

УДК: 519.8

Программа NINE: численное решение граничных задач для нелинейных дифференциальных уравнений методом НАМН

Б. Батгэрэл^а, Е. В. Земляная^б, И. В. Пузынин^с

Объединенный Институт Ядерных исследований,
141980, г. Дубна, ул. Жолио Кюри, 6

E-mail: ^а batgerel@jinr.ru, ^б elena@jinr.ru, ^с ipuzynin@jinr.ru

Получено 5 апреля 2012 г.,
после доработки 2 мая 2012 г.

Аннотация. Представлена программа NINE (Newtonian Iteration for Nonlinear Equation) численного решения граничных задач для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка на основе непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) с использованием нумеровской конечно-разностной аппроксимации четвертого порядка относительно шага дискретизации по пространственной переменной. Обсуждаются алгоритмы вычисления ньютоновского итерационного параметра. Выполнены методические расчеты, демонстрирующие влияние выбора итерационного параметра на сходимость итерационного процесса. Представлены результаты проведенного с помощью программы NINE численного исследования положительных частицеподобных решений уравнения скалярного поля.

Ключевые слова: Нелинейные дифференциальные уравнения, непрерывный аналог метода Ньютона, конечно-разностная аппроксимация

NINE: computer code for numerical solution of the boundary problems for nonlinear differential equations on the basis of CANM.

B. Batgerel, E.V. Zemlyanaya, I.V. Puzynin

Joint Institute for Nuclear Research, 6 Joliot Curie street, Dubna, 141980, Russia

Abstract. — The computer code NINE (Newtonian Iteration for Nonlinear Equation) for numerical solution of the boundary problems for nonlinear differential equations on the basis of continuous analogue of the Newton method (CANM) is presented. Numerov's finite-difference approximation is applied to provide the fourth accuracy order with respect to the discretization stepsize. Algorithms of calculating the Newtonian iterative parameter are discussed. A convergence of iteration process in dependence on choice of the iteration parameter has been studied. Results of numerical investigation of the particle-like solutions of the scalar field equation are given.

Keywords: Nonlinear differential equations, continuous analogue of the Newton method, finite-difference approximation

Citation: Computer Research and Modeling, 2012, vol. ..., no. ..., pp. 1–10 (Russian).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00396.

Введение

Численное исследование нелинейных моделей физики (см., например, [1–3]) часто приводит к необходимости решения нелинейных граничных задач следующего вида

$$y''(x) + f(x, y, y') = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2, \quad (2)$$

где функция f обеспечивает существование нетривиальных решений и $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i = 1, 2$. Кроме того, потребность в организации массовых расчетов задачи (1)-(2) может появиться в некоторых схемах численного анализа математических моделей. Если функция f в уравнении (1) дополнительно зависит от набора параметров \bar{a} изучаемой модели, т.е. $f = f(\bar{a}, x, y, y')$, может возникнуть задача исследования параметрической зависимости некоторого множества решений задачи (1)-(2) от параметров, в том числе, определения точек бифуркации [4]. Сюда же можно отнести задачу численного исследования стационарных решений для одномерных нелинейных уравнений в частных производных (как, например, в [5; 6]), а также решение таких уравнений методом прямых [7]. Поэтому, несмотря на множество разработанных методов численного решения задачи (1)-(2), включая и преподаваемые в учебных курсах, проблема численного решения этой задачи с высокой точностью и за малое число итераций остается актуальной.

Программа NINE (Newton Iteration for Nonlinear Equation) предназначена для вычисления, при заданном начальном приближении, искомого решения задачи (1)-(2) на основе непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) [1; 2] с использованием нумеровской аппроксимации четвертого порядка относительно шага дискретизации по пространственной переменной. В отличие от классического метода Ньютона, итерационные схемы на основе НАМН содержат параметр, специальный выбор которого позволяет влиять на сходимость итерационного процесса. В программе NINE реализованы как известные методы выбора итерационного параметра (см. обзоры [1; 2] и цитируемую литературу), так и алгоритмы, разработанные в недавней работе [8]. Предложен еще один вариант выбора начального значения итерационного параметра.

