

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи

Пивоваров Алексей Александрович

**РОЖДЕНИЕ МЕЗОНОВ В РАСПАДАХ  
 $\tau$ -ЛЕПТОНОВ И  $e^+e^-$ -АННИГИЛЯЦИИ  
В РАМКАХ РАСШИРЕНОЙ МОДЕЛИ  
НАМБУ–ИОНА-ЛАЗИНИО**

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

д.ф-м.н Теряев Олег Валерианович

д.ф-м.н, профессор Волков Михаил Константинович

Дубна — 2016

# Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| Введение . . . . .  | 3         |
| <b>1 Модель Намбу–Иона–Лазинио</b>  | <b>12</b> |
| 1.1 Стандартная $U(3) \times U(3)$ модель НИЛ . . . . .                               | 12        |
| 1.2 Взаимодействие 'т Хофта . . . . .   | 21        |
| 1.3 Расширенная модель НИЛ . . . . .  | 23        |
| <b>2 Мезонные распады <math>\tau</math>-лептона в модели НИЛ</b>                      | <b>33</b> |
| 2.1 Распад $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ . . . . .                              | 33        |
| 2.2 Распад $\tau \rightarrow K^-(\eta, \eta'(958))\nu_\tau$ . . . . .                 | 41        |
| 2.3 Распад $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$ . . . . .                                | 52        |
| 2.4 Поляризационные эффекты распада $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ . . . . .     | 58        |
| 2.5 Основные выводы . . . . .   | 62        |
| <b>3 <math>e^+e^-</math>-аннигиляция в мезоны в рамках модели НИЛ</b>                 | <b>64</b> |
| 3.1 Процесс $e^+e^- \rightarrow K^\pm(K^{*\mp}(892), K^{*\mp}(1410))$ . . . . .       | 64        |
| 3.2 Процесс $e^+e^- \rightarrow (\eta, \eta'(958))(\phi(1020), \phi(1680))$ . . . . . | 72        |
| 3.3 Основные выводы . . . . .   | 77        |
| Заключение . . . . .  | 78        |
| Список публикаций по теме диссертации . . . . .                                       | 79        |
| Список литературы . . . . .   | 80        |

# Введение

**Актуальность работы.** Адронные распады  $\tau$ -лептонов представляют собой хорошую лабораторию для изучения низкоэнергетической адронной физики. Такой выделенный статус  $\tau$ -лептона обусловлен тем, что это единственный лептон, достаточно тяжелый для рождения мезонов, но при этом энергия этих мезонов ограничена его массой ( $m_\tau = 1777$  МэВ).

В этой области энергии ( $E < 2$  ГэВ) хорошо разработанная теория возмущений квантовой хромодинамики не применима из-за большой величины константы сильных взаимодействий. Поэтому при изучении мезонных распадов  $\tau$ -лептонов приходится использовать различные феноменологические модели. Большинство таких моделей основаны на киральной симметрии сильных взаимодействий и методах векторной доминантности для электромагнитных взаимодействий [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]. Основным недостатком большинства этих моделей является необходимость введения дополнительных произвольных параметров при описании новых классов процессов. Это существенно снижает их предсказательную силу.

Одной из наиболее успешных феноменологических моделей, описывающих мезоны при низких энергиях, является модель Намбу–Иона–Лазинио (НИЛ).

Модель НИЛ впервые была сформулирована в 1961 г. в работе Намбу и Иона–Лазинио [19] для описания нуклонов, пионов и скалярных мезонов. В ней в качестве исходного был взят кирально-симметричный четырехфермионный лагранжиан с безмассовыми частицами. Мезоны вводились как фермион-антифермионные состояния. При этом происходило спонтанное нарушение киральной симметрии и нуклоны приобретали массу.

Позже в работах Т. Егучи и К. Кикавы эта модель была переформулирована на языке кварков [20, 21]. В этой версии модели в результате спонтанного нарушения киральной симметрии легкие токовые кварки переходят в массивные составляющие кварки. Здесь же впервые было показано, как из эффективных

четырехкварковых взаимодействий скалярного и псевдоскалярного типа появляется  $\sigma$ -модель. Однако там был рассмотрен лишь предельный случай равных нулю масс токовых夸克ов, который соответствует равенству нулю масс всех псевдоскалярных мезонов. Т.е. псевдоскалярные мезоны рассматривались в качестве голдстоуновских частиц.

В 1982 г. М. К. Волков и Д. Эберт сформулировали версию модели НИЛ с отличными от нуля массами токовых夸克ов, т.е. с самого начала учитывались эффекты нарушения киральной симметрии [22, 23, 24]. Это дало возможность описать спектр масс и взаимодействия четырех мезонных nonetов.

В последующие несколько лет был выполнен целый ряд работ, основанных на модели НИЛ. В рамках этой модели были рассмотрены процессы распадов различных мезонов [25, 26, 27], поляризуемость пионов и каонов [28].

Т. Хатсуда и Т. Кунихиро с помощью этой модели описали адроны в горячей и плотной среде [29, 30].

В современном ее виде стандартная модель НИЛ была описана в работах М. К. Волкова, Д. Эберта и Х. Рейнхарда в 1986 г. [31, 32]. После этого она приобрела широкую известность и продолжала интенсивно развиваться и применяться для описания низкоэнергетической физики мезонов [33, 34, 35, 36]. Главным ее достоинством является то, что она содержит минимальное число модельных параметров, которые фиксируются на этапе ее построения, и не требует введения дополнительных произвольных параметров для вычисления конкретных процессов, что существенно повышает ее предсказательную силу. Эта модель основана на эффективном четырех夸ковом кирально-симметричном взаимодействии. В рамках этой модели векторная доминантность возникает автоматически.

Однако стандартная модель НИЛ способна описывать мезоны только в основном состоянии. Значение массы  $\tau$ -лептона оказывается слишком большим, чтобы основных состояний мезонов было достаточно для описания его адронных распадов. Для того, чтобы правильным образом описать мезонные распады

$\tau$ -лептона, необходимо учитывать первые радиальные возбуждения мезонов.

В различных феноменологических моделях для учета возбужденных состояний используются такие методы, как введение новых степеней свободы и дополнительных параметров, которые вводятся, как правило, для каждого класса процессов.

Для решения этой проблемы в работе 1997 г. была сформулирована М. К. Волковым и К. Вайсом и в последующие годы развита расширенная модель НИЛ [37, 38, 39, 40, 41]. В этой версии модели помимо стандартного вводится дополнительный нелокальный лагранжиан, содержащий формфакторы полиномиального типа для каждого кварк-антикваркового тока. Эти формфакторы, зависящие только от относительного импульса夸арков в мезоне и квадратичные по значению этого импульса, позволяют описывать помимо четырех мезонных нонетов в основном состоянии их первые радиальные возбуждения. При этом сохраняется механизм спонтанного нарушения киральной симметрии. По сравнению со стандартной моделью НИЛ не происходит искажения кваркового конденсата и, как следствие, масс составляющих кварков.

В последние годы с использованием модели НИЛ успешно был описан ряд мезонных распадов  $\tau$ -лептонов. Среди них двухчастичные распады  $\tau \rightarrow (\pi, \pi(1300))\nu_\tau$  [42], трехчастичные распады, у которых в конечных состояниях находятся псевдоскалярный и векторный мезоны  $\tau \rightarrow \pi\omega\nu_\tau$  [43], псевдоскалярный и аксиально-векторный мезоны  $\tau \rightarrow f_1\pi\nu_\tau$  [44] и два псевдоскалярных мезона  $\tau \rightarrow (\eta, \eta')\pi\nu_\tau$  [45],  $\tau \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$  [46], а также четырехчастичные распады  $\tau \rightarrow (\eta, \eta')\pi^-\pi^0\nu_\tau$  [47]. Все эти распады проходят без участия странных мезонов.

В диссертационной работе продолжаются эти исследования и проводится теоретическое рассмотрение в рамках модели НИЛ процессов трехчастичных распадов  $\tau$ -лептона со странными псевдоскалярными мезонами в конечных состояниях  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  [A1],  $\tau \rightarrow K^-(\eta, \eta')\nu_\tau$  [A2],  $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$  [A3]. Эти работы завершают начатую ранее серию вычислений трехчастичных  $\tau$ -распадов в

псевдоскалярные мезоны и распространяют ее на сектор странных частиц.

Кроме того, интерес представляют поляризационные эффекты  $\tau$ -лептона, не учитывавшиеся в указанных работах. Методы вычисления угловых распределений дифференциальных ширин поляризованного  $\tau$ -лептона представлены в работе [48]. Поляризационные спиновые эффекты в квантовой хромодинамике были рассмотрены А. В. Ефремовым и О. В. Теряевым в работе [49].

В настоящей диссертационной работе проводится рассмотрение эффектов поперечной поляризации  $\tau$ -лептона на примере распада  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  [A4].

Помимо распадов  $\tau$ -лептонов для исследования взаимодействий мезонов при низких энергиях используются также электрон-позитронные аннигиляции в соответствующем энергетическом диапазоне.  $e^+e^-$ -аннигиляции в мезоны также могут быть описаны с использованием стандартной или расширенной модели НИЛ. В последние годы в рамках этой модели был успешно вычислен ряд таких процессов:  $e^+e^- \rightarrow (\pi^0, \pi^0(1300))\gamma$  [50],  $e^+e^- \rightarrow \pi^0\omega$  [51],  $e^+e^- \rightarrow \pi^0\rho^0$  [52],  $e^+e^- \rightarrow \pi(\pi, \pi(1300))$  [53],  $e^+e^- \rightarrow (\eta, \eta'(958))2\pi$  [47],  $e^+e^- \rightarrow (\eta, \eta'(958), \eta(1295), \eta(1475))\gamma$  [54]. Все эти процессы не содержат странных мезонов в конечном состоянии.

В данной диссертационной работе рассматриваются не исследовавшиеся ранее в рамках модели НИЛ процессы  $e^+e^-$ -аннигиляции со странными мезонами, а также с  $\phi$ -мезонами в конечных состояниях:  $e^+e^- \rightarrow K^\pm(K^{*\mp}(892), K^{*\mp}(1410))$ ,  $e^+e^- \rightarrow (\eta, \eta'(958))(\phi(1020), \phi(1680))$  [A5]. Тем самым изучается возможность применения данной модели для расчета процессов такого типа.

Актуальность представленных в диссертации исследований заключается в демонстрации возможности описания процессов  $\tau$ -распадов и  $e^+e^-$ -аннигиляции с участием странных частиц без введения дополнительных произвольных параметров.

**Цель диссертационной работы.** Детальное описание известных мезонных распадов  $\tau$ -лептона и процессов  $e^+e^-$ -аннигиляции и предсказание неизмененных для будущих экспериментов.

Достижение цели осуществляется решением следующих задач:

- расчет процесса  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  в модели НИЛ;
- расчет процессов  $\tau \rightarrow K^-(\eta, \eta'(958))\nu_\tau$  в модели НИЛ;
- расчет процесса  $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$  в модели НИЛ;
- рассмотрение поляризационных эффектов  $\tau$ -распадов в модели НИЛ на примере процесса  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ ;
- расчет процессов  $e^+e^- \rightarrow K^\pm(K^{*\mp}(892), K^{*\mp}(1410))$  в модели НИЛ;
- расчет процессов  $e^+e^- \rightarrow (\eta, \eta'(958))(\phi(1020), \phi(1680))$  в модели НИЛ.

**Научная новизна.** Впервые выполнены расчеты трехчастичных распадов  $\tau$ -лептона со странными мезонами в конечных состояниях в рамках модели НИЛ.

Впервые рассмотрены поляризационные эффекты распада  $\tau$ -лептона с использованием этой модели.

Проведены расчеты ранее не рассматривавшихся в модели НИЛ процессов  $e^+e^-$ -аннигиляции со странными мезонами и  $\phi$ -мезонами в конечных состояниях.

Сделаны предсказания для ряда процессов.

**Методы исследований.** В работе используются методы квантовой теории поля (в том числе квантовой электродинамики), а также методы феноменологических моделей, основанных на спонтанном нарушении киральной симметрии.

**Обоснованность и достоверность результатов.** Полученные в диссертации результаты достоверны за счет использования методов вычислений развитых в модели НИЛ и успешно опробованных ранее на других процессах мезонных  $\tau$ -распадов,  $e^+e^-$ -аннигиляций и распадов мезонов, а также высокой степени автоматизации расчетов с применением современных компьютерных

систем символьных вычислений. Достоверность результатов подтверждается сопоставлением с экспериментальными данными и результатами теоретических расчетов других авторов.

**Практическая значимость.** Диссертационная работа является теоретическим исследованием. Описаны процессы низкоэнергетического рождения мезонов без использования дополнительных произвольных параметров, что выгодно отличает полученные в настоящей работе результаты от аналогичных результатов, полученных в других феноменологических моделях.

Рассмотренные процессы активно изучаются в различных экспериментальных центрах и коллаборациях, таких как ВЭПП-2000 (Новосибирск), БЕРС-II (Пекин), Belle (КЕК, Япония), BaBar (SLAC, США) и др.

Поляризационные эффекты, рассмотренные в данной диссертационной работе могут быть измерены в экспериментах с достаточно высокой статистикой. Это дает возможность дополнительной проверки модели НИЛ.

Процессы  $e^+e^-$ -аннигиляции, вычисленные в настоящей работе, могут быть полезны для описания процессов  $e^+e^- \rightarrow KK(\eta, \eta'(958), \pi)$ .

### **На защиту выносятся следующие основные результаты:**

- Выполнен расчет процессов странных распадов  $\tau$ -лептона в псевдоскалярные мезоны  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ ,  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  и  $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$  в рамках модели НИЛ. Были получены парциальные и дифференциальные ширины этих распадов. Выполнен сравнительный анализ с экспериментальными работами и теоретическими работами других авторов. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Это завершило расчет серии трехчастичных  $\tau$ -распадов с псевдоскалярными мезонами в конечных состояниях. Таким образом, было показано, что процессы распадов  $\tau$ -лептона с участием странных мезонов также могут быть успешно расчитаны в рамках моделей НИЛ.
- Выполнен расчет процессов  $e^+e^-$ -аннигиляции в псевдоскалярный и векторный мезоны  $e^+e^- \rightarrow K^{*\pm}(892)K^\mp$  и  $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)\eta$  в рамках модели

НИЛ. Были получены их полные сечения. Выполнен сравнительный анализ с экспериментальными работами и теоретическими работами других авторов. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Таким образом, было показано, что процессы электрон-позитронной аннигиляции с участием странных мезонов, а также с участием  $\phi$ -мезонов в конечном состоянии могут быть успешно расчитаны в рамках модели НИЛ.

- Сделаны предсказания для парциальной и дифференциальной ширины процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$ , а также полных сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow K^{*\pm}(1410)K^\mp$ ,  $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)\eta'(958)$  и  $e^+e^- \rightarrow \phi(1680)\eta$  в рамках модели НИЛ.
- Впервые рассмотрены поляризационные эффекты  $\tau$ -распадов с использованием модели НИЛ на примере процесса  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ . Была получена оценка влияния учета поляризации  $\tau$ -лептона на дифференциальную ширину. Получена зависимость этого влияния от величины инвариантной массы конечных мезонов и отношения их энергий для случая поперечной поляризации  $\tau$ -лептона.

**Апробация работы** проводилась на Сессии-конференции РАН 2016 (г. Дубна, Россия) и на тематических семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ (г. Дубна, Россия).

**Публикации.** По материалам диссертационной работы подготовлено 5 публикаций в реферируемых журналах, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов докторских диссертаций [A1,A2,A3,A4,A5].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации — 87 страниц, в т.ч. 25 рисунков и 2 таблицы. Список литературы включает 77 наименований.

**Личный вклад автора.** Автор, работая совместно с сотрудниками ОИЯИ, произвел теоретические расчеты исследуемых процессов, вывел аналити-

ческие выражения для амплитуд соответствующих распадов и аннигиляций, разработал алгоритмы и программы, по которым проводились численные расчеты, выполнил анализ теоретических результатов.

**Основное содержание работы** изложено в трех главах.

*Глава 1* посвящена изложению стандартной и расширенной моделей Намбу–Иона–Лазинио, с помощью которых вычисляются процессы, рассматриваемые в настоящей работе. Приведена версия стандартной модели НИЛ, основанная на симметрии  $U(3) \times U(3)$ . Описана процедура спонтанного нарушения киральной симметрии. Приведены соответствующие лагранжианы и уравнение щели.

Указано обоснование необходимости использования взаимодействия 'т Хофта для правильного описания синглет–октетного смешивания псевдоскалярных мезонов. Приведен шестикварковый лагранжиан, а также влияние взаимодействия 'т Хофта на массы токовых и составляющих кварков.

Изложена расширенная модель НИЛ. Приведено определение и явный вид формфактора, обеспечивающего нелокальность. Указано происхождение величины параметра наклона. Представлена процедура диагонализации лагранжиана, обеспечивающая смешивание мезонных состояний. Приведены мезонные и кварк–мезонные лагранжианы.

*В главе 2* приведены вычисления трехчастичных распадов  $\tau$ -лептона с псевдоскалярными мезонами в конечных состояниях  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ ,  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  и  $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$ . Приведены обоснования учета различных каналов для каждого процесса. Получены амплитуды этих процессов в рамках модели НИЛ, а также их парциальные и дифференциальные ширины. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных в рамках модели НИЛ, с экспериментальными данными и с данными других теоретических исследований. Сделано предсказание для полной и дифференциальной ширин процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$ .

Рассмотрены эффекты поляризации  $\tau$ -лептона на примере процесса  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ . Показана зависимость влияния учета поляризации  $\tau$ -лептона на дифференциальную ширину от величины инвариантной массы конечных мезонов и

величины отношения их энергий. Произведен анализ полученных результатов.

*В главе 3* рассмотрены процессы электрон-позитронной аннигиляции в мезоны  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$  и  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$  в рамках модели НИЛ. Приведены обоснования учета различных промежуточных мезонов для каждого процесса. Получены их амплитуды и полные сечения. Приведены графики зависимости этих сечений от энергии сталкивающихся лептонов. Выполнено сравнение с экспериментальными данными. Сделаны предсказания для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(1410)$ ,  $e^+e^- \rightarrow \eta'(958)\phi(1020)$  и  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1680)$ .

# Глава 1

## Модель Намбу–Иона-Лазинио

### 1.1 Стандартная $U(3) \times U(3)$ модель НИЛ

Стандартная модель НИЛ была сформулирована в работах [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36].

Эта модель основана на эффективном четырехкварковом взаимодействии. В квантовой хромодинамике взаимодействие четырех кварковых состояний описывается посредством глюонного обмена. В таких диаграммах присутствуют только физически ненаблюдаемые кварки и глюоны (рис. 1.1).

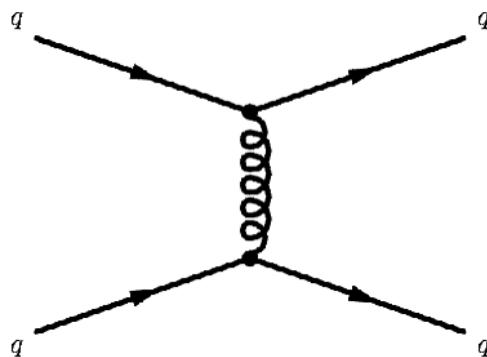


Рис. 1.1: Четырехкварковое взаимодействие в КХД.

Затем одноглюонный обмен аппроксимируется четырехкварковой формой в скалярном, псевдоскалярном, векторном и аксиально-векторном мезонных каналах (рис 1.2).

При этом ненаблюдаемые глюоны исключаются из рассмотрения. Константа сильного взаимодействия  $\alpha_s$  заменяется константами четырехкварковых вза-

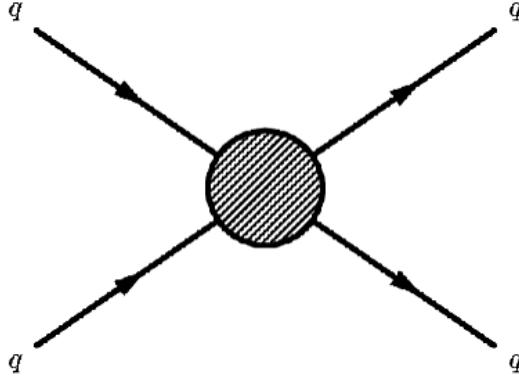


Рис. 1.2: Эффективное четырехкварковое взаимодействие.

имодействий.

Исходным лагранжианом модели НИЛ является  $U(3) \times U(3)$  кирально-симметричный 4-фермионный лагранжиан:

$$\mathcal{L}_q(\bar{q}, q) = \bar{q}(x)(i\hat{\partial}_x - m_0)q(x) + \frac{G_1}{2} \left( (\bar{q}(x)\lambda_a q(x))^2 + (\bar{q}(x)i\lambda_a \gamma^5 q(x))^2 \right) - \frac{G_2}{2} \left( (\bar{q}(x)\gamma^\mu \lambda_a q(x))^2 + (\bar{q}(x)\gamma^\mu \gamma^5 \lambda_a q(x))^2 \right), \quad (1.1)$$

где  $q$  — поля токовых  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварков,  $m_0$  — матрица масс токовых кварков:

$$m_0 = \begin{Bmatrix} m_{u0} & 0 & 0 \\ 0 & m_{d0} & 0 \\ 0 & 0 & m_{s0} \end{Bmatrix}, \quad (1.2)$$

$G_1$  и  $G_2$  — четырехкварковые константы взаимодействия,  $a = 0 \dots 8$ ,  $\lambda_1 \dots \lambda_8$  — матрицы Гелл-Мана, матрица  $\lambda_0$  имеет вид

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Мезоны появляются как составные фермион-антифермионные состояния. При этом в лагранжиане помимо ненаблюдаемых кварков возникают наблюдаемые мезонные состояния. Их введение можно описать тождественными преобразованиями с помощью производящего функционала:

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \frac{1}{N'} \int \exp \left( i \int [\mathcal{L}_q(\bar{q}, q) + \eta \bar{q} + \bar{\eta} q] d^4x \right) \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q, \quad (1.4)$$

где  $\eta, \bar{\eta}$  — внешние источники.

В этот функционал вводятся гауссовые интегралы по мезонным полям:

$$\begin{aligned} Z(\bar{\eta}, \eta) &= \frac{1}{N} \int \exp \left( i \int [\mathcal{L}(\bar{q}, q, \sigma', \pi, V, A) + \eta \bar{q} + \bar{\eta} q] d^4x \right) \\ &\quad \times \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}\sigma' \mathcal{D}\pi \mathcal{D}V \mathcal{D}A, \\ \mathcal{L}(\bar{q}, q, \sigma', \pi, V, A) &= \bar{q}(x) \left( i\hat{\partial}_x - m_0 + \lambda_a \sigma'_a(x) + i\gamma^5 \lambda_a \pi_a(x) \right. \\ &\quad \left. + \gamma^\mu \lambda_a V_\mu^a(x) + \gamma^\mu \gamma^5 \lambda_a A_\mu^a(x) \right) q(x) \\ &\quad - \frac{(\sigma'_a(x))^2 + (\pi_a(x))^2}{2G_1} + \frac{(V_\mu^a(x))^2 + (A_\mu^a(x))^2}{2G_2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $\sigma'(x)$ ,  $\pi(x)$ ,  $V(x)$  и  $A(x)$  — поля скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов.

Если далее проинтегрировать по кварковым полям в лагранжиане остаются только полевые функции наблюдаемых мезонов. Ненаблюдаемые кварки заключаются в кварковые петли, описывающие феноменологические мезонные вершины.

При этом появляются три типа кварковых петель:

1. Одновершинные.
2. Двухвершинные.
3. Многовершинные.

Одновершинные кварковые петли могут давать ненулевой вклад только в скалярном секторе. Во всех остальных секторах они исчезают за счет бесследовости матриц Дирака. В скалярном же секторе отличный от нуля вклад дают только петли, связанные с мезоном  $\sigma_0$ , т.к. только матрица  $\lambda_0$  имеет отличный от нуля след (рис. 1.3).

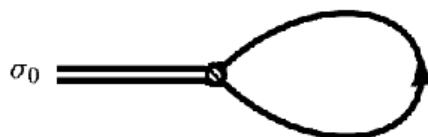


Рис. 1.3: Одновершинная кварковая петля в модели НИЛ.

