PROGS2H4 - программа для решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений *

Е.В.Земляная, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина

Аннотация

В данной работе представлено описание вычислительной схемы и программы, реализующих метод прогонки для решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с краевыми условиями 3-го типа на концах заданного интервала. Краевая задача аппроксимируется с помощью разностной схемы точности $O(h^4)$ на равномерной сетке узлов с шагом h. Такая задача возникает в схемах линеаризации нелинейных краевых задач (например, в ньютоновских схемах), и предложенный подход позволяет получить точность аппроксимации $O(h^4)$ для их решений.

PROGS2H4 - the program for solving the boundary problem for the system of differential equations

E.V. Zemlyanaya, I.V. Puzynin, T.P. Puzynina

Abstract

In this work the description of the computational scheme and procedure realizing the sweep method for solving the system of two ordinary differential equations with 3th type boundary conditions at the ends points of given interval is represented. The boundary problem is approximated with the help of the difference scheme of $O(h^4)$ precision on the mesh with constant step h. This problem occurs in schemes of linearity of nonlinear boundary problems (for example, in newtonian iterative schemes), and represented here approach gives the possibility to receive the precision of approximation with power $O(h^4)$.

---

* Сообщение ОИЯИ, Р11-97-414, Дубна, 1997.
Работа поддержана РФФИ, грант 97-01-01040.

1. Введение

В данной работе представлено описание разностной схемы точности $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h , реализующей метод прогонки для решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y'' + P_1 y' + F_1 y + P_2 \widetilde{y}' + F_2 \widetilde{y} = K, \\ \widetilde{y}'' + \widetilde{P}_1 \widetilde{y}' + \widetilde{F}_1, \widetilde{y} + \widetilde{P}_2 y' + \widetilde{F}_2 y = \widetilde{K}, \end{cases} \tag{1}$$

$a \le x \le b$, с краевыми условиями на функцию y

$$\begin{cases} D_1 y' + E_1 y = g_1 \text{ на левом конце,} \\ D_2 y' + E_2 y = g_2 \text{ на правом конце интервала} \end{cases} \tag{2}$$

и на функцию $\widetilde{y}$

$$\begin{cases} \widetilde{D}_1 \widetilde{y}' + \widetilde{E}_1 \widetilde{y} = \widetilde{g}_1 \text{ на левом конце,} \\ \widetilde{D}_2 \widetilde{y}' + \widetilde{E}_2 \widetilde{y} = \widetilde{g}_2 \text{ на правом конце интервала.} \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $D_i^2 + E_i^2 > 0, \widetilde{D}_i^2 + \widetilde{E}_i^2 > 0$, $P_i, F_i, K_i, \widetilde{P}_i, \widetilde{F}_i, \widetilde{K}_i -$ достаточно гладкие функции от переменной x и, возможно, от некоторых физических параметров, такие, что существует единственное нетривиальное решение $y^*, \widetilde{y}^*$.
Используется разностная аппроксимация порядка $O(h^4)$ на равномерной сетке узлов с шагом h

$$M_h = \{x_i = a + (i-1)h, i = 1, \bar{N}, x_N = b, h = (b-a)/(N-1)\}. \tag{4}$$

Представленная работа является продолжением работ по созданию комплексов программ [1] для решения различных нелинейных задач, возникающих в физических моделях.

Данная программа прогонки может быть использована при решении многих задач в разных разделах физики. В частности, подобные задачи возникают при использовании ньютоновских итерационных схем для расчетов уровней энергии и волновых функций мезомолекул и задачи рассеяния мезоатомов в двухуровневом приближении адиабатического представления задачи трех тел с кулоновским взаимодействием [2], в поляронной проблеме [3], в обратной задаче рассеяния в рамках баргмановского потенциала [4], в проблеме антипротонного гелия [5], в проблеме устойчивости локализованных решений нелинейного уравнения Шредингера [6] и др.

Известно [8] (стр. 188-191), что устойчивость и сходимость разностного решения нелинейной граничной задачи тесно связаны со свойствами аппроксимации соответствующей линеаризованной задачи. В рамках ньютоновских итераций мы строим почти предельно компактную точности $O(h^4)$ аппроксимацию линейной задачи (1)-(3), что позволяет ожидать устойчивость такой схемы. Тогда при условиях достаточной гладкости (условия

Липшица) коэффициентов линеаризованной задачи соответствующая конечно - разностная схема для нелинейной граничной задачи имеет в окрестности точного изолированного решения дифференциальной задачи единственное решение при достаточно малых h, которое сходится к этому решению. Для построения почти предельно компактной разностной схемы используется обобщение метода Нумерова.

2. Повышение точности вычислительных схем

Представим из системы (1) y'' и $\widetilde{y}''$:

$$\begin{cases} y'' = \omega = K - P_1 y' - F_1 y - P_2 \widetilde{y}' - F_2 \widetilde{y}, \\ \widetilde{y}'' = \widetilde{\omega} = \widetilde{K} - \widetilde{P}_1 \widetilde{y}' - \widetilde{F}_1 \widetilde{y} - \widetilde{P}_2 y' - \widetilde{F}_2 y. \end{cases} \tag{5}$$

Если взять разностные схемы точности $O(h^2)$ [7] для вторых производных y_i'' и $\widetilde{y}_i''$ во внутренних узлах ($i = 3, ..., N-2$) сетки M_h

$$\begin{cases} y_i'' = \omega_i = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi), \\ \widetilde{y}_i'' = \widetilde{\omega}_i = \frac{1}{h^2}(\widetilde{y}_{i-1} - 2\widetilde{y}_i + \widetilde{y}_{i+1}) - \frac{h^2}{12} \widetilde{y}^{(4)}(\widetilde{\xi}), \end{cases} \tag{6}$$

и подставить в них вместо $y^{(4)}$ и $\widetilde{y}^{(4)}$ еще раз такие же разностные схемы для ω_i'' и $\widetilde{\omega}_i''$

$$\begin{cases} y_i^{(4)} = \omega_i'' = \frac{1}{h^2}(\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) - \frac{h^2}{12} \omega^{(4)}(\xi_i), \\ \widetilde{y}_i^{(4)} = \widetilde{\omega}_i'' = \frac{1}{h^2}(\widetilde{\omega}_{i-1} - 2\widetilde{\omega}_i + \widetilde{\omega}_{i+1}) - \frac{h^2}{12} \widetilde{\omega}^{(4)}(\widetilde{\xi}_i), \end{cases} \tag{7}$$

то получим схемы порядка $O(h^4)$:

$$\begin{cases} y_i'' = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{12}(\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) + \frac{h^4}{144} \omega^{(4)}(\xi_i), \\ \widetilde{y}_i'' = \frac{1}{h^2}(\widetilde{y}_{i-1} - 2\widetilde{y}_i + \widetilde{y}_{i+1}) - \frac{1}{12}(\widetilde{\omega}_{i-1} - 2\widetilde{\omega}_i + \widetilde{\omega}_{i+1}) + \frac{h^4}{144} \widetilde{\omega}^{(4)}(\widetilde{\xi}_i). \end{cases} \tag{8}$$

Для крайних узлов сетки M_h с номерами $i = 2$ и $i = N-1$ в формулах (6) будем использовать несимметричные схемы для $y^{(4)}$ [7]:

$$i = 2, \ y_2^{(4)} = \omega_2'' = \frac{2\omega_2 - 5\omega_3 + 4\omega_4 - \omega_5}{h^2} + \frac{11h^2}{12} \omega^{(4)}(\xi_2), \tag{9}$$

$$i = N-1, \ y_{N-1}^{(4)} = \omega_{N-1}'' = \frac{-\omega_{N-4} + 4\omega_{N-3} - 5\omega_{N-2} + 2\omega_{N-1}}{h^2} + \frac{11h^2}{12} \omega^{(4)}(\xi_{N-1}). \tag{10}$$

Для $\widetilde{y}_2^{(4)}$ и $\widetilde{y}_{N-1}^{(4)}$– аналогично.

Таким образом, схемы четвертого порядка точности для счета вторых производных для $i = 2$ и $i = N-1$ будут иметь вид:

$$y_2'' = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} - \frac{2\omega_2 - 5\omega_3 + 4\omega_4 - \omega_5}{12} - \frac{11h^4}{144} \omega^{(4)}(\xi_2), \tag{11}$$

$$y''_{N-1}=\frac{y_{N-2}-2y_{N-1}+y_N}{h^2}-\frac{-\omega_{N-4}+4\omega_{N-3}-5\omega_{N-2}+2\omega_{N-1}}{12}-\frac{11h^4}{144}\omega^{(4)}(\xi_{N-1}). \quad (12)$$

Для $\widetilde{y}''_2$ и $\widetilde{y}''_{N-1}$– аналогично.

Для аппроксимации первых производных $y'_i, \widetilde{y}'_i$ будем использовать схемы вида [7]:

$$y'_i=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-\frac{h^2}{6}y^{(3)}(\eta), \quad (13)$$

а для дискретного представления $y_i^{(3)}$ будем использовать также три вида вычислительных схем:

для внутренних узлов $i=3,...,N-2$

$$y_i^{(3)}=\omega'_i=\frac{\omega_{i+1}-\omega_{i-1}}{2h}-\frac{h^2}{6}\omega^{(3)}(\eta_i), \quad (14)$$

для $i=2$

$$y_2^{(3)}=\omega'_2=\frac{-3\omega_2+4\omega_3-\omega_4}{2h}+\frac{h^2}{3}\omega^{(3)}(\eta_2), \quad (15)$$

для $i=N-1$

$$y_{N-1}^{(3)}=\omega'_{N-1}=\frac{\omega_{N-3}-4\omega_{N-2}+3\omega_{N-1}}{2h}+\frac{h^2}{3}\omega^{(3)}(\eta_{N-1}). \quad (16)$$

Формулы для аппроксимации $\widetilde{y}'_i$ получаются аналогичным путем. После подстановки выражений (14)-(16) в схему (13) мы получаем вычислительные схемы для счета первых производных с точностью $O(h^4)$.

