# Программы расчета сечений и потенциалов ядро-ядерных взаимодействий в рамках высокоэнергетического приближения

Е.В.Земляная

Программы HEA-CRS и HEA-TOTAL реализуют метод Глаубера-Ситенко [1, 2], адаптированный к задаче ядро-ядерного рассеяния при промежуточных энергиях [3], и предназначены для расчета дифференциальных сечений упругого рассеяния и полных сечений реакций, а также для расчета ядро-ядерного потенциала и эйкональной фазы в рамках высокоэнергетического приближения (ВЭП).

Методы расчета детально изложены в работах [4, 5, 6, 7, 8]. Вычисления показывают, что в области применимости ВЭП ($E >> |\bar{U}|$, $k\bar{R} >> 1$, $\theta < \sqrt{2/(k\bar{R})}$, где $E$ – кинетическая энергия, $\bar{U}$ – значение потенциала в области его основного вклада на периферии взаимодействия, $k$ – импульс, $\bar{R}$ – характерный радиус потенциала, $\theta$ – угол рассеяния) согласие рассчитанных в данном подходе сечений с экспериментом достигается без подгонки параметров.

Обе программы написаны на языке Fortran. Комплект файлов содержит, кроме фортранных текстов, образцы входных и выходных файлов, иллюстрирующие работу программ в различных режимах на примере реакции $^{16}$O+$^{40}$Ca при энергии $E_{lab} = 1503$ МэВ ($E = 94$ МэВ/нуклон)

Ниже представлены основные формулы, а также дается описание входных данных и особенностей работы с программами.

## 1 Основные формулы

Дифференциальное сечение упругого ядро-ядерного рассеяния и полное сечение реакции вычисляются соответственно по формулам

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q)|^2, \tag{1}$$

и

$$\sigma_r = 2\pi \int_0^\infty db\, b\Big[1 - e^{-2\mathrm{Im}\Phi(b)}\Big], \tag{2}$$

где амплитуда $f(q)$ и фаза $\Phi(b)$ в рамках ВЭП имеют вид

$$f(q) = ik \int_0^\infty db\, bJ_0(qb)\Big[1 - e^{i\Phi(b)}\Big], \tag{3}$$

$$\Phi(b) = -\frac{1}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} dz\; U(\sqrt{b^2+z^2}) = \Phi_c + \Phi_N. \tag{4}$$

Здесь $q = 2k\sin(\theta/2)$ – переданный импульс, $\theta$ – угол рассеяния, $k$ – импульс, $\hbar$ – постоянная Планка, $v$ – скорость падающего ядра, $U(r) = U_c(r) + U_N(r)$ – потенциал, включающий кулоновскую $U_c(r)$ и ядерную $U_N(r) = V(r) + iW(r)$ части.

С учетом релятивистской кинематики величины $k$ и $v$ определяются из формул [9]

$$\hbar v \;=\; 197.327\,\frac{\sqrt{E_{lab}(E_{lab}+2A_p m)}}{E_l + A_p m}, \tag{5}$$

$$k \;=\; \frac{1}{197.327}\,\frac{A_t m\sqrt{E_{lab}(E_{lab}+2A_p m)}}{\sqrt{(A_p m + A_t m)^2 \;+\; 2A_t E_{lab} m}}, \tag{6}$$

где $E_{lab}$ - кинетическая энергия налетающего ядра в лабораторной системе координат (в МэВ), $m$=931.494, $A_p$ и $A_t$ – массовые числа падающего ядра и ядра-мишени.

Кулоновский потенциал $U_c(r)$ соответствует взаимодействию заряда $eZ_p$ падающего ядра с однородно распределенным зарядом $eZ_t$ ядра-мишени и равен

$$U_c(r) = U_B\frac{1}{2}[3 - \frac{r^2}{R_c^2}]\Theta(R_c - r) + U_B\frac{R_c}{r}\Theta(r - R_c), \tag{7}$$

где $U_B = Z_p Z_t e^2/R_c$, $R_c = r_c(A_p^{1/3} + A_t^{1/3})$. Соответствующая фаза известна в явном виде:

$$\Phi_c(b) = \begin{cases} 2\eta\Big[\ln(kR_c) + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{b^2}{R_c^2}}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{b^2}{R_c^2}}\left(4 - \frac{b^2}{R_c^2}\right)\Big], & b \le R_c \\ 2\eta\ln(kb), & b > R_c \end{cases} \tag{8}$$

При расчете амплитуды рассеяния (3) в присутствии кулоновского поля выделяется кулоновская амплитуда рассеяния на точечном заряде, так что [5]

$$f(q) = f_{pc}(q) + ik\int_0^{\infty} db\; bJ_0(qb)\; e^{i\Phi_{pc}}\left(1 - e^{i\Phi_N + i\delta\Phi_c}\right), \tag{9}$$