Ненулевой вклад от такой кварковой петли означает, что вакуумное среднее скалярного поля  $\sigma'_0(x)$  отлично от нуля. Переопределением скалярного поля можно добиться равенства нулю его вакуумного ожидания:  $\sigma_0 = \sigma'_0 - \langle \sigma'_0 \rangle_0$ . При этом происходит спонтанное нарушение киральной симметрии. Константа  $\langle \sigma'_0 \rangle_0$  поглощается массами夸克ов. Т.е. спонтанное нарушения киральной симметрии заключается в перестройке вакуума, в результате которого матрица масс токовых кварков заменилась матрицей масс составляющих кварков.

Мезонный лагранжиан при этом принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\sigma, \pi, V, A) = & -\frac{(\sigma_a(x))^2 + (\pi_a(x))^2}{2G_1} + \frac{(V_\mu^a(x))^2 + (A_\mu^a(x))^2}{2G_2} \\ & -i\text{Tr} \left\{ \ln \left[ i\hat{\partial}_x - m + \lambda_a \sigma_a(x) + i\gamma^5 \lambda_a \pi_a(x) \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma^\mu \lambda_a V_\mu^a(x) + \gamma^\mu \gamma^5 \lambda_a A_\mu^a(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Массы  $u$ - и  $d$ -кварков близки друг к другу, поэтому различием между ними можно пренебречь. Для того, чтобы выделить отдельно  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварковые состояния, в пренебрежении разницей между  $u$ - и  $d$ -кварками удобно разделить матрицу  $\lambda_0$  на две части, выражив ее и матрицу  $\lambda_8$  через матрицы  $\lambda_u$  и  $\lambda_s$ :

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \frac{\sqrt{2}\lambda_0 + \lambda_8}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_s &= \frac{-\lambda_0 + \sqrt{2}\lambda_8}{\sqrt{3}} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Описанной выше перестройке вакуума соответствует уравнение щели:

$$\left. \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0. \quad (1.8)$$

Отсюда получаем уравнение, связывающее массы токовых и составляющих кварков:

$$m_i^0 = m_i (1 - 8G_1 I_1(m_i)), \quad (1.9)$$

где  $I_1(m_i)$  — интеграл по одновершинной кварковой петле. Он принимает вид

$$\begin{aligned} I_1(m_i) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{\theta(\Lambda_4^2 + k^2)}{m_i^2 - k^2} d^4k \\ &= \frac{N_c}{(4\pi)^2} \left[ \Lambda_4^2 - m_i^2 \ln \left( \frac{\Lambda_4^2}{m_i^2} + 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $i = u, d, s$ .

Этот интеграл квадратично расходится. Для устранения этой расходимости используется регуляризация обрезанием.  $\Lambda_4 = 1250$  МэВ — параметр ультрафиолетового обрезания, определяющий область применимости стандартной модели НИЛ.

Кварковые петли второго типа (двувершинные), возникающие в данной модели, осуществляют перенормировку мезонных полей (рис. 1.4).

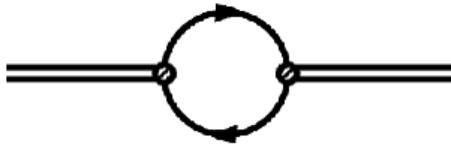


Рис. 1.4: Двувершинная кварковая петля в модели НИЛ.

Таким кварковым петлям соответствуют интегралы:

$$\begin{aligned} I_2(m_1, m_2) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{\theta(\Lambda_4^2 + k^2)}{(m_1^2 - k^2)(m_2^2 - k^2)} d^4k \\ &= \frac{N_c}{(4\pi)^2} \frac{1}{m_2^2 - m_1^2} \left[ m_2^2 \ln \left( \frac{\Lambda_4^2}{m_2^2} + 1 \right) - m_1^2 \ln \left( \frac{\Lambda_4^2}{m_1^2} + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Величины  $m_1$ , и  $m_2$  — массы  $u$ - или  $s$ -кварков в зависимости от кваркового состава соответствующего мезона.

При описании векторных и аксиально-векторных мезонов необходимо использовать градиентно-инвариантную регуляризацию. Такой регуляризацией является регуляризация Паули-Вилларса.

Кварковые петли третьего типа (многовершинные) описывают взаимодействия различных мезонов (рис. 1.5). Однако во всех этих петлях возникают логарифмически расходящиеся интегралы  $I_2(m_1, m_2)$ . Таким образом, в модели НИЛ присутствуют только два типа расходящихся интегралов.

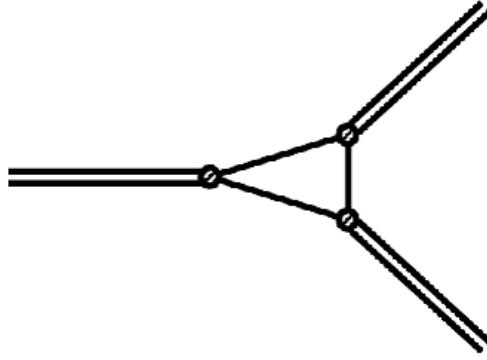


Рис. 1.5: Трехваршинная кварковая петля в модели НИЛ.

В результате перенормировки в лагранжиане модели НИЛ появляются константы взаимодействия мезонов с кварками. Они выражаются через интегралы по кварковым петлям:

$$\begin{aligned} g_s &= \sqrt{\frac{1}{4I_2(m_1, m_2)}}, & g_p &= \sqrt{\frac{Z}{4I_2(m_1, m_2)}} \\ g_V = g_A &= \sqrt{\frac{3}{2I_2(m_1, m_2)}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $g_s$ ,  $g_p$ ,  $g_V$  и  $g_A$  — константы связи для скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных полей соответственно,  $Z$  — параметр перенормировки, который возникает при учете нетривиальных кварковых петель с псевдоскалярной и аксиально-векторной вершинами. В зависимости от кваркового состава соответствующих мезонов этот параметр может принимать три различных значения.

В результате всех перенормировок мезонный лагранжиан скалярных и псевдоскалярных полей соответствует  $\sigma$ -модели:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\sigma, \pi) = & \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu \bar{\sigma})^2 + (\partial_\mu \bar{\pi})^2 + g^2 \left[ \frac{2}{g} \left( \frac{m - m_0}{G_1} - 8mI_1(m) \right) \right. \right. \\ & - \left( \frac{1}{G_1} - 8I_1(m) \right) (\bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2) - \left( \bar{\sigma}^2 - 2\frac{m}{g}\bar{\sigma} + \bar{\pi}^2 \right)^2 \\ & \left. \left. + \left[ \left( \bar{\sigma} - \frac{m}{g} \right), \bar{\pi} \right]_-^2 \right] \right\} - i \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{g}{i\hat{\partial} - m} [\bar{\sigma} + i\gamma^5 \bar{\pi}] \right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\bar{\sigma} = \lambda_a \sigma_a, \quad \bar{\pi} = \lambda_a \pi_a, \quad (1.14)$$

$[...]_-$  — коммутатор полей.

Векторный сектор мезонного лагранжиана модели НИЛ имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M(V) = & \frac{m_V}{2} (V_\mu^a)^2 - \frac{1}{8} \text{Tr} \left\{ \bar{V}_{\mu\nu} - \frac{g_V}{2} [\bar{V}_\mu, \bar{V}_\nu]_- \right\}^2 \\ & - i \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{i\hat{\partial} - m} \frac{g_V}{2} \bar{V}_\mu \gamma^\mu \right\},\end{aligned}\quad (1.15)$$

где

$$\bar{V}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{V}_\nu - \partial_\nu \bar{V}_\mu, \quad \bar{V}_\mu = \lambda_a V_\mu^a. \quad (1.16)$$

Аксиально-векторный сектор мезонного лагранжиана НИЛ:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M(A) = & \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ (m_V^2 + 6m^2) \bar{A}_\mu^2 - \frac{1}{2} \bar{A}_{\mu\nu}^2 + \frac{g_V}{8} [\bar{A}_\nu, \bar{A}_\mu]_-^2 \right\} \\ & - i \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{i\hat{\partial} - m} \frac{g_V}{2} \bar{A}_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \right\},\end{aligned}\quad (1.17)$$

где

$$\bar{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu, \quad \bar{A}_\mu = \lambda_a A_\mu^a. \quad (1.18)$$

Используя диаграммы смешанного типа с участием разных мезонов, можно получить лагранжиан взаимодействия различных мезонов. Взаимодействие векторных мезонов со скалярными и псевдоскалярными описывается лагранжианом:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M(\sigma, \pi, V) = & \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ D_\mu \left( \bar{\sigma} - \frac{m}{g} \right) D^\mu \left( \bar{\sigma} - \frac{m}{g} \right) \right. \\ & \left. + D_\mu \bar{\pi} D^\mu \bar{\pi} \right\},\end{aligned}\quad (1.19)$$

где  $D_\mu \bar{\sigma}$  и  $D_\mu \bar{\pi}$  — ковариантные производные от скалярных и псевдоскалярных полей соответственно:

$$\begin{aligned}D_\mu \bar{\sigma} &= \partial_\mu \bar{\sigma} - i \frac{g_V}{2} [\bar{V}_\mu, \bar{\sigma}]_-, \\ D_\mu \bar{\pi} &= \partial_\mu \bar{\pi} - i \frac{g_V}{2} [\bar{V}_\mu, \bar{\pi}]_-.\end{aligned}\quad (1.20)$$

Взаимодействие аксиально-векторных мезонов со скалярными и псевдоскалярными принимает вид:

$$\mathcal{L}_M(\sigma, \pi, A) = \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ -6m^2 \bar{A}_\mu^2 + \frac{g_V^2}{4} \left[ \left[ \left( \bar{\sigma} - \frac{m}{g} \right), \bar{A}_\mu \right]_+^2 \right. \right.$$

$$+ [\bar{\pi}, \bar{A}_\mu]_+ \Big] + g_V \bar{A}^\nu \left[ [\partial_\nu \bar{\sigma}, \bar{\pi}]_+ - [\bar{\sigma}, \partial_\nu \bar{\pi}]_+ \right] \Big\}, \quad (1.21)$$

где  $[\dots]_+$  — антисимметрический антикоммутатор полей.

Взаимодействие векторных, аксиально-векторных и псевдоскалярных полей описывается лагранжианом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\pi, V, A) = & \frac{i}{8} \text{Tr} \left\{ \frac{g_V}{g} \left( [\bar{A}_\nu, \bar{\pi}]_+ [\bar{V}_\nu, m]_- \right. \right. \\ & \left. \left. - [\bar{A}_\nu, m]_+ [\bar{V}_\nu, \bar{\pi}]_- \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Итоговый мезонный лагранжиан взаимодействия модели Намбу–Иона–Лазинио может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\sigma, \pi, V, A) = & \frac{1}{4} \text{Tr} \left\{ g^2 \left( \left[ \left( \bar{\sigma} - \frac{M}{g} \right), \bar{\pi} \right]_-^2 \right. \right. \\ & - \left[ \left( \bar{\sigma} - \frac{M}{g} \right)^2 + \bar{\pi}^2 \right]^2 \left. \right) \\ & - \frac{1}{2} (G_V^{\mu\nu} G_{V\mu\nu} + G_V^{\mu\nu} G_{V\mu\nu}) \\ & + \left[ D_\mu \left( \bar{\sigma} - \frac{M}{g} \right) + \frac{g_V}{2} [\bar{A}_\mu, \bar{\pi}]_+ \right]^2 \\ & \left. \left. + \left[ D_\mu \bar{\pi} - \frac{g_V}{2} \left[ \bar{A}_\mu, \left( \bar{\sigma} - \frac{M}{g} \right) \right] \right]^2 \right\}, \right. \end{aligned} \quad (1.23)$$

где

$$\begin{aligned} G_V^{\mu\nu} &= \partial_\mu \bar{V}^\nu - \partial_\nu \bar{V}^\mu - i \frac{g_V}{2} \left( [\bar{V}_\mu, \bar{V}_\nu]_- + [\bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu]_- \right), \\ G_A^{\mu\nu} &= \partial_\mu \bar{A}^\nu - \partial_\nu \bar{A}^\mu - i \frac{g_V}{2} \left( [\bar{A}_\mu, \bar{V}_\nu]_- + [\bar{V}_\mu, \bar{A}_\nu]_- \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Киральная симметрия, характерная для сильных взаимодействий адронов, приближенно сохраняется на всех этапах построения данной модели и в окончательном феноменологическом мезонном лагранжиане.

Для учета электромагнитных взаимодействий в модель НИЛ вводятся фотоны, взаимодействующие с мезонами через кварковые петли:

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - i \text{Tr} \ln \left\{ 1 - \frac{e}{i\hat{\partial} - m} Q A_\mu \gamma^\mu \right\}, \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ Q &= \frac{1}{2} \left( \lambda_3 + \frac{\lambda_u + \sqrt{2}\lambda_s}{3} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Учет электромагнитных кварковых петель приводит к перенормировке фотонов и заряда. Дополнительную перенормировку дает учет диаграмм смешанного типа, соответствующих переходам фотона в мезоны. В качестве таких мезонов могут выступать только векторные электрически нейтральные мезоны, состоящие из кварков одного аромата. Этим условия удовлетворяют мезоны  $\rho^0$ ,  $\omega$  и  $\phi$ .

В результате двух перенормировок окончательный лагранжиан мезон-фотонного взаимодействия принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{M\gamma(int)} &= \frac{e}{g_V} \left[ M_\rho^2 \left( \rho_\mu^0 + \frac{\omega_\mu}{3} \right) + \frac{\sqrt{2}}{3} M_\phi^2 \phi \right] A_\mu \\ &\quad - i \text{Tr} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{i\hat{\partial} - m} \frac{g_V}{2} \bar{V}_\mu \gamma^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Под знаком логарифма фотоны полностью поглотились векторными мезонами в результате перенормировки. Таким образом, фотоны могут взаимодействовать с заряженными частицами только посредством нейтральных векторных мезонов. Следовательно, в модели НИЛ векторная доминантность возникает автоматически.

Если с помощью модели НИЛ описать распад  $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ , то получится соотношение Гольдбергера-Треймана

$$F_\pi = \frac{m_u}{g_\pi}, \quad (1.28)$$

где  $F_\pi = 92.8$  МэВ — константа распада пиона, известная из эксперимента,  $g_\pi$  — константа перенормировки пиона:

$$g_\pi = \sqrt{\frac{Z_\pi}{4I_2(m_u, m_u)}}. \quad (1.29)$$

Соотношение (1.28) можно рассматривать в качестве уравнения с двумя неизвестными — массой  $u$ -кварка и параметром обрезания  $\Lambda_4$ .

При вычислении распада  $\rho \rightarrow 2\pi$  получается, что константа перенормировки  $g_\rho$ , равная

$$\sqrt{\frac{3}{2I_2(m_u, m_u)}}, \quad (1.30)$$

совпадает с известной из эксперимента константой распада  $\rho$ -мезона:

$$g_\rho \approx 6.14. \quad (1.31)$$

Таким образом, из распадов  $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$  и  $\rho \rightarrow 2\pi$  возникают два уравнения с двумя неизвестными, решая которые можно найти значения параметров  $m_u$  и  $\Lambda_4$ .

Константы четырехкварковых взаимодействий входят в выражения для масс мезонов. Константу  $G_1$  можно найти, используя экспериментально известную массу  $\pi$ -мезона, константу  $G_2$  можно получить по массе  $\rho$ -мезона, а массу  $s$ -кварка можно зафиксировать с использованием известной из эксперимента массы псевдоскалярного  $K$ -мезона.

Таким образом, стандартная модель Намбу–Иона–Лазино содержит небольшое количество модельных параметров: массы кварков, параметр обрезания интегралов по квартовым петлям и константы эффективного четырехкваркового взаимодействия в скалярном и псевдоскалярном, а также в векторном и аксиально-векторном секторе. Эти параметры фиксированы и остаются неизменными, что дает возможность последовательно получать предсказания для спектра масс мезонов и их взаимодействия друг с другом в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

## 1.2 Взаимодействие 'т Хофта

В модели НИЛ, основанной на симметрии  $U(3) \times U(3)$  возникает  $U_A(1)$ -проблема. Она заключается в том, что, используя лагранжиан, удовлетворяющий данной симметрии, мы получаем идеальное синглет-октетное смешивание для псевдоскалярных изоскалярных мезонов, при котором одно из состояний

содержит только  $u$ - и  $d$ -кварки, а другое — только  $s$ -кварк, что противоречит экспериментальным данным. Для преодоления этой проблемы в лагранжиан вводится взаимодействие 'т Хофта [55]. Для этого в скалярный и псевдоскалярный сектор исходного лагранжиана четырехкварткового взаимодействия (1.1) вводится шестиквартковый лагранжиан 'т Хофта:

$$\mathcal{L}_q(\bar{q}, q) = -K \left( \det [\bar{q} (1 + \gamma^5) q] + \det [\bar{q} (1 - \gamma^5) q] \right), \quad (1.32)$$

где  $K$  — константа взаимодействия 'т Хофта.

Если рассматривать только диагональные члены, то вклад от взаимодействия 'т Хофта мал по сравнению с вкладом от четырехкварткового взаимодействия НИЛ. Но недиагональные члены, содержащиеся во взаимодействии 'т Хофта, обеспечивают смешивание  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварков и необходимы для правильного описания масс мезонов  $\eta$  и  $\eta'$  (958). Поэтому в шестиквартковом взаимодействии 'т Хофта достаточно оставить только кварк-антикварковые пары. Тогда скалярный и псевдоскалярный сектор кваркового лагранжиана принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q(\bar{q}, q) = & \bar{q}(x)(i\hat{\partial}_x - \tilde{m}_0)q(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^7 \left[ G_i^- (\bar{q}\lambda_i q)^2 + G_i^+ (\bar{q}i\gamma^5\lambda_i q)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ G_u^- (\bar{q}\lambda_u q)^2 + G_s^- (\bar{q}\lambda_s q)^2 + G_u^+ (\bar{q}i\gamma^5\lambda_u q)^2 + G_s^+ (\bar{q}i\gamma^5\lambda_s q)^2 \right] \\ & + G_{us}^- (\bar{q}\lambda_u q)(\bar{q}\lambda_s q) + G_{us}^+ (\bar{q}i\gamma^5\lambda_u q)(\bar{q}i\gamma^5\lambda_s q), \end{aligned} \quad (1.33)$$

где

$$\begin{aligned} G_1^\pm &= G_2^\pm = G_3^\pm = G \pm 4Km_s I_1(m_s), \\ G_4^\pm &= G_5^\pm = G_6^\pm = G_7^\pm = G_1 \pm 4Km_u I_1(m_u), \\ G_u^\pm &= G_1 \mp 4Km_s I_1(m_s), \quad G_s^\pm = G_1, \\ G_{us}^\pm &= \pm 4\sqrt{2}Km_u I_1(m_u). \end{aligned} \quad (1.34)$$

При этом модифицировались массы токовых кварков:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{u0} &= m_{u0} - 32m_u m_s K I_1(m_u) I_1(m_s), \\ \tilde{m}_{s0} &= m_{s0} - 32K (m_u I_1(m_u))^2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Тогда массы составляющих кварков:

$$\begin{aligned} m_u &= m_{u0} + 8m_u G_1 I_1(m_u) + 32m_u m_s K I_1(m_u) I_1(m_s), \\ m_s &= m_{s0} + 8m_s G_1 I_1(m_s) + 32K (m_u I_1(m_u))^2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Учет взаимодействия 'т Хофта приводит к дополнительному нарушению киральной симметрии из-за изменения скалярных и псевдоскалярных четырехкварковых констант. При этом модификация масс составляющих кварков и четырехкварковых констант связи не превышает 10 %. [41].

Смешивание мезонов  $\eta$  и  $\eta'$ (958), обусловленное взаимодействием 'т Хофта, приводит к появлению в лагранжиане дополнительных недиагональных слагаемых. За счет диагонализации в лагранжиане возникает дополнительный параметр — угол смешивания  $\theta = 19^\circ$  [31].

В результате учета взаимодействия 'т Хофта в модели Намбу–Иона–Лазинио к параметрам, перечисленным в конце предыдущего параграфа, добавляется константа взаимодействия 'т Хофта. Она также зафиксирована при построении модели с помощью масс мезонов  $\eta$  и  $\eta'$ (958) и не меняется при рассмотрении конкретных процессов. Таким образом в стандартной модели Намбу–Иона–Лазинио содержится шесть основных параметров. Они определяются с помощью параметров, известных из экспериментов: константы распада пиона  $F_\pi$ , константы распада  $\rho$ -мезона, масс пиона, каона,  $\rho$ -мезона и разницы масс мезонов  $\eta$  и  $\eta'$ (958).

### 1.3 Расширенная модель НИЛ

Расширенная модель Намбу–Иона–Лазинио была сформулирована в работах [37, 38, 39, 40, 41].

В стандартной модели НИЛ невозможно описать радиальные возбуждения мезонов. Для того чтобы учесть первые радиально-возбужденные мезонные состояния, в лагранжиан вводятся формфакторы, обеспечивающие нелокальность. Тогда лагранжиан, описывающий четырехкварковые взаимодействия,

принимает вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_q(\bar{q}, q) = & \int d^4x \left\{ \bar{q}(x)(i\hat{\partial}_x - m_0)q(x) \right. \\ & + \sum_{a=0}^8 \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{G_1}{2} [j_{S,i}^a(x)j_{S,i}^a(x) + j_{P,i}^a(x)j_{P,i}^a(x)] \right. \\ & \left. \left. - \frac{G_2}{2} [j_{V,i}^{a,\mu}(x)j_{V,i}^{a,\mu}(x) + j_{A,i}^{a,\mu}(x)j_{A,i}^{a,\mu}(x)] \right] \right\},\end{aligned}\quad (1.37)$$

где  $m_0$  — матрица масс токовых夸克ов,  $j(x)$  —夸克-анти夸ковые токи, которые в расширенной модели НИЛ принимают форму:

$$\begin{aligned}j_{S,i}^a(x) &= \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{q}(x_1) F_{S,i}^a(x; x_1, x_2) q(x_2), \\ j_{P,i}^a(x) &= \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{q}(x_1) F_{P,i}^a(x; x_1, x_2) q(x_2), \\ j_{V,i}^{a,\mu}(x) &= \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{q}(x_1) F_{V,i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2) q(x_2), \\ j_{A,i}^{a,\mu}(x) &= \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{q}(x_1) F_{A,i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2) q(x_2),\end{aligned}\quad (1.38)$$

$F_{S,i}^a(x; x_1, x_2)$ ,  $F_{P,i}^a(x; x_1, x_2)$ ,  $F_{V,i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2)$  и  $F_{A,i}^{a,\mu}(x; x_1, x_2)$  — скалярные, псевдоскалярные, векторные и аксиально-векторные夸克овые вершины. Эти вершины удобнее представить в импульсном пространстве:

$$\begin{aligned}F(x; x_1, x_2) = & \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp \frac{i}{2} [(P+k)(x-x_1) \\ & +(P-k)(x-x_2)] F(k, P),\end{aligned}\quad (1.39)$$

где  $P$  — полный импульс мезона,  $k$  — относительный импульс夸克ов в мезоне. Функции  $F(k, P)$  в импульсном пространстве могут быть выбраны в виде:

$$\begin{aligned}F_{S,i}^a(k, P) &= \lambda^a f_i^a(k_\perp), \quad F_{P,i}^a(k, P) = i\gamma^5 \lambda^a f_i^a(k_\perp), \\ F_{V,i}^{a,\mu}(k, P) &= \gamma^\mu \lambda^a f_i^a(k_\perp), \quad F_{A,i}^{a,\mu}(k, P) = \gamma^\mu \gamma^5 \lambda^a f_i^a(k_\perp),\end{aligned}\quad (1.40)$$

где  $f(k_\perp)$  — формфакторы, имеющие вид полинома второй степени по поперечному импульсу夸克ов в мезоне:

$$f_1^a(k_\perp) = 1, \quad f_2^a(k_\perp) = c^a (1 + d_a k_\perp^2). \quad (1.41)$$

$f_1^a(k_\perp)$  соответствуют основным состояниям,  $f_2^a(k_\perp)$  соответствуют первым радиальным возбуждениям.

Эти формфакторы зависят от поперечного относительного импульса кварков:

$$k_{\perp} = k - \frac{(P, k)}{P^2} P. \quad (1.42)$$

В системе покоя мезона этот импульс приобретает вид  $k_{\perp} = \{0, \vec{k}\}$ . Поэтому он может быть выбран трехмерным, т.е. формфакторы, обеспечивающие нелокальность, зависят от трехмерного импульса.