Распишем формулы (14):

$$\begin{cases} y_i^{(3)}=\frac{1}{2h}(\omega_{i+1}-\omega_{i-1})=\frac{1}{2h}(K_{i+1}-F_{1,i+1}y_{i+1}-F_{2,i+1}\widetilde{y}_{i+1}-P_{1,i+1}y'_{i+1} \\ -P_{2,i+1}\widetilde{y}'_{i+1}-K_{i-1}+F_{1,i-1}y_{i-1}+F_{2,i-1}\widetilde{y}_{i-1}+P_{1,i-1}y'_{i-1}+P_{2,i-1}\widetilde{y}'_{i-1}). \end{cases} \quad (17)$$

Чтобы не добавлять еще по две точки $i-2$ и $i+2$ для y и $\widetilde{y}$, будем использовать в формулах (17) несимметричные схемы для аппроксимации $y'_{i-1}, \widetilde{y}'_{i-1}$ и $y'_{i+1}, \widetilde{y}'_{i+1}$ [7]:

$$\begin{cases} z'_{i-1}=\frac{1}{2h}(-3z_{i-1}+4z_i-z_{i+1}), \\ z'_{i+1}=\frac{1}{2h}(z_{i-1}-4z_i+3z_{i+1}). \end{cases} \quad (18)$$

Получим следующие формулы для вычисления $y_i^{(3)}$ и $\widetilde{y}_i^{(3)}$:

$$\begin{cases} y_i^{(3)}=\frac{1}{2h}(\underline{a}_i y_{i-1}+\underline{b}_i y_i+\underline{c}_i y_{i+1}+\bar{\underline{a}}_i\widetilde{y}_{i-1}+\bar{\underline{b}}_i\widetilde{y}_i+\bar{\underline{c}}_i\widetilde{y}_{i+1}+\underline{f}_i), \\ \widetilde{y}_i^{(3)}=\frac{1}{2h}(\underline{\widetilde{a}}_i\widetilde{y}_{i-1}+\underline{\widetilde{b}}_i\widetilde{y}_i+\underline{\widetilde{c}}_i\widetilde{y}_{i+1}+\underline{\bar{\widetilde{a}}}_i y_{i-1}+\underline{\bar{\widetilde{b}}}_i y_i+\underline{\bar{\widetilde{c}}}_i y_{i+1}+\underline{\widetilde{f}}_i), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$
\begin{cases}
\underline{a}_i = F_{1,i-1} - \frac{1}{2h}(P_{1,i+1} + 3P_{1,i-1}), & \underline{\widetilde{a}}_i = \widetilde{F}_{1,i-1} - \frac{1}{2h}(\widetilde{P}_{1,i+1} + 3\widetilde{P}_{1,i-1}),\\
\underline{b}_i = \frac{2}{h}(P_{1,i+1} + P_{1,i-1}), & \underline{\widetilde{b}}_i = \frac{2}{h}(\widetilde{P}_{1,i+1} + \widetilde{P}_{1,i-1}),\\
\underline{c}_i = -F_{1,i+1} - \frac{1}{2h}(3P_{1,i+1} + P_{1,i-1}), & \underline{\widetilde{c}}_i = -\widetilde{F}_{1,i+1} - \frac{1}{2h}(3\widetilde{P}_{1,i+1} + \widetilde{P}_{1,i-1}),\\
\bar{\underline{a}}_i = F_{2,i-1} - \frac{1}{2h}(P_{2,i+1} + 3P_{2,i-1}), & \bar{\underline{\widetilde{a}}}_i = \widetilde{F}_{2,i-1} - \frac{1}{2h}(\widetilde{P}_{2,i+1} + 3\widetilde{P}_{2,i-1}),\\
\bar{\underline{b}}_i = \frac{2}{h}(P_{2,i+1} + P_{2,i-1}), & \bar{\underline{\widetilde{b}}}_i = \frac{2}{h}(\widetilde{P}_{2,i+1} + \widetilde{P}_{2,i-1}),\\
\bar{\underline{c}}_i = F_{2,i+1} - \frac{1}{2h}(3P_{2,i+1} + P_{2,i-1}), & \bar{\underline{\widetilde{c}}}_i = \widetilde{F}_{2,i+1} - \frac{1}{2h}(3\widetilde{P}_{2,i+1} + \widetilde{P}_{2,i-1}),\\
\underline{f}_i = K_{i+1} - K_{i-1}, & \underline{\widetilde{f}}_i = \widetilde{K}_{i+1} - \widetilde{K}_{i-1}.
\end{cases}
\tag{20}
$$

Аналогично распишем формулы (15) и (16) и получим дискретное представление для $y_2^{(3)}$ и $\widetilde{y}_2^{(3)}$:

$$
\begin{cases}
y_2^{(3)} = \frac{1}{2h}(ry_1 + sy_2 + uy_3 + vy_4 + wy_5 + \bar{r}\widetilde{y}_1 + \bar{s}\widetilde{y}_2 + \bar{u}\widetilde{y}_3 + \bar{v}\widetilde{y}_4 + \bar{w}\widetilde{y}_5 + t),\\
\widetilde{y}_2^{(3)} = \frac{1}{2h}(\widetilde{r}\widetilde{y}_1 + \widetilde{s}\widetilde{y}_2 + \widetilde{u}\widetilde{y}_3 + \widetilde{v}\widetilde{y}_4 + \widetilde{w}\widetilde{y}_5 + \bar{\widetilde{r}}y_1 + \bar{\widetilde{s}}y_2 + \bar{\widetilde{u}}y_3 + \bar{\widetilde{v}}y_4 + \bar{\widetilde{w}}y_5 + \widetilde{t}),
\end{cases}
\tag{21}
$$

где коэффициенты определяются следующим способом:

$$
\begin{cases}
r = -\frac{3}{2h}P_{1,2}, & \widetilde{r} = -\frac{3}{2h}\widetilde{P}_{1,2},\\
s = 3F_{1,2} + \frac{2}{h}P_{1,3}, & \widetilde{s} = 3\widetilde{F}_{1,2} + \frac{2}{h}\widetilde{P}_{1,3},\\
u = -4F_{1,3} + \frac{1}{2h}(3P_{1,2} - P_{1,4}), & \widetilde{u} = -4\widetilde{F}_{1,3} + \frac{1}{2h}(3\widetilde{P}_{1,2} - \widetilde{P}_{1,4}),\\
v = F_{1,4} - \frac{2}{h}P_{1,3}, & \widetilde{v} = \widetilde{F}_{1,4} - \frac{2}{h}\widetilde{P}_{1,3},\\
w = \frac{1}{2h}P_{1,4}, & \widetilde{w} = \frac{1}{2h}\widetilde{P}_{1,4},\\
\bar{r} = -\frac{3}{2h}P_{2,2}, & \bar{\widetilde{r}} = -\frac{3}{2h}\widetilde{P}_{2,2},\\
\bar{s} = 3F_{2,2} + \frac{2}{h}P_{2,3}, & \bar{\widetilde{s}} = 3\widetilde{F}_{2,2} + \frac{2}{h}\widetilde{P}_{2,3},\\
\bar{u} = -4F_{2,3} + \frac{1}{2h}(3P_{2,2} - P_{2,4}), & \bar{\widetilde{u}} = -4\widetilde{F}_{2,3} + \frac{1}{2h}(3\widetilde{P}_{2,2} - \widetilde{P}_{2,4}),\\
\bar{v} = F_{2,4} - \frac{2}{h}P_{2,3}, & \bar{\widetilde{v}} = \widetilde{F}_{2,4} - \frac{2}{h}\widetilde{P}_{2,3},\\
\bar{w} = \frac{1}{2h}P_{2,4}, & \bar{\widetilde{w}} = \frac{1}{2h}\widetilde{P}_{2,4},\\
t = -3K_2 + 4K_3 - K_4, & \widetilde{t} = -3\widetilde{K}_2 + 4\widetilde{K}_3 - \widetilde{K}_4,
\end{cases}
\tag{22}
$$

и для $y_{N-1}^{(3)}$ и $\widetilde{y}_{N-1}^{(3)}$:

$$
\begin{cases}
y_{N-1}^{(3)} = \frac{1}{2h}(Ry_{N-4} + Sy_{N-3} + Uy_{N-2} + Vy_{N-1} + Wy_N +\\
\qquad + \bar{R}\widetilde{y}_{N-4} + \bar{S}\widetilde{y}_{N-3} + \bar{U}\widetilde{y}_{N-2} + \bar{V}\widetilde{y}_{N-1} + \bar{W}\widetilde{y}_N + T),\\
\widetilde{y}_{N-1}^{(3)} = \frac{1}{2h}(\widetilde{R}\widetilde{y}_{N-4} + \widetilde{S}\widetilde{y}_{N-3} + \widetilde{U}\widetilde{y}_{N-2} + \widetilde{V}\widetilde{y}_{N-1} + \widetilde{W}\widetilde{y}_N +\\
\qquad + \bar{\widetilde{R}}y_{N-4} + \bar{\widetilde{S}}y_{N-3} + \bar{\widetilde{U}}y_{N-2} + \bar{\widetilde{V}}y_{N-1} + \bar{\widetilde{W}}y_N + \widetilde{T}),
\end{cases}
\tag{23}
$$

где коэффициенты определяются следующим способом:

$$
\begin{cases}
R = \frac{1}{2h}P_{1,N-3}, & \widetilde{R} = \frac{1}{2h}\widetilde{P}_{1,N-3}, \\
S = -F_{1,N-3} - \frac{2}{h}P_{1,N-2}, & \widetilde{S} = -\widetilde{F}_{1,N-3} - \frac{2}{h}\widetilde{P}_{1,N-2}, \\
U = 4F_{1,N-2} + \frac{1}{2h}(3P_{1,N-1} - P_{1,N-3}), & \widetilde{U} = 4\widetilde{F}_{1,N-2} + \frac{1}{2h}(3\widetilde{P}_{1,N-1} - \widetilde{P}_{1,N-3}), \\
V = -3F_{1,N-1} - \frac{2}{h}P_{1,N-2}, & \widetilde{V} = -3\widetilde{F}_{1,N-1} - \frac{2}{h}\widetilde{P}_{1,N-2}, \\
W = -\frac{3}{2h}P_{1,N-1}, & \widetilde{W} = -\frac{3}{2h}\widetilde{P}_{1,N-1}, \\
\bar{R} = \frac{1}{2h}P_{2,N-3}, & \bar{\widetilde{R}} = \frac{1}{2h}\widetilde{P}_{2,N-3}, \qquad (24) \\
\bar{S} = -F_{2,N-3} - \frac{2}{h}P_{2,N-2}, & \bar{\widetilde{S}} = -\widetilde{F}_{2,N-3} - \frac{2}{h}\widetilde{P}_{2,N-2}, \\
\bar{U} = 4F_{2,N-2} + \frac{1}{2h}(3P_{2,N-1} - P_{2,N-3}), & \bar{\widetilde{U}} = 4\widetilde{F}_{2,N-2} + \frac{1}{2h}(3\widetilde{P}_{2,N-1} - \widetilde{P}_{2,N-3}), \\
\bar{V} = -3F_{2,N-1} + \frac{2}{h}P_{2,N-2}, & \bar{\widetilde{V}} = -3\widetilde{F}_{2,N-1} + \frac{2}{h}\widetilde{P}_{2,N-2}, \\
\bar{W} = -\frac{3}{2h}P_{2,N-1}, & \bar{\widetilde{W}} = -\frac{3}{2h}\widetilde{P}_{2,N-1}, \\
T = K_{N-3} - 4K_{N-2} + 3K_{N-1}, & \widetilde{T} = \widetilde{K}_{N-3} - 4\widetilde{K}_{N-2} + 3\widetilde{K}_{N-1}.
\end{cases}
\tag{24}
$$