Проблема задания начального приближения для итерационного процесса решения нелинейной задачи (1)-(2) в общем случае является неалгоритмизуемой. При решении конкретных задач используются решения упрощенных уравнений, полученных в асимптотических областях изучаемой модели, или функции, отражающие некоторые свойства искомых решений и полученные на основе качественного анализа задачи. Особенно эффективными являются методы продолжения в задачах параметрического анализа (например, [4; 9; 10]). НАМН, являющийся одним из методов установления [11] и снабженный при численной реализации алгоритмами вычисления итерационного параметра, обеспечивает эффективное решение задачи (1)-(2) в указанных выше вычислительных схемах.

Эффективность реализованных в программе NINE алгоритмов продемонстрирована на трех примерах. В качестве первых двух использованы уравнения для статических решений соответствующих уравнений в частных производных, имеющие аналитические решения. Для этих двух тестов приведены методические расчеты, подтверждающие четвертый порядок сходимости разностной схемы и демонстрирующие эффективность адаптивных алгоритмов выбора итерационного параметра. Можно ожидать, что рассмотренные алгоритмы вычисления итерационного параметра будут эффективны при решении других, более сложных, задач на основе НАМН.

В третьем примере, для нелинейного уравнения скалярного поля с помощью программы NINE получены результаты вычисления точки бифуркации для показателя нелинейности, уточняющие данные работы [12].

Итерационная схема на основе НАМН

Задача (1),(2) может рассматриваться как нелинейное функциональное уравнение вида

$$\varphi(z) = 0, \quad (3)$$

для которого, согласно подходу, определяемому НАМН, вводится вспомогательное эволюционное уравнение

$$\varphi'(z) \frac{dz}{dt} = -\varphi(z), \quad 0 \leq t < \infty, \quad z(0) = z_0, \quad (4)$$

где $\varphi'(z)$ – производная Фреше, t – дополнительный параметр, а z_0 – начальное приближение к искомому решению z^* уравнения (3). При достаточно общих предположениях на $\varphi(z)$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - z^*\| = 0$. Дискретизация параметра $t : \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ и применение схемы Эйлера приводят к следующей последовательности итераций:

$$\varphi'(z_k)v_k = -\varphi(z_k), \quad z_{k+1} = z_k + \tau_k v_k, \quad \tau_k = t_k - t_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где v_k – итерационная поправка, вычисляемая на каждом шаге. Сходимость итераций на основе НАМН доказана в [13].

Для задачи (1),(2) итерационная схема (5) принимает следующий вид. Пусть на $(k-1)$ -й итерации приближение к решению $y_k(x)$ уже получено. Тогда на следующем k -м шаге вычисляем:

1. итерационную поправку $v_k(x)$, численно решая линейаризованную краевую задачу:

$$v_k'' + p_k(x)v_k' + q_k(x)v_k = -y_k'' - f_k(x), \quad (6)$$

$$\alpha_1 v_k'(a) + \beta_1 v_k(a) = \gamma_1 - \alpha_1 y_k'(a) - \beta_1 y_k(a), \quad (7)$$

$$\alpha_2 v_k'(b) + \beta_2 v_k(b) = \gamma_2 - \alpha_1 y_k'(b) - \beta_2 y_k(b), \quad (8)$$

где $p_k(x) = f_y'(x, y_k, y_k')$, $q_k(x) = f_{yy}''(x, y_k, y_k')$, $f_k(x) = f(x, y_k, y_k')$;

2. следующее приближение к решению задачи (1),(2):

$$y_{k+1}(x) = y_k(x) + \tau_k v_k(x). \quad (9)$$

Для решения краевой задачи вводится N -узловая равномерная сетка по x : $x_i = a + h(i-1)$, $h = (b-a)/(N-1)$, $i = 1, \dots, N$. Во внутренних точках дискретной сетки $i = 3, \dots, N-2$ используются 3-точечные конечно-разностные формулы 4-го порядка, полученные на основе метода Нумерова. Для $i = 1, 2$ и $i = N-1, N$ использованы несимметричные 5-точечные формулы 4-го порядка [14]. Полученная система алгебраических уравнений относительно значений итерационной поправки v_k в узлах x_i решается методом прогонки.