В результате бозонизации кварк-мезонный лагранжиан принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{q}, q, \sigma', \pi, V, A) &= \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{q}(x_1) \left[ \left( i\hat{\partial}_{x_2} - m_0 \right) \delta(x_1 - x_2) \right. \\ &\quad \int d^4x \sum_{a=0}^8 \sum_{i=1}^2 \left( \sigma_i'^a(x) F_{\sigma',i}^a(x, x_1, x_2) \right. \\ &\quad \left. + \pi_i^a(x) F_{\pi,i}^a(x, x_1, x_2) + V_i^{a,\mu}(x) F_{V,i}^{a,\mu}(x, x_1, x_2) \right. \\ &\quad \left. + A_i^{a,\mu}(x) F_{A,i}^{a,\mu}(x, x_1, x_2) \right] q(x_2) \\ &\quad - \int d^4x \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{2G_1} (\sigma_i^{a2}(x) + \pi_i^{a2}(x)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2G_2} (V_i^{a,\mu 2}(x) + A_i^{a,\mu 2}(x)) \right]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

В результате интегрирования по кварковым полям возникает эффективный мезонный лагранжиан, содержащий скалярные, псевдоскалярные, векторные и аксиально-векторные мезонные поля в основном и первом радиально-возбужденном состоянии:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\sigma, \pi, V, A) &= -\frac{1}{2G_1} (\sigma_{a,1}^2 + \pi_{a,1}^2 + \sigma_{a,2}^2 + \pi_{a,2}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2G_2} (V_{a,\mu,1}^2 + A_{a,\mu,1}^2 + V_{a,\mu,2}^2 + A_{a,\mu,2}^2) \\ &\quad - iN_c \text{Tr} \log \left[ i\hat{\partial} - m_0 + (\sigma_{a,1} + i\gamma^5 \pi_{a,1} \right. \\ &\quad \left. + \gamma^\mu V_{a,\mu,1} + \gamma^5 \gamma^\mu A_{a,\mu,1} + (\sigma_{a,2} + i\gamma^5 \pi_{a,2}) f_a^s \right. \\ &\quad \left. + (\gamma^\mu V_{a,\mu,2} + \gamma^5 \gamma^\mu A_{a,\mu,2}) f_a^V \right] \lambda^a \right]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Индексом 1 обозначены основные состояния мезонов, индексом 2 — первые радиальные возбуждения.

Как и в случае стандартной модели НИЛ, здесь возникают одновершинные кварковые петли для скалярных полей, интегралы по которым отличны от нуля. Переопределение скалярных полей приводит к перестройке вакуума и переходе масс токовых夸克ов в массы составляющих夸克ов. Такое спонтанное нарушение симметрии также описывается уравнением щели (1.8). Из этого уравнения образуются соотношения вида:

$$\begin{aligned} -iN_c \text{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\theta(\vec{k}^2 - \Lambda_3^2)}{\hat{k} - m_0 + \langle \sigma'_1 \rangle_0 + \langle \sigma'_2 \rangle_0 f_2(\vec{k})} - \frac{\langle \sigma'_1 \rangle_0}{G_1} &= 0, \\ -iN_c \text{Tr} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f_2(\vec{k}) \theta(\vec{k}^2 - \Lambda_3^2)}{\hat{k} - m_0 + \langle \sigma'_1 \rangle_0 + \langle \sigma'_2 \rangle_0 f_2(\vec{k})} - \frac{\langle \sigma'_2 \rangle_0}{G_1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

В общем случае  $\langle \sigma'_2 \rangle_0 \neq 0$ . Тогда масса составляющего夸克а зависит от импульса:

$$m = m_0 - \langle \sigma'_1 \rangle_0 - \langle \sigma'_2 \rangle_0 f_2(\vec{k}). \quad (1.46)$$

Для устранения этой зависимости необходимо потребовать, чтобы выполнялись условия:

$$I_1^{f_{uu}}(m_u) = 0, \quad I_1^{f_{us}}(m_u) + I_1^{f_{us}}(m_s) = 0, \quad I_1^{f_{ss}}(m_s) = 0, \quad (1.47)$$

где

$$I_1^f(m_i) = -iN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{f(\vec{k})}{m_i^2 - k^2} \theta(\vec{k}^2 - \Lambda_3^2). \quad (1.48)$$

Тогда из второго уравнения в (1.45) возникает условие  $\langle \sigma'_2 \rangle_0 = 0$ , из которого следует, что

$$m = m_0 - \langle \sigma'_1 \rangle_0. \quad (1.49)$$

Т.е. соотношение для масс составляющих夸克ов остается таким же, как и в стандартной модели НИЛ.

Из требования выполнения условий (1.47) однозначно фиксируется параметр наклона  $d$ , входящий в определения формфактора. Т.е. параметр наклона определяется из требования того, чтобы введение формфактора не искажало вакуумный конденсат и, следовательно, не влияло на массы составляющих夸克ов.

Численное значение этого параметра наклона зависит только от кваркового состава соответствующего мезона:

$$d_{uu} = -1.784 \text{ГэВ}^{-2}, \quad d_{us} = -1.761 \text{ГэВ}^{-2}, \\ d_{ss} = -1.737 \text{ГэВ}^{-2}. \quad (1.50)$$

В расширенной модели НИЛ в интегралах по кварковым петлям из-за наличия формфакторов, зависящих от трехмерного импульса, в качестве параметра обрезания используется величина  $\Lambda_3 = 1.03$  ГэВ.

Параметры  $c_S^a$ ,  $c_P^a$ ,  $c_V^a$  и  $c_A^a$ , входящие в определение формфактора, объединяются с константами четырехкваркового взаимодействия и определяются массами возбужденных состояний мезонов.

Учет различных кварковых петель приводит к перенормировке лагранжиана. В результате квадратичная часть лагранжиана для пионов и псевдоскалярных каонов принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pi^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ (P^2 - M_{\pi_1}^2) \pi_1^2 + 2R_\pi P^2 \pi_1 \pi_2 + (P^2 - M_{\pi_2}^2) \pi_2^2 \right] \\ \mathcal{L}_K^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ (P^2 - M_{K_1}^2 - \Delta^2) K_1^2 + 2R_K (P^2 - \Delta^2) K_1 K_2 \right. \\ &\quad \left. + (P^2 - M_{K_2}^2 - \Delta^2) K_2^2 \right], \end{aligned} \quad (1.51)$$

где

$$\begin{aligned} R_\pi &= \frac{I_2^{f_{uu}}(m_u, m_u)}{\sqrt{Z_\pi I_2(m_u, m_u) I_2^{f_{uu}^2}(m_u, m_u)}}, \\ R_K &= \frac{I_2^{f_{us}}(m_u, m_s)}{\sqrt{Z_K I_2(m_u, m_s) I_2^{f_{us}^2}(m_u, m_s)}}, \\ I_2^{f^n}(m_1, m_2) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{f^n(\vec{k})}{(m_1^2 - k^2)(m_2^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$\Delta = m_s - m_u$  — разница масс кварков,  $Z_\pi$  и  $Z_K$  — константы перенормировки, возникающие при учете переходов псевдоскалярного мезона в аксиально-векторный, мезонные поля с индексом 1 соответствуют основным мезонным состояниям, с индексом 2 — их первым радиальным возбуждениям.

Как видно, лагранжиан содержит недиагональные члены по основным и возбужденным мезонным полям. Диагонализация осуществляется преобразованием полей:

$$\begin{aligned}\pi &= \cos(\theta_\pi - \theta_\pi^0) \pi_1 - \cos(\theta_\pi + \theta_\pi^0) \pi_2, \\ \hat{\pi} &= \sin(\theta_\pi - \theta_\pi^0) \pi_1 - \sin(\theta_\pi + \theta_\pi^0) \pi_2, \\ K &= \cos(\theta_K - \theta_K^0) K_1 - \cos(\theta_K + \theta_K^0) K_2, \\ \hat{K} &= \sin(\theta_K - \theta_K^0) K_1 - \sin(\theta_K + \theta_K^0) K_2,\end{aligned}\quad (1.53)$$

где поля  $\pi$  и  $K$  — физические поля основных мезонных состояний,  $\hat{\pi}$  и  $\hat{K}$  — физические поля первых радиальных возбуждений мезонов.

В результате квадратичная часть диагонализованного лагранжиана для пионов и каонов принимает вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\pi^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - M_\pi^2) \pi^2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{\pi}}^2) \hat{\pi}^2, \\ \mathcal{L}_K^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - M_K^2) K^2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{K}}^2) \hat{K}^2.\end{aligned}\quad (1.54)$$

Параметр  $\theta$  — угол смешивания основных и возбужденных состояний мезона. Он выражается через массы соответствующих мезонов:

$$\tan(2\theta - \pi) = \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} \frac{M_1^2 - M_2^2}{M_1^2 + M_2^2}. \quad (1.55)$$

Параметр  $\theta^0$  вводится для удобства обозначений:

$$\sin(\theta^0) = \sqrt{\frac{1+R}{2}}. \quad (1.56)$$

Для скалярных мезонов  $a_0$  и  $K_0^*$  квадратичная часть перенормированного недиагонального лагранжиана имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{a_0}^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - 4m_u^2 - M_{a_{0,1}}^2) a_{0,1}^2 + R_{a_0} (P^2 - 4m_u^2) a_{0,1} a_{0,2} \\ &\quad + \frac{1}{2} (P^2 - 4m_u^2 - M_{a_{0,2}}^2) a_{0,2}^2, \\ \mathcal{L}_{K_0^*}^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - (m_u + m_s)^2 - M_{K_{0,1}^*}^2) K_{0,1}^{*2} \\ &\quad + R_{K_0^*} (P^2 - (m_u + m_s)^2) K_{0,1}^* K_{0,2}^* \\ &\quad + \frac{1}{2} (P^2 - (m_u + m_s)^2 - M_{K_{0,2}^*}^2) K_{0,2}^{*2},\end{aligned}\quad (1.57)$$

где

$$\begin{aligned} R_{a_0} &= \frac{I_2^{f_{uu}}(m_u, m_u)}{\sqrt{I_2(m_u, m_u) I_2^{f_{uu}^2}(m_u, m_u)}}, \\ R_{K_0^*} &= \frac{I_2^{f_{us}}(m_u, m_s)}{\sqrt{I_2(m_u, m_s) I_2^{f_{us}^2}(m_u, m_s)}}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Диагонализация осуществляется по формулам аналогичным (1.53). В результате квадратичная часть мезонного лагранжиана для полей  $a_0$  и  $K_0^*$  принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a_0}^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - M_{a_0}^2) a_0^2 + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{a}_0}^2) \hat{a}_0^2, \\ \mathcal{L}_{K_0^*}^{(2)} &= \frac{1}{2} (P^2 - M_{K_0^*}^2) K_0^{*2} + \frac{1}{2} (P^2 - M_{\hat{K}_0^*}^2) \hat{K}_0^{*2}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Квадратичная часть перенормированного недиагонального лагранжиана расширенной модели НИЛ для векторных мезонов  $\rho$ ,  $\phi$  и  $K^*$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\rho^{(2)} &= -\frac{1}{2} [(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\rho_1}^2) \rho_1^\mu \rho_1^\nu \\ &\quad 2R_\rho (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu) \rho_1^\mu \rho_1^\nu \\ &\quad (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\rho_2}^2) \rho_2^\mu \rho_2^\nu] \\ \mathcal{L}_\phi^{(2)} &= -\frac{1}{2} [(g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\phi_1}^2) \phi_1^\mu \phi_1^\nu \\ &\quad 2R_\phi (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu) \phi_1^\mu \phi_1^\nu \\ &\quad (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} M_{\phi_2}^2) \phi_2^\mu \phi_2^\nu] \\ \mathcal{L}_{K^*}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} \left( \frac{3}{2} \Delta^2 M_{K_1^*}^2 \right) \right) K_1^{*\mu} K_1^{*\nu} \right. \\ &\quad 2R_{K^*} \left( g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} \frac{3}{2} \Delta^2 \right) K_1^{*\mu} K_2^{*\nu} \\ &\quad \left. \left( g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - g^{\mu\nu} \left( \frac{3}{2} \Delta^2 M_{K_2^*}^2 \right) \right) K_2^{*\mu} K_2^{*\nu} \right], \end{aligned} \quad (1.60)$$

где  $R_\rho = R_{a_0}$ ,  $R_{K^*} = R_{K_0^*}$ ,

$$R_\phi = \frac{I_2^{f_{ss}}(m_s, m_s)}{\sqrt{I_2(m_s, m_s) I_2^{f_{ss}^2}(m_s, m_s)}}. \quad (1.61)$$

Диагонализация осуществляется по тем же формулам, что и в случае скалярных и псевдоскалярных мезонов (1.53).

Квадратичная часть диагонализованного мезонного лагранжиана для векторных полей  $\rho$ ,  $\phi$  и  $K^*$  принимает вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\rho^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_\rho^2) \rho^\mu \rho^\nu \right. \\ &\quad \left. + (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_{\hat{\rho}}^2) \hat{\rho}^\mu \hat{\rho}^\nu \right], \\ \mathcal{L}_\phi^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_\phi^2) \phi^\mu \phi^\nu \right. \\ &\quad \left. + (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_{\hat{\phi}}^2) \hat{\phi}^\mu \hat{\phi}^\nu \right], \\ \mathcal{L}_{K^*}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[ (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_{K^*}^2) K^{*\mu} K^{*\nu} \right. \\ &\quad \left. + (g^{\mu\nu} P^2 - P^\mu P^\nu - M_{\hat{K}^*}^2) \hat{K}^{*\mu} \hat{K}^{*\nu} \right].\end{aligned}\tag{1.62}$$

Взаимодействие 'т Хофта в расширенной модели НИЛ вводится также с помощью шестикваркового лагранжиана (1.32). Для его объединения с кварковым лагранжианом НИЛ производится одно спаривание кварковых полей всеми возможными способами. Тогда соответствующий лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L}_q = \frac{1}{2} \int d^4x \sum_{a=1}^9 \sum_{b=1}^9 \left[ G_{ab}^- j_{S,1}^a(x) j_{S,1}^b(x) + G_{ab}^+ j_{P,1}^a(x) j_{P,1}^b(x) \right],\tag{1.63}$$

где

$$\begin{aligned}G_{11}^\pm &= G_{22}^\pm = G_{33}^\pm = G_1 \pm 4Km_s I_1(m_s), \\ G_{44}^\pm &= G_{55}^\pm = G_{66}^\pm = G_{77}^\pm = G_1 \pm 4Km_u I_1(m_u), \\ G_{88}^\pm &= G_1 \mp 4Km_s I_1(m_s), \quad G_{99}^\pm = G_1, \\ G_{89}^\pm &= G_{98}^\pm = \pm 4\sqrt{2}Km_u I_1(m_u). \\ G_{ab} &= 0 (a \neq b, a, b = 1, \dots, 7).\end{aligned}\tag{1.64}$$

В расширенной модели НИЛ происходит смешивание основных и возбужденных мезонных состояний. Но за счет взаимодействия 'т Хофта происходит смешивание псевдоскалярных мезонов  $\eta$  и  $\eta'$ (958) и также их первых радиальных возбуждений  $\eta(1295)$  и  $\eta(1475)$ . Т.е. в расширенной модели НИЛ в псевдоскалярном секторе происходит смешивание четырех состояний  $\eta$ -мезона.

Кварк-мезонный лагранжиан взаимодействия для скалярных, псевдоска-

лярных, векторных и аксиально-векторных мезонных полей приобретает вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \bar{q} \left[ \left( a_M S + b_M \hat{S} \right) \lambda_M + i\gamma^5 \left( a_M P + b_M \hat{P} \right) \lambda_M \right. \\ & + \frac{1}{2} \gamma^\mu \left( a_M V_\mu + b_M \hat{V}_\mu \right) \lambda_M + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^5 \left( a_M A_\mu + b_M \hat{A}_\mu \right) \lambda_M \\ & \left. + i\gamma^5 \sum_{j=u,s} \lambda^j \sum_{\tilde{\eta}=\eta,\eta',\hat{\eta},\hat{\eta}'} c_{\tilde{\eta}}^j \tilde{\eta} \right] q,\end{aligned}\quad (1.65)$$

где  $S, P, V$  и  $A$  — скалярные, псевдоскалярные, векторные и аксиально-векторные мезонные поля,  $\lambda$  — матрицы, являющиеся линейными комбинациями матриц Гелл-Мана и обеспечивающие правильный кварковый состав мезонов,  $a, b$  и  $c$  — множители, определяющие взаимодействие мезонов с кварками. Они выражаются через параметры смешивания основных и возбужденных состояний мезонов и имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{\sin(2\theta^0)} \left[ g \sin(\theta + \theta^0) + g' f(\vec{k}^2) \sin(\theta - \theta^0) \right], \\ b &= \frac{-1}{\sin(2\theta^0)} \left[ g \cos(\theta + \theta^0) + g' f(\vec{k}^2) \cos(\theta - \theta^0) \right],\end{aligned}\quad (1.66)$$

где первая строчка определяет взаимодействие夸克ов с основными мезонными состояниями, а вторая — с возбужденными. Константы  $g'$  выражаются аналогично константам  $g$  в (1.12), но соответствующие интегралы содержат в числителе квадрат формфактора, и для псевдоскалярных полей константы  $g'$  не содержат множителя  $Z$ .

Множители  $c$ , определяющие взаимодействие夸克ов с  $\eta$ -мезонами имеют более сложную структуру.

Структура данного лагранжиана более подробно разобрана при рассмотрении конкретных процессов.

В лагранжиане (1.65) во всех его частях кроме посвященных  $\eta$ -мезонам предельный переход из расширенной к стандартной модели НИЛ осуществляется исключением из этого лагранжиана возбужденных состояний полей и последующим приравниванием углов  $\theta = \theta^0$ .

Таким образом, в расширенной модели НИЛ к указанным в предыдущих параграфах модельным параметрам добавляются величины  $c^a$  и углы смешива-

ния основных и возбужденных мезонных состояний, а также параметры смешивания четырех состояний  $\eta$ -мезонов. Но все эти параметры также были определены при построении модели на основе экспериментально известных масс возбужденных мезонных состояний. Т.е. модель Намбу–Иона–Лазинио содержит небольшое количество изначально произвольных параметров, которые зафиксированы один раз и остаются неизменными. При вычислении конкретных процессов модель НИЛ не требует введения каких-либо дополнительных произвольных параметров. Это повышает ее предсказательную силу и является ее главным преимуществом перед другими феноменологическими моделями.

## Глава 2

# Мезонные распады $\tau$ -лептона в модели НИЛ

Расширенная модель Намбу–Иона–Лазинио позволяет описывать мезонные распады  $\tau$ -лептона без введения дополнительных произвольных параметров. Такие процессы проходят с участием промежуточных  $W^\pm$ -бозонов, которые, в свою очередь, могут рождать заряженные промежуточные мезоны в основном и в радиально-возбужденных состояниях. Т.к. масса  $\tau$ -лептона равна 1777 МэВ, вторые и более высокие радиально-возбужденные состояния в этих процессах играют незначительную роль. Поэтому расширенная модель НИЛ, учитывая только основные состояния мезонов и их первые радиальные возбуждения, подходит для описания процессов мезонных распадов  $\tau$ -лептона.

### 2.1 Распад $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$

Этому процессу соответствуют диаграммы двух типов. В первой, контактной диаграмме, промежуточный  $W$ -бозон переходит через кварковый треугольник в конечные состояния. В диаграмме второго типа промежуточный  $W$ -бозон через кварковую петлю переходит в промежуточный мезон, который затем через кварковый треугольник распадается на конечные мезонные состояния. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 2.1, 2.2.

В этом процессе в конечных состояниях находятся псевдоскалярные ме-

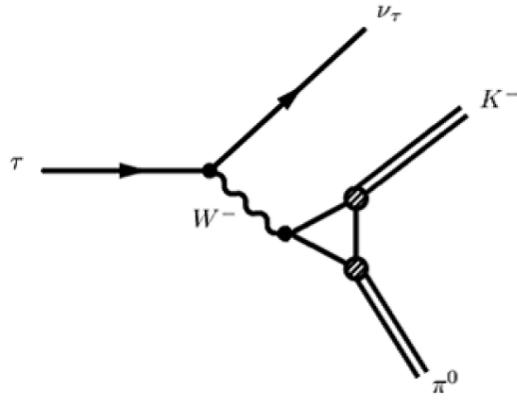


Рис. 2.1: Распад  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$  с промежуточным  $W$ -бозоном (контактная диаграмма).

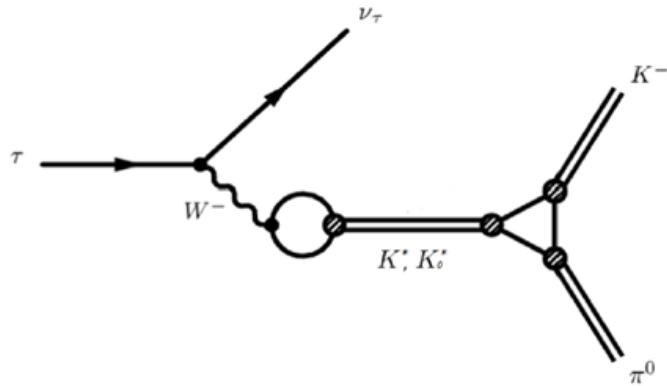


Рис. 2.2: Распад  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$  с промежуточным векторным  $K^*(892)$  и скалярным  $K_0^*(800)$  мезонами.

зоны. Следовательно, в промежуточном состоянии могут быть только векторный или скалярный мезон. Кроме того, в конечных состояниях находится один странный и один нестранный мезон. Поэтому в промежуточном мезонном состоянии могут быть только странные частицы. Но так как среди конечных мезонов один нейтральный, а другой — заряженный, то промежуточный мезон также должен быть заряженным. Исходя из всего этого, в данном процессе в качестве промежуточных рассматриваются векторный и скалярный мезоны  $K^{*-}(892)$  и  $K_0^{*-}(800)$ .

Порог рождения конечных мезонов в этом процессе расположен ниже массы мезона  $K^*(892)$ . Поэтому вклад от диаграммы с промежуточным возбужденным векторным мезоном  $K^*(1410)$  пренебрежимо мал по сравнению с вкладом от диаграммы с этим мезоном в основном его состоянии. Скалярные же мезоны

дают меньший вклад, чем векторные. Следовательно, вкладом в процесс от возбужденных состояний можно пренебречь, и при вычислении данного распада достаточно ограничиться использованием стандартной модели НИЛ.

Кварк-мезонный лагранжиан взаимодействия стандартной модели НИЛ, содержащий скалярный мезон  $K_0^*(800)$ , псевдоскалярные мезоны  $\pi, K$  и векторный мезон  $K^*(892)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(\bar{q}, q, K_0^*, \pi^0, K, K^*) = & \bar{q} \left[ g_{K_0^*} \sum_{j=\pm} \lambda_j^K K_0^{*j} + ig_\pi \gamma^5 \lambda_3 \pi^0 \right. \\ & \left. + ig_K \sum_{j=\pm} \gamma^5 \lambda_j^K K^j + \frac{g_{K^*}}{2} \sum_{j=\pm} \gamma^\mu \lambda_j^K K_\mu^{*j} \right] q, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $q$  и  $\bar{q}$  — триплеты  $u$ --,  $d$ - и  $s$ -составляющих夸克ов с массами  $m_u = m_d = 280$  МэВ,  $m_s = 420$  МэВ [40, 56],  $K_0^{*\pm}, \pi^0, K^\pm$  и  $K^{*\pm}$  — скалярные, псевдоскалярные и векторные мезонные поля.

Матрицы  $\lambda$  — линейные комбинации матриц Гелл-Мана, вырезающие из кварковых триплетов нужные кварки для соответствующего мезона:

$$\begin{aligned} \lambda_+^K &= \frac{\lambda_4 + i\lambda_5}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_-^K &= \frac{\lambda_4 - i\lambda_5}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\lambda_3, \lambda_4$  и  $\lambda_5$  — матрицы Гелл-Мана.

Константы связи:

$$\begin{aligned} g_{K_0^*} &= \sqrt{\frac{1}{4I_2(m_u, m_s)}} \approx 2.78, \\ g_\pi &= \sqrt{\frac{Z_\pi}{4I_2(m_u, m_u)}} \approx 3.02, \\ g_K &= \sqrt{\frac{Z_K}{4I_2(m_u, m_s)}} \approx 3.77, \\ g_{K^*} &= \sqrt{\frac{3}{2I_2(m_u, m_s)}} \approx 6.81, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $Z_\pi$  — параметр перенормировки, возникающий в модели при учете  $\pi - a_1(1260)$  переходов:

$$Z_\pi = \left(1 - 6 \frac{m_u^2}{M_{a_1}^2}\right)^{-1} \approx 1.45, \quad (2.4)$$

$Z_K$  — параметр перенормировки, возникающий в модели при учете  $K - K_1(1270)$  переходов:

$$Z_K = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{(m_u + m_s)^2}{M_{K_1}^2}\right)^{-1} \approx 1.83, \quad (2.5)$$

$M_{a_1} = 1230$  МэВ,  $M_{K_1} = 1272$  МэВ — массы аксиально-векторных мезонов  $a_1(1260)$  и  $K_1(1270)$  [57].

