

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Петросян
Давид Рафаелович

**ВЫРОЖДЕННЫЕ СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ
НА ТРЁХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ
ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ**

Специальность: 01.04.02
“Теоретическая физика”

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Погосян Г.С.

Дубна 2016

Оглавление

Оглавление	2
Введение	4
1 Классическое движение на $SO(2, 2)$ гиперboloиде	12
1.1 Гиперболическое пространство H_2^2 и константы движения	12
1.2 Потенциал гармонического осциллятора	16
1.3 Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби	17
1.3.1 Интегрирование квази-радиальной части	20
1.3.2 Интегрирование угловой части	22
1.4 Траектории для $L^2 > 0$	24
1.5 Траектории для $L^2 \leq 0$	29
1.6 Потенциал Кеплера-Кулона	32
1.7 Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби	33
1.7.1 Интегрирование квази-радиальной части	34
1.7.2 Интегрирование угловой части	36
1.8 Траектории	38
2 Квантовое движение на $SO(2, 2)$ гиперboloиде	45
2.1 Общие формулы для H_2^2 пространства в контексте квантовой механики	45
2.2 Уравнения Шредингера	47
2.3 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора	50
2.3.1 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в псевдо-сферических координатах	50
2.3.2 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в цилиндрических координатах	52
2.3.3 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в эквидистантных координатах	54
2.4 Межбазисное разложение между цилиндрическим и эквидистантными системами	55

2.5	Решение уравнения Шредингера для задачи Кеплера-Кулона	58
3	Движение на однополостном и двухполостном гиперboloидах $SO(3, 1)$	62
3.1	Гиперболическое пространство H_1^3 и константы движения	62
3.2	Классическая задача Кеплера-Кулона на одно-полосом гиперboloиде $SO(3, 1)$	65
3.3	Разложение собственных функций задачи Кеплера-Кулона на мнимом пространстве Лобачевского	73
3.4	Квантовая задача гармонического осциллятора на двух-полосом гиперboloиде H_3^1	84
3.4.1	Координатные системы на трёхмерном двухполостном гиперboloиде	84
3.4.2	Сферическая система координат	86
3.4.3	Полярно-Цилиндрическая система координат	88
3.4.4	Алгебра	92
3.4.5	Разложение между сферическим и цилиндрическим базисом	92
3.4.6	Разложения для дискретного спектра	92
3.4.7	Разложение непрерывного спектра	95
	Заключение	103
	Приложение	105
4.1	Коммутационные соотношения тензора Демкова	105
4.2	Вычисление интегралов	106
4.3	Преобразования гипергеометрических функций ${}_4F_3$ и ${}_3F_2$ от единичного аргумента	106
4.4	Вычисление интегралов для сферическо – полярно-цилиндрического разложения	106
4.4.1	Дискретно-дискретное разложение	106
4.4.2	Непрерывно-дискретное разложение	108
4.5	Определение полиномов дискретной переменной Вильсона, Рака и Хана	108
4.5.1	Вильсон	108
4.5.2	Рака	109
4.5.3	Хан	109
	Список литературы	111

Введение

Настоящая диссертация, как это видно из самого заглавия, посвящена исследованию вырожденных суперинтегрируемых систем на трехмерном пространстве отрицательной кривизны, а именно на одно-полосом гиперboloиде и гиперboloиде с группой изометрии $SO(2, 2)$. Суперинтегрируемые системы - это специальный подкласс интегрируемых гамильтоновых систем обладающих полным возможным набором операторов симметрии или интегралов движения. Другими словами, N -мерная интегрируемая система называется суперинтегрируемой, если в дополнении к N функционально независимым и хорошо определенным (не имеющим особенностей, точек ветвления и др.) в фазовом пространстве, интегралам движения, находящимся в инволюции с гамильтонианом системы в классической механике или линейно независимых операторов, коммутирующих с гамильтонианом в квантовой механике, существует дополнительно $(N - 1)$ таких же интегралов движения, но не обязательно коммутирующих между собой¹. Среди суперинтегрируемых систем особо выделяются системы второго рода, когда интегралы движения являются полиномами второго порядка от импульсов системы. Именно суперинтегрируемые системы второго рода обладают многими свойствами описанными ниже. Первый систематический поиск и исследование двумерных суперинтегрируемых систем предпринят в 1965 году в работе Смородинского с соавторами [2, 3], в которой они нашли четыре таких потенциала. В дальнейшем вопрос классификации всех двумерных суперинтегрируемых систем второго рода в комплексном евклидовом пространстве и на комплексной сфере полностью решен в работах [4, 5, 6]. Вопрос полной классификации все суперинтегрируемых систем второго рода на трехмерных пространствах постоянной кривизны далек еще от своего решения. Классификация трехмерных суперинтегрируемых систем второго рода также берет начало с работы Смородинского с соавторами [7]. Позднее более полный анализ приведен Эвансом в работах [8] и совсем недавно в работах Калнинса и Миллера [9].

К наиболее известным, частным или вырожденным (когда потенциал системы зависит только от одной константы связи) суперинтегрируемым системам относятся изотропный гармонический осциллятор и движение в поле Кеплера - Кулона и движение в поле

¹Термин суперинтегрируемые системы впервые введен Войцеховским в работе [1] при решении так называемой задачи с потенциалом Калоджеро-Мозера. Он обозначает, что данные системы могут решены несколькими альтернативными способами.

анизотропного осциллятора с рациональным отношением частот. Еще Лапласу была известна [10], добавочная к вектору углового момента, векторная сохраняющаяся величина, лежащая в плоскости орбиты и направленная по большой оси эллипса. В дальнейшем она была переоткрыта Рунге [11], а чуть позже введена в квантовую механику Ленцем [12]. Дополнительный интеграл движения для изотропного осциллятора, так называемый тензор Демкова, впервые был найден в работе [13]. Вопросы симметрии анизотропного осциллятора рассматривались в статьях Демкова [14] и Илькаевой в [15].

Наличие $(2N - 1)$ интегралов движения (так называемая максимальная суперинтегрируемость) приводит ко многим специфическим свойствам отличающих суперинтегрируемые системы от просто интегрируемых. Во первых, это теорема Бертрана [16], согласно которой, из всех центрально - симметрических полей лишь в кулоновом и осцилляторных полях все конечные траектории движения замкнуты. В квантовой механике этому явлению соответствует полное вырождение (позднее его назвали случайным так как она не исходит из геометрической симметрии уравнения Шредингера в данном поле) уровней энергии дискретного спектра (к примеру при решении в сферической системе координат по угловому и азимутальному квантовым числам). Объяснение явления этого вырождения привело к понятию скрытой или динамической симметрии таких систем. Фоком [17] было показано, что за вырождение дискретного спектра атома водорода ответственна ортогональная группа $SO(4)$, а непрерывного спектра группа Лоренца $SO(3, 1)$. Для N - мерного гармонического осциллятора в качестве группы динамической симметрии, как показано в работах [18, 19], выступает унитарная группа $U(N)$.

Другой важной особенностью кулоновской и осцилляторной задач как в классической так и квантовой механике выступает феномен разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и Шредингера в нескольких ортогональных системах координат. К примеру в евклидовом пространстве задача об атоме водорода разделяется кроме сферической дополнительно в трех ортогональных системах координат, а именно в параболической, сферо-конической и сфероидальной [20], в то время как осциллятор в семи [21]. Полная классификация всех ортогональных систем координат допускающих разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и или Шредингера для различных пространств постоянной кривизны представляет собой сложную задачу дифференциальной геометрии. Сегодня известны ответы только для некоторых пространств низкой размерности: двух и трехмерного евклидова пространства E_2 и E_3 [22], двух- и трехмерной сферы $S_2 \sim SO(3)/SO(2)$ и $S_3 \sim SO(4)/SO(3)$ [23], двух- и трехмерном гиперboloиде (пространства Лобачевского) $H_2 \sim SO(2, 1)/SO(2)$ и $H_3 \sim SO(3, 1)/SO(3)$ [23], двух- и трехмерный однополосый гиперboloид (мнимые пространства Лобачевского или пространства де Ситтера) $H_1^1 \sim SO(2, 1)/SO(1, 1)$ [24] и $H_2^1 \sim SO(3, 1)/SO(2, 1)$ [25], трехмерное гиперболическое пространство $H_2^2 \sim SO(2, 2)/SO(2, 1)$ (пространство анти де Ситтера) [26].

Еще одной особенностью суперинтегрируемых систем второго рода, делающими их осо-

бо привлекательными для приложений - это возможность решения задачи чисто алгебраическими методами или в терминах гипергеометрических функций. Многие специальные функции математической физики выступают в качестве собственных функций при решении уравнения Шредингера для суперинтегрируемых потенциалов. В этом контексте хорошим примером является свободное движение описываемое уравнением Гельмгольца (свободным уравнением Шредингера). Одно из важнейших направлений исследований данных систем это построение межбазисных разложений для различных собственных функций полученных в результате разделения переменных в уравнении Шредингера. В свою очередь они служат построению важных тождеств для большого класса специальных функций. Многие аспекты теории межбазисных разложений представлены в книге [27]

Задача о движение классической частицы в поле тяготения и заряженной частицы в кулоновском поле на пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны, как и в евклидовом пространстве, имеет богатую историю. Введение гиперболической геометрии в закон всемирного тяготения можно найти уже в работах Лобачевского (Сборник научных трудов, том 2, Москва 1949), который определил как сам вид кеплеровского потенциала в виде гиперболического котангенса, так и нашел траекторию классического движения. История этого вопроса красиво изложена в статье Черникова [28]. Обобщение кеплеровского движения на случай пространств положительной кривизны можно встретить в работах Киллинга (1985) и Неймана (1886) и книге Либмана [29].

В 20 столетии в связи с созданием общей теории относительности и квантовой механики возрос интерес также к задачам как классической, так и квантовой механики в римановых пространствах. Кеплеровское движение на сфере (при этом в роли гармонического потенциала на сфере выступает тригонометрический котангенс от геодезического угла) и в пространстве Лобачевского, совсем недавно, вновь привлекло внимание физиков и математиков, что нашло отражение в работах Домбровского и Зиттебарса [30], Козлова и Харина [31] и Козлова [32] и Славяновского [33] и Гроше [34].

Квантовомеханические задачи в пространствах постоянной положительной и отрицательной кривизны являются предметом интенсивного исследования с 1940 года, когда Э. Шредингер [35], используя метод факторизации для уравнения Шредингера, впервые решил квантовомеханическую задачу об "атоме водорода" на трехмерной сфере (замкнутая модель вселенной). В том же году Стивенсон [36] используя довольно оригинальный метод квантования уравнения Шредингера нашел ненормированные волновые функции атома водорода на трехмерной сфере. Аналогичная задача в трехмерном пространстве Лобачевского впервые была решена Инфельдом и Шилдом [37] (модель открытой вселенной). Полученный спектр энергии обладает вырождением, аналогичным вырождению в спектре атома водорода в плоском случае. Однако в отличии от плоского случая, атом водорода на трехмерной сфере обладает только дискретными уровнями энергии, а в пространстве Лоба-

чевского присутствует как непрерывный так и дискретный спектр энергии, причем число уровней дискретного спектра является хоть и довольно большим но конечным. Позднее в работах Питера Хиггса [38], Лимона [39], Курочкина и Отчика [40] и Курочкина, Отчика и Богуша [41] и Акопян с соавторами [42] была установлена природа данного вырождения. Было показано, что наличие полного вырождения спектра кулоновской задачи и гармонического осциллятора на трехмерной сфере и гиперboloиде связано с наличием дополнительного интеграла движения - аналога вектора Рунге-Ленца и аналога тензора Демкова. Однако в отличие от плоского пространства интегралы движения для кулоновской задачи и изотропного осциллятора не образуют алгебру Ли так соответствующие коммутационные соотношения нелинейны и формируют кубическую или квадратичную алгебру. Эти алгебры получили названия алгебр Хиггса (квадратичные алгебры незадолго до этого были введены Скляниным в связи с исследованием уравнения Янга-Бакстера [43, 44]). Отметим также статьи Барута, Иноматы и Юнкера [45, 46] где задачи об атоме водорода на трехмерной сфере и двухполосом гиперboloиде сформулирована и решена в рамках фейнмановского подхода в квантовой механике. В дальнейшем в серии работ [47, 48, 21] понятие суперинтегрируемости было расширено на двумерные и трехмерные пространства постоянной кривизны (сферы и двухполосый гиперboloиды) а также непостоянной кривизны [49, 50, 51, 52, 53, 54]. Отметим также статьи [55, 56, 57] где построены шредингеровские базисы для всех известных суперинтегрируемых систем второго рода на двумерной сфере и гиперboloиде. Связь между осцилляторной и кулоновской задачей для переходов $(n, m) = (2, 2), (4, 3), (8, 5)$ на сферах исследовалась в работе [58], а на гиперboloиде для думерных перехода $(n, m) = (2, 2)$ в статье [59].

В последнее десятилетие среди математиков и физиков вновь отмечается большой интерес к классическим и квантовым суперинтегрируемым системам, связанный с открытием нового класса двумерных и трехмерных потенциалов (так называемых моделей Эванса-Верье, Трэмблая-Турбинера-Винтернитца и Пост-Винтернитца), когда дополнительный интеграл движения является полиномом порядка n , где $n > 2$ [60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]. В основе данных моделей лежит суперинтегрируемое сингулярное расширение кулоновского потенциала и потенциала гармонического осциллятора. В то же время внимание многих исследователей привлекают квантовомеханические проблемы, основанные на геометрии пространств постоянной кривизны (положительной и отрицательной). Двухмерный и трехмерный однополосый гиперboloиды (мнимое пространство Лобачевского) как и гиперboloид с группой изометрии $SO(2, 2)$ являются моделями для релятивистского пространства времени постоянной кривизны, а именно пространство де Ситтера и анти де Ситтера, которое является отправной точкой определяющее их широкое применение в теории поля [72, 73], квантовой гравитации и космологии [74, 75, 76], при решении уравнения Янга-Милса-Хиггса [77, 78]. Мнимое пространство Лобачевского применяется в теории рассеяния при описании нефизических областей для импульсов [79],

при квантовании когерентных состояний [80]. Отметим, что квантовомеханические модели, основанные на геометрии пространств постоянной кривизны, используют для описания связанных состояний в физике элементарных частиц, в частности в исследовании релятивистских моделях подробно изученных в работах Кадышевского, Мир-Касиова и Скачкова [81, 82, 83], в атомной и ядерной физике [84, 85, 86, 87]. На основе их предпринимаются попытки дать объяснение проблеме конфайнмента кварков. Так, например, модель, основанная на кулоновском взаимодействии на сфере, была использована в работе [88, 89] для описания спектра кваркония, а в работах [90, 91] – для описания возбужденных состояний экситонов в квантовых точках.

Несмотря на обилие научных работ посвященных исследованию суперинтегрируемых задач на пространствах постоянной кривизны многие вопросы еще ждут своего решения. Одним из таких примеров является вопрос анализа интегрируемости и квантования суперинтегрируемых моделей на однополостном и $SO(2, 2)$ гиперболоидах, включая также и псевдоевклидово пространство (пространство Минковского). Известные, на сегодня, результаты представлены в работах [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99]. В частности, в работе Гроше [92] была впервые поставлена и решена (в рамках фейнмановского подхода) задача об атоме водорода на однополосом гиперболоиде, в работе [93, 98] авторы статьи опираясь на метод редукции от свободного гамильтониана в комплексном пространстве $SU(2, 2)/U(2, 1)$ построили одиннадцать максимально суперинтегрируемых потенциалов на гиперболоиде H_2^2 , в работе [96] построены суперинтегрируемые обобщения для потенциала Кеплера-Кулона и гармонического осциллятора в шести трехмерных пространствах постоянной кривизны, путем введения двух параметров контакции, в работе [97, 98, 99]. Правда найденные в [96] суперинтегрируемые модели не были исследованы, а только идентифицированы. В работе [94], опять же опираясь на подход с двумя константами контакции, представлены исследования двумерного осциллятора на девяти пространствах Кэли-Клейна.

Настоящая диссертация посвящена исследованию, в рамках как классической так и квантовой механики, двух основных вырожденных суперинтегрируемых систем, движение в поле Кеплера - Кулона и гармонического осциллятора на однополостном гиперболоиде и гиперболоиде с группой изометрии $SO(2, 2)$. Можно указать несколько причин по которым суперинтегрируемые системы не рассматривались в этих двух пространствах постоянной кривизны. Трехмерные пространства отрицательной кривизны H_2^1 и H_2^2 в отличии от пространства Лобачевского (двухполостный гиперболоид) и трехмерной сферы являются наиболее сложным с точки зрения исследования разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби и Шредингера. Как показано Калнинсом и Миллером в работе [26] в пространстве H_2^2 существует более 70 ортогональных систем координат допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца или уравнении Гамильтона - Якоби (на гиперболоиде H_2^1 таких ортогональных систем координат 34). С другой стороны,

многие из ортогональных систем координат вовсе не покрывают полностью поверхность гиперboloидов H_2^1 и H_2^2 или расщепляются на два подкласса, как например, в случаях псевдосферической системы координат на H_2^2 или эквидистантной на H_2^1 . Наряду с этим, процесс разделения переменных в уравнении Шредингера приводит к дифференциальным уравнениям с сингулярными потенциалами с бесконечным отрицательным спектром энергий (так называемое рашение с падением на центр [100]).

Диссертация написана на основе шести работ [101, 102, 103, 104, 105, 106], состоит из введения, трех глав, заключения, математического дополнения и списка литературы. Вопросы представленные в диссертации распределены по главам следующим образом,

В первой главе данной диссертации решаются классическая задача о гармоническом осцилляторе и движении в кеплеровском поле на гиперboloиде $SO(2, 2)$. В первом параграфе введены две псевдо-сферические системы, соответствующие подгрупповой цепочке координат $SO(2, 2) \supset SO(2, 1) \supset SO(2)$, которые только в совокупности покрывают $SO(2, 2)$ гиперboloид. С помощью редукции метрики объемлющего пространства Минковского $\mathbf{R}_{2,2}$ найдена метрика и построен гамильтониан описывающий геодезическое движение на гиперboloиде $SO(2, 2)$ в псевдо-сферической системе координат. В этом же параграфе выписаны классические константы движения которые в фазовом пространстве совпадают с генераторами алгебры Ли $so(2, 2)$ и показано, что свободный гамильтониан совпадает с одним из функций Казимира для группы $SO(2, 2)$ и тем самым принадлежит классу максимально суперинтегрируемой системой. Далее замечано, что центральная симметрия гамильтониана приводит к сохранению Лоренцевского "углового момента L^2 (функция Казимира для группы $SO(2, 1)$), который в отличии от обычного момента может принимать как положительные так и отрицательные значения. Наряду с Лоренцевским моментом сохраняется одна из проекций момента, что в свою очередь приводит к редукции движения на двумерную поверхность. При этом для положительных значений момента движение имеет место на двух-полостном гиперboloиде в то время как для отрицательных значений момента на однополостном. Во втором параграфе определены потенциалы Кеплера - Кулона и гармонического осциллятора, которые имеют вид гиперболических (соответственно $\coth \tau$ или $\tanh^2 \tau$) или тригонометрических (соответственно $\cot \chi$ или $\tan^2 \chi$) функций от геодезического угла в зависимости от того в какой части гиперboloида происходит движение. Найдены классические аналоги вектора Рунге-Ленца-Лапласа и тензор Демкова соответственно. На терминах скобок Пуассона построена нелинейная динамическая алгебра симметрии, так называемая алгебра Хиггса. Третий параграф посвящен интегрированию уравнения Гамильтона - Якоби для потенциала гармонического осциллятора. Подробно исследованы всевозможные случаи движения в зависимости от значения момента L^2 и энергии системы E . Показано, что конечные периодические траектории существуют при любых значениях момента L^2 (положительных или отрицательных) и представляют собой эллипсы центр которых совпадает с центром потенциала ($\tau = 0$ или $\chi = 0$). Найдено,

что период движения по замкнутым орбитам зависит кроме частоты также от энергии и кривизны пространства. Незамкнутые траектории представляют собой эквидистанты и ультраэллипсы, введенные ранее в работе [94]. В четвертом параграфе рассмотрено классическое движение в кеплеровском поле. В отличие от гармонического осциллятора исследовались только случаи положительных значений Лоренцовского момента. Построены ограниченные траектории движения, которые представляют собой эллипсы в одном из фокусов которого находится притягивающий центр и неограниченные траектории имеющие вид гипербол или парабол. Показано что при движении в кеплеровском поле на H_2^2 имеют место все три закона Кеплера.

Во второй главе диссертации рассмотрена квантовая задача движения в поле гармонического осциллятора и Кеплера - Кулона на $SO(2, 2)$ гиперboloиде. Показано, что при переходе от классической к квантовой механике положительным значениям Лоренцевского момента соответствует дискретный спектр $L^2 > 0$ (соответствующая дискретной серии представлений группы $SO(2, 1)$), а при отрицательных значениях непрерывный прерывный спектр (соответствующая главной серии представлений группы $SO(2, 1)$). Выписан квантовый аналог вектора Рунге-Ленца и тензора Демкова. Построена алгебра симметрии, которая как в классическом случае представляет собой кубическую алгебру Хиггса. Далее в контексте разделения переменных в псевдо-сферической системе координат решена задача Шредингера на собственные функции и собственные значения (как для дискретного так и непрерывного спектров) для потенциалов гармонического осциллятора на H_2^2 при положительных значениях квантового момента $L^2 > 0$. Показано, что для обеих задач существует конечное число уровней энергии (спектр значений главного квантового числа ограничен сверху и снизу для кулоновской и осцилляторных задач $0 \leq n < n_{max} = [\sqrt{R\mu}]$ и $0 \leq N < N_{max} = [\sqrt{R\omega^2 R^4 + 1/4} - 3/2]$ соответственно) вырожденных по угловому квантовому числу и бесконечно-кратно вырожденных по азимутальному квантовому числу. Случай $L^2 > 0$ не рассматривался, так как полученное с помощью разделения переменных в псевдо-сферических координатах одномерное квази-радиальное уравнение содержит сингулярные слагаемые, что в свою очередь сильно затрудняет решение спектральной задачи. Вместо этого, к решению задачи о гармоническом осцилляторе привлечены две другие системы координат - эквидистантная и цилиндрическая система координат, которые полностью покрывают H_2^2 гиперboloид. Отметим также, что при контракциях к плоскому пространству, то есть предельном переходе $R \rightarrow \infty$ эквидистантная и цилиндрическая система координат на H_2^2 переходит в декартовую и цилиндрическую системы координат на $E_{1,2}$ соответственно. Полностью решена спектральная задача соответствующая разделению переменных в эквидистантной и цилиндрической системах координат для обеих потенциалов. Показано, что в этом случае дискретный спектр энергии неограничен снизу но ограничен сверху. Далее применяя метод асимптотик, изложенный в книге [27] вычислены межбазисные коэффициенты для переходов между эквидистантными и цилиндри-

ческими волновыми функциями в дискретном спектре. Показано, что соответствующие коэффициенты совпадают с полиномами Хана дискретной переменной.

Третья глава диссертации посвящена в основном исследованию классическому и квантовому движению в поле Кеплера - Кулона на однополосом гиперboloиде. Как показал в свое время Гроше, потенциал кеплера-кулона выражается имеет форму $V(\tanh \tau) = -(\alpha/R) \tanh \tau$ и не является сингулярным в точке $\tau = 0$ (то есть является решением уравнения Лапласа но не Пуассона). Как и в случае с $SO(2, 2)$ гиперboloидом построены дополнительные интегралы движения аналоги вектора Рунге-Ленца-Лапласа, сформирована алгебра симметрии (кубическая алгебра Хиггса), найдено решение уравнение Гамильтона - Якоби в псевдо-сферической системе координат, полностью покрывающей поверхность однополостного гиперboloида, и установлены классические траектории движения (замкнутые орбиты для отрицательных значений энергии и неограниченные траектории в одну или обе стороны для положительных). В квантовом случае, в рамках подхода разработанного Титчмаршем [107] решена задача о разложении произвольной функции на однополосом гиперboloиде $SO(3, 1)$ по полной системе псевдо-сферических кулоновских волновых функциях. Найдено решение уравнения Шредингера для кулоновского потенциала в эллиптико-параболической системе координат для дискретного спектра энергий. Вычислены коэффициенты межбазисных разложений для переходов между псевдо-сферическими и эллиптико-параболическими волновыми функциями, которые выражаются через коэффициенты Вильсона. Для гармонического осциллятора решена задача о смешанных межбазисных разложениях дискретного и непрерывного спектров для гармонического осциллятора на двух-полосом гиперboloиде $SO(3, 1)$. Показано что соответствующие коэффициенты разложений выражаются через полиномы Рака и Вильсона.

Заключение диссертации содержит перечень выдвигаемых к защите результатов. В математическое дополнение включены формулы часто используемые в тексте.

Работы [101, 102, 103, 104, 105, 106], на основе которых написана настоящая диссертация докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики, на многочисленных международных конференциях (14-ая международная конференция по Методам симметрий в физике Тсахкадзор, август 2010, 16-ая конференция по Методам симметрий в физике Дубна, октябрь 2014, 30-ый Теоретико-групповой коллоквиум, Гент, июль 2014, 9-ый симпозиум Квантовые теории и симметрии, Ереван, июль 2015 и др.).

В заключении мне приятно поблагодарить профессоров В.В.Воронова и А.П.Исаева за предоставленную возможность работать в Лаборатории теоретической физики. Я также благодарен Г.С.Погосяну за руководство работой и Е.Калнинсу, Ю.Курочкину, В.Отчику, Л.Мардоян, С.Винитскому и С.Кривоносу за многие полезные обсуждения.

Глава 1

Классическое движение на $SO(2, 2)$ гиперболоиде

Данная глава направлена на изучение двух Бертрановских систем, системы гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона, на гиперболоиде постоянной кривизны H_2^2 с точки зрения классической механики. После общего введения в свойства пространства H_2^2 , будут представлены потенциалы для соответствующих систем и будут обсуждены связанные с ними интегралы движения. Для изучения систем мы воспользуемся стандартным методом решения уравнения Гамильтона-Якоби. Нашей задачей будет нахождение уравнений движения для обеих систем и построение траекторий движения для всех возможных случаев.

1.1 Гиперболическое пространство H_2^2 и константы движения

Трёхмерный гиперболоид $H_2^2 \subset \mathbf{R}_{2,2}$ описывается уравнением

$$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2 \quad (1.1)$$

Точнее говоря мы параметризуем гиперболоид (1.1) используя геодезические псевдосферические координаты (r, τ, φ) [101, 26], а именно

$$z_0 = \pm R \cosh r, \quad z_1 = R \sinh r \sinh \tau, \quad z_2 = R \sinh r \cosh \tau \cos \varphi, \quad z_3 = R \sinh r \cosh \tau \sin \varphi, \quad (1.2)$$

где $r \geq 0$ это “геодезический радиальный угол”, $\tau \in (-\infty, \infty)$, и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Связь между двумя наборами координат $z_0 \rightarrow -z_0$ соответствует комплексному преобразованию радиального угла $r \rightarrow i\pi - r$. Система координат (1.2) действительна только для $|z_0| \geq R$ и отсутствующая часть поверхности для $|z_0| < R$ может быть учтена если использовать другой вид псевдо-радиальных координат

$$z_0 = \pm R \cos \chi, \quad z_1 = R \sin \chi \cosh \mu, \quad z_2 = R \sin \chi \sinh \mu \cos \varphi, \quad z_3 = R \sin \chi \sinh \mu \sin \varphi, \quad (1.3)$$

где на этот раз $\chi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\mu \in (-\infty, \infty)$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Легко так же видеть, что псевдосферические системы координат (1.2) и (1.3) связаны соотношениями

$$r \rightarrow i\chi \quad \tau \rightarrow \mu - i\pi/2. \quad (1.4)$$

Далее будем пользоваться псевдо-сферической системой координат в виде (1.2). Для изучения движения в области $|z_0| \leq R$, везде ниже, будем использовать преобразования (1.4).

Ограничение псевдо-евклидовой метрики $ds^2 = G_{\mu\nu}dz^\mu dz^\nu$, $G_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1)$, ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) на $\mathbf{R}_{2,2}$ для H_2^2 ведет к следующей формуле

$$\frac{ds^2}{R^2} = dr^2 - \sinh^2 r d\tau^2 + \sinh^2 r \cosh^2 \tau d\varphi^2$$

В таком случае кинетическая энергия даётся формулой

$$\mathcal{T} = \frac{R^2}{2} (\dot{r}^2 - \sinh^2 r (\dot{\tau}^2 - \cosh^2 \tau \dot{\varphi}^2))$$

и канонический импульс может быть получен обычным способом

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{r}} = R^2 \dot{r}, \quad p_\tau = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\tau}} = -R^2 \sinh^2 r \dot{\tau}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\varphi}} = R^2 \sinh^2 r \cosh^2 \tau \dot{\varphi}$$

Следовательно свободный гамильтониан в псевдо-сферическом фазовом пространстве $(r, \tau, \varphi; p_r, p_\tau, p_\varphi)$ с учетом канонических скобок Ли-Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (1.5)$$

имеет вид

$$\mathcal{H}_{free} = \frac{1}{2R^2} \left\{ p_r^2 - \frac{1}{\sinh^2 r} \left(p_\tau^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} \right) \right\}. \quad (1.6)$$

Ясно что группа изометрии для H_2^2 гиперboloида даётся группой $SO(2, 2)$. Соответствующая алгебра Ли шестимерна. Генераторы $so(2, 2)$ алгебры могут быть записаны в терминах охватывающего пространства $\mathbf{R}_{2,2}$ координат z_μ и импульса p_μ как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -(z_2 p_3 - z_3 p_2), & \mathcal{L}_2 &= -(z_1 p_3 + z_3 p_1), & \mathcal{L}_3 &= (z_1 p_2 + z_2 p_1), \\ \mathcal{N}_1 &= (z_0 p_1 - z_1 p_0), & \mathcal{N}_2 &= -(z_0 p_2 + z_2 p_0), & \mathcal{N}_3 &= -(z_0 p_3 + z_3 p_0), \end{aligned} \quad (1.7)$$

и скобки Ли-Пуассона (1.5) с помощью трёхмерной метрики $\bar{g}_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1\}$ дадут

$$\{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j\} = \bar{g}_{im} \bar{g}_{jn} \varepsilon_{mnk} \mathcal{L}_k, \quad \{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j\} = \bar{g}_{im} \bar{g}_{jn} \varepsilon_{mnk} \mathcal{L}_k, \quad \{\mathcal{N}_i, \mathcal{L}_j\} = \bar{g}_{im} \bar{g}_{jn} \varepsilon_{mnk} \mathcal{N}_k,$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$. Существуют два инварианта Казимира, первый из которых исчезает в реализации (1.7):

$$\mathcal{C}_1 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{L} = \bar{g}_{ik} \mathcal{N}_i \mathcal{L}_k = \mathcal{N}_1 \mathcal{L}_1 - \mathcal{N}_2 \mathcal{L}_2 - \mathcal{N}_3 \mathcal{L}_3 = 0, \quad (1.8)$$

а второй это

$$\mathcal{C}_2 = N^2 + L^2, \quad (1.9)$$

где

$$N^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \bar{g}_{ik} \mathcal{N}_i \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_1^2 - \mathcal{N}_2^2 - \mathcal{N}_3^2, \quad L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \bar{g}_{ik} \mathcal{L}_i \mathcal{L}_k = \mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_3^2. \quad (1.10)$$

Следующим шагом является расчёт связи между охватывающим импульсом и геодезическо-полярным. Учитывая четырёхмерный канонический импульс p_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^\mu} = G_{\mu\nu} \dot{z}^\nu, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu,$$

где \mathcal{L} кинетическая энергия в охватывающем пространстве $\mathbf{R}_{2,2}$, мы получаем что

$$\begin{aligned} R \cdot p_0 &= -R \cdot \frac{\partial z_0}{\partial t} = -\sinh r p_r, \\ R \cdot p_1 &= -R \cdot \frac{\partial z_1}{\partial t} = -\cosh r \sinh \tau p_r + \frac{\cosh \tau}{\sinh r} p_\tau, \\ R \cdot p_2 &= R \cdot \frac{\partial z_2}{\partial t} = \cosh r \cosh \tau \cos \varphi p_r - \frac{\sinh \tau \cos \varphi}{\sinh r} p_\tau - \frac{\sin \varphi}{\sinh r \cosh \tau} p_\varphi, \\ R \cdot p_3 &= R \cdot \frac{\partial z_3}{\partial t} = \cosh r \cosh \tau \sin \varphi p_r - \frac{\sinh \tau \sin \varphi}{\sinh r} p_\tau + \frac{\cos \varphi}{\sinh r \cosh \tau} p_\varphi. \end{aligned}$$

Тогда генераторы (1.7) на языке геодезических псевдо-сферических координатах и импульсов даются формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= -\sinh \tau p_r + \cosh \tau \coth r p_\tau, \\ \mathcal{N}_2 &= -\cosh \tau \cos \varphi p_r + \coth r \sinh \tau \cos \varphi p_\tau + \frac{\coth r \sin \varphi}{\cosh \tau} p_\varphi, \\ \mathcal{N}_3 &= -\cosh \tau \sin \varphi p_r + \coth r \sinh \tau \sin \varphi p_\tau - \frac{\coth r \cos \varphi}{\cosh \tau} p_\varphi, \\ \mathcal{L}_3 &= -\cos \varphi p_\tau + \frac{\sin \varphi}{\coth \tau} p_\varphi, \\ \mathcal{L}_2 &= -\sin \varphi p_\tau - \frac{\cos \varphi}{\coth \tau} p_\varphi, \\ \mathcal{L}_1 &= p_\varphi. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя теперь уравнения (1.9), (1.10) и (1.11) легко видеть, что второй оператор Казимира \mathcal{C}_2 связан со свободным Гамильтонианом (1.6) как $\mathcal{C}_1 = -2R^2 \mathcal{H}_{free}$. Таким образом все величины (1.11) коммутируют по Пуассону со свободным Гамильтонианом (1.6) и являются постоянными движения. Из семи интегралов движения $\{\mathcal{H}_{free}, \mathcal{N}_i, \mathcal{L}_i\}$ только пять функционально независимы, из за соотношения (1.9) и ограничения (1.8). Таким образом

геодезическое движение с Гамильтонианом (1.6) оказывается *максимально суперинтегрируемой системой*.

Рассмотрим сферически симметричную модель, а именно Гамильтониан $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{free} + \mathcal{V}(r)$, где \mathcal{H}_{free} даётся формулой (1.6) и $\mathcal{V}(r)$ это функция потенциала. Очевидно, что уравнение Гамильтона-Якоби $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ для любого центрального потенциала допускает разделение переменных в псевдо-сферических системах координат (1.2) (и (1.3))¹. Псевдо-сферическая система координат соответствует подгрупповой цепочке $SO(2, 2) \supset SO(2, 1) \supset SO(2)$. Таким образом, центрально симметричный Гамильтониан \mathcal{H} подразумевает закон сохранения вектора $\mathbf{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ со скалярным произведением (1.8), который можно интерпретировать как Лоренцевской “угловой момент”. В частности первая компонента углового момента $\mathcal{L}_1 = p_\varphi$ и L^2 :

$$L^2 = \mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_3^2 = - \left(p_\tau^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} \right), \quad (1.12)$$

вместе с Гамильтонианом \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2R^2} \left\{ p_r^2 + \frac{L^2}{\sinh^2 r} \right\} + \mathcal{V}(r),$$

образуют взаимно Пуассоново-коммутирующую систему констант движения. Как следует из уравнения (1.12): $p_\varphi^2 / \cosh^2 \tau - L^2 \geq 0$, величина L^2 , в отличие от движения в Евклидовом пространстве (или сфере и двухполосом гиперboloиде), может принимать не только положительные и нулевое, а также отрицательные значения. Другая разница заключается в том, что при фиксированных значениях L^2 : $p_\varphi^2 \geq L^2$. Существование дополнительной независимой константы движения \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_3 тогда не является независимым) означает что задача по меньшей мере одинарно вырождена и траектории расположены на двухмерных поверхностях. Для случая положительных L^2 подставляя $\tau = 0$, или $L^2 = p_\varphi^2$, получаем движения которое происходит на двухмерном подпространстве, а именно на двух-полосом гиперboloиде $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$, в то время как для отрицательных L^2 , можем положить $\varphi = 0$ или $p_\varphi^2 = 0$, и мы ограничимся одно-полосым гиперboloидом. $z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = R^2$.

В случае $|z_0| < R$ формулы для $so(2, 2)$ генераторов (1.11) изменяются соответственно преобразованию (1.4). Имеем

$$L^2 = - \left(p_\mu^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sinh^2 \mu} \right).$$

Следовательно благодаря этой связи, L^2 принимает только отрицательные значения. Без потери общности можем выбрать $\varphi = 0$ или $p_\varphi^2 = 0$ и движения на H_2^2 опять ограничатся на одно-полосом гиперboloиде $z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = R^2$.

¹Кроме псевдо-сферической системы координат (1.2) уравнение Гамильтона-Якоби $\mathcal{H}_{free} = \mathcal{E}$ и свободное уравнение Шредингера на H_2^2 гиперboloиде допускает разделение переменных дополнительно в 70 ортогональных системах координат (см. для деталей [26]).

1.2 Потенциал гармонического осциллятора

Рассмотрим на данном этапе сферическо-симметричную модель, именно модель системы гармонического осциллятора. В статье [103] мы распространили Евклидовый потенциал изотропного гармонического осциллятора с частотой ω на наше пространство H_2^2 , которое даётся

$$V^{osc} = \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(\frac{z_2^2 + z_3^2 - z_1^2}{z_0^2} \right) = \begin{cases} \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r, & |z_0| \geq R \\ -\frac{\omega^2 R^2}{2} \tan^2 \chi, & |z_0| \leq R. \end{cases} \quad (1.13)$$

Соответствующим образом Гамильтониан может быть записан как

$$\mathcal{H}^{osc} = \frac{1}{2R^2} \left(p_r^2 + \frac{L^2}{\sinh^2 r} \right) + \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r, \quad (1.14)$$

для $|z_0| \geq R$ и

$$\mathcal{H}^{osc} = -\frac{1}{2R^2} \left(p_\chi^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \chi} \right) - \frac{\omega^2 R^2}{2} \tan^2 \chi, \quad (1.15)$$

для $|z_0| \leq R$.

Гамильтониан системы гармонического осциллятора, кроме углового момента \mathbf{L} имеет дополнительный интеграл движения квадратичный по импульсу, который связан с генераторами $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3)$, так называемый тензор Демкова-Фрадкина [13, 108]:

$$\mathcal{D}_{ik} = \frac{1}{R^2} N_i N_k + \omega^2 R^2 \frac{z_i z_k}{z_0^2}, \quad \mathcal{D}_{ik} = \mathcal{D}_{ki} \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Компоненты тензора \mathcal{D}_{ik} коммутируют по Пуассону с Гамильтонианом гармонического осциллятора (1.14) и (1.56), но не обязательно друг с другом. В псевдо-сферических координатах диагональные компоненты тензора имеют вид

$$\mathcal{D}_{11} = \frac{\mathcal{N}_1^2}{R^2} + \omega^2 R^2 \sinh^2 \tau \tanh^2 r, \quad \mathcal{D}_{22} = \frac{\mathcal{N}_2^2}{R^2} + \omega^2 R^2 \cosh^2 \tau \cos^2 \varphi \tanh^2 r,$$

$$\mathcal{D}_{33} = \frac{\mathcal{N}_2^2}{R^2} + \omega^2 R^2 \cosh^2 \tau \sin^2 \varphi \tanh^2 r,$$

и Гамильтониан может быть записан следующим образом

$$\mathcal{H}^{osc} = -\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22} + \mathcal{D}_{33} - \frac{L^2}{2R^2}. \quad (1.16)$$

В дополнение к этому, тензор Демкова-Фрадкина имеет алгебраические свойства

$$\sum_i \mathcal{L}_i \mathcal{D}_{ik} = \sum_i \mathcal{D}_{ki} \mathcal{L}_i = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.17)$$

Ясно, что десять интегралов движения $\{\mathcal{H}, \mathcal{L}_i, \mathcal{D}_{ik}\}$ не могут быть функционально независимы из за связей (1.16) и (1.17), и потому что

$$\{\mathcal{L}_1 \mathcal{D}_{11}\} = \{\mathcal{L}_2 \mathcal{D}_{22}\} = \{\mathcal{L}_3 \mathcal{D}_{33}\} = 0.$$

Только пять интегралов движения, которые могут быть выбраны как $\{\mathcal{H}, L^2, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{D}_{33}\}$, являются функционально независимыми. Таким образом \mathcal{H}^{osc} максимально суперинтегрируемый Гамильтониан. Компоненты углового момента и тензора Демкова-Фрадкина формируют квадратичную алгебру. Ненулевые скобки Пуассона приведены в Дополнении.

В пределе контракции $R \rightarrow \infty$ гиперболическое пространство H_2^2 превращается в пространство Минковского \mathbf{M}^{2+1} . Перейдем к Бельтрамовым координатам

$$x_i = R \frac{z_i}{z_0} = R \frac{z_i}{\sqrt{R^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1^2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.18)$$

Тогда, в пределе $R \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V^{osc}(r) = \frac{\omega^2}{2} (-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

что можно интерпретировать как потенциал гармонического осциллятора в \mathbf{M}^{2+1} пространстве Минковского (x_1, x_2, x_3) .

1.3 Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби

Уравнение Гамильтона-Якоби связанное с Гамильтонианом (1.14) получается после замены $p_{\mu_i} \rightarrow \partial S / \partial \mu_i$, где $\mu_i = (r, \tau, \varphi)$. Следствия получаем

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} + \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r = E.$$

Это уравнение полностью разделимо, и координата φ циклична, и мы будем искать решение классического действия $S(r, \tau, \varphi, t)$ в виде

$$S(r, \tau, \varphi, t) = -Et + p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\tau),$$

и получим

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} = -L^2, \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r + \frac{L^2}{2R^2 \sinh^2 r} = E, \quad (1.20)$$

“Квази радиальное” уравнение (1.20) описывает одномерное движение в поле с эффективным потенциалом

$$U_{eff}(r) = \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r + \frac{L^2}{2R^2 \sinh^2 r}. \quad (1.21)$$

При больших $r \sim \infty$ эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ стремится к постоянному значению, равному $\omega^2 R^2/2$, тогда как поведение в точке $r = 0$ определяется угловым моментом L^2 .

В случае $0 \leq L^2 < \omega^2 R^4$ потенциал (1.21) имеет минимум в точке $r_0 = \tanh^{-1} \sqrt[4]{L^2/\omega^2 R^4}$ (см Рис. 1.1), и в этой точке

$$0 \leq U_{eff}(r_0) = \omega\sqrt{L^2} - \frac{L^2}{2R^2} < \frac{\omega^2 R^2}{2}, \quad (1.22)$$

где равенство возможно только при $L^2 = 0$. Для $A \geq \omega^2 R^4$ потенциал $U_{eff}(r)$ отталкивающий на всей полуоси $r \in [0, \infty)$ (см Рис.(1.2). В случае отрицательного A эффективный потенциал (1.22) притягивающий и имеет сингулярность для маленьких r как $\sim r^{-2}$ (см Рис.(1.3).