Итерационный процесс завершается при выполнении условия

$$\delta_k < \epsilon, \quad (10)$$

где $\epsilon > 0$ – заранее заданное малое число и δ_k определяется по формуле

$$\delta_k = \max(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \varphi_k^{(3)}), \quad (11)$$

$$\varphi_k^{(1)} = \max_{i=2, \dots, N-1} |y_k''(x_i) + f(x_i, y_k(x_i), y_k'(x_i))|, \quad (12)$$

$$\varphi_k^{(2)} = |\alpha_1 y_k'(x_1) + \beta_1 y_k(x_1) - \gamma_1|, \quad (13)$$

$$\varphi_k^{(3)} = |\alpha_2 y_k'(x_N) + \beta_2 y_k(x_N) - \gamma_2|. \quad (14)$$

Для вычисления $y'(x_i)$ при всех $i = 1, \dots, N$ и $y''(x_i)$ при $i = 3, \dots, N - 2$ используются 5-точечные формулы 4-го порядка точности [14]. Для вычисления $y''(x_2)$ и $y''(x_{N-1})$ построены 6-точечные конечно-разностные формулы 4-го порядка.

Чтобы итерационный процесс был полностью определен, необходимо задать начальное приближение к решению y_0 и алгоритм вычисления итерационного параметра τ_k . Начальное приближение выбирается с учетом особенностей конкретной задачи и априорной информации о форме решения. Методы выбора итерационного параметра обсуждаются в следующем разделе.

Методы вычисления итерационного параметра

Для вычисления итерационного параметра τ_k ($0 < \tau_{min} \leq \tau_k \leq 1$) разработан целый набор алгоритмов (все они перечислены, в частности, в [8], из которых наиболее эффективными и часто используемыми являются два, обсуждаемых ниже.

Алгоритм, предложенный в [15], определяется формулой

$$\tau_k = \frac{\tilde{\delta}_{k-1}}{\tilde{\delta}_{k-1} + \tilde{\delta}_k(1)}, \quad (15)$$

где

$$\tilde{\delta}_k = \int_a^b \varphi(y_k(x))^2 dx, \quad (16)$$

и $\tilde{\delta}_k(1)$ – значение $\tilde{\delta}_k$ на k -й итерации, рассчитанное по формуле (16) для $\tau = 1$. Как показано в [15], этот алгоритм обеспечивает квадратичное уменьшение невязки (16) и сходимость итерационного процесса за малое число шагов при удачно выбранном начальном приближении. Недостатком его является необходимость вычисления на каждой итерации значения $\tilde{\delta}_k(1)$, что при решении сложных задач (интегродифференциальные уравнения, пространственно неоднородные системы уравнений и др.) может потребовать существенного увеличения времени счета.

В работе [13] доказана сходимость итераций на основе НАМН при выборе τ_k пропорционально уменьшению невязки δ_k :

$$\tau_k = \begin{cases} \min\left(1, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\right), & \text{если } \delta_k < \delta_{k-1}, \\ \max\left(\tau_{min}, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\right), & \text{если } \delta_k \geq \delta_{k-1}, \end{cases} \quad (17)$$

где τ_{min} – заданное малое число, а δ_k вычисляется по формуле (11) или (16). Этот алгоритм обеспечивает сходимость в достаточно широкой области начальных приближений, однако должен дополняться начальным значением итерационного параметра τ_0 . Используемое на практике значение $\tau_0 = 0.1$ обеспечивает в большинстве случаев устойчивую сходимость

итерационного процесса даже при грубых начальных приближениях. С другой стороны, при таком выборе τ_0 даже для хорошего начального приближения число итераций остается довольно большим ($\sim \frac{1}{\tau_0}$, то есть 10-15 шагов).

В недавних работах [8], [16] предложены два адаптивных алгоритма выбора начального значения итерационного параметра, обеспечивающие большее или меньшее значение τ_0 в зависимости от качества начального приближения. Эти алгоритмы определяются следующими двумя формулами:

$$\tau_0 = \frac{\delta_0}{2\delta_1(1)}, \quad (18)$$

и

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\delta_1(1)}{\delta_0} \right|. \quad (19)$$

В обоих случаях невязка δ_0 определяется по формулам (11) или (16), $\delta_1(1)$ – невязка на первой итерации ($k = 1$), рассчитанная также по формуле (11), но для $\tau = 1$. Чтобы исключить слишком малое или слишком большое значение τ_0 , вводится ограничение $\tau_{min} \leq \tau_0 \leq 1$, $\tau_{min} = 0.1$. В работах [8], [16] продемонстрирована эффективность обеих формул применительно к задаче Штурма–Лиувилля.