Интегралы  $I_2$ , входящие в определение констант связи, имеют вид, представленный в (1.11).

Кроме того, для вычисления данного процесса понадобится фрагмент лагранжиана электрослабой теории Салама-Вайнберга:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{weak} = & \frac{M_W \sqrt{G_F}}{2^{\frac{1}{4}}} W_\mu^+ [\bar{\nu}_\tau \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \tau] \\ & + \frac{M_W \sqrt{G_F}}{2^{\frac{1}{4}}} W_\mu^- [\bar{\tau} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_\tau] \\ & + \frac{M_W \sqrt{G_F}}{2^{\frac{1}{4}}} W_\mu^+ V_{us} [\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) s] \\ & + \frac{M_W \sqrt{G_F}}{2^{\frac{1}{4}}} W_\mu^- V_{us} [\bar{s} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $M_W$  — масса  $W$ -бозона,  $G_F = 1.16637 \cdot 10^{-11}$  МэВ $^{-2}$  — константа Ферми,  $V_{us} = 0.2252$  — элемент матрицы Кабибо-Кобаяши-Маскавы.

В интегралах, возникающих в кварковых петлях, производится разложение знаменателей по степеням импульса и удерживаются только логарифмически расходящиеся члены, что необходимо для сохранения приближенной киральной симметрии.

В векторном канале в кварковой петле перехода  $W$ -бозона в промежуточный векторный мезон  $K^*(892)$  возникает интеграл

$$3 \int \frac{Tr \left\{ \gamma^\mu \left[ \hat{k} + \frac{\hat{q}}{2} + m_s \right] \gamma^\nu \left[ \hat{k} - \frac{\hat{q}}{2} + m_u \right] \right\}}{\left[ \left( k + \frac{q}{2} \right)^2 - m_s^2 \right] \left[ \left( k - \frac{q}{2} \right)^2 - m_u^2 \right]} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

$$= i \frac{2}{g_{K^*}^2} \left\{ g_{\mu\nu} \left[ q^2 - \frac{3}{2}(m_s - m_u)^2 \right] - q_\mu q_\nu \right\}. \quad (2.7)$$

Интеграл, возникающий в кварковом треугольнике перехода  $W$ -бозона или векторного мезона  $K^*(892)$  в конечные состояния, имеет вид:

$$\begin{aligned} & 3 \int \frac{\text{Tr} \left\{ \gamma^5 [\hat{k} + p_K^* + m_s] \gamma^\nu [\hat{k} - p_\pi + m_u] \gamma^5 [\hat{k} + m_u] \right\}}{[(k + p_K)^2 - m_s^2] [(k - p_\pi)^2 - m_u^2] [k^2 - m_u^2]} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ & = -i \frac{Z_K}{2g_K^2} (p_K - p_\pi)^\nu. \end{aligned} \quad (2.8)$$

С использованием указанных выше лагранжианов была получена амплитуда для векторного канала процесса распада  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$ , которая имеет вид:

$$\begin{aligned} T_V = & -\frac{i}{2} G_F V_{us} Z_K \frac{g_\pi}{g_K} l^\mu \\ & \times \left\{ g_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu} [q^2 - \frac{3}{2}(m_s - m_u)^2] - q_\mu q_\nu}{M_{K^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_{K^*}} \right\} (p_K - p_\pi)^\nu, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $l^\mu = \bar{\nu}_\tau \gamma^\mu \tau$  — векторная часть лептонного тока,  $q = p_K + p_\pi$  — суммарный импульс конечных мезонов,  $M_{K^*} = 896 \pm 0.8$  МэВ и  $\Gamma_{K^*} = 46.2 \pm 1.3$  МэВ — масса и полная ширина распада векторного мезона соответственно [57].

Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует диаграмме с промежуточным  $W$ -бозоном, второе слагаемое — диаграмме с промежуточным векторным  $K^*(892)$  мезоном.

Расходящиеся интегралы, возникающие в кварковых петлях, как и остальные расходящиеся интегралы стандартной модели НИЛ регуляризуются обрезанием с параметром  $\Lambda_4 = 1.25$  ГэВ.

Тензорная структура в числителе второго слагаемого

$$g_{\mu\nu} \left[ q^2 - \frac{3}{2}(m_s - m_u)^2 \right] - q_\mu q_\nu, \quad (2.10)$$

образующаяся из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточный векторный мезон не является градиентно-инвариантной лишь на величину, пропорциональную квадрату разности масс夸克ов, из которых состоит промежуточный мезон.

Сами промежуточные мезоны при вычислении подобных процессов в модели НИЛ описываются пропагаторами Брейта-Вигнера.

Интеграл, который появляется в кварковой петле перехода  $W$ -бозона в промежуточный скалярный мезон  $K_0^*(800)$  принимает вид:

$$\begin{aligned} & 3 \int \frac{\text{Tr} \left\{ \left[ \hat{k} + \frac{\hat{q}}{2} + m_s \right] \gamma^\nu \left[ \hat{k} - \frac{\hat{q}}{2} + m_u \right] \right\}}{\left[ \left( k + \frac{q}{2} \right)^2 - m_s^2 \right] \left[ \left( k - \frac{q}{2} \right)^2 - m_u^2 \right]} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ & = -i \frac{(m_s - m_u)}{2g_{K_0^*}^2} q^\nu. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В кварковом треугольнике перехода промежуточного скалярного мезона  $K_0^*(800)$  в конечные состояния возникает интеграл вида

$$\begin{aligned} & 3 \int \frac{\text{Tr} \left\{ \gamma^5 \left[ \hat{k} + p_K + m_s \right] \left[ \hat{k} - p_\pi + m_u \right] \gamma^5 \left[ \hat{k} + m_u \right] \right\}}{\left[ \left( k + p_K \right)^2 - m_s^2 \right] \left[ \left( k - p_\pi \right)^2 - m_u^2 \right] \left[ k^2 - m_u^2 \right]} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\ & = -i \frac{Z_K}{g_K^2} m_s. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Амплитуда, описывающая процесс  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$ , для скалярного канала принимает вид:

$$T_S = -\frac{i}{2} G_F V_{us} Z_K \frac{g_\pi}{g_K} l^\mu \frac{2m_s(m_s - m_u)}{M_{K_0^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_{K_0^*}} q_\mu, \quad (2.13)$$

где  $M_{K_0^*} = 682 \pm 29$  МэВ,  $\Gamma_{K_0^*} = 547 \pm 24$  МэВ — масса и полная ширина скалярного мезона  $K_0^*(800)$  соответственно [57].

В скалярном канале из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточный скалярный мезон возникает разность масс夸克ов  $m_s - m_u$ , из которых этот мезон состоит. Множитель  $m_s$  появляется из кваркового треугольника перехода промежуточного скалярного мезона в конечные состояния.

Дифференциальную ширину распада можно получить с помощью квадрата модуля амплитуды по известным правилам:

$$\frac{d\Gamma}{d^3 p_{(\nu)} d^3 p_K d^3 p_\pi} = \frac{1}{2^9 \pi^5 \varepsilon_\tau \varepsilon_\pi \varepsilon_K \varepsilon_\nu} |T_V + T_S|^2 \delta(p_\tau - p_K - p_\pi - p_{(\nu)}), \quad (2.14)$$

Вычисляя квадрат модуля амплитуды процесса и производя интегрирование по импульсам конечных состояний в том числе с использованием методов

компьютерных вычислений, можно получить полную ширину данного рассматриваемого распада.

Вычисление квадрата модуля амплитуды было выполнено без учета поляризационных эффектов  $\tau$ -лептона. Т.е. по его поляризациям производилось усреднение:

$$u_\tau \bar{u}_\tau \rightarrow \frac{1}{2} [(p_\tau \gamma) + m_\tau], \quad (2.15)$$

Парциальная ширина распада  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$ , полученная таким образом, для векторного канала:

$$\text{Br}(\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau)_V = 4.14 \cdot 10^{-3}. \quad (2.16)$$

Для скалярного канала:

$$\text{Br}(\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau)_S = 0.02 \cdot 10^{-3}. \quad (2.17)$$

Полная парциальная ширина для процесса  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$ :

$$\text{Br}(\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau)_{tot} = 4.13 \cdot 10^{-3}. \quad (2.18)$$

Экспериментальные значения для парциальной ширины этого процесса :

$$\begin{aligned} \text{Br}(\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau)_{exp} &= (4.29 \pm 0.15) \cdot 10^{-3} [57], \\ \text{Br}(\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau)_{exp} &= (4.16 \pm 0.21) \cdot 10^{-3} [58] \end{aligned} \quad (2.19)$$

График зависимости дифференциальной ширины этого распада от инвариантной массы конечных мезонов приведен на рис. 2.3. Сплошная линия описывает теоретическую дифференциальную ширину, точки соответствуют экспериментальным значениям [58].

Как видно из полученных результатов, векторный канал в процессе  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$  играет определяющую роль. При этом главный вклад в процесс дает диаграмма с промежуточными векторным мезоном  $K^*(892)$ . Подпроцесс с промежуточным скалярным мезоном  $K_0^*(800)$  незначительно влияет на результат,

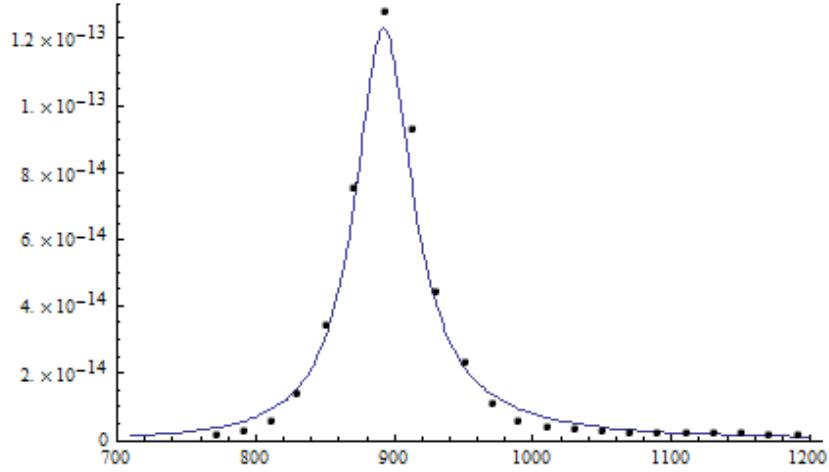


Рис. 2.3: Зависимость дифференциальной ширины распада  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  от инвариантной массы.

полученный от диаграмм векторного канала. Эти результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными несмотря на то, что при расчетах не использовались какие-либо дополнительные произвольные параметры.

Модель схожая с моделью НИЛ рассматривалась в работе [59]. Однако там для описания перехода  $W$ -бозона в промежуточный вектонный мезон  $K^*(892)$  использовался метод векторной доминантности. Поэтому результаты этой работы находятся только в качественном согласии с экспериментальными данными. Тем не менее, оценка вклада скалярного канала соответствует нашим результатам.

В других теоретических работах [2, 6, 7, 8] для исследования процесса распада  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  использовались модели близкие к моделям киральной теории возмущений. Результаты, полученные в настоящей диссертационной работе, находятся в качественном согласии с результатами других теоретических работ.

Эти результаты были опубликованы в работе [A1].

## 2.2 Распад $\tau \rightarrow K^-(\eta, \eta'(958))\nu_\tau$

Диаграммы, соответствующие процессу  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$ , приведены на рис. 2.4, 2.5.

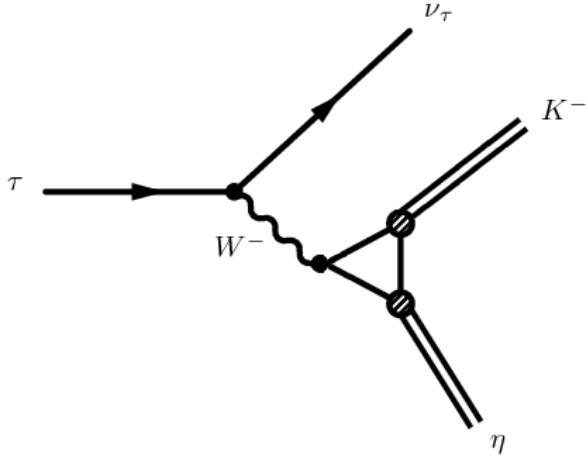


Рис. 2.4: Распад  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  с промежуточным  $W$ -бозоном (контактная диаграмма).

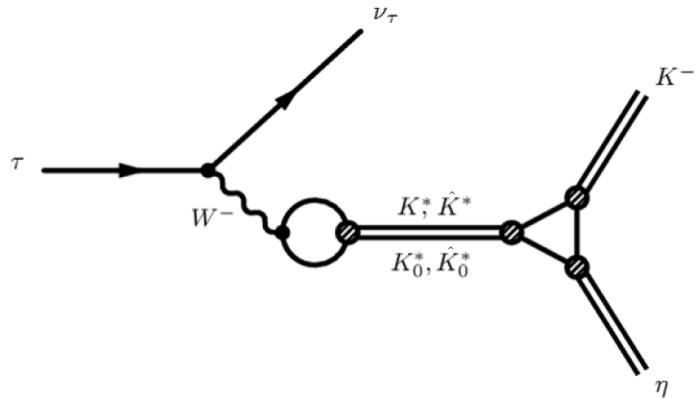


Рис. 2.5: Распад  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  с промежуточными векторными  $K^*(892)$  и  $K^*(1410)$  и скалярными  $K_0^*(800)$  и  $K_0^*(1430)$  мезонами.

Как и в предыдущем примере, в конечных состояниях находятся заряженный и нейтральный псевдоскалярные мезоны. Поэтому в качестве промежуточных могут выступать только векторные и скалярные заряженные мезоны. Один из конечных мезонов странный, другой — нет, следовательно, промежуточный мезон должен быть странным. Т.е., как и в предыдущем случае, данный процесс будет проходить с промежуточными векторным и скалярным мезонами  $K^*$  и  $K_0^*$ .

Однако в данном примере порог рождения мезонов находится выше массы мезона  $K^*(892)$ . Поэтому вклад от диаграммы с участием этого мезона будет играть меньшую роль, чем в процессе  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ . Следовательно, при вычислении процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  пренебречь возбужденными состояниями нельзя и необходимо использовать расширенную модель НИЛ.

Кварк-мезонный лагранжиан взаимодействия расширенной модели НИЛ, содержащий скалярные мезоны  $K_0^*(800)$  и  $K_0^*(1430)$ , псевдоскалярные мезоны  $K, \eta$  и векторные мезоны  $K^*(892)$  и  $K^*(1410)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(\bar{q}, q, \eta, \eta' K, K_0^*, K^*) = & \bar{q} \left[ \sum_{j=\pm} \lambda_j^K (a_{K_0^*} K_0^{*j} + b_{K_0^*} \hat{K}_0^{*j}) \right. \\ & + i\gamma^5 \sum_{j=\pm} \lambda_j^K (a_K K^j + b_K \hat{K}^j) \\ & + \frac{1}{2} \gamma^\mu \sum_{j=\pm} \lambda_j^{K^*} (a_{K^*} K_\mu^{*j} + b_{K^*} \hat{K}_\mu^{*j}) \\ & \left. + i\gamma^5 \sum_{j=u,s} \lambda_j \sum_{\tilde{\eta}=\eta,\eta',\hat{\eta},\hat{\eta}'} c_{\tilde{\eta}}^j \tilde{\eta} \right] q, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $K_0^{*\pm}$ ,  $\eta, \eta'$ ,  $K^\pm$  и  $K^{*\pm}$  — скалярные, псевдоскалярные и векторные мезонные поля, возбужденные состояния обозначены шляпкой.

Множители  $a$  и  $b$  в кварк-мезонных вершинах возникли в расширенной модели НИЛ в результате смешивания основных и возбужденных состояний. Они определяют взаимодействия соответствующих мезонов с кварками.

$$\begin{aligned} a_{K_0^*} &= \frac{1}{\sin(2\theta_{K_0^*}^0)} \left[ g_{K_0^*} \sin(\theta_{K_0^*} + \theta_{K_0^*}^0) + g'_{K_0^*} f_{us}(\vec{k}^2) \sin(\theta_{K_0^*} - \theta_{K_0^*}^0) \right], \\ a_K &= \frac{1}{\sin(2\theta_K^0)} \left[ g_K \sin(\theta_K + \theta_K^0) + g'_K f_{us}(\vec{k}^2) \sin(\theta_K - \theta_K^0) \right], \\ a_{K^*} &= \frac{1}{\sin(2\theta_{K^*}^0)} \left[ g_{K^*} \sin(\theta_{K^*} + \theta_{K^*}^0) + g'_{K^*} f_{us}(\vec{k}^2) \sin(\theta_{K^*} - \theta_{K^*}^0) \right], \\ b_{K_0^*} &= \frac{-1}{\sin(2\theta_{K_0^*}^0)} \left[ g_{K_0^*} \cos(\theta_{K_0^*} + \theta_{K_0^*}^0) + g'_{K_0^*} f_{us}(\vec{k}^2) \cos(\theta_{K_0^*} - \theta_{K_0^*}^0) \right], \\ b_K &= \frac{-1}{\sin(2\theta_K^0)} \left[ g_K \cos(\theta_K + \theta_K^0) + g'_K f_{us}(\vec{k}^2) \cos(\theta_K - \theta_K^0) \right], \\ b_{K^*} &= \frac{-1}{\sin(2\theta_{K^*}^0)} \left[ g_{K^*} \cos(\theta_{K^*} + \theta_{K^*}^0) + g'_{K^*} f_{us}(\vec{k}^2) \cos(\theta_{K^*} - \theta_{K^*}^0) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\theta$  — углы смещивания основных и возбужденных состояний. Они определяются в расширенной модели НИЛ с помощью масс соответствующих мезонов:

$$\begin{aligned}\theta_K &= 58.11^\circ, \quad \theta_{K_0^*} = 74^\circ, \quad \theta_{K^*} = 84.74^\circ, \\ \theta_K^0 &= 55.52^\circ, \quad \theta_{K_0^*}^0 = 60^\circ, \quad \theta_{K^*}^0 = 59.56^\circ.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Константы  $g_{K_0^*}$ ,  $g_K$  и  $g_{K^*}$  приведены в (2.3). Константы  $g'_{K_0^*}$ ,  $g'_K$  и  $g'_{K^*}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}g'_{K_0^*} &= \sqrt{\frac{1}{4I_2^{f_{us}^2}(m_u, m_s)}} \approx 4.69, \\ g'_K &= \sqrt{\frac{1}{4I_2^{f_{us}^2}(m_u, m_s)}} \approx 4.69, \\ g'_{K^*} &= \sqrt{\frac{3}{2I_2^{f_{us}^2}(m_u, m_s)}} \approx 11.49,\end{aligned}\tag{2.23}$$

где интегралы  $I_2^{f^n}$  приведены в (1.52).

Последнее слагаемое в лагранжиане, содержащее  $\eta$ -мезоны, имеет структуру, отличную от остальных слагаемых. Это связано с тем, что благодаря взаимодействию 'т Хофта, описанному в первой главе настоящей диссертационной работы, в расширенной модели НИЛ происходит смещивание четырех состояний  $\eta$ -мезона:  $\eta$ ,  $\eta'(958)$ ,  $\eta(1295)$  и  $\eta(1475)$ , последние два из которых являются первыми радиальными возбуждениями первых двух. Здесь взаимодействие  $\eta$ -мезонов с кварками определяется величинами  $c$ , имеющими следующий вид:

$$\begin{aligned}c_\eta^u &= g_1^u b_{\eta 1}^u + g_2^u f_{uu}(\vec{k}^2) b_{\eta 2}^u, \\ c_{\eta'}^u &= g_1^u b_{\eta' 1}^u + g_2^u f_{uu}(\vec{k}^2) b_{\eta' 2}^u, \\ c_{\hat{\eta}}^u &= g_1^u b_{\hat{\eta} 1}^u + g_2^u f_{uu}(\vec{k}^2) b_{\hat{\eta} 2}^u, \\ c_{\hat{\eta}'}^u &= g_1^u b_{\hat{\eta}' 1}^j + g_2^u f_{uu}(\vec{k}^2) b_{\hat{\eta}' 2}^u, \\ c_\eta^s &= g_1^s b_{\eta 1}^s + g_2^s f_{ss}(\vec{k}^2) b_{\eta 2}^s, \\ c_{\eta'}^s &= g_1^s b_{\eta' 1}^s + g_2^s f_{ss}(\vec{k}^2) b_{\eta' 2}^s, \\ c_{\hat{\eta}}^s &= g_1^s b_{\hat{\eta} 1}^s + g_2^s f_{ss}(\vec{k}^2) b_{\hat{\eta} 2}^s, \\ c_{\hat{\eta}'}^s &= g_1^s b_{\hat{\eta}' 1}^s + g_2^s f_{ss}(\vec{k}^2) b_{\hat{\eta}' 2}^s,\end{aligned}\tag{2.24}$$

где  $b_{\tilde{\eta}1}^j$  и  $b_{\tilde{\eta}2}^j$  — параметры смешивания четырех состояний  $\eta$ -мезона. Их значения приведены в таблице 2.1 [40].

Таблица 2.1: Параметры смешивания  $\eta$ -мезонов.

|                       | $\eta$ | $\hat{\eta}$ | $\eta'$ | $\hat{\eta}'$ |
|-----------------------|--------|--------------|---------|---------------|
| $b_{\tilde{\eta}1}^u$ | 0.71   | 0.62         | -0.32   | 0.56          |
| $b_{\tilde{\eta}2}^u$ | 0.11   | -0.87        | -0.48   | -0.54         |
| $b_{\tilde{\eta}1}^s$ | 0.62   | 0.19         | 0.56    | -0.67         |
| $b_{\tilde{\eta}2}^s$ | 0.06   | -0.66        | 0.30    | 0.82          |

Константы  $g_1^u$ ,  $g_1^s$ ,  $g_2^u$  и  $g_2^s$  имеют вид:

$$\begin{aligned} g_1^u &= \sqrt{\frac{Z_\pi}{4I_2(m_u, m_u)}} \approx 3.02, \\ g_2^u &= \sqrt{\frac{1}{4I_2^{f_{uu}^2}(m_u, m_u)}} \approx 4.03, \\ g_1^s &= \sqrt{\frac{Z_s}{4I_2(m_s, m_s)}} \approx 4.41, \\ g_2^s &= \sqrt{\frac{1}{4I_2^{f_{ss}^2}(m_s, m_s)}} \approx 5.39, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  $Z_\pi$  — параметр перенормировки, возникающий в модели НИЛ при учете  $\pi - a_1(1260)$  переходов,  $Z_K$  — параметр перенормировки, возникающий в модели НИЛ при учете  $K - K_1(1270)$  переходов,  $Z_s$  — параметр перенормировки, возникающий в модели НИЛ при учете  $\eta - f_1(1285)$  переходов. Явный вид параметров  $Z_\pi$  и  $Z_K$  представлен в (2.4) и (2.5) соответственно. Параметр  $Z_s$  имеет следующую структуру:

$$Z_s = \left(1 - 6 \frac{m_s^2}{M_{f_1}^2}\right)^{-1} \approx 2.09, \quad (2.26)$$

где  $M_{f_1} = 1426$  МэВ — масса аксиально векторного мезона  $f_1(1285)$  [57].

$f(\vec{k}) = 1 + d\vec{k}^2$  — формфактор, вводимый в расширенной модели НИЛ для описания возбужденных состояний мезонов. Значения параметров наклона  $d$  для разных кварковых составов соответствующих мезонов приведены в (1.50).

Матрицы  $\lambda_{\pm}^K$  — линейные комбинации матриц Гелл-Мана. Их явный вид приведен в (2.2). Явный вид матриц  $\lambda_u$  и  $\lambda_s$  приведен в (1.7).

Как и в предыдущем случае, для вычисления данного процесса потребуется фрагмент лагранжиана Салама-Вайнберга (2.6).