где

$$f_{pc}(q) = -\frac{2k\eta}{q^2}\; e^{-2i\eta\ln(q/2k) + 2i\sigma_0}, \tag{10}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{pc}(q)|^2. \tag{11}$$

Здесь $\delta\Phi_c = \Phi_c - \Phi_{pc}$, $\Phi_{pc} = 2\eta\ln(kb)$, $\Phi_c$ определяется по формуле (8), $\eta = (Z_p Z_t e^2)/(\hbar v)$ – параметр Зоммерфельда, $\sigma_0 = \arg\Gamma(1+i\eta)$, $d\sigma/d\Omega$ – резерфордовское сечение рассеяния в кулоновском поле.

В рамках микроскопического подхода мнимая часть ядерной фазы $\Phi_N(b)$ определяется по формуле [7, 8]

$$\chi(b) = 2\mathrm{Im}\Phi_N(b) = \bar{\sigma}_{NN}\int_0^{\infty} dq\; qJ_0(qb)\tilde{\rho}_p^{\circ}(q)\tilde{\rho}_t^{\circ}(q)f_N(q). \tag{12}$$

Здесь $\tilde{\rho}_i^\circ(q)$, $(i = p, t)$ – формфакторы точечных плотностей сталкивающихся ядер, $f_N(q) = \exp(-q^2 r_0^2/6)$ – формфактор нуклон-нуклонной амплитуды, $r_0 = \sqrt{0.658}$ фм – радиус нуклон-нуклонного взаимодействия, $\bar{\sigma}_{NN}$ – изотопически усредненное сечение нуклон-нуклонного взаимодействия, параметризованное в [10].

Учет кулоновского искажения траектории осуществляется путем замены в формулах (4) и (12) прицельного параметра $b$ на расстояние $b_c$ максимального сближения ядер в кулоновском поле:

$$b \to b_c = \bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + b^2}, \tag{13}$$

где $\bar{a} = Z_p Z_t e^2/2E$ – полурасстояние максимального сближения при $b = 0$.

Мнимая часть потенциала $W(r)$ восстанавливается из фазы и имеет вид [11]

$$W(r) = -\frac{E}{2k\pi^2}\sigma_{NN}\int_0^\infty dq\; q^2 j_0(qb)\tilde{\rho}_p^\circ(q)\tilde{\rho}_t^\circ(q)f(q), \tag{14}$$

Все величины, входящие в расчет, в принципе, известны из независимых экспериментов. Так, в [7] даны параметры $R$ и $a$ плотностей (а также соответствующие параметры $c$ и $d$ точечных плотностей) ядер в виде симметризованной ферми-функции (SF)

$$\rho_{SF}(r) = \rho(0)\frac{\sinh(R/a)}{\cosh(r/a) + \cosh(R/a)}, \quad \rho(0) = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3}[1 + (\pi a/R)^2)]^{-1}, \tag{15}$$

для которой фурье-образ известен в явном виде

$$\tilde{\rho}_{SF}(q) = -\rho(0)\frac{4\pi a}{q}\frac{d}{dq}[\sinh(qR)/\sinh(\pi a q)]. \tag{16}$$

Вещественная часть потенциала определяется формулой $V = \bar{\alpha}_{NN} W$, где $\bar{\alpha}_{NN}$ – изотопически усредненное отношение вещественной и мнимой частей $NN$-амплитуды рассеяния вперед, которое вычисляется согласно параметризации, выполненной в [12].

Полученные таким образом потенциалы могут использоваться для расчета упругих и неупругих процессов как на основе ВЭП, так и в рамках метода искаженых волн. Они также пригодны для оценок сечений реакций в прикладных целях.

# 2 Программа HEA-CRS

Программа HEA-CRS предназначена для расчета дифференциальных сечений упругого рассеяния ядро-ядерных взаимодействий в рамках ВЭП.

При запуске программы запрашивается имя файла с входными параметрами. Все входные данные задаются в свободном формате.

*Первая* строка входного файла должна содержать имя файла, где будут сохраняться численные результаты.

Во *второй* строке задаются: энергия $E_{lab}$ (МэВ), атомная масса ядра-мишени $A_t$, заряд ядра-мишени $Z_t$, атомная масса налетающего ядра $A_p$ и заряд налетающего ядра $Z_p$.

В *третьей* строке задается параметр $r_c$ кулоновского потенциала. Подразумевается, что $R_c = r_c \cdot (A_p^{1/3} + A_t^{1/3})$.