Еще один вариант выбора τ_0 можно предложить на основе комбинации подходов, определяемых формулами (15) и (17). Начальное значение итерационного параметра τ_0 вычисляется по формулам (15),(16), далее для расчета итерационного параметра используются формулы (17),(11). Как показывают тестовые расчеты, представленные ниже, все три метода выбора τ_0 обеспечивают уменьшение числа итераций по сравнению с $\tau_0 = 0.1$, при этом число итераций сравнимо с числом итераций при использовании метода (15),(16). Во всех трех случаях расчет τ_0 требует однократного дополнительного вычисления невязки для случая $\tau = 1$ на шаге $k = 0$, что не приводит к существенному росту объема вычислений. Еще раз отметим, что может быть использована как равномерная, так и квадратичная нормы для невязки.

Особенности программной реализации

Программа NINE написана на языке Фортран 90. Пользователь должен составить и включить в комплекс FUNCTION FF(X,Y,Z), FUNCTION FY(X,Y,Z), FUNCTION FDY(X,Y,Z) соответственно для вычисления функций $f(x, y, z)$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z)$, и $\frac{\partial}{\partial z}f(x, y, z)$, где $z = y'$. Параметры краевых условия $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$, значение ϵ из условия (10), границы интервала a, b и число узлов дискретной сетки N , а также ключи, по которым осуществляется выбор τ_0 и τ_k , считываются из входного файла с именем PARAMETERS, который также формируется пользователем. Вычисление интеграла в формуле (16) осуществляется с использованием квадратурной формулы Симпсона. Для решения задачи (6)–(8) используется подпрограмма `progon4.f` из библиотеки JINRLIB.

Численные результаты

Пример 1.

Нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью самофокусирующего типа и параметрической накачкой (см., например, [17])

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi - \psi = h\psi^*, \quad \psi(t, \pm\infty) = 0$$

имеет при $0 \leq h < 1$ чисто вещественное положительное стационарное решение $\psi(t, x) = \psi(x) = A \operatorname{sech}(Ax)$, $A^2 = 1 - h$. Полагая $h = 0$ и отбрасывая равные нулю для указанного решения члены соответствующей стационарной задачи, получаем уравнение

$$y'' + 2y^3 - y = 0, \quad y(\pm\infty) = 0, \quad (20)$$

имеющее аналитическое решение

$$y(x) = \operatorname{sech}(x). \quad (21)$$

В табл.1 приведены результаты численного решения задачи (20) на последовательности вдвое сгущающихся сеток с шагами $h, h/2, h/4$ при значениях $a = -20$, $b = 20$, $h = 0.1$, $\epsilon = 10^{-6}$. Для сравнения дано точное решение (21) в тех же узлах. В последнем столбце таблицы приводится значение σ , рассчитанное по формуле

$$\sigma = \frac{y_h - y_{h/2}}{y_{h/2} - y_{h/4}}. \quad (22)$$

Видно, что $\sigma \approx 2^4$, что численно подтверждает соответствие порядка точности схемы теоретическому значению $O(h^4)$. В табл.2 показана зависимость числа итераций k от метода

Таблица 1. Расчет на последовательности вдвое сгущающихся сеток для уравнения (20).

x	y_h	$y_{h/2}$	$y_{h/4}$	$y(x)$	σ
-10	0.000090798855	0.000090799796	0.000090799855	0.000090799859	15.9491
-5	0.013475170653	0.013475275199	0.013475281766	0.013475282221	15.9199
-1	0.648048201016	0.648053891805	0.648054249223	0.648054273663	15.9219
0	1.000005485790	1.000000346103	1.00000021704	1.000000000000	15.8437
1	0.648048199971	0.648053892709	0.648054250377	0.648054273663	15.9162
5	0.013475170624	0.013475275224	0.013475281798	0.013475282221	15.9111
10	0.000090798855	0.000090799796	0.000090799855	0.000090799859	15.9491