3. Дискретное представление задачи (1)-(3)

После подстановки в систему (1) дискретных представлений (8) для $y_i^{''}$ и $\widetilde{y}_i^{''}$ и (13),(14) для $y_i^{'}, \widetilde{y}_i^{'}$ мы получим дискретную аппроксимацию системы (1) с точностью $O(h^4)$:

$$
\begin{cases}
i = 3, ..., N-2: \\
a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} + \bar{a}_i \widetilde{y}_{i-1} + \bar{b}_i \widetilde{y}_i + \bar{c}_i \widetilde{y}_{i+1} = f_i, \\
\widetilde{a}_i \widetilde{y}_{i-1} + \widetilde{b}_i \widetilde{y}_i + \widetilde{c}_i \widetilde{y}_{i+1} + \bar{\widetilde{a}}_i y_{i-1} + \bar{\widetilde{b}}_i y_i + \bar{\widetilde{c}}_i y_{i+1} = \widetilde{f}_i,
\end{cases}
\tag{25}
$$

где коэффициенты $a_i, ..., \widetilde{f}_i$ определяются следующим способом:

$$
\begin{cases}
a_i = 1 + \frac{h^2}{12}F_{1,i-1} - \frac{h}{24}(-P_{1,i+1} + 10P_{1,i} + 3P_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{a}_i + P_{2,i}\underline{\bar{\widetilde{a}}}_i), \\
b_i = -2 + \frac{5h^2}{6}F_{1,i} - \frac{h}{6}(P_{1,i+1} - P_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{b}_i + P_{2,i}\underline{\bar{\widetilde{b}}}_i), \\
c_i = 1 + \frac{h^2}{12}F_{1,i+1} - \frac{h}{24}(-3P_{1,i+1} - 10P_{1,i} + P_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{c}_i + P_{2,i}\underline{\bar{\widetilde{c}}}_i), \\
\bar{a}_i = \frac{h^2}{12}F_{2,i-1} - \frac{h}{24}(-P_{2,i+1} + 10P_{2,i} + 3P_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{\bar{a}}_i + P_{2,i}\underline{\widetilde{a}}_i), \\
\bar{b}_i = \frac{5h^2}{6}F_{2,i} - \frac{h}{6}(P_{2,i+1} - P_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{\bar{b}}_i + P_{2,i}\underline{\widetilde{b}}_i), \\
\bar{c}_i = \frac{h^2}{12}F_{2,i+1} - \frac{h}{24}(-3P_{2,i+1} - 10P_{2,i} + P_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{\bar{c}}_i + P_{2,i}\underline{\widetilde{c}}_i), \\
f_i = \frac{h^2}{12}(K_{i+1} + 10K_i + K_{i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{f}_i + P_{2,i}\underline{\widetilde{f}}_i), \\
\widetilde{a}_i = 1 + \frac{h^2}{12}\widetilde{F}_{1,i-1} - \frac{h}{24}(-\widetilde{P}_{1,I+1} + 10\widetilde{P}_{1,i} + 3\widetilde{P}_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,i}\underline{\widetilde{a}}_i + \widetilde{P}_{2,i}\underline{\bar{a}}_i), \\
\widetilde{b}_i = -2 + \frac{5h^2}{6}\widetilde{F}_{1,i} - \frac{h}{6}(\widetilde{P}_{1,i+1} - \widetilde{P}_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,i}\underline{\widetilde{b}}_i + \widetilde{P}_{2,i}\underline{\bar{b}}_i), \\
\widetilde{c}_i = 1 + \frac{h^2}{12}\widetilde{F}_{1,i+1} - \frac{h}{24}(-3\widetilde{P}_{1,i+1} - 10\widetilde{P}_{1,i} + \widetilde{P}_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,i}\underline{\widetilde{c}}_i + \widetilde{P}_{2,i}\underline{\bar{c}}_i), \\
\bar{\widetilde{a}}_i = \frac{h^2}{12}\widetilde{F}_{2,i-1} - \frac{h}{24}(-\widetilde{P}_{2,I+1} + 10\widetilde{P}_{2,i} + 3\widetilde{P}_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,i}\underline{\bar{\widetilde{a}}}_i + \widetilde{P}_{2,i}\underline{a}_i), \\
\bar{\widetilde{b}}_i = \frac{5h^2}{6}\widetilde{F}_{2,i} - \frac{h}{6}(\widetilde{P}_{2,i+1} - \widetilde{P}_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,i}\underline{\bar{\widetilde{b}}}_i + \widetilde{P}_{2,i}\underline{b}_i), \\
\bar{\widetilde{c}}_i = \frac{h^2}{12}\widetilde{F}_{2,i+1} - \frac{h}{24}(-3\widetilde{P}_{2,i+1} - 10\widetilde{P}_{2,i} + \widetilde{P}_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,i}\underline{\bar{\widetilde{c}}}_i + \widetilde{P}_{2,i}\underline{c}_i), \\
\widetilde{f}_i = \frac{h^2}{12}(\widetilde{K}_{i+1} + 10\widetilde{K}_i + \widetilde{K}_{i-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,i}\underline{\widetilde{f}}_i + \widetilde{P}_{2,i}\underline{f}_i),
\end{cases}
\tag{26}
$$

а выражения для $\underline{a}_i, ..., \underline{\widetilde{f}}_i$ определяются формулами (20).

Для $i = 2$ дискретное представление системы (1) с точностью $O(h^4)$ с использованием формул (11),(13),(15) будет содержать пять точек и иметь вид:

$$\begin{cases} a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4 + e_2 y_5 + \bar{a}_2 \tilde{y}_1 + \bar{b}_2 \tilde{y}_2 + \bar{c}_2 \tilde{y}_3 + \bar{d}_2 \tilde{y}_4 + \bar{e}_2 \tilde{y}_5 = \hat{K}_2, \\ \tilde{a}_2 \tilde{y}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{y}_2 + \tilde{c}_2 \tilde{y}_3 + \tilde{d}_2 \tilde{y}_4 + \tilde{e}_2 \tilde{y}_5 + \tilde{\bar{a}}_2 y_1 + \tilde{\bar{b}}_2 y_2 + \tilde{\bar{c}}_2 y_3 + \tilde{\bar{d}}_2 y_4 + \tilde{\bar{e}}_2 y_5 = \widetilde{\hat{K}}_2, \end{cases} \tag{27}$$

где коэффициенты $a_2, ..., \widetilde{\hat{K}}_2$ определяются следующим способом:

$$\begin{cases} a_2 = 1 - \frac{7h}{12} P_{1,2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} r + P_{2,2} \tilde{\bar{r}}) \\ b_2 = -2 + \frac{7h^2}{6} F_{1,2} + \frac{5h}{24} P_{1,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} s + P_{2,2} \tilde{\bar{s}}), \\ c_2 = 1 - \frac{5h^2}{12} F_{1,3} - \frac{h}{24}(-13P_{1,2} + P_{1,4} + P_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} u + P_{2,2} \tilde{\bar{u}}), \\ d_2 = \frac{h^2}{3} F_{1,4} - \frac{5h}{24} P_{1,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} v + P_{2,2} \tilde{\bar{v}}), \\ e_2 = -\frac{h^2}{12} F_{1,5} - \frac{h}{24}(-4P_{1,4} + 3P_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} w + P_{2,2} \tilde{\bar{w}}), \\ \bar{a}_2 = -\frac{7h}{12} P_{2,2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{r} + P_{2,2} \tilde{r}) \\ \bar{b}_2 = \frac{7h^2}{6} F_{2,2} + \frac{5h}{24} P_{2,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{s} + P_{2,2} \tilde{s}), \\ \bar{c}_2 = -\frac{5h^2}{12} F_{2,3} - \frac{h}{24}(-13P_{2,2} + P_{2,4} + P_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{u} + P_{2,2} \tilde{u}), \\ \bar{d}_2 = \frac{h^2}{3} F_{2,4} - \frac{5h}{24} P_{2,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{v} + P_{2,2} \tilde{v}), \\ \bar{e}_2 = -\frac{h^2}{12} F_{2,5} - \frac{h}{24}(-4P_{2,4} + 3P_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{w} + P_{2,2} \tilde{w}), \\ \hat{K}_2 = \frac{h^2}{12}(14K_2 - 5K_3 + 4K_4 - K_5) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} t + P_{2,2} \tilde{t}) \\ \tilde{a}_2 = 1 - \frac{7h}{12} \tilde{P}_{1,2} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{r} + \tilde{P}_{2,2} \bar{r}) \\ \tilde{b}_2 = -2 + \frac{7h^2}{6} \tilde{F}_{1,2} + \frac{5h}{24} \tilde{P}_{1,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{s} + \tilde{P}_{2,2} \bar{s}), \\ \tilde{c}_2 = 1 - \frac{5h^2}{12} \tilde{F}_{1,3} - \frac{h}{24}(-13\tilde{P}_{1,2} + \tilde{P}_{1,4} + \tilde{P}_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{u} + \tilde{P}_{2,2} \bar{u}), \\ \tilde{d}_2 = \frac{h^2}{3} \tilde{F}_{1,4} - \frac{5h}{24} \tilde{P}_{1,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{v} + \tilde{P}_{2,2} \bar{v}), \\ \tilde{e}_2 = -\frac{h^2}{12} \tilde{F}_{1,5} - \frac{h}{24}(-4\tilde{P}_{1,4} + 3\tilde{P}_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{w} + \tilde{P}_{2,2} \bar{w}), \\ \tilde{\bar{a}}_2 = -\frac{7h}{12} \tilde{P}_{2,2} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{r}} + \tilde{P}_{2,2} r) \\ \tilde{\bar{b}}_2 = \frac{7h^2}{6} \tilde{F}_{2,2} + \frac{5h}{24} \tilde{P}_{2,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{s}} + \tilde{P}_{2,2} s), \\ \tilde{\bar{c}}_2 = -\frac{5h^2}{12} \tilde{F}_{2,3} - \frac{h}{24}(-13\tilde{P}_{2,2} + \tilde{P}_{2,4} + \tilde{P}_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{u}} + \tilde{P}_{2,2} u), \\ \tilde{\bar{d}}_2 = \frac{h^2}{3} \tilde{F}_{2,4} - \frac{5h}{24} \tilde{P}_{2,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{v}} + \tilde{P}_{2,2} v), \\ \tilde{\bar{e}}_2 = -\frac{h^2}{12} \tilde{F}_{2,5} - \frac{h}{24}(-4\tilde{P}_{2,4} + 3\tilde{P}_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{w}} + \tilde{P}_{2,2} w), \\ \widetilde{\hat{K}}_2 = \frac{h^2}{12}(14\widetilde{K}_2 - 5\widetilde{K}_3 + 4\widetilde{K}_4 - \widetilde{K}_5) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{t} + \tilde{P}_{2,2} t), \end{cases} \tag{28}$$

а выражения для $r, ..., \tilde{t}$ определяются формулами (22).