Для области $|z_0| < R$ дифференциальные уравнения (1.19) и (1.20) преобразуются в следующие

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_2}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sinh^2 \mu} &= -L^2, \\ \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \chi}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{2} \tan^2 \chi + \frac{L^2}{2R^2 \sin^2 \chi} &= -E, \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что L^2 принимает отрицательные значения $L^2 < 0$. По этой причине, мы учитываем движение в области $|z_0| < R$ рассматривая случай для отрицательной L^2 .

Интегрируя уравнения (1.19) и (1.20) получим

$$S_1(r) = \int \sqrt{2R^2 E - \omega^2 R^4 \tanh^2 r - \frac{L^2}{\sinh^2 r}} dr, \quad (1.23)$$

$$S_2(\tau) = \int \sqrt{-L^2 + \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau}} d\tau. \quad (1.24)$$

Поскольку нас интересуют только траектории, будем следовать обычной процедуре [109] и рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_1}{\partial E} - t = -t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial L^2} = \frac{\partial S_1}{\partial L^2} + \frac{\partial S_2}{\partial L^2} = \beta, \quad \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial p_\varphi} = \varphi_0 \quad (1.25)$$

где t_0 , φ_0 и β константы.

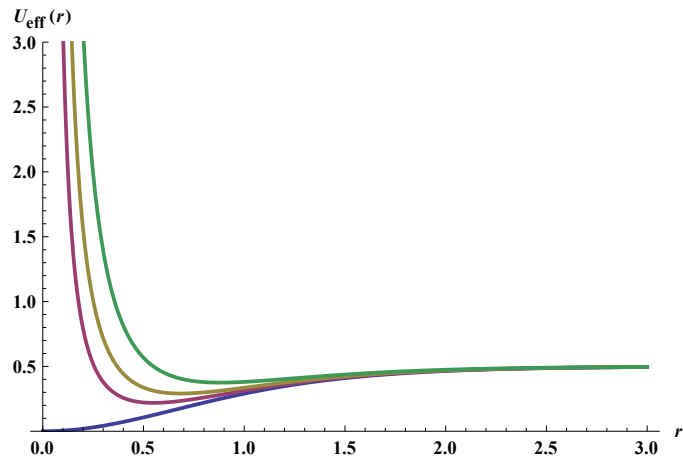


Рис. 1.1: Эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ в случае $0 \leq L^2 < \omega^2 R^4$ для значений $L^2 = 0, 1/16, 1/8, 1/4$; ($\omega = R = 1$).

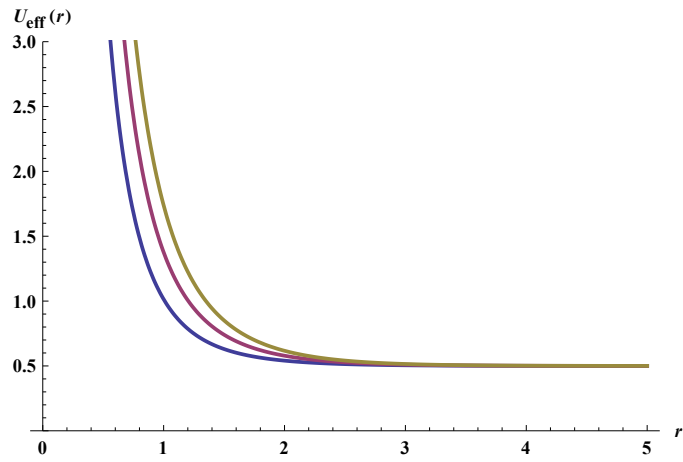


Рис. 1.2: Эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ в случае $L^2 \geq \omega^2 R^4$ для значений $L^2 = 2, 3, 4$; ($\omega = R = 1$).

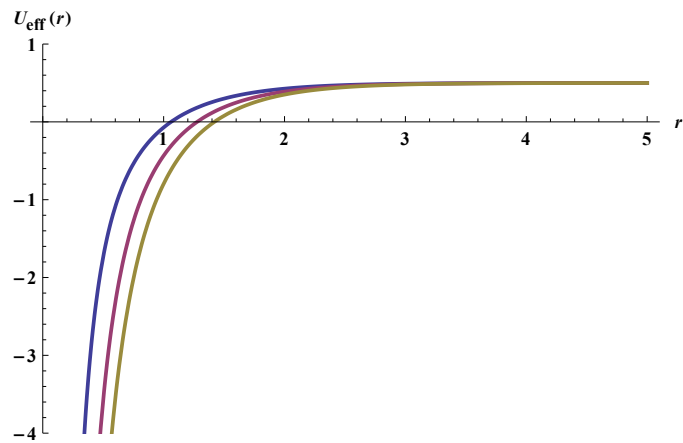


Рис. 1.3: Эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ в случае $L^2 < 0$ для значений $L^2 = -1, -2, -3$; ($\omega = R = 1$).

1.3.1 Интегрирование квази-радиальной части

Из уравнений (1.23) и (1.25) получим что

$$t - t_0 = \frac{1}{\omega} \int \frac{\tanh r dr}{\sqrt{-\tanh^4 r + 2(E/\omega^2 R^2 + L^2/2\omega^2 R^4) \tanh^2 r - L^2/\omega^2 R^4}}. \quad (1.26)$$

Ниже отдельно рассмотрим все четыре случая: $0 < L^2 < \omega^2 R^4$, $L^2 \geq \omega^2 R^4$, $L^2 < 0$ и $L^2 = 0$.

1. Случай $0 < L^2 < \omega^2 R^4$. Для корней подкоренного выражения в знаменателе (1.26) имеем

$$X_{1,2} = \frac{(2R^2 E + L^2) \pm \sqrt{(2R^2 E + L^2)^2 - 4L^2 \omega^2 R^4}}{2\omega^2 R^4}, \quad (1.27)$$

где $X = \tanh^2 r \in [0, 1]$. Очевидно, что подкоренное выражение в (1.27) положительно для всех значений энергии $E > E_{min} = U_{eff}(r_0)$ и равно нулю для $E = E_{min}$. Таким образом корни $X_{1,2}$ ($X_1 \leq X_2$) положительны. Легко видеть, что для $E_{min} \leq E < \omega^2 R^2/2$ оба корня удовлетворяют неравенству $0 < X_1 < X_2 < 1$. При $E \geq \omega^2 R^2/2$: $0 < X_1 < 1 \leq X_2$ и равенство $X_2 = 1$ возможно только для $E = \omega^2 R^2/2$. Связанное движение существует исключительно для $E_{min} \leq E < \omega^2 R^2/2$. Ниже раздельно рассмотрим все возможные случаи, а именно: $E_{min} < E < \omega^2 R^2/2$, $E = E_{min}$, $E > \omega^2 R^2/2$ and $E = \omega^2 R^2/2$.

А. Производя интегрирование в формуле (1.26) получим для $E_{min} < E < \omega^2 R^2/2$

$$\begin{aligned} 2\omega^2 R^2 \sinh^2 r &= (1 - 2E/\omega^2 R^2)^{-1} \left\{ (2E - L^2/R^2) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(2E + L^2/R^2)^2 - 4L^2 \omega^2} \sin[2\omega \sqrt{1 - 2E/\omega^2 R^2} (t - t_0)] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом движение связано и периодически, с периодом

$$T = \frac{\pi}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1 - 2E/\omega^2 R^2}}, \quad (1.28)$$

и в отличии от движения в евклидовом пространстве, зависит от энергии частицы E . В конструкционном пределе $R \rightarrow \infty$ “плоские” траектории для значений энергии $E_{min} < E < \infty$

$$r^2 = \frac{E}{\omega^2} (1 + \sin[2\omega(t - t_0)]),$$

также периодичны, с периодом $T = \frac{\pi}{\omega}$

В. В случае минимальной энергии: $E = E_{min} = U_{eff}(r_0)$ или $E_{min} = \omega \sqrt{L^2} - L^2/2R^2$ интеграл в (1.26) неопределен и мы должны решать напрямую уравнение (1.20). Из уравнения (1.20) получаем

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 = - \left(\sqrt{L^2} \coth r - \sqrt{\omega^2 R^4} \tanh r \right)^2 \geq 0,$$

или $\partial S_1/\partial r = 0$ и $\tanh^2 r = \sqrt{L^2/\omega^2 R^4}$. Вследствии

$$r = \tanh^{-1} \left(\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{2E}{\omega^2 R^2}}} \right), \quad (1.29)$$

т.е. траектории являются кругами. Здесь из двух значений $\sqrt{L^2}$ позволенных уравнением $E = U_{eff}(r_0)$, выбираем меньший $\sqrt{L^2} = \omega R^2 \left(1 - \sqrt{1 - 2E/\omega^2 R^2}\right)$, потому что оно удовлетворяет условию $0 < L^2 < \omega^2 R^4$. В случае контракционного предела $R \rightarrow \infty$ получим $E = E_{min} = \omega \sqrt{L^2}$ и $r = \sqrt{E}/\omega$.

С. В случае $E > \omega^2 R^2/2$ получим после интегрирования в (1.26)

$$\begin{aligned} 2\omega^2 R^2 \sinh^2 r &= (2E/\omega^2 R^2 - 1)^{-1} \left\{ (L^2/R^2 - 2E) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(2E + L^2/R^2)^2 - 4L^2\omega^2} \cosh[2\omega \sqrt{2E/\omega^2 R^2 - 1}(t_0 - t)] \right\}, \quad (1.30) \end{aligned}$$

т.е., движения не связано.

Д. Для граничного случая $E = \omega^2 R^2/2$ корнями знаменателя являются $X_1 = L^2/\omega^2 R^4$, $X_2 = 1$, таким образом $L^2/\omega^2 R^4 < \tanh^2 r < 1$ и движение не связано, так как $\operatorname{arctanh}(L^2/\omega^2 R^4) < r < \infty$. Интегрирование в (1.26) даёт нам

$$\cosh^2 r = (1 - L^2/\omega^2 R^4)^{-1} + \omega^2 (1 - L^2/\omega^2 R^4) (t - t_0)^2. \quad (1.31)$$

2. Рассмотрим теперь случай $L^2 \geq \omega^2 R^4$ (см. Рис. (1.2)). Из уравнения (1.26) получаем, что единственное возможное значение для энергии это $E > \omega^2 R^2/2$ и корни удовлетворяют неравенству $0 < X_1 < 1 < X_2$. Таким образом, уравнение движения определяется формулой (1.30). Движение частицы ограничено только точкой $r_{min} = \tanh^{-1} \sqrt{X_1}$ т.е. оно имеет возможность уйти на бесконечность.

3. Рассмотрим в конце случай $L^2 < 0$. Из уравнения (1.26) имеем, что корнями знаменателя являются

$$X_{1,2} = \frac{(2ER^2 - |L^2|) \pm \sqrt{(2ER^2 - |L^2|)^2 + 4|L^2|\omega^2 R^4}}{2\omega^2 R^4}$$

где опять $X = \tanh^2 r \in [0, 1]$. Можно заметить, что $X_1 < 0 < X_2$ не зависимо от значений L^2 и энергии E . Для области $E \geq \omega^2 R^2/2$ один из корней $X_2 > 1$, и подкоренное выражение положительно для любого значения r , включая точку $r = 0$: $r \in [0, \infty)$. Такая же ситуация и для области $E < \omega^2 R^2/2$, где $r \in [0, \tanh^{-1} \sqrt{X_2}]$. Таким образом для L^2 частица может перейти из области $z_0 \geq R$ в $0 \leq z_0 \leq R$.

Производя интегрирование в (1.26), имеем для $E < \omega^2 R^2/2$

$$\begin{aligned} \sinh^2 r &= \frac{2R^2 E + |L^2|}{2R^2(\omega^2 R^2 - 2E)} \\ &+ \frac{\sqrt{(2R^2 E - |L^2|)^2 + 4|L^2|\omega^2 R^4}}{2R^2(\omega^2 R^2 - 2E)} \sin \left[2\omega \sqrt{1 - 2E/\omega^2 R^2} (t - t_0) \right] \end{aligned} \quad (1.32)$$

в то время как для $E > \omega^2 R^2$

$$\begin{aligned} \sinh^2 r &= \frac{2R^2 E + |L^2|}{2R^2(\omega^2 R^2 - 2E)} \\ &+ \frac{\sqrt{(2R^2 E - |L^2|)^2 + 4|L^2|\omega^2 R^4}}{2R^2(2E - \omega^2 R^2)} \cosh \left[2\omega \sqrt{2E/\omega^2 R^2 - 1} (t - t_0) \right] \end{aligned} \quad (1.33)$$

Из формулы (1.32) следует, что движение для $E < \omega^2 R^2/2$ связано и периодически с периодом (1.28). Ниже мы построим связанные траектории, лежащие на всем гиперблоиде, то есть не только в области $|z_0| \geq R$, но также $|z_0| \leq R$. В случае когда $E = \omega^2 R^2$ интегрирование в (1.26) ведет, с точностью замены $L^2 \rightarrow -|L^2|$, к результату похожему на формулу (1.31).

В граничном случае $L^2 = 0$ формулы (1.32), (1.33) and (1.31) упрощаются. Для $0 < E < \omega^2 R^2/2$ получаем

$$\sinh^2 r = \frac{2E/\omega^2 R^2}{1 - 2E/\omega^2 R^2} \cos^2 \left(\omega \sqrt{1 - 2E/\omega^2 R^2} (t - t_0) - \frac{\pi}{4} \right),$$

в то время как для $E > \omega^2 R^2/2$

$$\sinh r = \sqrt{\frac{2E/\omega^2 R^2}{2E/\omega^2 R^2 - 1}} \sinh \left(\omega \sqrt{2E/\omega^2 R^2 - 1} (t_0 - t) \right).$$

В конце для $E = \omega^2 R^2/2$ получаем $\sinh r = \omega(t - t_0)$.

1.3.2 Интегрирование угловой части

1. Сначала рассмотрим случай когда $L^2 \geq 0$. Из (1.23) и (1.24) получаем

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dr}{\sinh^2 r \sqrt{2R^2 E - \omega^2 R^4 \tanh^2 r - L^2/\sinh^2 r}}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial L^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\sqrt{-L^2 + p_\varphi^2/\cosh^2 \tau}}. \quad (1.35)$$

Интегралы могут быть легко просчитаны и дают [110]

$$\frac{\partial S_2}{\partial L^2} = -\frac{1}{\sqrt{4L^2}} \arcsin \left[\frac{\sinh \tau}{\sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1}} \right],$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = \frac{1}{4\sqrt{L^2}} \arcsin \left[\frac{2L^2 \coth^2 r - (2ER^2 + L^2)}{\sqrt{(2ER^2 + L^2)^2 - 4L^2\omega^2 R^4}} \right].$$

Здесь мы требуем

$$-\sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1} < \sinh \tau < \sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1},$$

и

$$|2A \coth^2 r - (2ER^2 + L^2)| < \sqrt{(2ER^2 + L^2)^2 - 4L^2\omega^2 R^4}. \quad (1.36)$$

Условие (1.36) эквивалентно $z_1 < \coth r < z_2$, где $z_{1,2}$ корни знаменателя в интеграле (1.34):

$$z_{1,2} = \frac{(2ER^2 + L^2) \pm \sqrt{(2ER^2 + L^2)^2 - 4A\omega^2 R^4}}{2L^2}, \quad E \geq E_{min} = \omega\sqrt{L^2} - L^2/2R^2.$$

Окончательное условие $z_2 > 1$ подразумевает что $L^2 > \omega^2 R^4$ и $E > \omega^2 R^2/2$ или $0 < L^2 < \omega^2 R^4$ и $E > E_{min}$.

Вследствии этого для $\partial S/\partial A$ имеем

$$\frac{\partial S}{\partial L^2} = \frac{1}{4\sqrt{L^2}} \left\{ \arcsin \left[\frac{2L^2 \coth^2 r - (2ER^2 + L^2)}{\sqrt{(2ER^2 + L^2)^2 - 4L^2\omega^2 R^4}} \right] - 2 \arcsin \left[\frac{\sinh \tau}{\sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1}} \right] \right\} = \beta. \quad (1.37)$$

Далее, из (1.24) и (1.25) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \varphi + \int \frac{p_\varphi d\tau}{\cosh^2 \tau \sqrt{-L^2 + p_\varphi^2/\cosh^2 \tau}} = \varphi + \arcsin \frac{\tanh \tau}{\sqrt{1 - L^2/p_\varphi^2}} = \varphi_0, \quad (1.38)$$

и в результате

$$\tanh \tau = \sqrt{1 - L^2/p_\varphi^2} \sin(\varphi_0 - \varphi). \quad (1.39)$$

2. Рассмотрим интегрирование в формулах (1.34), (1.35) и (1.38) в случае $L^2 < 0$. Вместо уравнения (1.37) получим [110]

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial L^2} &= \frac{1}{4\sqrt{|L^2|}} \left\{ \operatorname{arccosh} \left[\frac{2|L^2| \coth^2 r + (2ER^2 - |L^2|)}{\sqrt{(2ER^2 - |L^2|)^2 + 4|L^2|\omega^2 R^4}} \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\sinh \tau}{\sqrt{1 + p_\varphi^2/|L^2|}} \right] \right\} = \beta, \end{aligned} \quad (1.40)$$

и

$$\sin(\varphi_0 - \varphi) = \frac{p_\varphi}{\sqrt{p_\varphi^2 + |L^2|}} \tanh \tau, \quad (1.41)$$

с ограничением на r :

$$\coth^2 r \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}}.$$

Граничный случай $L^2 = 0$ может быть легко рассчитан из уравнений (1.40) и (1.41). Так мы получаем

$$\left. \frac{\partial S}{\partial L^2} \right|_{A=0} = \frac{\sqrt{2E \coth^2 r - \omega^2 R^2}}{4ER} - \frac{\sinh \tau}{2p_\varphi} = \beta, \quad \sinh \tau = \tan(\varphi_0 - \varphi). \quad (1.42)$$

с очевидным ограничением $\coth^2 r \geq \omega^2 R^2 / 2E$.

1.4 Траектории для $L^2 > 0$

Из (1.37) и (1.39) имеем

$$\coth^2 r = \left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\omega^2 R^4}{L^2}} \sin(2\psi + 4\sqrt{A}\beta), \quad (1.43)$$

где

$$\psi = \arcsin \left(\frac{\sinh \tau}{\sqrt{p_\varphi^2 / L^2 - 1}} \right) = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{1 + L^2 / p_\varphi^2 \cot^2(\varphi_0 - \varphi)}} \right). \quad (1.44)$$

Теперь перепишем уравнение (1.43) в виде

$$\tanh^2 r = \frac{1}{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\omega^2 R^4}{L^2}} \sin(2\psi + 4\sqrt{L^2}\beta)}. \quad (1.45)$$

Таким образом из (1.44) видно, что зависимость от угла τ в уравнениях траектории (1.45) может быть устранена. С другой стороны из формулы (1.39) следует, что движение частицы на гиперboloиде ограничено дополнительным условием

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\tanh \tau}{\sin \varphi} = \sqrt{1 - L^2 / p_\varphi^2}.$$

В следствии этого, без потери общности можем выбрать $\tau = 0$ или $L^2 = p_\varphi^2$. Учитывая что формула (1.45) инвариантно по отношению к преобразованию $r \rightarrow i\pi - r$, можем заключить, что все траектории движения, описывающиеся этой формулой, лежат на верхнем ($z_0 \geq R$) или нижнем ($z_0 \leq -R$) листе двух-полосого гиперboloида: $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$. Очевидно они симметрично по отношению к преобразованию $z_0 \rightarrow -z_0$.

Подставляя теперь $L^2 = p_\varphi^2$ в (1.39) получаем что $\psi = (\varphi_0 - \varphi)$ и формула (1.45) получает вид

$$\tanh^2 r = \frac{p}{1 + \varepsilon(R) \cos 2\varphi}, \quad (1.46)$$

где мы используем обозначения

$$p = \left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right)^{-1} > 0, \quad \varepsilon(R) = \sqrt{1 - \frac{4\omega^2 R^4 L^2}{(2ER^2 + L^2)^2}}, \quad (1.47)$$

и выбираем $\varphi_0 = -2\beta\sqrt{L^2} + \frac{\pi}{4}$ так, чтобы точка $\varphi = 0$ была бы ближайшей к центру. Понятно что подкоренное выражение всегда положительно, потому что $E > U_{eff}(r_0)$ для $0 < L^2 < \omega^2 R^4$ и $E > \omega^2 R^2/2$ для $L^2 \geq \omega^2 R^4$.

Хорошо известно, что как и в Евклидовой плоскости, возможно ввести конические сечения на двумерных пространствах постоянной кривизны [30, 28, 31] (см. также определение кривых на двух-полосом гиперboloиде [111]). Конические сечения на пространствах постоянной кривизны это кривые пересечения между двумерным гиперboloидом (или сферой) и конусом второго порядка с началом в центре гиперboloида (сферы). Гометрически эти сечения на пространствах постоянной кривизны обладают многими свойствами характерными для конических сечений на Евклидовом пространстве, в частности можно говорить о фокусах F_1 и F_2 и можем определить кривые как набор точек, для которых сумма (эллипсы) или разность (гиперболы) $2a$ расстояний r_1 и r_2 от двух данных точек (фокусы F_1 и F_2) постоянно.

Сделаем анализ орбиты осциллятора (1.46). Формула траекторий (1.46) может быть записано в более удобной форме

$$\frac{1}{\tanh^2 r} = \frac{\cos^2 \varphi}{B^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{A^2}, \quad (1.48)$$

или на языке координат Бельтрами (1.18):

$$\frac{x_2^2}{B^2} + \frac{x_3^2}{A^2} = R^2, \quad (1.49)$$

где константы A и B это

$$B^2 = \frac{p(R)}{1 + \varepsilon(R)}, \quad A^2 = \frac{p(R)}{1 - \varepsilon(R)}, \quad 0 < B^2 \leq A^2$$

Уравнение орбиты типа (1.48) было детально изучено в статье [94] см. также [30]) при изучении двумерного гармонического осциллятора в пространстве постоянной кривизны в полярных координатах. Кривые (1.48) всегда являются коническими сечениями н гиперboloиде, но их тип зависит от значений A и B . Очевидно, что если $A^2 > 1$ и $B^2 > 1$, тогда для любых φ следует что $\tanh r > 1$, и данный случай не соответствует не одной орбите осциллятора. В случае $B^2 < A^2 < 1$ кривые (1.48) принимают вид гиперболических эллипсов. Величины A и B связаны с длинами большой и малой полуосей a и b , пробегающих значения $[0, \infty)$, определённых как значения r при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 0$. в таком случае A, B могут быть записаны в терминах гиперболических тангенсов от a, b : $A^2 = \tanh^2 a$ и $B^2 = \tanh^2 b$ и уравнение орбиты (1.48)

$$\frac{1}{\tanh^2 r} = \frac{\cos^2 \varphi}{\tanh^2 b} + \frac{\sin^2 \varphi}{\tanh^2 a}. \quad (1.50)$$

В пределе контракции $R \rightarrow \infty$ имеем $r \rightarrow \tilde{r}/R$ где $\tilde{r} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ радиальная переменная в Евклидовой плоскости. Учитывая предел

$$\varepsilon(R) \rightarrow \tilde{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L^2}{E^2}}, \quad R^2 p(R) \rightarrow \tilde{p} \equiv \frac{L^2}{E},$$

имеем из (1.49) что уравнения траектории переходят в траекторию осциллятора

$$\frac{x_2^2}{\tilde{B}^2} + \frac{x_3^2}{\tilde{A}^2} = 1, \quad \tilde{B}^2 = \frac{\tilde{p}}{1 + \tilde{\varepsilon}}, \quad \tilde{A}^2 = \frac{\tilde{p}}{1 - \tilde{\varepsilon}}$$

Следующий интересный случай это $B^2 < 1 < A^2$. Коническое сечение (1.48) не является не эллипсом не гиперболой. Следуя статье [94] мы назовем данное сечение *ультрэллипсом*. Только одна полуось b находится на гиперболической плоскости а другая формально не имеет реальной длины. Можно представить новую “полуось” \tilde{a} (расположенной на комплексной плоскости на линии $\tilde{a} = a + i\pi/2$) которая связана с A как $A^2 = \coth \tilde{a}$. Таким образом, вместо (1.50) имеем коническое сечение

$$\frac{1}{\tanh^2 r} = \frac{\cos^2 \varphi}{\tanh^2 b} + \tanh^2 \tilde{a} \sin^2 \varphi. \quad (1.51)$$

Существует точка соединения для двух кривых (1.50) и (1.51), а именно $A^2 = 1$ ($a \rightarrow \infty$ или $\tilde{a} \rightarrow \infty$). В этом случае коническое сечение даётся

$$\frac{1}{\tanh^2 r} = \frac{\cos^2 \varphi}{\tanh^2 b} + \sin^2 \varphi.$$

Данное сечение является *эквидистантной кривой* с эквидистантой b от оси z_2 [94].

Рассмотрим теперь все возможные траектории движения в зависимости от энергии и углового момента L^2 .

А. Рассмотрим теперь эллиптические траектории, которые возможны только для $0 < L^2 < \omega^2 R^4$ и $U_{eff}(r_0) < E < \omega^2 R^2/2$ с

$$0 \leq \varepsilon(R) = \sqrt{1 - \frac{4\omega^2 R^4 L^2}{(2ER^2 + L^2)^2}} < 1.$$

Обозначим через r_{min} и r_{max} точки с наименьшей и наибольшей дистанцией от центра. Очевидно они соответствуют углам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. Согласно (1.46) имеем

$$\tanh^2 r_{min} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R)}, \quad \tanh^2 r_{max} = \frac{p}{1 - \varepsilon(R)},$$

и соответственно

$$r_{min} = \coth^{-1} \left\{ \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2 R^4}{L^2}}} \right\},$$

$$r_{max} = \coth^{-1} \left\{ \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2 R^4}{L^2}}} \right\}.$$

Таким образом траектории являются “эллипсами” (см. [101, 28, 31]) симметричными по отношению к точке $z_0 = R$, $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ на верхнем листе двух-полосого гиперboloида (см. Рис. (1.4)).

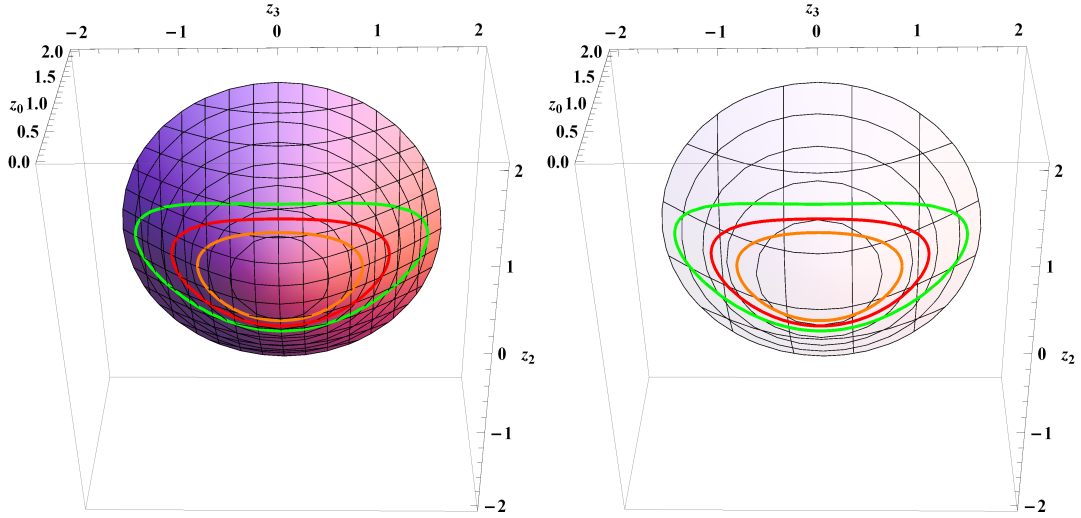


Рис. 1.4: Эллиптические траектории на верхнем листе двух-полосого гиперboloида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений $\varepsilon = 0.3$ и $p = 0.3, 0.4, 0.5$.

В. В случае минимальной энергии $E = E_{\min} = U_{eff}(r_0)$ имеем из (1.47) что $\varepsilon = 0$ и $p = \omega R^2 / \sqrt{L^2}$ и окончательно $\tanh^2 r = B^2 = A^2 = \omega R^2 / \sqrt{L^2}$. таким образом орбиты являются кругами с радиусами, которые даются формулой (1.29) (см. Рис. (1.5)).

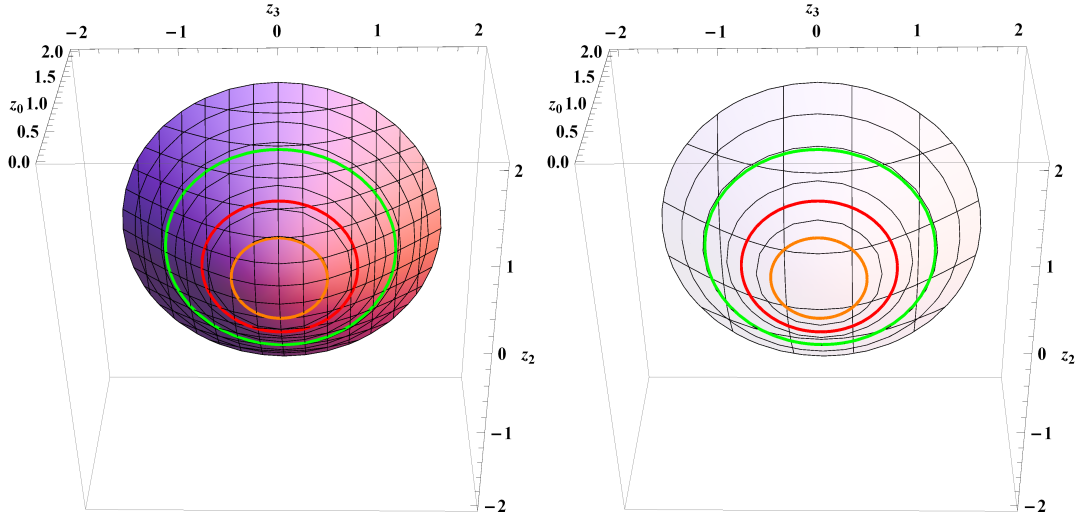


Рис. 1.5: Круговые траектории для $\varepsilon = 0$ и $p = 0.2, 0.4, 0.6$.

С. Для случая значения энергии $E = \omega^2 R^2 / 2$ получаем

$$p(R) = \frac{2A}{\omega^2 R^4 + L^2}, \quad \varepsilon(R) = \frac{|\omega^2 R^4 - L^2|}{\omega^2 R^4 + L^2},$$

следовательно для $0 < L^2 < \omega^2 R^4$ получим $B^2 = L^2 / \omega^2 R^4 < 1$ and $A^2 = 1$. Конические сечения будут

$$\frac{1}{\tanh^2 r} = \frac{\omega^2 R^4}{L^2} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi.$$

которые представляют собой эквидистантные кривые (см. Рис. (1.6)). Минимальная дистанция r_{min} от центра даётся формулой

$$r_{min} = \coth^{-1} \left(\frac{\omega R^2}{\sqrt{L^2}} \right).$$

Положим $L^2 = \omega^2 R^4$. Тогда $B^2 = A^2 = 1$ и коническое сечение это “наибольший” круг с радиусом $r = \infty$. Для случая $L^2 > \omega^2 R^4$ получаем что $B^2 = 1$, $A^2 = L^2/\omega^2 R^4 > 1$. Тогда из формулы (1.48) следует что $\tanh r > 1$ и не существует орбиты осциллятора.

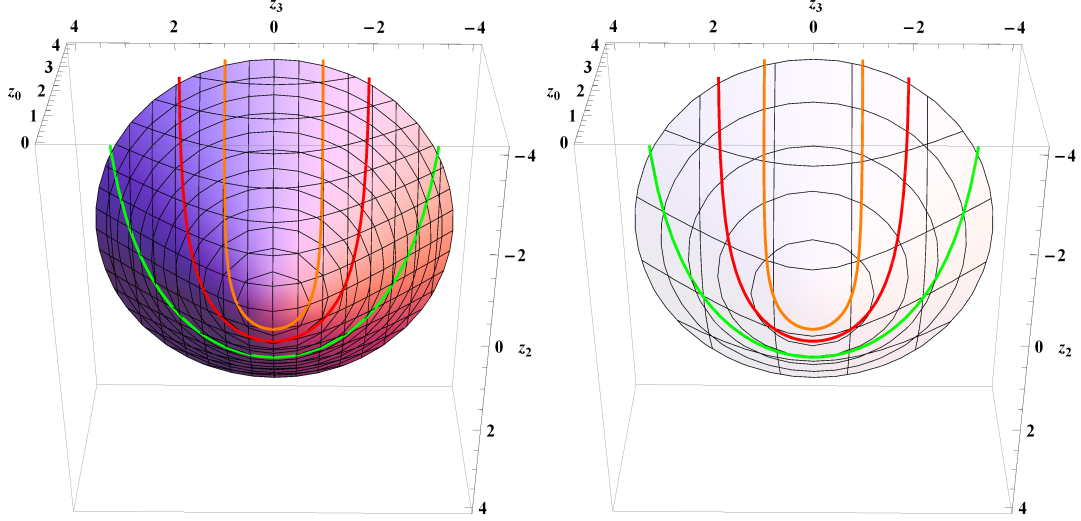


Рис. 1.6: Эквидистантные траектории на верхнем листе двухполосого гиперboloида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений пар $(p, \varepsilon) = (1/3, 2/3); (2/3, 1/3); (8/9, 1/9)$.

D. Для энергии $E > \omega^2 R^2/2$ легко видеть что для любой положительной $L^2 > 0$

$$A^2 = \left\{ \left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\omega^2 R^4}{L^2}} \right\}^{-1} > 1, \quad B^2 < 1.$$

Движение частицы определяется уравнением (1.51) где $\tanh^2 \tilde{a} = 1/A^2$. Траектории являются ультраэллипсами и описывают движение частицы от минимальной точки r_{min} :

$$r_{min} = \coth^{-1} \left\{ \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\omega^2 R^4}{L^2}}} \right\},$$

до бесконечности (см. Рис. (1.7)). С другой стороны $B^2 \cdot A^2 = \omega^2 R^4/L^2$, так что для $L^2 < \omega^2 R^4$ получаем $1/A^2 < B^2 < 1$, в том случае как для $L^2 > \omega^2 R^4$ следует что $B^2 < 1/A^2 < 1$ и значение $L^2 = \omega^2 R^4$ или $B^2 = 1/A^2$ разделяет два набора ультраэллипсов.

Нужно также заметить, что в пределе контракции $R \rightarrow \infty$ эти орбиты соответствуют Евклидовым орбитам осциллятора с большими энергиями (прямая линия $x_2 = \tilde{B}^2$).

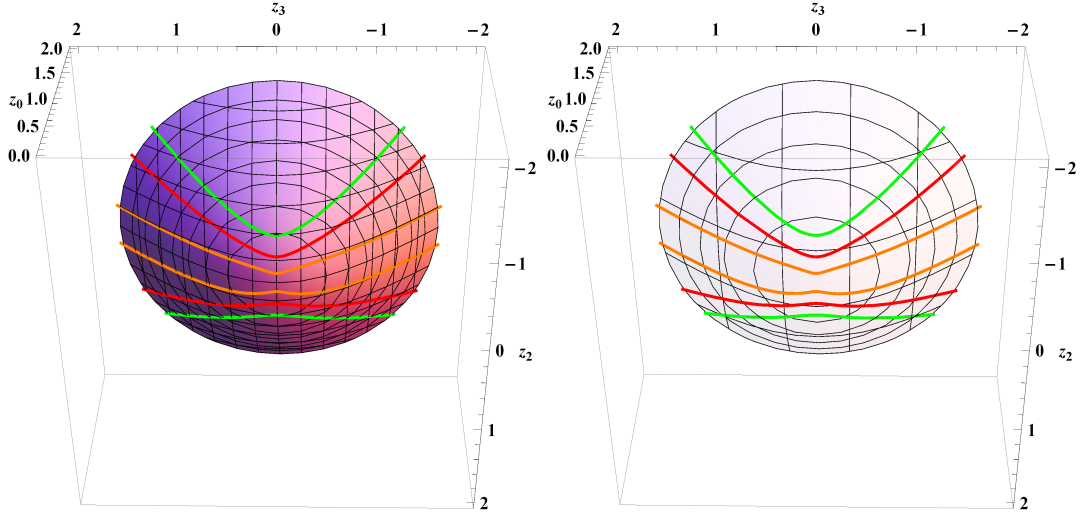


Рис. 1.7: Ультраэллиптические траектории на верхнем листе двухполосого гиперboloида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений $\epsilon = 0.8$ and $p = 0.2, 0.5, 0.8$.

1.5 Траектории для $L^2 \leq 0$

Для упрощения дальнейших формул, зафиксируем $p_\varphi = 0$. Тогда, из уравнения (1.41) следует что движение происходит при постоянном значении азимутального угла $\varphi = \varphi_0$ ограниченным условием $z_3/z_2 = \tan \varphi_0$. Для дальнейшего упрощения достаточно выбрать $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi$. Так мы получаем что траектория движения (1.52) лежит на однополосом гиперboloиде $z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = R^2$. Формула (1.40) даёт уравнение траектории в области $z_0 > R$:

$$\coth^2 r = \left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}} \cosh(2\tau + 4\sqrt{|L^2|}\beta). \quad (1.52)$$

Производя далее преобразование $r \rightarrow i\chi$ и $\tau \rightarrow \mu - i\pi/2$ в формуле (1.52), получим уравнение траектории в области $0 < z_0 < R$:

$$\cot^2 \chi = - \left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}} \cosh(2\mu + 4\sqrt{|L^2|}\beta). \quad (1.53)$$

В формуле траектории (1.52) мы должны различить два случая, а именно для случаев $E < \omega^2 R^2/2$ и $E \geq \omega^2 R^2/2$.

В первом случае $E < \omega^2 R^2/2$ из уравнения (1.52) следует, что при любом значении переменной $\tau \in (-\infty, \infty)$ имеем $\coth r > 1$. таким образом, траектория движения простирается от точки $r = 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$ ($z_0 = R, z_1 < 0, z_2 > 0$) до максимума

$$r_{max} = \coth^{-1} \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|} \right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}}},$$

в точке $\tau = -2\sqrt{|L^2|}\beta$ и потом возвращается в точку $r = 0$ когда $\tau \rightarrow \infty$ ($z_0 = R, z_1 > 0, z_2 > 0$). Далее, частица проходит через точку $z_0 = R$ из области $z_0 > R$ в область $0 < z_0 < R$, которая, как следует из уравнения (1.53), соответствует значениям угла $\mu \rightarrow \infty$ и $\chi \rightarrow 0$, ($z_0 < R, z_1 > 0, z_2 > 0$). Далее траектория простирается до максимального значения χ_{max} :

$$\chi_{max} = \cot^{-1} \sqrt{-\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}}} \leq \frac{\pi}{2},$$

в точке $\mu = -2\sqrt{|L^2|}\beta$, и далее к $\mu \rightarrow -\infty$, $\chi \rightarrow 0$ ($z_0 < R, z_1 > 0, z_2 < 0$). После, частица опять проходит через точку $z_0 = R$ и входит в область $z_0 \geq R$. Далее, пользуясь похожими рассуждениями, можно показать, что траектории в случае $E < \omega^2 R^2/2$, являются закрытыми кривыми, лежащими на одно-полосом гиперboloиде $z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = R^2$, $z_0 > 0$, так что движение связано и периодически. Та же ситуация и для случая $z_0 < 0$.

В случае $E \geq \omega^2 R^2/2$ легко видеть, что неравенство

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}} \leq \frac{1}{2} + \frac{ER^2}{|L^2|},$$

действительно. Следовательно траектории движения, в зависимости от знака переменной τ разделена на два части. Один из них начинается от большого r при минимальной точке

$$\tau_{min} = -2\sqrt{|L^2|}\beta + \frac{1}{2} \cosh^{-1} \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{ER^2}{|L^2|}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}}}.$$

и продолжается к точке $r = 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ ($z_0 = R, z_2 > 0$). Затем траектория проходя часть $0 < z_0 < R$ идет обратно из ($z_0 = R, z_2 < 0$) при точке $r = 0$, $\tau \sim \infty$ к $r \in \infty$ при τ_{min} . Вторая часть симметрична по отношению к оси z_1 . Таким образом траектории движения для энергий $E \geq \omega^2 R^2/2$ не связаны. Некоторые примеры траекторий для фиксированных отрицательных $A = -1$ и разных энергий E , представлены в Рис. 1.8.

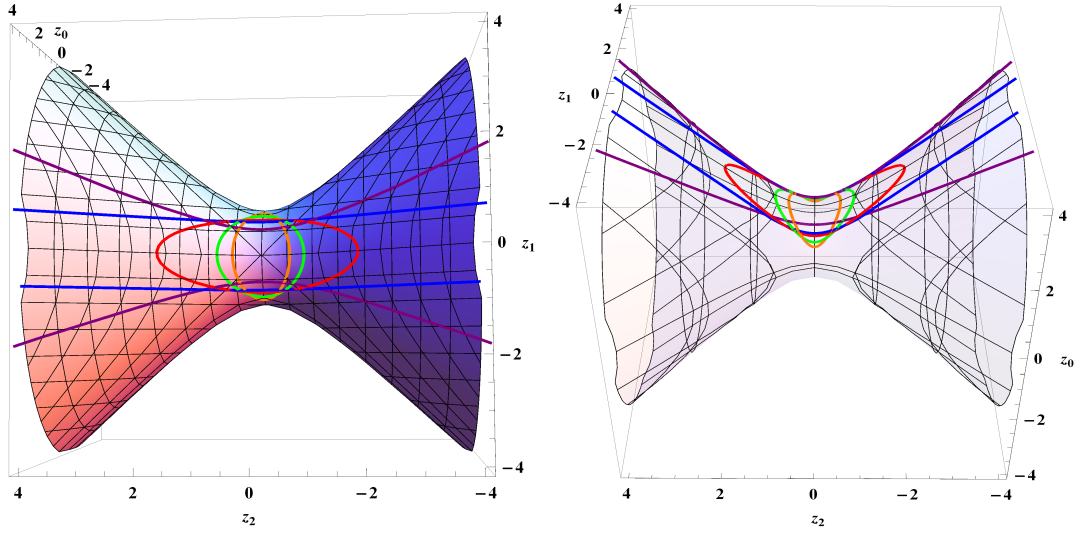


Рис. 1.8: Траектории для случая $L^2 = -1$; $E = -3/2, -1/2, 1/4, 1/2, 3/2$ ($\omega = R = 1$)

В граничном случае $L^2 = 0$ легко получить из (1.42)

$$\coth^2 r = \frac{\omega^2 R^2}{2E} + R\sqrt{E} (2\beta - \tan \varphi/p_\varphi)^2,$$

с $\varphi_0 = 0$. В случае $E < \omega^2 R^2/2$ связанное движение происходит $r_{min} = 0$ ($\varphi = \pi/2$) и $r_{max} = \coth^{-1} \sqrt{\frac{\omega^2 R^2}{2E}}$ ($\varphi = \arctan 2\beta p_\varphi$), в то время как $E \geq \omega^2 R^2/2$ орбиты бесконечны: $r \in [0, \infty)$. Траектории могут быть представлены на гиперболическом цилиндре $z_0^2 - z_2^2 = R^2$, $z_1^2 = z_3^2$, $z_0 \geq R$ (см. Рис. 1.9).