Интегралы, возникающие в петлях диаграмм 2.4 и 2.5, имеют вид аналогичный виду интегралов, появлявшихся в петлях диаграмм предыдущего процесса. Преобразование этих интегралов осуществляется тем же путем. Однако наличие формфакторов в вершинах кварковых треугольников приводит к невозможности получения таких же простых соотношений. В двухвершинных же кварковых петлях при вычислениях с участием формфакторов структура ответа остается той же, но при этом добавляется численный множитель.

Амплитуда процесса  $\tau \rightarrow K^- \eta \nu_{\tau}$  для векторного канала, полученная с помощью данного лагранжиана расширенной модели НИЛ, принимает вид:

$$T_V = -2iG_F V_{us} l^{\mu} \\ \times \left\{ C_{K\eta} g_{\mu\nu} + \frac{C_{K^*} C_{K^* K\eta} g_{\mu\nu} [q^2 - \frac{3}{2}(m_s - m_u)^2] - q_{\mu} q_{\nu}}{g_{K^*} M_{K^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_{K^*}} \right. \\ \left. + \frac{C_{\hat{K}^*} C_{\hat{K}^* K\eta} g_{\mu\nu} [q^2 - \frac{3}{2}(m_s - m_u)^2] - q_{\mu} q_{\nu}}{g_{\hat{K}^*} M_{\hat{K}^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_{\hat{K}^*}} \right\} (p_K - p_{\eta})^{\nu}, \quad (2.27)$$

где  $q = p_K + p_{\eta}$  — сумма импульсов конечных мезонов  $M_{K^*} = 896 \pm 0.8$  МэВ,  $M_{\hat{K}^*} = 1414 \pm 15$  МэВ  $\Gamma_{K^*} = 46.2 \pm 1.3$  МэВ, и  $\Gamma_{\hat{K}^*} = 232 \pm 21$  МэВ — массы и полные ширины векторных мезонов  $K^*(892)$  и  $K^*(1410)$  [57].

Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует контактной диаграмме, второе и третье — диаграммам с промежуточными векторными мезонами в основном и первом радиально-возбужденном состояниях  $K^*(892)$  и  $K^*(1410)$ .

В отличие от предыдущего примера, здесь в амплитуде появились величины  $C$ . Эти величины являются числовыми коэффициентами, возникающими из кварковых петель. Их появление связано с использованием расширенной модели НИЛ.

Как и в предыдущем случае, тензорная структура

$$g_{\mu\nu} \left[ q^2 - \frac{3}{2}(m_s - m_u)^2 \right] - q_\mu q_\nu \quad (2.28)$$

получена из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточный векторный мезон  $K^*(892)$  или  $K^*(1410)$ . Из этой же петли появились коэффициенты  $C_{K^*}$  и  $C_{\hat{K}^*}$ . Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{K^*} &= \frac{1}{\sin(2\theta_{K^*}^0)} [\sin(\theta_{K^*} + \theta_{K^*}^0) + R_{us} \sin(\theta_{K^*} - \theta_{K^*}^0)], \\ C_{\hat{K}^*} &= \frac{-1}{\sin(2\theta_{K^*}^0)} [\cos(\theta_{K^*} + \theta_{K^*}^0) + R_{us} \cos(\theta_{K^*} - \theta_{K^*}^0)], \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$R_{us} = \frac{I_2^{f_{us}}(m_u, m_s)}{\sqrt{I_2(m_u, m_s) I_2^{f_{us}^2}(m_u, m_s)}} \quad (2.30)$$

Во втором и третьем слагаемом амплитуды в знаменателе стоит одна и та же константа  $g_{K^*}$ . Она также возникает из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточный векторный мезон.

Коэффициент  $C_{K\eta}$  возник в кварковом треугольнике перехода  $W$ -бозона в конечные состояния:

$$C_{K\eta} = I^{K\eta(u)} + \sqrt{2}I^{K\eta(s)}. \quad (2.31)$$

Множители  $C_{K^*K\eta}$  и  $C_{\hat{K}^*K\eta}$  появляются в кварковых треугольниках распада промежуточных  $K^*(892)$  и  $K^*(1410)$  на конечные мезоны. Эти коэффициенты принимают вид:

$$\begin{aligned} C_{K^*K\eta} &= I^{K^*K\eta(u)} + \sqrt{2}I^{K^*K\eta(s)}, \\ C_{\hat{K}^*K\eta} &= I^{\hat{K}^*K\eta(u)} + \sqrt{2}I^{\hat{K}^*K\eta(s)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Коэффициенты  $C_{K\eta}$ ,  $C_{K^*K\eta}$  и  $C_{\hat{K}^*K\eta}$  содержат по два слагаемых. Это связано с двумя возможными вариантами распределения夸ков в кварковых треугольниках диаграммах процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$ . Эти два варианта обусловлены тем, что  $\eta$ -мезон может состоять как из  $u$ - или  $d$ -夸ков, так и из  $s$ -夸ков.

Интегралы, стоящие в определении этих коэффициентов, имеют вид:

$$\begin{aligned}
I^{K\eta(u)} &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_K c_\eta^u}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\
I^{K\eta(s)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_K c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\
I^{K^*K\eta(u)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_{K^*} a_K c_\eta^u}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\
I^{K^*K\eta(s)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_{K^*} a_K c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\
I^{\hat{K}^*K\eta(u)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_{K^*} a_K c_\eta^u}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\
I^{\hat{K}^*K\eta(s)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_{K^*} a_K c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

где  $a_K$ ,  $a_{K^*}$ ,  $b_{K^*}$ ,  $c_\eta^u$  и  $c_\eta^s$  — коэффициенты из лагранжиана, определенные в (2.21) и (2.24).

Данные интегралы, содержащие в числителе формфактор, зависящий от трехмерного импульса вычисляются следующим образом. Сначала по теории вычетов вычисляются интегралы по временной компоненте четырехмерного импульса. После этого численно вычисляется интеграл по оставшемуся трехмерному импульсу.

Амплитуда данного процесса для скалярного канала в расширенной модели Намбу–Иона–Лазинио принимает вид:

$$\begin{aligned}
T_S &= -4iG_F V_{us} l^\mu \left\{ \frac{C_{K_0^*} C_{K_0^* K\eta}}{g_{K_0^*}} \frac{m_s - m_u}{M_{K_0^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_{K_0^*}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_{\hat{K}_0^*} C_{\hat{K}_0 K\eta}}{g_{K_0^*}} \frac{m_s - m_u}{M_{\hat{K}_0^*}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_{\hat{K}_0^*}} \right\} q_\mu,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

где  $M_{K_0^*} = 682 \pm 29$  МэВ,  $M_{\hat{K}_0^*} = 1425 \pm 50$  МэВ,  $\Gamma_{K_0^*} = 547 \pm 24$  МэВ и  $\Gamma_{\hat{K}_0^*} = 270 \pm 80$  МэВ — массы и полные ширины распада скалярных мезонов  $K_0^*(800)$  и  $K_0^*(1430)$  [57].

Как и в процессе  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$ , из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточный скалярный мезон возникла разность масс кварков из которых этот мезон состоит  $m_s - m_u$ . Из этой же кварковой петли появились коэффи-

циенты  $C_{K_0^*}$  и  $C_{\hat{K}_0^*}$ . Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{K_0^*} &= \frac{1}{\sin(2\theta_{K_0^*}^0)} [\sin(\theta_{K_0^*} + \theta_{K_0^*}^0) + R_V \sin(\theta_{K_0^*} - \theta_{K_0^*}^0)], \\ C_{\hat{K}_0^*} &= \frac{-1}{\sin(2\theta_{K_0^*}^0)} [\cos(\theta_{K_0^*} + \theta_{K_0^*}^0) + R_V \cos(\theta_{K_0^*} - \theta_{K_0^*}^0)]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Оба слагаемых содержат одну и ту же константу  $g_{K_0^*}$ , возникающую из этой кварковой петли.

В кварковых треугольниках перехода промежуточных скалярных мезонов  $K_0^*(800)$  и  $K_0^*(1430)$  в конечные состояния появляются коэффициенты  $C_{K_0^* K\eta}$  и  $C_{\hat{K}_0 K\eta}$ :

$$\begin{aligned} C_{K_0^* K\eta} &= m_s I^{KK_0^*\eta(u)} - \sqrt{2} m_u I^{KK_0^*\eta(s)}, \\ C_{\hat{K}_0 K\eta} &= m_s I^{\hat{K}_0 K\eta(u)} - \sqrt{2} m_u I^{\hat{K}_0 K\eta(s)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Как и в случае векторного канала, такие константы содержат два слагаемых, соответствующих двум возможным вариантам кварковых распределений в треугольнике.

Интегралы, стоящие в определении этих коэффициентов, имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} I^{K_0^* K\eta(u)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_{K_0^*} a_K c_\eta^u}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I^{K_0^* K\eta(s)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_{K_0^*} a_K c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I^{\hat{K}_0^* K\eta(u)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_{K_0^*} a_K c_\eta^u}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I^{\hat{K}_0^* K\eta(s)} &= i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_{K_0^*} a_K c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \end{aligned} \quad (2.37)$$

Вычисление ширины распада производится аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе.

Парциальная ширина распада  $\tau \rightarrow K^- \eta \nu_\tau$ , полученная в рамках расширенной модели НИЛ, для векторного канала:

$$Br(\tau \rightarrow K^- \eta \nu_\tau)_V = 1.46 \cdot 10^{-4}. \quad (2.38)$$

Вклад в парциальную ширину этого распада для скалярного канала:

$$Br(\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau)_S = 0.28 \cdot 10^{-7}. \quad (2.39)$$

Полная парциальная ширина:

$$Br(\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau) = 1.45 \cdot 10^{-4}. \quad (2.40)$$

Экспериментальные значения:

$$\begin{aligned} Br(\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau)_{exp} &= (1.58 \pm 0.14) \cdot 10^{-4}, [60] \\ Br(\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau)_{exp} &= (1.42 \pm 0.18) \cdot 10^{-4}, [61] \\ Br(\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau)_{exp} &= (1.52 \pm 0.08) \cdot 10^{-4}. [57] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Стоит отметить, что в данных вычислениях мы не учитывали зависимость ширины распада мезона  $K^*(892)$  от импульса. Если предположить, что эта ширина растет линейно по  $\sqrt{q^2}$ , то в рассматриваемой энергетической области можно принять  $\Gamma_{K^*} \approx 70$  МэВ. Тогда парциальная ширина этого процесса:

$$Br(\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau) = 1.54 \cdot 10^{-4}. \quad (2.42)$$

На рис. 2.6 изображен график зависимости дифференциальной ширины процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  от инвариантной массы конечных мезонов. Сплошная линия описывает нашу теоретическую дифференциальную ширину, точки соответствуют экспериментальным значениям [60].

Как видно из графика, теоретическая кривая повторяет форму экспериментальной кривой. Но в некоторых областях она отклоняется от экспериментальных значений. Однако необходимо учитывать, что эти результаты были получены без использования произвольных параметров.

Вычисления, выполненные в рамках расширенной модели Намбу–Иона–Лазинио, показали, что векторный канал дает основной вклад в ширину распада  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$ . Подпроцессы с промежуточными векторными мезонами  $K^*(892)$  и  $K^*(1410)$  играют главную роль. Канал с промежуточными скалярными мезонами дает несущественный вклад. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

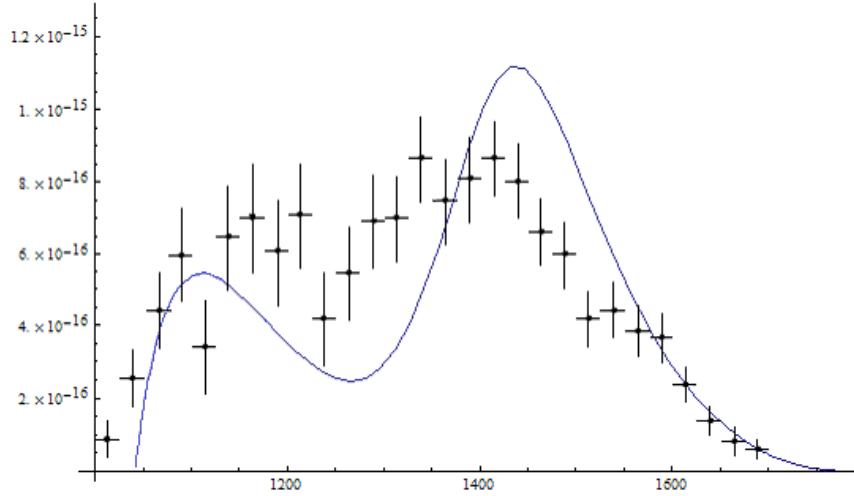


Рис. 2.6: Дифференциальная ширина распада  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$ .

Правый сдвиг главного пика теоретической дифференциальной ширины процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  можно объяснить неправильным выбором массы возбужденного векторного мезона  $K^*(1410)$ , которая измерена недостаточно точно [62, 63]. Экспериментально наблюдаемый небольшой бугор на графике дифференциальной ширины в районе 1600 МэВ может быть объяснен существованием второго радиально-возбужденного состояния  $K^*(1680)$ , который не учитывался в наших вычислениях.

Все вычисления для процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$  проводятся аналогично. В результате мы получаем предсказание для парциальной ширины этого распада. Для векторного канала:

$$Br(\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau)_V = 1.69 \cdot 10^{-6}. \quad (2.43)$$

Для скалярного канала:

$$Br(\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau)_S = 0.77 \cdot 10^{-7}. \quad (2.44)$$

Полная парциальная ширина:

$$Br(\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau)_{tot} = 1.25 \cdot 10^{-6}. \quad (2.45)$$

Экспериментальное ограничение [57]:

$$Br(\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau)_{exp} < 2.4 \cdot 10^{-6}. \quad (2.46)$$

На рис. 2.7 изображена зависимость дифференциальной ширины процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$  от инвариантной массы конечных мезонов.

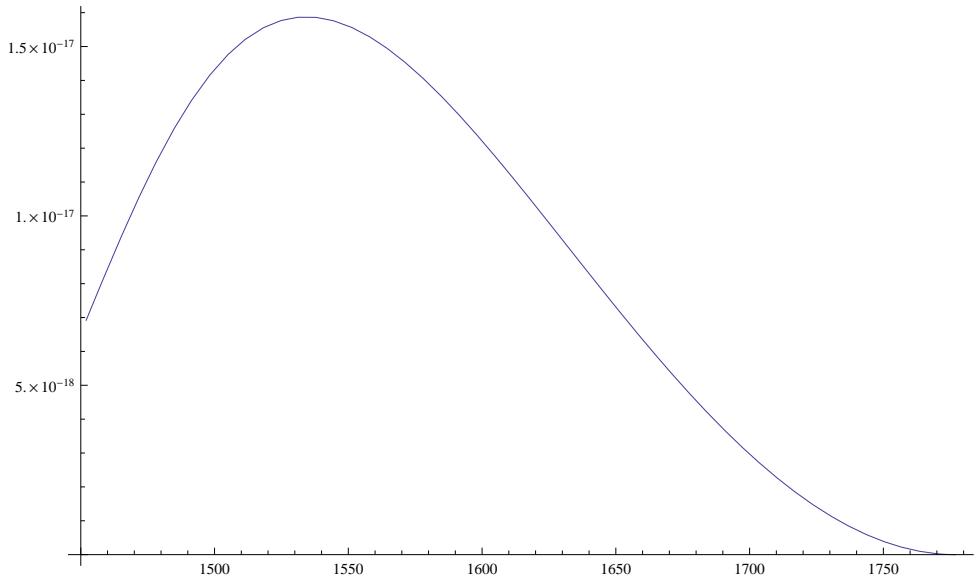


Рис. 2.7: Дифференциальная ширина распада  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$ .

Процессы распадов  $\tau \rightarrow K^-(\eta, \eta'(958))\nu_\tau$  в последнее время активно изучаются как с экспериментальной, так и с теоретической точки зрения. Одной из наиболее интересных теоретических работ на эту тему является работа [16]. В этой статье ширина распада  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  была вычислена в рамках киральной теории возмущений, расширенной включением резонансов в качестве активных полей, а также сделано предсказание для ширины распада  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$ . В этой работе утверждается, что использование параметризации Брейта-Вигнера не приводит к удовлетворительным результатам при описании этих процессов. В то же самое время два других метода, основанные на экспоненциальном пересуммировании и дисперсионном представлении обеспечивают хорошее согласие с экспериментом.

В настоящей диссертационной работе было показано, что в рамках расширенной модели Намбу–Иона–Лазинио использование пропагатора Брейта–Вигнера в стандартной форме для описания промежуточных состояний приводит к удовлетворительным результатам. Это утверждение также подтверждается и другими вычислениями, выполненными в рамках модели НИЛ. При

этом необходимо учесть, что наши результаты были получены без использования дополнительных произвольных параметров, что отличает наши расчеты от расчетов, выполненных в других феноменологических моделях.

Полученные нами результаты для процессов  $\tau \rightarrow K^-(\eta, \eta'(958))\nu_\tau$  были опубликованы в работе [A2].

### 2.3 Распад $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$

Диаграммы, соответствующие процессу  $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$ , изображены на рис. 2.8, 2.9.

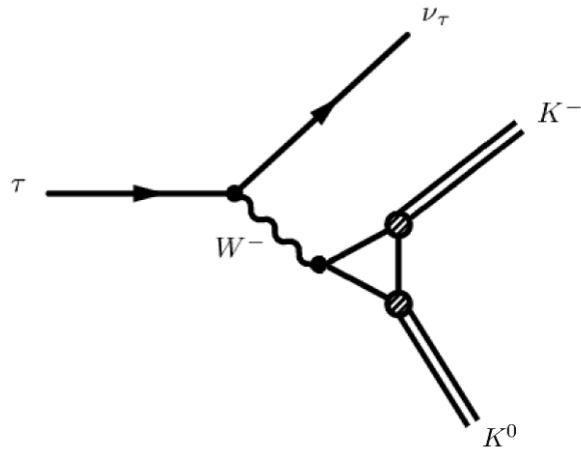


Рис. 2.8: Распад  $\tau \rightarrow K^0K^-\nu_\tau$  с промежуточным  $W$ -бозоном (контактная диаграмма).

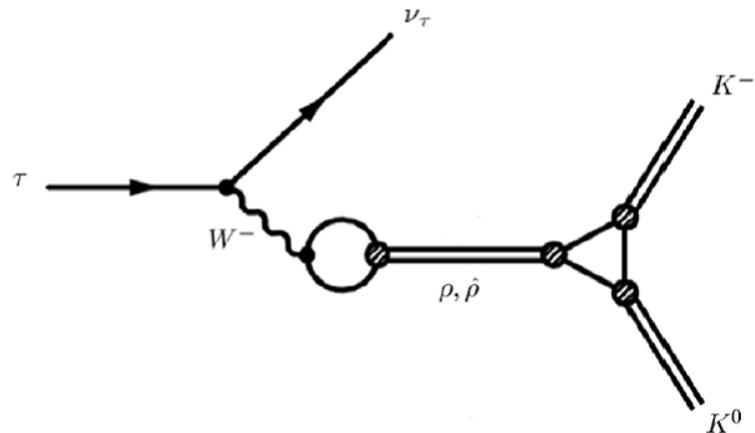


Рис. 2.9: Распад  $\tau \rightarrow K^0K^-\nu_\tau$  с промежуточными векторными  $\rho(770)$  и  $\rho(1450)$  мезонами.

Как и в предыдущих двух случаях, в данном процессе в конечных состояни-

ях находятся два псевдоскалярных мезона. Поэтому в качестве промежуточных могут выступать только векторные и псевдоскалярные частицы. Однако в отличие от предыдущих двух примеров оба конечных мезона в данном процессе являются странными. Следовательно, в промежуточных состояниях странных мезонов быть не может. Кроме того, как и в предыдущих случаях, из того, что один из конечных мезонов заряженный, а один нейтральный следует требование наличия заряда у промежуточного мезонного состояния. Исходя из этого, в качестве промежуточных в этом процессе мы рассматриваем векторные  $\rho$ -мезоны.

Порог рождения конечных мезонов находится выше массы основного векторного мезона  $\rho(770)$ . Поэтому возбужденные состояния вносят существенный вклад в процесс, и ими пренебречь нельзя. Следовательно, при вычислении данного процесса необходимо использовать расширенную модель НИЛ.

Скалярный канал в процессе  $\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau$  учитывать не имеет смысла. Это связано с тем, что в промежуточном состоянии могут находиться только несторанные мезоны. Как указывалось в предыдущих двух параграфах, в скалярном канале из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в скалярный мезон возникает разность масс кварков, из которых этот мезон состоит. В данном же случае несторанный промежуточный заряженный мезон может состоять только из  $u$ - и  $d$ -кварков. Поэтому в скалярном канале этого процесса возникнет разность  $m_d - m_u$ . Но в модели НИЛ массы этих кварков близки и различие между ними, как правило, не учитывается. Следовательно, вклад от скалярного канала процесса  $\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau$  пренебрежимо мал и в качестве промежуточных здесь рассматриваются только основное и первое радиально-возбужденное состояния векторного  $\rho$ -мезона  $\rho(770)$  и  $\rho(1450)$ .

Кварк-мезонный лагранжиан взаимодействия, содержащий псевдоскалярный мезон  $K$  и векторные мезоны  $\rho(770)$  и  $\rho(1450)$  имеет вид:

$$\mathcal{L}_{int}(\bar{q}, q, K, \rho) = \bar{q} \left[ i\gamma^5 \sum_{j=0,\pm} \lambda_j^K (a_K K^j + b_K \hat{K}^j) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \gamma^\mu \sum_{j=\pm} \lambda_j^\rho (a_\rho \rho_\mu^j + b_\rho \hat{\rho}_\mu^j) \Big] q, \quad (2.47)$$

где  $K^\pm$  и  $\rho^\pm$  — псевдоскалярное и векторное мезонные поля, шляпкой обозначены возбужденные состояния.

Множители  $a_K$  и  $b_K$ , определенные в (2.21), характеризуют взаимодействие псевдоскалярных  $K$ -мезонов с кварками в расширенной модели НИЛ. Множители  $a_\rho$  и  $b_\rho$ , определяющие взаимодействие основных мезонов  $\rho(770)$  и их первых радиальных возбуждений  $\rho(1450)$ , имеют аналогичную структуру:

$$\begin{aligned} a_\rho &= \frac{1}{\sin(2\theta_\rho^0)} \left[ g_\rho \sin(\theta_\rho + \theta_\rho^0) + g'_\rho f_{uu}(\vec{k}^2) \sin(\theta_\rho - \theta_\rho^0) \right], \\ b_\rho &= \frac{-1}{\sin(2\theta_\rho^0)} \left[ g_\rho \cos(\theta_\rho + \theta_\rho^0) + g'_\rho f_{uu}(\vec{k}^2) \cos(\theta_\rho - \theta_\rho^0) \right], \end{aligned} \quad (2.48)$$

где  $\theta_\rho$  и  $\theta_\rho^0$  — углы смешивания основных состояний  $\rho$ -мезона и их первых радиальных возбуждений:

$$\theta_\rho = 81.8^\circ, \quad \theta_\rho^0 = 61.5^\circ. \quad (2.49)$$

Константы  $g_\rho$  и  $g'_\rho$  имеют вид:

$$\begin{aligned} g_\rho &= \sqrt{\frac{3}{2I_2(m_u, m_u)}} \approx 6.14, \\ g'_\rho &= \sqrt{\frac{3}{2I_2^{f_{uu}}(m_u, m_u)}} \approx 9.87. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Явный вид матриц  $\lambda_\pm^K$  приведен в (2.2). Матрицы  $\lambda_\pm^\rho$  имеют следующую структуру:

$$\lambda_+^\rho = \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\lambda_-^\rho = \frac{\lambda_1 - i\lambda_2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — матрицы Гелл-Мана.

Как и в предыдущих двух случаях, для вычисления данного процесса понадобится фрагмент лагранжиана электрослабой модели, лептонная часть которого совпадает с лептонной частью из (2.6). Однако для рассматриваемого процесса кварковая часть лагранжиана (2.6) должна быть заменена на

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{weak(q)} = & \frac{M_W \sqrt{G_F}}{2^{\frac{1}{4}}} W_\mu^+ V_{ud} [\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d] \\ & + \frac{M_W \sqrt{G_F}}{2^{\frac{1}{4}}} W_\mu^- V_{ud} [\bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u],\end{aligned}\quad (2.53)$$

где  $V_{ud} = 0.97428$  — элемент матрицы Кабибо-Кобаяши-Маскавы.

