

УДК 539.144.3

ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РОТАЦИОННЫХ ПОЛОС

И. Н. Михайлов,
Е. Наджаков,*
Д. Караджов

Объединенный институт ядерных
исследований, г. Дубна

Кратко суммированы эффекты, возникающие из-за вращения деформированных атомных ядер, и представлены методы теоретического описания этих эффектов, основанные на использовании аппарата квантовой теории многих тел.

The short summary of the effects of rotation of deformed nuclei is given and the description of these effects on the basis of the quantum many-body theory is considered.

ВВЕДЕНИЕ

К изучению вращения атомных ядер привело обнаружение аномально сильных $E2$ -переходов в ядрах редкоземельной области ($150 \leq A \leq 190$) и области трансурановых элементов ($228 \leq A$). Причина усиления переходов была указана Райнвотером [1], а затем Бором и Моттельсоном [2, 3], предположившими появление статической квадрупольной деформации самосогласованного поля нуклонов ядра. Наличие деформации поля (такой, что вещество ядра заполняет объем с поверхностью, близкой к поверхности эллипсоида вращения) объясняет большой статический квадрупольный момент ядра. Произвол в ориентации оси симметрии поля приводит к существованию серии состояний с одинаковым распределением нуклонов по уровням поля, но различающихся весом, с которым в них представлены различные ориентации. Такие «ротационные» состояния, предсказанные теоретически Бором и Моттельсоном, идентифицированы экспериментально в очень большом числе случаев. При этом установлен целый ряд закономерностей, позволивших сгруппировать состояния дефор-

* Физический институт АННРБ, София.

мированных ядер в состоянии разных «ротационных полос». Данная в работах [1—3] интерпретация ротационных состояний нашла многочисленные подтверждения. В то же время выяснилась необходимость ее уточнения в отношении структуры внутренней части волновой функции деформированного состояния и в описании различий между функциями состояний ротационной полосы. Потребовалось также развитие математического аппарата теории вращения в квантовой системе многих нуклонов. В данной работе последний вопрос находится в центре внимания.

1. СВОЙСТВА РОТАЦИОННЫХ СОСТОЯНИЙ ЯДЕР

Объединение состояний деформированных ядер в ротационные полосы производят по ряду признаков, и в частности по зависимости энергии состояния от квантового числа углового момента I . Члены одной ротационной полосы имеют одинаковую пространственную четность π . Ротационная полоса может начинаться с любого целого (в четных ядрах) или полуцелого (в нечетных ядрах) значения I ($I_{\text{мин}}$ обычно обозначают индексом K). Состав полос по моментам указывает на наличие в ядрах симметрии относительно дискретных поворотов внутренних осей (как в двухатомной симметричной молекуле). В четно-четных ядрах нижайшие возбужденные состояния принадлежат полосе $K = 0$ ($\pi = +1$) и имеют моменты $I = 0, 2, 4, \dots$. Полосы $K \neq 0$ содержат состояния с моментами $I = K, K + 1, K + 2, \dots$ и наблюдаются как в четных, так и в нечетных ядрах. В нечетно-нечетных ядрах встречаются состояния, подходящие под классификацию ротационных состояний $K = 0; I = 1, 3, \dots$. Эта часть ротационной полосы $K = 0$ оказывается сдвинутой в область больших энергий относительно состояний $I = 0, 2, 4, \dots$ [4].

Энергию возбуждения ротационного уровня можно представить в виде

$$E_I - E_0 = \frac{I(I+1)}{2J}, \quad (1.1)$$

типичном для ротатора с моментом инерции J . Впрочем, в отличие от жесткого ротатора момент инерции ядер плавно изменяется вдоль полосы, возрастая в ее начале почти линейно с энергией возбуждения:

$$J = b + c(E_I - E_0)/2. \quad (1.2)$$

Формулы (1.1) и (1.2) приводят к простому выражению для энергии так называемого мягкого ротатора [5]:

$$E_I - E_0 = (b/c) (\sqrt{1 + cI(I+1)/b^2} - 1), \quad (1.3)$$

воспроизводящему с точностью, сравнимой с экспериментальной погрешностью измерения, энергии первых 6—7 уровней основных

ротационных полос четно-четных ядер (см. [5, 6]). Типичные значения параметров b и c для деформированных ядер оказываются такими, что об адиабатически медленном вращении можно говорить лишь в отношении состояний с моментами

$$I \ll I_0 = \sqrt{b^2/c} \approx 14 \div 18.$$

Существуют и другие возможности параметризации E_I , из которых упомянем формулы Харриса [7]:

$$\left. \begin{aligned} E_I - E_0 = E(I) &= [J_0 + (3/4c)\omega^2] \omega^2/2; \\ I(I+1) &= [J_0 + (1/2c)\omega^2]^2 \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Интерес к последним формулам вызывает, во-первых, возможность систематизации с их помощью эмпирического материала в очень широкой области ядер, распространяющейся на ядра переходной области и сферические [8]. Во-вторых, формулы (1.4) соответствуют простой физической картине возникновения зависимости от состояния в моменте инерции, передаваемой так называемой моделью с переменным моментом инерции [9, 10]. В этой модели энергия состояния с фиксированными I принимается равной минимальному значению энергии $E(J, I)$. Последняя зависит от некоторой коллективной переменной, величина которой определяет также момент инерции J . Если

$$E(J, I) = c(J - J_0)^2/2 + I(I+1)/2J, \quad (1.5)$$

то уравнения, фиксирующие равновесное значение J и соответствующее значение энергии, приводятся к виду (1.4).

Другая категория закономерностей, связанных с ротацией, относится к вероятностям переходов под действием электромагнитного поля [11] (а также α - и β -переходов). Так, в $K = 0$ полосах четно-четных ядер отношение $B(E2, 4 \rightarrow 2)/B(E2, 2 \rightarrow 0) \approx 10/7$, а значение статического квадрупольного момента пропорционально $I/(2I+3)$. Эти и другие факты удается объяснить, написав для приведенного матричного элемента электрического момента ядра мультипольности λ формулу [12], основанную на известной «адиабатической волновой функции» (см., например, обзорные работы [13]):

$$\begin{aligned} \langle K_f I_f \| \mathcal{M}(\lambda) \| I_i K_i \rangle &= \left[\frac{(2I_f+1)(2I_i+1)}{(1+\delta_{K_f})(1+\delta_{K_i})} \right]^{1/2} (-1)^{I_f-K_f} \times \\ &\times \left\{ \left(\begin{array}{ccc} I_f & \lambda & I_i \\ -K_f & K_f-K_i & K_i \end{array} \right) \langle K_f | \mathcal{M}'(\lambda, K_f-K_i) | K_i \rangle + \right. \\ &+ (-1)^{I_i+K_i} \left(\begin{array}{ccc} I_f & \lambda & I_i \\ -K_f & K_f+K_i & -K_i \end{array} \right) \langle K_f | \mathcal{M}'(\lambda, K_f+K_i) | \bar{K}_i \rangle \left. \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Следствия из формулы (1.6) хорошо проверены в области нескольких первых возбуждений ротационного типа для операторов дипольного, квадрупольного и октупольного электрических моментов. Аналогичное выражение известно для магнитного дипольного момента и позволяет описывать магнитные моменты и $M(1)$ -переходы в деформированных ядрах.

Величины $\langle K_f | \mathcal{M}' | K_i \rangle$ в формуле (1.6) имеют смысл матричных элементов оператора \mathcal{M} , приведенного к внутренним осям. Волновые функции $|K\rangle$ аппроксимируют относительно простыми комбинациями волновых функций независимых фермионов в поле аксиальной симметрии (см., например, монографию [14], в которой подробно описана структура неротационных состояний деформированных ядер).

Можно ожидать, что формула (1.6) воспроизводит экспериментальную ситуацию, относящуюся к переходам, примерно так же, как формула жесткого ротатора (1.1) с постоянным моментом инерции воспроизводит энергии ротационных состояний. Действительно, работы по измерению времен жизни ротационных уровней с большими I [15, 16] показывают необходимость существенных коррекций в (1.6) даже для основной полосы четно-четных ядер.

Роль членов, неучтенных в (1.6), возрастает и становится заметной даже при малых I для переходов, запрещенных по приближенным квантовым числам, связанным со структурой деформированных состояний $|K\rangle$. Нужные модификации теории удастся получить, учитывая феноменологическим путем смешивание различных $|K\rangle$ в волновой функции стационарного состояния, вызванное силами Кориолиса [17, 18]. Последние возникают из-за связи коллективного \mathbf{R} и внутреннего \mathbf{j} угловых моментов и описываются гамильтонианом роторной модели:

$$H = H_{\text{intr}} + \sum_{k=x, y} \frac{R_k^2}{2J}. \quad (1.7)$$

Матричные элементы $\mathbf{I} = \mathbf{R} + \mathbf{j}$ во внутренней системе координат будут следующие [19]:

$$\langle K \pm 1I | I_{\pm} | IK \rangle = \sqrt{(I \pm K)(I \mp K + 1)} \quad (1.8)$$

$$(I_{\pm} = I_x \pm iI_y).$$

Матричные элементы \mathbf{j} можно или рассматривать как подгоночные параметры, или аппроксимировать матричными элементами полного момента между разными деформированными функциями, считая их внутренними функциями.

В некоторых случаях эффекты смешивания можно анализировать по теории возмущений. Формулы теории возмущений, описы-

вающие поправки к (1.6) в более общих предположениях о гамильтониане, чем в (1.7), даны в работах [20].

Смешивание силами Кориолиса влияет и на энергии ротационных состояний, оказываясь весьма важным в полосах $K = 1/2$ [13].

У некоторых ядер одночастичные уровни с большой примесью компоненты $j \gg 1$ оказываются близкими к поверхности Ферми (уровень $i_{13/2}$ в изотопах Yb, Er, Dy и пр.; уровень $j_{15/2}$ в области актинидов). Матричные элементы взаимодействия Кориолиса у таких ядер могут достигать величин, сравнимых с энергией возбуждения неротационных состояний. В этих случаях связь состояний с разными K становится определяющей для структуры низколежащих состояний [21].

Резюмируя сказанное, отметим следующие черты ядерного вращения:

1) обычно не представляет большой проблемы выделить эмпирически ротационные состояния на фоне других, ввиду наличия у ротационных состояний специфических, энергетических и вероятностных черт;

2) вращение в ядрах сильно искажено связью с внутренним движением. Область адиабатически медленного вращения ограничена всего несколькими уровнями. С этим связан вопрос о неопределенности теоретического выделения вращения среди других мод, т. е. оптимального определения коллективных углов [13] обобщенной модели;

3) вращения нельзя рассматривать как процесс, в котором форма ядра претерпевает малые изменения, т. е. по аналогии с колебаниями. Волновые пакеты, описывающие вращение ядра вокруг какой-либо оси (например, оси Oy)

$$|t, \omega\rangle = \exp(-i\omega I_y t) | \omega \rangle, \quad (1.9)$$

должны включать много компонент ротационной полосы, а, следовательно, информация, полученная с их помощью, должна содержать элемент усреднения по большому участку полосы.

С двумя последними чертами связана ограниченная точность предсказаний свойств ядерных ротационных состояний на основе квазиклассических представлений.

2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЯДЕРНЫХ РОТАЦИОННЫХ ПОЛОС

Такое название объединяет довольно большое число ядерных моделей, ставящих своей задачей описать основные свойства ротационных состояний, и в первую очередь их энергии по данным о внутренней структуре деформированных ядер. С их помощью оказалось возможным установить важные связи между харак-

теристиками простейших (квазичастичных) возбуждений деформированных ядер и строением ротационных полос.

Модель принудительного вращения. Первая категория методов описания ротационных полос в атомных ядрах представляет развитие модели принудительного вращения (или «кренкинг» модели) [22]. К ней относится вариационный метод для состояний, временная зависимость которых определяется формулой (1.9) [23, 24]. Эквивалентной оказывается формулировка, которая основана на уравнении для одночастичной функции Грина системы фермионов, написанном во вращающейся системе координат [25].

Вид многофермионных функций, рассматриваемых в вариационном подходе, выбирается так, чтобы как можно лучше аппроксимировать внутреннее состояние ядра. Хороших результатов удастся достигнуть, учитывая лишь весьма специфические корреляции между нуклонами — корреляции сверхпроводящего типа и используя математические методы, развитые в теории сверхпроводимости (см. работы [23, 26—28], а также цитированную ранее монографию [14]).

В теории Хартри — Фока — Боголюбова (ХФБ) с временной зависимостью отыскиваются состояния $|t, \omega\rangle$, в которых математическое ожидание («среднее») $H' = i\hbar\partial/\partial t$ стационарно относительно малых вариаций $|t, \omega\rangle = |t, \omega\rangle + |\delta\rangle$. Здесь $H' = H - \lambda N$ — гамильтониан, из которого вычтена часть, дающая вклад в энергию, пропорциональный числу нуклонов. Условием стационарности являются формулы

$$\langle \omega, t | [Q, (H' - i\hbar\partial/\partial t)] | t, \omega \rangle = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $[A, B] \equiv AB - BA$, а Q — оператор вида

$$Q = \sum_{\mu\nu} (p_{\mu\nu}\alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\nu}^{+} + q_{\mu\nu}\alpha_{\mu}\alpha_{\nu} + s_{\mu\nu}\alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\nu}^{+}). \quad (2.2)$$

Операторы квазичастиц α_{μ} , α_{ν}^{+} можно считать без ограничения общности такими, что при любом ω

$$\alpha_{\mu} | \omega, t \rangle = 0 \quad (2.3)$$

(т. е. состояние $| \omega, t \rangle$ является «вакуумом» по отношению к α_{μ}).