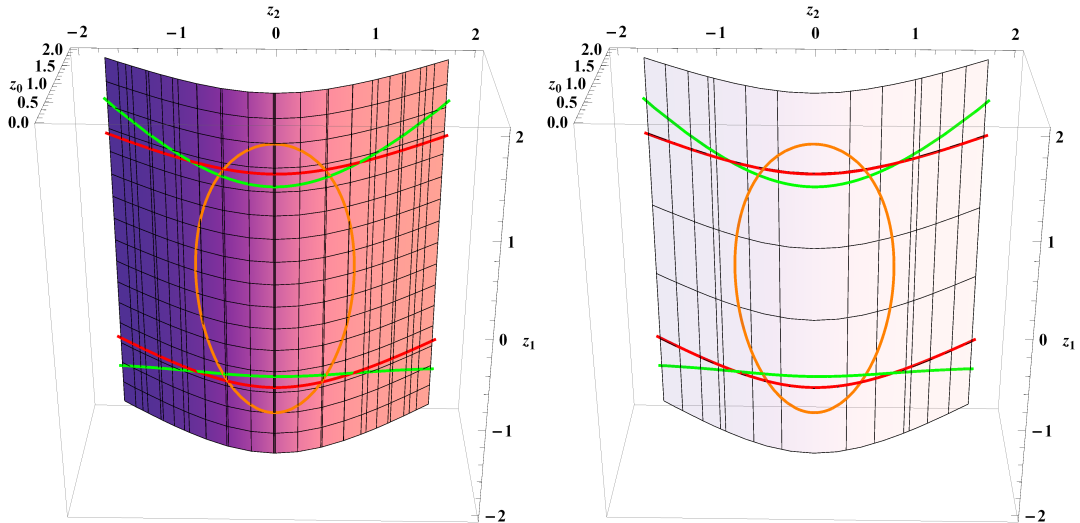


Рис. 1.9: Траектории для случая $A = 0$ на гиперболическом цилиндре $z_0^2 - z_2^2 = R^2$, $z_1^2 = z_3^2$, and $z_0 \geq R$. для значений $E = 0.2, 0.5, 0.8$ ($\omega = R = p_\varphi = 1$)

1.6 Потенциал Кеплера-Кулона

Рассмотрим теперь движение заряженной частицы в поле Кеплера-Кулона. Мы предполагаем, что потенциал V зависит только от дистанции между центром и частицей, что означает оно может быть рассмотрено как аналог центрального поля. В этом случае V есть функция только от r . По аналогии с Евклидовым пространством требуем чтобы поле заряженной частицы $\mu = Ze$ в $r = 0$ удовлетворяло уравнению Пуассона

$$\Delta_{LB}V(r) = \frac{1}{R^2} \sinh^{-2} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\sinh^2 r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi\mu}{R} \delta(r)$$

где $\delta(r)$ дельта функция Дирака. Решение последнего уравнения с условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$$

Данные условия написаны для случая $|z_0| > R$. Для получения случая $|z_0| < R$ воспользуемся преобразованиями (1.4) (для исключения путаницы в (1.4) переменную μ поменяем на ν). Нужно отметить что в случае задачи Кеплера-Кулона, в отличии от задачи осциллятора, нам также понадобится переход для параметра поля $\mu \rightarrow i\mu$. Тогда потенциал Кеплера Кулона можно записать как

$$V^{KC}(r) = -\frac{\mu}{R} \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 - R^2}} = \begin{cases} -\frac{\mu}{R} \coth r, & |z_0| \geq R \\ -\frac{\mu}{R} \cot \chi, & |z_0| \leq R. \end{cases} \quad (1.54)$$

и гамильтониан может быть записан как

$$\mathcal{H}^{KC} = \frac{1}{2R^2} \left(p_r^2 + \frac{L^2}{\sinh^2 r} \right) - \frac{\mu}{R} \coth r \quad (1.55)$$

для $|z_0| \geq R$ и

$$\mathcal{H}^{KC} = -\frac{1}{2R^2} \left(p_\chi^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \chi} \right) - \frac{\mu}{R} \cot \chi, \quad (1.56)$$

для $|z_0| \leq R$. В пределе контракции $R \rightarrow \infty$ потенциал на языке координат Бельтрами напишется как

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V(r) = -\frac{\mu}{\sqrt{-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

что можно интерпретировать как Кулоновский потенциал в \mathbf{M}^{2+1} пространстве Минковского (x_1, x_2, x_3) .

Гамильтониан системы Кеплера-Кулона, кроме углового момента \mathbf{L} имеет дополнительный интеграл движения квадратичный по импульсу, который связан с генераторами $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$, аналог вектора Рунге- Ленца.

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2R} ([\mathbf{N} \times \mathbf{L}] - [\mathbf{L} \times \mathbf{N}]) - \mu \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad [A_i, H] = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

где

$$[\mathbf{N} \times \mathbf{L}]_i = \bar{g}_{im} \varepsilon_{mkl} N_k L_l, \quad \bar{g}_{ik} = \text{diag}\{-1, 1, 1\}.$$

Легко показать, что

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{L} = \bar{g}_{ii} L_i A_i = -L_1 A_1 + L_2 A_2 + L_3 A_3 = 0,$$

и

$$A^2 = 2H(L^2 + 1) + \frac{L^2}{R^2}(L^2 - 2) + \mu^2.$$

Для коммутаторов получим

$$[A_i, A_j] = -2 \left(\frac{L^2}{R^2} + H \right) \bar{g}_{im} \bar{g}_{jn} \varepsilon_{mnk} L_k, \quad [L_i, A_j] = \bar{g}_{im} \bar{g}_{jn} \varepsilon_{mnk} A_k,$$

показывающих, что операторы A_i, L_i формируют кубическую алгебру.

1.7 Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби

Уравнение Гамильтона-Якоби $H = E$ связанное с Гамильтонианом (1.55) получается после замены $p_{\mu_i} \rightarrow \partial S / \partial \mu_i$, где $\mu_i = (r, \tau, \varphi)$. После замен получаем

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} - \frac{\mu}{R} \coth r = E$$

Данное уравнение полностью разделимо, и координата φ является циклической. Мы будем искать решение классического действия $S(r, \tau, \varphi, t)$ в виде

$$S(r, \tau, \varphi, t) = -Et + p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\tau)$$

и получим

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} = -L^2 \quad (1.57)$$

$$\frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 - \frac{\mu}{R} \coth r + \frac{L^2}{2R^2 \sinh^2 r} = E \quad (1.58)$$

где L^2 - момент импульса и в отличии от, в частности, движения в Евклидовом пространстве и пространстве Лобачевского может принимать не только положительные, но и нулевое и отрицательные значения. Действительно из (1.57) следует $(\partial S_2 / \partial \tau)^2 = p_\varphi^2 / \cosh^2 \tau - L^2 \geq 0$ и соответственно для фиксированного p_φ^2 получим что $-\infty < L^2 \leq p_\varphi^2$. Уравнение (1.58) описывает движение в поле с эффективным потенциалом (см Рис. 1.10)

$$U_{eff}(r) = -\frac{\mu}{R} \coth r + \frac{L^2}{2R^2 \sinh^2 r}$$

Если $L^2 > 0$ и $\mu R/L^2 > 1$ этот потенциал имеет минимальное значение при $r_0 = \tanh^{-1}(L^2/\mu R)$, и в этой точке

$$U_{eff}(r_0) = -\frac{\mu^2 R^2}{2L^2} - \frac{L^2}{2R^2}$$

В случае $L^2 > 0$ и $0 < \mu R/L^2 \leq 1$ потенциал притягивающий. Пользуясь теперь (1.57) и (1.58) получаем

$$S_1(r) = \int \sqrt{2R^2 E + 2\mu R \coth r - \frac{L^2}{\sinh^2 r}} dr \quad (1.59)$$

$$S_2(\tau) = \int \sqrt{-L^2 + \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau}} d\tau, \quad (1.60)$$

Поскольку нас интересуют только траектории, мы будем следовать стандартным процедурам [109] и рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_1}{\partial E} - t = -t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial L^2} = \frac{\partial S_1}{\partial L^2} + \frac{\partial S_2}{\partial L^2} = \beta, \quad \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial p_\varphi} = \varphi_0 \quad (1.61)$$

где t_0 , φ_0 и β константы.

1.7.1 Интегрирование квази-радиальной части

Из (1.59) и (1.61) получим

$$t - t_0 = R^2 \int \frac{dr}{\sqrt{-L^2 \coth^2 r + 2\mu R \coth r + (2R^2 E + L^2)}} \quad (1.62)$$

Ниже мы раздельно рассмотрим случаи $L^2 > 0$, $L^2 < 0$ и $L^2 = 0$

1. Случай $L^2 > 0$. Из(1.62) имеем

$$t - t_0 = \frac{R^2}{\sqrt{L^2}} \int \frac{dX}{X(X+2)\sqrt{-X^2 + 2(\mu R/L^2 - 1)X + 2R^2 E/L^2 + 2\mu R/L^2}} \quad (1.63)$$

где $X = (\coth r - 1) \in [0, \infty)$, и корни знаменателя будут

$$X_{1,2} = \left(\frac{\mu R}{L^2} - 1 \right) \pm \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 + \frac{2R^2 E}{L^2}}$$

Ограниченное движение существует при $E < -\frac{\mu}{R}$

$$\frac{\mu R}{L^2} - \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 - \frac{2R^2 |E|}{L^2}} < \coth r < \frac{\mu R}{L^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 - \frac{2R^2 |E|}{L^2}} \quad (1.64)$$

и дополнительно если

$$\mu R/L^2 > 1, \quad \frac{\mu^2 R^2}{L^2} + 1 - \frac{2R^2 |E|}{L^2} \geq 0 \quad (1.65)$$

Пользуясь формулой

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{az^2 + bz + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bz + 2c}{|z|\sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad c < 0, \quad b^2 > 4ac$$

и производя интегрирование в (1.63) имеем

$$\begin{aligned} (t - t_0) \frac{\sqrt{8(|E| - \frac{\mu}{R})}}{R} + \arcsin \frac{(\mu R - L^2) - (2R^2|E| - 2\mu R)/(\coth r - 1)}{\sqrt{\mu^2 R^2 - L^4 - 2R^2|E|L^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu/(R|E| - \mu)}} \arcsin \frac{(\mu R + L^2) - (2R^2|E| + 2\mu R)/(\coth r + 1)}{\sqrt{\mu^2 R^2 - L^4 - 2R^2|E|L^2}} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Можно заметить, что уравнение (1.66) не позволяет нам установить прямую зависимость между переменной r или $\coth r$ от времени t . В следующем пункте мы запишем это уравнение в параметрической форме.

В случае минимальной энергии: $E = U_{eff}(r)$ или $(\mu R/L^2 - 1) = \sqrt{(2R^2|E| - 2\mu R)/L^2}$ интеграл в (1.63) неопределен и мы должны рассматривать напрямую (1.58). Из

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 = -L^2 \left(\coth r - \frac{\mu R}{L^2} \right)^2 \geq 0$$

получаем $\partial S_1/\partial r = 0$ и $\coth r = \mu R/L^2$. Следовательно

$$r = \coth^{-1} \left(\sqrt{\frac{R|E|}{2\mu} - \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{R|E|}{2\mu} + \frac{1}{2}} \right)^2 \quad (1.67)$$

т.е. траектории являются кругами.

Для граничного случая $E = -\frac{\mu}{R}$ и для $\mu R/L^2 > 1$ (для $\mu R/L^2 < 1$ знаменатель неопределен) корнями знаменателя являются $X_1 = 0$, $X_2 = 2(\mu R/L^2 - 1)$, таким образом

$$1 < \coth r < 2\mu R/L^2 - 1$$

и движение неограничено: $\operatorname{arccoth}(2\mu R/L^2 - 1) < r < \infty$.

В случае энергии $E > -\frac{\mu}{R}$: $X_1 < 0$ и $X_2 > 0$ независимо от знака $(\mu R/L^2 - 1)$ и опять же

$$1 < \coth r < \frac{\mu R}{L^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 + \frac{2R^2 E}{L^2}} \quad (1.68)$$

и траектории неограничены.

2. Случай $L^2 < 0$. Из (1.62) имеем

$$t - t_0 = \frac{R^2}{\sqrt{|L^2|}} \int \frac{dr}{\sqrt{X^2 + 2(\mu R/|L^2| + 1) X + 2R^2 E/|L^2| + 2\mu R/|L^2|}} \quad (1.69)$$

где X те же самые что и в формуле (1.63). Для энергий $E > -\mu/R$ подкоренное выражение в формуле (1.69) положительно при любых значениях r и поэтому движение частицы происходит во всей области $r \in [0, \infty)$. Для значений энергии $E < -\mu/R$, корнями подкоренного выражения будут

$$X_{1,2} = -\left(\frac{\mu R}{|L^2|} + 1\right) \pm \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{|L^4|} + 1 + \frac{2R^2|E|}{|L^2|}},$$

и движение происходит в области $r \in [0, \operatorname{arccoth}(X_1 + 1)]$. Следовательно, в не зависимости от энергии при $L^2 < 0$, частица за конечное время подходит к центру поля, т.е. происходит падение на центр. Время падения на центр из любой точки r может быть вычислено используя интеграл ($t_0 = 0$)

$$t = \frac{R^2}{\sqrt{|L^2|}} \int_{\infty}^X \frac{dX}{X(X+2) \sqrt{X^2 + 2(\mu R/|L^2| + 1)X + 2R^2 E/|L^2| + 2\mu R/|L^2|}}$$

(см. Дополнения).

3. Случай $L^2 = 0$. Из (1.62) имеем ($t_0 = 0$)

$$t = \sqrt{\frac{R^3}{2\mu}} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{\coth r + (ER/\mu - 1)}}. \quad (1.70)$$

Из ур. (1.70) следует, что для $E < -\frac{\mu}{R}$ движение происходит в области, где

$$|E|R/\mu < \coth r < \infty, \quad (1.71)$$

в то время как для энергий $E > -\frac{\mu}{R}$ движение возможно для $r \in [0, \infty)$. Видим, что как и в предыдущем случае с отрицательными L^2 , при $L^2 = 0$ частица также падает на центр. Детальные расчёты представлены в Дополнении.

1.7.2 Интегрирование угловой части

1. Рассмотрим сначала случай когда $L^2 > 0$. Из (1.59) и (1.60) получаем

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dr}{\sinh^2 r \sqrt{2R^2 E + 2\mu R \coth r - L^2/\sinh^2 r}} \quad (1.72)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial L^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\sqrt{-L^2 + p_\varphi^2/\cosh^2 \tau}} \quad (1.73)$$

Интегралы могут быть легко рассчитаны и дают

$$\frac{\partial S_2}{\partial L^2} = -\frac{1}{\sqrt{4L^2}} \arcsin \frac{\sinh \tau}{\sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1}} \quad (1.74)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = \frac{1}{\sqrt{4L^2}} \arcsin \frac{\coth r - \mu R/L^2}{\sqrt{\mu^2 R^2/L^4 + 1 + 2R^2 E/L^2}}$$

В дополнение к (1.65) и $L^2 > 0$ мы требуем

$$-\sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1} < \sinh \tau < \sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1}$$

и

$$|\coth r - \mu R/L^2| < \sqrt{\mu^2 R^2/L^2 + 1 + 2R^2 E/L^2}$$

Последнее условие совпадает с формулой (1.64) для $E < -\mu/R$ и (1.68) для $E > -\mu/R$.

Окончательно для $\partial S/\partial L^2$ имеем

$$\frac{\partial S}{\partial L^2} = \frac{1}{2\sqrt{L^2}} \left[\arcsin \left(\frac{\coth r - \mu R/L^2}{\sqrt{\mu^2 R^2/L^4 + 1 + 2R^2 E/L^2}} \right) - \arcsin \left(\frac{\sinh \tau}{\sqrt{(p_\varphi^2/L^2 - 1)}} \right) \right] = \beta$$

Далее из (1.60) и (1.61) получаем

$$\frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \varphi + \int \frac{p_\varphi d\tau}{\cosh^2 \tau \sqrt{-L^2 + p_\varphi^2/\cosh^2 \tau}} = \varphi + \arcsin \frac{\tanh \tau}{\sqrt{1 - L^2/p_\varphi^2}} = \varphi_0 \quad (1.75)$$

и следовательно

$$\tanh \tau = \sqrt{1 - L^2/p_\varphi^2} \sin(\varphi_0 - \varphi) \quad (1.76)$$

2. Теперь рассмотрим интегрирование в формулах (1.72), (1.73) и (1.75) для случая $L^2 < 0$. Вместо (1.74) и (1.76) получим

$$\frac{\partial S_2}{\partial L^2} = -\frac{1}{\sqrt{4|L^2|}} \operatorname{Arcsinh} \frac{\sinh \tau}{\sqrt{1 + p_\varphi^2/|L^2|}}$$

и

$$\tanh \tau = \sqrt{1 + |L^2|/p_\varphi^2} \sin(\varphi_0 - \varphi) \quad (1.77)$$

Формула (1.77) действительна для

$$-\sqrt{|L^2|/p_\varphi^2} < \cot(\varphi_0 - \varphi) < \sqrt{|L^2|/p_\varphi^2}. \quad (1.78)$$

Теперь запишем интеграл в (1.72) в виде

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = \frac{1}{\sqrt{4|L^2|}} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + [2R^2 E/|L^2| - \mu^2 R^2/|L^4| - 1]}} \quad (1.79)$$

где $z = \coth r + \mu R/|L^2|$. В зависимости от значения энергии E , после интегрирования в формуле (1.79), получим

(i) Для $2R^2E < \mu^2R^2/|L^2| + |L^2|$

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = \frac{1}{\sqrt{4|L^2|}} \operatorname{arccosh} \frac{\coth r + \mu R/|L^2|}{\sqrt{\mu^2R^2/|L^4| + 1 - 2R^2E/|L^2|}},$$

(ii) Для $2R^2E > \mu^2R^2/|L^2| + |L^2|$

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = \frac{1}{\sqrt{4|L^2|}} \operatorname{arcsinh} \frac{\coth r + \mu R/|L^2|}{\sqrt{2R^2E/|L^2| - \mu^2R^2/|L^4| - 1}},$$

(iii) Для $2R^2E = \mu^2R^2/|L^2| + |L^2|$

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = \frac{1}{\sqrt{4|L^2|}} \ln(\coth r + \mu R/|L^2|).$$

3. Для случая $L^2 = 0$ пользуясь уравнениями (1.72) (1.73) получаем

$$\left. \frac{\partial S}{\partial L^2} \right|_{L^2=0} = \left. \frac{\partial S_1}{\partial L^2} \right|_{L^2=0} + \left. \frac{\partial S_2}{\partial L^2} \right|_{L^2=0} = \sqrt{\frac{\coth r + ER/\mu - 1}{2\mu R}} - \frac{\sinh \tau}{2p_\varphi} = \beta$$

с требованиями $2\beta\sqrt{p_\varphi^2} + \sinh \tau \geq 0$. Что касается вариации по p_φ подставляя $L^2 = 0$ в (1.75) получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S_2}{\partial p_\varphi} \right|_{L^2=0} &= \varphi + \arctan \sinh \tau = \varphi_0 \\ \sinh \tau &= \tan(\varphi_0 - \varphi) \end{aligned}$$

Заметим что для $E < 0$ имеем дополнительное ограничение на движение как в ур. (1.71).

1.8 Траектории

В это параграфе мы выпишем уравнения для траекторий движения. Сначала потребуем $L^2 > 0$ и $\mu R/L^2 > 1$.

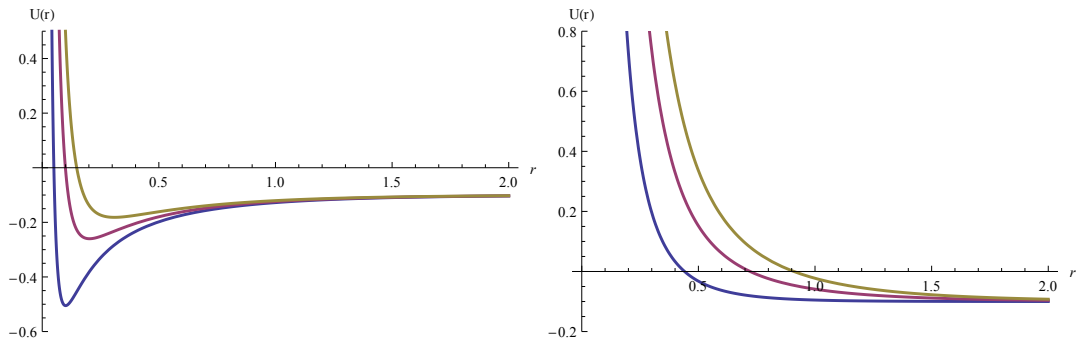


Рис. 1.10: Эффективный потенциал для $L^2 = 1, 2, 3$ ($\mu R/L^2 > 1$) и $L^2 = 10, 20, 30$ ($\mu R/L^2 < 1$) ($\mu = 1, R = 10$)

Из (1.76) имеем

$$\begin{aligned} \coth r = & \frac{\mu R}{L^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 R^2/L^4 + 1 + 2R^2 E/L^2}}{\sqrt{p_\varphi^2/L^2 - 1}} \left[\cos(2\beta\sqrt{L^2}) \sinh \tau \right. \\ & \left. + \sin(2\beta\sqrt{L^2}) \left(\sqrt{p_\varphi^2/L^2 - \cosh^2 \tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Учитывая что

$$\sinh^2 \tau = \frac{p_\varphi^2/L^2 - 1}{1 + (p_\varphi^2/L^2) \cot^2(\varphi_0 - \varphi)}, \quad \frac{p_\varphi^2}{L^2} - \cosh^2 \tau = \frac{p_\varphi^2/L^2 - 1}{1 + (L^2/p_\varphi^2) \tan^2(\varphi_0 - \varphi)}$$

и замечая что

$$\frac{1}{1 + (p_\varphi^2/L^2) \cot^2(\varphi_0 - \varphi)} + \frac{1}{1 + (L^2/p_\varphi^2) \tan^2(\varphi_0 - \varphi)} = 1$$

вводя новый угол γ следующим образом

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{1 + (p_\varphi^2/L^2) \cot^2(\varphi_0 - \varphi)} \quad (1.81)$$

можем записать уравнение (1.80) в виде

$$\coth r = \frac{\mu R}{L^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 + \frac{2R^2 E}{L^2}} \sin(\gamma + 2\beta\sqrt{L^2}) \quad (1.82)$$

Таким образом мы видим что зависимость от угла τ в уравнении траектории (1.82) исчезает, то есть движение происходит при фиксированном значении переменной τ . Далее из $\partial S_2/\partial \tau = 0$ получаем $p_\varphi^2/L^2 = \cosh^2 \tau$ и без потери общности можем выбрать $\tau = 0$ или $L^2 = p_\varphi^2$. Таким образом траектория движения лежит на двухмерном пространстве Лобачевского или двух-полосом гиперboloиде: $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$. Подставляя теперь $L^2 = p_\varphi^2$ в ур. (1.81) получаем $\gamma = (\varphi_0 - \varphi)$ и можем переписать формулу (1.82) в виде

$$\frac{1}{\coth r - 1} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R) \cos \varphi} \quad (1.83)$$

где мы воспользовались обозначениями

$$p = \left(\frac{\mu R}{L^2} - 1 \right)^{-1} > 0, \quad \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2L^2(R^2 E + \mu R)}{(\mu R - L^2)^2}} \quad (1.84)$$

и выбрали $\varphi_0 = -2\beta\sqrt{L^2} + \frac{\pi}{2}$ так чтобы точка $\varphi = 0$ была бы ближайшей к центру. Ясно что подкоренное выражение всегда положительно так как $\mu^2 R^2 - L^4 + 2R^2 E L^2 > 0$ для $L^2 > 0$.

Хорошо известно, что как и в Евклидовом пространстве, можно представить коническое сечение на пространстве Лобачевского [28, 31, 32], так называемую квадрику. Квадрика - это кривая пересечения между двух-полосым гиперboloидом (или сферой) и конусом

второго порядка с началом в центре гиперблоида (сферы). Квадрика на пространствах постоянной кривизны обладают многими свойствами характерных для конических сечений. В частности можем говорить о фокусах F_1 и F_2 и можем определить квадрику как набор точек, от которых сумма (эллипсы) или разность (гиперболы) расстояний r_1 и r_2 от данных двух точек (фокусы F_1 и F_2) фиксированы. Уравнение траектории это уравнение квадрики с фокусом в точке $z_0 = R, z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Когда $0 \leq \varepsilon(R) < 1$ орбиты являются эллипсами (для $\varepsilon(R) = 0$ кругами), когда $\varepsilon(R) = 1$ траектория - парабола и когда $\varepsilon(R) > 1$ траектория есть гипербола.

Рассмотри теперь эллиптические траектории которые возможны только для $E < -\mu/R$
с

$$0 \leq \varepsilon(R) = \sqrt{1 - \frac{2L^2(R^2|E| - \mu R)}{(\mu R - L^2)^2}} < 1$$

Обозначим r_{min} и r_{max} точки с минимальным и максимальным расстояниями от центра поля. Очевидно что они соответствуют углам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Следовательно из (1.83) имеем

$$\frac{1}{\coth r_{min} - 1} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R)}, \quad \frac{1}{\coth r_{max} - 1} = \frac{p}{1 - \varepsilon(R)}, \quad (1.85)$$

и соответственно

$$r_{min} = \coth^{-1} \left\{ \frac{\mu R}{L^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 - \frac{2R^2|E|}{L^2}} \right\},$$

$$r_{max} = \coth^{-1} \left\{ \frac{\mu R}{L^2} - \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 - \frac{2R^2|E|}{L^2}} \right\}.$$

Обозначим сумму расстояний r_1 и r_2 : $r_1 + r_2 = 2a$ как длину большой оси эллипса, $2c$ - расстояние между фокусами $2b$ - длину алой оси. Ясно что

$$\coth 2a = \coth(r_{max} + r_{min}) = \frac{\coth r_{min} \cdot \coth r_{max} + 1}{\coth r_{min} + \coth r_{max}} = \frac{R|E|}{\mu} \quad (1.86)$$

$$\coth 2c = \coth(r_{max} - r_{min}) = \frac{\coth r_{min} \cdot \coth r_{max} - 1}{\coth r_{min} - \coth r_{max}} = \frac{p + 1}{\varepsilon(R)} \coth 2a - \frac{p}{\varepsilon(R)}$$

Таки образом получаем результат который правдив и в Евклидовом пространстве: большая ось эллипса зависит только от энергии. Отображенные в координатах z_0, z_2, z_3 (для простоты мы выбрали поверхность $\tau = 0 \Rightarrow z_1 = 0$) траектории будут иметь вид

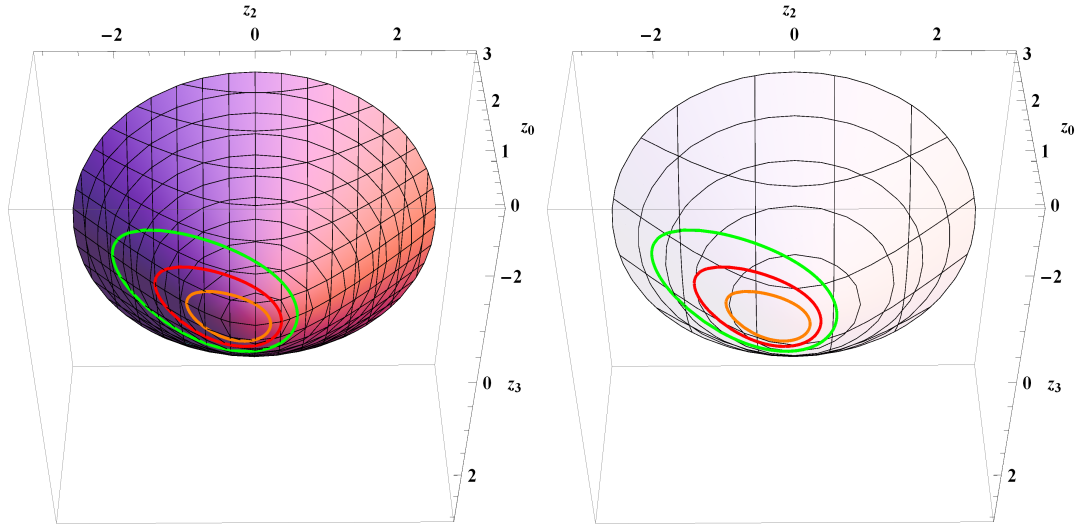


Рис. 1.11: Траектория для $p = 0.5, 1, 2$, $\epsilon = 0.8$

Теперь можем рассчитать период эллиптического движения. Пользуясь ур. (1.66), (1.84) и (1.85) и учитывая последнюю формулу получим

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2R^2}{\sqrt{L^2}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dX}{X(X+2)\sqrt{-X^2 + 2(\mu R/L^2 - 1)X + 2R^2E/L^2 + 2\mu R/L^2}} \\
 &= \frac{\pi R}{\sqrt{2(|E| - \mu/R)}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu/(R|E| - \mu)}} \right] \quad (1.87)
 \end{aligned}$$

что период зависит только от энергии. Интересно ответить что в пределе контракции $R \rightarrow \infty$ из (1.87) получим

$$T = \frac{\mu}{\sqrt{2|E|^3}}$$

что совпадает с периодом движения в плоском пространстве. Подставим (1.86) в (1.87) и получи формулу

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{\mu} (\sinh a)^3 (\cosh a) \quad (1.88)$$

которая показывает что квадрат периода зависит только от большой оси эллипса (третий закон Кеплера).

Запишем теперь уравнение (1.66) в параметрическом виде. Вводя новую переменную ξ и параметр \tilde{p} как

$$\frac{1}{\coth r - 1} = \tilde{p}(1 - \epsilon \cos \xi), \quad \tilde{p} = \frac{p}{1 - \epsilon^2} = \frac{\mu R - L^2}{2R^2|E|},$$

и подставляя в формулу (1.66) получим

$$(t - t_0) = \frac{R}{\sqrt{8|E|}} \left(\xi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu/R|E|}} \sin^{-1} \frac{(1 + 2\tilde{p}) \cos \xi - 2\tilde{p}\epsilon(R)}{1 + \tilde{p}(1 - \epsilon(R) \cos \xi)} \right)$$

Последнее уравнение обобщает известное уравнения Кеплера в Евклидовом пространстве. Для предела $R \rightarrow \infty$ имеем

$$\tilde{p} \approx \frac{\mu}{2R|E|}, \quad e(R) \approx e = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{\mu^2}}, \quad \frac{(1 + 2\tilde{p}) \cos \xi - 2\tilde{p}\varepsilon(R)}{1 + \tilde{p}(1 - \varepsilon(R) \cos \xi)} \approx \cos \xi + \frac{\mu e}{R|E|} \sin^2 \xi$$

и соответственно

$$(t - t_0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{\sqrt{8|E|}} \left[\sin^{-1}(\cos \xi + \frac{\mu e}{R|E|} \sin^2 \xi) - \sin^{-1}(\cos \xi) \right] - \frac{\mu}{\sqrt{8|E|^3}} \sin^{-1}(\cos \xi) \quad (1.89)$$

Простой расчёт в (1.89) даёт для $t_0 = \frac{\mu\pi}{\sqrt{32|E|^3}}$

$$t = \frac{\mu}{\sqrt{8|E|^3}} (\xi - e \sin^2 \xi).$$

В случае минимальной энергии (см. ур. (1.65)) имеем $\varepsilon = 0$ и опять получаем что орбиты являются кругами с радиусом (1.67).

Для энергии $E > -\frac{\mu}{R}$ траектория движения неограничена. Эксцентриситет ε равен:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2(R^2E + \mu R)}{\mu R - L^2}} > 1,$$

что соответствует гиперболической траектории с r_{min} :

$$r_{min} = \operatorname{arccoth} \left\{ \frac{\mu R}{L^2} + \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{L^4} + 1 + \frac{2R^2 E}{L^2}} \right\},$$

Траектории представлены ниже на рисунке

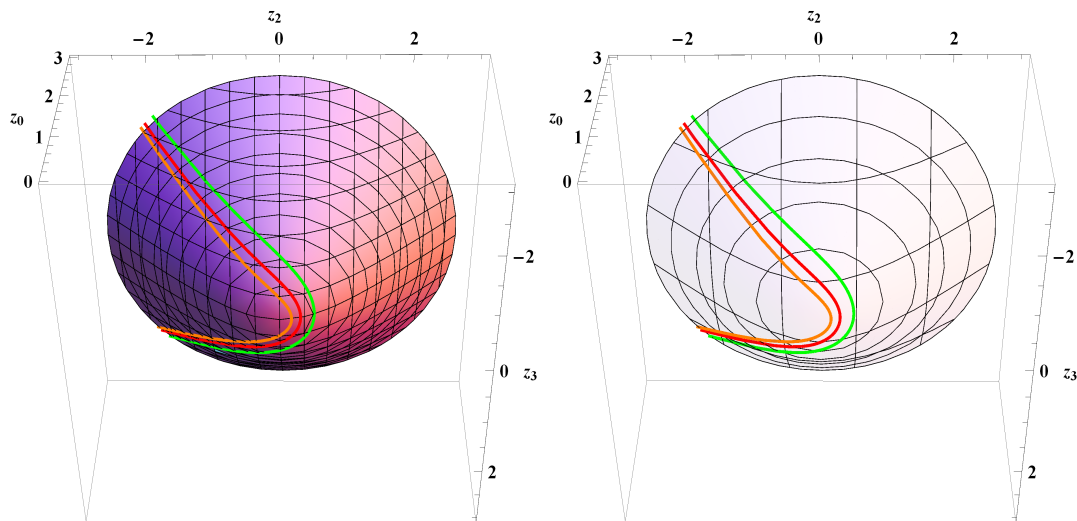


Рис. 1.12: Траектории для $p = 0.5, 1, 2$, $\varepsilon = 1.3$

В случае $E = -\frac{\mu}{R}$, эксцентриситет $\varepsilon = 1$ траектория является параболой с минимальным расстоянием:

$$r_{min} = \operatorname{arccoth} \left(\frac{2\mu R}{L^2} - 1 \right).$$

В случае $L^2 < 0$, подобные расчёты ведут к выражению для $\coth r$ в виде:

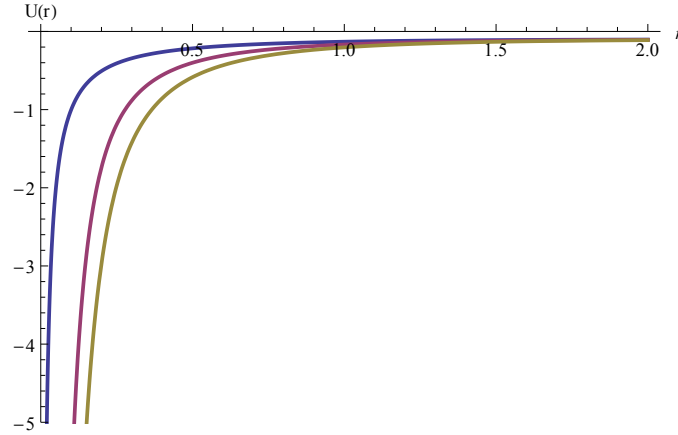


Рис. 1.13: Эффективный потенциал для $L^2 = 0, -10, -20$ ($\mu = 1, R = 10$)

(i) Для $2R^2E < \mu^2R^2/|L^2| + |L^2|$

$$\coth r = -\frac{\mu R}{|L^2|} + \sqrt{\frac{\mu^2 R^2}{|L^4|} + 1 - \frac{2R^2E}{|L^2|}} \cosh(\tau + \sqrt{4|L^2|}\beta)$$

(ii) Для $2R^2E > \mu^2R^2/|L^2| + |L^2|$

$$\coth r = -\frac{\mu R}{|L^2|} + \sqrt{\frac{2R^2E}{|L^2|} - \frac{\mu^2 R^2}{|L^4|} - 1} \sinh(\tau + \sqrt{4|L^2|}\beta)$$

(iii) Для $2R^2E = \mu^2R^2/|L^2| + |L^2|$

$$\coth r = -\frac{\mu R}{|L^2|} + e^{(\tau + \sqrt{4|L^2|}\beta)}$$

Для случая $|z_0| < R$ соответствующие уравнения для траектории запишутся как

(i) Для $2R^2E < |L^2| - \mu^2R^2/|L^2|$

$$\cot \chi = \frac{\mu R}{|L^2|} - \sqrt{1 - \frac{2R^2E}{|L^2|} - \frac{\mu^2 R^2}{|L^4|}} \sinh(\nu + \sqrt{4|L^2|}\beta)$$

(ii) Для $2R^2E > |L^2| - \mu^2R^2/|L^2|$

$$\cot \chi = \frac{\mu R}{|L^2|} + \sqrt{\frac{2R^2E}{|L^2|} + \frac{\mu^2 R^2}{|L^4|} - 1} \cosh(\nu + \sqrt{4|L^2|}\beta)$$

(iii) Для $2R^2 E = |L^2| - \mu^2 R^2 / |L^2|$

$$\cot \chi = \frac{\mu R}{|L^2|} + e^{-(\nu + \sqrt{4|L^2|\beta})}$$

Глава 2

Квантовое движение на $SO(2, 2)$ гиперболоиде

Данная глава посвящена решению задачи о гармоническом осцилляторе и движении в кулоновском поле на $SO(2, 2)$ гиперболоиде в квантовой механике. Нашей задачей будет является определение уравнений Шредингера для данных систем, вычисление волновых функций, и нахождение спектров энергии. Для задачи гармонического осциллятора, мы решим задачу более чем в одной системе координат, и сделаем разложение между новыми функциями для двух из них.

2.1 Общие формулы для H_2^2 пространства в контексте квантовой механики

В первой главе мы выписали основные свойства гиперболического пространства H_2^2 . Здесь мы сделаем короткие замечания о связи квантового случая с классическим. Генераторы группы $SO(2, 2)$ могут быть получены в дифференциальной форме из классических переходом $p_\mu \rightarrow -i\partial/\partial z_\mu$

$$\begin{aligned} L_1 = M_{23} &= -i(z_2\partial_3 - z_3\partial_2) = -M_{32} & -N_1 = M_{01} &= -i(z_0\partial_1 - z_1\partial_0) = -M_{10} \\ L_2 = M_{13} &= -i(z_1\partial_3 + z_3\partial_1) = M_{31} & N_2 = M_{02} &= -i(z_0\partial_2 + z_2\partial_0) = M_{20} \\ -L_3 = M_{12} &= -i(z_1\partial_2 + z_2\partial_1) = M_{21} & N_3 = M_{03} &= -i(z_0\partial_3 + z_3\partial_0) = M_{30} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\partial_i = \partial/\partial z_i$. Операторы $M_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] = -i\delta_{\nu\alpha}M_{\mu\beta} + i\delta_{\mu\alpha}M_{\beta\nu} - i\delta_{\nu\beta}M_{\mu\alpha} - i\delta_{\mu\beta}M_{\nu\alpha}, \quad \mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

или

$$[L_i, L_j] = -i\bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}L_k, \quad [N_i, N_j] = -i\bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}L_k, \quad [N_i, L_j] = -i\bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}N_k,$$

где $i, j, k, m, n = 1, 2, 3$ и мы вводи трёхмерную метрику

$$\bar{g}_{ik} = \text{diag}\{-1, 1, 1\}$$

В таком случае в псевдо-сферических координатах (1.2) оператор \hat{L}^2 примет вид

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 - \hat{L}_2^2 - \hat{L}_3^2 = \left(\frac{1}{\cosh \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \cosh \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cosh^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (2.2)$$

что совпадает с оператором Казимира группы $SO(2, 1)$.

Группа $SO(2, 2)$ имеет два оператора Казимира, первая из которых, нулевая для реализации (2.1)

$$\mathcal{C}_1 = \mathbf{LN} = \mathbf{NL} = N_1 L_1 - N_2 L_2 - N_3 L_3 = 0$$

а вторая совпадает с оператором Лапласа-Бельтрами в некоторых криволинейных системах координат (η^1, η^2, η^3)

$$\mathcal{C}_2 = R^2 \Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial \eta^i} \sqrt{|g|} g^{ik} \frac{\partial}{\partial \eta^k} = \mathbf{N}^2 + \mathbf{L}^2$$

где g_{ik} метрический тензор $g = \det|g_{ik}|$, $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$ и

$$\mathbf{N}^2 = N_1^2 - N_2^2 - N_3^2, \quad \mathbf{L}^2 = L_1^2 - L_2^2 - L_3^2$$

Геодезическое движение на H_2^2 гиперboloиде описывается уравнение Гельмгольца

$$\Delta_{LB} \Psi(\mathbf{z}) = \frac{\ell(\ell + 2)}{R^2} \Psi(\mathbf{z}), \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3), как показано в [26, 112] допускает полное разделение переменных в 71-ом ортогональных и 3-х неортогональных системах координат.

При контракции $R \rightarrow \infty$ гиперболическое пространство H_2^2 переходит в псевдо-евклидово пространство $E_{2,1}$, и алгебра $so(2, 2)$ переходит в $e(2, 1)$.

Перейдем к координатам Бельтрами

$$x_i = R \frac{z_i}{z_0} = R \frac{z_i}{\sqrt{R^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1^2}}, \quad i = 1, 2, 3$$

Для операторов \mathbf{N} и \mathbf{L} получим

$$\begin{aligned} -\frac{N_1}{R} &\rightarrow \pi_1 = p_1 + \frac{x_1}{R^2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) & L_1 &\rightarrow -l_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2 \\ \frac{N_2}{R} &\rightarrow \pi_2 = p_2 - \frac{x_2}{R^2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) & L_2 &\rightarrow l_2 = x_3 p_1 + x_1 p_3 \\ \frac{N_3}{R} &\rightarrow \pi_3 = p_3 - \frac{x_3}{R^2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) & -L_3 &\rightarrow -l_3 = x_2 p_1 + x_1 p_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $p_i = -i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Подставляя (2.4) в (2.2) и устремляя $R \rightarrow \infty$ получим коммутационные соотношения для алгебры $e(2, 1)$

$$[l_i, l_j] = i \bar{g}_{im} \bar{g}_{jn} \varepsilon_{mnk} l_k \quad [p_i, l_j] = i \bar{g}_{im} \bar{g}_{jn} \varepsilon_{mnk} p_k \quad [p_i, p_j] = 0.$$

В то же пределе оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2} (\mathbf{N}^2 + \mathbf{L}^2) \rightarrow p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

перейдет в оператор Лапласа для пространства $E_{2,1}$.