Амплитуда процесса  $\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau$ , в расширенной модели НИЛ принимает вид:

$$\begin{aligned}T = & -2\sqrt{2}iG_F V_{ud} l^\mu \\ & \times \left\{ I^{KK} g_{\mu\nu} + \frac{I^{\rho KK} C_\rho}{g_\rho} \frac{g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu}{M_\rho^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_\rho} \right. \\ & \left. + \frac{I^{\hat{\rho} KK} C_{\hat{\rho}}}{g_{\hat{\rho}}} \frac{g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu}{M_{\hat{\rho}}^2 - q^2 - i\sqrt{q^2} \Gamma_{\hat{\rho}}} \right\} (p_{K^0} - p_{K^-})^\nu,\end{aligned}\quad (2.54)$$

где  $q = p_{K^0} + p_{K^-}$  — сумма импульсов конечных мезонов,  $M_\rho = 775.11 \pm 0.34$  МэВ,  $M_{\hat{\rho}} = 1465 \pm 25$  МэВ,  $\Gamma_\rho = 149.1 \pm 0.8$  МэВ,  $\Gamma_{\hat{\rho}} = 400 \pm 60$  МэВ — массы и полные ширины распада векторных мезонов [57].

Первое слагаемое описывает контактную диаграмму, второе и третье слагаемые соответствуют диаграммам с промежуточными векторными мезонами в основном и первом радиально-возбужденном состоянии  $\rho(770)$  и  $\rho(1450)$ .

Как и в предыдущих случаях, промежуточный мезон описывается с помощью пропагатора Брейта-Вигнера. Градиентно-инвариантные тензорные структуры во втором и в третьем слагаемом образовались из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточный векторный мезон. Их появление стало возможным благодаря тому, что в данном процессе в промежуточном состоянии могут находиться только нестранные частицы. Такая градиентная инвариантность в амплитуде для этого процесса, полученной в расширенной модели НИЛ, выполняется лишь в приближении равенства масс  $u$ - и  $d$ -кварков.

Численные коэффициенты  $C_\rho$  и  $C_{\hat{\rho}}$  возникли из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточные векторные мезоны  $\rho(770)$  и  $\rho(1450)$  соответственно. Они имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} C_\rho &= \frac{1}{\sin(2\theta_\rho^0)} [\sin(\theta_\rho + \theta_\rho^0) + R_{uu} \sin(\theta_\rho - \theta_\rho^0)], \\ C_{\hat{\rho}} &= \frac{-1}{\sin(2\theta_\rho^0)} [\cos(\theta_\rho + \theta_\rho^0) + R_{uu} \cos(\theta_\rho - \theta_\rho^0)], \end{aligned} \quad (2.55)$$

где параметр  $R_{uu}$  отличается от параметра  $R_{us}$ , определенного в (2.30), тем, что содержит интегралы, зависящие только от  $u$ -кварков. Это также связано с запретом на наличие странных мезонов в промежуточном состоянии.

$$R_{uu} = \frac{I_2^{f_{uu}}(m_u, m_u)}{\sqrt{I_2(m_u, m_u) I_2^{f_{uu}^2}(m_u, m_u)}}. \quad (2.56)$$

В знаменателе второго и третьего слагаемого стоит одна и та же константа  $g_\rho$ . Она также возникла из кварковой петли перехода  $W$ -бозона в промежуточный мезон.

Интеграл  $I^{KK}$  появился в кварковом треугольнике перехода  $W$ -бозона в конечные состояния:

$$I^{KK} = -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_K a_K}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k. \quad (2.57)$$

Интегралы  $I_{\rho KK}$  и  $I_{\hat{\rho} KK}$  появляются в кварковых треугольниках перехода промежуточных основного и возбужденного векторных мезонов  $\rho(770)$  и  $\rho(1450)$  в конечные мезоны:

$$\begin{aligned} I^{\rho KK} &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_\rho a_K a_K}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I^{\hat{\rho} KK} &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_\rho a_K a_K}{(m_s^2 - k^2)(m_u^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Множители  $a_K$ ,  $a_\rho$  и  $b_\rho$  — коэффициенты лагранжиана, определенные в (2.21) и (2.48).

Парциальная ширина распада  $\tau \rightarrow K^- K^0 \nu_\tau$ , полученная в рамках расширенной модели Намбу–Иона–Лазинио:

$$Br(\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau) = 12.7 \cdot 10^{-4}. \quad (2.59)$$

Экспериментальные значения этой парциальной ширины:

$$\begin{aligned} Br(\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau)_{exp} &= (14.9 \pm 0.5) \cdot 10^{-4} [57] \\ Br(\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau)_{exp} &= (15.1 \pm 4.3) \cdot 10^{-4} [64]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

На рис. 2.10 представлены графики зависимости дифференциальной ширины распада  $\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau$  от инвариантной массы конечных мезонов. Сплошная линия описывает полученную в расширенной модели НИЛ теоретическую дифференциальную ширину. Точки соответствуют экспериментальным значениям [64].

Данные результаты были получены для средних значений массы и полной ширины распада возбужденного мезона  $\rho(1450)$ . Однако эти величины экспериментально определены с достаточно большими допусками ( $M_{\hat{\rho}} = 1465 \pm 25$  МэВ,  $\Gamma_{\hat{\rho}} = 400 \pm 60$  МэВ). Если выбрать минимально допустимые значения массы и полной ширины распада этого мезона ( $M_{\hat{\rho}} = 1440$  МэВ,  $\Gamma_{\hat{\rho}} = 340$  МэВ), результат лучше согласуется с экспериментальными данными:

$$Br(\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau) = 14.7 \cdot 10^{-4}. \quad (2.61)$$

Пунктирная линия на рис. 2.10 описывает дифференциальную ширину, вычисленную в модели НИЛ для случая минимальных значений массы и полной ширины мезона  $\rho(1450)$ .

Из полученных результатов видно, что ширина распада  $\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau$  чувствительна к выбору полной ширины и массы первого радиально-возбужденного состояния  $\rho$ -мезона  $\rho(1450)$ .

В таблице 2.2 приведены значения для парциальной ширины данного процесса, полученные в различных экспериментах и теоретических работах других авторов.

Как видно из таблицы, полученные нами результаты удовлетворительно согласуются с различными экспериментальными данными и теоретическими результатами, полученными в других моделях. При этом наши вычисления,

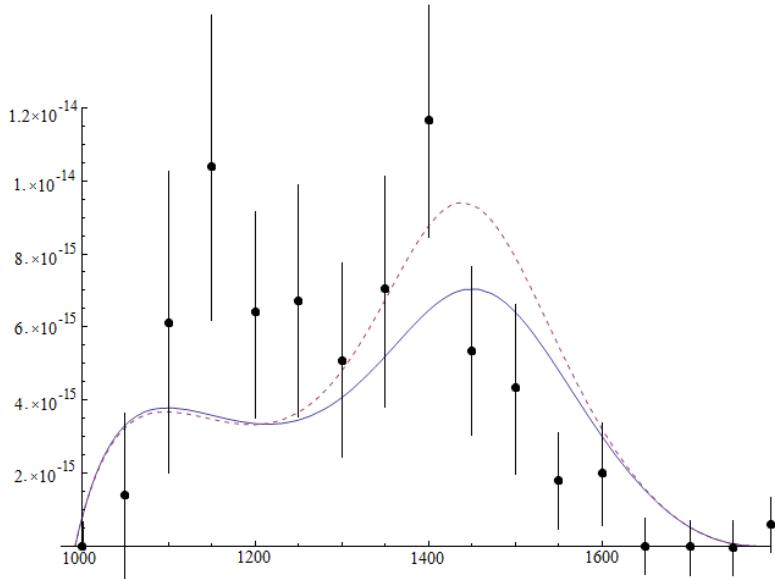


Рис. 2.10: Дифференциальная ширина распада  $\tau \rightarrow K^- K^0 \nu_\tau$ .

производимы в расширенной модели НИЛ не требовали использования дополнительных произвольных параметров.

Эти результаты были опубликованы в работе [A3].

Расчет процесса  $\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau$  завершил начатую ранее серию вычислений процессов трехчастичных распадов  $\tau$ -лептона с псевдоскалярными мезонами в конечных состояниях в рамках модели Намбу–Иона–Лазинио. Ранее такие трехчастичные распады в модели НИЛ выполнялись без участия странных мезонов. В настоящей диссертационной работе впервые в рамках этой модели рассматривались трехчастичные распады  $\tau$ -лептона со странными частицами в конечных состояниях. Таким образом было показано, что модель Намбу–Иона–Лазинио способна давать удовлетворительные результаты для процессов такого типа также и с участием странных мезонов без использования дополнительных произвольных параметров.

## 2.4 Поляризационные эффекты распада $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$

Во всех четырех рассматривавшихся выше процессах не учитывалась поляризация  $\tau$ -лептона. Т.е. при вычислении квадрата модуля амплитуды соответствующего процесса производилось усреднение по поляризациям начальной

Таблица 2.2: Парциальные ширины процесса распада  $\tau \rightarrow K^0 K^- \nu_\tau$ , полученные различными авторами и коллаборациями.

|             | $\text{Br} (\times 10^{-4})$ | References                            |
|-------------|------------------------------|---------------------------------------|
| Теория      | 27                           | B.A. Li [3]                           |
|             | $12.5 \pm 1.3$               | J.E. Palomar [5]                      |
|             | 13.5/19                      | H.Czyz, A. Grzelinska, J.H. Kuhn [11] |
|             | 16                           | S. Dubnicka, A.Z. Dubnickova [12]     |
|             | 12.7(14.7)                   | Our result                            |
| Эксперимент | $15.1 \pm 4.3$               | CLEO [64]                             |
|             | $16.2 \pm 3.2$               | ALEPH [65]                            |
|             | $14.8 \pm 0.68$              | Belle [66]                            |
|             | $14.9 \pm 0.5$               | PDG [57]                              |

частицы.

В настоящей работе на примере рассмотренного выше распада  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$  производится оценка влияния, которое оказывают на его дифференциальную ширину учет эффектов поперечной поляризации  $\tau$ -лептона в рамках модели Намбу–Иона–Лазинио.

Методы вычисления угловых распределений дифференциальной ширины распада поляризованного  $\tau$ -лептона представлены в работе [48].

Для рассмотрения поляризационных эффектов мы ограничимся учетом только векторного канала, т.к. скалярный канал этого процесса дает малый вклад. Соответствующая амплитуда приведена в (2.9).

Для того, чтобы учесть поляризацию  $\tau$ -лептона, необходимо при вычислении квадрата модуля амплитуды процесса использовать известное соотношение [67]:

$$u_\tau \bar{u}_\tau \rightarrow \frac{1}{2} [(p_\tau \gamma) + m_\tau] [1 - \gamma^5(a\gamma)], \quad (2.62)$$

где  $a$  — поляризационный вектор  $\tau$ -лептона. Можно положить  $|\vec{a}| = 1$ .

Учет поляризации дает дополнительный член в выражении для дифференциальной ширины, содержащий антисимметричный тензор  $\epsilon^{p_\tau a p_\pi p_K}$ .

После интегрирования по импульсу нейтрино мы получаем дифференциальную ширину распада как функцию инвариантной массы конечных мезонов, отношения энергий этих мезонов и поляризационного вектора  $\tau$ -лептона.

$$\frac{d\Gamma}{d^3 p_\pi d^3 p_K}(M_{inv}, \varepsilon, a), \quad (2.63)$$

где  $M_{inv}$  — инвариантная масса конечных мезонов,  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_\pi}{\varepsilon_K}$ ,  $\varepsilon_\pi$  — энергия конечного  $\pi$ -мезона,  $\varepsilon_K$  — энергия конечного К-мезона.

Чтобы оценить влияние учета поляризации на дифференциальную ширину, необходимо вычислить отношение:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{d\Gamma}{d^3 p_\pi d^3 p_K}(M_{inv}, \varepsilon, a) - \frac{d\Gamma}{d^3 p_\pi d^3 p_K}(M_{inv}, \varepsilon, -a)}{\frac{d\Gamma}{d^3 p_\pi d^3 p_K}(M_{inv}, \varepsilon, a) + \frac{d\Gamma}{d^3 p_\pi d^3 p_K}(M_{inv}, \varepsilon, -a)} \\ &= -4m_\tau M_{inv}\Gamma_{K^*}(\varepsilon + 1)^2(M_K^2 - M_\pi^2)\epsilon^{p_\tau a p_\pi p_K} \\ &\times \left\{ \left( M_{K^*}^2 - 3(m_s - m_u)^2/2 \right)^2 [4M_K^2(\varepsilon + 1)(M_{inv}^2\varepsilon - m_\tau^2) \right. \\ &+ m_\tau^2(M_{inv}^2(\varepsilon(3\varepsilon - 2) + 3) - 4M_\pi^2\varepsilon(\varepsilon + 1)) \\ &+ 4M_{inv}^2(M_\pi^2(\varepsilon + 1) - M_{inv}^2\varepsilon) + m_\tau^4(\varepsilon - 1)^2] \\ &+ 2(M_{K^*}^2 - 3(m_s - m_u)^2/2)m_\tau^2(\varepsilon + 1)(M_K^2 - M_\pi^2) \\ &\times [2(M_K^2 - M_\pi^2)(\varepsilon + 1) + (\varepsilon - 1)(m_\tau^2 + M_{inv}^2)] \\ &+ M_K^2m_\tau^2(\varepsilon + 1)^2(m_\tau^2 - M_{inv}^2)(M_K^2 - 2M_\pi^2) \\ &- 4M_K^2(\varepsilon + 1)M_{inv}^2\Gamma_{K^*}^2(m_\tau^2 - M_{inv}^2\varepsilon) \\ &+ M_\pi^4m_\tau^2(m_\tau^2 - M_{inv}^2)(\varepsilon^2 + 1) + 4M_\pi^2M_{inv}^4\Gamma_{K^*}^2 \\ &+ m_\tau^2\varepsilon^2M_{inv}^2\Gamma_{K^*}^2(-4M_\pi^2 + m_\tau^2 + 3M_{inv}^2) \\ &+ 2\varepsilon [M_\pi^4m_\tau^2(m_\tau^2 - M_{inv}^2) - M_{inv}^2\Gamma_{K^*}^2(2M_\pi^2(m_\tau^2 - M_{inv}^2) \right. \\ &\left. + m_\tau^4 + m_\tau^2M_{inv}^2 + 2M_{inv}^4)] + m_\tau^2M_{inv}^2\Gamma_{K^*}^2(m_\tau^2 + 3M_{inv}^2) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

В числителе этого выражения стоит ширина распада каона. Это связано с тем, что асимметрия пропорциональна фазовому сдвигу между инвариантными амплитудами. Аналогичные эффекты в КХД рассматривались в работе [49].

В системе покоя  $\tau$ -лептона ( $p_\tau = (m_\tau, 0, 0, 0)$ ) благодаря антисимметричному тензору временная компонента вектора поляризации исчезает. И тогда

выражение для антисимметричного тензора принимает вид:

$$\epsilon^{p_\tau a p_\pi p_K} = m_\tau |\vec{a}| |\vec{p}_\pi| |\vec{p}_K| \sin\alpha \cos\beta, \quad (2.65)$$

где  $\beta$  — угол между вектором поляризации  $\tau$ -лептона и нормалью к плоскости, в которой находятся импульсы конечных мезонов,  $\alpha$  — угол между импульсами  $\pi$ - и  $K$ -мезонов. Он имеет следующий вид:

$$\alpha = \text{Arccos} \frac{M_K^2 + M_\pi^2 + 2\varepsilon_K \varepsilon_\pi - M_{inv}^2}{2|\vec{p}_\pi||\vec{p}_K|} \quad (2.66)$$

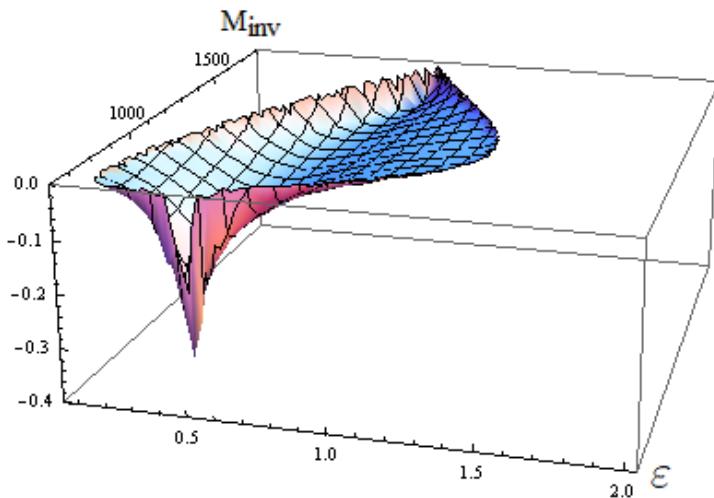


Рис. 2.11: Вклад в дифференциальную ширину распада  $\tau$ -лептона от учета его поперечной поляризации.

Максимальная асимметрия достигается в случае поперечной поляризации.

Это выполняется при условии

$$\beta = 0^\circ. \quad (2.67)$$

На рис. 2.11 изображен график зависимости выражения (2.64) от  $M_{inv}$  и  $\varepsilon$  для случая поперечной поляризации  $\tau$ -лептона.

Как видно из графика, вклад от учета поперечной поляризации  $\tau$ -лептона в дифференциальную ширину распада  $\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$  большей частью не превышает 10%. И только в небольшой области он достигает 30%. Подобные эффекты могут быть измерены в будущих экспериментах. И это может быть использовано в качестве дополнительной проверки модели Намбу–Иона–Лазинио.

Полученные результаты были опубликованы в работе [A4].

## 2.5 Основные выводы

В данной главе были рассмотрены четыре процесса распада  $\tau$ -лептона:  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ ,  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$ ,  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$  и  $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$ . Были получены амплитуды этих процессов в рамках модели Намбу–Иона–Лазинио. С помощью этих амплитуд были вычислены парциальные ширины этих распадов и построены графики зависимости их дифференциальных ширин от инвариантной массы конечных мезонных состояний.

Для первых трех процессов были учтены векторные и скалярные каналы. Для четвертого процесса скалярный канал не учитывался, т.к. вклад от него пренебрежимо мал, что обусловлено пропорциональностью соответствующей амплитуды разности масс  $u$ - и  $d$ -кварков, из которых состоит промежуточный мезон.

Первый из рассматриваемых процессов был расчитан в рамках стандартной модели НИЛ, т.к. возбужденные состояния в нем дают пренебрежимо малый вклад из-за низкого порога рождения конечных мезонов. Остальные процессы были посчитаны в рамках расширенной модели НИЛ.

Был проведен сравнительный анализ полученных результатов с экспериментальными и теоретическими работами других авторов. Все эти результаты были получены в рамках модели НИЛ без использования произвольных параметров. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Таким образом, была завершена начатая ранее серия расчетов трехчастичных распадов  $\tau$ -лептона с псевдоскалярными мезонами в конечных состояниях. При этом данная серия была распространена на процессы с участием странных мезонов. В результате было показано, что в рамках модели НИЛ возможно успешно производить расчеты мезонных распадов  $\tau$ -лептона с участием странных частиц без введения дополнительных произвольных параметров.

Были рассмотрены эффекты поляризации  $\tau$ -лептона на примере процесса

$\tau \rightarrow K^- \pi^0 \nu_\tau$ . Получена оценка влияния учета этих эффектов на дифференциальную ширину этого распада, что может в будущем явиться дополнительной проверкой модели НИЛ.

## Глава 3

# $e^+e^-$ -аннигиляция в мезоны в рамках модели НИЛ

Помимо распадов  $\tau$ -лептона расширенная модель Намбу–Иона–Лазинио также позволяет успешно описывать процессы электро-позитронной аннигиляции в мезоны в области энергии до 2 ГэВ. В таких процессах в промежуточном состоянии появляется фотон, который затем может рождать промежуточные мезоны в основном и радиально-возбужденных состояниях. Поскольку рассматривается диапазон энергии лишь до 2 ГэВ, то в таких процессах радиально-возбужденные состояниях от второго и выше будут вносить незначительный вклад. Поэтому расширенная модель НИЛ также подходит и для описания процессов электрон-позитронной аннигиляции в данной области энергии.

Ранее в модели НИЛ был успешно вычислен ряд процессов  $e^+e^-$  аннигиляции, однако во всех этих процессах в конечных состояниях отсутствовали странные мезоны и  $\phi$ -мезоны.

### 3.1 Процесс $e^+e^- \rightarrow K^\pm(K^{*\mp}(892), K^{*\mp}(1410))$

Как и в случае мезонных распадов  $\tau$ -лептонов, процессу  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$  соответствуют диаграммы двух типов. В первом из них начальные лептоны переходят в фотон, который затем распадается на конечные мезоны. Как и в случае с  $\tau$ -лептонами такие диаграммы называются контактными. В диаграм-

мах второго типа фотон через кварковую петлю переходит в промежуточный мезон, который затем распадается на конечные состояния.

Диаграммы для данного процесса приведены на рис. 3.1, 3.2.

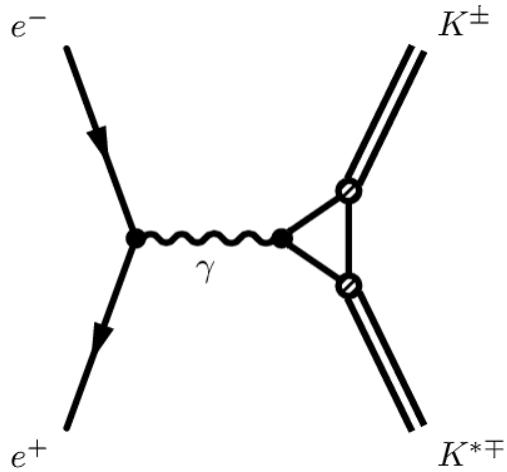


Рис. 3.1: Процессы  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$  с промежуточным фотоном (контактная диаграмма).

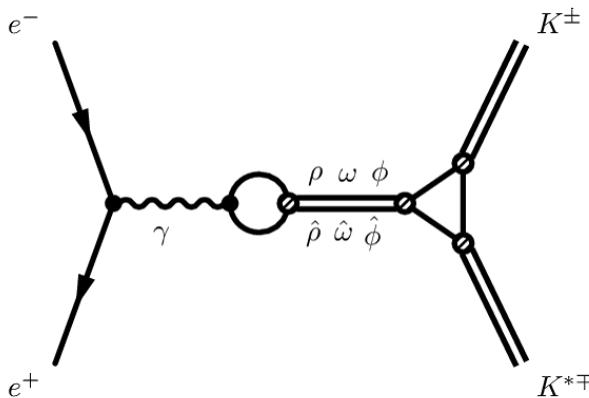


Рис. 3.2: Процессы  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$  с промежуточными векторными мезонами.

Здесь в конечных состояниях находится одна векторная и одна псевдоскалярная частицы. Поэтому в промежуточном состоянии не может быть скалярных мезонов. Вершины взаимодействия фотона с лептонами и с кварками не содержат матриц  $\gamma^5$ . Следовательно, псевдоскалярные и аксиально-векторные мезоны также не могут выступать в качестве промежуточных. Т.е. в данном процессе в промежуточном состоянии могут быть только векторные частицы. Так как в конечных состояниях находятся два странных мезона, то промежу-

точный мезон не может иметь отличную от нуля странность. При этом электрическая нейтральность фотона требует, чтобы промежуточные мезоны также были электрически нейтральными. Из всего этого следует, что в качестве промежуточных мезонов в этом процессе мы можем рассматривать только мезоны  $\rho$ ,  $\omega$  и  $\phi$ .

Порог рождения конечных состояний в этом процессе расположен выше основных состояний всех трех мезонов  $\rho(770)$ ,  $\omega(782)$  и  $\phi(1020)$ . Поэтому вклад в процесс от этих состояний не будет доминировать над вкладами от первых радиальных возбуждений этих мезонов  $\rho(1450)$ ,  $\omega(1420)$  и  $\phi(1680)$ . Следовательно, диаграммами с возбужденными состояниями в данном процессе пренебречь нельзя, и необходимо использовать для вычислений расширенную модель НИЛ.