Для $i = N - 1$ дискретное представление системы (1) будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{N-1} y_N + b_{N-1} y_{N-1} + c_{N-1} y_{N-2} + d_{N-1} y_{N-3} + e_{N-1} y_{N-4} + \\ + \bar{a}_{N-1} \tilde{y}_N + \bar{b}_{N-1} \tilde{y}_{N-1} + \bar{c}_{N-1} \tilde{y}_{N-2} + \bar{d}_{N-1} \tilde{y}_{N-3} + \bar{e}_{N-1} \tilde{y}_{N-4} = f_{N-1}, \\ \tilde{a}_{N-1} \tilde{y}_N + \tilde{b}_{N-1} \tilde{y}_{N-1} + \tilde{c}_{N-1} \tilde{y}_{N-2} + \tilde{d}_{N-1} \tilde{y}_{N-3} + \tilde{e}_{N-1} \tilde{y}_{N-4} + \\ + \tilde{\bar{a}}_{N-1} y_N + \tilde{\bar{b}}_{N-1} y_{N-1} + \tilde{\bar{c}}_{N-1} y_{N-2} + \tilde{\bar{d}}_{N-1} y_{N-3} + \tilde{\bar{e}}_{N-1} y_{N-4} = \tilde{f}_{N-1} \end{cases} \tag{29}$$

с коэффициентами

$$
\begin{cases}
a_{N-1} = 1 + \frac{7h}{12}P_{1,N-1} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}W + P_{2,N-1}\widetilde{\bar{W}}), \\
b_{N-1} = -2 + \frac{7h^2}{6}F_{1,N-1} - \frac{5h}{24}P_{1,N-2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}V + P_{2,N-1}\widetilde{\bar{V}}), \\
c_{N-1} = 1 - \frac{5h^2}{12}F_{1,N-2} - \frac{h}{24}(-P_{1,N-4} - 4P_{1,N-3} + 14P_{1,N-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}U + P_{2,N-1}\widetilde{\bar{U}}), \\
d_{N-1} = \frac{h^2}{3}F_{1,N-3} - \frac{h}{24}(4P_{1,N-4} - 5P_{1,N-2}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}S + P_{2,N-1}\widetilde{\bar{S}}), \\
e_{N-1} = -\frac{h^2}{12}F_{1,N-4} + \frac{h}{8}P_{1,N-4} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}R + P_{2,N-1}\widetilde{\bar{R}}), \\
\bar{a}_{N-1} = \frac{7h}{12}P_{2,N-1} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}\bar{W} + P_{2,N-1}\widetilde{W}), \\
\bar{b}_{N-1} = \frac{7h^2}{6}F_{2,N-1} - \frac{5h}{24}P_{2,N-2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}\bar{V} + P_{2,N-1}\widetilde{V}), \\
\bar{c}_{N-1} = -\frac{5h^2}{12}F_{2,N-2} - \frac{h}{24}(-P_{2,N-4} - 4P_{2,N-3} + 14P_{2,N-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}\bar{U} + P_{2,N-1}\widetilde{U}), \\
\bar{d}_{N-1} = \frac{h^2}{3}F_{2,N-3} - \frac{h}{24}(4P_{2,N-1} - 5P_{2,N-2}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}\bar{S} + P_{2,N-1}\widetilde{S}), \\
\bar{e}_{N-1} = -\frac{h^2}{12}F_{2,N-4} + \frac{h}{8}P_{2,N-4} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}\bar{R} + P_{2,N-1}\widetilde{R}), \\
f_{N-1} = \frac{h^2}{12}(-K_{N-4} + 4K_{N-3} - 5K_{N-2} + 14K_{N-1}) + \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1}T + P_{2,N-1}\widetilde{T}), \qquad (30) \\
\widetilde{a}_{N-1} = 1 + \frac{7h}{12}\widetilde{P}_{1,N-1} - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{W} + \widetilde{P}_{2,N-1}\bar{W}), \\
\widetilde{b}_{N-1} = -2 + \frac{7h^2}{6}\widetilde{F}_{1,N-1} - \frac{5h}{24}\widetilde{P}_{1,N-2} - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{V} + \widetilde{P}_{2,N-1}\bar{V}), \\
\widetilde{c}_{N-1} = 1 - \frac{5h^2}{12}\widetilde{F}_{1,N-2} - \frac{h}{24}(-\widetilde{P}_{1,N-4} - 4\widetilde{P}_{1,N-3} + 14\widetilde{P}_{1,N-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{U} + \widetilde{P}_{2,N-1}\bar{U}), \\
\widetilde{d}_{N-1} = \frac{h^2}{3}\widetilde{F}_{1,N-3} - \frac{h}{24}\widetilde{(}4P_{1,N-4} - 5P_{1,N-2}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{S} + \widetilde{P}_{2,N-1}\bar{S}), \\
\widetilde{e}_{N-1} = -\frac{h^2}{12}\widetilde{F}_{1,N-4} + \frac{h}{8}\widetilde{P}_{1,N-4} - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{R} + \widetilde{P}_{2,N-1}\bar{R}), \\
\widetilde{\bar{a}}_{N-1} = \frac{7h}{12}\widetilde{P}_{2,N-1} - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{\bar{W}} + \widetilde{P}_{2,N-1}W), \\
\widetilde{\bar{b}}_{N-1} = \frac{7h^2}{6}\widetilde{F}_{2,N-1} - \frac{5h}{24}\widetilde{P}_{2,N-2} - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{\bar{V}} + \widetilde{P}_{2,N-1}V), \\
\widetilde{\bar{c}}_{N-1} = -\frac{5h^2}{12}\widetilde{F}_{2,N-2} - \frac{h}{24}(-\widetilde{P}_{2,N-4} - 4\widetilde{P}_{2,N-3} + 14\widetilde{P}_{2,N-1}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{\bar{U}} + \widetilde{P}_{2,N-1}U), \\
\widetilde{\bar{d}}_{N-1} = \frac{h^2}{3}\widetilde{F}_{2,N-3} - \frac{h}{24}(4\widetilde{P}_{2,N-1} - 5\widetilde{P}_{2,N-2}) - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{\bar{S}} + \widetilde{P}_{2,N-1}S), \\
\widetilde{\bar{e}}_{N-1} = -\frac{h^2}{12}\widetilde{F}_{2,N-4} + \frac{h}{8}\widetilde{P}_{2,N-4} - \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{\bar{R}} + \widetilde{P}_{2,N-1}R), \\
\widetilde{f}_{N-1} = \frac{h^2}{12}(-\widetilde{K}_{N-4} + 4\widetilde{K}_{N-3} - 5\widetilde{K}_{N-2} + 14\widetilde{K}_{N-1}) + \frac{h^3}{12}(\widetilde{P}_{1,N-1}\widetilde{T} + \widetilde{P}_{2,N-1}T).
\end{cases}
\tag{30}
$$

4. Аппроксимация граничных условий

При аппроксимации левых граничных условий

$$
\begin{cases}
D_1 y' + E_1 y = g_1, \\
\widetilde{D}_1 \widetilde{y}' + \widetilde{E}_1 \widetilde{y} = \widetilde{g}_1
\end{cases}
\tag{31}
$$

для вычисления y' ($\widetilde{y}'$ – аналогично) используем пятиточечную схему четвертого порядка точности [7]:

$$
y_1' = \frac{1}{12h}(-25y_1 + 48y_2 - 36y_3 + 16y_4 - 3y_5) + \frac{h^4}{5}y^{(5)}(\xi_1). \tag{32}
$$

Тогда для $i = 1$ имеем:

$$
\begin{cases}
a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4 + e_1 y_5 = \hat{K}_1, \\
\widetilde{a}_1 \widetilde{y}_1 + \widetilde{b}_1 \widetilde{y}_2 + \widetilde{c}_1 \widetilde{y}_3 + \widetilde{d}_1 \widetilde{y}_4 + \widetilde{e}_1 \widetilde{y}_5 = \widetilde{\hat{K}}_1,
\end{cases}
\tag{33}
$$

где коэффициенты $a_1, ..., \widetilde{\hat{K}}_1$ определяются следующим способом:

$$\begin{cases} a_1 = -25D_1 + 12hE_1, & \widetilde{a}_1 = -25\widetilde{D}_1 + 12h\widetilde{E}_1, \\ b_1 = 48D_1, & \widetilde{b}_1 = 48\widetilde{D}_1, \\ c_1 = -36D_1, & \widetilde{c}_1 = -36\widetilde{D}_1, \\ d_1 = 16D_1, & \widetilde{d}_1 = 16\widetilde{D}_1, \\ e_1 = -3D_1, & \widetilde{e}_1 = -3\widetilde{D}_1, \\ \hat{K}_1 = 12hg_1, & \widetilde{\hat{K}}_1 = 12h\widetilde{g}_1. \end{cases} \tag{34}$$