2.2 Уравнения Шредингера

Уравнения Шредингера

$$H\Psi = -\frac{1}{2} \Delta_{LB} \Psi + V(\mathbf{z})\Psi = E\Psi \quad (2.5)$$

в псевдо-сферической системе координат в случае $|z_0| < R$ для каждого из потенциалов запишутся как

$$\frac{1}{\sinh^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \sinh^2 r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left[2R^2 E - \frac{\hat{L}^2}{\sinh^2 r} - \omega^2 R^4 \tanh^2 r \right] \Psi = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\sinh^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \sinh^2 r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left[2R^2 E - \frac{\hat{L}^2}{\sinh^2 r} + \frac{\mu}{R} (\coth r - 1) \right] \Psi = 0, \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6) и (2.7) могут быть решены с помощью анзаца $\Psi(r, \tau, \varphi) = \mathcal{R}(r) \mathcal{Y}(\tau, \varphi)$. Псевдо-сферическая функция $\mathcal{Y}(\tau, \varphi)$ является собственной функцией операторов

$$\mathbf{L}^2 \mathcal{Y}_\ell^m = \ell(\ell + 1) \mathcal{Y}_\ell^m \quad \hat{L}_1^2 \mathcal{Y}_\ell^m = m^2 \mathcal{Y}_\ell^m \quad (2.8)$$

которое описывает квантовое геодезическое движение на двухмерном одно-полосом гипер-болоиде. Спектр ℓ , согласно неприводимому представлению группы $SO(2, 1)$, разделяется на следующие случаи ¹: положительная дискретная серия - ℓ целое и $m = \ell + 1, \ell + 2, \dots$, отрицательная дискретная серия - ℓ целое и $m = -(\ell + 1), -(\ell + 2), \dots$ и основная непрерывная серия - $\ell = -1/2 + i\rho$ and $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В первом случае собственные значения оператора \hat{L}^2 положительны а во втором отрицательны. Для нахождения явного вида $\mathcal{Y}(\tau, \varphi)$ запишем её в виде $Y(\tau, \varphi) = S(\tau) e^{im\varphi} / \sqrt{2\pi}$ $m \in \mathbf{Z}$ и подставим в (2.2). Тогда для функции $S(\tau)$ получим

$$\frac{1}{\cosh \tau} \frac{d}{d\tau} \cosh \tau \frac{dS}{d\tau} + \left[-\ell(\ell + 1) + \frac{m^2}{\cosh^2 \tau} \right] S = 0 \quad (2.9)$$

¹Мы не учитываем дополнительную непрерывную серию где $-1/2 < \ell < 0$ и $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Дальнейшая подстановка $S(\tau) = (\cosh \tau)^{-1/2} f(\tau)$ in (2.9) приводит к уравнению

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left[-k + \frac{m^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau} \right] f = 0, \quad k = \left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.10)$$

Последнее уравнение представляет собой одномерное движение в поле с потенциалом

$$V_{|m|}(\tau) = -\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2 \cosh^2 \tau}$$

Когда $m \neq 0$ это яма с глубиной $V_{|m|}^{min} = -(m^2 - \frac{1}{4})/2$. Из рисунка (2.1) видно, что когда $k > 0$ (ℓ реально) существуют связанные состояния, а когда $k < 0$ (ℓ комплексно) спектр становится непрерывным.

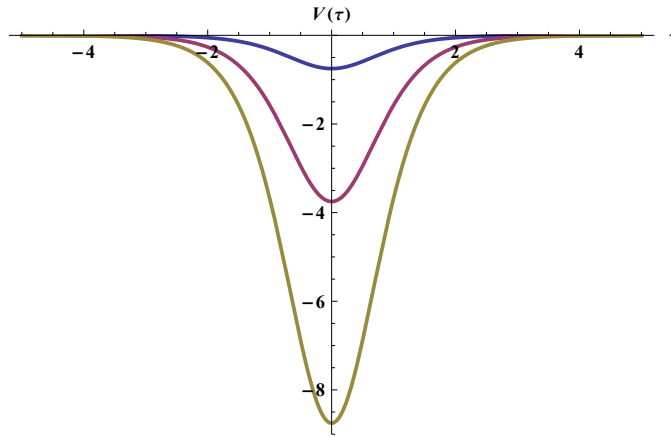


Рис. 2.1: $V(\tau)$ потенциала для $|m| = 1, 2, 3$

1. Дискретный спектр. Регулярное решение уравнения (2.10) при $\tau = 0$ и $\tau \rightarrow \pm\infty$ [113, 114] имеет вид

$$S_{\ell m}(\tau) = C_{\ell m} (\cosh \tau)^{-\ell-1} {}_2F_1 \left(-|m| + \ell + 1, |m| + \ell + 1; \ell + \frac{3}{2}; \frac{1 - \tanh \tau}{2} \right), \quad (2.11)$$

где $\ell = 0, 1, \dots$ и для фиксированных значений квантового числа ℓ существуют ограничения на квантовое число m : $m = (\ell + 1), (\ell + 2), \dots$ или $m = -(\ell + 1), -(\ell + 2), \dots$. Нормировочная константа $C_{\ell m}$ в ур. (2.11)

$$C_{\ell m} = \frac{1}{2^\ell \Gamma(\ell + 1/2)} \sqrt{\frac{(|m| + \ell)!}{(2\ell + 1)(|m| - \ell - 1)!}}$$

выбрана из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\ell m}(\tau) S_{\ell' m}(\tau) \cosh \tau d\tau = \delta_{\ell \ell'}$$

Таким образом полное решение \mathcal{Y} может быть записано как

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\tau, \varphi) = \frac{2^\ell \ell!}{\pi} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(|m|-\ell-1)!}{2(|m|+\ell)!}} (\cosh \tau)^{-\ell-1} C_{|m|-\ell-1}^{\ell+1}(\tanh \tau) e^{im\varphi} \quad (2.12)$$

Используя формулу [115]

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) &= \frac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})\Gamma(b+\frac{1}{2})} {}_2F_1\left(a, b; \frac{1}{2}; x^2\right) \\ &+ x \frac{\Gamma(a+b+\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1\left(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) \end{aligned}$$

возможно переписать решение (2.11) в виде чётной и нечётной функции $\vartheta_{\ell m}^{(\pm)}(\tau)$:

$$S_{\ell m}^{(+)}(\tau) = C_{\ell m}^{(+)} (\cosh \tau)^{-\ell-1} {}_2F_1\left(-\frac{|m|-\ell-1}{2}, \frac{|m|+\ell+1}{2}; \frac{1}{2}; \tanh^2 \tau\right) \quad (2.13)$$

для $(|m|-\ell-1) = 0, 2, 4, \dots$, и

$$S_{\ell m}^{(-)}(\tau) = C_{\ell m}^{(-)} (\cosh \tau)^{-\ell-1} \tanh \tau {}_2F_1\left(-\frac{|m|-\ell}{2}+1, \frac{|m|+\ell}{2}+1; \frac{3}{2}; \tanh^2 \tau\right) \quad (2.14)$$

для $(|m|-\ell-1) = 1, 3, \dots$. Нормализационные константы $C_{\ell m}^{(\pm)}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{\ell m}^{(+)} &= (-1)^{\frac{|m|-\ell-1}{2}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\pi R^2}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{|m|+\ell+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|m|-\ell}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|m|+\ell}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{|m|-\ell+1}{2}\right)}}, \\ C_{\ell m}^{(-)} &= (-1)^{\frac{|m|-\ell-2}{2}} \sqrt{\frac{2(2\ell+1)}{\pi R^2}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{|m|+\ell}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{|m|-\ell+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{|m|-\ell}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|m|+\ell+1}{2}\right)}}. \end{aligned}$$

2. Непрерывный спектр. Функции непрерывного спектра можно получить сделав аналитическое продолжение $\ell = -\frac{1}{2} + i\rho$, $\rho > 0$ в формулах (2.13), (2.14), и пользуясь формулой [115]

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \quad (2.15)$$

В результате имеем, что волновые функции соответствующие непрерывной серии представлений в виде чётной и нечётной функций имеют вид

$$\begin{aligned} S_{\rho m}^{(+)}(\tau) &= C_{\rho m}^{(+)} (\cosh \tau)^{-|m|} {}_2F_1\left(\frac{1}{4} + \frac{i\rho}{2} - \frac{|m|}{2}, \frac{1}{4} - \frac{i\rho}{2} - \frac{|m|}{2}; \frac{1}{2}; -\sinh^2 \tau\right), \\ S_{\rho m}^{(-)}(\tau) &= C_{\rho m}^{(-)} (\cosh \tau)^{-|m|} \sinh \tau {}_2F_1\left(\frac{3}{4} + \frac{i\rho}{2} - \frac{|m|}{2}, \frac{3}{4} - \frac{i\rho}{2} - \frac{|m|}{2}; \frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau\right), \end{aligned}$$

где коэффициенты нормировки

$$C_{\rho m}^{(+)} = \sqrt{\frac{\rho \tanh \pi \rho}{\pi}} \frac{\left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{|m|}{2} + \frac{i\rho}{2}\right) \right|}{\left| \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{|m|}{2} + \frac{i\rho}{2}\right) \right|}, \quad C_{\rho m}^{(-)} = \sqrt{\frac{4\rho \tanh \pi \rho}{\pi}} \frac{\left| \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{|m|}{2} + \frac{i\rho}{2}\right) \right|}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{|m|}{2} + \frac{i\rho}{2}\right) \right|}.$$

выбраны из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{\rho m}^{(\pm)}(\tau) S_{\rho' m}^{(\pm)}(\tau) \cosh \tau d\tau = \delta(\rho - \rho').$$

2.3 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора

Задачу гармонического осциллятора на гиперблоиде H_2^2 можно решить в трёх ортогональных системах координат- псевдо-сферической, цилиндрической и эквидистантной.

2.3.1 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в псевдо-сферических координатах

После подстановки волновой функции в виде

$$\Psi(r, \tau, \varphi) = (\sinh r)^{-1} R(r) \mathcal{Y}_\ell^m(\tau, \varphi), \quad (2.16)$$

в (2.6) (где $\mathcal{Y}_\ell^m(\tau, \varphi)$ было найдено выше) и учитывая (2.8) приходим к радиальному уравнению

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left[\mathcal{E} + \frac{\nu^2 - 1/4}{\cosh^2 r} - \frac{(\ell + 1/2)^2 - 1/4}{\sinh^2 r} \right] R = 0 \quad (2.17)$$

где $\mathcal{E} = 2R^2 E - \omega^2 R^4 - 1$ и $\nu = \sqrt{\omega^2 R^4 + \frac{1}{4}}$.

Рассмотрим случай когда ℓ целое: $\ell = 0, 1, 2, \dots$. Спектр уравнения (2.17) содержит конечное количество связанных состояний при $\nu > \ell + 3/2$ и описывается волновой функцией нормированном на интервале $[0, \infty)$ [116]:

$$R_{n_r \ell}(r) = N_{n_r \ell} (\sinh r)^{\ell/2} (\cosh r)^{1/2 - \nu} {}_2F_1(-n_r, n_r + \ell + 3/2 - \nu; \ell + 3/2; -\sinh^2 \tau), \quad (2.18)$$

$$N_{n_r \ell} = \frac{1}{\Gamma(\ell + 3/2)} \sqrt{\frac{2(\nu - \ell - 2n_r - 3/2) \Gamma(\ell + n_r + 3/2) \Gamma(\nu - n_r)}{n_r! \Gamma(\nu - n_r - \ell - 1/2)}},$$

где $n_r = 0, 1, \dots, [\frac{1}{2}(\nu - \ell - 3/2)]$ это радиальное квантовое число. Волновая функция (2.18) может быть выражена через полиномы Якоби степени n_r от аргумента $\cosh 2r$. Ортонормированная волновая функция $\Psi(r, \tau, \varphi) \equiv \Psi_{n_r \ell m}(r, \tau, \varphi; \nu)$ определяется формулами (2.16),

(2.12) и (2.18). В результате энергетический спектр описывается формулой

$$E_N(\nu, R) = -\frac{(N+1)(N+3)}{2R^2} + \frac{\nu+1/2}{R^2} \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

Здесь $N = \ell + 2n_r$ главное квантовое число и связанные состояния возникают для $N = 0, 1, \dots, N_{max} = [\nu - 3/2]$ ($[x]$ - целая часть от x). При фиксированной ν гармонический осциллятор на SO(2,2) гиперboloиде имеет конечное число дискретных уровней энергии, энергия основного состояния равна $E_0 = 3(\nu - 1/2)/2R^2$ а последняя находится около $E_{N_{max}} \sim (\nu^2 + 3/4)/2R^2$. Для фиксированного квантового числа N все уровни вырождены по квантовым числам ℓ и n_r , для чётных и нечётных N соответственно $(N+2)/2$ и $(N+1)/2$ число раз. Кроме этого все состояния для фиксированного значения ℓ бесконечно вырождены по азимутальному квантовому числу m : $m = \pm(\ell+1), \pm(\ell+2), \dots$

Непрерывные состояния описываются волновой функцией [116]

$$R_{p\ell}(r) = N_{p\ell} (\sinh r)^{\ell/2} (\cosh r)^{1/2-\nu} \times {}_2F_1 \left(\frac{\ell+3/2-\nu+ip}{2}, \frac{\ell+3/2-\nu-ip}{2}; \ell+\frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau \right), \quad (2.19)$$

$$N_{p\ell} = \frac{1}{\Gamma(\ell+3/2)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2}} \left| \Gamma \left\{ \frac{\ell+3/2+\nu+ip}{2} \right\} \Gamma \left\{ \frac{\ell+3/2-\nu+ip}{2} \right\} \right|$$

где энергия непрерывного спектра равна $E = (\nu^2 + 3/4 + p^2/4)/2R^2$, $p \in \mathbf{R}$ с минимальным значением: $E_{min} = (\nu^2 + 3/4)/2R^2$. Нормированная полная волновая функция $\Psi(r, \tau, \varphi) \equiv \Psi_{p\ell m}(r, \tau, \varphi; \nu)$ определяется формулами (2.16) и (2.19). Таким образом мы получили, что для целых значений квантового числа ℓ спектр энергии положителен и разделяется на две части, дискретную для $3(\nu - 1/2)/2R^2 < E < (\nu^2 + 3/4)/2R^2$ и непрерывную для $(\nu^2 + 3/4)/2R^2 \leq E$.

Случай когда $\ell = -1/2 + ip$ потенциал в уравнении (2.17) принимает вид притягивающего потенциала $V(r) = -(\nu^2 - 1/4) \cosh^2 r - (p^2 + 1/4) \sinh^2 r$ которая сингулярна как $\sim r^{-2}$ at $r \sim 0$ и следовательно соответствующая задача собственных значений сингулярна в начале интервала $r \in (0, \infty)$. каждая из линейно независимых решений (2.17) квадратично интегрируема, спектр дискретен для каждого самосопряжённого расширения. Однако прямой расчет ортонормированного базиса собственной функций является сложной задачей которую мы тут пропустим.

2.3.2 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в цилиндрических координатах

В цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} z_0 &= R \cosh \rho \cos \theta & z_2 &= R \sinh \rho \cos \varphi \\ z_1 &= R \cosh \rho \sin \theta & z_3 &= R \sinh \rho \sin \varphi \\ \rho &> 0, & \theta &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & \varphi &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

с метрическим элементом

$$\frac{ds^2}{R^2} = d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\theta^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2$$

и оператором Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\cosh \rho \sinh \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \cosh \rho \sinh \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\cosh^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sinh^2 \rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

потенциал осциллятора (1.13) запишется

$$U(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \rho \cos^2 \theta} \right) \quad (2.20)$$

Выбирая волновую функцию Ψ в виде

$$\Psi(\rho, \theta, \varphi) = (\cosh \rho \sinh \rho)^{-1/2} R(\rho) Z(\theta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.21)$$

после разделения переменных, приходим к системе связанных дифференциальных уравнений вида Пешля-Теллера

$$\begin{aligned} Z''(\chi) + \left[4A^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\sin^2 \chi} - \frac{\nu^2 - 1/4}{\cos^2 \chi} \right] Z(\chi) &= 0, \\ R''(\rho) + \left[\mathcal{E} + \frac{A^2 - 1/4}{\cosh^2 \rho} - \frac{m^2 - 1/4}{\sinh^2 \rho} \right] R(\rho) &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $\chi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$, $\mathcal{E} = 2R^2 E - \omega^2 R^2 - 1$, $\nu = \sqrt{\omega^2 R^4 + \frac{1}{4}}$ и A цилиндрическая константа разделения. Рассмотрим первое уравнение (2.22). Заметим, что поскольку потенциал (2.20) сингулярен в точках $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ и барьер в этих точках непроходим, будем рассматривать движение только в области $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Квадратично интегрируемое решение уравнения (2.22) нормализованное в области $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ имеет следующий вид [114]

$$Z(\theta) \equiv Z_{n_3}(\theta; \nu) = \frac{\sqrt{(n_3 + \nu + 1/2)n_3! \Gamma(1 + n_3 + 2\nu)}}{\Gamma(1 + n_3 + \nu)} (\cos \theta)^{\nu+1/2} P_{n_3}^{(\nu, \nu)}(\sin \theta) \quad (2.23)$$

с $n_3 = 0, 1, 2, \dots$, где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ полином Якоби [115]. Константа разделения квантуется как

$$A = (n_3 + \nu + 1/2).$$

Второе (модифицированное) уравнение Пешля-Теллера было полностью изучено в статье [45, 46, 117]. Собственные значения и волновые функции связанных состояний для $m \neq 0$ (в случае $m = 0$ потенциал притягивающий и сильно сингулярный в точке $\rho = 0$ и дискретный случай не существует) пишутся как

$$R(\rho) \equiv R_{n_\rho}^{n_3 m}(\rho) = N_{n_\rho}^{n_3 m} (\sinh \rho)^{|m|+1/2} (\cosh \rho)^{-(n_3+\nu)} \\ \times {}_2F_1(-n_\rho, n_\rho + |m| - n_3 - \nu + 1/2; |m| + 1; -\sinh^2 \rho) \quad (2.24)$$

$$\mathcal{E} = -(A - |m| - 2n_\rho - 1)^2 = -(\nu - 3/2 - N)^2 \quad (2.25)$$

где радиальное число n_ρ пробегает значения $n_\rho = 0, 1, 2, \dots, n_\rho^{max} = [\frac{1}{2}(\nu + n_3 - |m| - \frac{1}{2})]$ и связанные состояния возможны только для случая $n_3 - |m| + \nu - \frac{1}{2} > 0$. Волновая функция $R_{n_\rho n_3 m}(\rho)$ удовлетворяет ортогональному соотношению

$$R^3 \int_0^\infty R_{n'_\rho}^{n_3 m}(\rho) R_{n_\rho}^{n_3 m}(\rho) d\rho = \delta_{n_\rho n'_\rho}$$

и нормализационный фактор имеет вид

$$N_{n_\rho}^{n_3 m} = \frac{1}{|m|!} \sqrt{\frac{2(n_3 - 2n_\rho - |m| + \nu - 1/2)(n_\rho + |m|)! \Gamma(n_3 - n_\rho + \nu + 1/2)}{R^3 (n_\rho)! \Gamma(n_3 - n_\rho - |m| + \nu + 1/2)}} \quad (2.26)$$

Полная волновая функция $\Psi_{n_\rho n_3 m}(\rho, \theta, \varphi)$ нормализованная по отношению к $\sinh \rho \cosh \rho d\rho d\varphi$ даётся функцией (2.21), (2.24) и (2.26). Квантовая энергия запишется

$$E = -\frac{(N+1)(N+3)}{2R^2} + \frac{\nu+1/2}{R^2} \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (2.27)$$

где $N = |m| + 2n_\rho - n_3 - 1$ главное квантовое число и связанные состояния существуют для $N < \nu - 3/2$. Следовательно существует финитное количество дискретных состояний с положительной энергией и бесконечное количество с отрицательной. Наивысшая положительная энергия располагается около $E \sim (\nu^2 + 3/4)/2R^2$. Для фиксированного квантового числа N уровни энергии бесконечно вырождены для квантовых чисел n_3 и m . Эти качества являются общими отличительными особенностями задачи осциллятора на гиперboloиде $SO(2,2)$ от осциллятора в евклидовом пространстве S_3 , сфере и двух-полосом гиперboloиде H_3 . Каждая из решений $\Psi_{n_\rho n_3 m}$ удовлетворяет уравнению собственного значения

$$\mathcal{L}_1 \Psi_{n_\rho n_3 m} = L_1^2 \Psi_{n_\rho n_3 m} = -m^2 \Psi_{n_\rho n_3 m}$$

и

$$\mathcal{L}_2 \Psi_{n_\rho n_3 m} = (R^2 D_{11} + \omega^2 R^4) \Psi_{n_\rho n_3 m} = (n_3 + \nu + \frac{1}{2}) \Psi_{n_\rho n_3 m}$$

2.3.3 Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в эквидистантных координатах

В эквидистантных координатах

$$\begin{aligned} z_0 &= R \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 \cos \theta, & z_2 &= R \cosh \tau_1 \sinh \tau_2, \\ z_1 &= R \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 \sin \theta, & z_3 &= R \sinh \tau_1, \end{aligned}$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), (\tau_1, \tau_2) \in (-\infty, \infty)$$

с метрическим элементом

$$\frac{ds^2}{R^2} = d\tau_1^2 + \cosh^2 \tau_1 d\tau_2^2 - \cosh^2 \tau_1 \cosh \tau_2 d\varphi^2$$

и оператором Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \cosh \tau_1^2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{1}{\cosh \tau_1^2} \left[\frac{1}{\cosh \tau_2} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \cosh \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} - \frac{1}{\cosh^2 \tau_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\}$$

потенциал осциллятора записывается как

$$U(\tau_1, \tau_2, \theta) = \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \tau_1 \cosh^2 \tau_2 \cos^2 \theta} \right)$$

После подстановки волновой функции в виде

$$\Psi(\tau_1, \tau_2, \theta) = (\cosh \tau_1)^{-1} X(\tau_1) (\cosh \tau_2)^{-1/2} Y(\tau_2) Z_{n_3}(\theta), \quad (2.28)$$

где функция $Z_{n_3}(\theta)$ даётся формулой (2.23), и после разделения переменных, получаем два модифицированных (симметричных) уравнений типа Пешля-Теллера

$$Y''(\tau_2) + \left[-(j + 1/2)^2 + \frac{(n_3 + \nu + \frac{1}{2})^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_2} \right] Y(\tau_2) = 0$$

$$X''(\tau_1) + \left[\mathcal{E} + \frac{(j + 1/2)^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_1} \right] X(\tau_1) = 0$$

и j эквидистантная константа разложения. Нормализованные в области $(\tau_1, \tau_2) \in (-\infty, \infty)$ связанные волновые функции запишутся

$$Y_{jn_2n_3}(\tau_2) = 2^j \Gamma(j + 1) \sqrt{\frac{(2j + 1)(n_2)!}{\pi \Gamma(n_3 + j + \nu + 3/2)}} (\cosh \tau_2)^{-j - \frac{1}{2}} C_{n_2}^{j+1}(\tanh \tau_2) \quad (2.29)$$

и

$$X_{jn_1}(\tau_1) = \frac{\Gamma(j - n_1 + \frac{1}{2})}{2^{n_1 - j}} \sqrt{\frac{(j - n_1)n_1!}{\pi \Gamma(2j - n_1 + 1)}} (\cosh \tau_1)^{-j + n_1} C_{n_1}^{j - n_1 + \frac{1}{2}}(\tanh \tau_1) \quad (2.30)$$

а константы j и $\sqrt{\mathcal{E}}$ будут

$$j = n_3 - n_2 + \nu - \frac{1}{2}, \quad \mathcal{E} = -(j - n_1)^2$$

где квантовые числа n_1 и n_2 пробегает значения $n_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2^{max} = [n_3 + \nu - 1/2]$ и $n_1 = 0, 1, \dots, n_1^{max} = [j]$. Энергия связанного состояния E_N даётся формулой (2.27), где здесь главное квантовое число N запишется через эквидистантные квантовые числа (n_1, n_2, n_3) как $N = n_1 + n_2 - n_3 - 1$.

Таким образом полная функция $\Psi_{jn_1n_2n_3}(\tau_1, \tau_2, \theta)$ соответствующая дискретному спектру даётся формулами (2.28), (2.29), и (2.30) и удовлетворяет

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 \Psi_{jn_1n_2n_3} &= \left[\frac{1}{\cosh \tau_2} \frac{\partial}{\partial \tau_2} \cosh \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} - \frac{1}{\cosh^2 \tau_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\cos^2 \theta} \right) \right] \Psi_{jn_1n_2n_3} \\ &= j(j+1) \Psi_{jn_1n_2n_3} \end{aligned}$$

2.4 Межбазисное разложение между цилиндрическим и эквидистантными системами

Связь между эквидистантным и цилиндрическим базисами при фиксированном значении квантового числа $N = n_1 + n_2 - n_3 - 1 = 2n_\rho + |m| - n_3 - 1$ и квантового числа n_3 имеет вид разложения

$$\Psi_{jn_1n_2n_3}(\tau_1, \tau_2, \theta) = \sum_{m=-(n_1+n_2)}^{(n_1+n_2)} W_{jn_1n_2n_3}^{n_\rho m} \Psi_{n_\rho m n_3}(\rho, \theta, \varphi) \quad (2.31)$$

$$\Psi_{n_\rho m n_3}(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n_1=0}^{2n_\rho+|m|} W_{n_\rho m}^{jn_1n_2n_3} \Psi_{jn_1n_2n_3}(\tau_1, \tau_2, \theta)$$

где волновые функции $\Psi_{jn_1n_2n_3}(\tau_1, \tau_2, \theta)$ и $\Psi_{n_\rho m n_3}(\rho, \theta, \varphi)$ даются формулами (2.21), и (2.28), квантовое число m имеет ту же четность как $n_1 + n_2$ и пробегает значения $m = -(n_1 + n_2), -(n_1 + n_2) + 2, \dots, (n_1 + n_2) - 2, (n_1 + n_2)$.

Для расчёта точного вида коэффициента разложения $W_{jn_1n_2n_3}^{n_\rho m}$ достаточно воспользоваться ортогональностью только одной функции входящей в цилиндрическую волновую функцию, а именно $e^{im\varphi}$. Следовательно, можем зафиксировать вторую переменную ρ , которая не участвует в интегрировании (функция $Z_{n_3}(\theta)$ сокращается с обеих сторон разложения (2.31)) в наиболее нам удобной точке. Теперь в левой части разложения перейдем от сферических координат к цилиндрическим, согласно формулам

$$\sinh \tau_1 = \sinh \rho \sin \varphi, \quad \tanh \tau_2 = \tan \rho \cos \varphi, \quad \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 = \cosh \rho.$$

Учитывая, что при больших ρ :

$$\sinh \tau_1 \sim \frac{e^\rho}{2} \sin \varphi, \quad \tanh \tau_2 \sim \cos \varphi.$$

и асимптотический вид гипергеометрической функции:

$$\begin{aligned} & {}_2F_1(-n_\rho, n_\rho + |m| - n_3 - \nu + 1/2; |m| + 1; -\sinh^2 \rho) \\ & \approx \frac{\Gamma(|m| + 1)\Gamma(2n_\rho - n_3 + |m| - \nu + 1/2)}{\Gamma(n_\rho + |m| - n_3 - \nu + 1/2)\Gamma(|m| + n_\rho + 1)} (\sinh^2 \rho)^{n_\rho} \end{aligned}$$

получаем что

$$\begin{aligned} \Psi_{jn_1n_2n_3}(\tau_1, \tau_2, \theta) & \approx 2^{3j-2n_1+1} \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(j-n_1+\frac{1}{2})}{\pi\Gamma(2j-2n_1+1)} \sqrt{\frac{(2j+1)(j-n_1)(n_2)!\Gamma(2j-n_1+1)}{(n_1)!\Gamma(n_3+j+\nu+3/2)}} \\ & \times (\sin \varphi)^{n_1} C_{n_2}^{j+1}(\cos \varphi) Z_{n_3}(\theta) e^{(n_1-j-1)\rho} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n_\rho n_3 m}(\rho, \theta, \phi) & \approx 2^{j-n_1+1} \frac{\Gamma(n_1-j)}{\Gamma(n_1-j-n_\rho)} \sqrt{\frac{2(j-n_1)\Gamma(j+n_\rho-n_1+1+|m|)}{(n_\rho)!(|m|+n_\rho)!\Gamma(j+n_\rho-n_1+1)}} \\ & \times Z_{n_3}(\theta) e^{(n_1-j-1)\rho} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Подставляя ур. (2.32) и (2.33) в межбазисное разложение (2.31), устранив функции от переменных ρ и θ и пользуясь ортогональностью функции $e^{im\varphi}$ в области $\varphi \in [0, 2\pi]$ получаем

$$\begin{aligned} W_{jn_1n_2n_3}^{n_\rho m} & = 2^{2j-n_1-1} (-1)^{n_\rho} \frac{\Gamma(j-n_1+1)\Gamma(j+1)\Gamma(j-n_1+1/2)}{\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(j-n_1+n_\rho+1)\Gamma(2j-2n_1+1)} \\ & \sqrt{\frac{(2j+1)(n_2)!(n_\rho)!(|m|+n_\rho)!\Gamma(j+n_\rho-n_1+1)\Gamma(2j-n_1+1)}{(n_1)!\Gamma(n_3+j+\nu+3/2)\Gamma(j+n_\rho-n_1+1+|m|)}} \\ & \times \int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^{n_1} C_{n_2}^{j+1}(\cos \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (2.34)$$

Интеграл в (2.34) может быть рассчитан если использовать разложение полиномов Гегенбауера в терминах экспонентов

$$C_n^\alpha(\cos \varphi) = \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(n-k+\alpha)}{k!(n-k)!} e^{i(n-2k)\varphi}$$

и формулу ([115])

$$\int_0^\pi (\sin \varphi)^\gamma e^{i\beta t} dt = \frac{\pi}{2^\gamma} \frac{\Gamma(1+\gamma) e^{i\frac{\pi}{2}\beta}}{\Gamma(1+\frac{\gamma+\beta}{2})\Gamma(1+\frac{\gamma-\beta}{2})}, \quad \operatorname{Re} \gamma > -1$$

что даёт нам

$$\int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^\gamma e^{i\beta t} dt = \frac{\pi}{2^\gamma} \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\frac{\gamma+\beta}{2})\Gamma(1+\frac{\gamma-\beta}{2})} (e^{i\frac{\pi}{2}\beta} + (-1)^\gamma e^{-i\frac{\pi}{2}\beta}), \quad \operatorname{Re} \gamma > -1$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^{n_1} C_{n_2}^{j+1}(\cos \varphi) e^{-im\varphi} d\varphi = \\ & \frac{\pi \Gamma(n_1+1)}{2^{n_1} \Gamma(j+1)^2} \sum_{k=0}^{n_2} \frac{\Gamma(j+k+1)\Gamma(j+1+n_2-k)}{k!(n_2-k)!\Gamma(1+\frac{n_1+n_2-m}{2}-k)\Gamma(1+\frac{n_1-n_2+m}{2}+k)} \\ & (e^{i(n_2-2k-m)\frac{\pi}{2}} + (-1)^{n_1} e^{-i(n_2-2k-m)\frac{\pi}{2}}) = \\ & = \frac{\pi e^{i(n_2-m)\frac{\pi}{2}} (j+n_2)!(n_1)!}{2^{n_1-1} (n_2)!(j)! (\frac{n_1+n_2-m}{2})! (\frac{n_1-n_2+m}{2})!} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n_2, -\frac{1}{2}(n_1+n_2-m), j+1; 1 \\ -n_2-j, 1+\frac{1}{2}(n_1-n_2+m) \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

и для коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} W_{j n_1 n_2 n_3}^{n_\rho m} &= \sqrt{\frac{(2j+1)(n_1)!(n_\rho)! (|m|+n_\rho)! \Gamma(2j-n_1+1)}{(n_2)!\Gamma(j+n_\rho-n_1+1)\Gamma(n_3+j+\nu+3/2)\Gamma(j+n_\rho-n_1+1+|m|)}} \\ & \times \frac{(-1)^{n_\rho} e^{i(n_2-m)\frac{\pi}{2}} (j+n_2)!}{(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}-\frac{m}{2})! (\frac{n_1}{2}-\frac{n_2}{2}+\frac{m}{2})!} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n_2, -\frac{1}{2}(n_1+n_2-m), j+1; 1 \\ -n_2-j, 1+\frac{1}{2}(n_1-n_2+m) \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

Используя формулу

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, -n; 1 \\ e, f \end{matrix} \right] &= \frac{\Gamma(e)\Gamma(f)\Gamma(1-a)\Gamma(1-f+b)\Gamma(1-e+b)}{\Gamma(2-s-a)\Gamma(1+b-n-f)\Gamma(e+n)\Gamma(f-a)\Gamma(f+n)} \\ & \times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 1-f+b, 1-f-n, 1-s; 1 \\ 2-s-a, 1+b-n-f \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

где n - целое число и $s = e + f - a - b + n$ можем переписать ${}_3F_2$ в виде

$$\begin{aligned} & {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n_2, -\frac{1}{2}(n_1+n_2-m), j+1; 1 \\ -n_2-j, 1+\frac{1}{2}(n_1-n_2+m) \end{matrix} \right] = \\ & = (-1)^{\frac{n_1}{2}-\frac{n_2}{2}+\frac{m}{2}} \frac{(n_1+n_2)! (j-\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}-\frac{m}{2})! (\frac{n_1}{2}-\frac{n_2}{2}+\frac{m}{2})! (j-\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{m}{2})!}{(n_2+j)!(n_1)!(j-n_1)! (\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{m}{2})!} \\ & {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n_1, -\frac{1}{2}(n_1+n_2+m), 1+2j-n_1; 1 \\ 1+j-n_1, -n_1-n_2 \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

и для коэффициента разложения

$$\begin{aligned}
W_{jn_1n_2n_3}^{n_\rho m} &= \frac{(-1)^{n_1 + \frac{|m|-m}{2}} e^{i(n_2-m)\frac{\pi}{2}} (n_1 + n_2)!}{(j - n_1)!} \\
&\times \sqrt{\frac{(2j+1) \left(j - \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2}\right)! \left(j - \frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} - \frac{m}{2}\right)! (2j - n_1)!}{(n_2)! (n_1)! (2j + n_2 + 1)! \left(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} - \frac{m}{2}\right)! \left(\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2}\right)!}} \\
&\times {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n_1, -\frac{1}{2}(n_1 + n_2 + m), 1 + 2j - n_1; \\ 1 + j - n_1, -n_1 - n_2 \end{matrix} \middle| 1 \right]
\end{aligned}$$

Сравним формулу выше с определением полинома Хана

$$Q_n(x; \alpha, \beta, N) = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, -x; \\ \alpha + 1, -N \end{matrix} \middle| 1 \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

и получим для параметров

$$x = n_1, \quad n = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + m), \quad N = n_1 + n_2, \quad \alpha = j - n_1, \quad \beta = j - \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + m).$$

Следовательно будем иметь

$$\begin{aligned}
W_{jn_1n_2n_3}^{n_\rho m} &= \frac{(-1)^x e^{i(2N-2n-x)\frac{\pi}{2}} (N)!}{(\alpha)!} \\
&\times \sqrt{\frac{(2\beta + 2n + 1) (N - n)! (\alpha + n)! (\alpha + N - n)! (\alpha + \beta + n)!}{(x)! (N - x)! (\alpha + \beta + n + N + 1)! (n)!}} Q_n(x; \alpha, \beta, N)
\end{aligned}$$

2.5 Решение уравнения Шредингера для задачи Кеплера-Кулона

Для задачи движения в кулоновском поле, подстановка в уравнение Шредингера (2.7) волновой функции в виде

$$\Psi(\mathbf{z}) = R(r)Y(\xi)$$

с учётом (2.8) даёт нам уравнение на радиальную функцию $R(r)$

$$\frac{1}{\sinh^2 r} \frac{d}{dr} \sinh^2 r \frac{dR}{dr} + \left[2R^2 \left(E + \frac{\mu}{R} (\coth r - 1) \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{\sinh^2 r} \right] R = 0 \quad (2.35)$$

Для его решения сначала в ур. (2.35) сделаем подстановку $R(r) = \Omega(r)/\sinh r$

$$\Omega''(r) + \left[(2R^2 E - 1) + 2\mu R (\coth r - 1) - \frac{\ell(\ell + 1)}{\sinh^2 r} \right] \Omega(r) = 0 \quad (2.36)$$

Данное уравнение описывает одномерное движение в поле с эффективным потенциалом, являющимся потенциалом Манинг-Розена [118]

$$V_\ell(r) = -\mu R (\coth r - 1) + \frac{\ell(\ell + 1)}{2 \sinh^2 r} \quad (2.37)$$

Мы должны разделить два случая когда угловое квантовое число ℓ дискретно или комплексно. Для дискретных ℓ (см Рис. 2.2) существует два спектра: непрерывный для положительных $(2R^2E - 1) > 0$ и дискретный для $(2R^2E - 1) < 0$. В случае комплексных ℓ , потенциал (2.37) сильно сингулярен в точке $r = 0$, для которого в в случае положительных ρ существует непрерывный спектр для $(2R^2E - 1) > 0$, но дискретный спектр не имеет физического смысла, потому что это так называемое "падение на центр".

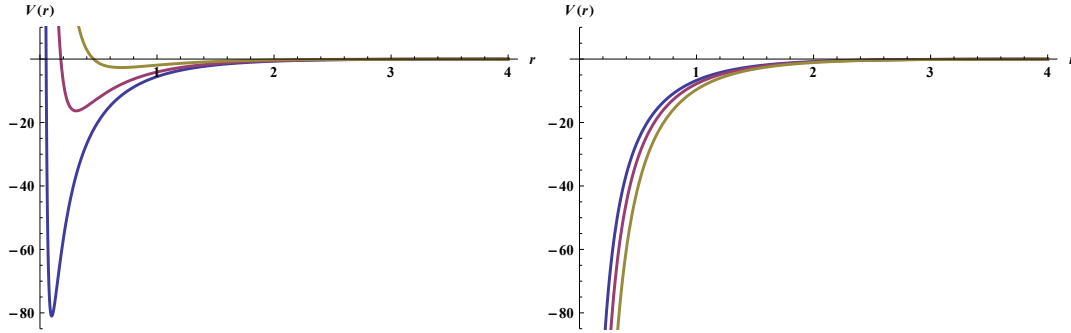


Рис. 2.2: $V_\ell(r)$ потенциал для $\ell = 1, 2, 3$ и $\ell = -\frac{1}{2} + i, -\frac{1}{2} + 2i, -\frac{1}{2} + 3i$ ($\mu R = 20$)

Чтобы решить ур. (2.36), мы следуем статье [119] и вводим новую переменную

$$e^r = \cosh \alpha, \quad \alpha \in [0, \infty), \quad (2.38)$$

и новую волновую-функцию

$$\Omega(\alpha) = \frac{V(\alpha)}{\sqrt{\coth \alpha}}. \quad (2.39)$$

Далее (2.36) переходит в хорошо известное уравнение Пешля-Теллера

$$V''(\alpha) + \left(\tilde{E} + \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\cosh^2 \alpha} - \frac{\nu(\nu - 1)}{\sinh^2 \alpha} \right) V(\alpha) = 0 \quad (2.40)$$

с

$$\tilde{E} = 2R^2E - 1, \quad \lambda = \sqrt{-2R^2E + 1 + 4R\mu} - 1/2, \quad \nu = 2\ell + 3/2$$

Общее решение уравнения (2.40) может быть записано как

$$\begin{aligned} V(\alpha) = & (\cosh \alpha)^{\lambda+1} (\sinh \alpha)^\nu \\ & \times \left\{ A {}_2F_1 \left(\frac{\lambda + \nu + 1 - \sqrt{-\tilde{E}}}{2}, \frac{\lambda + \nu + 1 + \sqrt{-\tilde{E}}}{2}; \nu + \frac{1}{2}; -\sinh^2 \alpha \right) + (\sinh \alpha)^{-2\nu+1} \right. \\ & \left. \times B {}_2F_1 \left(1 + \frac{\lambda - \nu + \sqrt{-\tilde{E}}}{2}, 1 + \frac{\lambda - \nu - \sqrt{-\tilde{E}}}{2}; \frac{3}{2} - \nu; -\sinh^2 \alpha \right) \right\} \quad (2.41) \end{aligned}$$

В данном пункте рассмотрим только случаи целого ℓ . Тогда асимптотическое поведение в точке $\alpha \rightarrow 0$ второй слагаемой в (2.41) сингулярно и мы должны подставить $B = 0$. Далее

пользуясь формулой связывающей гипергеометрические функции от аргументов z и $1/z$:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma; \alpha + 1 - \beta; \frac{1}{z}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} (-z)^{-\beta} {}_2F_1\left(\beta, \beta + 1 - \gamma; \beta + 1 - \alpha; \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

находим асимптоту в $\alpha \rightarrow \infty$

$$V(\alpha) \Big|_{\alpha \rightarrow \infty} \approx \frac{\Gamma(\nu + 1/2)\Gamma(\sqrt{-\tilde{E}})}{\Gamma(\frac{\lambda + \nu + 1 + \sqrt{-\tilde{E}}}{2})\Gamma(\frac{\nu - \lambda + \sqrt{-\tilde{E}}}{2})} e^{\sqrt{-\tilde{E}}\alpha} + \frac{\Gamma(\nu + 1/2)\Gamma(-\sqrt{-\tilde{E}})}{\Gamma(\frac{\lambda + \nu + 1 - \sqrt{-\tilde{E}}}{2})\Gamma(\frac{\nu - \lambda - \sqrt{-\tilde{E}}}{2})} e^{\sqrt{-\tilde{E}}\alpha}$$

Чтобы получить сходящееся решение в $\alpha \rightarrow \infty$ когда $\tilde{E} < 0$ мы должны подставить

$$\frac{\nu - \lambda + \sqrt{|\tilde{E}|}}{2} = -n_r \quad n_r = 0, 1, 2, \dots < \frac{1}{2}(\lambda - \nu)$$

и следовательно

$$|\tilde{E}| = (2n_r - \lambda + \nu)^2,$$

Окончательно для спектра энергии получим

$$E_N = -\frac{N^2 - 1}{2R^2} - \frac{\mu^2}{2N^2} + \frac{\mu}{R}, \quad \lambda = N + \sigma - 1/2$$

где $\sigma = R\mu/N$, $N = (n_r + \ell + 1) = 1, 2, \dots, N_{max} < \sqrt{R\mu}$ Галвное квантовое число. Наивысший уровень энергии лежит между $-3/2R^2$ и $1/2R^2$ и может быть положительным и отрицательным. пользуясь формулами (2.41), (2.39) и (2.15) решение $\Omega(\alpha)$ может быть записано в виде

$$\Omega_{n\ell\sigma}(\alpha) = (\sinh \alpha)^{2\ell+2} (\cosh \alpha)^{-n+\sigma-2\ell-2} {}_2F_1(-n + \ell + 1, \ell + 1 + \sigma; 2\ell + 2; \tanh^2 \alpha)$$

Возвращаясь к нашей предыдущей переменной r согласно (2.38) и учитывая соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty R_{n\ell\sigma}(r) R_{n'\ell\sigma}(r) R^3 \sinh^2 r dr = \delta_{nn'},$$

легко получить окончательное решение для квази-радиального уравнения

$$R_{N\ell\sigma}(r) = N_{N\ell}^\sigma (\sinh r)^\ell e^{-(N+\ell+1-\sigma)r} {}_2F_1\left(-N + \ell + 1, \ell + 1 + \sigma; 2\ell + 2; \frac{2}{1 + \coth r}\right)$$

с

$$N_{N\ell}^\sigma = \sqrt{\frac{2(\sigma^2 - n^2)(N + \ell - 1)! \Gamma(\sigma + \ell + 1)}{NR^3(N - \ell - 1)! \Gamma(\sigma - \ell)}}$$

Непрерывные состояния даются

$$\begin{aligned} \Omega_{k\ell}(\alpha) &= (\sinh \alpha)^{2\ell+2} (\cosh \alpha)^{-2\ell-2-ik} \\ &\times {}_2F_1 \left(\ell + 1 + \frac{i}{2}(k+p), \ell + 1 + \frac{i}{2}(k-p); 2\ell + 2; \tanh^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

где

$$E = \frac{k^2 + 1}{2R^2} \quad p^2 = 2R^2 E - 1 - 4R\mu$$

и окончательное решение с условием

$$\int_0^{\infty} R_{k\ell}(r) R_{k'\ell}(r) R^3 \sinh^2 r \, dr = \delta(k - k'),$$

будет

$$\begin{aligned} R_{k\ell}(r) &= N_{k\ell} (\sinh r)^{2\ell+1} e^{-(\ell+1+ik)r} \\ &\times {}_2F_1 \left(\ell + 1 + \frac{i}{2}(k+p), \ell + 1 + \frac{i}{2}(k-p); 2\ell + 2; \frac{2}{1 + \coth r} \right) \end{aligned}$$

с нормализационными константами

$$|N_{k\ell}| = \frac{2^{\ell+1/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\left| \Gamma \left(\ell + 1 + \frac{i(k+p)}{2} \right) \Gamma \left(\ell + 1 + \frac{i(k-p)}{2} \right) \right|}{(2\ell + 1)! |\Gamma(ik)|}$$

Глава 3

Движение на однополостном и двухполостном гиперболоидах $SO(3, 1)$

В данной главе мы рассмотрим систему Кеплера Кулона на одно-полосом гиперболоиде H_3^1 , т.е. на мнимом пространстве Лобачевского. Сначала рассмотрим классический случай, решим уравнение Гамильтона-Якоби, вычислим уравнения движения и построим траектории. Далее рассмотрим квантовый случай, решив уравнение Шредингера в сферических и эллиптически-параболических координатах, а затем построив разложение между этими двумя базисами.