Кварк-мезонный лагранжиан взаимодействия расширенной модели НИЛ, содержащий псевдоскалярные мезоны  $K$ , векторные мезоны  $K^*(892)$ ,  $\rho(770)$ ,  $\omega(782)$ ,  $\phi(1020)$  и их первые радиальные возбуждения имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(\bar{q}, q, K, K^*, \phi, \omega, \rho) = & \bar{q} \left[ i\gamma^5 \sum_{j=\pm} \lambda_j^K (a_K K^j + b_K \hat{K}^j) \right. \\ & + \frac{1}{2} \gamma^\mu \lambda_3 (a_\rho \rho_\mu + b_\rho \hat{\rho}_\mu) \\ & + \frac{1}{2} \gamma^\mu \lambda_\omega (a_\omega \omega_\mu + b_\omega \hat{\omega}_\mu) \\ & + \frac{1}{2} \gamma^\mu \lambda_\phi (a_\phi \phi_\mu + b_\phi \hat{\phi}_\mu) \\ & \left. + \frac{1}{2} \gamma^\mu \sum_{j=\pm} \lambda_j^{K^*} (a_{K^*} K_\mu^{*j} + b_{K^*} \hat{K}_\mu^{*j}) \right] q, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $K^\pm$ ,  $K^{*\pm}$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  и  $\phi$  — псевдоскалярные и векторные мезонные поля, шляпкой обозначены первые радиальные возбуждения.

Множители  $a_K$  и  $b_K$ , описывающие взаимодействия  $K$ -мезонов с кварками, были определены в (2.21). Множители  $a_\rho$  и  $b_\rho$ , определяющие взаимодействие  $\rho$ -мезонов с кварками, приведены в (2.48). Взаимодействие  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов с кварками определяется коэффициентами  $a_\omega$ ,  $b_\omega$ ,  $a_\phi$  и  $b_\phi$ . Они имеют следующий

вид:

$$\begin{aligned}
 a_\omega &= \frac{1}{\sin(2\theta_\omega^0)} \left[ g_\omega \sin(\theta_\omega + \theta_\omega^0) + g'_\omega f_{uu}(\vec{k}^2) \sin(\theta_\omega - \theta_\omega^0) \right], \\
 a_\phi &= \frac{1}{\sin(2\theta_\phi^0)} \left[ g_\phi \sin(\theta_\phi + \theta_\phi^0) + g'_\phi f_{ss}(\vec{k}^2) \sin(\theta_\phi - \theta_\phi^0) \right], \\
 b_\omega &= \frac{-1}{\sin(2\theta_\omega^0)} \left[ g_\omega \cos(\theta_\omega + \theta_\omega^0) + g'_\omega f_{uu}(\vec{k}^2) \cos(\theta_\omega - \theta_\omega^0) \right], \\
 b_\phi &= \frac{-1}{\sin(2\theta_\phi^0)} \left[ g_\phi \cos(\theta_\phi + \theta_\phi^0) + g'_\phi f_{ss}(\vec{k}^2) \cos(\theta_\phi - \theta_\phi^0) \right], \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

где  $\theta_\omega$  и  $\theta_\phi$  — углы смешивания основных и возбужденных состояний  $\omega$ -мезона и  $\phi$ -мезона соответственно:

$$\begin{aligned}
 \theta_\omega &= 81.8^\circ, & \theta_\phi &= 68.4^\circ, \\
 \theta_\omega^0 &= 61.5^\circ, & \theta_\phi^0 &= 57.13^\circ. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Константы  $g_\rho$  и  $g'_\rho$  были определены в (2.50). Константы  $g_\omega$ ,  $g'_\omega$ ,  $g_\phi$  и  $g'_\phi$  имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 g_\omega &= \sqrt{\frac{3}{2I_2(m_u, m_u)}} \approx 6.14, \\
 g'_\omega &= \sqrt{\frac{3}{2I_2^{f_{uu}}(m_u, m_u)}} \approx 9.87, \\
 g_\phi &= \sqrt{\frac{3}{2I_2(m_s, m_s)}} \approx 7.5, \\
 g'_\phi &= \sqrt{\frac{3}{2I_2^{f_{ss}}(m_s, m_s)}} \approx 9.87. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Матрицы  $\lambda_\pm^K$  определены (2.2). Матрицы  $\lambda_\omega$  и  $\lambda_\phi$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \lambda_\omega &= \frac{\sqrt{2}\lambda_0 + \lambda_8}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \lambda_\phi &= \frac{-\lambda_0 + \sqrt{2}\lambda_8}{\sqrt{3}} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

$\lambda_3$  и  $\lambda_8$  — матрицы Гелл-Мана,  $\lambda_0$  определена в (1.3).

Для вычисления данного процесса необходим фрагмент лагранжиана электродинамики:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{2}{3}eA_\mu\bar{u}\gamma^\mu u + \frac{1}{3}eA_\mu\bar{d}\gamma^\mu d + \frac{1}{3}eA_\mu\bar{s}\gamma^\mu s, \quad (3.6)$$

где  $e$  — элементарный заряд,  $A_\mu$  — полевая функция фотона.

Интегралы, возникающие в петлях перехода фотона в промежуточный векторный мезон, имеют такую же структуру, как и интегралы, появляющиеся в петлях перехода  $W$ -бозона в векторный мезон, рассмотренные в главе, посвященной распадам  $\tau$ -лептона.

На основе этих лагранжианов была получена амплитуда для процесса  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$ :

$$T = \frac{8\pi\alpha_{em}}{s}l^\mu \left\{ B_{(\gamma)} + B_{(\rho+\hat{\rho})} + B_{(\omega+\hat{\omega})} + B_{(\phi+\hat{\phi})} \right\}_{\mu\nu} e^{\nu\lambda\delta\sigma} p_{K\delta} p_{K^*\sigma} K_\lambda^*, \quad (3.7)$$

где  $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$  — константа электромагнитного взаимодействия,  $s = (p_{e^-} + p_{e^+})^2$  — квадрат суммарного импульса начальных лептонов,  $l^\mu = \bar{e}\gamma^\mu e$  — лептонный ток.

Антисимметричный тензор возник из кварковых треугольников.

Слагаемое  $B_{(\gamma)}$  соответствует вкладу от контактной диаграммы. Слагаемые  $B_{(\rho+\hat{\rho})}$ ,  $B_{(\omega+\hat{\omega})}$  и  $B_{(\phi+\hat{\phi})}$  соответствуют вкладам от диаграмм с промежуточными векторными мезонами в основных и возбужденных состояниях.

Эти вклады имеют вид:

$$\begin{aligned} B_{(\gamma)\mu\nu} &= \frac{2}{3} [2m_s I_{21}^{K^*K}(m_u, m_s) - m_u I_{12}^{K^*K}(m_u, m_s)] g_{\mu\nu}, \\ B_{(\rho+\hat{\rho})\mu\nu} &= \frac{m_s}{g_\rho} \left[ C_\rho \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho} I_{21}^{\rho K^*K}(m_u, m_s) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\pi} C_{\hat{\rho}} \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_{\hat{\rho}}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\hat{\rho}}} I_{21}^{\hat{\rho} K^*K}(m_u, m_s) \right], \\ B_{(\omega+\hat{\omega})\mu\nu} &= \frac{m_s}{3g_\omega} \left[ C_\omega \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_\omega^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\omega} I_{21}^{\omega K^*K}(m_u, m_s) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\pi} C_{\hat{\omega}} \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_{\hat{\omega}}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\hat{\omega}}} I_{21}^{\hat{\omega} K^*K}(m_u, m_s) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{(\phi+\hat{\phi})\mu\nu} = & -\frac{2m_u}{3g_\phi} \left[ C_\phi \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_\phi^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\phi} I_{12}^{\phi K^*K}(m_u, m_s) \right. \\
& \left. + e^{i\pi} C_{\hat{\phi}} \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_{\hat{\phi}}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\hat{\phi}}} I_{12}^{\hat{\phi} K^*K}(m_u, m_s) \right], \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где  $M_\rho = 775.26 \pm 0.25$  МэВ,  $M_{\hat{\rho}} = 1465 \pm 25$  МэВ,  $M_\omega = 782.65 \pm 0.12$  МэВ,  $M_{\hat{\omega}} = 1400 - 1450$  МэВ,  $M_\phi = 1019.461 \pm 0.019$  МэВ,  $M_{\hat{\phi}} = 1680 \pm 20$  MeV,  $\Gamma_\rho = 149.1 \pm 0.8$  МэВ,  $\Gamma_{\hat{\rho}} = 400 \pm 60$  МэВ,  $\Gamma_\omega = 8.49 \pm 0.08$  МэВ,  $\Gamma_{\hat{\omega}} = 180 - 250$  МэВ,  $\Gamma_\phi = 4.266 \pm 0.031$  МэВ,  $\Gamma_{\hat{\phi}} = 150 \pm 50$  МэВ — массы и полные ширины распада промежуточных векторных мезонов [57].

Член, описывающий контактную диаграмму, содержит два слагаемых. Это связано с двумя вариантами распределения夸克ов в треугольнике контактной диаграммы данного процесса. Наличие двух вариантов обусловлено тем, что фотон может распадаться как на два  $u$ -кварка, так и на два  $s$ -кварка.

В остальных членах первое слагаемое соответствует вкладу от основного состояния мезона, второе слагаемое — от его первого радиального возбуждения.

Градиентно-инвариантные тензорные структуры в числителях возникают из кварковых петель перехода фотона в промежуточные векторные мезоны. Градиентная инвариантность этих структур обусловлена тем, что промежуточные мезоны содержат кварк-антикварковые пары одного аромата каждая.

Константы  $C_\rho$ ,  $C_{\hat{\rho}}$ ,  $C_\omega$ ,  $C_{\hat{\omega}}$ ,  $C_\phi$  и  $C_{\hat{\phi}}$  также возникли из кварковых петель перехода фотона в соответствующие мезоны. Они имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
C_\rho &= \frac{1}{\sin(2\theta_\rho^0)} [\sin(\theta_\rho + \theta_\rho^0) + R_{uu} \sin(\theta_\rho - \theta_\rho^0)], \\
C_{\hat{\rho}} &= \frac{-1}{\sin(2\theta_\rho^0)} [\cos(\theta_\rho + \theta_\rho^0) + R_{uu} \cos(\theta_\rho - \theta_\rho^0)], \\
C_\omega &= \frac{1}{\sin(2\theta_\omega^0)} [\sin(\theta_\omega + \theta_\omega^0) + R_{uu} \sin(\theta_\omega - \theta_\omega^0)], \\
C_{\hat{\omega}} &= \frac{-1}{\sin(2\theta_\omega^0)} [\cos(\theta_\omega + \theta_\omega^0) + R_{uu} \cos(\theta_\omega - \theta_\omega^0)], \\
C_\phi &= \frac{1}{\sin(2\theta_\phi^0)} [\sin(\theta_\phi + \theta_\phi^0) + R_{ss} \sin(\theta_\phi - \theta_\phi^0)],
\end{aligned}$$

$$C_{\hat{\phi}} = \frac{-1}{\sin(2\theta_\phi^0)} [\cos(\theta_\phi + \theta_\phi^0) + R_{ss} \cos(\theta_\phi - \theta_\phi^0)]. \quad (3.9)$$

Как видно из полученных выражений, численные константы, возникающие в кварковой петле перехода фотона в промежуточные  $\rho$ -мезоны совпадают с константами из петли перехода  $W$ -бозона в промежуточные  $\rho$ -мезоны (2.55).

Массы кварков в амплитуде возникли из кварковых треугольников. В этих треугольниках в рассматриваемом процессе возникают интегралы Вес-Зуминовского типа. В стандартной модели НИЛ это были бы сходящиеся интегралы, не нуждающиеся в регуляризации. В расширенной же модели НИЛ из-за наличия формфакторов в числитеle эти интегралы расходятся и требуют использования параметра обезания. Эти интегралы имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} I_{21}^{KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)^2 (m_s^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{12}^{KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)(m_s^2 - k^2)^2} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{21}^{\rho KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_\rho a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)^2 (m_s^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{21}^{\hat{\rho} KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_\rho a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)^2 (m_s^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{21}^{\omega KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_\omega a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)^2 (m_s^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{21}^{\hat{\omega} KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_\omega a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)^2 (m_s^2 - k^2)} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{12}^{\phi KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_\phi a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)(m_s^2 - k^2)^2} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{12}^{\hat{\phi} KK^*}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_\phi a_K a_{K^*}}{(m_u^2 - k^2)(m_s^2 - k^2)^2} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $a_K$  и  $a_{K^*}$  определены в (2.21),  $a_\rho$  и  $b_\rho$  определены в (2.48),  $a_\omega$ ,  $b_\omega$ ,  $a_\phi$  и  $b_\phi$  определены в (3.2).

К сожалению, модель НИЛ не может описать относительную фазу между основным и возбужденным состояниями. Поэтому, приходится брать фазу из экспериментальных данных [68]. Аналогично предшествующим работам [69] по электрон-позитронной аннигиляции в модели НИЛ мы используем множитель  $e^{i\pi}$  для возбужденных состояний.

Сечение данного процесса можно получить с использованием квадрата его амплитуды:

$$\sigma = \frac{1}{2^5 \pi^2 s \varepsilon_{K^*} \varepsilon_K} \int |T|^2 \delta(p_{e^+} + p_{e^-} - p_K - p_{K^*}) d^3 p_{K^*} d^3 p_K, \quad (3.11)$$

Зависимость поперечного сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$  от энергии сталкивающихся лептонов, изображена на рис. 3.3. Сплошная линия соответствует теоретическому сечению, полученному в рамках расширенной модели НИЛ, точки соответствуют экспериментальным данным [70].

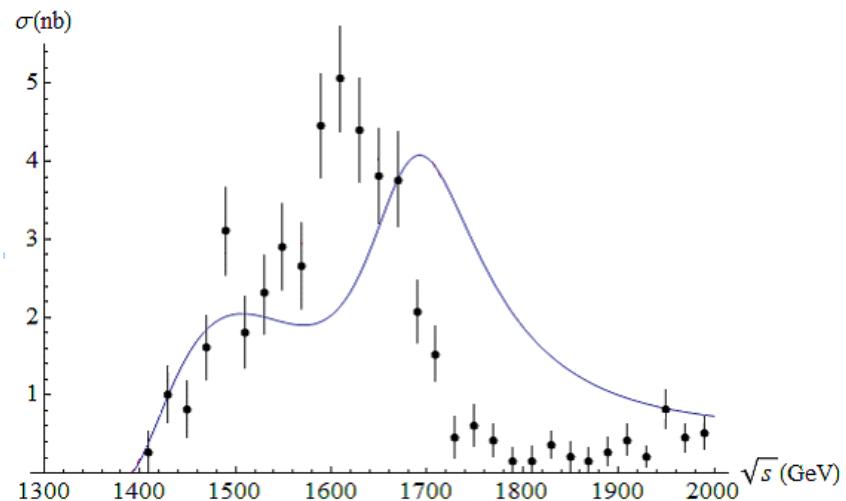


Рис. 3.3: Поперечное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$ .

Как видно из графика, теоретическая кривая повторяет форму экспериментальной кривой и с левой стороны хорошо согласуется с ней. Однако затем происходит ее смещение, и с правой стороны она проходит выше экспериментальных данных.

Теоретическое описание данного процесса было успешно выполнено в работе [71] в рамках эффективной киральной теории поля. Однако в этой работе использовались произвольные параметры и первый пик не был описан.

Процесс  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(1410)$  вычисляется аналогично. Полученное в рамках расширенной модели НИЛ сечение для этого процесса изображено на рис. 3.4.

При этом необходимо учитывать что в области энергии, в которой протекает процесс  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(1410)$  расширенная модель НИЛ может давать

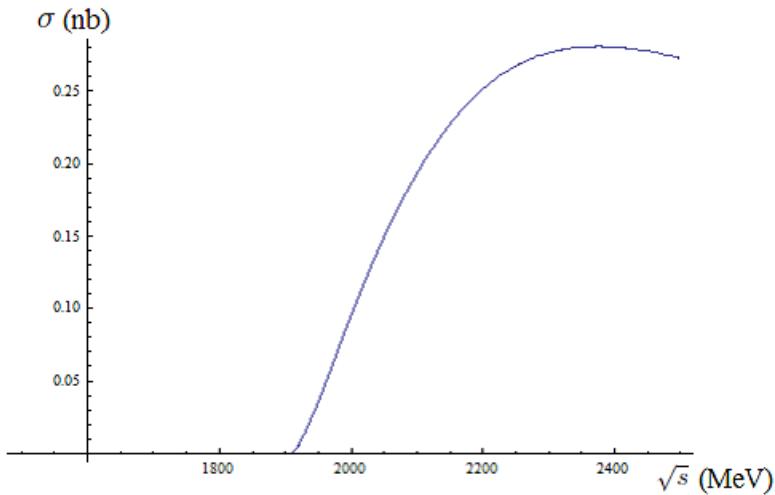


Рис. 3.4: Поперечное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$ .

только качественные оценки.

### 3.2 Процесс $e^+e^- \rightarrow (\eta, \eta'(958))(\phi(1020), \phi(1680))$

Диаграммы для процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$  изображены на рис. 3.5, 3.6.

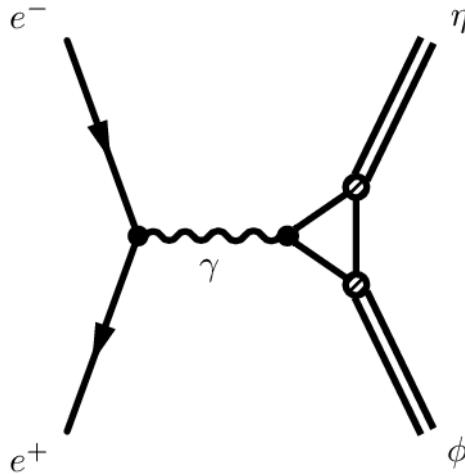


Рис. 3.5: Процесс  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$  с промежуточным фотоном (контактная диаграмма).

Как и в предыдущем случае, из-за наличия фотона данный процесс не может идти с промежуточным псевдоскалярным или аксиально-векторным мезоном. Фотон также требует электрической нейтральности промежуточного мезона. В конечных состояниях находятся нестранные частицы, поэтому в качестве промежуточных странные мезоны выступать не могут. Однако в отличие

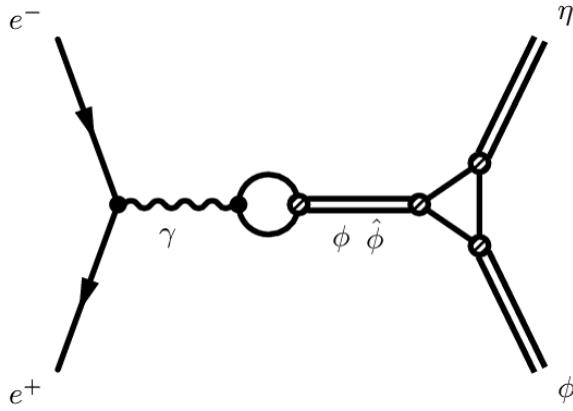


Рис. 3.6: Процессы  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$  с промежуточными векторными мезонами.

от предыдущего примера, в конечном состоянии находится  $\phi$ -мезон, состоящий только из  $s$ -кварков. Поэтому  $s$ -кварк должен входить в состав промежуточного мезона. Следовательно, в данном процессе в качестве промежуточного можно рассматривать только  $\phi$ -мезон.

Порог рождения конечных мезонов находится выше массы основного состояния  $\phi(1020)$ . Поэтому первые радиальные возбуждения вносят существенный вклад и не могут быть отброшены. Следовательно для вычисления данного процесса необходимо использовать расширенную модель НИЛ.

Лагранжиан взаимодействия, необходимый для вычисления данного процесса имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}(\bar{q}, q, \eta, \eta', \phi) = & \bar{q} \left[ \frac{1}{2} \gamma^\mu \lambda_\phi (a_\phi \phi_\mu + b_\phi \hat{\phi}_\mu) \right. \\ & \left. + i \gamma^5 \sum_{j=u,s} \lambda_j \sum_{\tilde{\eta}=\eta,\eta',\hat{\eta},\hat{\eta}'} c_{\tilde{\eta}}^j \tilde{\eta} \right] q, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $\eta$  и  $\phi$  — псевдоскалярные и векторные мезонные поля, шляпкой обозначены первые радиальные возбуждения.

Коэффициенты  $a_\phi$  и  $b_\phi$  определены в (3.2), множители  $c$  определены в (2.24).

Матрицы  $\lambda_u$ ,  $\lambda_s$  и  $\lambda_\phi$  определены в (1.7) и (3.5).

Электродинамический лагранжиан, необходимый для вычисления этого процесса, приведен в (3.6).

Амплитуда процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$  в расширенной модели НИЛ принимает вид:

$$T = \frac{4\pi\alpha_{em}}{s} l^\mu \frac{8m_s}{3s} \left\{ I_{03}^{\phi\eta}(m_u, m_s) g_{\mu\nu} + \frac{C_\phi}{g_\phi} I_{03}^{\phi\phi\eta}(m_u, m_s) \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_\phi^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\phi} + e^{i\pi} \frac{C_{\hat{\phi}}}{g_{\hat{\phi}}} I_{03}^{\hat{\phi}\phi\eta}(m_u, m_s) \frac{g_{\mu\nu}s - q_\mu q_\nu}{M_{\hat{\phi}}^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\hat{\phi}}} \right\} e^{\nu\lambda\delta\sigma} p_{\eta\delta} p_{\phi\sigma} \phi_\lambda. \quad (3.13)$$

Антисимметричные тензоры также возник из кварковых треугольников.

Первое слагаемое описывает контактную диаграмму. Второе и третье слагаемые соответствуют диаграммам с основным и возбужденным промежуточным мезоном соответственно.

Как и в предыдущем случае, благодаря тому, что промежуточные  $\phi$ -мезоны состоят из кварков одного аромата и, следовательно, имеющих одинаковую массу, из кварковой петли перехода фотона в эти промежуточные мезоны возникает градиентно-инвариантная тензорная структура.

Из этой же кварковой петли образуются константы  $C_\phi$  и  $C_{\hat{\phi}}$ , совпадающие с аналогичными константами в предыдущем процессе. Их явный вид приведен в (3.9).

Все кварковые петли в данном процессе содержат только  $s$ -кварки. Интегралы по соответствующим кварковым треугольникам принимают вид:

$$\begin{aligned} I_{03}^{\phi\eta}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_\phi c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)^3} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{03}^{\phi\phi\eta}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{a_\phi a_\phi c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)^3} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k, \\ I_{03}^{\hat{\phi}\phi\eta}(m_u, m_s) &= -i \frac{N_c}{(2\pi)^4} \int \frac{b_\phi a_\phi c_\eta^s}{(m_s^2 - k^2)^3} \theta(\Lambda_3^2 - \vec{k}^2) d^4k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Как и в предыдущем примере, в данном процессе мы также используем фазовый множитель  $e^{i\pi}$  перед вкладами с возбужденным состоянием мезона.

Сечение процесса вычисляется тем же способом, как и в предыдущем случае.

На рис. 3.7 изображена зависимость сечения процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$  от энергии сталкивающихся лептонов.

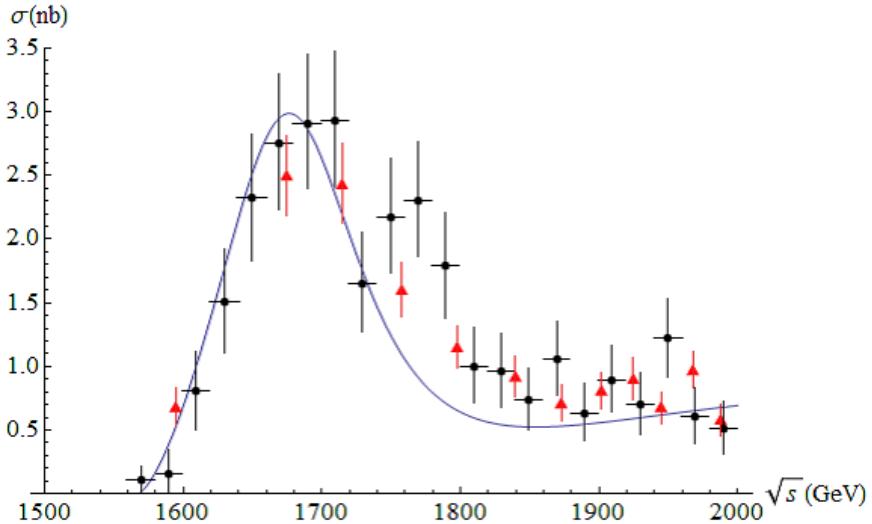


Рис. 3.7: Поперечное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$ .

Сплошная кривая описывает теоретическое сечение процесса, вычисленное в расширенной модели НИЛ. Круглые точки соответствуют экспериментальным значениям, полученным коллаборацией BaBar [70]. Треугольники соответствуют экспериментальным данным с ускорителя ВЭПП-2000 в Новосибирске [72].