Для аппроксимации правых граничных условий

$$\begin{cases} D_2y' + E_2y = g_2, \\ \widetilde{D}_2\widetilde{y}' + \widetilde{E}_2\widetilde{y} = \widetilde{g}_2 \end{cases} \tag{35}$$

будем использовать несимметричную пятиточечную схему четвертого порядка точности для y'_N и $\widetilde{y}'_N$ [7]:

$$y'_N = \frac{1}{12h}(3y_{N-4} - 16y_{N-3} + 36y_{N-2} - 48y_{N-1} + 25y_N) + \frac{h^4}{5}y^{(5)}(\xi_N). \tag{36}$$

Тогда для $i = N$ получаем:

$$\begin{cases} a_Ny_N + b_Ny_{N-1} + c_Ny_{N-2} + d_Ny_{N-3} + e_Ny_{N-4} = \hat{K}_N, \\ \widetilde{a}_N\widetilde{y}_N + \widetilde{b}_N\widetilde{y}_{N-1} + \widetilde{c}_N\widetilde{y}_{N-2} + \widetilde{d}_N\widetilde{y}_{N-3} + \widetilde{e}_N\widetilde{y}_{N-4} = \widetilde{\hat{K}}_N, \end{cases} \tag{37}$$

где

$$\begin{cases} a_N = 25D_2 + 12hE_2, & \widetilde{a}_N = 25\widetilde{D}_2 + 12h\widetilde{E}_2, \\ b_N = -48D_2, & \widetilde{b}_N = -48\widetilde{D}_2, \\ c_N = 36D_2, & \widetilde{c}_N = 36\widetilde{D}_2, \\ d_N = -16D_2, & \widetilde{d}_N = -16\widetilde{D}_2, \\ e_N = 3D_2, & \widetilde{e}_N = 3\widetilde{D}_2, \\ \hat{K}_N = 12hg_2, & \widetilde{\hat{K}}_N = 12h\widetilde{g}_2. \end{cases} \tag{38}$$

5. Вывод формул для прогонки

Наша цель – решить систему (1)–(3) методом прогонки. Будем выводить коэффициенты прогонки в следующем виде:

$$\begin{cases} y_i = A_iy_{i+1} + \bar{A}_i\widetilde{y}_{i+1} + B_i, \\ \widetilde{y}_i = \widetilde{A}_i\widetilde{y}_{i+1} + \widetilde{\bar{A}}_iy_{i+1} + \widetilde{B}_i, \end{cases} \tag{39}$$

т.е. надо выразить значения $y_i, \widetilde{y}_i$ через значения $y_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}$.

Из аппроксимаций нашей системы для $i = 1, 2, 3, 4$, объединяя соответствующие уравнения (33),(27),(25), мы получаем 8 уравнений:

$$\begin{cases} i = 1: \\ a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 + d_1y_4 + e_1y_5 = \hat{K}_1, \\ \widetilde{a}_1\widetilde{y}_1 + \widetilde{b}_1\widetilde{y}_2 + \widetilde{c}_1\widetilde{y}_3 + \widetilde{d}_1\widetilde{y}_4 + \widetilde{e}_1\widetilde{y}_5 = \widetilde{\hat{K}}_1, \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} i = 2: \\ a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4 + e_2 y_5 + \bar{a}_2 \widetilde{y}_1 + \bar{b}_2 \widetilde{y}_2 + \bar{c}_2 \widetilde{y}_3 + \bar{d}_2 \widetilde{y}_4 + \bar{e}_2 \widetilde{y}_5 = \hat{K}_2, \\ \bar{\widetilde{a}}_2 y_1 + \bar{\widetilde{b}}_2 y_2 + \bar{\widetilde{c}}_2 y_3 + \bar{\widetilde{d}}_2 y_4 + \bar{\widetilde{e}}_2 y_5 + \widetilde{a}_2 \widetilde{y}_1 + \widetilde{b}_2 \widetilde{y}_2 + \widetilde{c}_2 \widetilde{y}_3 + \widetilde{d}_2 \widetilde{y}_4 + \widetilde{e}_2 \widetilde{y}_5 = \widetilde{\hat{K}}_2, \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} i = 3: \\ a_3 y_2 + b_3 y_3 + c_3 y_4 + \bar{a}_3 \widetilde{y}_2 + \bar{b}_3 \widetilde{y}_3 + \bar{c}_3 \widetilde{y}_4 = f_3, \\ \bar{\widetilde{a}}_3 y_2 + \bar{\widetilde{b}}_3 y_3 + \bar{\widetilde{c}}_3 y_4 + \widetilde{a}_3 \widetilde{y}_2 + \widetilde{b}_3 \widetilde{y}_3 + \widetilde{c}_3 \widetilde{y}_4 = \widetilde{f}_3, \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} i = 4: \\ a_4 y_3 + b_4 y_4 + c_4 y_5 + \bar{a}_4 \widetilde{y}_3 + \bar{b}_4 \widetilde{y}_4 + \bar{c}_4 \widetilde{y}_5 = f_4, \\ \bar{\widetilde{a}}_4 y_3 + \bar{\widetilde{b}}_4 y_4 + \bar{\widetilde{c}}_4 y_5 + \widetilde{a}_4 \widetilde{y}_3 + \widetilde{b}_4 \widetilde{y}_4 + \widetilde{c}_4 \widetilde{y}_5 = \widetilde{f}_4. \end{cases} \tag{43}$$

Из уравнений (40) получим y_1 и $\widetilde{y}_1$

$$\begin{cases} y_1 = a_1^{-1}(\hat{K}_1 - b_1 y_2 - c_1 y_3 - d_1 y_4 - e_1 y_5), \\ \widetilde{y}_1 = \widetilde{a}_1^{-1}(\widetilde{\hat{K}}_1 - \widetilde{b}_1 \widetilde{y}_2 - \widetilde{c}_1 \widetilde{y}_3 - \widetilde{d}_1 \widetilde{y}_4 - \widetilde{e}_1 \widetilde{y}_5) \end{cases} \tag{44}$$

и подставим в (41). Получим y_2 и $\widetilde{y}_2$:

$$\begin{cases} y_2 = s_2^{-1}(Q_2 - s_3 y_3 - s_4 y_4 - s_5 y_5 - \bar{b}_2 \widetilde{y}_2 - \bar{c}_2 \widetilde{y}_3 - \bar{d}_2 \widetilde{y}_4 - \bar{e}_2 \widetilde{y}_5 + \\ + \bar{Q}_2 - \bar{\bar{a}}_{21}(\widetilde{b}_1 \widetilde{y}_2 + \widetilde{c}_1 \widetilde{y}_3 + \widetilde{d}_1 \widetilde{y}_4 + \widetilde{e}_1 \widetilde{y}_5)), \\ \widetilde{y}_2 = \widetilde{s}_2^{-1}(\widetilde{Q}_2 - \widetilde{s}_3 \widetilde{y}_3 - \widetilde{s}_4 \widetilde{y}_4 - \widetilde{s}_5 \widetilde{y}_5 - \bar{\widetilde{b}}_2 y_2 - \bar{\widetilde{c}}_2 y_3 - \bar{\widetilde{d}}_2 y_4 - \bar{\widetilde{e}}_2 y_5 + \\ + \bar{\widetilde{Q}}_2 - \bar{\widetilde{a}}_{21}(b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4 + e_1 y_5)), \end{cases} \tag{45}$$

где

$$\begin{cases} s_2 = b_2 - a_{21} b_1, \quad \widetilde{s}_2 = \widetilde{b}_2 - \widetilde{\bar{a}}_{21} \widetilde{b}_1, \quad \bar{s}_2 = \bar{b}_2 - \bar{\bar{a}}_{21} \widetilde{b}_1, \quad \bar{\widetilde{s}}_2 = \bar{\widetilde{b}}_2 - \bar{\widetilde{a}}_{21} b_1, \\ s_3 = c_2 - a_{21} c_1, \quad \widetilde{s}_3 = \widetilde{c}_2 - \widetilde{\bar{a}}_{21} \widetilde{c}_1, \quad \bar{s}_3 = \bar{c}_2 - \bar{\bar{a}}_{21} \widetilde{c}_1, \quad \bar{\widetilde{s}}_3 = \bar{\widetilde{c}}_2 - \bar{\widetilde{a}}_{21} c_1, \\ s_4 = d_2 - a_{21} d_1, \quad \widetilde{s}_4 = \widetilde{d}_2 - \widetilde{\bar{a}}_{21} \widetilde{d}_1, \quad \bar{s}_4 = \bar{d}_2 - \bar{\bar{a}}_{21} \widetilde{d}_1, \quad \bar{\widetilde{s}}_4 = \bar{\widetilde{d}}_2 - \bar{\widetilde{a}}_{21} d_1, \\ s_5 = e_2 - a_{21} e_1, \quad \widetilde{s}_5 = \widetilde{e}_2 - \widetilde{\bar{a}}_{21} \widetilde{e}_1, \quad \bar{s}_5 = \bar{e}_2 - \bar{\bar{a}}_{21} \widetilde{e}_1, \quad \bar{\widetilde{s}}_5 = \bar{\widetilde{e}}_2 - \bar{\widetilde{a}}_{21} e_1, \\ Q_2 = \hat{K}_2 - a_{21} \hat{K}_1, \ \widetilde{Q}_2 = \widetilde{\hat{K}}_2 - \widetilde{\bar{a}}_{21} \widetilde{\hat{K}}_1, \ \bar{Q}_2 = -\bar{\bar{a}}_{21} \widetilde{\hat{K}}_1, \ \bar{\widetilde{Q}}_2 = -\bar{\widetilde{a}}_{21} \hat{K}_1, \\ a_{21} = a_2 a_1^{-1}, \qquad \widetilde{\bar{a}}_{21} = \widetilde{a}_2 \widetilde{a}_1^{-1}, \qquad \bar{\bar{a}}_{21} = \bar{a}_2 \widetilde{a}_1^{-1}, \qquad \bar{\widetilde{a}}_{21} = \bar{\widetilde{a}}_2 a_1^{-1}. \end{cases} \tag{46}$$

Подставим (45) в (42), получим:

$$\begin{cases} y_2 = \widetilde{Q}_3 - \bar{\widetilde{z}}_3 y_3 - \bar{\widetilde{z}}_4 y_4 - \bar{\widetilde{z}}_5 y_5 - \widetilde{z}_3 \widetilde{y}_3 - \widetilde{z}_4 \widetilde{y}_4 - \widetilde{z}_5 \widetilde{y}_5, \\ \widetilde{y}_2 = Q_3 - \bar{z}_3 \widetilde{y}_3 - \bar{z}_4 \widetilde{y}_4 - \bar{z}_5 \widetilde{y}_5 - z_3 y_3 - z_4 y_4 - z_5 y_5, \end{cases} \tag{47}$$