В *четвертой* строке задаются параметры численного интегрирования: число точек $N_R$ и длина интервала интегрирования $R_{max}$. Шаг численного интегрирования составляет $h = R_{max}/(N_R - 1)$.

В *пятой* строке задаются значения углов, для которых вычисляется дифференциальное сечение: начальный угол $\theta_{min}$, конечный угол $\theta_{max}$ и шаг по углу $\theta_{st}$ (все в градусах).

В *шестой* строке задается целое число KEY1. Если KEY1$\neq$0, фаза рассчитывается в форме Вудс-Саксона. При KEY1=0 фаза считывается из файла.

<u>При KEY1$\neq$ 0:</u>

– в *седьмой* строке задается еще один ключ KEY2. Если KEY2$\neq$ 0 – интегрирование осуществляется на основе приближенных аналитических формул [4]. При KEY2=0 осуществляется численное интегрирование.

– в *восьмой* строке задаются параметры Вудса-Саксона: $V$, $W$, $r_v$, $a_v$, $r_w$, $a_w$.

<u>При KEY1=0:</u>

– в *седьмой и восьмой* строках задаются имена входных файлов, в которых содержатся соответственно вещественная и мнимая часть фазы $\Phi_N(b)$. Подразумевается, что во второй колонке каждого из файлов содержатся значения фазы в точках $b = h \cdot (i - 1)$, $i = 1, ..., N_r$, всего $N_r$ точек. Первая колонка не используется.

– *девятая* строка содержит нормирующие коэффициенты $V_{koef}$ и $W_{koef}$, на которые умножаются соответственно вещественная и мнимая часть фазы.

Выходной файл содержит три колонки. В первой – углы; во второй – отношения рассчитанных для этих углов дифференциальных сечениям к резерфордовским $d\sigma/d\sigma_R$; в третьей - сами дифференциальные сечения $d\sigma/d\Omega$.

# 3 Программа HEA-TOTAL

Программа HEA-TOTAL предназначена для расчета полных сечений, фазы и потенциала ядро-ядерных взаимодействий.

При запуске программы запрашивается имя файла с входными параметрами. Все входные данные задаются в свободном формате.

*Первая* строка входного файла должна содержать имя файла, куда будут сохраняться численные результаты по полному сечению.

Во *второй* строке задается целое число KEY0. При KEY0=0 происходит вычисление и сохранение фазы $\chi(b)$ (которая определяется формулой (12)) и мнимой части потенциала $W(r)$ (см. формулу (14)). При любом другом значении KEY0 фаза и потенциал не рассчитываются.

<u>При KEY0=0:</u>

– В *третьей и четвертой* строках задаются имена выходных файлов соответственно для потенциала и фазы. После завершения работы программы каждый из этих файлов содержит по две колонки. Первая – аргумент ($b$ или $r$), вторая – соответственно $\chi(b)$ и $W(r)$.

– В *пятой* строке задаются: атомная масса налетающего ядра $A_p$, заряд налетающего ядра $Z_p$, атомная масса ядра мишени $A_t$, заряд ядра-мишени $Z_t$.

– В *шестой* строке задаются параметры численного интегрирования: число точек $N_R$ и длина интервала интегрирования $R_{max}$. Шаг численного интегрирования составляет $h = R_{max}/(N_R - 1)$.

– *Седьмая* строка содержит значение энергии $E$ (МэВ на нуклон падающего ядра).

– *Восьмая* строка содержит ключ KEY1. Если KEY1=0, функция распределения плотности ядра-мишени считывается из файла. Подразумевается, что вторая колонка файла содержит значения плотности в точках $q = h \cdot (i - 1)$, $i = 1, ..., N_R$. При KEY1≠0 используется плотность в виде симметризованной ферми-функции с заданными параметрами.

– *Девятая* строка: при KEY1≠0 в ней задаются параметры SF-распределения $a$ и $R$ для мишени. При KEY1=0 здесь содержится имя файла, откуда считывается функция плотности ядра-мишени.

– *Десятая* строка содержит ключ KEY2. Если KEY2=0, функция распределения плотности падающего ядра считывается из файла. Подразумевается, что вторая колонка файла содержит значения плотности в точках $q = h \cdot (i - 1)$, $i = 1, ..., N_R$. При KEY2≠0 используется плотность в виде симметризованной ферми-функции.

– *Одиннадцатая* строка: при KEY2≠ 0 в ней задаются параметры SF-распределения $a$ и $R$ для падающего ядра. При KEY1=0 здесь содержится имя файла, откуда считывается функция плотности падающего ядра.