Таблица 2. Число итераций при решении уравнения (20) с использованием разных методов расчета τ_k .

i	δ_0	(18),(17)		(19),(17)		(15),(17)		(17)		(15),(16)	
		τ_0	k	τ_0	k	τ_0	k	τ_0	k	τ_0	k
1	1.4134	0.1000	11	1.0000	8	0.1000	13		11	0.1000	4
2	1.3753	0.2563	6	0.4750	4	0.2777	6	0.1	12	0.2777	4
3	2.2511	0.6897	5	0.1375	10	0.8074	6		13	0.8074	5
4	8.0194	0.7143	7	0.8019	15	0.9150	6		18	0.9150	5

расчета итерационного параметра τ_k . Представлены расчеты по формулам (17) с выбором τ_0 согласно (18),(19),(15) и $\tau_0 = 0.1$ при разных начальных приближениях, а также результаты расчетов с использованием формул (15),(16). Начальное приближение задается формулой

$$y_0(x) = \frac{c_i}{1+x^2}, \quad c_i \in \{0.7, 0.8, 1.5, 1.9\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (23)$$

Во втором столбце приведены начальные значения невязки δ_0 для каждого варианта y_0 , определяемого значением константы c_i . Видно, что все три протестированных варианта выбора τ_0 для алгоритма (17) обеспечивают уменьшение числа итераций, то есть ускорение вычислений.

Пример 2.

Статические распределения магнитного потока в модели джозефсоновского контакта на основе возмущенного уравнения синус-Гордона [18]

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} - \alpha\varphi_t = \sin\varphi - \gamma, \quad t > 0, \quad x \in (-l, l), \quad \varphi_x(\pm l, t) = h_e, \quad (24)$$

при нулевом внешнем токе h_e , нулевом магнитном поле γ и при $\alpha = 1$ удовлетворяют уравнению

$$y'' - \sin y = 0, \quad y'(\pm\infty) = 0. \quad (25)$$

Простейшее неоднородное решение имеет вид

$$y(x) = 4 \arctan(e^x). \quad (26)$$

В табл.3 приведена зависимость числа итераций от выбора τ_0 для четырех различных начальных приближений при $a = -40$, $b = 40$, $h = 0.1$, $\epsilon = 10^{-6}$. Начальное приближение задается формулой

$$y_0(x) = 4 \arctan(e^{c_i x}), \quad c_i \in \{0.7, 0.8, 1.5, 1.9\}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (27)$$

Таблица 3. Число итераций при решении уравнения (25) с использованием разных методов расчета τ_k .

i	δ_0	(18),(17)		(19),(17)		(15),(17)		(17)		(15),(16)	
		τ_0	k	τ_0	k	τ_0	k	τ_0	k	τ_0	k
1	0.7497	0.3828	4	0.1529	8	0.5478	3		12	0.5478	3
2	1.2495	1.0000	4	0.4568	5	0.9938	3		12	0.9938	2
3	2.9786	1.0000	5	0.4531	5	0.9917	3	0.1	13	0.9917	3
4	5.1829	1.0000	5	0.4566	6	0.9921	3		13	0.9921	3

Пример 3.

В нелинейной теории поля и статистической теории ядра встречается задача [19]

$$y'' + y \left[\left(\frac{y}{x} \right)^{\alpha-1} - 1 \right] = 0, \quad y(0) = y(\infty) = 0, \quad (28)$$

где $\alpha > 1$ — параметр нелинейности. Известно что, задача имеет положительное частицеподобное решение при $1 < \alpha \leq 4$ и не имеет решения при $\alpha \geq 5$. В работе [12] получено численное решение задачи (28) при $4 \leq \alpha \leq 4.8$. Расчеты с помощью программы NINE позволили получить частицеподобное положительное решение при $4 \leq \alpha \leq 4.99999$, тем самым численно продемонстрировав существование такого решения при всех значениях $1 < \alpha < 5$. На начальных этапах исследования начальное приближение для ньютоновских итераций строилось с помощью метода стрельбы. Далее осуществлялось численное продолжение по параметру α с использованием для построения начальных приближений результатов, полученных для предыдущих значений параметра α .