Рассмотрим два состояния, удовлетворяющие условиям стационарности и отвечающие двум бесконечно близким значениям ω . Запишем

$$| \omega + \delta \omega \rangle = (1 + i\delta\omega\hat{J}\hat{\theta}) | \omega \rangle, \quad (2.4)$$

где $\hat{\theta}$ — эрмитов оператор вида

$$\hat{\theta} = \sum_{\mu\nu} (\theta_{\mu\nu}\alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\nu}^{+} + \theta_{\mu\nu}^{*}\alpha_{\nu}\alpha_{\mu}), \quad (2.5)$$

а численный множитель J в (2.4) введен с тем, чтобы обеспечить нормировку $\hat{\theta}$ в соответствии с условием

$$\langle \omega | [I_y, \hat{\theta}] | \omega \rangle = 1/i. \quad (2.6)$$

Подставляя в формулу (2.1) вместо Q выражение $i\delta\omega\hat{J}\hat{\theta}$, можно найти связь между вариацией среднего от гамильтониана H' ($E = \langle \omega | H' | \omega \rangle$) и среднего от проекции углового момента ($M = \langle \omega | I_y | \omega \rangle$):

$$\delta E = \omega \delta M, \quad (2.7)$$

причем

$$\delta M = J \delta \omega. \quad (2.8)$$

В классической механике формулы (2.7), (2.8) определяют зависимость энергии и момента инерции вращающегося тела от угловой частоты вращения. Для того, чтобы использовать их при анализе энергий ядерных ротационных полос, вводят кажущееся естественным соотношение между средним от проекции момента во вращающемся состоянии M и квантовым числом I состояния:

$$M^2 = I(I + 1). \quad (2.9)$$

Информация, содержащаяся в уравнениях (2.7), (2.8), позволяет получать разложение энергии $E = E_I$ по степеням $I(I + 1)$ и феноменологические формулы, обсуждавшиеся в предыдущем разделе. Так, найдя коэффициенты степенного разложения

$$M = \sum_{k=0, 1, \dots} \xi_k \omega^{2k+1}, \quad (2.10)$$

получаем интегрированием уравнения (2.7)

$$E - E_0 = \sum_{k=0, 1, \dots} \frac{2k+1}{2k+2} \xi_k \omega^{2k+2}. \quad (2.11)$$

Соответствие формул (1.4) с формулами (2.10), (2.11) очевидно [29].

Таким образом, описание ротационных полос в рамках вариационного подхода требует решения уравнений для $|\omega\rangle$, возникающих из условий (2.1). Эта задача очень сложна, и от нее отказываются, вводя приближения для функций $|\omega\rangle$ (и соответственно гамильтониана ядра H'). Информацию о моменте инерции J при этом можно получить решением системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\theta_{\mu\nu}$ оператора $\hat{\theta}$ в формулах (2.4) и (2.5). Уравнения для $\hat{\theta}$ можно записать в компактном виде следующим образом:

$$\langle \omega | [Q, [(H' - I_y^2/2J), \hat{\theta}]] | \omega \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Эта формула следует из (2.1) и (2.4) при соглашении, усиливающим (2.6). Согласно (2.6) $[I_y^2, \hat{\theta}]$ совпадает с $2I_y/i$ при усреднении по состоянию $|\omega\rangle$. Для достижения правильного результата следует считать, что $\langle \omega | [Q, [I_y^2/2J, \hat{\theta}]] | \omega \rangle = \langle \omega | [Q, 2I_y/i] | \omega \rangle$. Вычисление выражений в (2.12) упрощается, если представить

гамильтониан H' во вторично квантованном виде:

$$H' = H_0' + \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ij,kl} : a_i^{\dagger} a_j^{\dagger} a_l a_k : \quad (2.13)$$

В (2.13) $a_i^{\dagger} (a_j)$ — операторы рождения (поглощения) нуклонов в произвольных одночастичных состояниях $i (j)$, α_{μ}^{\dagger} , α_{ν} — операторы квазичастиц [14], по отношению к которым $|\omega = 0\rangle$ является вакуумным состоянием; символ « $:$ » означает приведение к нормальному виду [30], достигающемуся записью всех операторов в терминах α_{μ}^{\dagger} , α_{ν} и последующей перестановкой α^{\dagger} операторов влево от операторов α и умножением на $(-1)^P$ (P — четность перестановки).

Вид уравнений для $\theta_{\mu\nu}$ в нижайшем порядке по ω и формула для момента инерции J ($\omega = 0$) с учетом остаточного взаимодействия установлены в работах [23—25] (см. далее текст настоящей работы и Приложение 2 к ней). В том случае, если оператор «коллективной угловой переменной» $\hat{\theta}$ коммутирует с оператором взаимодействия, для $\theta_{\mu\nu}$ и J следуют простые формулы:

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{i}{J} \cdot \frac{\langle \mu | I_y | \nu \rangle}{\varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\nu}} (u_{\mu} v_{\nu} - u_{\nu} v_{\mu}); \quad (2.14)$$

$$J = \sum_{\mu\nu} \frac{|\langle \mu | I_y | \nu \rangle|^2}{\varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\nu}} (u_{\mu} v_{\nu} - u_{\nu} v_{\mu})^2. \quad (2.15)$$

Формула Инглиса (2.15), исправленная на учет спаривания, применялась в расчетах моментов инерции деформированных ядер [31] и позволила достичь довольно хорошего согласия между экспериментальными значениями и теоретическими оценками моментов инерции при спаривании, соответствующем четно-нечетной разности масс, а также щели в четных ядрах.

Остаточные взаимодействия учитываются при анализе неадиабатических поправок к энергиям ротационных состояний. Расчет их предпринимался в работах [32, 33] в рамках теории функций Грина с привлечением квазиклассического приближения для расчета матричных элементов $\langle \mu | I_y | \nu \rangle$. При этом установлено доминирующее значение связи между вращением и спариванием в формировании полос при больших I . Получены оценки критических моментов, при которых исчезают парные корреляции. Эффект исчезновения парных корреляций при быстром вращении ядер имеет аналог в физике протяженных сверхпроводников и был предсказан в ядерной физике Моттельсоном и Валатиным [34].

В настоящее время известно несколько родственных вариационному подходу моделей, позволяющих более просто извлекать информацию о связи различных типов возбуждений внутреннего состояния и вращения [35]. Они используют формулу Инглиса

со спариванием (2.15), передающую зависимость момента инерции от характеристик внутреннего состояния, и соображения модели ротатора с переменным моментом инерции, обсуждавшиеся ранее [см. текст перед формулой (1.5)].

Метод проектирования. Возможности использования метода ХФБ и эквивалентных подходов далеко не исчерпаны, однако они имеют ряд серьезных недостатков. Использование квазиклассических представлений для рассмотрения спектров ядер, в которых моменты инерции могут заметно отличаться в соседних квантовых состояниях, делает теоретические оценки ненадежными. Такая теория плохо приспособлена для расчета неэнергетических характеристик ротационных состояний, в описании которых до сих пор существуют нерешенные вопросы.

Одним из наиболее ранних методов описания ротации, свободным от квазиклассического приближения, является метод проектирования [36] деформированных функций на состояния с фиксированными квантовыми числами IM . Волновые функции выбираются в виде:

$$|IM\rangle = \sum_k P_{MK}^I \xi_K |K\rangle, \quad (2.16)$$

где

$$P_{MK}^I = \sum_{\gamma} |\gamma IM\rangle \langle KI\gamma| = \frac{2I+1}{8\pi^2} \int d\omega D_{MK}^{I*}(\omega) \hat{R}(\omega). \quad (2.17)$$

В (2.16) и (2.17) P_{MK}^I — оператор проектирования; $|K\rangle$ — состояние с проекцией углового момента, равной K на ось Oz лабораторной системы координат; ξ_K — числовые коэффициенты; $D_{MK}^I(\omega) = \langle MI\gamma | \hat{R}(\omega) | \gamma IK\rangle$ — обобщенная сферическая функция; \hat{R} — оператор поворота; γ нумерует состояния из полного набора для рассматриваемого ядра. Проектирование позволяет определять моменты инерции и матричные элементы, физических наблюдаемых при сделанных аппроксимациях относительно $|K\rangle$, ξ_K , по сведениям о гамильтониане ядра H . Состояния $|K\rangle$ (ξ_K) можно рассматривать как неизвестные. Тогда для их определения используют вариационную процедуру, причем для учета связи с внутренними модами лучше проводить вариацию после проектирования. Применение метода к тяжелым ядрам предпринято, например, в работах [37]. Интересна работа [38], в которой использован проекционный метод в сочетании с теорией функций Грина и получены в нижайших приближениях результаты кренкинг-модели для моментов инерции.

Метод проектирования (на состояния с фиксированным импульсом) оказывается несостоятельным при решении простой задачи — определения массы ядра, если проектируемая функция не факторизуется на два множителя. В той же задаче модель принудит-

тельного движения, аналогичная кренкинг-модели, дает правильный результат при любых аппроксимациях внутреннего состояния *. Это обстоятельство и технические трудности, связанные с проектированием, объясняют интерес к отысканию формулировки квантовой теории ротационных полос, менее чувствительной к модели многофермионной волновой функции, описывающей внутреннюю структуру.

3. ВЛИЯНИЕ СПИНА ЯДЕРНОГО СОСТОЯНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ НУКЛОНОВ

В предыдущем разделе упоминалась возможность изучения в рамках модели принудительного вращения зависимости от спина у коллективных параметров (щели, параметров деформации). Эта зависимость отражает общие изменения в движении всех нуклонов из-за вращения. Ряд ядерных свойств находит естественное объяснение, если предположить, что вращение ядра сильно искажает движение одного или нескольких наименее связанных нуклонов. Так, модель квазичастицы, связанной с ротатором силами Кориолиса [18], позволяет описать эффекты смешивания квазичастичных состояний нечетного ядра с разными K . Математическая формулировка модели включает предположение, что внутреннюю часть волновой функции деформированного ядра можно аппроксимировать относительно простой многонуклонной функцией, построенной на основе конфигураций деформированного потенциала [14]. В данном разделе будет показано, что такое предположение может в определенных условиях приводить к серьезным ошибкам, а также сформулированы более точные уравнения, описывающие влияние спина на распределение квазичастиц по уровням среднего поля.

Приведем в Приложении 1 свободный от отмеченной неточности вывод модели, в которой учитывается возбуждение конфигураций деформированного поля, связанных между собой из-за сохранения

* Уравнение для отыскания массы системы A частиц можно написать по аналогии с формулой (2.12); следует найти оператор R^* и параметр M^* (массу) такие, что

$$\langle [Q, [(H - P^2/2M^*), R^*]] \rangle = 0. \quad (2.18)$$

Если система замкнута, то для вектора центра инерции $R = \sum_{i=1}^A m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^A m_i$

выполняются коммутационные соотношения: $[H, R] = [P^2/2M, R]$. Таким

образом, решением (2.17) является $M^* = M = \sum_{i=1}^A m_i$, как бы мы ни выбирали состояние $|\rangle$.

спина ядра [39]. Волновую функцию рассматриваемого ядра записываем в виде:

$$| \nu IM \rangle = \sum_p c_p(\nu I) | pIM \rangle; \quad (3.1)$$

$$| pIM \rangle = P_{MKp}^I \Omega_p | - \rangle. \quad (3.2)$$

Здесь

$$| - \rangle = \sum_I \eta_I | I, M = 0 \rangle \quad (3.3)$$

суперпозиция состояний, принадлежащих основной полосе ближайшего четно-четного ядра. Проекционный оператор P_{MK}^I определен формулой (2.17).

Символ Ω_p обозначает оператор рождения (поглощения) квазичастицы или комбинацию таких операторов, возможно, включающую фононы коллективных неротационных состояний [14]. Состояние $\Omega_p | - \rangle$ считаем собственным для оператора I_z (в лабораторной системе координат) и обозначаем K_p соответствующее собственное значение.

Будем считать известными гамильтониан ядра H и состояние $| - \rangle$ в (3.2), а также функцию $h(I(I+1)) = E_I$, которая определяет зависимость от спина энергии состояний, входящих в $| - \rangle$. Элементы, фиксирующие H , h и $| - \rangle$, могут или выступать как феноменологические параметры, подбираемые независимым образом, или отыскиваться при помощи методов, которые рассматриваются далее. Примеры эмпирических формул с двумя параметрами, которые аппроксимируют $h(I(I+1))$, можно найти в разд. 1. В простом случае жесткого ротатора $h = I(I+1)/2J_0$, где J_0 — момент инерции.

