Scattering Theory // Ann. Phys. (NY). 2000. Vol. 280. P. 299–335.
 63. Кукулин В. И., Померанцев В. Н., Рубцова О. А. Дискретное представление функции спектрального сдвига и многоканальная S -матрица // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. С. 443–450.
 64. Rubtsova O. A., Kukulin V. I., Pomerantsev V. N., Faessler A. New approach toward a direct evaluation of the multichannel multienergy S matrix without solving the scattering equations // Phys. Rev. C. 2010. Vol. 81. P. 064003–1–064003–17.
 65. Лифшиц И. М. О вырожденных регулярных возмущениях. 1. Дискретный спектр // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 1017–1025.
 66. Лифшиц И. М. О вырожденных регулярных возмущениях. 2. Квазинепрерывный спектр // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 1076–1089.
 67. Лифшиц И. М. Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой // УМН. 1952. Т. 7, № 47. С. 171–180.
 68. Buslaev V. S., Faddeev L. D. Formulas for Traces for a Singular Sturm-Liouville Differential Operator // Sov. Math. Dokl. Vol. 1. P. 451–454.

69. Luu T., Savage M. J., Schwenk A., Vary J. P. Nucleon-nucleon scattering in a harmonic potential // Phys. Rev. C. 2010. Vol. 82. P. 034003–1–034003–12.
70. Shirokov A. M., Vary J. P., Mazur A. I., Weber T. A. Realistic nuclear Hamiltonian: *Ab exitu* approach // Phys. Lett. B. 2007. Vol. 644, no. 1. P. 33–37.
71. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
72. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с. Пер. с англ.
73. Зайцев С. А., Смирнов Ю. Ф., Широков А. М. Истинно многочастичное рассеяния в осцилляторном представлении // ТМФ. 1998. Т. 117. С. 227–248.
74. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. 544 с.
75. Тейлор Д. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975. 567 с. Пер. с англ.
76. Bang J., Gignoux C. A realistic three-body model of ${}^6\text{Li}$ with local interactions // Nucl. Phys. A. 1979. Vol. 313. P. 119–140.
77. Maris P., Sosonkina M., Vary J. P. et al. Scaling of ab-initio nuclear physics calculations on multicore computer architectures // Proc. Comput. Sci. 2010. Vol. 1. P. 97–106.
78. Aktulga H. M., Yang C., Ng E. G., Vary P. M. J. P. Improving the scalability of a symmetric iterative eigensolver for multi-core platforms // Concurrency Computat. Pract. Exper. 2014. Vol. 26. P. 2631–2726.
79. Bond J. E., Firk F. W. K. Determination of R -function and physical-state parameters for n - ${}^4\text{He}$ elastic scattering below 21 MeV // Nucl. Phys. A. 1977. Vol. 287. P. 317–343.
80. Csóto A., Hale G. M. S -matrix and R -matrix determination of the low-energy ${}^5\text{He}$ and ${}^5\text{Li}$ resonance parameters // Phys. Rev. C. 1997. Vol. 55. P. 536–539.