где

$$\begin{cases} z_3 = z^{-1}(b_3 - r s_3), \bar{z}_3 = z^{-1}(\bar{b}_3 - r \bar{c}_2), \widetilde{z}_3 = \widetilde{z}^{-1}(\widetilde{b}_3 - \widetilde{r} \widetilde{s}_3), \bar{\widetilde{z}}_3 = \widetilde{z}^{-1}(\bar{\widetilde{b}}_3 - \widetilde{r} \bar{\widetilde{c}}_2), \\ z_4 = z^{-1}({}_3 - r s_4), \bar{z}_4 = z^{-1}(\bar{c}_3 - r \bar{d}_2), \widetilde{z}_4 = \widetilde{z}^{-1}(\widetilde{c}_3 - \widetilde{r} \widetilde{s}_4), \bar{\widetilde{z}}_4 = \widetilde{z}^{-1}(\bar{\widetilde{c}}_3 - \widetilde{r} \bar{\widetilde{d}}_2), \\ z_5 = -z^{-1} r s_5, \qquad \bar{z}_5 = -z^{-1} r \bar{e}_2, \qquad \widetilde{z}_5 = -\widetilde{z}^{-1} \widetilde{r} \widetilde{s}_5, \qquad \bar{\widetilde{z}}_5 = -\widetilde{z}^{-1} \widetilde{r} \bar{\widetilde{e}}_2, \\ Q_3 = z^{-1}(f_3 - r Q_2), \quad \widetilde{Q}_3 = \widetilde{z}^{-1}(\widetilde{f}_3 - \widetilde{r} \widetilde{Q}_2), \\ z = \bar{a}_3 - r \bar{b}_2, \qquad \widetilde{z} = \bar{\widetilde{a}}_3 - \widetilde{r} \bar{\widetilde{b}}_2, \\ r = a_3 s_2^{-1}, \qquad \widetilde{r} = \widetilde{a}_3 \widetilde{s}_2^{-1}. \end{cases} \tag{48}$$

(48)

Теперь подставим (47) в (43), получим выражения в виде:

$$\begin{cases} w_3y_3 + w_4y_4 + w_5y_5 + \bar{w}_3\tilde{y}_3 + \bar{w}_4\tilde{y}_4 + \bar{w}_5\tilde{y}_5 = Q_4, \\ \tilde{w}_3\tilde{y}_3 + \tilde{w}_4\tilde{y}_4 + \tilde{w}_5\tilde{y}_5 + \tilde{\bar{w}}_3y_3 + \tilde{\bar{w}}_4y_4 + \tilde{\bar{w}}_5y_5 = \tilde{Q}_4, \end{cases} \tag{49}$$

где

$$\begin{cases} w_3 = -a_3\tilde{\bar{z}}_3 + b_3 - \bar{a}_3z_3, & \bar{w}_3 = -a_3\tilde{z}_3 + \bar{b}_3 - \bar{a}_3\bar{z}_3, \\ \tilde{w}_3 = -\tilde{a}_3\bar{z}_3 + \tilde{b}_3 - \tilde{\bar{a}}_3\tilde{z}_3, & \tilde{\bar{w}}_3 = -\tilde{a}_3z_3 + \tilde{\bar{b}}_3 - \tilde{\bar{a}}_3\tilde{\bar{z}}_3, \\ w_4 = -a_3\tilde{\bar{z}}_4 + c_3 - \bar{a}_3z_4, & \bar{w}_4 = -a_3\tilde{z}_4 + \bar{c}_3 - \bar{a}_3\bar{z}_4, \\ \tilde{w}_4 = -\tilde{a}_3\bar{z}_4 + \tilde{c}_3 - \tilde{\bar{a}}_3\tilde{z}_4, & \tilde{\bar{w}}_4 = -\tilde{a}_3z_4 + \tilde{\bar{c}}_3 - \tilde{\bar{a}}_3\tilde{\bar{z}}_4, \\ w_5 = -a_3\tilde{\bar{z}}_5 - \bar{a}_3z_5, & \bar{w}_5 = -a_3\tilde{z}_5 - \bar{a}_3\bar{z}_5, \\ \tilde{w}_5 = -\tilde{a}_3\bar{z}_5 - \tilde{\bar{a}}_3\tilde{z}_5, & \tilde{\bar{w}}_5 = -\tilde{a}_3z_5 - \tilde{\bar{a}}_3\tilde{\bar{z}}_5, \\ Q_4 = f_3 - a_3\tilde{Q}_3 - \bar{a}_3Q_3, & \tilde{Q}_4 = \tilde{f}_3 - \tilde{a}_3Q_3 - \tilde{\bar{a}}_3\tilde{Q}_3. \end{cases} \tag{50}$$

Из выражений (49) получаем формулы для вычисления y_3 и $\tilde{y}_3$ в виде:

$$\begin{cases} y_3 = \frac{1}{\tilde{\bar{v}}_3}(\tilde{Q}_5 - \tilde{\bar{v}}_4y_4 - \tilde{\bar{v}}_5y_5 - \tilde{v}_4\tilde{y}_4 - \tilde{v}_5\tilde{y}_5), \\ \tilde{y}_3 = \frac{1}{\bar{v}_3}(Q_5 - \bar{v}_4\tilde{y}_4 - \bar{v}_5\tilde{y}_5 - v_4y_4 - v_5y_5), \end{cases} \tag{51}$$

где

$$\begin{cases} \bar{v}_3 = \tilde{w}_3w_3 - \bar{w}_3\tilde{\bar{w}}_3, & \tilde{\bar{v}}_3 = \tilde{\bar{w}}_3\bar{w}_3 - w_3\tilde{w}_3, \\ v_4 = \tilde{\bar{w}}_4w_3 - w_4\tilde{\bar{w}}_3, & \tilde{v}_4 = \tilde{w}_4\bar{w}_3 - \bar{w}_4\tilde{w}_3, \\ \bar{v}_4 = \tilde{w}_4w_3 - \bar{w}_4\tilde{\bar{w}}_3, & \tilde{\bar{v}}_4 = \tilde{\bar{w}}_4\bar{w}_3 - w_4\tilde{w}_3, \\ v_5 = \tilde{\bar{w}}_5w_3 - w_5\tilde{\bar{w}}_3, & \tilde{v}_5 = \tilde{w}_5\bar{w}_3 - \bar{w}_5\tilde{w}_3, \\ \bar{v}_5 = \tilde{w}_5w_3 - \bar{w}_5\tilde{\bar{w}}_3, & \tilde{\bar{v}}_5 = \tilde{\bar{w}}_5\bar{w}_3 - w_5\tilde{w}_3, \\ Q_5 = \tilde{Q}_4w_3 - Q_4\tilde{\bar{w}}_3, & \tilde{Q}_5 = \tilde{Q}_4\bar{w}_3 - Q_4\tilde{w}_3. \end{cases} \tag{52}$$

Подставим выражения (51) для y_3 и $\tilde{y}_3$ в пару уравнений (43) системы (1) для $i = 4$. Получим соотношения вида:

$$\begin{cases} r_4y_4 + r_5y_5 + \bar{r}_4\tilde{y}_4 + \bar{r}_5\tilde{y}_5 = Q_6, \\ \tilde{r}_4\tilde{y}_4 + \tilde{r}_5\tilde{y}_5 + \tilde{\bar{r}}_4y_4 + \tilde{\bar{r}}_5y_5 = \tilde{Q}_6, \end{cases} \tag{53}$$

где

$$\begin{cases} r_4 = -a_4\tilde{\bar{v}}_{43} + b_4 - \bar{a}_4v_{43}, & \tilde{r}_4 = -\tilde{a}_4\bar{v}_{43} + \tilde{b}_4 - \tilde{\bar{a}}_4\tilde{v}_{43}, \\ \bar{r}_4 = -a_4\tilde{v}_{43} + \bar{b}_4 - \bar{a}_4\bar{v}_{43}, & \tilde{\bar{r}}_4 = -\tilde{a}_4v_{43} + \tilde{\bar{b}}_4 - \tilde{\bar{a}}_4\tilde{\bar{v}}_{43}, \\ r_5 = -a_4\tilde{\bar{v}}_{53} + c_4 - \bar{a}_4v_{53}, & \tilde{r}_5 = -\tilde{a}_4\bar{v}_{53} + \tilde{c}_4 - \tilde{\bar{a}}_4\tilde{v}_{53}, \\ \bar{r}_5 = -a_4\tilde{v}_{53} + \bar{c}_4 - \bar{a}_4\bar{v}_{53}, & \tilde{\bar{r}}_5 = -\tilde{a}_4v_{53} + \tilde{\bar{c}}_4 - \tilde{\bar{a}}_4\tilde{\bar{v}}_{53}, \\ Q_6 = f_4 - a_4\tilde{Q}_5\tilde{\bar{v}}_3^{-1} - \bar{a}_4Q_5\bar{v}_3^{-1}, & \tilde{Q}_6 = \tilde{f}_4 - a_4Q_5\bar{v}_3^{-1} - \tilde{\bar{a}}_4\tilde{Q}_5\tilde{\bar{v}}_3^{-1}, \\ v_{43} = v_4\bar{v}_3^{-1}, \tilde{v}_{43} = \tilde{v}_4\tilde{\bar{v}}_3^{-1}, \bar{v}_{43} = \bar{v}_4\bar{v}_3^{-1}, \tilde{\bar{v}}_{43} = \tilde{\bar{v}}_4\tilde{\bar{v}}_3^{-1}, \\ v_{53} = v_5\bar{v}_3^{-1}, \tilde{v}_{53} = \tilde{v}_5\tilde{\bar{v}}_3^{-1}, \bar{v}_{53} = \bar{v}_5\bar{v}_3^{-1}, \tilde{\bar{v}}_{53} = \tilde{\bar{v}}_5\tilde{\bar{v}}_3^{-1}, \end{cases} \tag{54}$$

из которых получаем, наконец, формулы вида (39):

$$\begin{cases} y_4 = A_4y_5 + \bar{A}_4\tilde{y}_5 + B_4, \\ \tilde{y}_4 = \tilde{A}_4\tilde{y}_5 + \tilde{\bar{A}}_4y_5 + \tilde{B}_4, \end{cases} \tag{55}$$