Уравнения для вектора-столбца $c(\nu I)$, коэффициентами которого являются амплитуды $C_p(\nu I)$ в формуле (3.1), могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho^I (\mathcal{H}^I - E_{\nu I}) C(\nu I) &= 0; \\ (\mathcal{H}^I - E_{\nu I}) \rho^I C(\nu I) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Здесь использованы матричные обозначения, причем

$$\mathcal{H}^I = \mathcal{H}^{(0)} + X^I \quad (3.5)$$

Диагональные матричные элементы $\mathcal{H}^{(0)}$ представляют собой адиабатический предел энергий возбуждения состояний $\Omega_p | - \rangle$ в эту матрицу дают вклад также остаточные взаимодействия (см. формулу (II.2)). Матрица X^I определяется уравнением

$$f(X^I) = \dot{X}^I/2J_0; f(E_2) = I(I+1)/2, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_{pp'}^I &= [I(I+1) - 2K_p^2] \delta_{pp'} + (j^2)_{pp'} - \\ &- \sqrt{(I+K_p)(I-K_p+1)} (j_-)_{pp'} - \\ &- \sqrt{(I-K_p)(I+K_p+1)} (j_+)_{pp'}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формулы для матриц \dot{X}^I , X^I , входящих в них величин j_{\pm} , j^2 , а также для матрицы интегралов перекрывания ρ^I даны в Приложении 1.

Уравнение (3.4) переходит в уравнение модели квазичастицы, связанной с ротатором [18] при следующих условиях:

- 1) состояние $|-\rangle$ считается решением задачи ХФБ для ядра;
- 2) разложение (3.1) для $|\nu IM\rangle$ ограничено рядом одноквазичастичных состояний, т. е. Ω_p являются операторами квазичастиц Боголюбова α_p^+ ($\alpha_p |-\rangle = 0$), а в матрице $\mathcal{H}_{pp'}^0$ учитывается только часть, не изменяющая числа квазичастиц ($\mathcal{H}_{pp'}^0 = \varepsilon_p \delta_{pp'}$);
- 3) используется простейшее выражение для $h(\mathbf{I}^2)$:

$$[h(\mathbf{I}^2) = \mathbf{I}^2/2J_0, \quad X_{pp'}^I = \dot{X}_{pp'}^I/2J_0];$$

- 4) матрица перекрывания ρ^I предполагается имеющей вид $\rho_{pp'}^I = \text{const } \delta_{pp'}$.

Приведенный в Приложении 1 вывод допускает уточнение каждого из перечисленных выше приближений. Он показывает также, что все эффекты, связанные с наличием спина в состоянии $|\nu IM\rangle$, включая связь возбуждений Ω_p силами Кориолиса, возникают из последнего члена в гамильтониане $h(\mathbf{I}^2)$ в уравнении (П.1). Этот член содержит степени двухчастичного оператора \mathbf{I}^2 и может рассматриваться как оператор взаимодействия квазичастиц. Записав $P_{K_p^2 K_{p_1}}^I \Omega_{p_1} h(\mathbf{I}^2)$, как это сделано в формуле (П.8), с матрицей $X_{p_1 p_2}^I$, определенной формулами (П.7), (3.6), (3.7), выделим из оператора $h(\mathbf{I}^2)$ ротационную энергию остова, представленного состоянием $|-\rangle$, и член, который показывает связь остова с возбуждением, описываемым оператором Ω_p .

В результате в матрицах $\dot{X}_{pp'}^I$, $X_{pp'}^I$ тождественно обращаются в нуль те матричные элементы, которые связывают состояния с числом квазичастиц $n_p > n_{p'}$. Действительно, проекции углового момента I_x являются одночастичными операторами и их коммутаторы с Ω_p в формулах (П.3), (П.4) содержат то же число операторов квазичастиц α^+ , α , что и сами операторы Ω_p . Примешивание компонент волновой функции с большим числом квазичастиц к одноквазичастичной компоненте в состоянии (3.1), (3.2) все же происходит. Оно вызвано наличием оператора остаточного взаимодействия в гамильтониане [последний член гамильтониана в формуле (2.13)].

В расчетах число базисных функций в (3.1) всегда ограничено небольшим числом членов, и уравнения (3.4), следующие из (П.1), не могут быть удовлетворены. Лучшее приближение к решению получим, воспользовавшись вариационным принципом, рассмотрим для этого условие стационарности энергии относительно малых вариаций $C^+(\nu I)$ и $C(\nu I)$. Среднее от гамильтониана в состоянии (3.1) запишем в виде:

$$\bar{H}^{\nu I} = \frac{C^+(\nu I) \{ \rho^I \mathcal{H}^I + \mathcal{H}^I \rho^I \} C(\nu I)}{2C^+(\nu I) \rho^I C(\nu I)} \quad (3.8)$$

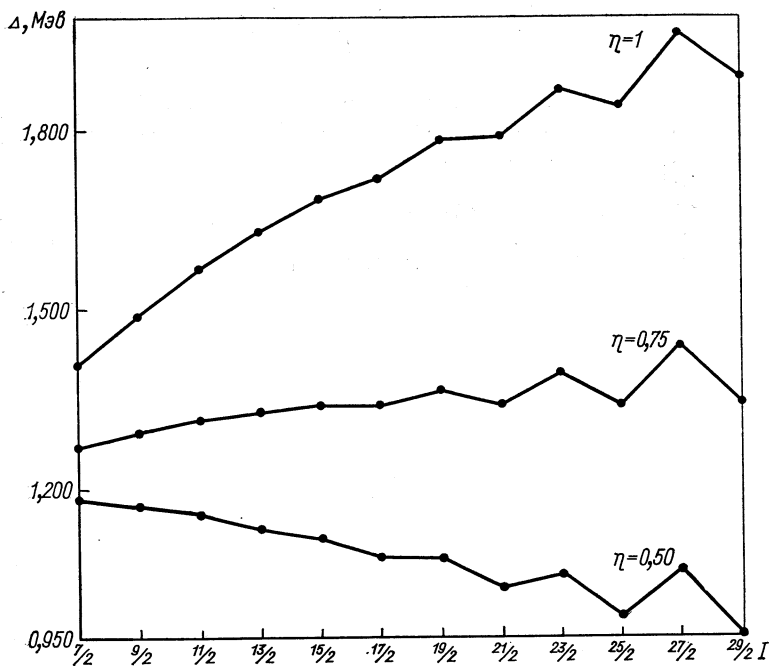
(мы выбрали из нескольких возможных форм записи $\bar{H}^{\nu I}$ такую, что матрица, свертываемая вместе с C^+ и C , эрмитова). Условие стационарности приводит к уравнению

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^{\nu I} C(\nu I) &= E_{\nu I} C(\nu I); \\ \tilde{\mathcal{H}}^{\nu I} &= \frac{1}{2} (\rho^I \mathcal{H}^I + \mathcal{H}^I \rho^I) + (1 - \rho^I) E_{\nu I}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Оценки для матричных элементов матрицы ρ^I получены в Приложении 1. Там же показана роль матрицы перекрытия ρ^I в уравнениях (3.4) и (3.9). Различие между \mathcal{H} и $\tilde{\mathcal{H}}$ можно интерпретировать как перенормировку инерционных параметров остова. Перенормированные моменты инерции оказываются различными в разных матричных элементах $\tilde{\mathcal{H}}^I$. Моменты инерции \tilde{J} в диагональных матричных элементах $\tilde{\mathcal{H}}^I$ [формулы (П.17), (П.18)] несколько превышают моменты инерции четного остова. Матричные элементы $\tilde{\mathcal{H}}_{pp'}^{\nu I}$ при $K_p = K_{p'} \pm 1$ (члены взаимодействия Кориолиса) также отличаются от соответствующих элементов $\mathcal{H}_{pp'}^{\nu I}$. Отражением более сложного, чем в формулировке, данной в работе [18], условия ортогональности состояний является зависимость этих матричных элементов от энергии $E_{\nu I}$ [см. формулы (П.19), (П.20)]. Ренормализация не проявляется при вычислении параметров развязывания в состояниях с $K = \pm 1/2$ в нижайшем порядке по взаимодействию, так как разность энергий в числителе (П.20) в этом случае обращается в нуль. Сильные изменения в величине подобных матричных элементов появляются, когда одноквaziчастичные энергии $\varepsilon_p + [I(I+1) - 2K_p^2]/2J$ связываемых состояний сильно различаются. Собственные энергии $E_{\nu I}$ приближенно совпадают с энергиями квазичастичных состояний, а поэтому фактор η , определяющий перенормировку, приближенно равен:

$$\eta_{pp'}^I \approx 1 \pm \frac{J\Delta E}{\rho_{pp'}^I \langle -|I^2|-\rangle} = 1 \pm \frac{\Delta E}{\rho_{pp'}^I \Delta \bar{E}}. \quad (3.10)$$

Здесь ΔE — энергетический интервал между полосами, связываемыми силами Кориолиса, а комбинация с размерностью энергии $\Delta \tilde{E} = \langle -|I^2| - \rangle / 2J$. Знак при коррекции отрицателен для нижнего из двух связываемых уровней и положителен для верхнего. Наконец, формула (П.21) свидетельствует о том, что в рассмотренном приближении появляются также члены \tilde{H} , связывающие состояния $K_p' = K_p \pm 2$.



Зависимость параметра щели Δ от спина I основной ротационной полосы ^{169}Yb при разных факторах ослабления $\eta = \eta_{pp}^I$ сил Кориолиса для точного воспроизведения энергий.

Необходимость введения перенормировки в гамильтониан модели деформированного ядра с кориолисовым смешиванием состояний неротационного типа многократно отмечалась в литературе. Так, в работе [40] показано, что наилучшая точность воспроизведения энергий состояний основной ротационной полосы ядра ^{169}Yb в рамках роторной модели достигается с уменьшенной до 0,8 от перенормированного значения силой Кориолиса. Значения параметра щели Δ , подстановка которого в уравнения роторной модели для того же ядра обеспечивает точное воспроизведение энергий основной полосы $K^\pi = (7/2)^+$ и положение пер-

Таблица 1

Расчет перенормировки параметров момента инерции J_0/J и сил Кориолиса $\eta_{pp'}^I$ для основных состояний ротационных полос ^{169}Yb по формулам (П.18) и (П.20)

IK	J_0/\tilde{J}	$K_p K_{p'} (I)$	$\eta_{pp'}^I$
7/2, 7/2	0,895	7/2, 5/2 (7/2)	0,556
5/2, 5/2	0,995	5/2, 3/2 (5/2)	0,840
3/2, 3/2	1,000	3/2, 1/2 (3/2)	0,895
1/2, 1/2	1,000	1/2, 1/2 (1/2)	1,000

вых уровней полос $K^\pi = (5/2)^+, (3/2)^+$ при разных значениях параметра перенормировки силы Кориолиса, показаны на рисунке [39]. Этот рисунок свидетельствует о том, что четно-четный остов ядра ^{169}Yb можно рассматривать как неизменяемый для всех состояний ротационной полосы ($\Delta \approx \text{const}$), только введя фактор ослабления матричных элементов $\mathcal{H}_{K, k_{\pm 1}}^I$, $\eta \sim 0,75$. Анализ, проведенный в работе [21], дает основания думать, что учет остаточных взаимодействий, примешивающих к одноквазичастичному состоянию фононы известных коллективных внутренних возбуждений, не приводит к заметным изменениям рассматриваемых матричных элементов *. С другой стороны, учет матрицы перекрывания ρ^I , по приближенным формулам (П.18) и (П.20), дает правильный порядок величины коэффициентов ослабления силы Кориолиса (табл. 1).

4. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РОТАЦИОННЫХ ПОЛОС

Имеется несколько вариантов теории, основанных на уравнениях движения для операторов, действующих в пространстве состояний ротационных полос. В работе [41] сформулированы уравнения для генеалогических коэффициентов, связывающих состояния соседних по A ядер. В основе теории лежит предполо-

* В этой работе ослабление сил Кориолиса достигается включением в матрицу $\mathbf{j}_{pp'}^2$ в (3.7) членов, примешивающих трехквазичастичные компоненты к одноквазичастичным. Данный выше вывод модели заставляет считать такую модификацию теории формальной и лишенной физических оснований.

жение о том, что существенно отличаются от нуля только те коэффициенты, которые связывают состояния ротационных полос, основанных на одноквазичастичных (бесфоновных) состояниях. Близок к этому подход и в работах [42, 43], где использована идея о возможности ограничить матрицы простых операторов (в частности, квадрупольного момента), записанные в собственном базисе ядра, пространством состояний одной ротационной полосы.

Такое предположение однозначно фиксирует структуру матриц всех электромагнитных мультиполей m (λ) в пространстве состояний ротационной полосы. Зависимость приведенных матричных элементов $\langle I_i || m(\lambda) || I_f \rangle$ от I_i, I_f при этом оказывается такой же как и в формуле (1.6) при $K_i = K_f = 0$ или $2K_i > \lambda$. Поэтому формализм [43] кажется неадекватным для описания отклонений от адиабатического предела обобщенной модели ядра.