На рис.1 показаны графики решений задачи (28) при трех разных значениях параметра $\alpha = 4.74, 4.9, 4.99999$, в табл.4 приведены значения этих решений в некоторых точках. На рис.2 показана зависимость величины

$$S = \int_0^\infty y^2(x) dx \quad (29)$$

от параметра α . Численное интегрирование проводилось на интервале $[0, 10]$ при $h = 0.0001$.

В табл.5 представлен результат расчета на последовательности вдвое сгущающихся сеток при $\alpha = 4.999$. Расчеты проводились на интервале $[0, 5]$ при $h = 5 \cdot 10^{-7}$. Близкое к 2^4 значение σ , рассчитанное по формуле (22), подтверждает четвертый порядок сходимости вычислительной схемы и достоверность полученных численных результатов.

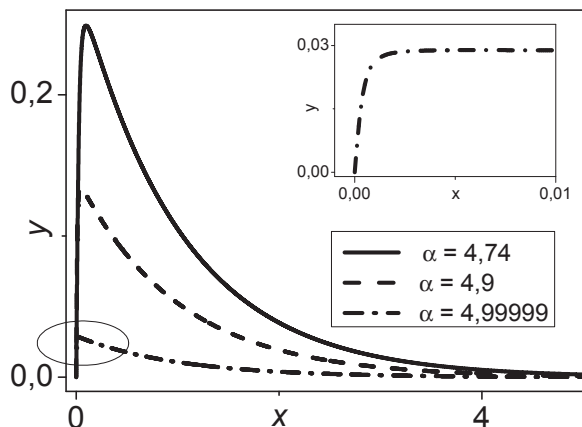


Рис. 1. Положительные частицеподобные решения задачи (28). Во вставке в крупном масштабе показан выделенный фрагмент решения.

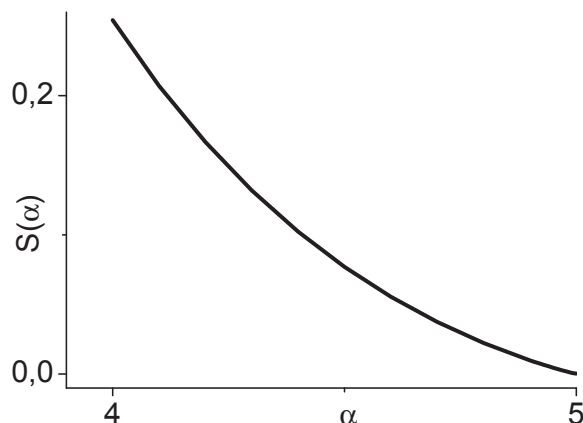


Рис. 2. Зависимость $S(\alpha)$, рассчитанная по формуле (29) для решений уравнения (28) при разных значениях параметра α .

Таблица 4. Решение задачи (28) при некоторых значениях x и α .

x	y		
	$\alpha = 4.74$	$\alpha = 4.9$	$\alpha = 4.99999$
0.001	0.008906329	0.013733166	0.026182282
0.01	0.084223930	0.099065190	0.028837652
0.1	0.227957926	0.128765465	0.026383483
1.0	0.095123821	0.052492939	0.010726772
3.0	0.012873630	0.007104142	0.001451709
6.0	0.000640725	0.000353576	0.000072252
$S(\alpha)$	0.031077	0.009894	0.000424

Таблица 5. Расчет на последовательности вдвое сгущающихся сеток для решения уравнения (28) при $\alpha = 4.999$.

x	y_h	$y_{h/2}$	$y_{h/4}$	σ
0.001	0.012982680	0.012983771	0.012983839	16.1914
0.01	0.012927034	0.012928141	0.012928209	16.1901
0.1	0.011814814	0.011815826	0.011815888	16.3027
1.0	0.004802200	0.004802612	0.004802638	15.7667
2.0	0.001762843	0.001762994	0.001763003	15.9651
3.0	0.000638217	0.000638272	0.000638275	16.0724
4.0	0.000206799	0.000206817	0.000206817	15.8570

Для подтверждения достоверности результатов были также проведены расчеты на последовательности расширяющихся интервалов $[0, R]$, $R = 5, 10, 20$. Графики этих решений визуально неразличимы, поэтому мы их не приводим. Значения интеграла S для $\alpha = 4.9$ соответственно равны 0.009891901, 0.009901121, 0.009901122.