в которых

$$
\begin{cases}
A_4 = -\tilde{\bar{x}}_5 \tilde{\bar{x}}_4^{-1}, \quad \tilde{A}_4 = -\bar{x}_5 \bar{x}_4^{-1}, \\
\bar{A}_4 = -\tilde{x}_5 \tilde{\bar{x}}_4^{-1}, \quad \tilde{\bar{A}}_4 = -x_5 \bar{x}_4^{-1}, \\
B_4 = \quad \tilde{Q}_7 \tilde{\bar{x}}_4^{-1}, \quad \tilde{B}_4 = \quad Q_7 \bar{x}_4^{-1},
\end{cases}
\tag{56}
$$

$$
\begin{cases}
\bar{x}_4 = \bar{r}_4 \tilde{\bar{r}}_4 - \tilde{r}_4 r_4, \quad \tilde{\bar{x}}_4 = r_4 \tilde{r}_4 - \tilde{\bar{r}}_4 \bar{r}_4, \\
x_5 = r_5 \tilde{\bar{r}}_4 - \tilde{\bar{r}}_5 r_4, \quad \tilde{x}_5 = \bar{r}_5 \tilde{r}_4 - \tilde{r}_5 \bar{r}_4, \\
\bar{x}_5 = \bar{r}_5 \tilde{\bar{r}}_4 - \tilde{r}_5 r_4, \quad \tilde{\bar{x}}_5 = r_5 \tilde{r}_4 - \tilde{\bar{r}}_5 \bar{r}_4, \\
Q_7 = Q_6 \tilde{\bar{r}}_4 - \tilde{Q}_6 r_4, \quad \tilde{Q}_7 = Q_6 \tilde{r}_4 - \tilde{Q}_6 \bar{r}_4.
\end{cases}
\tag{57}
$$

Теперь покажем, что если мы имеем выражения вида (39) для y_i и $\tilde{y}_i$, то после подстановки их в систему (25) для $i+1$ мы получим аналогичные выражения для y_{i+1} и $\tilde{y}_{i+1}$.

$$
\begin{cases}
a_{i+1} y_i + b_{i+1} y_{i+1} + c_{i+1} y_{i+2} + \bar{a}_{i+1} \tilde{y}_i + \bar{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \bar{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} = f_{i+1}, \\
\tilde{a}_{i+1} \tilde{y}_i + \tilde{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \tilde{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} + \tilde{\bar{a}}_{i+1} y_i + \tilde{\bar{b}}_{i+1} y_{i+1} + \tilde{\bar{c}}_{i+1} y_{i+2} = \tilde{f}_{i+1}.
\end{cases}
\tag{58}
$$

$$
\begin{cases}
a_{i+1}(A_i y_{i+1} + \bar{A}_i \tilde{y}_{i+1} + B_i) + b_{i+1} y_{i+1} + c_{i+1} y_{i+2} + \\
+ \bar{a}_{i+1}(\tilde{A}_i \tilde{y}_{i+1} + \tilde{\bar{A}}_i y_{i+1} + \tilde{B}_i) + \bar{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \bar{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} = f_{i+1}, \\
\tilde{a}_{i+1}(\tilde{A}_i \tilde{y}_{i+1} + \tilde{\bar{A}}_i y_{i+1} + \tilde{B}_i) + \tilde{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \tilde{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} + \\
+ \tilde{\bar{a}}_{i+1}(A_i y_{i+1} + \bar{A}_i \tilde{y}_{i+1} + B_i) + \tilde{\bar{b}}_{i+1} y_{i+1} + \tilde{\bar{c}}_{i+1} y_{i+2} = \tilde{f}_{i+1}.
\end{cases}
\tag{59}
$$

$$
\begin{cases}
y_{i+1}(a_{i+1} A_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + b_{i+1}) + c_{i+1} y_{i+2} + \\
+ \tilde{y}_{i+1}(a_{i+1} \bar{A}_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \bar{b}_{i+1}) + \bar{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} - f_{i+1} + a_{i+1} B_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{B}_i = 0, \\
y_{i+1}(\tilde{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + \tilde{\bar{a}}_{i+1} A_i + \tilde{\bar{b}}_{i+1}) + \tilde{\bar{c}}_{i+1} y_{i+2} + \\
+ \tilde{y}_{i+1}(\tilde{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \tilde{\bar{a}}_{i+1} \bar{A}_i + \tilde{b}_{i+1}) + \tilde{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} - \tilde{f}_{i+1} + \tilde{a}_{i+1} \tilde{B}_i + \tilde{\bar{a}}_{i+1} B_i = 0.
\end{cases}
\tag{60}
$$

Обозначим

$$
\begin{cases}
r_{i+1} = a_{i+1} A_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + b_{i+1}, \qquad \tilde{r}_{i+1} = \tilde{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \tilde{\bar{a}}_{i+1} \bar{A}_i + \tilde{b}_{i+1}, \\
\bar{r}_{i+1} = a_{i+1} \bar{A}_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \bar{b}_{i+1}, \qquad \tilde{\bar{r}}_{i+1} = \tilde{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + \tilde{\bar{a}}_{i+1} A_i + \tilde{\bar{b}}_{i+1}, \\
r_{i+2} = c_{i+1}, \qquad \tilde{r}_{i+2} = \tilde{c}_{i+1}, \\
\bar{r}_{i+2} = \bar{c}_{i+1}, \qquad \tilde{\bar{r}}_{i+2} = \tilde{\bar{c}}_{i+1}, \\
Q_{i+1} = a_{i+1} B_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{B}_i - f_{i+1}, \quad \tilde{Q}_{i+1} = \tilde{a}_{i+1} \tilde{B}_i + \tilde{\bar{a}}_{i+1} B_i - \tilde{f}_{i+1}.
\end{cases}
\tag{61}
$$

Умножив первое уравнение в (60) на $\tilde{r}_{i+1}$, а второе на $\bar{r}_{i+1}$ и вычтя второе из первого, получим формулу вычисления y_{i+1} через $y_{i+2}, \tilde{y}_{i+2}$:

$$
y_{i+1}(r_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1} \tilde{\bar{r}}_{i+1}) + y_{i+2}(c_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \tilde{\bar{c}}_{i+1} \bar{r}_{i+1}) +
$$

$$
+ \tilde{y}_{i+2}(\bar{c}_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \tilde{c}_{i+1} \bar{r}_{i+1}) + Q_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \tilde{Q}_{i+1} \bar{r}_{i+1} = 0,
$$

или

$$
y_{i+1} = A_{i+1} y_{i+2} + \bar{A}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} + B_{i+1},
\tag{62}
$$

где коэффициенты прогонки определяются формулами:

$$
\begin{cases}
A_{i+1} = (\widetilde{\bar{c}}_{i+1}\bar{r}_{i+1} - c_{i+1}\widetilde{r}_{i+1})(r_{i+1}\widetilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\
\bar{A}_{i+1} = (\widetilde{c}_{i+1}\bar{r}_{i+1} - \bar{c}_{i+1}\widetilde{r}_{i+1})(r_{i+1}\widetilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\
B_{i+1} = (\widetilde{Q}_{i+1}\bar{r}_{i+1} - Q_{i+1}\widetilde{r}_{i+1})(r_{i+1}\widetilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}.
\end{cases} \tag{63}
$$

Умножив первое уравнение в (60) на $\widetilde{\bar{r}}_{i+1}$, а второе на r_{i+1} и вычтя второе из первого, получим формулу вычисления $\widetilde{y}_{i+1}$ через $\widetilde{y}_{i+2}, y_{i+2}$:

$$
\widetilde{y}_{i+1}(\bar{r}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1} - \widetilde{r}_{i+1}r_{i+1}) + y_{i+2}(c_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1} - \widetilde{\bar{c}}_{i+1}r_{i+1}) +
$$

$$
+\widetilde{y}_{i+2}(\bar{c}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1} - \widetilde{c}_{i+1}r_{i+1}) + Q_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1} - \widetilde{Q}_{i+1}r_{i+1} = 0,
$$

или

$$
\widetilde{y}_{i+1} = \widetilde{A}_{i+1}\widetilde{y}_{i+2} + \widetilde{\bar{A}}_{i+1}y_{i+2} + \widetilde{B}_{i+1}, \tag{64}
$$

где

$$
\begin{cases}
\widetilde{A}_{i+1} = (\bar{c}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1} - \widetilde{c}_{i+1}r_{i+1})(r_{i+1}\widetilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\
\widetilde{\bar{A}}_{i+1} = (c_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1} - \widetilde{\bar{c}}_{i+1}r_{i+1})(r_{i+1}\widetilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\
\widetilde{B}_{i+1} = (Q_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1} - \widetilde{Q}_{i+1}r_{i+1})(r_{i+1}\widetilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\widetilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}.
\end{cases} \tag{65}
$$

Итак, зная прогоночные коэффициенты для $i = 4$, а именно, $A_4, \bar{A}_4, B_4, \widetilde{A}_4, \widetilde{\bar{A}}_4, \widetilde{B}_4$ в (55), и рекуррентные соотношения (63),(65), можем определить все прогоночные коэффициенты $A_i, \bar{A}_i, B_i, \widetilde{A}_i, \widetilde{\bar{A}}_i, \widetilde{B}_i$ для $i = 5, 6, ..., N-2$.