81. Bertulani C. A., Zelevinsky V. Nuclear physics: Four neutrons together momentarily // *Nature*. 2016. Vol. 532. P. 448–449.
82. Papadimitriou G., Kruppa A. T., Michel N. et al. Charge radii and neutron correlations in helium halo nuclei // *Phys. Rev. C*. 2011. Vol. 84. P. 051304–1–051304–5.
83. Schiffer J. P., Vandenbosch R. Search for a particle-stable tetra neutron // *Phys. Lett.* 1963. Vol. 5. P. 292–293.
84. Cierjacks S., Markus G., Michaelis W., Pönitz W. Further Evidence for the Nonexistence of Particle-Stable Tetraneutrons // *Phys. Rev.* 1965. Vol. 137. P. B345–B346.
85. Bevelacqua J. J. Theoretical estimates of the trineutron and tetraneutron binding energies // *Nucl. Phys. A*. 1980. Vol. 341, no. 3. P. 414–417.
86. Bertulani C. A., Zelevinsky V. Is the tetraneutron a bound dineutron–dineutron molecule? // *J. Phys. G*. 2003. Vol. 29, no. 10. P. 2431–2437.
87. Timofeyuk N. K. Do multineutrons exist? // *J. Phys. G*. 2003. Vol. 29, no. 2. P. L9–L14.
88. Sofianos S. A., Rakityansky S. A., Vermaak G. P. Subthreshold resonances in few-neutron systems // *J. Phys. G*. 1997. Vol. 23, no. 11. P. 1619–1630.
89. Lazauskas R., Carbonell J. Is a physically observable tetraneutron resonance compatible with realistic nuclear interactions? // *Phys. Rev. C*. 2005. Vol. 72. P. 034003–1–034003–7.
90. Hiyama E., Lazauskas R., Carbonell J., Kamimura M. Possibility of generating a 4-neutron resonance with a $T = 3/2$ isospin 3-neutron force // *Phys. Rev. C*. 2016. Vol. 93. P. 044004–1–044004–10.
91. Grigorenko L. V., Timofeyuk N. K., Zhukov M. V. Broad states beyond the neutron drip line // *Eur. Phys. J. A*. 2004. Vol. 19, no. 2. P. 187–201.
92. Lashko Y. A., Filippov G. F. Cluster structure of a low-energy resonance in tetraneutron // *Phys. At. Nucl.* 2008. Vol. 71, no. 2. P. 209–214.
93. Elhatisari S., Lee D., Rupak G. et al. *Ab initio* alpha-alpha scattering // *Nature*

- ture. 2015. Vol. 528. P. 111–114.
94. Quaglioni S. Nuclear physics: Close encounters of the alpha kind // Nature. 2015. Vol. 528. P. 42–43.
95. Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б. Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984. 181 с.
96. Джибути Р. И. Полный развал легких ядер элементарными частицами // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14. С. 741–772.
97. Jibuti R. I., Kezerashvili R. Y., Sigua K. I. Investigation of $\pi^-(\pi^+) + {}^4\text{He} \rightarrow \pi^-(\pi^+) + 4n(4p)$ reactions // Phys. Lett. B. 1981. Vol. 102, no. 6. P. 381–384.
98. Кезерашвили Р. Я. Существует ли тетранейтрон? // ЯФ. 1986. Т. 44. С. 842–844.
99. Бадалян А. М., Белова Т. И., Конюхова Н. Б., Эфрос В. Д. Резонансы в системе ${}^4\text{H}$ // ЯФ. 1985. Т. 41. С. 1460–1469.
100. Гутич И. Ф., Нестеров А. В., Охрименко И. П. Исследование состояний непрерывного спектра тетранейтрона // ЯФ. 1989. Т. 50. С. 19–26.
101. Лурье Ю. А., Смирнов Ю. Ф., Широков А. М. Мягкий дипольный резонанс в ядре ${}^{11}\text{Li}$ в трехчастичной кластерной модели с непрерывным спектром // Изв. РАН. Сер. физ. 1993. Т. 57, № 5. С. 193–201.
102. Лурье Ю. А., Широков А. М. ${}^6\text{He}$ в трехчастичной кластерной модели с непрерывным спектром // Изв. РАН. Сер. физ. 1997. Т. 61, № 11. С. 2121–2131.
103. Lurie Y. A., Shirokov A. M. Loosely Bound Three-Body Nuclear Systems in the J -Matrix Approach // Ann. Phys. (NY). 2004. Vol. 312, no. 2. P. 284–318.
104. Lanczos C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators // J. Res. Nat. Bur. Std. 1950. Vol. 45. P. 255–282.
105. Haxton W. C., Nollett K. M., Zurek K. M. Piecewise moments method: Generalized Lanczos technique for nuclear response surfaces // Phys. Rev. C. 2005. Vol. 72. P. 065501–1–065501–16.