Заключение

Представлена программа NINE для численного решения задачи (1),(2) методом НАМН, обеспечивающая 4-й порядок точности относительно шага равномерной дискретной сетки по x . Эффективность используемой вычислительной схемы и программной реализации подтверждена тестовыми расчетами. Программа передана в библиотеку программ ОИЯИ JINRLIB для свободного доступа через Интернет.

Показано, что адаптивные алгоритмы выбора начального значения итерационного параметра улучшают сходимость итерационного процесса на основе НАМН. Эти алгоритмы могут использоваться при решении других задач на основе НАМН.

Для уравнения (28) получено положительное частицеподобное решение в области $\alpha \in [4, 4.99999]$, что численно подтверждает существование такого решения при всех значениях α из интервала $1 < \alpha < 5$.

Список литературы

1. Пузынин И.В. и др. О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов. // Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2007. Т. 38. Вып. 1. — С. 144–232.
2. Пузынин И.В. и др. Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей. // Физика элементарных частиц и атомного ядра, 1999. Т. 30, Вып. 1. — С. 210–265.
3. Amirkhanov I.V. et al. Some nonlinear problems in the nonlinear field models. In: International Conference on Programming and Mathematical Techniques in Physics (Dubna, Russia, 1993) ed. by Yu. Lobanov and E. Zhidkov, Singapore a.o.: World Sci., 1994, — p.205-209.
4. Seidel R. Practical Bifurcation and Stability Analysis. From Equilibrium to Chaos (3rd Ed.), Springer, New York, 2010. — 483p.
5. Barashenkov I.V., Alexeeva N.V., Zemlyanaya E.V. Two and three-dimensional oscillons in nonlinear Faraday resonance // Phys. Rev. Lett., 2002. V. 89, 104101.
6. Атанасова П.Х., Бояджиев Т.Л., Земляная Е.В., Шукринов Ю.М. Численное моделирование длинных джозефсоновских контактов, описываемых уравнением двойного синус-Гордона // Математическое Моделирование. 2010. Т. 22, Вып. 11. — С. 40–64.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978. — 512с.
8. Пузынин И.В., Пузынина Т.П., Тхак В.Ч. SLIPM — программа на языке MAPLE для численного решения частичной проблемы Штурма—Лиувилля на основе непрерывного аналога метода Ньютона. // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика, 2010. Вып. 2(2). — С. 90–98.
9. Земляная Е.В., Барашенков И.В. Численное исследование многосолитонных комплексов в нелинейном уравнении Шрёдингера с диссипацией и накачкой // Математическое моделирование. 2004 Т. 16. Вып. 10. — С. 3–14.
10. Земляная Е.В., Барашенков И.В. Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шрёдингера с параметрической накачкой и диссипацией // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. Вып. 1. — С. 65–78.

11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учебное пособие для вузов (6-е изд.) М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636с.
12. Жанлав Т., Пузынин И.В. О комбинации метода установления и метода Ньютона для решения нелинейных дифференциальных задач. // ЖВМиМФ, 1994. Т.34. Вып. 2. — С. 175–184.
13. Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона. // ЖВМиМФ, 1992. Т. 32. Вып. 6. — С. 846–856.
14. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т.1. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 232–233.
15. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона. // ЖВМиМФ, 1981. Т. 21. Вып. 2. — С. 491–497.
16. Тхак В.Ч., Пузынина Т.П. SLIPN4M — программа для численного решения проблемы Штурма — Лиувилля. // Международный журнал Программные продукты и системы, Том 95. Вып. 3, — С. 75–80.
17. Barashenkov I.V., Zemlyanaya E.V., Bär M. Travelling solitons in the parametrically driven nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. E. 2001. V. 64, 016603.
18. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 4. — С. 1527–1543.
19. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. // ЖЭТФ, 1958. Т. 35. Вып. 2(8). — С. 452–457.