В работах [44, 45] для описания ротационной полосы ($I = K, K + 1, \dots; -I \leq M \leq I$) вводятся операторы ротон, матрицы которых в собственном базисе ядра $|IM\rangle$ совпадают с матрицами сферических функций в базисе нормированных обобщенных сферических функций:

$$R_{lm}^{\dagger} = \sum_{\substack{I_1 M_1 \\ I_2 M_2}} [(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{1/2} \times \\ \times \begin{pmatrix} l & I_1 & I_2 \\ 0 & K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & I_1 & I_2 \\ m & M_1 & -M_2 \end{pmatrix} (-1)^{M_2 - K} |I_2 M_2\rangle \langle M_1 I_1|. \quad (4.1)$$

Следствием (4.1) являются соотношения эрмитова сопряжения, коммутации с оператором момента количества движения \mathbf{I} , умножения операторов R_{lm}^{\dagger} и то, что R_{lm}^{\dagger} коммутируют между собой, — свойства, тождественные с аналогичными свойствами матриц от сферических функций (см. Приложение 2). Такие соотношения можно использовать для того, чтобы построить всевозможные операторы R_{lm}^{\dagger} , если известен один оператор $R_{l_1 m_1}^{\dagger}$ (с нечетным l_1). Если известен оператор $R_{l_1 m_1}^{\dagger}$ и l — четное, то упомянутые правила позволяют определить все остальные R_{lm}^{\dagger} с четными значениями l . Преобразование R_{lm}^{\dagger} при пространственном P и временном τ отражениях определяется свойствами состояний в (4.1), обсужденными в предыдущих разделах:

$$PR_{lm}^{\dagger}P^{-1} = R_{lm}^{\dagger}; \quad \tau R_{lm}^{\dagger}\tau^{-1} = (-1)^l R_{lm}. \quad (4.2)$$

Действие гамильтониана H на состояния из одной ротационной полосы ($|-\rangle$) эквивалентно действию некоторого оператора h (\mathbf{I}^2), зависящего только от оператора квадрата углового момента, такого, что $h(I(I+1)) = E_I$, где E_I — энергии состояний полосы [45]:

$$[H - h(\mathbf{I}^2)] |-\rangle = 0. \quad (4.3)$$

Ротоны из формулы (4.1) трансформируют состояния $|IM\rangle$, оставляя их в пространстве состояний полосы, и содержат в себе оператор проектирования на это пространство. Поэтому имеем

$$[H - h(\mathbf{I}^2), R_{lm}^+] = 0. \quad (4.4)$$

Будем считать неизвестными в (4.4) как R_{lm}^+ , так и «модельный гамильтониан» $h(\mathbf{I}^2)$. Взяв матричный элемент (4.4) между собственными состояниями ядра, получим систему линейных однородных уравнений для $\langle M_2 I_2 | R_{lm}^+ | I_1 M_1 \rangle$, нетривиальное решение которой существует, если

$$h(I_2(I_2 + 1)) - h(I_1(I_1 + 1)) = E_{I_2} - E_{I_1} \quad (4.5)$$

(E_I — собственная энергия одного из состояний ядра с моментом I). Та же система, написанная в базисе произвольным образом выбранного «простого» оператора $H_0 = H - V$, приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} (R_l^+)_{kp} &= \frac{\vec{J}_l \cdot \mathbf{R}_l^+}{E_k - E_p}; \\ \vec{J}_l \cdot \mathbf{R}_l^+ &= [h(\mathbf{I}^2), \mathbf{R}_l^+]_{kp} - \\ - \sum'_\lambda \{ &V_{k\lambda}(E_\lambda - E_p)^{-1} (\vec{J}_l \cdot \mathbf{R}_l^+)_{\lambda p} - (\vec{J}_l \cdot \mathbf{R}_l^+)_{k\lambda} (E_k - E_\lambda)^{-1} V_{\lambda p} \}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь \mathbf{R}_l^+ означает столбец с компонентами R_{lm}^+ ; E_k — собственные энергии H_0 , штрих у суммы означает выбрасывание члена с $\lambda = p$ ($\lambda = k$) в первом (втором) члене в фигурных скобках; $V_{k\lambda}$ — матричный элемент «взаимодействия», $V = H - H_0$.

Итерационное решение системы (4.6) для тензорных коммутирующих операторов R_{lm}^+ и параметров функции $h(\mathbf{I}^2)$ возможно, если среди состояний $|k\rangle$ имеется состояние такое, что

$$R_{lm}^+ |0\rangle = \left\{ \begin{array}{l} O(r_x^2, r_y^2) \\ -\frac{1}{2} \sqrt{l(l+1)} (r_x + ir_y) \\ 1 + O(r_x^2, r_y^2) \\ \frac{1}{2} \sqrt{l(l+1)} (r_x - ir_y) \\ O(r_x^2, r_y^2) \end{array} \right\} |0\rangle \quad \begin{array}{l} m > 1 \\ m = 1 \\ m = 0 \\ m = -1 \\ m < -1 \end{array} \quad (4.7)$$

причем $\sum_k |r_x|_{k0}^2 \ll 1$; $\sum_k |r_y|_{k0}^2 \ll 1$.

Состояния $|\hat{\theta} = 0\rangle$ и $|\hat{\theta} = \pi\rangle$ такие, что $R_{lm}^+ |\hat{\theta} = 0\rangle = \delta_{m0} |\hat{\theta} = 0\rangle$ и $\hat{R}_{lm} |\hat{\theta} = \pi\rangle = (-1)^l \delta_{m0} |\hat{\theta} = \pi\rangle$, существуют и имеют вид

$$|\hat{\theta} = 0\rangle = \sum_{I=K, K+1, \dots} (2I+1)^{1/2} |I, M=K\rangle;$$

$$|\hat{\theta} = \pi\rangle = \sum_{I=K, K+1} (2I+1)^{1/2} (-1)^{I+K} |I, M=-K\rangle.$$

Коэффициенты разложения многофермионных конфигураций в деформированном потенциале по состояниям с фиксированным угловым моментом I пропорциональны $(2I+1)^{1/2}$ при $I(I+1) < \langle I^2 \rangle$. Поэтому разумно начинать с предположения, что соотношение (4.7) выполняется в применении к состояниям $|0\rangle$, включающим небольшое число конфигураций деформированного потенциала.

При описании идеальной ротационной полосы $\hbar = aI^2$ воспользуемся в (4.6) приближенным выражением, вытекающим из (4.7):

$$[\hbar, R_{l, m=\pm 1}^+]_{\hbar 0} \approx \mp a \sqrt{2l(l+1)} (I_{\pm 1})_{\hbar 0}, \quad (4.8)$$

где $I_{\pm 1} = \mp (1/\sqrt{2}) I_{\pm} = \mp (1/\sqrt{2}) (I_x \pm iI_y)$. Момент инерции $J = (2a)^{-1}$ определим из одного из условий коммутации $I_{m=\pm 1}$ и $R_{l, m=\pm 1}^+$ операторов, использованных при получении формулы (4.8) [см. формулы (II.25)]:

$$[I_{+1}, R_{l, m=-1}^+]_{00} = -\sqrt{l(l+1)}/2. \quad (4.9)$$

Полученные выражения напоминают формулы в методе принудительного вращения и приводят в сходных предположениях о гамилтониане к формуле (2.15) для момента инерции. Отличия заключаются: 1) в улучшенном определении состояния $|0\rangle$ и 2) в отсутствии ограничений на матричные элементы операторов R_{lm}^+ . В отличие от модели принудительного вращения, в которой ограничиваются рассмотрением поворотов в фиксированной плоскости. Использование ротонных операторов позволяет учесть кинематику трехмерных поворотов. Уточнение модели принудительного вращения с учетом остаточного взаимодействия [23—25] из-за первого отличия прослежено в работе [46] (см. также Приложение 2), где показано, что выбор состояния $|0\rangle$ и энергий квазичастичных состояний в соответствии с формулой (4.3) может заметно увеличить оценки момента инерции, приблизив их к экспериментальным. Заметим, что учет более сложной зависимости $\hbar(I^2)$ от I^2 действует в обратную сторону, несколько уменьшая оценку первого члена в разложении $\hbar(I^2)$ по степеням I^2 (см. [5] — вторую работу).

Операторы $R_{lm}^+ \equiv r_m$ и \mathbf{I} можно рассматривать как генераторы группы преобразований в пространстве состояний одной рота-

ционной полосы (группы $IO(3)$ [47]). Два нормированных состояния в пространстве состояний полосы можно получить одно из другого, комбинируя пространственные вращения и преобразования вида

$$|2\rangle = \exp(\mathbf{ia} \cdot \mathbf{r}) |1\rangle. \quad (4.10)$$

Легко найти связь между средними от углового момента ($\mathbf{M} = \langle | \mathbf{I} | \rangle$) и энергии ($E = \langle | H | \rangle$) в состояниях $|1\rangle$ и $|2\rangle$:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1 + \langle 1 | \mathbf{r} | 1 \rangle \times \mathbf{a}; \quad (4.11)$$

$$E_2 = E_1 + \mathbf{ia} \langle 1 | [h, \mathbf{r}] | 1 \rangle + \\ + \sum_{i,j=x,y,z} \frac{a_i a_j}{2} \langle 1 | [r_i, [h, r_j]] | 1 \rangle + O(a^3). \quad (4.12)$$

Таким образом, оператор \mathbf{r} служит «генератором вращения», определяя изменения момента при преобразованиях волновых пакетов (4.10). Если $h = \mathbf{I}^2/2J$, члены $O(a^3)$ исчезают тождественно, и для энергии получаем выражение

$$E_2 = E_1 + \frac{1}{2J} \mathbf{a} \langle 1 | (\mathbf{I} \times \mathbf{r} - \mathbf{r} \times \mathbf{I}) | 1 \rangle + \\ + \frac{1}{2J} \langle 1 | (\mathbf{a}^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{r})^2) | 1 \rangle. \quad (4.13)$$

Эти замечания можно использовать для того, чтобы оценить роль второго различия между ротонной формулировкой и моделью принудительного вращения, упомянутого выше. Пусть состояние $|1\rangle$ таково, что $I_z |1\rangle = K |1\rangle$. Подставляя в (4.11) и (4.13) вектор $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, находим энергию ядра, вращающегося вокруг оси Oy с моментом $\mathbf{M} = (0, M_y = a \langle 1 | r_z | 1 \rangle, K)$:

$$E_2 = E_1 + \frac{M_y^2}{2J} \cdot \frac{\langle 1 | (r_y^2 + r_z^2) | 1 \rangle}{\langle 1 | r_z | 1 \rangle^2}. \quad (4.14)$$

Величина $\frac{\langle 1 | r_z | 1 \rangle^2}{\langle 1 | (r_y^2 + r_z^2) | 1 \rangle} J = J'$ представляет собой момент инерции, определяемый по рецепту модели принудительного вращения. Легко убедиться в том, что отношение $\frac{\langle 1 | r_z | 1 \rangle^2}{\langle 1 | (r_y^2 + r_z^2) | 1 \rangle} < 1$ (если $\langle 1 | \mathbf{I}^2 | 1 \rangle < \infty$), т. е. кренкинг-модель приводит к некоторому занижению в величине момента инерции из-за особенностей кинематики трехмерных вращений. Расчеты, не учитывающие роли остаточных взаимодействий, показали, что это занижение составляет всего несколько процентов.

В работах [44, 45] изучается также описание неэнергетических характеристик ротационных состояний. Для произвольного тензорного оператора F_{LM} можно определить функцию f_{LM} от R_{lm}^+ и \mathbf{I} такую, что

$$\langle B | (F_{LM} - f_{LM}(R_{lm}^+, \mathbf{I})) | A \rangle = 0, \quad (4.15)$$

если $|A\rangle$ и $|B\rangle$ — суперпозиции состояний одной полосы (т. е. F_{LM} эквивалентен (\doteq) f_{LM}). Если число отличных от нуля коммутаторов F_{LM} и R_{lm}^+ невелико, то f_{LM} представим конечным отрезком ряда:

$$F_{LM} \doteq f_{LM} = \sum_{l, n_1, n_2} f(l, n_1, n_2) (\mathbf{I}^2)^{n_1} \{R_{L-l}^+, T_l\}_{LM} (\mathbf{I}^2)^{n_2}, \quad (4.16)$$

где $f(l, n_1, n_2)$ — константы; тензорный оператор T_{lm} определен своей компонентой: $T_{ll} = (I_{+1})^l$ ($T_1 = \mathbf{I}$); $\{R_{L-l}^+, T_l\}_{LM}$ означает векторную связь операторов R_{L-l}^+, m_1 и T_{lm_2} :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{R_{L-l}^+, T_l\}_{LM} &= \sum_{m_1 m_2} (L-l, l; m_1 m_2 | LM) R_{L-l}^+, m_1 T_{lm_2} = \\ &= \sum_{m_1 m_2} (L-l, l; m_1 m_2 | LM) T_{lm_2} R_{L-l}^+, m_1. \end{aligned} \quad (4.17)$$

При этом в (4.16) достаточно ограничиться или $n_1 = 0, 1$ или $n_2 = 0, 1$. Это отвечает альтернативной асимметричной формуле (4.16), в которой, например, все \mathbf{I} — компоненты справа от R^+ , т. е. $n_1 = 0$, но кроме

$$\{R_{L-l}^+, T_l\}_{LM} = \{R_{L-l}^+, T_l\}$$

имеется член $R_{L-l+1}^+ T_l / LM$, где AB обозначает связь двух тензорных операторов до момента L и определяется по формуле, отвечающей первому из равенств (4.17); $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

Вычисление матричных элементов F_{LM} между состояниями ротационной полосы по известным коэффициентам $f(ln_1 n_2)$ в (4.16) достигается использованием техники коэффициентов Рака [48]. Имеем:

$$\begin{aligned} \langle M_f I_f | F_{LM} | I_i M_i \rangle &= \sum_{l, n_1, n_2} f(ln_1 n_2) [I_f (I_f + 1)]^{n_1} [I_i (I_i + 1)]^{n_2} \times \\ &\times (-1)^{I_f - M_f} \begin{pmatrix} I_f & L & I_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \langle I_f || \{R_{L-l}^+, T_l\} || I_i \rangle; \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} &\langle M' I' | T_{lm} | I M \rangle = \\ &= \delta_{I'I} (-1)^{I-M'} l! 2^{-l/2} \left[\frac{(2I+l+1)!}{(2l)!(2I-l)!} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} I & l & I \\ -M' & m & M \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \langle I_f || \{R_{L-l}^+, T_l\} || I_i \rangle &= (-1)^{I_f - K} [(2I_f + 1)(2I_i + 1)]^{1/2} l \times \\ &\times 2^{-l/2} (-1)^{I_f + J_i + L} \begin{pmatrix} I_f & L-l & I_i \\ -K & 0 & K \end{pmatrix} \left[\frac{(2L+1)!(2I_i+l+1)!}{(2l)!(2I_i-l)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \begin{Bmatrix} I_f & L & I_i \\ l & I_i & L-l \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Первый член в формуле (4.18) ($l = n_1 = n_2 = 0$) представляет перенормированное из-за значения коэффициента $f(000)$ (см.