Далее мы рассмотрим квантовую систему гармонического осциллятора, но на этот раз на двух-полосом гиперболоиде. Мы рассмотрим уравнение Шредингера в двух системах координат, в сферической и в полярно-цилиндрической системах, и проведем разложение волновых функций между этими системами как для дискретного, так и для непрерывного спектра.

3.1 Гиперболическое пространство H_1^3 и константы движения

Трёхмерный гиперболоид $H_3^1 \subset \mathbf{R}_{3,1}$ описывается уравнением

$$x \cdot x = \mathbf{x}^2 - x_0^2 = R^2 \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (3.1)$$

где $x_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ это декартовы координаты в охватывающем пространстве Минковского $\mathbf{M}^{3,1}$. Их можно параметризовать псевдо-сферическими координатами $\tau \in [0, \infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} x_0 &= \pm R \sinh \tau, & z_1 &= R \cosh \tau \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 &= R \cosh \tau \sin \theta \sin \varphi, & x_3 &= R \cosh \tau \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Стандартная метрика пространства Минковского $\mathbf{M}^{3,1}$

$$ds^2 = G_{\mu\nu} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad (3.3)$$

для H_1^3 ведет к виду

$$\frac{ds^2}{R^2} = d\tau^2 - \cosh^2 \tau (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

В таком случае кинетическая энергия даётся формулой

$$\mathcal{T} = \frac{R^2}{2} \left(\dot{\tau}^2 - \cosh^2 \tau (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right)$$

и канонический импульс может быть получен обычным способом

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\tau}} = R^2 \dot{\tau}, \quad p_\tau = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} = -R^2 \cosh^2 \tau \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\varphi}} = -R^2 \cosh^2 \tau \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

Следовательно свободный гамильтониан в псевдо-сферическом фазовом пространстве $(\tau, \theta, \varphi; p_\tau, p_\theta, p_\varphi)$ с учётом канонических скобок Ли-Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right), \quad (3.4)$$

имеет вид

$$\mathcal{H}_{free} = -\frac{1}{2R^2} \left\{ p_\tau^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right\}. \quad (3.5)$$

Ясно что группа изометрии для H_1^3 гиперboloида даётся группой $SO(3, 1)$. Соответствующая алгебра Ли шестимерна. Генераторы $so(3, 1)$ алгебры могут быть записаны в терминах охватывающего пространства $\mathbf{M}_{3,1}$ координат x_μ и импульса p_μ как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= x_2 p_3 - x_3 p_2, & \mathcal{L}_2 &= x_3 p_1 - x_1 p_3, & \mathcal{L}_3 &= x_1 p_2 - x_2 p_1, \\ \mathcal{N}_1 &= x_0 p_1 + x_1 p_0, & \mathcal{N}_2 &= x_0 p_2 + x_2 p_0, & \mathcal{N}_3 &= x_0 p_3 + x_3 p_0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где \mathcal{L} это обычный угловой момент и \mathcal{N} это Лоренцевских буст. Генераторы (3.4) образуют алгебру Ли-Пуассона по отношению к пуассоновым скобкам (3.4)

$$\{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j\} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{L}_k, \quad \{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j\} = -\varepsilon_{ijk} \mathcal{L}_k, \quad \{\mathcal{N}_i, \mathcal{L}_j\} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{N}_k,$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$. Существуют два инварианта Казимира, первый из которых исчезает в реализации (3.6):

$$\mathcal{C}_1 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{L} = \mathcal{N}_1 \mathcal{L}_1 + \mathcal{N}_2 \mathcal{L}_2 + \mathcal{N}_3 \mathcal{L}_3 = 0, \quad (3.7)$$

а второй это

$$\mathcal{C}_2 = L^2 - N^2, \quad (3.8)$$

где

$$N^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_2^2 + \mathcal{N}_3^2, \quad L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2. \quad (3.9)$$

Следующим шагом является расчёт связи между охватывающим импульсом и геодезическо-полярным. Учитывая четырёхмерный канонический импульс p_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = G_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

где \mathcal{L} кинетическая энергия в охватывающем пространстве $\mathbf{M}_{3,1}$, мы получаем что

$$\begin{aligned} R \cdot p_0 &= -R \cdot \frac{\partial x_0}{\partial t} = -\cosh \tau p_\tau, \\ R \cdot p_1 &= -R \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} = -\sinh \tau \sin \theta \cos \varphi p_\tau + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\cosh \tau} p_\theta - \frac{\sin \varphi}{\cosh \tau \sin \theta} p_\varphi \\ R \cdot p_2 &= -R \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} = -\sinh \tau \sin \theta \sin \varphi p_\tau + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{\cosh \tau} p_\theta + \frac{\cos \varphi}{\cosh \tau \sin \theta} p_\varphi \\ R \cdot p_3 &= -R \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t} = -\sinh \tau \cosh \theta p_\tau - \frac{\sinh \theta}{\sinh \tau} p_\theta \end{aligned}$$

Тогда генераторы (3.6) на языке геодезических псевдо-сферических координатах и импульсов даются формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \sin \theta \cos \varphi p_\tau + \tanh \tau \cos \theta \cos \varphi p_\theta - \tanh \tau \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} p_\varphi, \\ \mathcal{N}_2 &= \sin \theta \sin \varphi p_\tau + \tanh \tau \cos \theta \sin \varphi p_\theta - \tanh \tau \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} p_\varphi, \\ \mathcal{N}_3 &= \cos \theta p_\tau - \tanh \tau \sin \theta p_\theta \\ \mathcal{L}_1 &= -\sin \varphi p_\theta - \cot \theta \cos \varphi p_\varphi, \\ \mathcal{L}_2 &= \cos \varphi p_\theta - \cot \theta \sin \varphi p_\varphi, \\ \mathcal{L}_3 &= p_\varphi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя теперь уравнения (3.8), (3.9) и (3.10) легко видеть, что второй оператор Казимира \mathcal{C}_2 связан со свободным Гамильтонианом (3.5) как $\mathcal{C}_1 = -2R^2 \mathcal{H}_{free}$. Таким образом все величины (3.10) коммутируют по Пуассону со свободным Гамильтонианом (3.5) и являются постоянными движения. Из семи интегралов движения $\{\mathcal{H}_{free}, \mathcal{N}_i, \mathcal{L}_i\}$ только пять функционально независимы, из за соотношения (3.8) и ограничения (3.7). Таким образом геодезическое движение с Гамильтонианом (3.5) оказывается *максимально суперинтегрируемой системой*.

Рассмотрим сферически симметричную модель, а именно Гамильтониан $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{free} + \mathcal{V}(r)$, где \mathcal{H}_{free} даётся формулой (3.5) и $\mathcal{V}(r)$ это функция потенциала. Очевидно, что уравнение Гамильтона-Якоби $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ для любого центрального потенциала допускает разде-

ление переменных в псевдо-сферических системах координат (3.2)¹. Псевдо-сферическая система координат соответствует подгрупповой цепочке $SO(3, 1) \supset SO(3) \supset SO(2)$. Таким образом, центрально симметричный Гамильтониан \mathcal{H} подразумевает закон сохранения вектора $\mathbf{L} = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ со скалярным произведением (3.7). В частности первая компонента углового момента $\mathcal{L}_1 = p_\varphi$ и L^2 .

$$L^2 = \mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_3^2 = \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right), \quad (3.11)$$

вместе с Гамильтонианом \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2R^2} \left\{ p_\tau^2 - \frac{L^2}{\sinh^2 r} \right\} + \mathcal{V}(\tau),$$

образуют взаимно Пуассоново-коммутирующую систему констант движения. Существование дополнительной независимой константы движения \mathcal{L}_2 (\mathcal{L}_3 тогда не является независимым) означает что задача по меньшей мере одинарно вырождена и траектории расположены на двухмерных поверхностях. Подставляя $L^2 = p_\varphi^2$ или $\theta = \pi/2$, получаем движения которое происходит на двухмерном подпространстве, а именно на двух-полосом гиперболоиде $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

3.2 Классическая задача Кеплера-Кулона на одно-полосом гиперболоиде $SO(3, 1)$

Классическая задача Кеплера на одно-полосом гиперболоиде $H_1^3 = SO(3, 1)/SO(2, 1) : -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$, определяется потенциалом [?]

$$V = -\frac{\alpha}{R} \frac{x_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{\alpha}{R} \tanh \tau$$

где τ это “квази-радиальный угол” соответствующий геодезическим псевдо-сферическим координатам 3.2. Таким образом Гамильтониан описывающий задачу Кеплера в псевдо-сферическом фазовом пространстве имеет вид

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ p_\tau^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau} p_\theta^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau} \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\phi^2 \right\} - \frac{\alpha}{R} \tanh \tau, \quad (3.12)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби связанное с Гамильтонианом (3.12) получается после подстановки $p_{\mu_i} \rightarrow \partial S / \partial \mu_i$, где $\mu_i = (\tau, \theta, \phi)$:

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right\} - \frac{\alpha}{R} \tanh \tau = E.$$

¹Кроме псевдо-сферической системы координат (3.2) уравнение Гамильтона-Якоби $\mathcal{H}_{free} = \mathcal{E}$ и свободное уравнение Шредингера на H_1^3 гиперболоиде допускает разделение переменных дополнительно в 33-х ортогональных системах координат (см. для деталей [111]).

Эо уравнение полностью разделимо, и координата ϕ циклична. Мы ищем решения для классического действия $S(\tau, \theta, \phi, t)$ в виде

$$S(\tau, \theta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(\tau) + S_2(\theta),$$

и получаем

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = L^2, \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{dS_1}{d\tau}\right)^2 - 2R\alpha \tanh \tau - \frac{L^2}{\cosh^2 \tau} = 2R^2 E, \quad (3.14)$$

где L^2 - константа разделения. Из ур. (3.13) следует что при фиксированном p_ϕ^2 константа разделения пробегает значения $p_\phi^2 \leq L^2 < \infty$.

Уравнение (3.14) описывает движение в поле с эффективным потенциалом (см также Рис.3.1)

$$V_{eff}^{Cl}(\tau) = -\frac{\alpha}{R} \tanh \tau - \frac{L^2}{2R^2 \cosh^2 \tau}.$$

В случае $L^2 > \alpha R$ этот потенциал имеет минимальное значение при $\tau_0 = \tanh^{-1}[\alpha R/L^2]$ и в этой точке

$$V_{eff}^{Cl}(\tau_0) = -\frac{1}{2R^2} \left(L^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{L^2} \right)$$

Используя теперь ур. (3.13) and (3.14) получаем

$$S_1(\tau) = \int \sqrt{2R^2 E + 2\alpha R \tanh \tau + \frac{L^2}{\cosh^2 \tau}} d\tau, \quad (3.15)$$

$$S_2(\theta) = \int \sqrt{L^2 - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta, \quad (3.16)$$

Поскольку только траектории водят в круг наших интересов, мы последуем стандартной процедуре [109] и рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_1}{\partial E} - t = -t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial L^2} = \frac{\partial S_1}{\partial L^2} + \frac{\partial S_2}{\partial L^2} = \beta, \quad \frac{\partial S}{\partial p_\phi} = \varphi + \frac{\partial S_2}{\partial p_\phi} = \varphi_0, \quad (3.17)$$

где t_0 , ϕ_0 и β константы.

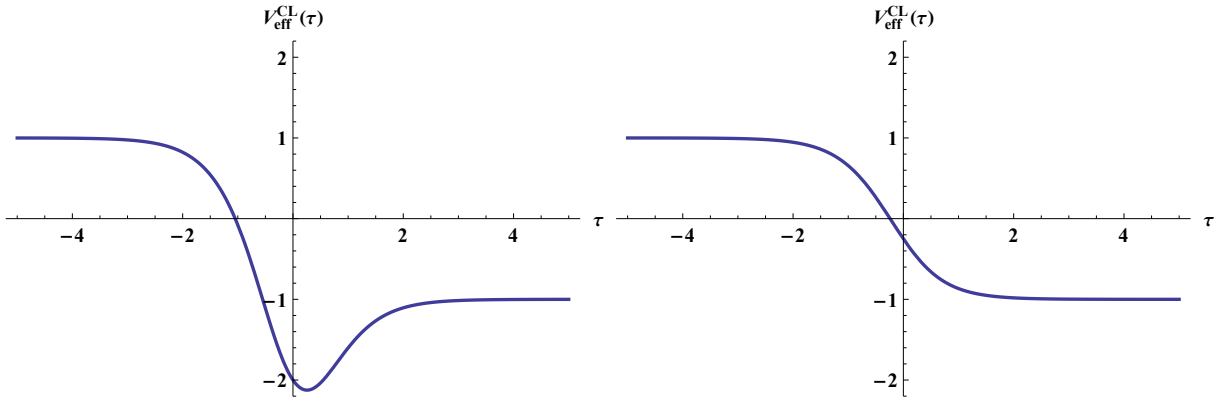


Рис. 3.1: Потенциал $V_{eff}^{Cl}(\tau)$ для $L^2 = 4$ и $L^2 = 1/2$ ($\alpha = R = 1$)

Из ур. (3.15) и (3.17) получаем

$$t - t_0 = \frac{R^2}{L} \int \frac{dX}{(1 - X^2)\sqrt{-X^2 + 2\alpha R/L^2 X + 2R^2 E/L^2 + 1}}. \quad (3.18)$$

где $X = \tanh \tau \in [-1, 1]$, и корни знаменателя равны

$$X_{1,2} = \frac{\alpha R}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha R}{L^2}\right)^2 + \frac{2R^2 E}{L^2} + 1}.$$

Связанное движение

$$\frac{\alpha R}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha R}{L^2}\right)^2 + \frac{2R^2 E}{L^2} + 1} < \tanh \tau < \frac{\alpha R}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha R}{L^2}\right)^2 + \frac{2R^2 E}{L^2} + 1}. \quad (3.19)$$

существует при отрицательных значениях энергии в области

$$-\frac{1}{2R^2} \left(L^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{L^2} \right) \leq E < -\frac{\alpha}{R}. \quad (3.20)$$

В случае минимального значения энергии $E_{min} = -(L^2 + \alpha^2 R^2/L^2)/(2R^2)$ подынтегральное выражение отрицательно и интеграл в (3.18) не определено, поэтому нужно решать непосредственно уравнение (3.14). Из

$$\left(\frac{dS_1}{d\tau} \right)^2 = -L^2 \left(\tanh \tau - \frac{\alpha R}{L^2} \right)^2 \geq 0,$$

получаем что $dS_1/d\tau = 0$ и $\tanh r = \alpha R/L^2$. Следовательно

$$r = \tanh^{-1} \left(\frac{R|E|}{\alpha} + \sqrt{\frac{R^2 E^2}{\alpha^2} - 1} \right), \quad (3.21)$$

т.е траектории являются окружностями. В случае $E = -\alpha/R$ движение частицы происходит в области $-1 + \alpha R/L^2 \leq \tanh \tau \leq 1$, то есть движение ограничено с левой стороны по

не ограничено с правой и частица может уйти в бесконечность. В случае $E = \alpha/R$ имеем $X_1 = 1 + 2\alpha R/L^2$, $X_2 = -1$ и движение происходит во всей области τ : $-\infty < \tau < \infty$.

Из ур. (3.15) и (3.16) имеем

$$\frac{\partial S_1}{\partial L^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\cosh^{-2} d\tau}{\tau \sqrt{2R^2 E + 2\alpha R \tanh \tau - L^2 / \cosh^2 \tau}} = \frac{1}{2L} \arcsin \frac{\tanh \tau - \alpha R/L^2}{\sqrt{(\alpha R/L^2)^2 + 2R^2 E/L^2 + 1}}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial L^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d\theta}{\sqrt{L^2 - p_\phi^2 / \sin^2 \theta}} = \frac{1}{2L} \arcsin \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - p_\phi^2 / L^2}}$$

В дополнение к ур. (3.20) мы требуем $-\sqrt{1 - p_\phi^2 / L^2} < \cos \theta < \sqrt{1 - p_\phi^2 / L^2}$, и

$$|\tanh \tau - \alpha R/L^2| < \sqrt{(\alpha R/L^2)^2 + 2R^2 E/L^2 + 1}.$$

Последнее условие совпадает с формулами (3.19). В заключение для $\partial S / \partial L^2$ мы имеем

$$\frac{\partial S}{\partial L^2} = \frac{1}{2L} \left[\arcsin \frac{\tanh \tau - \alpha R/L^2}{\sqrt{(\alpha R/L^2)^2 + 2R^2 E/L^2 + 1}} + \arcsin \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - p_\phi^2 / L^2}} \right] = \beta. \quad (3.22)$$

Следующий шаг, из ур. (3.16) и (3.17) мы получаем

$$\frac{\partial S}{\partial p_\phi} = \phi + \int \frac{p_\phi d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{L^2 - p_\phi^2 / \sin^2 \theta}} = \varphi + \arcsin \frac{\cot \theta}{\sqrt{L^2 / p_\phi^2 - 1}} = \varphi_0,$$

для $|\cot \theta| < \sqrt{L^2 / p_\phi^2 - 1}$ и следовательно

$$\cot \theta = \sqrt{L^2 / p_\phi^2 - 1} \sin(\phi_0 - \phi). \quad (3.23)$$

Легко видеть что для фиксированных значений L^2 и p_ϕ^2 движение частицы на одно-полосом гиперboloиде ограничено дополнительны условием

$$\frac{x_3}{x_1 \sin \phi_0 - x_2 \cos \phi_0} = \sqrt{L^2 / p_\phi^2 - 1}$$

Следовательно, без утраты общности мы можем выбрать $\theta = \pi/2$ или $L^2 = p_\phi^2$. Таким образом траектория лежит на двумерном мнимом пространстве Лобачевского или одно-полосом гиперboloиде: $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -R^2$. Исключая зависимость от θ из (3.22) с помощью (3.23) и подставляя теперь $L^2 = p_\phi^2$ можем записать уравнение траектории в виде

$$\frac{1}{1 - \tanh \tau} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R) \cos \varphi}, \quad (3.24)$$

где мы воспользовались обозначениями

$$p = \left(1 - \frac{\alpha R}{L^2}\right)^{-1} > 0, \quad \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2\alpha R}{L^2} \frac{(1 + RE/\alpha)}{(1 - \alpha R/L^2)^2}}, \quad (3.25)$$

и выбрали $\varphi_0 = 2\beta L + \frac{\pi}{2}$ так чтобы точка $\varphi = 0$ была бы ближайшей к центру. Когда $0 \leq \varepsilon(R) < 1$, орбиты являются эллипсами (для $\varepsilon(R) = 0$ окружностями), когда $\varepsilon(R) = 1$, траектория парабола и когда $\varepsilon(R) > 1$ траектория гипербола.

А. Рассмотрим эллиптические траектории, которые возможны только для отрицательных значений энергии: для $-\frac{1}{2R^2} \left(L^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{L^2} \right) < E < -\frac{\alpha}{R}$ с

$$0 \leq \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2\alpha R}{L^2} \frac{(1 - R|E|/\alpha)}{(1 - \alpha R/L^2)^2}} < 1.$$

Обозначим τ_{min} и τ_{max} точки с минимальными и максимальными угловыми расстояниями от центра поля. Очевидно, что они соответствуют углам $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Согласно ур. (3.24), (3.25) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{min} &= \operatorname{arcth} \left\{ \frac{\alpha R}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha R}{L^2} \right)^2 - \frac{2R^2|E|}{L^2} + 1} \right\}, \\ \tau_{max} &= \operatorname{arcth} \left\{ \frac{\alpha R}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha R}{L^2} \right)^2 - \frac{2R^2|E|}{L^2} + 1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

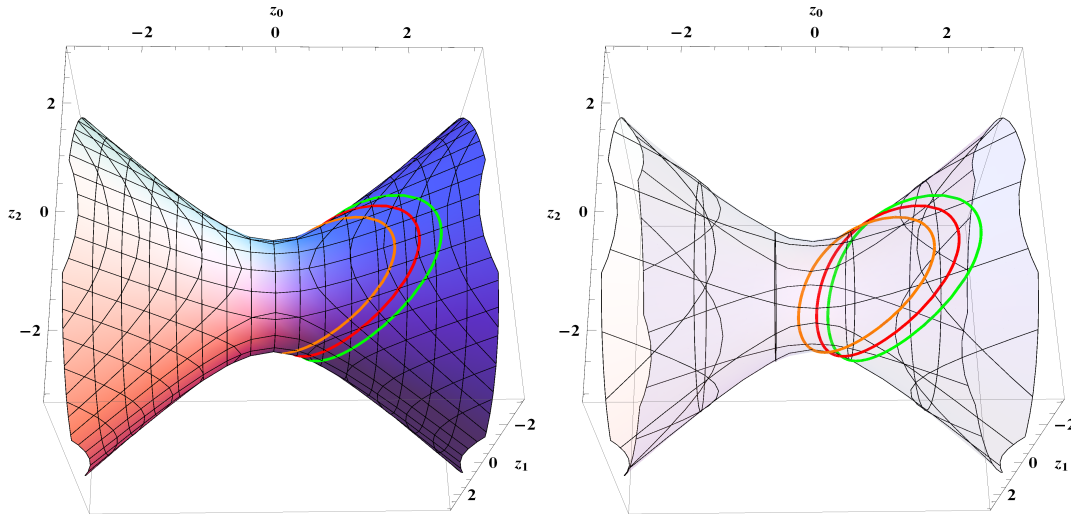


Рис. 3.2: Траектории движения для $\epsilon = 0.8$ и $p = 1.5, 2, 2.5$

Обозначим сумму расстояний r_1 и r_2 : $r_1 + r_2 = 2a$ как длину большой оси эллипса и $2c$ - дистанцию между фокусами. Ясно что

$$\begin{aligned} \tanh 2a &= \tanh(\tau_{max} + \tau_{min}) = \frac{\tanh \tau_{min} + \tanh \tau_{max}}{1 + \tanh \tau_{min} \cdot \tanh \tau_{max}} = -\frac{\alpha}{RE}, \\ \tanh 2c &= \tanh(\tau_{max} - \tau_{min}) = \frac{\tanh \tau_{min} - \tanh \tau_{max}}{1 - \tanh \tau_{min} \cdot \tanh \tau_{max}} = \frac{\varepsilon(R)}{p - \coth 2a}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Таким образом получаем результат, который правдив и в Евклидовом пространстве, что большая ось эллипса зависит только от энергии. Связанные траектории даны в Рис. 3.2.

Легко можно посчитать период эллиптического движения. Используя ур. (3.18), (3.25) и (3.26) и учитывая последнюю формулу, получаем

$$\begin{aligned} T &= \frac{R^2}{L} \int_{\tanh \tau_{min}}^{\tanh \tau_{max}} \frac{dX}{(1-X^2)\sqrt{-X^2 + 2\alpha R/L^2 X + 2R^2 E/L^2 + 1}} \\ &= \frac{\pi R}{\sqrt{8|E|}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha/R|E|}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha/R|E|}} \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

что, период зависит только от энергии. Используя теперь ур. (3.27) можно переписать ур. (3.28) в виде

$$T^2 = \frac{\pi^2 R^3}{\alpha} \sinh a \cosh^3 a$$

который показывает, что период зависит только от большой оси орбиты (третий закон Кеплера). В случае минимальной энергии (см ур. (3.20)) имеем $\varepsilon = 0$ и опять получаем, что орбиты это круги с радиусом упомянуто в ур. (3.21) (см Рис.3.3).

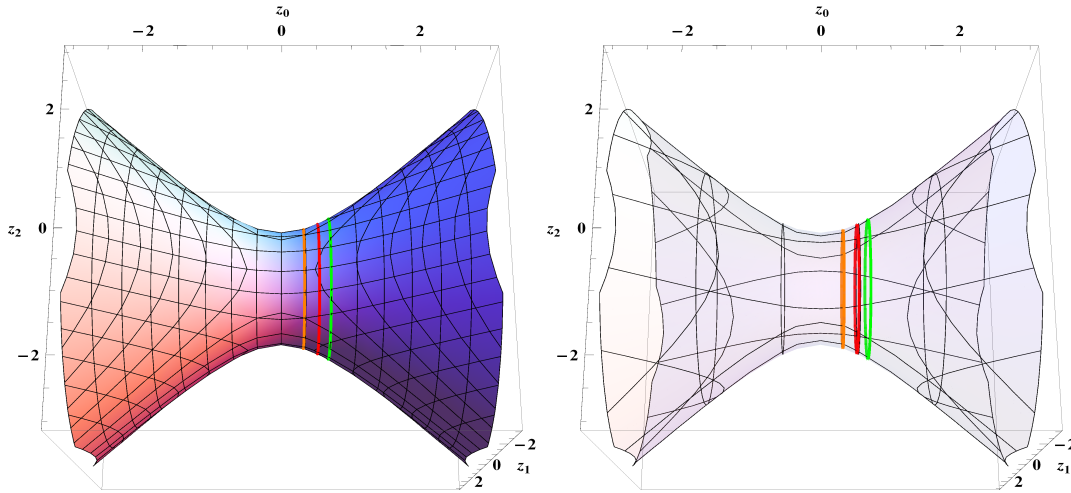


Рис. 3.3: Траектории движения для $\varepsilon = 0$ и $p = 1.5, 2, 2.5$

В. Для $E = -\alpha/R$ имеем $\varepsilon(R) = 1$ и частица движется из бесконечности ($\tau \sim \infty$) при $\phi = \pi$, отражается в точке $\tau = \tanh^{-1}(2\alpha R/L^2 - 1)$ при $\phi = 0$ и уходит опять в бесконечность. Траектория движения является параболой (см Рис.3.4).

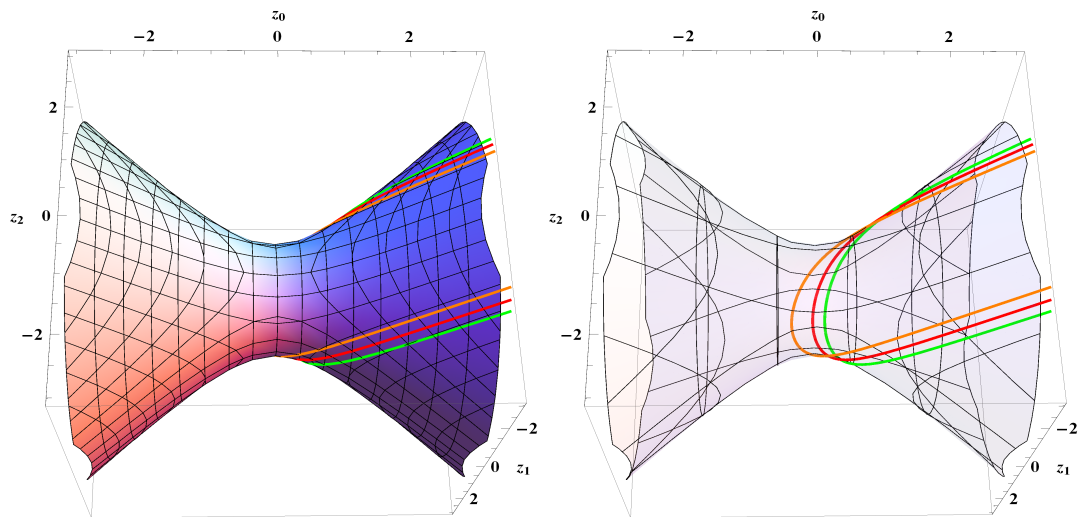


Рис. 3.4: Траектория движения для $\epsilon = 1$ и $p = 1.5, 2, 2.5$

С. Для значений энергии $-\alpha/R < E < \alpha/R$ траектория движения будет гиперболой. Частица опять движется из бесконечности $\phi = \pi/2 - \sin^{-1}[\epsilon(R)^{-1}]$, отражается в точке $\tau = \tanh^{-1}(\alpha R/L^2 - \sqrt{(\alpha R/L^2)^2 + 2R^2 E/L^2 + 1})$ при $\phi = 0$ и идет опять в бесконечность (см Рис.3.5, 3.6).

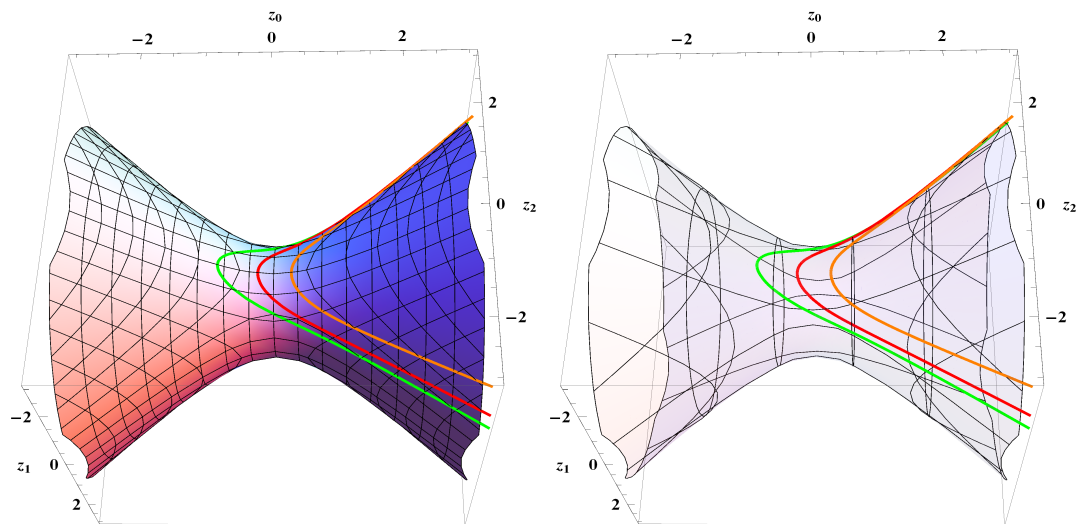


Рис. 3.5: Траектория движения для $L^2 = 1/2$ и $E = -1/2, 0, 1/2$ ($\alpha = R = 1$)

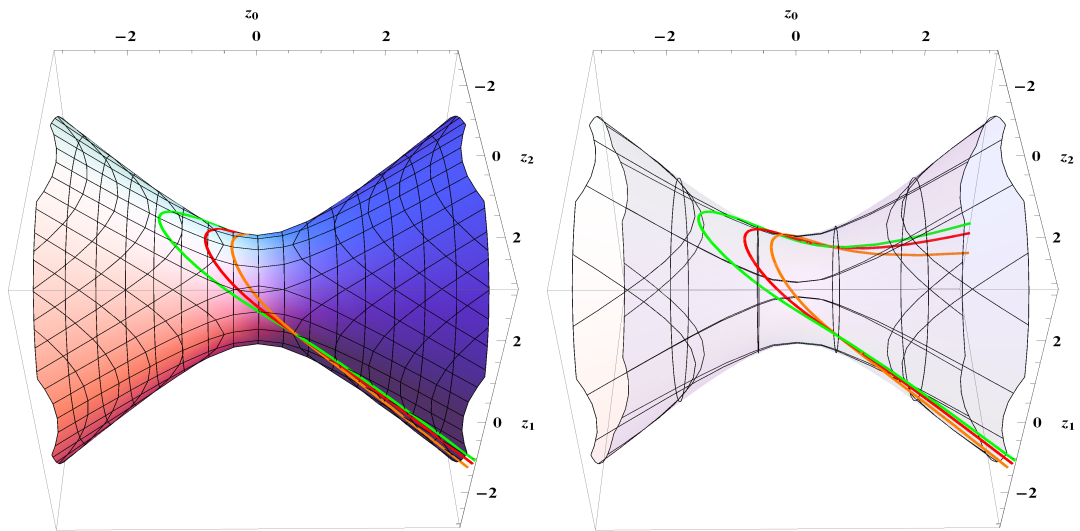


Рис. 3.6: Траектория движения для $L^2 = 2$ и $E = -1/2, 0, 1/2$ ($\alpha = R = 1$)

D. Для $E \geq \alpha/R$ движение происходит во всей области $\tau \in (-\infty, \infty)$ (см Рис.3.7, 3.8).

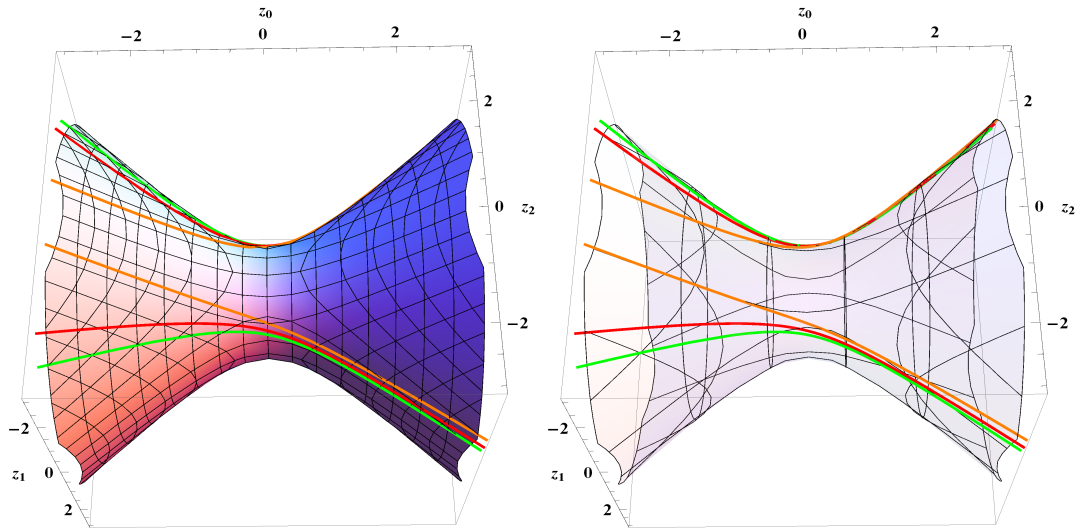


Рис. 3.7: Траектория движения для $L^2 = 1/2$ и $E = 1, 2, 3$ ($\alpha = R = 1$)

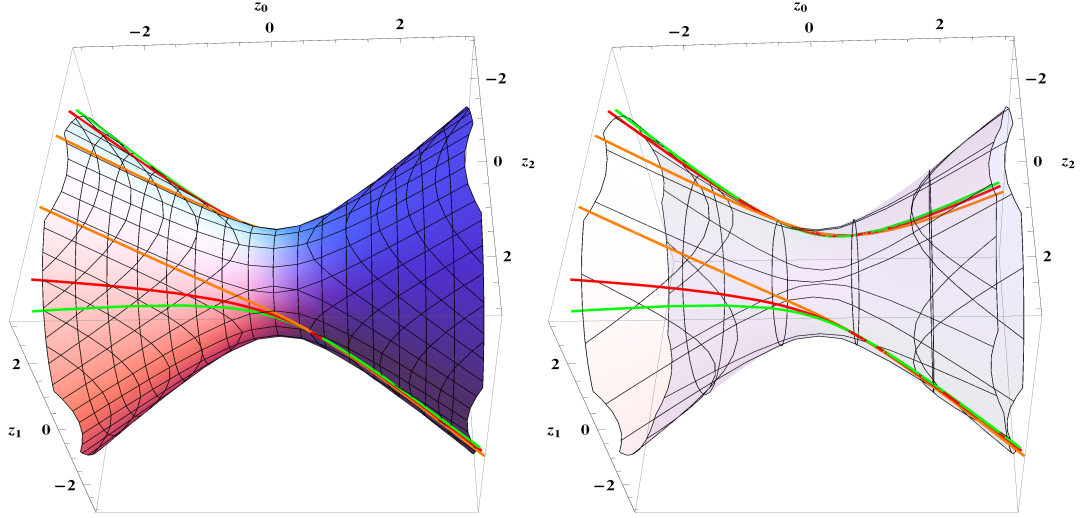


Рис. 3.8: Траектория движения для $L^2 = 2$ и $E = 1, 2, 3$ ($\alpha = R = 1$)

3.3 Разложение собственных функций задачи Кеплера-Кулона на мнимом пространстве Лобачевского

В терминах объемлющего псевдо-Евклидова пространства, мнимое пространство Лобачевского это одно-полосый гиперboloид

$$x_\mu x_\mu = \mathbf{x}^2 + x_4^2 = \mathbf{x}^2 - x_0^2 = R^2.$$

Уравнение Шредингера для задачи Кеплера в этом пространстве запишется

$$H\Psi = E\Psi, \quad H = -\frac{1}{2}\Delta + V, \quad (3.29)$$

где Δ это оператор Лапласа на гиперboloиде, а потенциал Кулона V

$$V = -\frac{\alpha}{R} \frac{x_0}{|\mathbf{x}|} \quad (\alpha > 0).$$

Сферическая координатная система на мнимом пространстве Лобачевского может быть представлена как

$$x_0 = R \sinh \tau, \quad x_1 = R \cosh \tau \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = R \cosh \tau \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = R \cosh \tau \cos \theta, \quad (3.30)$$

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

В координатах τ, θ, ϕ , линейный элемент будет $ds^2 = R^2[d\tau^2 - \cosh^2 \tau(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$, и Гамильтониан (3.29) запишется как

$$H = -\frac{1}{2R^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2 \tanh \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] - \frac{\alpha}{R} \tanh \tau.$$

Записывая волновую функцию в виде

$$\Psi = S(\tau)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.31)$$

где Y_l^m это сферические гармоники [120], мы получаем уравнение для радиальной функции S

$$\frac{d^2 S}{d\tau^2} + 2 \tanh \tau \frac{dS}{d\tau} + \left[\frac{l(l+1)}{\cosh \tau^2} + 2\alpha R \tanh \tau + 2ER^2 \right] S = 0. \quad (3.32)$$

Обозначая $z = (1 + \tanh \tau)/2 = (1 + e^{-2\tau})^{-1}$, из (3.32) получаем уравнение

$$\frac{d^2 S}{dz^2} + \frac{1}{z(z-1)} \left[-l(l+1) + \frac{ER^2 + \alpha R}{2(z-1)} - \frac{ER^2 - \alpha R}{2z} \right] S = 0,$$

которое может быть решено в терминах гипергеометрических функций. Далее подставляя

$$S(\tau) = (\cosh \tau)^{-1} f(\tau), \quad (3.33)$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left[\frac{l(l+1)}{\cosh \tau^2} + 2\alpha R(\tanh \tau - 1) + \Lambda \right] f = 0, \quad (3.34)$$

где $\Lambda = 2ER^2 + 2\alpha R - 1$. Уравнение (3.34) имеет вид одномерного уравнения Шредингера с потенциалом Манинг-Розена [121]. Для дискретных уровней энергии, нормированные волновой функции для этого потенциала было проделано в работе [122]. Здесь мы пользуемся методом Тичмарша [107], который позволяет получить нормировку для дискретных и непрерывных состояний. Ниже мы будем считать Λ комплексной переменной. Пусть $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ два линейно независимых решения (3.34) таких что $\text{Im} \Lambda > 0$

$$f_1(\tau) \in L^2(-\infty, 0), \quad f_2(\tau) \in L^2(0, +\infty), \quad (3.35)$$

где $L^2(a, b)$ означает пространство квадратично интегрируемых функций на интервале (a, b) . Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi(\tau, \Lambda) = \frac{f_2(\tau)}{W(f_1, f_2)} \int_{-\infty}^{\tau} f_1(\tau') \varphi(\tau') d\tau' + \frac{f_1(\tau)}{W(f_1, f_2)} \int_{\tau}^{\infty} f_2(\tau') \varphi(\tau') d\tau'. \quad (3.36)$$

Здесь $\varphi(\tau)$ произвольная функция квадратично-интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ а $W(f_1, f_2)$ это Вронскиан

$$W(f_1, f_2) = f_1 \frac{df_2}{d\tau} - f_2 \frac{df_1}{d\tau}.$$

Тогда разложение собственных функций для $\varphi(\tau)$ связанных с уравнением (3.34) будет

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-\text{Im} \Phi(\tau, \Lambda)] d\Lambda + \sum_n \text{Res} \Phi(\tau, \Lambda_n), \quad (3.37)$$

где $\text{Res} \Phi(\tau, \Lambda_n)$ это вычеты $\Phi(\tau, \Lambda)$ в комплексной плоскости Λ .