6. Развязка на правом конце

Соберем вместе все полученные пары уравнений для $i = N, N-1, N-2, N-3, N-4:$

$$
\begin{cases}
i = N: \\
a_N y_N + b_N y_{N-1} + c_N y_{N-2} + d_N y_{N-3} + e_N y_{N-4} = \hat{K}_N, \\
\widetilde{a}_N \widetilde{y}_N + \widetilde{b}_N \widetilde{y}_{N-1} + \widetilde{c}_N \widetilde{y}_{N-2} + \widetilde{d}_N \widetilde{y}_{N-3} + \widetilde{e}_N \widetilde{y}_{N-4} = \widetilde{\hat{K}}_N, \\
i = N-1: \\
a_{N-1}y_N + b_{N-1}y_{N-1} + c_{N-1}y_{N-2} + d_{N-1}y_{N-3} + e_{N-1}y_{N-4} + \\
+\bar{a}_{N-1}\widetilde{y}_N + \bar{b}_{N-1}\widetilde{y}_{N-1} + \bar{c}_{N-1}\widetilde{y}_{N-2} + \bar{d}_{N-1}\widetilde{y}_{N-3} + \bar{e}_{N-1}\widetilde{y}_{N-4} = \hat{K}_{N-1}, \\
\widetilde{\bar{a}}_{N-1}y_N + \widetilde{\bar{b}}_{N-1}y_{N-1} + \widetilde{\bar{c}}_{N-1}y_{N-2} + \widetilde{\bar{d}}_{N-1}y_{N-3} + \widetilde{\bar{e}}_{N-1}y_{N-4} + \\
+\widetilde{a}_{N-1}\widetilde{y}_N + \widetilde{b}_{N-1}\widetilde{y}_{N-1} + \widetilde{c}_{N-1}\widetilde{y}_{N-2} + \widetilde{d}_{N-1}\widetilde{y}_{N-3} + \widetilde{e}_{N-1}\widetilde{y}_{N-4} = \widetilde{\hat{K}}_{N-1}, \\
i = N-2: \\
A_{N-2}y_{N-1} - y_{N-2} + \bar{A}_{N-2}\widetilde{y}_{N-1} = -B_{N-2}, \\
\widetilde{\bar{A}}_{N-2}y_{N-1} + \widetilde{A}_{N-2}\widetilde{y}_{N-1} - \widetilde{y}_{N-2} = -\widetilde{B}_{N-2}, \\
i = N-3: \\
A_{N-3}y_{N-2} - y_{N-3} + \bar{A}_{N-3}\widetilde{y}_{N-2} = -B_{N-3}, \\
\widetilde{\bar{A}}_{N-3}y_{N-2} + \widetilde{A}_{N-3}\widetilde{y}_{N-2} - \widetilde{y}_{N-3} = -\widetilde{B}_{N-3}, \\
i = N-4: \\
A_{N-4}y_{N-3} - y_{N-4} + {} + \bar{A}_{N-4}\widetilde{y}_{N-3} = -B_{N-4}, \\
\widetilde{\bar{A}}_{N-4}y_{N-3} + {} + \widetilde{A}_{N-4}\widetilde{y}_{N-3} - \widetilde{y}_{N-4} = -\widetilde{B}_{N-4}.
\end{cases} \tag{66}
$$

Получим систему из десяти уравнений с десятью неизвестными. Решив ее, найдем значения $y_N, y_{N-1}, y_{N-2}, y_{N-3}, y_{N-4}, \widetilde{y}_N, \widetilde{y}_{N-1}, \widetilde{y}_{N-2}, \widetilde{y}_{N-3}, \widetilde{y}_{N-4}$.

Для $i = N-6, N-7, ..., 3$ с помощью (62)−(63) осуществляем обратную прогонку и получаем значения $y_{N-5}, \widetilde{y}_{N-5}, ..., y_4, \widetilde{y}_4$. Значения $y_3, \widetilde{y}_3$ определяем по формулам (51),(52), $y_2, \widetilde{y}_2-$ по формулам (47),(48), $y_1, \widetilde{y}_1-$ с помощью выражений (44).

7. Тесты, проверка точности разностных схем

Описанные в данной работе вычислительные схемы реализованы в виде программы и проверены на ряде тестовых задач. Здесь приводятся результаты решения нелинейного уравнения Шредингера [6]

$$\begin{cases} \Psi''(x) - \Psi(x) + 2|\Psi(x)|^2\Psi(x) = -i\gamma\Psi(x) - H, \\ \Psi(\pm\infty) = 0, \end{cases} \tag{67}$$

где γ и H - параметры.

После замены $\Psi(x) = u(x) + iv(x)$ получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) + 2[u^2(x) + v^2(x)]u(x) = \gamma v(x) - H, \\ v''(x) - v(x) + 2[u^2(x) + v^2(x)]v(x) = -\gamma u(x), \\ u(\pm\infty) = v(\pm\infty) = 0, \end{cases} \tag{68}$$

которая решалась с помощью ньютоновских итераций с использованием указанной подпрограммы прогонки.

Вычисления проводились на последовательности сгущающихся сеток $h = 0.01, 0.005, 0.0025$ на интервале $[-20, 20]$ со значениями параметров $\gamma = 0.5$, $H = 0.35$.

Таблица 1. Реальная часть $u(x)$

x	$h_1 = 0.01$	$h_2 = 0.005$	$h_3 = 0.0025$	σ_u
0.00	−.4215764232E+00	− .4215764192E+00	− .4215764190E+00	16.672
0.10	−.4183216591E+00	− .4183216553E+00	− .4183216551E+00	16.755
0.20	−.4087220325E+00	− .4087220294E+00	− .4087220292E+00	16.942
0.03	−.4016800278E+00	− .4016800250E+00	− .4016800248E+00	17.099
0.40	−.3967828049E+00	− .3967828023E+00	− .3967828022E+00	17.227
0.50	−.3932504478E+00	− .3932504454E+00	− .3932504453E+00	17.333
1.00	−.1919580673E+00	− .1919580686E+00	− .1919580687E+00	14.966
2.00	.7100928563E−01	.7100928499E−01	.7100928494E−01	14.633
3.00	.2094771796E+00	.2094771792E+00	.2094771792E+00	14.996
4.00	.2784826909E+00	.2784826907E+00	.2784826907E+00	15.289
5.00	.3130035659E+00	.3130035658E+00	.3130035657E+00	15.483

Как известно (см., например, второй пункт в [1]), отношение разности значений решения w={ u,v}

$$\sigma_w = \frac{w_{h_1} - w_{h_2}}{w_{h_2} - w_{h_3}}$$

на последовательности сгущающихся сеток $h = \{h_1, \frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{4}\}$ должно быть величиной порядка $O(2^n)$, где n - порядок точности вычислительных схем.

Результаты для реальной $u(x)$ и мнимой $v(x)$ части решения приведены в таблицах 1 и 2, соответственно.

Таблица 2. Мнимая часть $v(x)$

x	$h_1 = 0.01$	$h_2 = 0.005$	$h_3 = 0.0025$	σ_v
0.00	.9686644441E+00	.9686644407E+00	.9686644405E+00	15.949
0.10	.9637744422E+00	.9637744391E+00	.9637744389E+00	15.997
0.20	.9493801315E+00	.9493801293E+00	.9493801292E+00	16.072
0.30	.9262723901E+00	.9262723892E+00	.9262723892E+00	16.331
0.40	.8956572111E+00	.8956572117E+00	.8956572117E+00	15.356
0.50	.8590143155E+00	.8590143174E+00	.8590143175E+00	15.780
1.00	.6386310962E+00	.6386311002E+00	.6386311005E+00	15.937
2.00	.3273751372E+00	.3273751386E+00	.3273751387E+00	16.174
3.00	.2280813731E+00	.2280813735E+00	.2280813736E+00	16.682
4.00	.2155540586E+00	.2155540587E+00	.2155540587E+00	17.291
5.00	.2247988745E+00	.2247988746E+00	.2247988746E+00	17.085

8. Краткое описание программы

Программа PROGS2H4 написана на языке Фортран в виде процедуры (subroutine), обращение к которой имеет вид:

call progs2h4(n,l,h,f,p,uk,d1,d2,f1,f2,g1,g2,y,am,bm),

где

n - число узлов x_k дискретной сетки M_h (4),
l - размерность системы (1), (здесь $l = 2$),
h - постоянный шаг дискретной сетки M_h ,
f,p - массивы размерности (l, l, n) коэффициентов $F_{i,j,k}, \widetilde{F}_{i,j,k}, P_{i,j,k}, \widetilde{P}_{i,j,k}, (i, j = 1, 2; k = 1, ..., n)$ системы (1) в узлах x_k дискретной сетки M_h ,
uk - массивы размерности (l, n) со значениями правых частей $K_{i,k}, \widetilde{K}_{i,k}, (i = 1, 2; k = 1, ..., n)$ системы (1) в узлах x_k дискретной сетки M_h ,
d1,d2,e1,e2,g1,g2 - массивы размерности l , содержащие значения $D_1, D_2, E_1, E_2, g_1, g_2$ и $\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2$ в граничных условиях (3),
y - массивы размерности (l, n) со значениями решений $y_k, \widetilde{y}_k, (k = 1, ..., n)$ в узлах x_k сетки M_h ,
am,bm - рабочие массивы размерности (l, l, n) и (l, n), соответственно.

9. Заключение

Данная работа может быть использована специалистами в области вычислительной математики и вычислительной физики для разработки новых схем повышенной точности с целью использования их в прецизионных расчетах, необходимых во многих физических задачах.

Авторы благодарны РФФИ (Грант 97-01-01040) за финансовую поддержку.

Литература

1. *И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина.* В сборнике "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики". Изд-во KFKI-74-34, Будапешт, 1974, с.93-111; *И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж.* Сообщение ОИЯИ, P11-87-332, Дубна, 1987; *Т.П. Пузынина.* Сообщение ОИЯИ, P11-89-728, Дубна, 1989.

2. *Л.И. Пономарев, И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина.* ЖЭТФ, 1973, 65, 1(7), с.28-34; *L.I. Ponomarev, I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, L.N. Somov.* Annals of Phys., 1978, 110, 2, p.274-286.

3. *G.N. Chuev, V.D. Lakhno.* Theory and applications of strongly coupled large polaron. In "Perspectives of polarons World Scientific, Editors G.N.Chuev, V.D.Lakhno, Singapore-New Jersey- London- Hong Kong, 1996, p.1-37.

   I.V. Amirkhanov, I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, T.A. Strizh, E.V. Zemlyanaya, V.D. Lakhno. Numerical investigation of a quantum-field model for strong-coupled binucleon. In the same place, p.229-250.

4. *I.V. Amirkhanov, I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, B.N. Zakhariev.* JINR Communication, E4-89-312, Dubna, 1989.

5. *I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, S.I. Vinitsky, V.I. Puzynin.* Hyperfine Interactions, 101, 1996, p.493; *I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, A.Yu. Tyukhtyaev, S.I. Vinitsky.* In Proceedings International Conference "Computational Modelling and Computing in Physics CMCP-96, September 16-21, Dubna, 1996.

6. *I.V. Barashenkov, S.Yu. Smirnov.* Phys. Rev. E54, 5707,(1996).

7. *И.С. Березин, Н.П. Жидков.* Методы вычислений, 1, М., Физматгиз, 1959, с.232-233.

8. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений . Редакторы Дж. Холл, Дж. Уатт, "Мир М., 1979.