ниже) выражение обобщенной модели для матричного элемента оператора электрического мультипольного момента [13] (при $K = 0$ или $L < 2K$).

Практический интерес написанные формулы будут иметь в том случае, когда число существенно отличных от нуля коммутаторов F_{LM} и R_{lm}^+ не превышает двух. Эрмитовы операторы такого типа эквивалентны (\doteq) одному из следующих выражений:

$$F_{LM}^{(1)} \doteq c_0 R_{LM}^+ + \frac{c_2}{2} \{R_{LM}^+, \mathbf{I}^2\} + \frac{c_3}{2} \{\mathbf{R}_{L-2}^+, \mathbf{T}_2\}_{LM} + \frac{c_4}{2} \{\mathbf{R}_{L-1}^+, \mathbf{T}_1\}_{LM}; \quad (4.21)$$

$$F_{LM}^{(2)} \doteq \frac{c_1}{2!} [R_{LM}^+, \mathbf{I}^2]. \quad (4.22)$$

Здесь $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ различаются свойствами по отношению к отражению времени.

Формулу (4.21) ($L = 1$) можно использовать для анализа матричных элементов магнитного дипольного момента:

$$\boldsymbol{\mu} \doteq \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{e\hbar}{2Mc} (g_r \mathbf{I} + g_{tr} \mathbf{r}), \quad (r_m = R_{1m}^+). \quad (4.23)$$

Коэффициенты $f(\ln_1 n_2)$ в общей формуле (4.19) и параметры g_r , g_{tr} в рассматриваемом примере (4.23) можно вычислить, используя свойства коммутации и нормировки ротонных операторов, а также явный вид их матричных элементов в произвольном базисе. Из (4.23) легко получить соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \langle - | [\mu_x, r_y] | - \rangle &= i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{e\hbar}{2Mc} g_r \langle - | r_z | - \rangle; \\ \langle - | (\mu_z - \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{e\hbar}{2Mc} g_r I_z) | - \rangle &= g_{tr} \langle - | r_z | - \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Простейшие приближения для матричных элементов ротонных операторов, обсужденные ранее и использованные в формулах (4.24), приводят к известным результатам обобщенной модели ядра для g_r и g_{tr} (см. формулу (6.7) в [13]).

Рассмотрим несколько подробнее структуру матричных элементов оператора со свойствами трансформации, такими же как у мультипольного электрического момента ядра, в пространстве состояний полосы $K = 0$ ($I = 0, 2, 4, \dots$). В этом случае применима формула (4.21) ($L = 2, 4, \dots$), причем можно считать $c_4 = 0$, поскольку оператор при c_4 связывает состояния с разной четностью квантовых чисел 1. Для определения c_2 и c_3 можно

использовать соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \langle - | [[F_{l_1, 0}, R_{l_2, 1}^+, R_{l_3, -1}^+ | - \rangle \approx [l_2(l_2+1)l_3(l_3+1)]^{1/2} \times \\ \times \left\{ c_2 + c_3 (-1)^{l_1+1} \left[\frac{(2l_1-4)!}{(2l_1)!} \right]^{1/2} l_1(l_1-1) \right\} ; \\ \langle - | [[F_{l_1-2}, R_{l_2, 1}^+, R_{l_3, 1}^+ | - \rangle \approx [l_2(l_2+1)l_3(l_3+1)]^{1/2} \times \\ \times c_3 (-1)^{l_1} \frac{1}{2} \left[\frac{(l_1+1)(l_1+2)}{(2l_1-1)(2l_1-3)} \right]^{1/2} , \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

справедливые, если $R_{lm}^+ | - \rangle \approx \delta_{m0} | - \rangle$, и допускающие численный анализ в простейших приближениях о структуре ротонных операторов. Зная c_2 и c_3 , коэффициент c_0 можно определить, например, из уравнения

$$\begin{aligned} c_0 = \frac{1}{2} \left\langle - \left| \sum_m (-1)^m \{ F_{Lm}, R_{L, -m}^+ \} \right| - \right\rangle - c_2 \langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle + \\ + c_3 \sqrt{\frac{2L+1}{6}} \begin{pmatrix} L-2 & 2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Формула (4.26) заменяет в ротонной схеме выражение обобщенной модели для матричного элемента оператора во внутренней системе координат:

$$c_0 \text{ (обобщ. модель)} = \langle K = 0 | F_{L0} | K = 0 \rangle. \quad (4.27)$$

Из (4.7) видно, что расхождение между (4.26) и (4.27) должно возрастать с увеличением мультипольности оператора L .

Появление коэффициентов c_2, c_3 в разложении оператора физической наблюдаемой в ряд (4.16) можно интерпретировать на языке обобщенной модели как результат смешивания состояний с разными значениями K [13, 14]. Различия c_0, c_2, c_3 от формул обобщенной модели при микроскопическом подсчете связаны с уточнением внутреннего состояния.

При больших значениях квантовых чисел углового момента состояний, между которыми происходит переход, поправки к правилам адиабатической теории удается получить в рамках модели, в которой комбинируются идеи метода проектирования и метода принудительного вращения [38]. Коэффициенты c_2, c_3 и пр. в формулах (4.21), (4.22) можно интерпретировать как производные от матричных элементов операторов, приведенных к внутренним осям, по величине коллективного углового момента M . Соответствие между рассматриваемым формализмом и результатами [38] получим, воспользовавшись определением (4.10) для состояния, среднее от углового момента в котором может принимать произвольно значение в соответствии с формулой (4.11). Для оператора

с квадрупольной симметрией получаем

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= (1/\sqrt{6}) X (\partial^2/\partial M_y^2 \langle M_y | F_{22} | M_y \rangle)_{M_y=0} + \\ &\quad + (1/2) Y (\partial^2/\partial M_y^2 \langle M_y | F_{20} | M_y \rangle)_{M_y=0}; \\ c_3 &= - Z (\partial^2/\partial M_y^2 \langle M | F_{22} | M \rangle)_{M_y=0} + \\ &\quad + W (\partial^2/\partial M_y^2 \langle M | F_{20} | M \rangle)_{M_y=0}, \end{aligned} \right\} (4.28)$$

где $|M_y\rangle = \exp[-M_y(\hat{r}_x/\langle 0|r_0|0\rangle)]$, а коэффициенты X, Y, Z, W имеют общую для всех операторов F_{2m} структуру и равны

$$\begin{aligned} X &= \frac{\langle 0|r_0|0\rangle^2(2\xi-1)}{\xi\xi+(2\xi-1)\varepsilon/2\sqrt{6}}; & Y &= \frac{\langle 0|r_0|0\rangle^2 J}{\xi\xi+(2\xi-1)\varepsilon/2\sqrt{6}}; \\ Z &= \frac{\langle 0|r_0|0\rangle^2}{\xi\xi+(2\xi-1)\varepsilon/2\sqrt{6}}; & W &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle 0|r_0|0\rangle^2 \varepsilon}{\xi\xi+\varepsilon(2\xi-1)/2\sqrt{6}}; \\ \xi &= \langle 0|R_{20}^+ \frac{1+r_0^2}{2} |0\rangle; & \zeta &= \langle 0|r_0^2|0\rangle; & \varepsilon &= \langle 0|R_{2-2}^+ r_+^2 |0\rangle. \end{aligned}$$

Оставляя в последних выражениях только большие компоненты ротонных операторов, получим $\xi \approx \zeta \approx 1$, $\varepsilon \approx 0$ и соответственно $X \approx Y \approx Z \approx 1$, $W \approx 0$. Формула (4.28) при этом переходит в выражения, описывающие эффекты второго порядка по M [38].

Отметим, что при небольших значениях квантовых чисел момента состояний, между которыми происходит переход (I_i, I_f), зависимость матричных элементов переходов от I_i и I_f , полученная в [38], сильно отличается от предсказаний адиабатической теории. Роторный формализм позволяет воспроизвести, как результаты адиабатической теории при малых I , так и результаты [38], справедливые для случая, когда $I \gg 1$. Наличие высоких коэффициентов (X, Y, Z, W) в формулах (4.28) показывает ограниченную точность результатов модели принудительного вращения и при больших значениях I .

5. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СВЯЗИ ЯДЕРНЫХ РОТАЦИОННЫХ ПОЛОС

Такая теория может служить альтернативной схемой описания связи вращательного движения с одночастичным (см., например, разд. 3) или связи вращательного движения с колебательным (см., например, [19]). С другой стороны она нужна для создания микроскопической теории переходных ядер, где эффекты связи особенно сильны.

В последние один-два года появились работы, которые направлены на построение микроскопических моделей переходной области. Так, Маршалек [50] использует комбинацию кренкинг-

модели с бозонными разложениями для описания квазиротационных полос почти сферических ядер. Он делает проверку метода на примере простой модели с описанием перехода от сферического к деформированному ядру. Холцварт [51] комбинирует метод проектирования с бозонным разложением. Он получает модель коллективных состояний переходной области, также исходя из сферического предела.

Обобщение теории разд. 4 для описания связи ротационных полос по отношению не только к энергетическим эффектам, а в особенности к эффектам, связанным с вероятностями перехода между ротационными полосами, предложено в работе [45]. Здесь вводятся более сложные операторы:

$$B_{\alpha IM}^+ = \sum_{\substack{I_1 M_1 \\ I_2 M_2 \\ n_i n_\alpha}} [(n_\alpha + 1)(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{1/2} \begin{pmatrix} I & I_1 & I_2 \\ K & K_1 & -K_2 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I & I_1 & I_2 \\ M & M_1 & -M_2 \end{pmatrix} (-1)^{M_2 - K_2} |n_i, n_\alpha + 1, I_2 M_2\rangle \langle M_1 I_1, n_\alpha, n_i|. \quad (5.1)$$

Эти операторы связывают состояния двух соседних ядер ($\Delta A = 1$, I — полуцелое; $\Delta A = 2$, I — целое) или какого-нибудь одного ядра ($\Delta A = 0$, I — целое). Их можно назвать «квазичастично-ротонными» или «фонон-ротонными» операторами. Здесь n_i (n_α) означает число фононов * типа i (α); K_1 , K_2 — минимальные значения моментов I_1 , I_2 (K — числа) ротационных полос с числом фононов n_i , n_α и n_i , $n_\alpha + 1$ соответственно.

Из свойств операторов (5.1) самое интересное то, что для одного и того же α они не независимы, так как их коммутатор

$$[B_{\alpha I_1 M_1}, B_{\alpha I_2 M_2}^+] = \sum_L (2L + 1) \times \\ \times \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & L \\ K & -K & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & L \\ M_1 - M_2 & M_2 & -M_1 \end{pmatrix} (-1)^{M_2 - K} R_{L, M_2 - M_1}^+. \quad (5.2)$$

Здесь определение (4.1) ротонов $R_{L, M_2 - M_1}^+$ дополнено суммированием в правой части по разным ротационным полосам. R^+ , B_α^+ , B_α (для разных α) коммутируют между собой. Коммутаторы с \mathbf{I} — те же самые, как для любого тензорного оператора (см. Приложение 2).

* Ограничимся здесь фононным случаем; другие требуют небольших изменений.