Сначала рассмотрим случай свободного движения $\alpha = 0$. В этом случае, уравнение (3.34) переходит в

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left[\frac{l(l+1)}{\cosh^2 \tau} + \Lambda \right] f = 0, \quad (3.38)$$

с $\Lambda = 2ER^2 - 1$. Рассмотрим два решения (3.38) удовлетворяющих условию (3.35)

$$f_1(\tau) = (2 \cosh \tau)^{ip} {}_2F_1(l+1-ip, -l-ip; 1-ip; (1+e^{-2\tau})^{-1}), \quad (3.39)$$

$$f_2(\tau) = (2 \cosh \tau)^{ip} {}_2F_1(l+1-ip, -l-ip; 1-ip; (1+e^{2\tau})^{-1}), \quad (3.40)$$

где $p = \sqrt{\Lambda}$. Вронскиан решений (3.39) и (3.40) будет

$$W(f_1, f_2) = -\frac{2[\Gamma(1-ip)]^2}{\Gamma(l+1-ip)\Gamma(-l-ip)}. \quad (3.41)$$

Учитывая свойства гипергеометрических функций [115] легко проверить что

$$\begin{aligned} f_1^*(\tau) &= f_1(\tau), \quad f_2^*(\tau) = f_2(\tau) \quad \text{for } \Lambda < 0; \\ f_1^*(\tau) &= \frac{\Gamma(l+1-ip)\Gamma(-l-ip)}{\Gamma(1-ip)\Gamma(-ip)} f_2(\tau), \\ f_2^*(\tau) &= \frac{\Gamma(l+1-ip)\Gamma(-l-ip)}{\Gamma(1-ip)\Gamma(-ip)} f_1(\tau) \end{aligned} \quad \text{for } \Lambda > 0. \quad (3.42)$$

Пользуясь уравнениями (3.41) – (3.42) находим разрыв функции $\Phi(\tau, \Lambda)$ (3.36) на реальной оси комплексной плоскости Λ :

$$\text{Im}\Phi(\tau, \Lambda) = 0 \quad \text{for } \Lambda < 0;$$

$$\text{Im}\Phi(\tau, \Lambda) = -\frac{1}{4p} \left[f_1^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau') \varphi(\tau') d\tau' + f_2^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau') \varphi(\tau') d\tau' \right] \quad \text{for } \Lambda > 0.$$

Функция $\Phi(\tau, \Lambda)$ имеет полюса в точках $-i\sqrt{\Lambda} = n$, где $n = 1, 2, \dots, l$. Поскольку $f_1(\tau) = (-1)^{l-n} f_2(\tau)$ для этих значений Λ , вычеты $\Phi(\tau, \Lambda)$ будут

$$\text{Res } \Phi(\tau, \Lambda_n) = \frac{(l+n)!n}{(l-n)!(n!)^2} f_{1n}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_{1n}(\tau') \varphi(\tau') d\tau',$$

где

$$f_{1n}(\tau) = (2 \cosh \tau)^{-n} {}_2F_1(n+l+1, n-l; n+1; (1+e^{-2\tau})^{-1}).$$

Разложение собственной функции (3.37) произвольной функции φ в случае уравнения (3.38) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\Lambda}{\sqrt{\Lambda}} \left[f_1^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau') \varphi(\tau') d\tau' + f_2^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau') \varphi(\tau') d\tau' \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^l \frac{(l+n)!n}{(l-n)!(n!)^2} f_{1n}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_{1n}(\tau') \varphi(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Выражения для нормированных собственных функций уравнения (3.38) могут быть легко получены из разложения (3.43).

Вернемся теперь к уравнению (3.34) with $\alpha > 0$. Вводя обозначения

$$p = \sqrt{\Lambda}, \quad q = \sqrt{\Lambda - 4\alpha R}, \quad \nu = -\frac{i}{2}(p + q),$$

можем записать решение уравнения (3.34) удовлетворяющие условию (3.35) следующим образом:

$$f_1(\tau) = (1 + e^{-2\tau})^{iq/2} (1 + e^{2\tau})^{ip/2} {}_2F_1(\nu + l + 1, \nu - l; 1 - iq; (1 + e^{-2\tau})^{-1}), \quad (3.44)$$

$$f_2(\tau) = (1 + e^{-2\tau})^{iq/2} (1 + e^{2\tau})^{ip/2} {}_2F_1(\nu + l + 1, \nu - l; 1 - ip; (1 + e^{2\tau})^{-1}). \quad (3.45)$$

Вронскиан решений (3.44) и (3.45) будет

$$W(f_1, f_2) = -\frac{2\Gamma(1 - ip)\Gamma(1 - iq)}{\Gamma(\nu + l + 1)\Gamma(\nu - l)}. \quad (3.46)$$

Обозначая $\sqrt{4\alpha R - \Lambda} = r$ для $\Lambda < 4\alpha R$ и пользуясь соотношением между решениями гипергеометрического уравнения находим

$$\begin{aligned} f_1^*(\tau) &= f_1(\tau), \quad f_2^*(\tau) = f_2(\tau) \quad \text{for } \Lambda < 0; \\ f_1^*(\tau) &= f_1(\tau) = \frac{\Gamma(ip)\Gamma(1+r)f_2(\tau)}{\Gamma(l+1+\frac{ip}{2}+\frac{r}{2})\Gamma(-l+\frac{ip}{2}+\frac{r}{2})} + \frac{\Gamma(-ip)\Gamma(1+r)f_2^*(\tau)}{\Gamma(l+1-\frac{ip}{2}+\frac{r}{2})\Gamma(-l-\frac{ip}{2}+\frac{r}{2})} \quad \text{for } 0 < \Lambda < 4\alpha R; \\ f_1(\tau) &= \frac{\Gamma(ip)\Gamma(1-iq)f_2(\tau)}{\Gamma(l+1+\frac{ip}{2}-\frac{iq}{2})\Gamma(-l+\frac{ip}{2}-\frac{iq}{2})} + \frac{\Gamma(-ip)\Gamma(1-iq)f_2^*(\tau)}{\Gamma(l+1-\frac{ip}{2}-\frac{iq}{2})\Gamma(-l-\frac{ip}{2}-\frac{iq}{2})}, \\ f_2(\tau) &= \frac{\Gamma(1-ip)\Gamma(iq)f_1(\tau)}{\Gamma(l+1-\frac{ip}{2}+\frac{iq}{2})\Gamma(-l-\frac{ip}{2}+\frac{iq}{2})} + \frac{\Gamma(1-ip)\Gamma(-iq)f_1^*(\tau)}{\Gamma(l+1-\frac{ip}{2}-\frac{iq}{2})\Gamma(-l-\frac{ip}{2}-\frac{iq}{2})} \quad (3.47) \\ &\quad \text{for } \Lambda > 4\alpha R. \end{aligned}$$

Пользуясь уравнениями (3.46) – (3.47) получаем:

$$\begin{aligned} \text{Im}\Phi(\tau, \Lambda) &= 0 \quad \text{for } \Lambda < 0; \\ \text{Im}\Phi(\tau, \Lambda) &= -\frac{\sinh \pi p \left| l + 1 - \frac{ip}{2} + \frac{r}{2} \right|^2 \left| -l - \frac{ip}{2} + \frac{r}{2} \right|^2}{4\pi \left[\Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) \right]^2} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau') \varphi(\tau') d\tau' \\ &\quad \text{for } 0 < \Lambda < 4\alpha R; \\ \text{Im}\Phi(\tau, \Lambda) &= -\frac{\sinh \pi p \sinh \pi q}{4 \sinh^2 \frac{\pi}{2} (p + q)} \left[\frac{1}{q} f_1^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau') \varphi(\tau') d\tau' + \frac{1}{p} f_2^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau') \varphi(\tau') d\tau' \right] \\ &\quad \text{for } \Lambda > 4\alpha R. \end{aligned}$$

Функция $\Phi(\tau, \Lambda)$ (3.36) имеет полюса в точках

$$\nu = -i \left(\sqrt{\Lambda} + \sqrt{\Lambda - 4\alpha R} \right) / 2 = n, \quad (3.48)$$

где $n = \delta, \delta + 1, \dots, l$, и $\delta = \max\{\lfloor \sqrt{\alpha R} \rfloor, 1\}$. Для значений ν имеем

$$f_2(\tau) = (-1)^{n-l} \frac{\Gamma(n - \sigma + 1)\Gamma(l + \sigma + 1)}{\Gamma(n + \sigma + 1)\Gamma(l - \sigma + 1)} f_1(\tau), \quad \sigma = \frac{\alpha R}{n}.$$

Таким образом находим

$$\text{Res}\Phi(\tau, \Lambda_n) = \frac{(l+n)!\Gamma(l+\sigma+1)(n^2-\sigma^2)}{(l-n)!\Gamma(l-\sigma+1)[\Gamma(n+\sigma+1)]^2 n} f_{1n}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_{1n}(\tau')\varphi(\tau')d\tau',$$

где

$$f_{1n}(\tau) = e^{\sigma\tau} (2 \cosh \tau)^{-n} {}_2F_1(n+l+1, n-l; n+\sigma+1; (1+e^{-2\tau})^{-1}).$$

Из уравнения (3.48) следует выражение для дискретных уровней энергии

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{n^2 - 1}{2R^2}. \quad (3.49)$$

Теперь можно записать разложение собственных функций связанных с уравнением (3.34) для произвольной функции $\varphi(\tau)$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & \int_0^{4\alpha R} d\Lambda \frac{\sinh \pi p \left| l + 1 - \frac{ip}{2} + \frac{r}{2} \right|^2 \left| -l - \frac{ip}{2} + \frac{r}{2} \right|^2}{4\pi^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) \right]^2} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau')\varphi(\tau')d\tau' \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{4\alpha R}^{\infty} d\Lambda \frac{\sinh \pi p \sinh \pi q}{\sinh^2 \frac{\pi}{2}(p+q)} \left[\frac{1}{q} f_1^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau')\varphi(\tau')d\tau' + \frac{1}{p} f_2^*(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau')\varphi(\tau')d\tau' \right] \\ & + \sum_{n=\delta}^l \frac{(l+n)!\Gamma(l+\sigma+1)(n^2-\sigma^2)}{(l-n)!\Gamma(l-\sigma+1)[\Gamma(n+\sigma+1)]^2 n} f_{1n}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} f_{1n}(\tau')\varphi(\tau')d\tau'. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Заметим что только $f_1(\tau)$ входит в разложение для интервала $0 < \Lambda < 4\alpha R$ непрерывного спектра. Можно видеть из (3.44) и (3.50), что нормированные собственные функции для этого интервала могут быть записаны как

$${}^0f_{\Lambda}(\tau) = {}^0N_{\Lambda} (1 + e^{-2\tau})^{-r/2} (1 + e^{2\tau})^{ip/2} {}_2F_1(\nu + l + 1, \nu - l; 1 + r; (1 + e^{-2\tau})^{-1}), \quad (3.51)$$

где $\nu = (r - ip)/2$, и

$${}^0N_{\Lambda} = \frac{\sqrt{\sinh \pi p} \left| l + 1 - \frac{ip}{2} + \frac{r}{2} \right| \left| -l - \frac{ip}{2} + \frac{r}{2} \right|}{2\pi \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right)}.$$

Для $\Lambda > 4\alpha R$, две собственных функций входят в разложение (3.50). Нормированные функции будут

$${}^1f_{\Lambda}(\tau) = {}^1N_{\Lambda} (1 + e^{-2\tau})^{iq/2} (1 + e^{2\tau})^{ip/2} {}_2F_1(\nu + l + 1, \nu - l; 1 - iq; (1 + e^{-2\tau})^{-1}),$$

$${}^2f_{\Lambda}(\tau) = {}^2N_{\Lambda}(1 + e^{-2\tau})^{iq/2}(1 + e^{2\tau})^{ip/2} {}_2F_1(\nu + l + 1, \nu - l; 1 - ip; (1 + e^{2\tau})^{-1}),$$

где

$${}^1N_{\Lambda} = \frac{\sqrt{\sinh \pi p \sinh \pi q}}{2\sqrt{\pi q} \sinh \frac{\pi}{2}(p + q)}, \quad {}^2N_{\Lambda} = \frac{\sqrt{\sinh \pi p \sinh \pi q}}{2\sqrt{\pi p} \sinh \frac{\pi}{2}(p + q)}.$$

Нормированные собственные функции для дискретных состояний будут

$$f_{nl}(\tau) = N_{nl}e^{\sigma\tau}(2 \cosh \tau)^{-n} {}_2F_1(n + l + 1, n - l; n + \sigma + 1; (1 + e^{-2\tau})^{-1}), \quad (3.52)$$

где

$$N_{nl} = \frac{1}{\Gamma(n + \sigma + 1)} \sqrt{\frac{(n^2 - \sigma^2)(n + l)\Gamma(l + \sigma + 1)}{n(l - n)\Gamma(l - \sigma + 1)}}.$$

Функции (3.51) – (3.52) удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}^0f_{\Lambda}(\tau) {}^0f_{\Lambda'}(\tau) d\tau = \delta(\Lambda - \Lambda'), \quad 0 < \Lambda < 4\alpha R;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}^if_{\Lambda}^*(\tau) {}^jf_{\Lambda'}(\tau) d\tau = \delta(\Lambda - \Lambda') \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2; \Lambda > 4\alpha R;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{nl}(\tau) f_{n'l}(\tau) d\tau = \delta_{nn'}.$$

Учитывая выражения (3.31) and (3.33) для волновых функций $\Psi(\tau, \theta, \phi)$, легко можно получить решения уравнения Шредингера (3.29) нормированных по отношению к скалярному произведению

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \iiint_V \Psi_1^* \Psi_2 dV = \iiint_V \Psi_1^* \Psi_2 R^3 \cosh^2 \tau \sin \theta d\tau d\theta d\phi,$$

где интегрирование берется по всему гиперболоиду. В частности, волновые функции дискретных состояний $\Psi_{nlm}(\tau, \theta, \phi)$ нормированные условием $(\Psi_{nlm}, \Psi_{nlm}) = 1$, имеют вид

$$\Psi_{nlm}(\tau, \theta, \phi) = N_{nl}R^{-3/2} (\cosh \tau)^{-1} f_{nl}(\tau) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.53)$$

Как в мнимом, так и в реальном пространстве Лобачевского существует, кроме сферических координат, ещё одна разделяющаяся система координат в которой решение уравнения Шредингера, с потенциалом Кулона, может быть выражена через гипергеометрические функции. В случае пространства Лобачевского такие решения были исследованы в работе [123]. Соответствующая система координат из списка Олевского [111] была названа в [47] эллиптически-параболической. Решения задачи Кеплера–Кулона в подобной системе в мнимом пространстве Лобачевского были рассмотрены в [124] (Собственные функции оператора Лапласа в мнимом пространстве Лобачевского в разных системах координат были найдены в [?]). Теперь займемся нахождением коэффициентов нормировки для некоторых

наборов собственных функций. Мы определяем эллиптически-параболическую систему с помощью отношений

$$t_1 = \frac{|\mathbf{x}| - x_3}{|\mathbf{x}| + x_0}, \quad t_2 = \frac{|\mathbf{x}| + x_3}{|\mathbf{x}| - x_0}.$$

Тогда для $x_0 + x_3 > 0$ имеем $0 \leq t_1 < 1$, $t_2 > 1$, и координаты в псевдо-Евклидовом пространстве выразятся как

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{R(t_1 + t_2 - 2)}{2\sqrt{(1-t_1)(t_2-1)}}, & x_1 &= R\sqrt{t_1 t_2} \cos \phi, \\ x_2 &= R\sqrt{t_1 t_2} \sin \phi, & x_3 &= \frac{R(t_1 + t_2 - 2t_1 t_2)}{2\sqrt{(1-t_1)(t_2-1)}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Нужно заметить, что координаты t_1, t_2 только покрывают одно-полосого гиперboloида. Для покрытия другой половины можно поменять знак у x_0 и x_3 в (3.54).

В координатах t_1, t_2, ϕ , Гамильтониан (3.29) принимает вид

$$H = \frac{2}{R^2} \left[\frac{1-t_1}{t_2-t_1} \frac{\partial}{\partial t_1} t_1(1-t_1) \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1-t_2}{t_1-t_2} \frac{\partial}{\partial t_2} t_2(1-t_2) \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{1}{4t_1 t_2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \frac{\alpha}{R} \frac{t_1 + t_2 - 2}{t_2 - t_1}.$$

Замена $\Psi = S_1(t_1)S_2(t_2)e^{im\phi}$ разделяет переменные в уравнении Шредингера и мы получаем уравнения для S_1 и S_2

$$\frac{d}{dt_1} (t_1 - 1)t_1 \frac{dS_1}{dt_1} + \left[\frac{ER^2 - \alpha R}{2} - \frac{m^2}{4t_1} + \frac{A}{4(t_1 - 1)} \right] S_1 = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{d}{dt_2} (t_2 - 1)t_2 \frac{dS_2}{dt_2} + \left[\frac{ER^2 + \alpha R}{2} - \frac{m^2}{4t_2} + \frac{A}{4(t_2 - 1)} \right] S_2 = 0. \quad (3.56)$$

Решение этих уравнений может быть выражено на языке гипергеометрических функций. Спектр энергии E и константы разделения A могут быть найдены после учёта граничных условий на эти условия. Но данная задача может быть усложнена фактом, что обе величины E и A входят в каждую из уравнений. В случае свободного движения, когда $\alpha = 0$, получается что решение уравнений (3.55) и (3.56) не могут быть одновременно конечны для любых значений E и A . С другой стороны, существование дискретного спектра энергии (см (3.49)) было показано решением задачи в сферических координатах. Это означает, что для дискретных значений энергии, константа разделения A может иметь непрерывный спектр. Мы займемся нахождением соответствующих волновых функций и коэффициентов нормировки.

Обозначим любое решение уравнений (3.55) и (3.56) через $S_{EA}(t)$ с данными значениями E и A . Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_a^b [2R^2(E - E') + (A - A')(t - 1)^{-1}] S_{EA} S_{E'A'} dt \\ &= -4 \left[t(t - 1) \left(S_{E'A'} \frac{dS_{EA}}{dt} - S_{EA} \frac{dS_{E'A'}}{dt} \right) \right] \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Пусть $S_{1nk}(t_1)$ будет решением (3.55) финитным в $t_1 = 0$, и $S_{2nk}(t_2)$ решением (3.56) зануляющимся в $t_2 \rightarrow \infty$. Тогда, с точностью до констант нормировки, имеем

$$\begin{aligned} S_{1nk}(t_1) &= t_1^{|m|/2} (1 - t_1)^{-ik/2} \\ &\times {}_2F_1 \left((1 + n + \sigma + |m| - ik)/2, (1 - n - \sigma + |m| - ik)/2; |m| + 1; t_1 \right), \\ S_{2nk}(t_2) &= t_2^{(ik - n + \sigma - 1)/2} (t_2 - 1)^{-ik/2} \\ &\times {}_2F_1 \left((1 + n - \sigma + |m| - ik)/2, (1 + n - \sigma - |m| - ik)/2; n - \sigma + 1; 1/t_2 \right), \end{aligned}$$

где $k = \sqrt{A}$ и $\sigma = \alpha R/n$. Обе функции S_{1nk} и S_{2nk} реальны. Пользуясь уравнением (3.57) можем оценить следующий интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_{1nk}^2(t) dt &= \frac{2\pi(|m|!)^2 \operatorname{Im} \left[\psi \left(\frac{|m|+1-n-\sigma+ik}{2} \right) - \psi \left(\frac{|m|+1+n+\sigma+ik}{2} \right) \right]}{(n + \sigma) \sinh \pi k \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1+n+\sigma+ik}{2} \right) \right|^2 \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1-n-\sigma+ik}{2} \right) \right|^2}, \quad (3.58) \\ \int_1^\infty S_{2nk}^2(t) dt &= \frac{2\pi(n - \sigma)[\Gamma(n - \sigma)]^2 \operatorname{Im} \left[\psi \left(\frac{|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) + \psi \left(\frac{-|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right]}{\sinh \pi k \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right|^2 \left| \Gamma \left(\frac{-|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right|^2}, \\ \int_0^1 S_{1nk}(t) S_{1nk'}(t) \frac{dt}{1-t} &= \frac{4\pi^2(|m|!)^2 \delta(k - k')}{k \sinh \pi k \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1+n+\sigma+ik}{2} \right) \right|^2 \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1-n-\sigma+ik}{2} \right) \right|^2}, \\ \int_1^\infty S_{2nk}(t) S_{2nk'}(t) \frac{dt}{t-1} &= \frac{4\pi^2[\Gamma(n - \sigma + 1)]^2 \delta(k - k')}{k \sinh \pi k \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right|^2 \left| \Gamma \left(\frac{-|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right|^2}. \quad (3.59) \end{aligned}$$

Здесь $\psi(z) = d \ln \Gamma(z)/dz$. Теперь, подставляя

$$\Psi_{nkm}(t_1, t_2, \phi) = N_{km}^n S_{1nk}(t_1) S_{2nk}(t_2) e^{im\phi} \quad (3.60)$$

и пользуясь интегралами (3.58) – (3.59), мы получаем условие нормировки

$$\int \int \int_{x_0+x_3>0} \Psi_{nkm}^*(t_1, t_2, \phi) \Psi_{nk'm}(t_1, t_2, \phi) dV = \pi \delta(k - k'),$$

где dV элемент объёма в координатах t_1, t_2, ϕ ,

$$dV = \frac{R^3}{4} \left(\frac{1}{1-t_1} + \frac{1}{t_2-1} \right) dt_1 dt_2 d\phi,$$

а коэффициенты нормировки будут

$$\begin{aligned} N_{km}^n &= \frac{\sqrt{k} \sinh \pi k \sqrt{n^2 - \sigma^2}}{2\sqrt{\pi} R^{3/2} \Gamma(n - \sigma + 1) |m|! \sqrt{I(n, \sigma)}} \\ &\times \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1+n+\sigma+ik}{2} \right) \right| \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1-n-\sigma+ik}{2} \right) \right| \left| \Gamma \left(\frac{|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right| \left| \Gamma \left(\frac{-|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Здесь

$$I(n, \sigma) = \text{Im} \left\{ (n - \sigma) \left[\psi \left(\frac{|m|+1-n-\sigma+ik}{2} \right) - \psi \left(\frac{|m|+1+n+\sigma+ik}{2} \right) \right] \right. \\ \left. + (n + \sigma) \left[\psi \left(\frac{|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) + \psi \left(\frac{-|m|+1+n-\sigma+ik}{2} \right) \right] \right\}.$$

Нормировка сильно упрощается для $\alpha = 0$. В этом случае,

$$N_{km}^n = \frac{\sqrt{nk \sinh \pi k} \left| \Gamma \left(\frac{|m|+n-ik+1}{2} \right) \right|^2}{\pi R^{3/2} n!}.$$

Для $E = E_n$ константа разделения A может принимать также и дискретные значения. Это только возможно для $n - \sigma < |m| < n + \sigma$. Тогда можно записать $A = -[\sigma - (n_1 + n_2 + 1)]^2$, где $n_1 = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}[n - \sigma - |m| - 1]$, $n_2 = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}[|m| - n + \sigma - 1]$, и $n = |m| + n_1 - n_2$. В этом случае имеем волновые функции $\Psi_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi)$ нормированные условием

$$\int \int \int_{x_0+x_3>0} \Psi_{n_1 n_2 m}^*(t_1, t_2, \phi) \Psi_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi) dV = \frac{1}{2},$$

принимают вид

$$\Psi_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi) = N_{n_1 n_2}^n S_{1n_1 n_2}^n(t_1) S_{2n_1 n_2}^n(t_2) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.61)$$

где

$$S_{1n_1 n_2}^n = t_1^{|m|/2} (1 - t_1)^{-n_1 + (n + \sigma - |m| - 1)/2} {}_2F_1(-n_1, n + \sigma - n_1; |m| + 1; t_1),$$

$$S_{2n_1 n_2}^n = t_2^{n_2 - |m|/2} (t_2 - 1)^{-n_2 + (|m| - n + \sigma - 1)/2} {}_2F_1(-n_2, |m| - n_2; n - \sigma + 1; 1/t_2),$$

и

$$N_{n_1 n_2}^n = \frac{\sqrt{(N^2 - \sigma^2)(\sigma - n_1 - n_2 - 1)}}{|m|! \Gamma(N - \sigma + 1)} \sqrt{\frac{(|m| + n_1)! (|m| - n_2 - 1)!}{NR^3 n_1! n_2!}} \\ \times \sqrt{\frac{\Gamma(|m| + \sigma - n_2) \Gamma(|m| + n_1 - \sigma + 1)}{\Gamma(\sigma - n_1) \Gamma(\sigma - n_2)}}.$$

Для фиксированных значений энергии, волновая функция (3.60) или (3.61) могут быть разложены волновыми функциями $\Psi_{nlm}(\tau, \theta, \phi)$ (3.53) как

$$\Psi_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi) = \sum_{l=\max\{n, |m|\}}^{\infty} W_{n_1 n_2}^{nlm} \Psi_{nlm}(\tau, \theta, \phi). \quad (3.62)$$

Для нахождения коэффициентов разложения $W_{n_1 n_2}^{nlm}$, выразим координаты (t_1, t_2) в левой части (3.62) через сферические координаты 3.30

$$t_1 = \frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \tanh \tau)} \quad t_2 = \frac{(1 + \cos \theta)}{(1 - \tanh \tau)}$$

Мы должны заметить, что волновая функция (3.60) действительна только на половине пространства где $x_0 + x_3 > 0$, или на языке псевдо-евклидовых координат $\tanh \tau + \cos \theta > 0$

Учитывая определение сферической функции [120]

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

и условие ортогональности полиномов Лежандра $P_l^{|m|}(\cos \theta)$

$$\int_{-1}^1 P_l^{|m|}(\cos \theta) P_{l'}^{|m|}(\cos \theta) d \cos \theta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'}$$

легко получить, что

$$\begin{aligned} W_{n_1 n_2 m}^{nlm} S_{nl}(\tau) &= (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \left[\frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} N_{n_1 n_2}^n \\ &\times \int_{-\tanh \tau}^1 P_l^{|m|}(x) S_{1n_1 n_2}^n \left(\frac{1-x}{1+\tanh \tau} \right) S_{2n_1 n_2}^n \left(\frac{1+x}{1-\tanh \tau} \right) dx \quad (3.63) \end{aligned}$$

где мы обозначили $x = \cos \theta$. Для упрощения расчёта межбазисных коэффициентов $W_{n_1 n_2 m}^{nlm}$ перейдем к пределу $\tau \rightarrow \infty$ в обеих сторонах (3.63). Используя асимптотический вид волновых функций

$$S_{nl}(\tau) = \frac{N_{nl} f(\tau)}{2R^{3/2} \cosh \tau} \sim \frac{(-1)^{l-n} e^{(\sigma-n-1)\tau}}{\Gamma(n+1-\sigma)} \sqrt{\frac{n^2 - \sigma^2}{n} \frac{(l+n)! \Gamma(l+1-\sigma)}{(l-n)! \Gamma(l+1+\sigma)}}$$

$$\begin{aligned} S_{1n_1 n_2}^n \left(\frac{1-x}{1+\tanh \tau} \right) S_{2n_1 n_2}^n \left(\frac{1+x}{1-\tanh \tau} \right) &\sim \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\sigma-n_1-1-\frac{|m|}{2}} \\ &\times e^{(\sigma-n-1)\tau} {}_2F_1 \left(-n_1, n+\sigma-n_1, |m|+1; \frac{1-x}{2} \right) \end{aligned}$$

легко видеть, что зависимость от переменной τ исключается с обеих сторон уравнения (3.63). В следствии этого приходим к интегральному представлению межбазисных коэффициентов

$$W_{n_1 n_2 m}^{nlm} = (-1)^{l-n+\frac{m+|m|}{2}} C_{n_1 n_2 m}^{nl} B_{n_1 n_2 m}^{nl}$$

где

$$C_{n_1 n_2 m}^{nl} = \frac{\sqrt{(\sigma-n_1-n_2-1)}}{|m|!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(|m|+n_1)! (|m|-n_1-1)! (l-|m|)! (l-n)! \Gamma(l+1+\sigma)}{n_1! n_2! (l+|m|)! (l+n)! \Gamma(l+1-\sigma)}}$$

и

$$\begin{aligned} B_{n_1 n_2 m}^{nl} &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\sigma-n_1-1-\frac{|m|}{2}} \\ &\times {}_2F_1 \left(-n_1, n+\sigma-n_1, |m|+1; \frac{1-x}{2} \right) P_l^{|m|}(x) dx \end{aligned}$$

Учитывая формулу

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(-n_1, n + \sigma - n_1, |m| + 1; \frac{1-x}{2}\right) &= \\
&= (-1)^{n_1} \frac{n_1! |m|!}{(n_1 + |m|)!} \frac{\Gamma(\sigma - n_2)}{\Gamma(n + \sigma - |m|)} \sum_{k=0}^{n_1} \frac{(n_1)_k (n + \sigma - n_1)_k}{(\sigma - n_1 - n_2)_k k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

и дифференциальную форму полиномов Лежандра $P_l^{|m|}(x)$

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{(-1)^{|m|}}{l! 2^l} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!} (1 - x^2)^{-\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l-|m|}}{dx^{l-|m|}} (x^2 - 1)^l \quad (3.64)$$

получаем после некоторых алгебраических расчётов, что

$$\begin{aligned}
B_{n_1 n_2 m}^{nl} &= (-1)^{n_1} \frac{2n_1! |m|!}{(n_1 + |m|)!} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!} \frac{\Gamma(n + \sigma - n_1 - |m|) \Gamma(\sigma - n_1) \Gamma(\sigma - n_1 - |m|)}{\Gamma(n + \sigma - |m|) \Gamma(\sigma - n_1 + l + 1) \Gamma(\sigma - n_1 - l)} \\
&\quad \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n_1, n + \sigma - n_1, \sigma - n_1, \sigma - n_1 - |m|; & 1 \\ n + \sigma - |m| - 2n_1, \sigma - n_1 + l + 1, \sigma - n_1 - l \end{matrix} \right]
\end{aligned}$$

где ${}_4F_3$ это обобщённая гипергеометрическая функция [120, 125]. Пользуясь теперь формулой (4.3) окончательно получим

$$\begin{aligned}
W_{n_1 n_2 m}^{nlm} &= \frac{(-1)^{l-n+\frac{m-|m|}{2}}}{l!(n + |m|)!} \sqrt{\frac{2(\sigma - n_1 - n_2 - 1)(2l + 1)}{\Gamma(l + 1 + \sigma) \Gamma(l + 1 - \sigma)}} \frac{\Gamma(\sigma - n_1 - n_2)(l - n_1 - n)!}{\Gamma(\sigma + n_1 - n_2) \Gamma(n + \sigma - l - n_1)} \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(l + |m|)! n_1!(l + n)! (|m| + n_1)! (|m| - n_1 - 1)!}{(l - |m|)! n_2!(l - n)!}} \Gamma(\sigma - n_1) \Gamma(\sigma - n_2) \\
&\quad \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -l + n, -l + |m|, n - n_1, n + \sigma - n_1; & 1 \\ 1 + |m| + n, n - l - n_1, n + \sigma - n_1 - l \end{matrix} \right]
\end{aligned}$$

3.4 Квантовая задача гармонического осциллятора на двух-полосом гиперboloиде H_3^1

3.4.1 Координатные системы на трёхмерном двухполостном гиперboloиде

Перед тем как детально обсудить системы координат на трёхмерном двух-полосом гиперboloиде гармонический анализ на H_3^1 .

Однородная Лоренцова группа $SO(3, 1)$ состоит из реальных линейных преобразований сохраняющих гиперboloид $x_0 > 0$

$$x \cdot x = x^2 = x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x_0^2 - \mathbf{x}^2 = R^2$$

инвариантной. Алгебра Ли шестимерна, и образуется генераторами пространственного вращения

$$L_1 = -i \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad L_2 = -i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right), \quad L_3 = -i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$$

и операторами Лоренцова преобразования

$$K_1 = -i \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} \right), \quad K_2 = -i \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} \right), \quad K_3 = -i \left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} \right)$$

для которых коммутационные соотношения запишутся

$$[L_i, L_j] = -i\epsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$$

Гамильтониан на гиперboloиде H_3^1 Будет

$$H = H_0 + V(x) \quad H_0 = -\frac{1}{2R^2}\Delta_{LB} = \frac{1}{2R^2}(\mathbf{K}^2 - \mathbf{L}^2)$$

или же оператор Лапласа Белтрами можно записать

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

$$g^{ik} = (g_{ik})^{(-1)} \quad g = \det(d_{ik}) \quad g_{ik} = G_{\nu\mu} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\nu} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

где $G_{\mu\nu}$ метрика объемлющего пространства, а ξ_1, ξ_2, ξ_3 координаты на гиперboloиде.

На гиперboloиде H_3^1 аналогом потенциала гармонического осциллятора выступает потенциал

$$V(x) = \frac{\omega^2 R^2}{2} \frac{\mathbf{x}^2}{x_0^2}$$

а дополнительный интеграл движения имеет вид

$$D_{ik} = \frac{1}{2R^2}(K_i K_k + K_k K_i) + \omega^2 R^2 \frac{x_i x_k}{x_0^2}$$

1) Сферические координаты

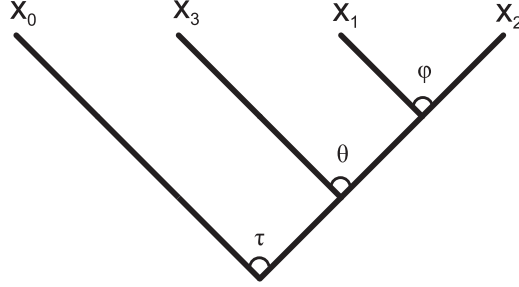


Рис. 3.9: Дерево соответствующее сферической системе координат

$$\begin{aligned} x_0 &= R \cosh \tau & x_1 &= R \sinh \tau \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= R \sinh \tau \sin \theta \sin \varphi & x_3 &= R \sinh \tau \cos \theta \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\tau \in (0, \infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$$

Для метрического тензора в координатах τ, θ, φ имеем

$$g_{ij}/R^2 = \text{diag}\{1, \sinh^2 \tau, \sinh^2 \tau \sin^2 \theta\}$$

из чего мы можем выписать оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\sinh^2 \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \sinh^2 \tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\sinh^2 \tau} \left(\frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right\}$$

Переход от пространства двух-полосого гиперboloида H_3^1 к трёхмерному Евклидовому пространству E_3 производится в пределе $R \rightarrow \infty$. В таком случае, сферический угол τ стремится к нулю $\tau \rightarrow 0$ так что $\tau R \rightarrow r$ где r это радиус вектор плоского трёхмерного пространства. В это случае сферическая система координат на гиперboloиде переходит в сферическую систему координат в трёхмерно Евклидовом пространстве.

$$\begin{cases} y_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{x_1}{x_0} = r \sin \theta \cos \varphi \\ y_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{x_2}{x_0} = r \sin \theta \sin \varphi \\ y_3 &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{x_3}{x_0} = r \cos \theta \end{cases}$$

2) Полярно-Цилиндрические координаты

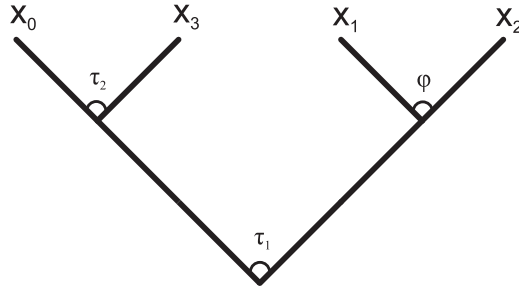


Рис. 3.10: Дерево соответствующее Полярно-цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
 x_0 &= R \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 & x_1 &= R \sinh \tau_1 \cos \varphi & (3.66) \\
 x_2 &= R \sinh \tau_1 \sin \varphi & x_3 &= R \cosh \tau_1 \sinh \tau_2 \\
 \tau_1 &\in [0, \infty), \tau_2 \in (-\infty, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)
 \end{aligned}$$

метрический тензор будет

$$g_{ik}/R^2 = \text{diag}\{1, \cosh^2 \tau_1, \sinh^2 \tau_1\}$$

а для оператора Лапласа-Бельтрами получим

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\cosh \tau_1 \sinh \tau_1} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \cosh \tau_1 \sinh \tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{1}{\cosh^2 \tau_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} + \frac{1}{\sinh^2 \tau_1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Переход к Евклидовому пространству E_3 в пределе $R \rightarrow \infty$ происходит устремлением τ_1, τ_2 к нулю $\tau_1, \tau_2 \rightarrow 0$ так чтобы $\tau_1 R = \zeta$ и $\tau_2 R = z$, где ζ и z с φ это координаты цилиндрической системы в плоском трёхмерном пространстве.

$$\begin{cases}
 y_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{x_1}{x_0} = \zeta \cos \varphi \\
 y_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{x_2}{x_0} = \zeta \sin \varphi \\
 y_3 &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \frac{x_3}{x_0} = z
 \end{cases}$$

3.4.2 Сферическая система координат

Потенциал осциллятора в данной системе координат запишется

$$V_{osc} = \frac{\omega^2 R^2}{2} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_0^2} = \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 \tau$$

В уравнении Шредингера мы можем выбрать волновую функцию как

$$\Psi(\tau, \theta, \varphi; R) = \frac{1}{\sqrt{R^3}} (\sinh \tau)^{-1} f(\tau) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (3.67)$$

где $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ сферическая функция с $\ell = 0, 1, \dots, -\ell < m < \ell$. После подстановки получим

$$f''(\tau) + \left(\tilde{E} + \frac{\nu^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau} - \frac{(\ell + 1/2)^2 - 1/4}{\sinh^2 \tau} \right) f = 0 \quad (3.68)$$

где были сделаны подстановки $\tilde{E} = 2R^2 E - \omega^2 R^4 - 1$, $\nu = \sqrt{\omega^2 R^4 + 1/4}$. Эффективный потенциал будет

$$V(\tau) = -\frac{\nu^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau} + \frac{(\ell + 1/2)^2 - 1/4}{\sinh^2 \tau}$$

Для существования дискретного спектра при $\tilde{E} < 0$ условие $(\ell + 1/2)^2 \leq \nu^2$, должно удовлетворяться. В таком случае эффективный потенциал имеет минимум в точке

$$\tanh^4 \tau_0 = \frac{(\ell + 1/2)^2 - 1/4}{\nu^2 - 1/4}$$

со значением

$$V(\tau_0) = -(\sqrt{\nu^2 - 1/4} - \sqrt{(\ell + 1/2)^2 - 1/4})^2$$

Уравнение (3.68) содержит конечное количество связанных состояний описываемых волновыми функциями нормированными на $(0, \infty)$ [116]

$$f_{n_\tau \ell}^\nu(\tau) = N_{n_\tau \ell} (\sinh \tau)^{\ell+1} (\cosh \tau)^{1/2-\nu} {}_2F_1(-n_\tau, n_\tau + \ell + 3/2 - \nu; \ell + 3/2; -\sinh^2 \tau) \quad (3.69)$$

$$N_{n_\tau \ell}^\nu = \frac{1}{2\Gamma(\ell + 3/2)} \sqrt{\frac{2(\nu - \ell - 2n_\tau - 3/2) \Gamma(\ell + n_\tau + 3/2) \Gamma(\nu - n_\tau)}{n_\tau! \Gamma(\nu - n_\tau - \ell - 1/2)}}$$

$$\tilde{E} = -(\nu - \ell - 2n_\tau - 3/2)^2$$

где $n_\tau \leq \nu/2 - \ell/2 - 3/4$ это радиальное квантовое число. Для спектра энергии получим

$$E_N(\nu, R) = -\frac{(N+1)(N+3)}{2R^2} + \frac{\nu + 1/2}{R^2} \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (3.70)$$

в котором $N = \ell + 2n_\tau \leq \nu - 3/2$.

Непрерывный спектр описывается волновыми функциями [116]

$$f_{p\ell}^\nu(r) = N_{p\ell} (\sinh r)^{\ell+1} (\cosh r)^{1/2-\nu} \times {}_2F_1\left(\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2}, \frac{\ell + 3/2 - \nu - ip}{2}; \ell + \frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau\right), \quad (3.71)$$

$$N_{p\ell}^\nu = \frac{1}{2\Gamma(\ell + 3/2)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2}} \left| \Gamma\left\{\frac{\ell + 3/2 + \nu + ip}{2}\right\} \Gamma\left\{\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2}\right\} \right|$$

где спектр энергии будет $E = (\nu^2 + 3/4 + p^2/4)/2R^2$, $p \in \mathbf{R}$.

Для $R \rightarrow \infty$ имеем $\nu \rightarrow \omega R^2$ и из формулы (3.70) можно извлечь спектр энергии гармонического осциллятора в Евклидово пространстве E_3 .

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_N(\nu, R) \equiv E_N = \omega \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (3.72)$$

В свою очередь решения (3.69) в пределе $R \rightarrow \infty$ запишутся

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^3} f_{n_\tau \ell}^\nu(\tau) \equiv f_{n_\tau \ell}(r) = \frac{\omega^{\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}}}{\Gamma(\ell + 3/2)} \sqrt{\frac{\Gamma(\ell + n_\tau + 3/2)}{2n_\tau!}} r^{\ell+1} e^{-\frac{\omega r^2}{2}} {}_1F_1 \left(-n_\tau, \ell + \frac{3}{2}, \omega r^2 \right)$$

Как и предполагалось угловая часть волновой функции $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ не меняется при данном переходе. Для констант связи в сферических координатах имеем

$$L_3^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

3.4.3 Полярно-Цилиндрическая система координат

В цилиндрических координатах потенциал осциллятора имеет вид

$$V(\tau_1 \tau_2) = \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \tau_1 \cosh^2 \tau_2} \right)$$

Если в уравнении Шредингера выбрать волновую функцию в виде

$$\Psi(\tau_1, \tau_2, \varphi; R) = \frac{1}{\sqrt{R^3}} (\cosh \tau_1)^{-\frac{1}{2}} (\sinh \tau_1)^{-\frac{1}{2}} f(\tau_1) S(\tau_2) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.73)$$

после разделения переменных получим уравнения для функций $S(\tau_2)$ и $f(\tau_1)$

$$S''(\tau_2) + \left(-\left(\sigma + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_2} \right) S(\tau_2) = 0$$

$$f''(\tau_1) + \left(\tilde{E} + \frac{(\sigma + 1/2)^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_1} - \frac{m^2 - 1/4}{\sinh^2 \tau_1} \right) f(\tau_1) = 0$$

где $\nu = \sqrt{\omega^2 R^2 + 1/4}$, $\tilde{E} = 2R^2 E - \omega^2 R^4 - 1$ и $(\sigma + 1/2)^2$ это константа разделения.