Как видно из графика, в области меньших энергий теоретическая кривая хорошо согласуется с экспериментальными данными. В области же более высоких энергий экспериментальная кривая коллаборации BaBar содержит небольшой второй подъем, который отсутствует в экспериментальной кривой с ВЭПП-2000. Следовательно, полученные нами результаты лучше согласуются с более поздними данными с новосибирского ускорителя.

Процессы с возбужденным мезоном  $\phi(1680)$  и с мезоном  $\eta'(958)$  в конечных состояниях вычисляются аналогично. Предсказания для сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow \eta'(958)\phi(1020)$  и  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1680)$  представлены на рис. 3.8, 3.9 соответственно.

Однако необходимо учитывать, что в этой области энергий модель НИЛ может давать только качественные оценки.

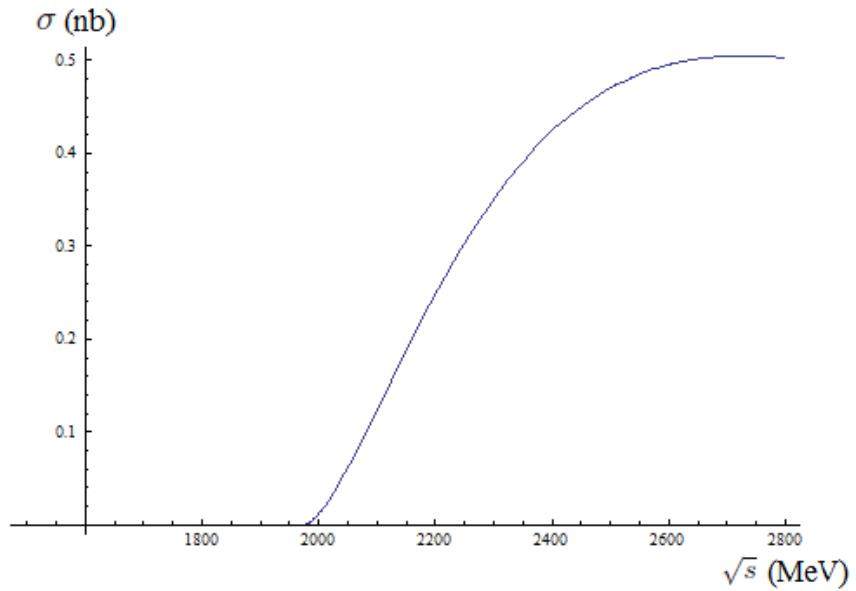


Рис. 3.8: Поперечное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta'(958)\phi(1020)$ .

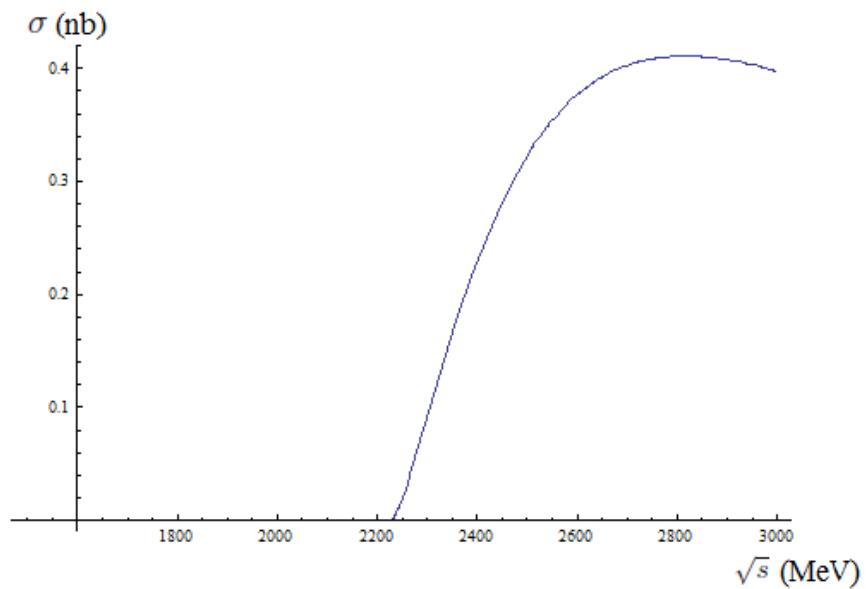


Рис. 3.9: Поперечное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1680)$ .

Таким образом, в рамках модели НИЛ оказывается возможным удовлетворительно описывать процессы электрон-позитронной аннигиляции в странные мезоны и с участием  $\phi$ -мезонов в конечных состояниях без использования дополнительных произвольных параметров.

Результаты, описанные в последних двух параграфах были опубликованы в работе [A5].

### 3.3 Основные выводы

В данной главе были описаны в рамках модели Намбу–Иона–Лазинио процессы электрон–позитронной аннигиляции в мезоны:  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(892)$ ,  $e^+e^- \rightarrow K^\pm K^{*\mp}(1410)$ ,  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1020)$ ,  $e^+e^- \rightarrow \eta'(958)\phi(1020)$  и  $e^+e^- \rightarrow \eta\phi(1680)$ . Были получены амплитуды этих процессов, с помощью которых были вычислены полные сечения. Были построены графики зависимости полных сечений от энергии сталкивающихся лептонов.

Для первых двух процессов в качестве промежуточных мезонов рассматривались векторные  $\rho$ -,  $\phi$ - и  $\omega$ -мезоны в основном и первом радиально-возбужденном состоянии. Для последних трех — только  $\phi$ -мезоны, т.к. кварковые петли в диаграммах, соответствующих этим процессам не могут содержать  $u$ - или  $d$ -夸克.

Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Таким образом, были исследованы не рассматривавшиеся ранее в рамках модели НИЛ процессы электрон–позитронной аннигиляции с участием странных мезонов, а также с  $\phi$ -мезонами в конечных состояниях. В результате было показано, что описание таких процессов в модели НИЛ также может быть выполнено без введения дополнительных произвольных параметров.

# Заключение

Основные результаты диссертации:

- Выполнен расчет процессов странных распадов  $\tau$ -лептона в псевдоскалярные мезоны  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ ,  $\tau \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  и  $\tau \rightarrow K^-K^0\nu_\tau$  в рамках модели НИЛ. Были получены парциальные и дифференциальные ширины этих распадов. Выполнен сравнительный анализ с экспериментальными работами и теоретическими работами других авторов. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Это завершило расчет серии трехчастичных  $\tau$ -распадов с псевдоскалярными мезонами в конечных состояниях. Таким образом, было показано, что процессы распадов  $\tau$ -лептона с участием странных мезонов также могут быть успешно расчитаны в рамках модели НИЛ.
- Выполнен расчет процессов  $e^+e^-$ -аннигиляции в псевдоскалярный и векторный мезоны  $e^+e^- \rightarrow K^{*\pm}(892)K^\mp$  и  $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)\eta$  в рамках модели НИЛ. Были получены их полные сечения. Выполнен сравнительный анализ с экспериментальными работами и теоретическими работами других авторов. Полученные результаты находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными. Таким образом, было показано, что процессы электрон-позитронной аннигиляции с участием странных мезонов, а также с участием  $\phi$ -мезонов в конечном состоянии могут быть успешно расчитаны в рамках модели НИЛ.
- Сделаны предсказания для парциальной и дифференциальной ширины процесса  $\tau \rightarrow K^-\eta'(958)\nu_\tau$ , а также полных сечений процессов  $e^+e^- \rightarrow K^{*\pm}(1410)K^\mp$ ,  $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)\eta'(958)$  и  $e^+e^- \rightarrow \phi(1680)\eta$  в рамках модели НИЛ.
- Впервые рассмотрены поляризационные эффекты  $\tau$ -распадов с использованием модели НИЛ на примере процесса  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$ . Была получе-

на оценка влияния учета поляризации  $\tau$ -лептона на дифференциальную ширину. Получена зависимость этого влияния от величины инвариантной массы конечных мезонов и отношения их энергий для случая поперечной поляризации  $\tau$ -лептона.

## Список публикаций по теме диссертации

- A1. Volkov M. K., Pivovarov A. A. The decay  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  in the Nambu-Jona-Lasinio model // Mod. Phys. Lett. A. 2016 Vol. 31, no. 07. P. 1650043.
- A2. Volkov M. K., Pivovarov A. A. Decays  $\tau \rightarrow (\eta, \eta')K^-\nu_\tau$  in the extended Nambu-Jona-Lasinio model // JETP Lett. 2016 Vol. 103, no. 10. P. 613-617.
- A3. Volkov M. K., Pivovarov A. A. The decay  $\tau \rightarrow K^0K^-\nu_\tau$  in the extended Nambu-Jona-Lasinio model // Mod. Phys. Lett. A. 2016 Vol. 31, no. 23. P. 1650138.
- A4. Pivovarov A. A., Teryaev O. V. The polarization effects of the process  $\tau \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  in the Nambu-Jona-Lasinio model // Pisma v ZhETF 2016 Vol. 104, no. 8. P. 545-546.
- A5. Volkov M. K., Pivovarov A. A. The processes  $e^+e^- \rightarrow K^\pm(K^{*\mp}(892), K^{*\mp}(1410))$  and  $e^+e^- \rightarrow (\eta, \eta'(958))(\phi(1020), \phi(1680))$  in the extended Nambu-Jona-Lasinio model // Int. J. Mod. Phys. A. 2016 Vol. 31, no. 27. P. 1650155.

## Список литературы

1. Lopez Castro G., Lopez Falcon D. A. VMD description of  $\tau \rightarrow (\omega, \phi)\pi\nu_\tau$  decays and the  $\omega - \phi$  mixing angle // Phys. Rev. D. 1996 Vol. 54. P. 4400-4402.
2. Finkemeier M., Mirkes E. The Scalar contribution to  $\tau \rightarrow K\pi\nu_\tau$  // Z. Phys. C. 1996 Vol. 72. P. 619-626.
3. Li B. A. Theory of tau mesonic decays // Phys. Rev. D. 1997 Vol. 55. P. 1436-1452.
4. Andrianov A. A., Andrianov V. A. Quasilocal quark models as effective theory of non-perturbative QCD // Int. J. Mod. Phys. A. 2005 Vol. 20. P. 1850-1854.
5. Palomar J. E. The role of pions and kaons in decays,  $g(\mu)-2$ , the running of alpha(QED) and the muonium hyperfine splitting // Nucl.Phys.Proc.Suppl. 2003 Vol. 121. P. 183-186.
6. Jamin M., Pich A., Portoles J. Spectral distribution for the decay  $\tau \rightarrow \nu_\tau K\pi$  // Phys. Lett. B. 2006 Vol. 640. P. 176-181.
7. Jamin M., Pich A., Portoles J. What can be learned from the Belle spectrum for the decay  $\tau \rightarrow \nu_\tau K_S\pi$  // Phys. Lett. B. 2008 Vol. 664. P. 78-83.
8. Boito D. R., Escribano R., Jamin M.  $K\pi$  vector form-factor, dispersive constraints and  $\tau \rightarrow \nu_\tau K\pi$  decays // Eur. Phys. J. C. 2009 Vol. 59. P. 821-829.
9. Nussinov S., Soffer A. Estimate of the Branching Fraction of  $\tau \rightarrow \pi\eta'\nu_\tau$  // Phys. Rev. D. 2009 Vol. 80. P. 033010.

10. Boito D. R., Escribano R., Jamin M.  $K\pi$  vector form factor constrained by  $\tau \rightarrow K\pi\nu_\tau$  and  $K_{l3}$  decays // JHEP. 2010 Vol. 1009. P. 031.
11. Czyz H., Grzelinska A., Kuhn J. H. Narrow resonances studies with the radiative return method // Phys. Rev. D. 2010 Vol. 81. P. 094014.
12. Dubnicka S., Dubnickova A. Z. Analyticity in a phenomenology of electro-weak structure of hadrons // Acta. Phys. Slov. 2010 Vol. 60. P. 1-153.
13. Paver N., Riazuddin. On the branching ratio of the 'second class'  $\tau \rightarrow \eta'\pi\nu_\tau$  decay // Phys. Rev. D. 2011 Vol. 84. P. 017302.
14. Dumm D. G., Roig P. Resonance Chiral Lagrangian analysis of  $\tau^- \rightarrow \eta^{(\prime)}\pi^-\pi^0\nu_\tau$  decays // Phys. Rev. D. 2012 Vol. 86. P. 076009.
15. Calderon G., Munoz J. H., Vera C. E. Axial-vector mesons from  $\tau \rightarrow AP\nu_\tau$  decays // Phys. Rev. D. 2013 Vol. 87, no. 11. P. 114011.
16. Escribano R., Gonzalez-Solis S., Roig P.  $\tau^- \rightarrow K^-\eta^{(\prime)}\nu_\tau$  decays in Chiral Perturbation Theory with Resonances // JHEP. 2013 Vol. 1310. P. 039.
17. Escribano R., Gonzalez-Solis S., Jamin M., Roig P. Combined analysis of the decays  $\tau^- \rightarrow K_S\pi^-\nu_\tau$  and  $\tau^- \rightarrow K^-\eta\nu_\tau$  // JHEP. 2014 Vol. 1409. P. 042.
18. Kang X.-W., Kubis B., Hanhart C., Meiβner U.-G.  $B_{l4}$  decays and the extraction of  $|V_{ub}|$  // Phys. Rev. D. 2014 Vol. 89. P. 053015.
19. Nambu Y. Jona-Lasinio G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity // Phys. Rev. 1961 Vol. 122. P. 345-358.
20. Eguchi T. A New Approach to Collective Phenomena in Superconductivity Models // Phys. Rev. D. 1976 Vol. 14. P. 2755.
21. Kikkawa K. Quantum Corrections in Superconductor Models // Prog. Theor. Phys. 1976 Vol. 56. P. 947.

22. Volkov M. K., Ebert D. Four - Quark Interactions As A Common Source Of The Vector Meson Dominance And Sigma Model // Yad. Fiz. 1982 Vol. 36. P. 1265-1277.
23. Ebert D., Volkov M. K. Composite Meson Model with Vector Dominance Based on U(2) Invariant Four Quark Interactions // Z. Phys. C. 1983 Vol. 16. P. 205.
24. Volkov M. K. Meson Lagrangians in a Superconductor Quark Model // Annals Phys. 1984 Vol. 157. P. 282-303.
25. Volkov M. K., Kreopalov D. V. The Decay  $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$  in the Model of Mesons With Quark Loops // Sov. J. Nucl. Phys. 1983 Vol. 37. P. 770 [Yad. Fiz. 1983 Vol. 37. P. 1297-1302].
26. Volkov M. K. Radiative Decays of  $\phi$ ,  $e$ ,  $D$  and A1 Mesons // Yad. Fiz. 1984 Vol. 40. P. 974-976.
27. Volkov M. K., Osipov A. A. Decays Of The B,h,h',q1, And Q2 Mesons In The Quark-model Of The Superconducting Type // Sov. J. Nucl. Phys. 1985 Vol. 41. P. 500-503 [Yad. Fiz. 1985 Vol. 41. P. 785-790].
28. Volkov M. K., Osipov A. A. Polarizability Of Pions And Kaons In Superconductor Quark Model // Yad. Fiz. 1985 Vol. 41. P. 1027-1034.
29. Hatsuda T., Kunihiro T. Possible Critical Phenomena Associated With The Chiral Symmetry Breaking // Phys. Lett. B. 1984 Vol. 145. P. 7-10.
30. Hatsuda T., Kunihiro T. Fluctuation Effects in Hot Quark Matter: Precursors of Chiral Transition at Finite Temperature // Phys. Rev. Lett. 1985 Vol. 55. P. 158-161.
31. Volkov M. K. Low-energy Meson Physics in the Quark Model of Superconductivity Type // Sov. J. Part. Nucl. 1986 Vol. 17. P. 186 [Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra 1986 Vol. 17. P. 433-471].

32. Ebert D., Reinhardt H. Effective Chiral Hadron Lagrangian with Anomalies and Skyrme Terms from Quark Flavor Dynamics // Nucl. Phys. B 1986 Vol. 271. P. 188-226.
33. Vogl U. and Weise W. The Nambu and Jona Lasinio model: Its implications for hadrons and nuclei // Prog. Part. Nucl. Phys. 1991 Vol. 27. P. 195-272.
34. Klevansky S. P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics // Rev. Mod. Phys. 1992 Vol. 64. P. 649-708.
35. Volkov M. K. Effective chiral Lagrangians and the Nambu-Jona-Lasinio model // Phys. Part. Nucl. 1993 Vol. 24. P. 35-58.
36. Ebert D., Reinhardt H., Volkov M. K. Effective hadron theory of QCD // Prog. Part. Nucl. Phys. 1994 Vol. 33. P. 1-120.
37. Volkov M. K., Weiss C. A Chiral Lagrangian for excited pions // Phys. Rev. D 1997 Vol. 56. P. 221-229.
38. Volkov M. K. The Pseudoscalar and vector excited mesons in the  $U(3) \times U(3)$  chiral model // Phys. Atom. Nucl. 1997 Vol. 60. P. 1920-1929 [Yad. Fiz. 1997 Vol. 60, no. 11. P. 2094-2103].
39. Volkov M. K., Ebert D., Nagy M. Excited pions, rho and omega mesons and their decays in a chiral  $SU(2) \times SU(2)$  Lagrangian // Int. J. Mod. Phys. A 1998 Vol. 13. P. 5443-5458.
40. Volkov M. K., Yudichev V. L. Radially excited scalar, pseudoscalar, and vector meson nonets in a chiral quark model // Phys. Part. Nucl. 2000 Vol. 31. P. 282-311 [Fiz. Elem. Chast. At. Yadra 2000 Vol. 31. P. 576-633].
41. Volkov M. K., Radzhabov A. E. The Nambu-Jona-Lasinio model and its development // Phys. Usp. 2006 Vol. 49. P. 551-561.
42. Ahmadov A. I., Volkov M. K. The Decay  $\tau \rightarrow (\pi, \pi')\nu_\tau$  in the Nambu-Jona-Lasinio model // Phys. Part. Nucl. Lett. 2015 Vol. 12, no. 6. P. 744-750.

43. Volkov M. K., Arbuzov A. B., Kostunin D. G. The decay  $\tau \rightarrow \pi\omega\nu$  in the extended NJL model // Phys. Rev. D 2012 Vol. 86. P. 057301.
44. Kostunin D. G., Vishneva A. V., Volkov M. K. The decay  $\tau \rightarrow f_1\pi\nu_\tau$  in the Nambu-Jona-Lasinio model // Eur. Phys. J. A. 2014 Vol. 50. P. 137.
45. Volkov M. K., Kostunin D. G. The decays  $\rho^- \rightarrow \eta\pi^-$  and  $\tau^- \rightarrow \eta(\eta')\pi^-\nu$  in the NJL model // Phys. Rev. D 2012 Vol. 86. P. 013005.
46. Volkov M. K., Kostunin D. G.  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\nu_\tau$  decay in the extended NJL model // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013 Vol. 10. P. 7-10.
47. Volkov M. K., Arbuzov A. B., Kostunin D. G. The  $e^+e^- \rightarrow \eta(\eta')2\pi$  process in the extended Nambu-Jona-Lasinio model // Phys. Rev. C. 2014 Vol. 89, no. 1. P. 015202.
48. Gakh G. I., Konchatnij M. I., Merenkov N.P. Azimuthal distributions in radiative decay of a polarized t lepton // J. Exp. Theor. Phys. 2016 Vol. 122, no. 1. P. 78-95 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. 2016 Vol. 149. P. 93-111].
49. Efremov A. V., Teryaev O. V. On Spin Effects in Quantum Chromodynamics // Sov. J. Nucl. Phys. 1982 Vol. 36. P. 140 [Yad. Fiz. 1982 Vol. 36. P. 242-246].
50. Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Volkov M. K. Processes  $e^+e^- \rightarrow \pi^0(\pi^0')\gamma$  in the NJL model // Eur. Phys. J. A. 2011 Vol. 47. P. 103.
51. Arbuzov A. B., Kuraev E. A., Volkov M. K. Production of  $\omega\pi^0$  pair in electron-positron annihilation // Phys. Rev. C. 2011 Vol. 83. P. 048201.
52. Ahmadov A. I., Kuraev E. A., Volkov M. K. Production of  $\pi^0\rho^0$  Pair in Electron-Positron Annihilation in the Nambu-Jona-Lasinio Model // Phys. Part. Nucl. Lett. 2012 Vol. 9. P. 461-464.
53. Volkov M. K., Kostunin D. G. The processes  $e^+e^- \rightarrow \pi\pi(\pi')$  in the extended NJL model // Phys. Rev. C. 2012 Vol. 86. P. 025202.

54. Ahmadov A. I., Kostunin D. G., Volkov M. K. Processes of  $e^+e^- \rightarrow [\eta, \eta', \eta(1295), \eta(1475)]\gamma$  in the extended Nambu-Jona-Lasinio model // Phys. Rev. C. 2014 Vol. 89, no. 3. P. 039901.
55. 't Hooft Symmetry Breaking Through Bell-Jackiw Anomalies // Phys. Rev. Lett. 1976 Vol. 37. P. 8-11.
56. Volkov M. K., Yudichev V. L. Scalar mesons and glueball in a quark model allowing for gluon anomalies // Eur. Phys. J. A. 2001 Vol. 10. P. 109-117.
57. Olive K. A. et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics // Chin. Phys. C. 2014 Vol. 38. P. 090001.
58. Aubert B. et al. (BaBar Collaboration). Measurement of the  $\tau^- \rightarrow K^-\pi^0\nu_\tau$  branching fraction // Phys. Rev. D. 2007 Vol. 76. P. 051104.
59. Bednyakov V. A., Osipov A. A. Strangeness changing vector currents in tau lepton decays // JINR-E2-92-16 (1992)
60. Inami K. et al. (Belle Collaboration). Precise measurement of hadronic tau-decays with an eta meson // Phys. Lett. B. 2009 Vol. 672. P. 209-218.
61. del Amo Sanchez P. et al. (BaBar Collaboration). Studies of  $\tau^- \rightarrow \eta K^-\nu_\tau$  and  $\tau^- \rightarrow \eta\pi^-\nu_\tau$  at BaBar and a search for a second-class current // Phys. Rev. D. 2011 Vol. 83. P. 032002.
62. Aston D. et al. The Strange Meson Resonances Observed in the Reaction  $K^-p \rightarrow \bar{K}0\pi^+\pi^-n$  at 11-GeV/c // Nucl. Phys. B. 1987 Vol. 292. P. 693.
63. Aston D. et al. Study of  $K^-\pi^+$  Scattering in the Reaction  $K^-p \rightarrow K^-\pi^+n$  at 11-GeV/c // Nucl. Phys. B. 1988 Vol. 296. P. 493-526.
64. Coan T. E. et al. (CLEO Collaboration). Decays of tau leptons to final states containing  $K_{s0}$  mesons // Phys. Rev. D. 1996 Vol. 53. P. 6037-6053.

65. Barate R. et al. (ALEPH Collaboration). One prong tau decays with kaons // Eur. Phys. J. C. 1999 Vol. 10. P. 1-18.
66. Ryu S. et al. (Belle Collaboration). Measurements of Branching Fractions of  $\tau$  Lepton Decays with one or more  $K_S^0$  // Phys. Rev. D. 2014 Vol. 89, no. 7. P. 072009.
67. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ. для вузов в 10 т. Т. IV Квантовая электродинамика. Москва "Наука" 1989, с. 134.
68. Achasov M. N. et al. Study of the  $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$  process with SND detector at the VEPP-2M  $e^+e^-$  collider // Phys. Rev. D. 2006 Vol. 74. P. 014016.
69. Volkov M. K., Arbuzov A. B. Low-energy processes of meson production in the extended Nambu–Jona-Lasinio model // Phys. Part. Nucl. 2016 Vol. 47. P. 489-507 [Fiz. Elem. Chast. Atom. Yadra 2016 Vol. 47. P. 489-507]
70. Aubert B. et al. (BaBar Collaboration). Measurements of  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-\eta$ ,  $K^+K^-\pi^0$  and  $K_s^0 K^\pm \pi^\mp$  cross- sections using initial state radiation events // Phys. Rev. D 2008 Vol. 77. P. 092002.
71. Yun-Hua Chen, Zhi-Hui Guo, Han-Qing Zheng. Radiative transition processes of light vector resonances in a chiral framework // Phys. Rev. 2014 Vol. 90. P. 034013.
72. Ivanov V. L. et al. Preliminary results of the cross-section measurement of  $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)\eta$  process with the CMD-3 detector at VEPP-2000 collider // Phys. Atom. Nucl. 2016 Vol. 79, no. 2. P. 251-259.