Операторы (5.1) можно выразить через более простые, например, используя соотношение

$$B_{\alpha I_1 M_1}^+ R_{L_2 M_2}^+ = \sum_{IM} (2I+1) \begin{pmatrix} I_1 & L_2 & I \\ K & 0 & -K \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I_1 & L_2 & I \\ M_1 & M_2 & -M \end{pmatrix} (-1)^{M-K} B_{\alpha IM}^+, \quad (5.3)$$

которое позволяет вместе с (П. 23) свести их к полиномам $B_{\alpha, I=|K|, M}^+$ и R_{IM}^+ (либо R_{2M}^+). Возможно и другое представление — факторизация:

$$B_{\alpha IM}^+ = \begin{cases} b_{\alpha}^+ R_{I; K, M}^+, & |K_2| > |K_1|; \\ (-1)^{M-K} R_{I; -K, -M} b_{\alpha}^+, & |K_2| < |K_1|, \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$b_{\alpha}^+ = \sum_{\substack{I'M' \\ n_i n_{\alpha}}} (n_{\alpha} + 1)^{1/2} |n_i, n_{\alpha} + 1, I'M'\rangle \langle M'I', n_{\alpha}, n_i| \quad (5.5)$$

операторы, инвариантные относительно поворотов лабораторной системы координат и имеющие смысл фононных операторов внутренних возбуждений, а матрицы «обобщенных ротоннов»

$$R_{I; KM}^+ = \sum_{\substack{I_1 M_1 \\ I_2 M_2 \\ \gamma}} [(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)]^{1/2} \begin{pmatrix} I & I_1 & I_2 \\ K & K_1 & -K_2 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} I & I_1 & I_2 \\ M & M_1 & -M_2 \end{pmatrix} (-1)^{M_2 - K_2} |\gamma I_2 M_2\rangle \langle M_1 I_1 \gamma| \quad (5.6)$$

представляют собой тензорные операторы с той же структурой, что и матрицы обобщенных сферических функций D_{KM}^I . Таким образом, операторы $\frac{1}{2} (R_{I; K, M}^+ + (-1)^{M-K} R_{I; -K, -M}^+)$, имеющие подходящие эрмитовы свойства, могут рассматриваться как D -функции коллективных углов, дающие микроскопическое определение этих углов.

Любую физическую наблюдаемую можно выразить через тензорные операторы F_{LM} . Для любого оператора F_{LM} указывают разложение в ряд по степеням B_{α}^+ , B_{α} , R^+ , I . Если ограничиться, например, пространством состояний однофононного возбуждения, то F_{LM} эквивалентен (\doteq) следующему выражению (для более

общего случая см. [45]):

$$F_{LM} \doteq \sum_{\substack{\alpha\alpha' \\ l_1 l_2 n}} f(\alpha\alpha', l_1 l_2 n) B_{\alpha|K|M}^+ B_{\alpha'|K'|M'} R_{l_1} I_{l_2} (\mathbb{I}^2)^n. \quad (5.7)$$

Суммирование по l_1, l_2 и L такое, что при $l_1 = 0$ связь происходит к любому значению момента L , а при $l_1 \neq 0$ связь происходит к максимальному при данных l_1 и l_2 моменту $L_{\text{макс}} = \kappa + l_1 + l_2$ и к моменту $L = L_{\text{макс}} - 1 = \kappa + l_1 + l_2 - 1$.

Для описания перехода к сферическому ядру * более удобным может оказаться другой базис операторов. Если сгруппировать однофононные состояния типа αIM с разными K , например, по признаку, что все они переходят в состояния данной вибрационной полосы сферического ядра и обозначить $\alpha = \lambda K$ (где λ — остальные квантовые числа, кроме KIM), то можно определить операторы

$$B_{\lambda IM}^+ = \sum_{K=-I}^I B_{\alpha=\lambda K, IM}^+, \quad (5.8)$$

для которых, пользуясь (5.2), легко проверить выполнение обычных бозонных коммутационных соотношений. Таким образом, новый базис операторов составлен из $B_{\alpha}^+, B_{\alpha}, \mathbf{R}^+, \mathbf{I}$, в терминах которых можно указать разложение любого тензорного оператора F_{LM} , аналогичное (5.7). Можно увидеть, что и старые операторы $B_{\alpha IM}^+$ можно выразить через новые $B_{\lambda IM}^+$ и R_{lm}^+, I_{μ} , производя связи до разных моментов и пользуясь (5.3).

Так как истинный гамильтониан H (2.13) системы является тензорным оператором ранга 0, то для него можно использовать разложение по $B_{\alpha}^+, B_{\alpha}, \mathbf{R}^+, \mathbf{I}$, как для F_{00} . В частном случае пространства однофононных возбуждений можно использовать формулу (5.7) при $L = 0$:

$$H \doteq h = \sum_{\alpha\alpha' n} h(\alpha\alpha', n) B_{\alpha|K|M}^+ B_{\alpha'|K'|M'} \mathbf{I}_n (\mathbb{I}^2)^n, \quad (5.9)$$

где h можно рассматривать как «модельный гамильтониан» в рассматриваемом пространстве состояний с неопределенными коэффициентами $h(\alpha\alpha', n)$. Если ограничиться одной ротационной

* Работа готовится к опубликованию.

полосой $\alpha = \alpha'$, $\kappa = 0$, то получается $h \doteq h(I^2)$, что использовалось в разд. 4. В случае сферического ядра имеется другой частный случай (5.9):

$$h = \sum_{\lambda LM} \omega_{\lambda L} B_{\lambda LM}^+ B_{\lambda LM} \quad (5.10)$$

гамильтониан гармонических колебаний. Гамильтониан ангармонических колебаний сферического ядра можно получить из более общего выражения для $h = F_{00}$ [45] в пространстве многофононных возбуждений.

Микроскопическое определение любого оператора O_v^+ ($B_{\alpha LM}$ или R_{LM}^+) выполняется решением обобщенных уравнений движения [45]:

$$[H - h, O_v^+] = 0, \quad (5.11)$$

которые обобщают уравнения метода случайной фазы [52] для колебаний (h — из (5.10), $O_v^+ = B_{\lambda LM}^+$) или (4.3) для вращений. Определение параметров h делается с помощью (5.11) или дополнительных условий, выражающих соотношения коммутации и т. п. для операторов O_v^+ . Примером использования (5.11) для определения энергии фононного возбуждения ω является метод случайной фазы для колебаний [52], а примером использования дополнительного условия (4.9) является ротонная теория для вращений (разд. 5 и Приложение 2).

Методы этого раздела можно применить для построения правил разветвления вероятностей переходов, вызванных мультипольным оператором F_{LM} . Феноменологию правил, т. е. вычисление матричных элементов F_{LM} между состояниями ротационных полос по известным коэффициентам $f(\alpha\alpha', l_1 l_2 n)$ в (5.7), можно получить, опять-таки применяя алгебраические методы [48]. Таким образом, воспроизведены формулы для поправок [20] к вероятностям переходов обобщенной модели и получены некоторые новые формулы. Рассмотрены случаи $L = 1, \Delta K = 0, 1, 2, 3, 4; L = 2; \Delta K = 0, 1, 2, 3$ (ΔK — разность K чисел двух полос, между которыми происходит переход). Для иллюстрации в табл. 2 приведены формулы * для $L = 2, \Delta K = 0, 1, 2$ в сравнении с аналогичными выражениями из работы [20]. Таким образом, в феноменологическом аспекте разложение оператора F'_{LM} (5.7) отвечает учету смешивания полос с разными K , возникающего в роторной модели [20]. Однако в табл. 2 показано, что тот же самый результат можно получить из самых общих соображений симметрии (без модельных предположений), из которых найдено разложение (5.7).

* Расчеты к табл. 2 выполнены М. Кирхбах.

Таблица 2

Отклонения от правил разветвления обобщенной модели в матричных элементах оператора F_{2M} между состояниями K_i , I_i и $K_f = K$, $I_f = I$ ротационных поясов

I_i	$K_i = K$			
$I+2$	f_0	$-f_1 \frac{2}{\sqrt{6}}(I+3)$	$+f_2(I+2)(I+3)$	—
$I+1$	f_3	$-f_1 \frac{1}{\sqrt{6}}(I+4)$	$+f_2(I+1)(I+2)$	$-f_4 \frac{1}{6} \cdot \frac{I(I+2)(2I+5)}{K}$
I	f_0	$-f_1 \frac{3}{\sqrt{6}}$	$+f_2 I(I+1)$	$+f_5 \frac{1}{\sqrt{6}} \times$ $(4I(I+4) -$ $\times \frac{-3)I(I+1)}{3K^2 - I(I+1)}$
$I-1$	f_0	$+f_1 \frac{1}{\sqrt{6}}(I-3)$	$+f_2(I-4)I$	$+f_4 \frac{1}{6} \cdot \frac{(I^2-1)(2I-3)}{K}$
$I-2$	f_0	$+f_1 \frac{1}{\sqrt{6}}(I-2)$	$+f_2(I-2)(I-1)$	—

$$F_{2M} = f_0 b_{00} R_{2M}^{\dagger} I + f_1 b_{00} R_{2M}^{\dagger} I^2 + f_2 b_{00} R_{2M}^{\dagger} I^3 + f_3 b_{00} R_{2M}^{\dagger} I^4 + f_4 b_{00} R_{2M}^{\dagger} I^5 + f_5 b_{00} I_{2M}^{\dagger}$$

$$1 = f_0 - \sqrt{6} f_1 + 6f_2, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} f_1 - f_2, \quad a_2 = f_2, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} f_3, \quad 0 = f_4 = f_5$$

		$K_i = K \pm 1$	
I_i			
$I+2$	f_0	$-f_1 \frac{2}{\sqrt{6}}(I+3)$	$+f_2(I+2)(I+3)$
$I+1$	f_0	$-f_1 \frac{1}{\sqrt{6}}(I+4)$	$+f_2(I+4)(I+2)$
I	f_0	$-f_1 \frac{3}{\sqrt{6}}$	$+f_2 I(I+4)$
$I-1$	f_0	$+f_1 \frac{1}{\sqrt{6}}(I-3)$	$+f_2(I-4)I$
$I-2$	f_0	$+f_1 \frac{2}{\sqrt{6}}(I-2)$	$+f_2(I-2)(I-4)$
			$-$
		$\mp f_3 \frac{I(I+2)}{I \mp 2K}$	$\pm f_4 \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{I(I+2)(2I+5)}{I \mp 2K}$
		$+f_3 \frac{4I(I+4)-3}{3(2K \pm 4)}$	$-f_4 \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{4I(I+4)-3}{2K \pm 1}$
		$\pm f_3 \frac{I^2-1}{I \pm 2K+1}$	$\pm f_4 \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{(I^2-4)(2I-3)}{I \pm 2K+1}$
		$-$	$-$

$$F_{2M} = f_0 \underbrace{b_1 R_1^+}_{2M} + f_1 \underbrace{b_1 R_1^+ I}_{2} + f_2 \underbrace{b_1 R_1^+ I^2}_{2M} + f_3 \underbrace{b_1 I}_{2M} + f_4 \underbrace{b_1 I^2}_{2M}$$

$$1 = f_0 + \frac{1}{\sqrt{6}} (\mp K - 3) f_1 \mp (\mp K + 4) f_3, \quad a_1 = \frac{3}{2\sqrt{6}} f_1 \mp \frac{1}{2} f_3, \quad a_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} f_1 \pm \frac{1}{2} f_3, \quad 0 = f_2 = f_4$$

Продолжение табл. 2

I_i	$K_i = K \pm 2$			
$I+2$	f_0	$-f_1 \frac{2}{\sqrt{6}}(I+3)$	$+f_2(I+2)(I+3)$	$+f_3 \frac{1}{2\sqrt{21}}(4I^2+26I+42)$
$I+1$	f_0	$-f_1 \frac{1}{\sqrt{6}}(I+4)$	$+f_2(I+4)(I+2)$	$+f_3 \frac{1}{2\sqrt{21}}(-2I^2+3I+20)$
I	f_0	$-f_1 \frac{3}{\sqrt{6}}$	$+f_2 I(I+4)$	$+f_3 \frac{1}{2\sqrt{21}}(-4I^2-4I+15)$
$I-1$	f_0	$+f_1 \frac{1}{\sqrt{6}}(I-3)$	$+f_2 I(I-4)$	$+f_3 \frac{1}{2\sqrt{21}}(-2I^2-7I+15)$

$$\begin{aligned}
 &+f' \sqrt{\frac{5}{14}} \delta_{K_f, \frac{1}{2}} (-1)^{I_f+1/2} \times \\
 &\times \left(I_f + \frac{1}{2} \right) + f' \sqrt{\frac{5}{14}} \delta_{K_i, \frac{1}{2}} \times \\
 &\times (-1)^{I_i+1/2} \left(I_i + \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$I-2$	$f_0 + f_1 \frac{2}{\sqrt{6}}(I-2)$	$+ f_2(I-2)(I-4)$	$+ f_3 \frac{1}{2\sqrt{21}}(4I^2 - 18I + 20)$
-------	-------------------------------------	-------------------	---

$$F_{2M} = f_0 b_{2M} + f_1 b_{2I} + f_2 b_{2M} I^2 + f_3 b_{2I} I_2 + f' b_{2I} \frac{I}{2M}$$

$$1 = f_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}(\pm 2K + 5) f_1 + \frac{3}{2}(2K^2 \pm 10K + 11) f_2; a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} f_1 - \frac{3}{2}(\pm 2K + 3) f_2; a_2 = 3f_2 = \frac{3}{\sqrt{21}} f_3;$$

$$a_{21} = a_{22} = \sqrt{\frac{5}{14}} f'$$

Примечание. Оператор F_{2M} представлен отрезками ряда (5.7), указанными под соответствующими частями таблицы. При этом в (5.7) удержаны члены со степенями I не выше второй и не содержащие b_{Im}^* , а также первый член с $b_{Im} = \bar{b}_{Im}$, когда $K_i = K \pm 2$. Под каждой частью таблицы указан также переход от наших коэффициентов f_i (5.7) к параметрам a_i работ [20], который переводит формулы этой таблицы к поправкам [20] к м.э. F_{2M} обобщенной модели **. Выражения в таблице отключаются от приведенных матричных элементов $\langle K_f I_f \parallel F_L \parallel I_i K_i \rangle$ ($L=2$) [из формулы обобщенной модели (1.6)] множителем, пропорциональным $[(2I_f + 4)(2I_i + 1)]^{1/2} (-1)^{I_f - K_f} \begin{pmatrix} I_f & I_i \\ K_f & K_i - K_i \end{pmatrix}$.