Угловое уравнение

Угловое уравнение

$$S''(\tau_2) + \left(-\left(\sigma + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\nu^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_2} \right) S(\tau_2) = 0$$

описывает одномерное движение в поле с эффективным потенциалом

$$V_{eff}^{ang}(\tau_2) = -\frac{\nu^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_2}$$

с минимальным значением

$$(V_{eff}^{ang}(\tau_2))_{min} = -\nu^2 + 1/4$$

При реальных значениях σ выражение $-(\sigma + \frac{1}{2})^2$ имеет отрицательное значение и мы имеем дискретный спектр.

1) Дискретный спектр Ортонормированное решение для дискретного случая будет

$$S_{n_2\nu}(\tau_2) = C_{n_2\nu}(\cosh \tau_2)^{n_2 - \nu + \frac{1}{2}} {}_2F_1\left(-n_2, 2\nu - n_2, \nu + \frac{1}{2} - n_2, \frac{1 - \tanh \tau_2}{2}\right)$$

$$C_{n_2\nu} = \frac{1}{2^{\nu-1-n_2} \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - n_2)} \sqrt{\frac{\Gamma(2\nu - n_2)}{(2\nu - 1 - 2n_2)n_2!}}$$

Чтобы решение было сходимо во всех точках, потребуем

$$\sigma = \nu - 1 - n_2 \quad (3.74)$$

и для квантования

$$\left(\sigma + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\nu - \frac{1}{2} - n_2\right)^2 < \nu^2 - \frac{1}{4}$$

где $n_2 = 0, 1, 2, \dots, [\nu - 1/2]$. Решение может быть также записано в терминах чётных и нечётных функций

$$S_{n_2\nu}^{(+)}(\tau_2) = C_{n_2\nu}^{(+)}(\cosh \tau_2)^{n_2 - \nu + \frac{1}{2}} {}_2F_1\left(-\frac{n_2}{2}, \nu - \frac{n_2}{2}, \frac{1}{2}, \tanh^2 \tau_2\right) \quad (3.75)$$

$$S_{n_2\nu}^{(-)}(\tau_2) = C_{n_2\nu}^{(-)}(\cosh \tau_2)^{n_2 - \nu + \frac{1}{2}} \tanh \tau_2 {}_2F_1\left(-\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}, \nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \tanh^2 \tau_2\right)$$

для $n_2 = 0, 2, 4, \dots$ и $n_2 = 1, 3, 5, \dots$ соответственно, где

$$C_{n_2\nu}^{(+)} = (-1)^{\frac{n_2}{2}} \sqrt{\frac{2\nu - 2n_2 - 1}{2\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}}$$

$$C_{n_2\nu}^{(-)} = (-1)^{\frac{n_2}{2} - \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2(2\nu - 2n_2 - 1)}{\pi}} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}}$$

2) Непрерывный спектр Чтобы получить положительное значение для $-(\sigma + \frac{1}{2})^2$ мы должны положить $\sigma = -1/2 + i\chi$, где для удобства выберем $\chi > 0$. Для ортонормированных решений получим

$$S_{\chi\nu}(\tau_2) = C_{\chi\nu}(\cosh \tau_2)^{-i\chi} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + i\chi - \nu, \frac{1}{2} + i\chi + \nu, 1 + i\chi, \frac{1 - \tanh \tau_2}{2}\right)$$

где

$$C_{\chi\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sinh \pi\chi}{\sqrt{\sinh^2 \pi\chi + \cosh^2 \pi\nu}}$$

Как и раньше можно записать решение в терминах чётных и нечётных функций

$$\begin{aligned} S_{\chi\nu}^{(+)}(\tau_2) &= C_{\chi\nu}^{(+)} (\cosh \tau_2)^{-\nu+1/2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{4} - \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, -\sinh^2 \tau_2 \right) \\ S_{\chi\nu}^{(-)}(\tau_2) &= C_{\chi\nu}^{(-)} (\cosh \tau_2)^{-\nu+1/2} \sinh \tau_2 {}_2F_1 \left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{4} - \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, -\sinh^2 \tau_2 \right) \end{aligned} \quad (3.76)$$

в которых

$$\begin{aligned} C_{\chi\nu}^{(+)} &= \frac{\sinh \pi\chi}{\sqrt{\sinh^2 \pi\chi + \cosh^2 \pi\nu}} \frac{\Gamma(1+i\chi)}{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \\ C_{\chi\nu}^{(-)} &= -\frac{2 \sinh \pi\chi}{\sqrt{\sinh^2 \pi\chi + \cosh^2 \pi\nu}} \frac{\Gamma(1+i\chi)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \end{aligned}$$

Радиальное уравнение

Радиальное Уравнение

$$f''(\tau_1) + \left(\tilde{E} + \frac{(\sigma + 1/2)^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_1} - \frac{m^2 - 1/4}{\sinh^2 \tau_1} \right) f(\tau_1) = 0$$

описывает одномерное движение в поле с эффективны потенциалом

$$V_{eff}^{rad}(\tau_1) = -\frac{(\sigma + 1/2)^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_1} + \frac{m^2 - 1/4}{\sinh^2 \tau_1}$$

Яма в потенциале и соответственно дискретный спектр в радиально уравнении существуют при условии $\sigma + 1/2 \geq m$. В этом случае потенциал имеет минимум в точке

$$\tanh^4(\tau_1)_0 = \frac{m^2 - 1/4}{(\sigma + 1/2)^2 - 1/4}$$

со значением

$$(V_{eff}^{rad})_{min} = -\left(\sqrt{(\sigma + 1/2)^2 - 1/4} - \sqrt{m^2 - 1/4} \right)^2$$

Для решения дискретного спектра имеем

$$\begin{aligned} f_{n_1\sigma m}^\nu(\tau_1) &= N_{n_1n_2m} (\sinh \tau_1)^{m+\frac{1}{2}} (\cosh \tau_1)^{1-\nu+n_2} \\ &\times {}_2F_1(-n_1, m + n_1 + n_2 - \nu + 3/2, m + 1, -\sinh^2 \tau_1) \\ N_{n_1n_2m} &= \frac{1}{\Gamma(m+1)} \sqrt{\frac{2(\nu - N - 3/2)\Gamma(m+1+n_1)\Gamma(\nu - 1/2 - n_1 - n_2)}{n_1!\Gamma(\nu - 1/2 - n_1 - n_2 - m)}} \\ \tilde{E} &= -(\nu - 3/2 - N)^2 \end{aligned}$$

где $N = m + 2n_1 + n_2$, $N = 0, 1, \dots, [\nu - 3/2]$, $n_1 = 0, 1, \dots, [\nu - 3/2]$. И для спектра энергии получится ожидаемый результат

$$E_N(\nu, R) = -\frac{(N+1)(N+3)}{2R^2} + \frac{\nu+1/2}{R^2} \left(N + \frac{3}{2}\right)$$

В непрерывно случае будем иметь два решения в зависимости от значения σ . В случае $(\sigma + 1/2)^2 > 0$ учитывая (3.74) получим

$$f_{pn_2m}(\tau_1) = N_{pn_2m} (\sinh \tau_1)^{m+\frac{1}{2}} (\cosh \tau_1)^{1-\nu+n_2} \quad (3.77)$$

$${}_2F_1 \left(\frac{m+3/2+n_2-\nu+ip}{2}, \frac{m+3/2+n_2-\nu-ip}{2}, m+1, -\sinh^2 \tau_1 \right)$$

$$N_{pn_2m} = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2}} \left| \Gamma \left(\frac{m+1/2+\nu-n_2+ip}{2} \right) \Gamma \left(\frac{m+3/2-\nu+n_2+ip}{2} \right) \right|$$

а для случая $\sigma = -1/2 + i\chi$ будем иметь

$$f_{p\chi m}(\tau_1) = N_{p\chi m} (\sinh \tau_1)^{m+\frac{1}{2}} (\cosh \tau_1)^{\frac{1}{2}-\chi} \quad (3.78)$$

$${}_2F_1 \left(\frac{m+1-i\chi+ip}{2}, \frac{m+1-i\chi-ip}{2}, m+1, -\sinh^2 \tau_1 \right)$$

$$N_{p\chi m} = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \sqrt{\frac{p \sinh \pi p}{2\pi^2}} \left| \Gamma \left(\frac{m+1+i\chi+ip}{2} \right) \Gamma \left(\frac{m+1-i\chi+ip}{2} \right) \right|$$

В обоих случаях для спектра энергии имеем $E = (\nu^2 + 3/4 + p^2/4)$

При переходе к плоскому пространству $R \rightarrow \infty$ цилиндрические координаты на гиперболоиде $(\tau_1, \tau_2, \varphi)$ переходами $\tau_1 \rightarrow \rho/R$ $\tau_2 \rightarrow z/R$ переходят к цилиндрически координатам в трёхмерном Евклидовом пространстве (ρ, z, φ) . Как и прежде имеем $\nu \sim \omega R^2$ а для решений получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_{n_2\nu}^{(+)}(\tau_2) \equiv S_{n_2}^{(+)}(z) = (-1)^{\frac{n_2}{2}} \frac{\omega^{\frac{1}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}} e^{-\frac{\omega z^2}{2}} {}_1F_1 \left(-\frac{n_2}{2}, \frac{1}{2}, \omega z^2 \right)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_{n_2\nu}^{(-)}(\tau_2) \equiv S_{n_2}^{(-)}(z) = (-1)^{\frac{n_2}{2} - \frac{1}{2}} \frac{2\omega^{\frac{3}{4}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}} z e^{-\frac{\omega z^2}{2}} {}_1F_1 \left(-\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \omega z^2 \right)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f_{n_1 n_2 m}^\nu(\tau_1) \equiv f_{n_1 m}(\rho) = \omega^{\frac{m}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{n_1!}{2(m+n_1)!}} e^{-\frac{\omega \rho^2}{2}} \rho^{m+\frac{1}{2}} L_{n_1}^m(\omega \rho^2)$$

А для спектра энергии после перехода получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E_N(\nu, R) \equiv E_N = \omega \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

В данной системе координат константы движения это

$$L_3^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$R^2 D_{33} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} - \frac{\omega^2 R^4}{2} \frac{1}{\cosh^2 \tau_2}$$

3.4.4 Алгебра

Обозначим $R = [\mathbf{L}^2, C_1]$. Поскольку \mathbf{L}^2 и C_1 можно выразить как

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2 &= -2R^2H - R^2(D_{11} + D_{22+D_{33}}) \\ C_1 &= D_{33} - 1\end{aligned}$$

получим

$$R = 2i\{L_2, D_{13}\} + 2i\{L_1, D_{23}\}$$

а для коммутационных соотношений

$$\begin{aligned}[C_1, R] &= 4R^2\{H, C_1\} + 4\{C_1, \mathbf{L}^2\} - 8C_1^2 - 2\{L_3^2, C_1\} + 4\mathbf{L}^2 + 4R^2(1 + \omega^2R^4)H^2 - \\ &\quad - 4(1 + \omega^2R^4)C_1 - 2(1 - \omega^2R^4)L_3^2 - 2(3 + \omega^2R^4)\omega^2R^4 \\ [\mathbf{L}^2, R] &= -4R^2\{H, \mathbf{L}^2\} - 4\mathbf{L}^4 + 8\{\mathbf{L}^2, C_1\} + 4R^2\{H, L_3^2\} + 2\{\mathbf{L}^2, L_3^2\} + \\ &\quad + 4(R^2H + \mathbf{L}^2)(1 + \omega^2R^4) - 8\omega^2R^6H - 12C_1 - 6L_3^2 - 6\omega^2R^4\end{aligned}$$

3.4.5 Разложение между сферическим и цилиндрическим базисом

Учитывая что сферические и цилиндрические волновые функции являются решением одного и того же уравнения Шредингера для фиксированной энергии, возможно произвести меж базисное разложение между двумя системами. В общем виде данное разложение запишется следующим образом

$$\Psi_{n_1n_2m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R) = \sum_{\ell=m}^N W_{n_1n_2m}^{\ell,m,n_\tau}(\nu) \Psi_{\ell mn_\tau}^\nu(\tau, \theta, \varphi; R) \quad (3.79)$$

$$\Psi_{\ell mn_\tau}^\nu(\tau, \theta, \varphi; R) = \sum_{n_2=0}^{N-m} (W_{n_1n_2m}^{\ell,m,n_\tau}(\nu))^* \Psi_{n_1n_2m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R)$$

$$N = m + 2n_1 + n_2 = \ell + 2n_\tau$$

Рассмотрим случаи дискретного и непрерывного спектров по отдельности, так как коэффициенты разложения а также процедура их расчёта различаются для этих случаев.

3.4.6 Разложения для дискретного спектра

Мы рассмотрим из случаев в (3.79) разложение цилиндрических волновых функций (3.73) по сферическим волновым функциям (3.67). Для удобства рассмотрим данное разложение в точке $\tau \rightarrow \infty$. Учитывая (3.65) и (3.66) имеем

$$\sinh \tau_1 \sim \frac{e^\tau}{2} \sin \theta \quad \tanh \tau_2 \sim \cos \theta \quad \cosh \tau_2 \sim (\sin \theta)^{-1}$$

Из (3.67) и (3.69) имеем

$$\Psi(\tau, \theta, \varphi)_{\ell mn\tau} \sim N_{n\tau\ell} \frac{\Gamma(\ell + 3/2)\Gamma(N - \nu + 3/2)}{\Gamma(n\tau + \ell + 3/2 - \nu)\Gamma(\ell + 3/2 + n\tau)} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \left(\frac{e^\tau}{2}\right)^{N-\nu+\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1 n_2 m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi) &\sim N_{n_1, n_2, m} C_{n_2 \nu} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(N - \nu + 3/2)}{\Gamma(n_1 - \nu + m + n_2 + 3/2)\Gamma(m + n_1 + 1)} \times \\ &{}_2F_1\left(-n_2, 2\nu - n_2, \nu + \frac{1}{2} - n_2, \frac{1 - \cos\theta}{2}\right) (\sin\theta)^{N-n_2} \left(\frac{e^\tau}{2}\right)^{N-\nu+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение разложения, умножая обе части на $\sin\theta P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$ и учитывая выражение ортогональности для $P_\ell^m(\cos\theta)$ в интервале $\theta \in [0, \pi]$ получим следующее выражение для коэффициентов $W_{n_1 n_2 m}^{\ell, m, n\tau}(\nu)$

$$\begin{aligned} W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n\tau} &= (-1)^m 2^{-\nu+1+n_2} \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + \frac{\ell}{2} - \nu + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu - \frac{1}{2} - n_2\right) \Gamma\left(\frac{N}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} - \nu + \frac{3}{2}\right)} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2(2\nu-2n_2-1)} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \\ &\sqrt{\frac{\Gamma(2\nu-n_2) \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2} - \frac{\ell}{2} + 1\right) \Gamma\left(\nu - \frac{N}{2} - \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n_2+1) \Gamma\left(\frac{N}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2} + 1\right) \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{N}{2} + \frac{\ell}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2} + 1\right)} I_{N\ell m}^{n_2}(\nu)} \end{aligned}$$

где

$$I_{N\ell m}^{n_2}(\nu) = \int_0^\pi (\sin\theta)^{N-n_2+1} {}_2F_1\left(-n_2, 2\nu - n_2, \nu + \frac{1}{2} - n_2, \frac{1 - \cos\theta}{2}\right) P_\ell^m(\cos\theta) d\theta$$

Последний интеграл можно выразить через полиномы Гегенбауера учитывая

$${}_2F_1\left(-n_2, 2\nu - n_2, \nu + \frac{1}{2} - n_2, \frac{1 - \cos\theta}{2}\right) = \frac{n_2! \Gamma(2\nu - 2n_2)}{\Gamma(2\nu - n_2)} C_{n_2}^{\nu-n_2}(\cos\theta)$$

и

$$P_\ell^m(\cos\theta) = (-2)^m \frac{\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(1/2)} (\sin\theta)^m C_{\ell-m}^{m+1/2}(\cos\theta)$$

Разделяя интервал интегрирования на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, и делая замену во втором интеграле $\theta \rightarrow \pi - \theta$ окончательно получим

$$\begin{aligned} I_{N\ell m}^{n_2}(\nu) &= \frac{(-1)^m 2^{m+1} n_2! \Gamma(2\nu - 2n_2) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu - n_2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \\ &\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{N-n_2+m+1} C_{n_2}^{\nu-n_2}(\cos\theta) C_{\ell-m}^{m+1/2}(\cos\theta) d\theta \end{aligned}$$

Можно заметить, что результат интеграла зависит от четности $\ell - m$ и n_2 которые имеют одинаковую четность в следствии $N = \ell + 2n_\tau = m + 2n_1 + n_2$, и следовательно на придется рассматривать два случая.

$$C_{n_2}^{\nu-n_2}(\cos\theta) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu - n_2) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n_2}{2}\right)} P_{\frac{n_2}{2}}^{\nu-n_2-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(\cos 2\theta) & n_2+ \\ \frac{\Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu - n_2) \Gamma\left(1 + \frac{n_2}{2}\right)} P_{\frac{n_2}{2}-\frac{1}{2}}^{\nu-n_2-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\cos 2\theta) & n_2- \end{cases}$$

$$C_{\ell-m}^{m+1/2}(\cos \theta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2})} P_{\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2}}^{m, -\frac{1}{2}}(\cos 2\theta) & n_2+ \\ \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + 1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + 1)} P_{\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2}}^{m, \frac{1}{2}}(\cos 2\theta) & n_2- \end{cases}$$

Делая замену $x = \cos 2\theta$ приходим к выражениям

$$I_{N\ell m}^{n_2(+)}(\nu) = \frac{(-1)^m}{2^{\frac{N}{2} + \frac{n_2}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}}} \frac{n_2! \Gamma(\nu - n_2 + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2})} \times \\ \times \int_{-1}^1 (1-x)^{\frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}} P_{\frac{n_2}{2}}^{\nu - n_2 - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x) P_{\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2}}^{m, -\frac{1}{2}}(x) dx \quad (3.80)$$

$$I_{N\ell m}^{n_2(-)}(\nu) = \frac{(-1)^m}{2^{\frac{N}{2} + \frac{n_2}{2} - \frac{m}{2} + \frac{3}{2}}} \frac{n_2! \Gamma(\nu - n_2 + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(1 + \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + 1)} \times \\ \times \int_{-1}^1 (1-x)^{\frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} P_{\frac{n_2}{2} - \frac{1}{2}}^{\nu - n_2 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x) P_{\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2}}^{m, \frac{1}{2}}(x) dx$$

После вычисления интегралов и преобразования гипергеометрических функций получим окончательно

$$W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(+)} = (-1)^{\frac{\ell - m - n_2}{2}} 2^{-m - \frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2\ell + 1) \left(\nu - n_2 - \frac{1}{2}\right) \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}}} \\ \times \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N - m + n_2}{2}) \Gamma(\frac{N + m - n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{N - m - n_2}{2} + 1) \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N + m + n_2}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N - \ell}{2}) \Gamma(\frac{N - \ell}{2} + 1) \Gamma(\frac{N + \ell}{2} + \frac{3}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N + \ell}{2} - \frac{1}{2})}} \\ \times \frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N + m}{2}) \Gamma(\frac{N - m}{2} + 1)}{\Gamma(-\frac{\ell - m}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\ell + m}{2} + 1)} R_{n(+)}(\lambda(x^{(+)}) , \alpha^{(+)}, \beta^{(+)}, \gamma^{(+)}, \delta^{(+)}) \quad (3.81)$$

$$W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(-)} = (-1)^{\frac{\ell - m - n_2}{2} + 1} 2^{-m + \frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2\ell + 1) \left(\nu - n_2 - \frac{1}{2}\right) \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}}}} \\ \times \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N - m + n_2}{2}) \Gamma(\frac{N + m - n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{N - m - n_2}{2} + 1) \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N + m + n_2}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N - \ell}{2}) \Gamma(\frac{N - \ell}{2} + 1) \Gamma(\frac{N + \ell}{2} + \frac{3}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N + \ell}{2} - \frac{1}{2})}} \\ \times \frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N + m}{2}) \Gamma(\frac{N - m}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\ell - m}{2}) \Gamma(\frac{\ell + m}{2} + \frac{1}{2})} R_{n(-)}(\lambda(x^{(-)}) , \alpha^{(-)}, \beta^{(-)}, \gamma^{(-)}, \delta^{(-)}) \quad (3.82)$$

где $R_{n(+)}(\lambda(x^{(+)}) , \alpha^{(+)}, \beta^{(+)}, \gamma^{(+)}, \delta^{(+)})$ и $R_{n(-)}(\lambda(x^{(-)}) , \alpha^{(-)}, \beta^{(-)}, \gamma^{(-)}, \delta^{(-)})$ полиномы Рака с коэффициентами

$$\begin{aligned} x^{(+)} &= \frac{n_2}{2} & \beta^{(+)} &= \frac{N + m}{2} + \frac{1}{2} \\ n^{(+)} &= \frac{\ell - m}{2} & \gamma^{(+)} &= -\frac{1}{2} \\ \alpha^{(+)} &= -\frac{N - m}{2} - 1 & \delta^{(+)} &= -\nu \end{aligned}$$

$$\lambda^{(+)}(x) = x(x + \gamma + \delta + 1) = \frac{1}{4}n_2(n_2 + 1 - 2\nu)$$

$$\begin{aligned} x^{(-)} &= \frac{n_2}{2} - \frac{1}{2} & \beta^{(-)} &= \frac{N+m}{2} + 1 \\ n^{(-)} &= \frac{\ell-m}{2} - \frac{1}{2} & \gamma^{(-)} &= \frac{1}{2} \\ \alpha^{(-)} &= -\frac{N-m}{2} - \frac{1}{2} & \delta^{(-)} &= -\nu \end{aligned}$$

$$\lambda^{(-)}(x) = x(x + \gamma + \delta + 1) = \frac{1}{4}(n_2 - 1)(n_2 + 2 - 2\nu)$$

Можно показать что наши коэффициенты разложения удовлетворяют условию нормировки для полиномов Рака $R_n(\lambda(x), \alpha, \beta, \gamma, \delta)$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^{N'} \frac{(\alpha+1)_x(\beta+\delta+1)_x(\gamma+1)_x((\gamma+\delta+3)/2)_x}{(-\alpha+\gamma+\delta+1)_x(-\beta+\gamma+1)_x((\gamma+\delta+1)/2)_x(\delta+1)_x x!} R_m(\lambda(x)) R_n(\lambda(x)) \\ &= \frac{(-\beta)_{N'}(\gamma+\delta+2)_{N'}}{(-\beta+\gamma+1)_{N'}(\delta+1)_{N'}} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n(\alpha+\beta-\gamma+1)_n(\alpha-\delta+1)_n(\beta+1)_n n!}{(\alpha+\beta+2)_{2n}(\alpha+1)_n(\beta+\delta+1)_n(\gamma+1)} \delta_{mn} \end{aligned}$$

где $N' = -\alpha - 1$. И следовательно

$$\sum_{\substack{n_2=0 \\ \frac{n_2}{2}=0}}^{\frac{N-m}{2}} W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(+)} \left(W_{n_1, n_2, m}^{\ell', m, n_\tau(+)} \right)^* = \delta_{\ell\ell'} \quad \sum_{\substack{n_2=1 \\ \frac{n_2}{2}=1}}^{\frac{N-m}{2}-\frac{1}{2}} W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(-)} \left(W_{n_1, n_2, m}^{\ell', m, n_\tau(-)} \right)^* = \delta_{\ell\ell'}$$

В пределе контракции $\nu \rightarrow \infty$ для коэффициентов преобразования получим

$$\begin{aligned} W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(+)} &= (-1)^{\frac{\ell-m-n_2}{2}} 2^{-m-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \times \frac{\left(\frac{N-m}{2}\right)!}{\Gamma\left(-\frac{\ell-m}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\ell+m}{2}\right)!} \\ &\times \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N+m-n_2}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2} + 1\right) \left(\frac{N-m-n_2}{2}\right)! \left(\frac{N-\ell}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{N+\ell}{2} + \frac{3}{2}\right)}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -\frac{\ell-m}{2}, \frac{\ell+m+1}{2}, -\frac{n_2}{2} \\ \frac{1}{2}, -\frac{N-m}{2} \end{matrix}; 1 \right] \\ W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(-)} &= (-1)^{\frac{\ell-m-n_2}{2}} 2^{-m+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \times \frac{\left(\frac{N-m-1}{2}\right)!}{\Gamma\left(-\frac{\ell-m}{2}\right) \left(\frac{\ell+m-1}{2}\right)!} \\ &\times \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2} + 1\right) \left(\frac{N+m-n_2}{2}\right)!}{\left(\frac{n_2}{2} - \frac{1}{2}\right)! \left(\frac{N-m-n_2}{2}\right)! \left(\frac{N-\ell}{2}\right)! \Gamma\left(\frac{N+\ell}{2} + \frac{3}{2}\right)}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -\frac{\ell-m-1}{2}, \frac{\ell+m+2}{2}, -\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}, -\frac{N-m-1}{2} \end{matrix}; 1 \right] \end{aligned}$$

3.4.7 Разложение непрерывного спектра

Как можно увидеть из (3.71), (3.76) (3.76), (3.78) непрерывно-непрерывному спектру в сферических координатах соответствует непрерывно-дискретный и непрерывно-непрерывный спектры в цилиндрических координатах. Поэтому проведем данное разложение двумя шагами, как и выше напишем разложение цилиндрических волновых функций через сферические и посчитаем коэффициенты в соответствующих случаях. После чего рассмотрим возможность обратного разложения.

Разложение непрерывно-дискретного спектра

Общая формула для непрерывно-дискретного имеет вид

$$\Psi_{pn_2m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R) = \sum_{\ell=m} W_{pn_2m}^{p\ell m} \Psi_{p\ell m}^\nu(\tau, \theta, \varphi; R)$$

где волновые функции даются формулами (3.67), (3.71), (3.73), (3.73), (3.75), (3.77). Соотношения между двумя системами координат можно получить из (3.65) и (3.66)

$$\sinh \tau_1 = \sinh \tau \sin \theta \quad \tanh \tau_2 = \tanh \tau \cos \theta \quad \cosh \tau_2 = \frac{\cosh \tau}{\sqrt{1 + \sinh^2 \tau \sin^2 \theta}}$$

Если сократим $e^{im\varphi}$ с обеих сторон, умножим обе части на $\sin \theta P_\ell^m(\cos \theta)$, и проинтегрируем по θ и выразим $P_\ell^m(x)$ через $P_\ell^{-m}(x)$ для дальнейшего удобства, в конце концов придем к

$$\begin{aligned} W_{pn_2m}^{p\ell m(+)}(\sinh \tau)^{\ell-m}(\cosh \tau)^{-n_2} {}_2F_1 \left(\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2}, \frac{\ell + 3/2 - \nu - ip}{2}; \ell + \frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau \right) = \\ \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(+)}}{N_{p\ell}} \sum_s \sum_k \frac{\left(\alpha + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\alpha - \frac{ip}{2}\right)_s \left(-\frac{n_2}{2}\right)_k \left(\nu - \frac{n_2}{2}\right)_k}{(m+1)_s s! \left(\frac{1}{2}\right)_k k!} \\ (-1)^s (\sinh \tau)^{2s} (\tanh \tau)^{2k} (1 + (-1)^{\ell-m}) \int_0^1 x^{2k} (1-x^2)^{\frac{m}{2}+s} P_\ell^{-m}(x) dx \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} W_{pn_2m}^{p\ell m(-)}(\sinh \tau)^{\ell-m-1}(\cosh \tau)^{1-n_2} {}_2F_1 \left(\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2}, \frac{\ell + 3/2 - \nu - ip}{2}; \ell + \frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau \right) = \\ \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(-)}}{N_{p\ell}} \sum_s \sum_k \frac{\left(\alpha + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\alpha - \frac{ip}{2}\right)_s \left(-\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)_k \left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)_k}{(m+1)_s s! \left(\frac{3}{2}\right)_k k!} \\ (-1)^s (\sinh \tau)^{2s} (\tanh \tau)^{2k} (1 + (-1)^{\ell-m+1}) \int_0^1 x^{2k+1} (1-x^2)^{\frac{m}{2}+s} P_\ell^{-m}(x) dx \end{aligned} \quad (3.84)$$

для чётных и нечётных случаев. Учитывая формулу для интегрирования полиномов Якоби

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\sigma (1-x^2)^\eta P_\nu^\mu(x) dx = \frac{2^{\mu-1} \Gamma(1+\eta - \frac{\mu}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2})}{\Gamma(1-\mu) \Gamma(\frac{3}{2} + \eta + \frac{\sigma}{2} - \frac{\mu}{2})} \times \\ {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2}, 1 + \eta - \frac{\mu}{2}; 1 \\ 1 - \mu, \eta + \frac{\sigma}{2} - \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2} \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} W_{pn_2m}^{p\ell m(+)}(\sinh \tau)^{\ell-m}(\cosh \tau)^{-n_2} {}_2F_1 \left(\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2}, \frac{\ell + 3/2 - \nu - ip}{2}; \ell + \frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau \right) = \\ \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(+)}}{N_{p\ell}} \sum_s \sum_k \frac{\left(\alpha + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\alpha - \frac{ip}{2}\right)_s \left(-\frac{n_2}{2}\right)_k \left(\nu - \frac{n_2}{2}\right)_k}{(m+1)_s s! \left(\frac{1}{2}\right)_k k!} \\ \frac{(-1)^s}{2^m} (\sinh \tau)^{2s} (\tanh \tau)^{2k} \frac{\Gamma(m+s+1) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+s+k + \frac{3}{2})} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}, \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2}, m+s+1; 1 \\ m+1, m+s+k + \frac{3}{2} \end{matrix} \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned}
& W_{pn_2m}^{plm(-)}(\sinh \tau)^{\ell-m-1}(\cosh \tau)^{1-n_2} {}_2F_1 \left(\frac{\ell+3/2-\nu+ip}{2}, \frac{\ell+3/2-\nu-ip}{2}; \ell+\frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau \right) = \\
& \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(-)}}{N_{pl}}} \sum_s \sum_k \frac{\left(\alpha + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\alpha - \frac{ip}{2}\right)_s}{(m+1)_s s!} \frac{\left(-\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)_k \left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!} \quad (3.86) \\
& \frac{(-1)^s}{2^m} (\sinh \tau)^{2s} (\tanh \tau)^{2k} \frac{\Gamma(m+s+1) \Gamma(k+1)}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+s+k+2)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}, \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2}, m+s+1; 1 \\ m+1, m+s+k+2 \end{matrix} \right]
\end{aligned}$$

Рассмотрим поподробнее гипергеометрическую функцию для чётного случая. Используя формулу (4.4) мы получим

$$\begin{aligned}
& {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2}, \frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}, m+s+1; 1 \\ m+1, m+s+k+\frac{3}{2} \end{matrix} \right] \\
& (-1)^{k+\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(m+s+k+\frac{3}{2}) \Gamma(k+\frac{\ell}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}) \Gamma(s+1)}{\Gamma(k+m+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\ell}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\ell}{2}+\frac{m}{2}+1) \Gamma(1+k-\frac{\ell}{2}+\frac{m}{2}+s) \Gamma(\frac{3}{2}+k+\frac{\ell}{2}+\frac{m}{2}+s)} \\
& {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}-k, -\frac{1}{2}-k-\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-s, -k; 1 \\ \frac{1}{2}-k-\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}, \frac{1}{2}-k-\frac{\ell}{2}+\frac{m}{2} \end{matrix} \right] \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Благодаря $-k$ в последней гипергеометрической функции можно заключить, что последняя не может быть бесконечным, следовательно чтобы интеграл (3.85) не был нулевым, коэффициент перед гипергеометрической функцией в (3.4.7) должен не равняться нулю, и мы требуем

$$k - \frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + s + 1 > 0 \quad 2k + 2s + m \geq \ell \quad (3.88)$$

То же самое можно проделать для нечётного случая, и условие к которому мы придем напашется

$$k - \frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + s + \frac{3}{2} > 0 \quad 2k + 2s + m + 1 \geq \ell \quad (3.89)$$

Из этих условий можно заметить что выражения(3.85)и (3.86) не содержат сингулярностей (негативных степеней $\sinh \tau$), что позволяет нам сделать переход к $\tau \rightarrow 0$. В правых частях останутся только члены с нулевыми степенями по $\sinh \tau$, что позволяет на положить $k = \ell/2 - m/2 - s$ для чётного случая, и $k = \ell/2 - m/2 - s - \frac{1}{2}$ для нечётного. Дополнительно учитывая

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} a, b, -n; & 1 \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix} \right] = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}$$

получим

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2}, \frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}, m+s+1; 1 \\ m+1, \frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{2} \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + 1) \left(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)_s}{\Gamma(\ell + \frac{3}{2}) (m+1)_s} \quad (3.90)$$

В результате для соответствующих коэффициентов

$$W_{pn_2m}^{plm(+)} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(+)}}{N_{p\ell}}}$$

$$\sum_{s=0}^{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}} \frac{\left(\alpha + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\alpha - \frac{ip}{2}\right)_s \left(-\frac{n_2}{2}\right)_{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-s} \left(\nu - \frac{n_2}{2}\right)_{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-s}}{s! \left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-s} \left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - s\right)!}$$

$$\frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + 1\right) \left(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)_s}{2^m \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) (m+1)_s}$$

$$W_{pn_2m}^{plm(-)} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(-)}}{N_{p\ell}}}$$

$$\sum_{s=0}^{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}} \frac{\left(\alpha + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\alpha - \frac{ip}{2}\right)_s \left(-\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)_{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-s-\frac{1}{2}} \left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)_{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-s-\frac{1}{2}}}{s! \left(\frac{3}{2}\right)_{\frac{\ell}{2}-\frac{m}{2}-s-\frac{1}{2}} \left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - s - \frac{1}{2}\right)!}$$

$$\frac{(-1)^s \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + 1\right) \left(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)_s}{2^m \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right) (m+1)_s}$$

Производя дальнейшие упрощения, пользуясь формулами

$$(u)_{t-s} = (-1)^s \frac{(u)_t}{(1-t-u)_s}$$

$$(t-s)! = (-1)^s \frac{t!}{(-t)_s}$$

$$\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - s + \frac{1}{2}\right) = (-1)^s \frac{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)_s}$$

придем к

$$W_{pn_2m}^{plm(+)} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(+)}}{2^m N_{p\ell}} \frac{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \nu - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)}$$

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}, \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{ip}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}; 1 \\ m+1, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + 1, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + 1 - \nu \end{matrix} \right]$$

$$W_{pn_2m}^{plm(-)} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{N_{pn_2m} C_{n_2\nu}^{(-)}}{2^m N_{p\ell}} \frac{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \nu - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2}\right)}$$

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}, \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{ip}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}; 1 \\ m+1, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + 1, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + 1 - \nu \end{matrix} \right]$$

которые являются одним и тем же учитывая выражения для $C_{n_2\nu}^{(+)}$ и $C_{n_2\nu}^{(-)}$.

$$W_{pn_2m}^{plm} = -\frac{1}{2^m} \sqrt{(2\ell+1) \left(\nu - n_2 - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2}\right)}}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2} + \nu\right)}{\Gamma(m+1) \Gamma(0)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{m}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{m}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right)} \right|$$

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}, \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{ip}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}; 1 \\ m+1, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + 1, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + 1 - \nu \end{matrix} \right]$$

После преобразований коэффициент разложения можно выразить через полиномы Вильсона

$$W_{pn_2m}^{plm(+)} = -\frac{1}{2^m} \sqrt{(2\ell+1) \left(\nu - n_2 - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}+1\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}+1\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)}}$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + 1\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} + \frac{ip}{2}\right)} \right| W_{n^+}(- (a^+ + k^+)^2, a^+, b^+, c^+, d^+)$$

$$W_{pn_2m}^{plm(-)} = -\frac{1}{2^m} \sqrt{(2\ell+1) \left(\nu - n_2 - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}+1\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}+1\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2}\right)}}$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} + \frac{ip}{2}\right)} \right| W_{n^-}(- (a^- + k^-)^2, a^-, b^-, c^-, d^-)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} n^+ &= \frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} & k^+ &= \frac{n_2}{2} \\ a^+ &= -\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} & b^+ &= \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} \\ c^+ &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{ip}{2} & d^+ &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{ip}{2} \\ n^- &= \frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} & k^- &= \frac{n_2}{2} - \frac{1}{2} \\ a^- &= -\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} & b^- &= \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} \\ c^- &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{ip}{2} & d^- &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{ip}{2} \end{aligned}$$

Разложение непрерывно-непрерывного спектра

Ниже мы рассмотрим разложение для непрерывного-непрерывного спектра. Общая формула разложения пишется

$$\Psi_{p\chi m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R) = \sum_{\ell=m} W_{p\chi m}^{plm} \Psi_{plm}^\nu(\tau, \theta, \varphi; R)$$

где волновые функции в данно случае дается форулами (3.67),(3.71), (3.73),(3.76),(3.78) Прodelывая те же процедуры что и в прошлом случае вместо (3.83) и (3.84) получим

$$W_{p\chi m}^{p\ell m(+)} {}_2F_1 \left(\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2}, \frac{\ell + 3/2 - \nu - ip}{2}; \ell + \frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau \right) = \quad (3.91)$$

$$\sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} \frac{N_{p\chi m} C_{\chi\nu}^{(+)}}{N_{p\ell}} \sum_s \sum_k \frac{\left(\beta + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\beta - \frac{ip}{2}\right)_s \left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_k \left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2}\right)_k}{(m+1)_s s! \left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

$$(-1)^s (\sinh \tau)^{2s+2k+m-\ell} (\cosh \tau)^{\nu-\frac{1}{2}-2k-i\chi} (1 + (-1)^{\ell-m}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{2}+s} (\cos^2 \theta)^k P_\ell^m(\cos \theta) d\theta$$

$$W_{p\chi m}^{p\ell m(-)} {}_2F_1 \left(\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2}, \frac{\ell + 3/2 - \nu - ip}{2}; \ell + \frac{3}{2}; -\sinh^2 \tau \right) = \quad (3.92)$$

$$\sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} \frac{N_{p\chi m} C_{\chi\nu}^{(-)}}{N_{p\ell}} \sum_s \sum_k \frac{\left(\beta + \frac{ip}{2}\right)_s \left(\beta - \frac{ip}{2}\right)_s \left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_k \left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2}\right)_k}{(m+1)_s s! \left(\frac{3}{2}\right)_k k!}$$

$$(-1)^s (\sinh \tau)^{2s+2k+m+1-\ell} (\cosh \tau)^{\nu-\frac{3}{2}-2k-i\chi} (1 + (-1)^{\ell-m+1}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}+\frac{m}{2}+s} (\cos^2 \theta)^{k+\frac{1}{2}} P_\ell^m(\cos \theta) d\theta$$

где $\beta = m/2 + 1/2 - i\chi/2$. Замечаем что интегралы в (3.91) и (3.92) совпадают с (3.83) и (3.84), соответственно совпадают также условия (3.88) и (3.89) и формула (3.90). Подставляя в формулу коэффициента и упрощая, приходим к

$$W_{p\chi m}^{p\ell m} = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \frac{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \frac{i\chi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \frac{i\chi}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}$$

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\chi}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i\chi}{2} + \frac{ip}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right)} \right| \frac{\Gamma(1+i\chi)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} \pm \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} \pm \frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\frac{\sinh \pi\chi}{\sqrt{\sinh^2 \pi\chi + \cos^2 \pi\nu}} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}, \frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i\chi}{2} + \frac{ip}{2}, \frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i\chi}{2} - \frac{ip}{2}; \\ m+1, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{4} - \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{4} - \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2} \end{matrix} \right]$$

Как и в прошло случае гипергеометрическую функцию можно выразить через полиномы Вильсона. Не смотря на то что коэффициенты разложения совпадают для чётного и нечётного случаев, они пишутся через разные полиномы Вильсона, так что мы имеем

$$W_{p\chi m}^{p\ell m(+)} = \frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}} \sqrt{(2\ell + 1) \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1+i\chi)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\chi}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i\chi}{2} + \frac{ip}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right)} \right| \frac{\sinh \pi\chi}{\sqrt{\sinh^2 \pi\chi + \cos^2 \pi\nu}} W_{n^+}(x^2, a^+, b^+, c^+, d^+)$$

$$W_{p\chi m}^{p\ell m(-)} = -\frac{1}{2^{m+\frac{1}{2}}} \sqrt{(2\ell+1) \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1+i\chi)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\chi}{2} + \frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\frac{\left| \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\chi}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{i\chi}{2} + \frac{ip}{2}\right) \right|}{\left| \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right) \right|} \frac{\sinh \pi\chi}{\sqrt{\sinh^2 \pi\chi + \cos^2 \pi\nu}} W_{n^-}(x^2, a^-, b^-, c^-, d^-)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} n^+ &= \frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} & x &= \frac{\chi}{2} \\ a^+ &= -\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} & b^+ &= \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4} \\ c^+ &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{ip}{2} & d^+ &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{ip}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^- &= \frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} & x &= \frac{\chi}{2} \\ a^- &= -\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} & b^- &= \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} \\ c^- &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{ip}{2} & d^- &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{ip}{2} \end{aligned}$$

Если записать условие ортогональности для полиномов Вильсона для $a < 0$ через параметры

$$\frac{(2\ell+1)}{2^{2m+1} \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + 1\right)^2} \frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{i\chi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{i\chi}{2}\right)}{\Gamma(i\chi)} \right|^2 \times \right.$$

$$\left. \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} + \frac{ip}{2} + \frac{i\chi}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2} - \frac{ip}{2} + \frac{i\chi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right)} \right|^2 W_{n^+}(x^2, a^+, b^+, c^+, d^+) W_{m^+}(x^2, a^+, b^+, c^+, d^+) d\chi + \right.$$

$$\left. + \sum_{n_2=0,2,4}^{n_2 < \nu - \frac{1}{2}} \left(\nu - n_2 + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2} + 1\right) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2} + 1\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{ip}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} + \frac{ip}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} + \frac{ip}{2}\right)} \right|^2 \times \right.$$

$$\left. W_{n^+}(-(a^+ + k^+)^2, a^+, b^+, c^+, d^+) W_{m^+}(-(a^+ + k^+)^2, a^+, b^+, c^+, d^+) = \delta_{m+n^+} \right.$$

для чётного, и

$$\begin{aligned} & \frac{(2\ell+1)}{2^{2m+1}\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} \frac{(\ell+1)!}{(\ell-1)!} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}+\frac{i\chi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{i\chi}{2}\right)}{\Gamma(i\chi)} \right|^2 \times \right. \\ & \left. \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}+\frac{ip}{2}+\frac{i\chi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}-\frac{ip}{2}+\frac{i\chi}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{ip}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}+\frac{ip}{2}\right)} \right|^2 W_{n^-}(x^2, a^-, b^-, c^-, d^-) W_{m^-}(x^2, a^-, b^-, c^-, d^-) d\chi + \right. \\ & \left. + \sum_{n_2=1,3,5}^{n_2 < \nu - \frac{1}{2}} \left(\nu - n_2 + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}+1\right)\Gamma\left(\nu-\frac{n_2}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu-\frac{n_2}{2}\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{ip}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{n_2}{2}+\frac{ip}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}+\frac{ip}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\ell}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}+\frac{ip}{2}\right)} \right|^2 \times \right. \\ & \left. W_{n^-}(-(a^-+k^-)^2, a^-, b^-, c^-, d^-) W_{m^-}(-(a^-+k^-)^2, a^-, b^-, c^-, d^-) \right) = \delta_{m-n^-} \end{aligned}$$

для нечётного случая, и далее учитывая соотношение

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{i\chi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}+\frac{i\chi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{i\chi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{\nu}{2}+\frac{i\chi}{2}\right) \right|^2 = \frac{4\pi^2}{\sinh^2 \pi\chi + \cos^2 \pi\nu}$$

можно убедиться что коэффициенты разложения $W_{pn_2m}^{p\ell m(\pm)}$ и $W_{p\chi m}^{p\ell m(\pm)}$ удовлетворяют соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{p\chi m}^{p\ell m(\pm)} \left(W_{p\chi m}^{p\ell' m(\pm)} \right)^* d\chi + \sum_{n_2}^{n_2 < \nu - \frac{1}{2}} W_{pn_2m}^{p\ell m(\pm)} \left(W_{pn_2m}^{p\ell' m(\pm)} \right)^* = \delta_{\ell\ell'}$$

что позволяет нам разложить сферическую непрерывную функцию $\Psi_{p\ell m}^\nu(\tau, \theta, \varphi; R)$ через полярно-цилиндрические $\Psi_{pn_2m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R)$ и $\Psi_{p\chi m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R)$ следующим образом

$$\Psi_{p\ell m}^\nu(\tau, \theta, \varphi; R) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(W_{p\chi m}^{p\ell' m(\pm)} \right)^* \Psi_{p\chi m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R) d\chi + \sum_{n_2}^{n_2 < \nu - \frac{1}{2}} \left(W_{pn_2m}^{p\ell' m(\pm)} \right)^* \Psi_{pn_2m}^\nu(\tau_1, \tau_2, \varphi; R)$$

Заключение

Основные результаты полученные в диссертации.

