

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

Петросяна Давида Рафаеловича

«Вырожденные суперинтегрируемые системы на трехмерных

пространствах постоянной отрицательной кривизны»,

представленной на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.04.02 – теоретическая физика

В диссертации Петросяна Д.Р. рассматриваются классические и квантовые задачи динамики, связанные с движением точки в гиперболических пространствах (т.е. в пространствах постоянной отрицательной кривизны). Этот класс задач связан с изучением так называемых динамических симметрий, порождаемых дополнительными генераторами (интегралами), не коммутирующими с гамильтонианом. Системы с такими свойствами известны как суперинтегрируемые и встречаются как в задачах современной теории гравитации, так и в физике элементарных частиц, что свидетельствует об **актуальности** темы диссертации.

В частности, автор изучает две особые суперинтегрируемые системы на трехмерных гиперболических пространствах: гармонический осциллятор и систему Кеплера – Кулона. В классическом случае изучаются дополнительные интегралы движения, алгебра симметрий и траектории, а в квантовом случае исследуется решение задачи Шредингера на собственные значения и собственные функции методом разделения переменных. В этом последнем случае возможно использование разных систем координат, и поэтому возникает проблема перехода от одного базиса к другому. История этих исследований очень хорошо отражена во введении.

В **первой главе** предварительно изучается геодезическое движение на гиперболоиде с группой симметрии $SO(2,2)$, порожденной свободным гамильтонианом, записанным в псевдосферических координатах. Затем включается сферически-симметричный потенциал и изучается соответствующее уравнение Гамильтона – Якоби. В случае гармонического осциллятора находится дополнительный интеграл движения – тензор Демкова – Фрадкина, квадратичный по импульсу. Уравнение Гамильтона – Якоби решается методом разделения переменных и находятся траектории для различных значений энергии и квадрата лоренцева момента импульса.

6 В заключительной части главы исследуется движение в поле Кеплера – Кулона на $SO(2,2)$ - гиперboloиде. При этом также возникает дополнительный интеграл, аналог вектора Рунге – Ленца. Применяя метод разделения переменных, автор строит всевозможные семейства траекторий. Важно, что удается сформулировать условия замкнутости конечных орбит и доказать справедливость законов Кеплера.

Во второй главе рассматривается квантовый вариант задач первой главы. После разделения переменных в уравнении Шредингера выясняется, что угловая часть волновой функции является собственной функцией квадрата углового момента и описывает квантовое движение на двумерном однополостном гиперboloиде. При этом возникают две дискретные серии и одна непрерывная.

В случае гармонического осциллятора рассматриваются три типа координат: псевдосферические, цилиндрические и эквидистантные. Выписываются волновые функции непрерывного и дискретного спектра, и последний оказывается конечномерным. Строятся межбазисные разложения волновых функций для дискретного спектра и устанавливается, что коэффициенты перехода выражаются через полиномы Хана от дискретной переменной. В заключительной части главы дается решение задачи Кеплера – Кулона в псевдосферических координатах.

В третьей главе исследуется система Кеплера – Кулона на $SO(3,1)$ однополостном гиперboloиде в псевдосферических координатах. В классическом случае решается уравнение Гамильтона – Якоби и строится семейство траекторий для разных значений энергии и квадрата момента. В квантовом случае решается соответствующее уравнение Шредингера и выясняется, что помимо сферических координат, позволяющих разделить переменные, допустимы ещё и эллиптико-параболические координаты. Выписываются соответствующие волновые функции для дискретного и непрерывного спектров. В заключительной части главы полностью решается задача о гармоническом осцилляторе на $SO(1,3)$ двухполостном гиперboloиде.

В итоге следует отметить, что единственное возникшее после изучения диссертации критическое замечание касается только небрежного оформления диссертации, что выражается в многочисленных грамматических ошибках, а также – в отсутствии названий в некоторых

библиографических ссылках (это относится к ссылкам под номерами 27, 43, 51, 70, 75).

Диссертация Петросяна Д.Р. является законченным и чрезвычайно актуальным исследованием. Изложенные в ней результаты являются **новыми** и отражены в 4 публикациях в журналах из списка ВАК РФ. **Достоверность** полученных результатов подтверждается строгостью использованных методов исследований, опирающихся на хорошо разработанный аппарат теории дифференциальных уравнений. Основные результаты, полученные в диссертации, были широко представлены на российских и международных научных конференциях. Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации, которая отвечает требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Поэтому считаю, что автор Петросян Д.Р. заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика.

Заведующий кафедрой теоретической физики и механики
Российского университета дружбы народов,
доктор физико-математических наук, профессор



Ю.П. Рыбаков

Ученый секретарь Ученого совета
Российского университета дружбы народов,
доктор физико-математических наук, профессор



В.М. Савчин

25 мая 2016 года