* Использованы обозначения $b_{Im} = \kappa_i P_{\alpha}^+ B_{\alpha}'$ ($l = 0, 1, 2$) и $\bar{b}_{3m} = \kappa_3 P_{\alpha}^+ B_{\alpha}'$ (α' обозначает замену $K' \rightarrow \bar{K}' = -K' < 0$), а фактор $\frac{1}{Im}$

κ_l обеспечивает то, что у b_{Im} матричные элементы такие же, как и у B_{Im}^+ , т.е. как у D -функций.
 ** Указанный переход [20] будет точным (до членов данной степени по I), если к первой и последней строке таблицы для $K_i = K$ ($I_f = I \pm 2$) работы [20] добавить $-2/2$ (и исправить очевидную опечатку: для $K_i = K$, $I_i = I + 1$ множитель коэффициента a_2 должен быть $I_2 + 2I - 2$). В общем, у нас больше членов, поэтому некоторым из них (или их линейным комбинациям) нет соответствующих в работе [20] (чтобы получить соответствие с работой [20], необходимо положить дополнительные коэффициенты f_i в наших формулах равными нулю).

В микроскопическом аспекте энергии состояний можно получить, диагонализуя разложение (5.9) алгебраическими методами после того, как параметры \hbar были определены микроскопически, как было указано выше. Вероятности перехода можно рассчитать, находя сначала коэффициенты f разложения (5.7) методами, аналогичными использованным в конце разд. 4, сначала выражая их через операторы O_{ν}^{\dagger} [по аналогии с (4.25), (4.26)], а потом используя их микроскопическую структуру, полученную из (5.11). Такой расчет содержит меньше предположений, чем роторная модель, и приводит к поправкам к вероятностям обобщенной модели, иллюстрация которых в частном случае одной ротационной полосы приведена в разд. 4. Расчет будет удобным, если коэффициенты f быстро убывают с l_2 и n . В простейшем случае, когда в (5.7) можно оставить лишь член $l_2 = n = 0$, получаем

$$\langle f \| F_L \| i \rangle = [(2I_f + 1)(2I_i + 1)]^{1/2} \sum_{M_f M_i} (-1)^{I_f - M_f} \times \\ \times \begin{pmatrix} I_f & L & I_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix} \langle [B_{\alpha_f I_f M_f}, [F_{LM}, B_{\alpha_i I_i M_i}^{\dagger}]] | \rangle, \quad (5.12)$$

причем состояние $| \rangle$ может включать произвольную суперпозицию состояний ротационных полос, связываемых операторами B_f^{\dagger} , B_i^{\dagger} .

Действие оператора $B_{\alpha IM}^{\dagger}$ на состояние, в котором нет компонент с фоновым возбуждением ($b_{\alpha} | \rangle = 0$), а направление внутренней оси фиксировано в малой окрестности $\theta = 0$ (в лабораторной системе координат), можно определить, пользуясь факторизацией этого оператора в формуле (5.4), а также аналогией между роторными операторами $R_{I, KM}^{\dagger}$ и обобщенными сферическими функциями. Полагая, что каждому виду возбуждения (α , $K \neq 0$) соответствуют два различных оператора $B_{\alpha IM}^{\dagger}$, которые будем различать знаком K , запишем

$$B_{\alpha IM}^{\dagger} | \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{K0})}} (\delta_{MK} | K \rangle + (-1)^{I+K} \delta_{M, -K} | \bar{K} \rangle), \quad (5.13)$$

где

$$| K \rangle = \sqrt{\frac{2}{1+\delta_{K0}}} B_{\alpha KK}^{\dagger} | \rangle, \quad | \bar{K} \rangle = \sqrt{\frac{2}{1+\delta_{K0}}} B_{\alpha, -K}^{\dagger} | \rangle \quad (5.14)$$

($\bar{}$ означает замену $K \rightarrow -K = -\bar{K}$).

Комбинируя (5.12) и (5.13), получим формулу обобщенной модели, приведенную в разд. 1 [см. формулу (1.6)]. Таким образом, эта формула получается при описанных выше приближениях, в пределе сильной деформации ($\theta \approx 0$).

Пример вывода микроскопических формул для параметров h и операторов O_v^+ в случае квазиротационных полос переходной области приведен в Приложении 3.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ВЫВОД РОТОРНОЙ МОДЕЛИ И ПЕРЕНОРМИРОВКИ ИНЕРЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ОСТОВА

Запишем уравнение Шредингера для состояния $|vIM\rangle$:

$$H |vIM\rangle = \sum_p c_p (vI) P_{MKp}^I \{ [H, \Omega_p] + \Omega_p h(I^2) \} |-\rangle = E_{vI} |vIM\rangle \quad (П.1)$$

(здесь использовано соотношение (4.3), согласно которому H и $h(I^2)$ действуют тождественно внутри ротационной полосы). Введем следующие обозначения:

а) для коммутаторов

$$[H, \Omega_p] = \sum_{p'} \mathcal{E}_{p'p}^0 \Omega_{p'}; \quad (П.2)$$

$$[I_{\pm}, \Omega_p] = \sum_{p'} (j_{\pm})_{p'p} \Omega_{p'}, \quad ([I_z, \Omega_p] = K_p \Omega_p); \quad (П.3)$$

$$\sum_{\kappa=x, y, z} [I_{\kappa}, [I_{\kappa}, \Omega_p]] = \sum_{p'} (j^2)_{p'p} \Omega_{p'}; \quad (П.4)$$

б) для интегралов перекрывания от проектированных многоуклонных функций

$$\begin{aligned} & \langle - | \Omega_{p_2}^+ P_{K_{p_2} K_{p_1}}^I \Omega_{p_1} | - \rangle = \\ & = \rho_{p_2 p_1}^I = \rho_{p_1 p_2}^{I*} = \frac{2I+1}{2} \int_0^{\pi} \sin \beta d\beta D_{K_{p_2} K_{p_1}}^{I*}(0, \beta, 0) \times \\ & \times \frac{\langle - | \Omega_{p_2}^+ e^{-i\beta I_y} \Omega_{p_1} | - \rangle}{\langle - | \exp(-i\beta I_y) | - \rangle} \langle - | \exp(-i\beta I_y) | - \rangle. \end{aligned} \quad (П.5)$$

Отметим следующие свойства проекционных операторов P_{MK}^I :

$$\left. \begin{aligned} P_{MK}^I I_z &= K P_{MK}^I; \\ P_{MK}^I I_{\pm} &= \sqrt{(I \pm K)(I \mp K + 1)} P_{MK \mp 1}^I. \end{aligned} \right\} \quad (П.6)$$

Используя (П.6) и обозначения (П.3), (П.4), можно получить следующие соотношения:

$$P_{K_{p_2} K_{p_1}}^I \Omega_{p_1} I^2 = \sum_{p'} X_{p'p_1}^I P_{K_{p_2} K_{p'}}^I \Omega_{p'}; \quad (П.7)$$

$$P_{K_{p_2} K_{p_1}}^I \Omega_{p_1} h(I^2) = \sum_{p'} X_{p'p_1}^I P_{K_{p_2} K_{p_1}}^I \Omega_{p'}, \quad (П.8)$$

где $\overset{\circ}{X}^I$ дается выражением (3.7), а X^I удовлетворяет матричному уравнению (3.6) и может быть определена из него численными методами, если энергии E_I сильно отличаются от энергий жесткого ротатора [39], или приближенными аналитическими методами в другом случае.

Используя формулы, приведенные выше, можно получить уравнения (3.4) из текста для $C(vI)$. С помощью вариационного принципа в тексте получены уравнения (3.9).

Ортогональность разных состояний из (3.1), (П.1) при несовпадающих I и M обеспечивается свойствами операторов проектирования P_{MK}^I . Ортогональность состояний с одинаковыми I и M следует из (3.4) и приводит к условиям для $C(vI)$:

$$(E_{v_1 I} - E_{v_2 I}) C^+(v_1 I) \rho^I C(v_2 I) = 0. \quad (\text{П.9})$$

Заметим также условие, при котором оба уравнения (3.4) имеют общее решение:

$$[\rho^I, \mathcal{E}^I] = 0. \quad (\text{П.10})$$

Коммутативность ρ^I и \mathcal{E}^I следует из ротационной симметрии гамильтониана H .

Появление матрицы перекрытия деформированных конфигураций ρ^I в уравнениях (3.4), (3.9) отличает рассматриваемую здесь модель от модели с аналогичным физическим содержанием, основанной на аппроксимации деформированными состояниями внутренних состояний ядра. Роль матрицы ρ^I в уравнениях (3.4) для вектора $C(vI)$ с бесконечным числом компонент сводится в основном к учету возможной линейной зависимости между состояниями $P_{MK}^I \Omega_p | - \rangle$. Когда число компонент $|vIM\rangle$ ограничено (скажем, равно N) $\sum_{p'=1}^N (\rho_{p_1 p'}^I \mathcal{E}_{p' p_2}^I - \mathcal{E}_{p_1 p'}^I \rho_{p' p_2}^I) \neq 0$ и два члена в левой части

уравнения (3.9) различаются, в этом случае ρ^I влияет на решение (3.9). Присутствие матрицы ρ^I гарантирует выполнение ортогональности различных решений (3.9) в смысле (П.9).

Оценку для матричных элементов ρ^I можно получить, аппроксимируя следующим образом функции под интегралом в (П.5):

$$\langle - | \exp(-i\beta I_y) | - \rangle \approx \exp[-1/4 \langle - | I^2 | - \rangle \beta^2]; \quad (\text{П.11})$$

$$\frac{\langle - | \Omega_{p_2}^+ \exp(-i\beta I_y) \Omega_{p_1} | - \rangle}{\langle - | \exp(-i\beta I_y) | - \rangle} \approx \delta_{p_2 p_1} - i\beta \langle - | \Omega_{p_2}^+ I_y \Omega_{p_1} | - \rangle + \frac{\beta^2}{2} \times \\ \times \{ \delta_{p_2 p_1} \langle - | I_y | - \rangle - \langle - | \Omega_{p_2}^+ I_y^2 \Omega_{p_1} | - \rangle \}; \quad (\text{П.12})$$

$$D_{MM'}^I(0, \beta, 0) \approx [1 - \beta^2 (I(I+1)/4 - M^2)] \delta_{MM'} + \\ + \frac{\beta}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma [(I + \sigma M')(I - \sigma M' + 1)]^{1/2} \delta_{M, M' \mp \sigma}. \quad (\text{П.13})$$

(В формуле (П.12) предполагается, что операторы Ω_p нормированы согласно условию $\langle - | \Omega_{p_2}^+ \Omega_{p_1} | - \rangle = \delta_{p_2 p_1}$).

Лидирующие члены матрицы ρ^I при этих аппроксимациях оказываются равными с точностью до общего множителя:

$$\begin{aligned} \rho_{p_2 p_1}^I &= \delta_{p_2 p_1} - \frac{I(I+1) - 2K_{p_1}^2 + (j^2)_{p_2 p_1}}{\langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle} \delta_{K_{p_2} K_{p_1}} + \\ &+ \frac{\sqrt{(I - K_{p_1})(I + K_{p_1} + 1)}}{\langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle} (j_+)'_{p_2 p_1} \delta_{K_{p_2}, K_{p_1} + 1} + \\ &+ \frac{\sqrt{(I + K_{p_1})(I - K_{p_1} + 1)}}{\langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle} (j_-)'_{p_2 p_1} \delta_{K_{p_2}, K_{p_1} - 1}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Здесь мы использовали обозначения:

$$(j_{\pm})'_{p_2 p_1} = \langle - | \Omega_{p_2}^{\pm} I_{\pm} \Omega_{p_1} | - \rangle; \quad (\text{П.15})$$

$$(j^2)_{p_2 p_1} = \langle - | \Omega_{p_2}^{\pm} \mathbf{I}^2 \Omega_{p_1} | - \rangle - \delta_{p_2 p_1} \langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle. \quad (\text{П.16})$$

Выражения в формулах (П.15), (П.16) просто связаны с соответствующими величинами в (П.3), (П.4) и совпадают с ними, если $\Omega_p | - \rangle$ — одноквази-частичное состояние.