1. Показано что классическая задача о гармоническом осцилляторе и движении в кеплеровском поле может быть определена на гиперboloиде H_2^2 или конфигурационном пространстве анти де Ситтера. Построены дополнительные интегралы движения: аналог тензора Демкова для гармонического осциллятора и вектор Рунге-Ленца-Лапласа для движения в кулоновском поле. Доказано, что обе задачи принадлежат к классу максимально суперинтегрируемых систем.
2. В рамках уравнения Гамильтона-Якоби построены классические траектории движения для разных значений Лоренцевского момента L^2 и энергии E . Показано, что при положительных значениях $L^2 > 0$ орбиты расположены на верхней (нижней) поле двухполосого гиперboloида, в то время как при $L^2 < 0$ движение происходит на поверхности однополосого гиперboloида. Найдены условия при которых все конечные орбиты замкнуты.
3. Показано что при движении в кеплеровском поле на H_2^2 имеют место все три закона Кеплера.
4. Путем разделения переменных в псевдо-сферической системе координат вычислены ортонормированные собственные функции дискретного и непрерывного спектров и собственные значения уравнения Шредингера для потенциалов гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на H_2^2 в псевдо-сферической системе координатах при положительных значениях квантового момента $L^2 > 0$ (дискретная серия представлений). Показано, что существует конечное число уровней энергии вырожденных по угловому квантовому числу и бесконечно-кратно по азимутальному квантовому числу.
5. Найдены решения уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в цилиндрической и эквидистантной системах координат. Вычислен полный спектр энергии гармонического осциллятора соответствующий движению на полной поверхности H_2^2

гиперboloида. Построены коэффициенты разложения для переходов между цилиндрическим и эквидистантными базисами в дискретном спектре. Найдена связь межбазисных коэффициентов с полиномами Хана.

6. Сформулирована классическая задача Кеплера на одно - полосом гиперboloиде $SO(3, 1)$ и построен аналог вектора Рунге-Ленца-Лапласа. Найдено решение уравнения Гамильтона-Якоби в псевдо-сферической координатной системе. Построены траектории движения для разных значений момента L^2 и энергии E . Показано, что все конечные траектории замкнуты.
7. Решена задача о разложении произвольной функции на однополосом гиперboloиде $SO(3, 1)$ по полной системе псевдо-сферических кулоновских волновых функциях. Найдено решение уравнения Шредингера для кулоновского потенциала в эллиптико-параболической системе координат для дискретного спектра энергий. Вычислены коэффициенты межбазисных разложений для переходов между псевдо-сферическими и эллиптико-параболическими волновыми функциями.
8. Решена задача о смешанных межбазисных разложениях для гармонического осциллятора на двух-полосом гиперboloиде $SO(3, 1)$. Показано что соответствующие коэффициенты разложений выражаются через полиномы Вильсона.

Приложение

4.1 Коммутационные соотношения тензора Демкова

Для коммутационных соотношений компонент тензора Демкова между собой и с компонентами момента имеем

$$\begin{aligned}
 [D_{12}L_1] &= -iD_{13} & [D_{12}L_2] &= -iD_{23} & [D_{12}L_3] &= iD_{11} - iD_{22} \\
 [D_{13}L_1] &= iD_{12} & [D_{13}L_2] &= iD_{11} - iD_{33} & [D_{13}L_3] &= -iD_{23} \\
 [D_{23}L_1] &= -iD_{33} + iD_{22} & [D_{23}L_2] &= iD_{12} & [D_{23}L_3] &= iD_{13} \\
 [D_{11}L_2] &= 2iD_{13} & [D_{11}L_3] &= -2iD_{12} & [D_{22}L_1] &= -2iD_{23} \\
 [D_{22}L_3] &= 2iD_{12} & [D_{33}L_1] &= 2iD_{23} & [D_{33}L_2] &= 2iD_{13}
 \end{aligned}$$

А для операторов D_{ik} коммутационные соотношения будут

$$\begin{aligned}
 [D_{11}D_{12}] &= i \left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4} \right) L_3 - \frac{i}{R^2} \{L_3D_{11}\} & [D_{11}D_{13}] &= i \left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4} \right) L_2 - \frac{i}{R^2} \{L_2D_{11}\} \\
 [D_{11}D_{23}] &= \frac{i}{R^2} (\{L_2D_{12}\} + \{L_3D_{13}\}) & [D_{11}D_{22}] &= -\frac{2i}{R^2} \{L_3D_{12}\} \\
 [D_{22}D_{12}] &= -i \left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4} \right) L_3 + \frac{i}{R^2} \{L_3D_{22}\} & [D_{22}D_{13}] &= \frac{i}{R^2} (-\{L_1D_{12}\} + \{L_3D_{23}\}) \\
 [D_{22}D_{23}] &= i \left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4} \right) L_1 - \frac{i}{R^2} \{L_1D_{22}\} & [D_{22}D_{33}] &= -\frac{2i}{R^2} \{L_1D_{23}\} \\
 [D_{33}D_{12}] &= \frac{i}{R^2} (\{L_2D_{23}\} + \{L_1D_{13}\}) & [D_{33}D_{13}] &= -i \left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4} \right) L_2 + \frac{i}{R^2} \{L_2D_{33}\} \\
 [D_{33}D_{23}] &= -i \left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4} \right) L_1 + \frac{i}{R^2} \{L_1D_{33}\} & [D_{33}D_{11}] &= \frac{2i}{R^2} \{L_2D_{13}\} \\
 [D_{12}D_{13}] &= i \left(\omega^2 - \frac{1}{4R^4} \right) L_1 + \frac{i}{2R^2} (-\{L_1D_{11}\} - \{L_2D_{12}\} + \{L_3D_{13}\}) \\
 [D_{12}D_{23}] &= i \left(\omega^2 - \frac{1}{4R^4} \right) L_2 + \frac{i}{2R^2} (-\{L_1D_{12}\} - \{L_2D_{22}\} - \{L_3D_{23}\}) \\
 [D_{13}D_{23}] &= i \left(\omega^2 - \frac{3}{4R^4} \right) L_3 + \frac{i}{2R^2} (-\{L_1D_{13}\} + \{L_2D_{23}\} - 3\{L_3D_{33}\})
 \end{aligned}$$

где $\{A, B\} = AB + BA$ антикоммутатор.

4.2 Вычисление интегралов

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\tau (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\chi,\beta)}(x) dx = 2^{\beta+\tau+1} \frac{\Gamma(\alpha-\tau+n)\Gamma(\beta+n+1)}{m!n!\Gamma(\chi+1)\Gamma(\alpha-\tau)}$$

$$\frac{\Gamma(\chi+m+1)\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(\beta+\tau+n+2)} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -m, \chi+\beta+m+1, \tau+1, \tau-\alpha+1; 1 \\ \chi+1, \beta+\tau+n+2, \tau-\alpha-n+1 \end{matrix} \right] \quad (4.1)$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^k P_n^{\lambda-1/2, \lambda-1/2}(\cos \varphi) e^{-i\nu\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi (\lambda + \frac{1}{2}) (\lambda)_n k! (-1)^t}{(2i)^k (2\lambda)_n n! t! (k-t)!} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, -t, \lambda; 1 \\ -\lambda-n+1, k-t+1 \end{matrix} \right] \quad (4.2)$$

где $t = (n+k-\nu)/2$

4.3 Преобразования гипергеометрических функций ${}_4F_3$ и ${}_3F_2$ от единичного аргумента

Для гипергеометрических функций ${}_4F_3$ вида Заалшютса имеет место равенство

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, b, c, d, 1 \\ e, f, g \end{matrix} \right] = \frac{(f-b)_n (g-b)_n}{(f)_n (g)_n} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, b, e-c, e-d, 1 \\ e, b-f-n+1, b-g-n+1 \end{matrix} \right] \quad (4.3)$$

А для гипергеометрических функций ${}_3F_2$ имеем

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, c, b; 1 \\ d, e \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(d-b+n)\Gamma(d)}{\Gamma(d-b)\Gamma(d+n)} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, b, e-c; 1 \\ e, b-d-n+1 \end{matrix} \right] \quad (4.4)$$

4.4 Вычисление интегралов для сферическо – полярно-цилиндрического разложения

4.4.1 Дискретно-дискретное разложение

В выражениях (3.80) придём к результату

$$I_{N\ell m}^{n_2(+)}(\nu) = \frac{(-1)^m 2^{-m-n_2} n_2! \Gamma(\nu - n_2 + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N}{2} - \frac{m}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} - \frac{m}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + 1) \Gamma(m+1)}$$

$$\frac{(l+m)!}{(l-m)!} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2}, \frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}, \frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} + 1, \frac{N}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} - \nu + \frac{3}{2}; 1 \\ m+1, \frac{N}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{2}, \frac{N}{2} + \frac{m}{2} - \nu + \frac{3}{2} \end{matrix} \right]$$

и соответственно для нечётного аналога

$$I_{N\ell m}^{n_2(-)}(\nu) = \frac{(-1)^m 2^{-m-n_2} n_2! \Gamma(\nu - n_2 + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu - 1 - \frac{N}{2} - \frac{m}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} - \frac{m}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} + \frac{m}{2} + 2) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(m+1)}$$

$$\frac{(l+m)!}{(l-m)!} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}, \frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + 1, \frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} + 1, \frac{N}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} - \nu + \frac{3}{2}; 1 \\ m+1, \frac{N}{2} + \frac{m}{2} + 2, \frac{N}{2} + \frac{m}{2} - \nu + 2 \end{matrix} \right]$$

Можно заметить, что гипергеометрические функции являются Зaalшютсянами, следовательно можно воспользоваться свойствами симметрии рядов (4.3) после чего получим

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2}, \frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}, \frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} + 1, \frac{N}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} - \nu + \frac{3}{2}; 1 \end{matrix} \right] =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} - \frac{m}{2} + 1) \Gamma(m+1) \Gamma(\frac{N}{2} + \frac{m}{2} + \frac{3}{2})}{\Gamma(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} - \frac{\ell}{2} + 1) \Gamma(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + 1) \Gamma(\frac{N}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{2})} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\frac{\ell-m}{2}, -\frac{n_2}{2}, \frac{\ell+m+1}{2}, \frac{n_2+1}{2} - \nu; 1 \end{matrix} \right]$$

и

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} - \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}, \frac{m}{2} + \frac{\ell}{2} + 1, \frac{N}{2} - \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} + 1, \frac{N}{2} + \frac{n_2}{2} + \frac{m}{2} - \nu + \frac{3}{2}; 1 \end{matrix} \right] =$$

$$\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(m+1) \Gamma(\frac{N}{2} + \frac{m}{2} + 2)}{\Gamma(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} - \frac{\ell}{2} + 1) \Gamma(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{2})} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\ell-m-1}{2}, \frac{\ell+m}{2} + 1, \frac{1}{2} - \frac{n_2}{2}, \frac{n_2}{2} + 1 - \nu; 1 \end{matrix} \right]$$

Подставляя это в $W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau}$, после дальнейших упрощений получаем

$$W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(+)} = (-1)^{\frac{\ell-m-n_2}{2}} 2^{-m-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2\ell+1) \left(\nu - n_2 - \frac{1}{2}\right) \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}}}$$

$$\times \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N-m+n_2}{2}) \Gamma(\frac{N+m-n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{N-m-n_2}{2} + 1) \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N+m+n_2}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N-\ell}{2}) \Gamma(\frac{N-\ell}{2} + 1) \Gamma(\frac{N+\ell}{2} + \frac{3}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N+\ell}{2} - \frac{1}{2})}}$$

$$\times \frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N+m}{2}) \Gamma(\frac{N-m}{2} + 1)}{\Gamma(-\frac{\ell-m}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\ell+m}{2} + 1)} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\frac{\ell-m}{2}, -\frac{n_2}{2}, \frac{\ell+m+1}{2}, \frac{n_2+1}{2} - \nu; 1 \end{matrix} \right]$$

$$W_{n_1, n_2, m}^{\ell, m, n_\tau(-)} = (-1)^{\frac{\ell-m-n_2}{2}+1} 2^{-m+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2\ell+1) \left(\nu - n_2 - \frac{1}{2}\right) \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\nu - \frac{n_2}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2} + \frac{1}{2})}}}$$

$$\times \sqrt{\frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N-m+n_2}{2}) \Gamma(\frac{N+m-n_2}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{N-m-n_2}{2} + 1) \Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N+m+n_2}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N-\ell}{2}) \Gamma(\frac{N-\ell}{2} + 1) \Gamma(\frac{N+\ell}{2} + \frac{3}{2}) \Gamma(\nu - \frac{N+\ell}{2} - \frac{1}{2})}}$$

$$\times \frac{\Gamma(\nu - \frac{1}{2} - \frac{N+m}{2}) \Gamma(\frac{N-m}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{\ell-m}{2}) \Gamma(\frac{\ell+m}{2} + \frac{1}{2})} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\ell-m-1}{2}, \frac{\ell+m}{2} + 1, \frac{1}{2} - \frac{n_2}{2}, \frac{n_2}{2} + 1 - \nu; 1 \end{matrix} \right]$$

откуда обозначая гипергеометрические ряды через полиномы Рака приходим к видам (3.4.6) и (3.4.6)

4.4.2 Непрерывно-дискретное разложение

Рассмотри внимательнее чётный случай. Пользуясь формулой (4.3) дважды получим

$$\begin{aligned}
 & {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}, \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n_2}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{ip}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}, -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}; 1 \end{matrix} \right] \\
 & \left| \frac{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(m+1) \Gamma\left(\nu - \frac{n_2}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{n_2}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n_2}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} - \frac{n_2}{2} + \nu\right) \Gamma\left(-\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)} \\
 & {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}, \frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{n_2}{2}, \frac{n_2}{2} - \nu + \frac{1}{2}; 1 \end{matrix} \right] \\
 & \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{m}{2} + \frac{3}{4} + \frac{ip}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{m}{2} + \frac{3}{4} - \frac{ip}{2} - \frac{\nu}{2} \end{matrix} \right]
 \end{aligned}$$

Последняя гипергеометрическая функция может быть выражена через полиномы Вильсона

$$\begin{aligned}
 & {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -\frac{\ell}{2} + \frac{m}{2}, \frac{\ell}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{n_2}{2}, \frac{n_2}{2} - \nu + \frac{1}{2}; 1 \end{matrix} \right] = \\
 & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} - \frac{\nu}{2} + \frac{ip}{2}\right)} \right| W_{n^+}(-(\mathbf{a}^+ + \mathbf{k}^+)^2, \mathbf{a}^+, \mathbf{b}^+, \mathbf{c}^+, \mathbf{d}^+)
 \end{aligned}$$

4.5 Определение полиномов дискретной переменной Вильсона, Рака и Хана

4.5.1 Вильсон

Определение

$$\frac{W_n(x^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n (a+c)_n (a+d)_n} = {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, n+a+b+c+d-1, a+ix, a-ix; 1 \\ a+b, a+c, a+d \end{matrix} \right]$$

Ортогональность Если $Re(a, b, c, d) > 0$ и нереальные параметры возникают с сопряжёнными парами то тогда

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_n(x^2; a, b, c, d) W_n(x^2; a, b, c, d) dx = \\
 & = \frac{\Gamma(n+a+b) \dots \Gamma(n+c+d)}{\Gamma(2n+a+b+c+d)} (n+a+b+c+d)_n n! \delta_{mn}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(n+a+b) \dots \Gamma(n+c+d) = \\
 & = \Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+a+d)\Gamma(n+b+c)\Gamma(n+b+d)\Gamma(n+c+d)
 \end{aligned}$$

Если $a < 0$ и $a + b, a + c, a + d$ положительны, или комплексно сопряжённые пары с положительной реальной частью то тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_n(x^2; a, b, c, d) W_n(x^2; a, b, c, d) dx + \\ & + \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)} \sum_{k=0,1,2}^{a+k < 0} \frac{(2a)_k (a+1)_k (a+b)_k (a+c)_k (a+d)_k}{(a)_k (b-a+1)_k (c-a+1)_k (d-a+1)_k k!} \times \\ & \times W_m(-(a+k)^2; a, b, c, d) W_n(-(a+k)^2; a, b, c, d) = \frac{\Gamma(n+a+b) \dots \Gamma(n+c+d)}{\Gamma(2n+a+b+c+d)} (n+a+b+c+d)_n n! \delta_{mn} \end{aligned}$$

4.5.2 Рака

Определение

$$\begin{aligned} R_n(\lambda(x); \alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \\ &= {}_4F_3 \left[\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, -x, x + \gamma + \delta + 1; 1 \\ \alpha + 1, \beta + \delta + 1, \gamma + 1 \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

где

$$\lambda(x) = x(x + \gamma + \delta + 1)$$

и $\alpha + 1 = -N$ или $\beta + \delta + 1 = -N$ или $\gamma + 1 = -N$ с N неотрицательным целым числом.

Ортогональность

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^N \frac{(\alpha+1)_x (\beta+\delta+1)_x (\gamma+1)_x (\gamma+\delta+1)_x ((\gamma+\delta+3)/2)_x}{(-\alpha+\gamma+\delta+1)_x (-\beta+\gamma+1)_x ((\gamma+\delta+1)/2)_x (\delta+1)_x x!} R_m(\lambda(x)) R_n(\lambda(x)) = \\ & = M \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n (\alpha+\beta-\gamma+1)_n (\alpha-\delta+1)_n (\beta+1)_n n!}{(\alpha+\beta+2)_n (\alpha+1)_n (\beta+\delta+1)_n (\gamma+1)_n} \delta_{mn} \end{aligned}$$

где

$$M = \begin{cases} \frac{(-\beta)_N (\gamma+\delta+2)_N}{(-\beta+\gamma+1)_N (\delta+1)_N}, & \text{если } \alpha + 1 = -N \\ \frac{(-\alpha+\delta)_N (\gamma+\delta+2)_N}{(-\alpha+\gamma+\delta+1)_N (\delta+1)_N}, & \text{если } \beta + \delta + 1 = -N \\ \frac{(\alpha+\beta+2)_N (-\delta)_N}{(\alpha-\delta+1)_N (\beta+1)_N}, & \text{если } \gamma + 1 = -N \end{cases}$$

4.5.3 Хан

Определение

$$Q_n(x; \alpha, \beta, N) = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, -x; 1 \\ \alpha + 1, N \end{matrix} \right]$$

Ортогональность Для $\alpha > -1$ и $\beta > -1$ или $\alpha < -N$ и $\beta < -N$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=0}^N \binom{\alpha+x}{x} \binom{\beta+N-x}{N-x} Q_m(x; \alpha, \beta, N) Q_n(x; \alpha, \beta, N) = \\ & = \frac{(-1)^n (n + \alpha + \beta + 1)_{N+1} (\beta + 1)_n n!}{(2n + \alpha + \beta + 1) (\alpha + 1)_n (-N)_n N!} \delta_{mn} \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] S. Wojciechowski. Superintegrability of the calogero-moser system. *Phys.Lett. A*, 95:279, 1983.
- [2] Ya.A.Smorodinsky M.Uhler J.Fris, V.Mandrosov and P.Winternitz. On higher symmetries in quantum mechanics. *Phys.Lett.*, 16:354, 1965.
- [3] M.Uhler P.Winternitz, Ya.A.Smorodinskii and I.Fris. Symmetry groups in classical and quantum mechanics. *Sov.J.Nucl.Phys.*, 4:444–450, 1967.
- [4] W.Miller Jr. E.G.Kalnins and G.S.Pogosyan. Completeness of multiseparable superintegrability in $E_{2,C}$. *J.Phys.A: Math Gen.*, 33:4105–4120, 2000.
- [5] W.Miller Jr. E.G.Kalnins and G.S.Pogosyan. Completeness of multiseparable superintegrability on the complex 2-sphere. *J.Phys.A: Math Gen.*, 33:6791–6806, 2000.
- [6] W.Miller Jr. E.G.Kalnins, J.Kress and G.S.Pogosyan. Completeness of superintegrability in two-dimensional constant curvature spaces. *J. Phys.*, A34:4705–4720, 2001.
- [7] Kh.Valiev A.A.Makarov, Ya.A.Smorodinsky and P.Winternitz. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. *Nuovo Cimento*, A 52:1061–1084, 1967.
- [8] N.W.Evans. Superintegrability in classical mechanics. *Phys.Rev.*, A 41:5666–5676, 1990.
- [9] W.Miller Jr. E.G.Kalnins, J.M.Kress. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces v: 2d and 3d quantum systems. *J. Math. Phys.*, 47(093501), 2006.
- [10] M.Laplace. *Traite de mecanique celeste*, volume 1. Bachelier, Paris, 1889.
- [11] C.Runge. *Vektoranalysis*, volume 1. Hirtel, Leipzig, 1919.
- [12] W.Lenz. über den bewegungsverlauf und die quantenzustände der gestörten keplerbewegung. *Zeitschr.Phys.*, 24:197–207, 1924.

- [13] Yu.N.Demkov. Symmetry group of the isotropic oscillator. *Sov.Phys.JETP*, 26:757, 1954.
- [14] Ю.Н.Демков. Об определении группы симметрии квантовой системы. Анизотропный осциллятор. *ЖЭТФ*, 44:2007–2010, 1963.
- [15] Л.А.Илькаева. Группа симметрии анизотропного осциллятора. *Вест. ЛГУ*, 22:56–62, 1963.
- [16] J.Bertrand. Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. *Comptes Rendus*, 77:849–853, 1873.
- [17] V.A.Fock. Zur theorie des wasserstoffatoms. *Zs. Phys.*, 98:145–154, 1935.
- [18] J.M.Jauch. Groups of quantum-mechanical contact transformations and the degeneracy of energy-levels. *Phys. Rev. A*, 55:1132, 1939.
- [19] E.L.Hill J.M.Jauch. On the problem of degeneracy in quantum mechanics. *Phys.Rev.*, 57:641, 1940.
- [20] Miller Jr. W. Winternitz P. Kalnins, E.G. The group $so(4)$, separation of variables and the hydrogen atom. *SIAM J.Appl.Math.*, 30:630–664, 1976.
- [21] Pogosyan G.S. Sissakian A.N. Grosche, C. Path integral discussion for smorodinsky-winternitz potentials: I. two- and three-dimensional euclidean space. *Fortschr.Phys.*, 43:453–521, 1995.
- [22] L.P.Eisenhart. Enumeration of potentials for which one-particle schrödinger equations are separable. *Phys. Rev.*, 74:87–89, 1948.
- [23] М.Н.Олевский. *Математический сборник*, chapter 27, pages 379–420. 1950.
- [24] G.S.Pogosyan and A.Yakhno. Lie algebra contractions on two – dimensional hyperboloids. *Physics of Atomic Nuclei*, 2010.
- [25] E. G. Kalnins and W. Miller. Lie theory and the wave equation in space–time. I. the lorentz group. *Journal of Mathematical Physics*, 18(1), 1977.
- [26] E.G.Kalnins and W.Miller Jr. The wave equation $o(2, 2)$, and separation of variables on hyperboloids. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, A79:227–256, 1977.
- [27] А.Н.Сисакян В.М.Тер-Антонян Л.Г.Мардоян, Г.С.Погосян. ФизматЛит, Москва, 2006.
- [28] N.A.Chernikov. The kepler problem in the lobachevsky space and its solution. *Acta Physica Polonica*, B23(2), 1992.

- [29] H.Liebmann. *Nichteuklidische Geometrie*. Berlin, 1923.
- [30] P.Dombrowski and J.Zittenbarth. On the planetary motion in the 3-dim. standard spaces \mathbf{M}_κ^3 of constant curvature κ in \mathbf{R} . *Demonstratio Mathematica*, XXIV:3–4, 1991.
- [31] V.V.Kozlov and A.O.Harin. Keplers problem in constant curvature spaces. *Celestial Mechanics and Dinamical Astronomy*, 54:393–399, 1992.
- [32] V.V. Kozlov. About dynamics in spaces of constant curvature. *Vestnik Moskovskogo Universiteta Seria 1 Matematika, Mekhanika*, 2:28, 1994.
- [33] J.J.Slawianowski. Bertrand systems on spaces of constant sectional curvature. the action-angle analysis. *Reports of Mathematical Physics*, 46:429, 2000.
- [34] C. Grosche. Path integral for the kepler problem on the pseudosphere. *Ann. Phys.*, 204:208, 1990.
- [35] E.Schrödinger. A method of determining quantum mechanical eigenvalues and eigenfunctions. *Proc.Roy.Irish Soc.*, 46(9), 1941.
- [36] A. F. Stevenson. Note on the "kepler problem" in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problems. *Phys. Rev.*, 59:842–843, May 1941.
- [37] L.Infeld and A.Schild. A note on the kepler problem in a space of constant negative curvature. *Phys.Rev.*, 67:121–122, 1945.
- [38] P.W.Higgs. Dynamical symmetries in a spherical geometry. *J.Phys.A: Math.Gen.*, 12:309–323, 1979.
- [39] H.I.Leemon. Dynamical symmetries in a spherical geometry. *J.Phys.*, A12:489–501, 1979.
- [40] В.С. Отчик Ю.А. Курочкин. Аналог вектора Рунге-Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере. *Доклады НАН Беларуси*, 23(11):987–990, 1979.
- [41] Yu.A.Kurochkin A.A.Bogush and V.S.Otchik. On the quantum-mechanical kepler problem in three-dimensional lobachevskii space. *DAN BSSR*, 24:19–22, 1980.
- [42] A.N.Sissakian Ye.M.Hakobyan, G.S.Pogosyan and S.I.Vinitsky. Isotropic oscillator in the space of constant positive curvature. interbasis expansions. *Physics of Atomic Nuclei*, 62(4):623–637, 1999.
- [43] Е.К.Склянин. *Функциональный анализ и его приложения*, 12, 1979.
- [44] Е.К.Склянин. Некоторые алгебраические структуры связанные с уравнением Янга-Бакстера. *Функциональный анализ и его приложения*, 16(27), 1983.

- [45] A O Barut, A Inomata, and G Junker. Path integral treatment of the hydrogen atom in a curved space of constant curvature. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20(18):6271, 1987.
- [46] A O Barut, A Inomata, and G Junker. Path integral treatment of the hydrogen atom in a curved space of constant curvature. ii. hyperbolic space. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(7):1179, 1990.
- [47] G.S.Pogosyan C.Grosche and A.N.Sissakian. Path integral discussion for smorodinsky - winternitz potentials: Ii. two - and three dimensional sphere. *Fortschritte der Physik*, 43(6):523–563, 1995.
- [48] G.S.Pogosyan C.Grosche and A.N.Sissakian. Path integral discussion for superintegrable potentials: Iv. three dimensional pseudosphere. *Phys. Part. Nucl.*, 28:1230–1294, 1997.
- [49] Kress J.M. Kalnins E.G. and Winternitz P. Superintegrability in a two-dimensional space of non-constant curvature. *J. Math. Phys.*, 43:970–983, 2002.
- [50] Miller W.Jr. Kalnins E.G., Kress J.M. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. v. two- and three dimensional quantum systems. *J. Math. Phys.*, 48(113518), 2007.
- [51] C. Daskaloyannis and Y. Tanoudes. Classification of quantum superintegrable systems with quadratic integrals on two dimensional manifolds.
- [52] C. Daskaloyannis and K. Ypsilantis. Unified treatment and classification of superintegrable systems with integrals quadratic in momenta on a two dimensional manifold. *J.Math. Phys.*, 47(042904), 2006.
- [53] Sissakian A.N. Grosche C., Pogosyan G.S. Path integral approach for superintegrable potentials on spaces of non-constant curvature: I. darbox spaces di and dii. *Phys. Part. Nucl.*, 38:299–325, 2007.
- [54] Sissakian A.N. Grosche C., Pogosyan G.S. Path integral approach for superintegrable potentials on spaces of non-constant curvature: Ii. darbox spaces di and dii. *Phys. Part. Nucl.*, 38:525–563, 2007.
- [55] W.Miller Jr. E.G.Kalnins and G.S.Pogosyan. Superintegrability and associated polynomial solutions. euclidean space and sphere in two-dimensions. *J.Math.Phys.*, 37:6439–6467, 1996.
- [56] W.Miller Jr. E.G.Kalnins and G.S.Pogosyan. Superintegrability on the two-dimensional hyperboloid. *J. Math. Phys.*, 38:5416–5433, 1997.

- [57] Ye.M.Hakobyan E.G.Kalnins, W.Miller Jr. and G.S.Pogosyan. Superintegrability on the two-dimensional hyperboloid ii. *J. Math. Phys.*, 40:2291–2306, 1999.
- [58] Jr. E.G. Kalnins, W. Miller and G.S. Pogosyan. Coulomb-oscillator duality in spaces of constant curvature. *J. Math. Phys.*, 41:2629–2653, 2000.
- [59] A. Nersessian and G.S. Pogosyan. On the relation of the oscillator and coulomb systems on (pseudo)spheres. *Phys. Rev.*, A 63(020103), 2001.
- [60] P.E.Verrier and N.W.Evans. A new superintegrable hamiltonian. *J.Math. Phys.*, 49(022901), 2008.
- [61] A.V.Turbiner F.Tremblay and P.Winternitz. Periodic orbits for an infinite family of classical superintegrable systems. *J.Phys. A*, 43(015202), 2010.
- [62] A.V.Turbiner F.Tremblay and P.Winternitz. An infinite number of solvable and integrable quantum systems on a plane. *J.Phys. A*, 42(242001), 2009.
- [63] Miller W.Jr. Kalnins E.G. and Pogosyan G.S. Superintegrability and higher order constant for classical and quantum systems. *Phys. Atom. Nucl.*, 74:939, 2011.
- [64] S.Post and P.Winternitz. An infinite family of superintegrable deformations of the coulomb potentials. *J.Phys. A*, 42(222001), 2009.
- [65] F.Tremblay and P.Winternitz. Third order superintegrable systems separating in polar coordinates. *J.Phys. A*, 43(175206), 2010.
- [66] M. F. Ranada. The tremblay-turbiner-winternitz system on spherical and hyperbolic spaces: Superintegrability, curvature- dependent formalism and complex factorization. *J. Phys. A*, 47(165203), 2014.
- [67] M. F. Ranada. A new approach to the higher order superintegrability of the tremblay-turbiner-winternitz system. *J. Phys. A*, 45(465203), 2012.
- [68] M. F. Ranada. Higher order superintegrability of separable potentials with a new approach to the post-winternitz system. *J. Phys. A*, 46(125206), 2013.
- [69] C. Gonera. On the superintegrability of ttw model. *Phys. Lett. A*, 376(2341), 2012.
- [70] A.Nersessian T.Hakobyan and Hovhannes Shmavonyan. Lobachevsky geometry in ttw and pw systems.
- [71] J.Negro E.Cheleghini, S.Kuru and M. del Olmo. A unified approach to quantum and classical ttw systems based on factorizations. *Ann. Phys.*, 332(27), 2013.

- [72] L.E.Parker and D.J.Toms. *Quantum field theory in curved space time*. Cambridge Univ. Press, 2009.
- [73] V. V. Varlamov. Cpt groups of spinor fields in de sitter and anti-de sitter spaces. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(2):487–516, 2015.
- [74] L.C.Ambrozio. On perturbations of the schwarzschild anti-de sitter spaces of positive mass. *Communications in Mathematical Physics*, 337(2):767–783, 2015.
- [75] G.W. Gibbons. Anti-de-sitter spacetime and its uses.
- [76] G. 't Hooft. Non-perturbative 2 particle scattering amplitudes in 2+1 dimensional quantum gravity. *Commun. Math. Phys.*, 117:685, 1988.
- [77] V.Kotecha and R.S.Ward. Integrable yang-mills-higgs equations in three-dimensional de sitter space-time. *J. Math. Phys.*, 42(3):1018, 2001.
- [78] Z.Zhou. Solutions of the yang-mills-higgs equations in 2+1 -dimensional anti de sitter space-time. *J. Math. Phys.*, 42(3):1085, 2001.
- [79] N.Ya. Vilenkin and Ya.A. Smorodinski. Invariant expansions of relativistic amplitudes. *Sov. Phys. JETP*, 19(5):1209–1218, 1964.
- [80] J.P.Gazeau and W.Piechocki. Coherent state quantization of a particle in de sitter space. *J. Phys.*, A 37:6977, 2004.
- [81] Смородинский Я. А. Виленкин Н. Я. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд. *ЖЭТФ*, 46(5):1793, 1964.
- [82] Н.Б. Скачков В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел. *ЭЧАЯ*, 3, 1971.
- [83] И.Л. Соловтсов Н.Б. Скачков. Релятивистское трёхмерное описание взаимодействия двух фермионов. *ЭЧАЯ*, 9(1), 1978.
- [84] N. Bessis and G. Bessis. Electronic wavefunction in a space of constant curvature. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 12(11):1991–1997, 1979.
- [85] G. Bessis N. Bessis and R. Shamseddine. Space-curvature effects in atomic fine and hyperfine structure calculations. *Phys. Rev. A.*, 29(5):2375–2388, 1984.
- [86] G. Bessis N. Bessis and D. Roux. Atomic fine-structure calculations in a space of constant negative curvature. *Phys. Rev. A.*, 30(2):1094–1097, 1984.

- [87] D. Roux N. Bessis, G. Bessis. Space-curvature effects in the interaction between atoms and external fields: Zeeman and stark effects in a space of constant positive curvature. *Phys. Rev. A.*, 33(1):324–336, 1986.
- [88] Л.М. Томильчик А.К. Горбацевич. Уравнения движения частицы в конформно плоском пространстве и удержание кварков. *Препринт / Акад. наук БССР, Института физики*, (415):9, 1986.
- [89] А.А. Измestьев. Точно решаемая потенциальная модель для кваркониев. *Ядерная Физика*, 52(6 (12)):1697–1710, 1990.
- [90] Курочкин Ю.А. Неевклидова квантовая механика экситона в полупродниковых квантово-размерных каплях. *Доклады НАН Беларуси*, 38(6):36–40, 1994.
- [91] V. Gritzev and Yu. Kurochkin. Model of excitations in quantum dots based on quantum mechanics in spaces of constant curvature. *Phys. Rev. B.*, 64(035308), 2001.
- [92] C.Grosche. On the path integral in imaginary lobachevsky space. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:3475–3489, 1994.
- [93] M.A del Olmo J.A.Calzada and M.A.Rodriguez. Classical superintegrable $SO(p, q)$ hamiltonian systems. *Journal of Geometry and Physics*, 23:14–30, 1997.
- [94] M.Ranada J.Carinera and M.Santander. The harmonic oscillator on riemannian and lorentzian configuration spaces of constant curvature. *J. Math. Phys.*, 49(032703), 2008.
- [95] A.Perelomov J.Carinera and M.Ranada. Isochronous classical systems and quantum systems with equally space spectra. *J.Phys. Conference Series*, 87(012007), 2007.
- [96] F.J.Herranz and A.Ballesteros. Superintegrability on three-dimensional riemannian and relativistic spaces of constant curvature. *SIGMA*, 2(10), 2006.
- [97] F.J.Herranz, M.Santander A.Ballesteros, and T.Sanz-Gil. Maximally superintegrable smorodinsky-winternitz systems on the n-dimensional sphere and hyperbolic spaces. In J.Harnad W.Miller Jr. G.Pogosyan P.Tempesta, P.Winternitz and M.A.Rodrigues, editors, *Superintegrability in Classical and Quantum Systems*, volume 37 of *CRM Proceedings and Lecture Notes*, pages 75–89. Providence, American Mathematical Society, 2004. math-ph/0501035.
- [98] M.A.Rodriguez M.A. del Olmo and P.Winternitz. The conformal group $SU(2, 2)$ and integrable systems on a lorentzian heperboloid. *Fortschr. Phys.*, 4:199–223, 1996.
- [99] S.Kuru J.A.Calzada and J.Negro. Superintegrable lissajous systems on the sphere. *Eur. Phys. J. Plus*, 129(164), 2014.

- [100] Л.Д.Ландау и Л.Лифшиц. *Квантовая механика*, volume 3 of *Курс теоретической физики*. 1976.
- [101] G.S.Pogosyan D.R.Petrosyan. The kepler-coulomb problem on $SO(2, 2)$ hyperboloid. *Physics of Atomic Nuclei*, 75(10):1272–1278, 2012.
- [102] G.S.Pogosyan D.R.Petrosyan. Classical kepler-coulomb problem on $SO(2, 2)$ hyperboloid. *Physics of Atomic Nuclei*, 76(10):1273–1283, 2013.
- [103] G.S.Pogosyan D.R.Petrosyan. Oscillator problem on $SO(2, 2)$ hyperboloid. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 17(4):405–408, 2014.
- [104] G.S.Pogosyan D.R.Petrosyan. Harmonic oscillator on the $so(2,2)$ hyperboloid. *SIGMA*, 11(96):1–23, 2015.
- [105] D.R.Petrosyan G.S.Pogosyan Yu.A.Kurochkin, V.S.Otchik. Eigenfunction expansions in the imaginary lobachevsky space. *Proceedings of the IX International conference BGL-9*.
- [106] V.S.Otchik D.R.Petrosyan G.S.Pogosyan Yu.A.Kurochkin, L.G.Mardoyan. Kepler motion on single-sheet hyperboloid. *Proceedings of the IX International conference BGL-9*.
- [107] E.C. Titchmarsh. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*, volume 1, page 203. Oxford Univ. Press, 1953.
- [108] D.M.Fradkin. Existence of the dynamical symmetries O_4 and SU_3 for all classical central potential problems. *Prog.Theor.Phys.*, 37:798–812, 1967.
- [109] Л.Д.Ландау и Л.Лифшиц. *Теоретическая механика*, volume 1 of *Курс теоретической физики*. 1976.
- [110] I.S.GradshTEyn and I.M.Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 2007.
- [111] M.N. Olevskii. Triorthogonal systems in spaces of constant curvature in which the equation $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ allows the complete separation of variables. *Math.Sb.*, 27:379–426, 1950.
- [112] E. G. Kalnins and Jr. Willard Miller. Lie theory and the wave equation in space-time. 2. the group $SO(4, \mathbb{C})$. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 9(1):12–33, 1978.
- [113] G. S. Pogosyan and A. Yakhno. Two-dimensional imaginary lobachevsky space. separation of variables and contractions. *Physics of Atomic Nuclei*, 74(7):1062–1072, 2011.
- [114] S. Flügge. *Practical Quantum Mechanics*. Springer, 1971.

- [115] A. Erdelyi H. Bateman. *Higher Transcendental Functions*. MC Graw-Hill Book Company, INC., New York-Toronto-London, 1953.
- [116] Alejandro Frank and Kurt Bernardo Wolf. Lie algebras for systems with mixed spectra. I. the scattering pöschl–teller potential. *Journal of Mathematical Physics*, 26(5), 1985.
- [117] A.O. Barut and Raj Wilson. On the dynamical group of the kepler problem in a curved space of constant curvature. *Physics Letters A*, 110(7–8):351 – 354, 1985.
- [118] M. F. Manning and N. Rosen. A potential function for the vibrations of diatomic molecules. *Phys. Rev.*, 44:953, 1933.
- [119] Jr. E.G.Kalnins, W.Miller and G.S.Pogosyan. The coulomb-oscillator relation on n-dimensional spheres and hyperboloids. *Physics of Atomic Nuclei*, 65(6):1086–1094, 2002.
- [120] V.K. Khersonskii D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev. *Quantum Theory of Angular Momentum*, page 524. World Scientific, Singapore, 1988.
- [121] N. Rosen and Philip M. Morse. On the vibrations of polyatomic molecules. *Phys. Rev.*, 42:210–217, Oct 1932.
- [122] Michael Martin Nieto. Exact wave-function normalization constants for the $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^{-2} z$ and pöschl–teller potentials. *Phys. Rev. A*, 17:1273–1283, Apr 1978.
- [123] V. M. Red'kov A. A. Bogush, V. S. Otchik. Separation of variables in schrödinger equation and normalized state functions for kepler problem in three-dimensional spaces of constant curvature. *Vesti Akad. Nauk. BSSR*, 3:56–62, 1983.
- [124] E. Ovsyuk Yu. Kurochkin, V. Otchik and Dz. Shoukavy. On some integrable systems in the extended lobachevsky space. *Phys. Atom. Nucl.*, 74:969, 2011.
- [125] W.N. Bailey. *Generalized hypergeometric series*, page 108. Cambridge Univ. Press, 1935.