<u>В случае KEY0≠0</u> имена файлов для фазы и потенциала не задаются, т.е. число строк во входном файле уменьшается. Остальные входные данные задаются в той же самой последоваетльности. Итак:

– В *третьей* строке задаются: атомная масса налетающего ядра $A_p$, заряд налетающего ядра $Z_p$, атомная масса ядра мишени $A_t$, заряд ядра-мишени $Z_t$.

– В *четвертой* строке задаются параметры численного интегрирования: число точек $N_R$ и длина интервала интегрирования $R_{max}$. Шаг численного интегрирования составляет $h = R_{max}/(N_R - 1)$.

– *Пятая* строка содержит значение энергии $E$ (МэВ на нуклон падающего ядра).

– *Шестая* строка содержит ключ KEY1. Если KEY1=0, функция распределения плотности ядра-мишени считывается из файла. При KEY1≠ 0 используется плотность в виде симметризованной ферми-функции.

– *Седьмая* строка: при KEY1≠ 0 в ней задаются параметры SF-распределения $a$ и $R$ для мишени. При KEY1=0 здесь содержится имя файла, откуда считывается функция плотности ядра-мишени.

– *Восьмая* строка содержит ключ KEY2. Если KEY2=0, функция распределения плотности падающего ядра считывается из файла. Подразумевается, что вторая колонка файла содержит значения плотности в точках $q = h \cdot (i - 1)$, $i = 1, ..., N_R$. При KEY1≠ 0 используется плотность в виде симметризованной ферми-функции.

– *Девятая* строка: при KEY2≠ 0 в ней задаются параметры SF-распределения $a$ и $R$ для падающего ядра. Подразумевается, что вторая колонка файла содержит значения плотности в точках $q = h \cdot (i - 1)$, $i = 1, ..., N_R$. При KEY1=0 здесь содержится имя файла, откуда считывается функция плотности падающего ядра.

В выходном файле содержатся три значения: значение энергии $E$ (МэВ/нуклон), для которой проводился расчет, величина полного сечения, и значение $\bar{\alpha}_{NN}$, определяющее величину вещественной части потенциала $V(r) = \bar{\alpha}_{NN} W(r)$.

## 4 Заключение

Недавние численные исследования [11] указывают на эффективность сочетания рассчитанной в рамках ВЭП мнимой части ядерного потенциала $W$ с методом двойного фолдинга для расчета его вещественной части $V$. В этом случае прямая и обменная вещественные части $V(r) = V_d(r) + V_{ex}(r)$ ядро-ядерного оптического потенциала могут рассчитываться по известной модели двойного фолдинга [13], где, в частности,

$$V_d(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \; e^{-i\mathbf{qr}} \tilde{\rho}_p^\circ(q) \tilde{\rho}_t^\circ(q) v_{NN}(q). \tag{17}$$

Здесь $\tilde{\rho}^\circ(q)$ - ядерный формфактор распределения точечных нуклонов, а $v_{NN}(q)$ - фурье-образ NN-потенциала.

В дальнейшем пакет планируется дополнить программой расчета вещественной части потенциала на основе модели двойного фолдинга.

## Список литературы


[1] R.J.Glauber. *in:* Lectures on Theor. Phys., **1** (Interscience, New York, 1959).

[2] А.Г.Ситенко. УФЖ **4** (1957) С.152.

[3] В.К.Лукьянов. ЯФ **58** (1995) С.1955.

[4] V.K.Lukyanov and E.V.Zemlyanaya. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **26** No.4 (2000) P.357

[5] V.K.Lukyanov and E.V.Zemlyanaya. Int. J. Mod. Phys. E **10** No.3 (2001) P.163

[6] В.К.Лукьянов, Е.В.Земляная, Б.Словинский, К.Ханна. Изв. РАН сер. физ. **67** Вып.1 (2003) С.55

[7] В.К.Лукьянов, Е.В.Земляная, Б.Словинский. Изв. РАН сер. физ. **68** Вып.2 (2004) С.163

[8] В.К.Лукьянов, Е.В.Земляная, Б.Словинский. ЯФ **67** (2004) С.1306

[9] K.M.Hanna, K.V.Lukyanov, V.K.Lukyanov, B.Slowinski, E.V.Zemlyanaya. arXiv: nucl-th/0410015

[10] Charagi S. and Gupta G. Phys. Rev. C **41** (1990) P.1610

[11] Е.В.Земляная, В.К.Лукьянов, К.В.Лукьянов. Препринт ОИЯИ Р4-2004-115, Дубна, 2004; направлено в ЯФ

[12] P. Shukla. arXiv: nucl-th/0112039

[13] D.T.Khoa, G.R.Satchler. Nucl. Phys. A **668** (2000) P.3