Роль матрицы перекрывания в уравнении (3.9) можно увидеть, когда $\mathcal{H}_{pp'}^0 = \varepsilon_p \delta_{pp'}$ и $X_{pp'}^I = \dot{X}_{pp'}^I / 2J_0$ [см. формулу (3.7)]. (В таком приближении не учтены ни члены остаточного взаимодействия в гамильтониане, ни неадиабатические коррективы к энергиям ротационных состояний остова.) Матричные элементы матрицы $\tilde{\mathcal{H}}^{vI}$ при сделанных предположениях равны:

а) при $p = p'$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{pp}^{vI} = \varepsilon_p + [I(I+1) - 2K_p^2 + (j^2)_{pp}] / 2\tilde{J}, \quad (\text{П.17})$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{J}} &= \frac{1}{J_0} \left\{ 1 - f_{IK_p}^{(+)} \frac{(j_+)_{p, p-1} (j_-)_{p-1, p}}{\rho_{pp}^I \langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle} - \right. \\ &\left. - \frac{(j_-)_{p, p+1} (j_+)_{p+1, p}}{\rho_{pp}^I \langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle} f_{IK_p}^{(-)} \right\}; \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

$$f_{IK_p}^{(\pm)} = 1 + \frac{\pm K_p + K_p^2 - (j^2)_{pp}}{I(I+1) - 2K_p^2 + (j^2)_{pp}};$$

б) при $K_p = K_{p'}, \pm 1$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{pp'}^{vI} = -\frac{1}{2J_0} \sqrt{(I \mp K_{p'})(I \pm K_{p'} + 1)} (j_{\pm})_{pp'} \eta_{pp'}^I, \quad (\text{П.19})$$

где

$$\eta_{pp'}^I = 1 - \frac{J_0 (\varepsilon_p + \varepsilon_{p'} - 2E_{vI}) + I(I+1) - K_p^2 - K_{p'}^2 + \frac{1}{2} [(j^2)_{pp} + (j^2)_{p'p'}]}{\rho_{pp'}^I \langle - | \mathbf{I}^2 | - \rangle}; \quad (\text{П.20})$$

в) при $K_p = K_{p'} \pm 2$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{pp'}^{VI} = & -\frac{1}{2J_0} [(I \mp K_{p'} + 1)(I \mp K_{p'})(I \pm K_{p'} + 1)(I \pm K_{p'} + 2)]^{1/2} \times \\ & \times \frac{(j_{\pm})_p, p' \pm 1 (j_{\pm})_{p' \pm 1}, p}{\rho_{pp}^I \langle - | I^2 | - \rangle}. \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ЯДРА В РОТОННОЙ ТЕОРИИ *

В работах [44] была сформулирована теория ядерной ротации в терминах ротонных операторов. Здесь приводится выражение для ротонных операторов и момента инерции деформированных ядер с учетом спаривания

1. Ротоны и момент инерции

а. Формулировка ротонной теории. Ротоны R_{lm}^{\dagger} определены в (4.1). Их можно рассматривать как сферические функции от некоторых коллективных углов (θ, φ) . Следующие основные свойства ротонов вытекают из их определения:

$$R_{l-m} = (-1)^m R_{lm}^{\dagger}; \quad (\text{П.22})$$

$$R_{l_1 m_1}^{\dagger} R_{l_2 m_2}^{\dagger} = \sum_{lm} (2l+1) \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} R_{lm}; \quad (\text{П.23})$$

$$\sum_m R_{lm}^{\dagger} R_{lm} = 1, \quad R_{l=0}^{\dagger}, m=0 = 1; \quad (\text{П.24})$$

$$\left. \begin{aligned} [I_+, R_{lm}^{\dagger}] &= \alpha_{m+1}^l R_{lm+1}^{\dagger}; \\ [I_0, R_{lm}^{\dagger}] &= m R_{lm}^{\dagger}; \\ [I_-, R_{lm}^{\dagger}] &= \alpha_m^l R_{lm-1}^{\dagger}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.25})$$

Здесь $\alpha_m^l = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$; $I_0 = I_z$, $I_{\pm} = I_x \pm iI_y$ — компоненты оператора полного углового момента ядра, $I^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2$.

Все R_{lm}^{\dagger} представляют комбинации из степеней коммутирующих «базисных» ротонов R_{lm}^{\dagger} ($m=0, \pm 1$). Для отыскания их микроскопической структуры, т. е. их разложения по операторам рождения и уничтожения, решается система уравнений, полученная из (4.4):

$$\langle - | [Q, [H, R_{lm}^{\dagger}] | - \rangle = \langle - | [Q, [h, R_{lm}^{\dagger}] | - \rangle \quad (\text{П.26})$$

для $h = E_k + I^2/2J$.

Если перейти к декартовым компонентам вектора $R_{\mathbf{l}}^{\dagger}$:

$$\left. \begin{aligned} R_1^{\dagger} = R_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (R_{11}^{\dagger} - R_{1-1}^{\dagger}); \\ R_2^{\dagger} = R_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} (R_{11}^{\dagger} + R_{1-1}^{\dagger}); \\ R_3^{\dagger} = R_3 &= R_0^{\dagger}; \quad (x, y, z) \equiv (1, 2, 3), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.27})$$

* Работа [46] с сокращениями.

для них вместо (П.25) имеем

$$[I_p, R_\mu^\dagger] = i\varepsilon_{p\mu k} R_k^\dagger, \quad (\text{П.28})$$

и отсюда

$$[I^2, R_\mu^\dagger] = 2(\vec{K} \cdot \vec{R}_\mu^\dagger); \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} -1 & iI_3 & -iI_2 \\ -iI_3 & -1 & iI_1 \\ iI_2 & -iI_1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{П.29})$$

(для k, p, μ , принимающих значения 1, 2, 3). Величины R_μ могут быть параметризованы следующим образом:

$$R_\mu^\dagger = \delta_{\mu 3} + r_\mu, \quad (\text{П.30})$$

где r_μ дают малый вклад (по сравнению с 1), когда R_μ^\dagger действуют на состояние $|- \rangle$, в котором один из коллективных углов (θ) близок к нулю (ось симметрии Oz)* [44].

б. *Реализация ротонных операторов в квазичастичном базисе.* Метод Хартри—Фока—Боголюбова (ХФБ) [14] дает естественный базис для учета парных корреляций в ядрах. В этой же схеме элементарные (одночастичные) возбуждения в ядрах генерируются операторами квазичастиц, задающимися канонической трансформацией Боголюбова:

$$\alpha_v^\dagger = u_v a_v^\dagger - v_v a_v \tilde{v} \quad \text{и т. д.}, \quad (\text{П.31})$$

где $\alpha_v^\dagger (a_v)$ — обычные операторы рождения (уничтожения) частиц; u_v и v_v ($u_v^2 + v_v^2 = 1$) — коэффициенты трансформации (П.31); \tilde{v} — состояние, обращенное по времени по сравнению с v ($u_{\tilde{v}} = u_v$, $v_{\tilde{v}} = v_v$, $a_{\tilde{v}}^\dagger = -a_v^\dagger$).

Вакуум операторов α_v определяется как $\alpha_v | \rangle \equiv 0$, а ядерный гамильтониан в ХФБ-базисе дается выражением (2.13) ($\varepsilon_\mu \rightarrow E_\mu$).

Дальше выразим все величины, входящие в уравнения (П.26), через операторы рождения и уничтожения квазичастиц. При этом предполагается, что: а) разложение величин r_μ включает только билинейные по операторам квазичастиц комбинации; б) комбинации типа $\alpha^\dagger \alpha$ могут быть ненулевые, однако их можно устранить из уравнений (П.26), подходящим образом выбирая Q [см. (П.33)]. Поскольку они не входят в выражение для момента инерции, рассматривать их здесь не будем. Отметим, что они могут оказаться необходимыми для выполнения других условий: например, типа (П.24)**. Итак, для r_μ имеем:

$$\left. \begin{aligned} r_\mu &= \sum_{\lambda\nu} [(r_\mu)_{\lambda\nu} \alpha_\lambda^\dagger \alpha_\nu^\dagger + (r_\mu)_{\lambda\nu}^* \alpha_\nu \alpha_\lambda]; \\ (r_\mu)_{\lambda\nu} &= -(r_\mu)_{\nu\lambda}, \quad (r_\mu)_{\lambda\tilde{\nu}} = (r_\mu)_{\lambda\nu}^*, \quad (\mu = 1, 2, 3), \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.32})$$

где учтена их эрмитовость и τ -четность (после выделения нечетного оператора \hat{r}^*). Коэффициенты $(r_\mu)_{\lambda\nu}$ будем определять, решая уравнения (П.26).

* На самом деле, чтобы учесть свойства R_{1m}^\dagger по отношению к обращению времени (τ), надо в формулы (П.30) ввести еще оператор \hat{r} , нечетный по отношению к этой операции: $[\hat{r}, \tau]_\pm = 0$. Его можно выбрать так, чтобы $\hat{r} | - \rangle = | - \rangle$, и поэтому не будем учитывать его в дальнейшем, за исключением изменения τ -четности R_{1m}^\dagger . Усложнения получаются в случае полосы $K=0$. Тогда необходимо или перейти к R_{2m}^\dagger -ротонам, или развить описание связанных (путем оператора \hat{r}) полос.

** Для удовлетворения этого условия достаточно считать, что r_3 не является независимой переменной, определяемой из системы (П.26), а получается при известных уже r_1 и r_2 как $r_3 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}$.

В последних вакуумное состояние $| \rangle$ берется в качестве аппроксимации для $| - \rangle$ (вакуум здесь определяется как одно из решений вариационной проблемы ХФБ, соответствующее данной полосе, хотя это может и не быть основное состояние ядра). Оператор Q фиксируется в виде:

$$Q = \alpha_i \alpha_j. \tag{П.33}$$

Теперь система (П.26) определяет полностью R — операторы. Поскольку она является неоднородной и имеет решения для произвольных значений параметра J , выбираем то значение J , для которого удовлетворяются уравнения (П.25), усредненные по состоянию $| \rangle$.

в. Уравнения ротонной теории. Формула для момента инерции. Уравнения системы (П.26), при сделанных в предыдущем параграфе предположениях, приобретают следующий явный вид:

$$\begin{aligned} (E_j + E_i) (r_1)_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\nu} [\bar{V}_{ji, \lambda\nu} \mathcal{U}_{j\lambda} \mathcal{U}_{\lambda\nu} + 2\bar{V}_{j\nu, \tilde{i}\lambda} \tilde{i}\lambda \mathcal{V}^{\circ}_{ji} \mathcal{V}^{\circ}_{\lambda\nu}] (r_1)_{\lambda\nu} = \\ = \frac{i}{J} \left\{ \frac{1}{2} (I_2)_{\tilde{j}\tilde{i}} \mathcal{V}^{\circ}_{ji} - \frac{1}{i} (r_1)_{ji} + \left(\sum_m (I_3)_{mm} v_m^2 \right) (r_2)_{ji} + \right. \\ \left. + \sum_{\lambda} [(I_3)_{j\lambda} \mathcal{U}_{j\lambda} (r_2)_{\lambda i} - (I_3)_{i\lambda} \mathcal{U}_{i\lambda} (r_2)_{\lambda j} - \right. \\ \left. - (I_2)_{j\lambda} \mathcal{U}_{j\lambda} (r_3)_{\lambda i} + (I_2)_{i\lambda} \mathcal{U}_{i\lambda} (r_3)_{\lambda j}] \right\}. \tag{П.3} \end{aligned}$$

Аналогичные уравнения для матричных элементов r_2 и r_3 можно получить циклической заменой ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$) индексов операторов r и I ; соответственно первый член в правых частях будет равен $-\frac{i}{2J} (I_1)_{\tilde{j}\tilde{i}} \mathcal{V}^{\circ}_{ji}$ и 0. Приняты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U}_{\alpha\beta} &= u_{\alpha} u_{\beta} + v_{\alpha} v_{\beta}; \\ \mathcal{V}^{\circ}_{\alpha\beta} &= u_{\alpha} v_{\beta} + v_{\alpha} u_{\beta}. \end{aligned} \right\} \tag{П.35}$$

Как уже отмечалось выше, момент инерции J определяется из требования, чтобы выполнялись в среднем по состоянию $| \rangle$ соотношения (П.25). Таким образом, используя, например, коммутатор $[I_1, R_2^{\dagger}]$, получаем следующую формулу для момента инерции:

$$\sum_{\mu\nu} (I_1)_{\mu\nu} (r_2)_{\nu\mu} \tilde{\sim} \mathcal{V}^{\circ}_{\nu\mu} = i/2. \tag{П.36}$$

В этой формуле учтены парные корреляции, поляризационные эффекты (изменения ХФБ-поля из-за вращения или учета остаточных взаимодействий) и эффекты трехмерности ядерной ротации. При отсутствии парных корреляций она переходит в полученную ранее формулу [44], учитывающую только эффекты трехмерности и поляризационные эффекты. Формула (П.36), как будет показано в следующем разделе, является обобщением нескольких известных формул, таких, как полученная С. Т. Беляевым [23], формула Таулеса [24] и, конечно, Инглиса [22].

2. Некоторые применения теории

а. Момент инерции без учета связи r_{μ} , но с учетом остаточного взаимодействия. Полученная система уравнений (П.13) является связанной по отношению к r_1, r_2 и r_3 . Составляющие ее уравнения становятся независимыми в случае, когда мы не принимаем во внимание все члены, кроме первого,

в правых частях уравнений. Простыми преобразованиями уравнения приводятся в этом случае к виду (например, для r_2):

$$(E_j + E_i) (r_2)_{ji} \sim + \sum_{\lambda\nu} [V_{ji, \lambda\nu} \sim \mathcal{U}_{ji} \mathcal{U}_{\lambda\nu} + \bar{V}_{j\lambda, \nu i} \sim \mathcal{V}^{\circ}_{ji} \mathcal{V}^{\circ}_{\lambda\nu}] (r_2)_{\lambda\nu} = \frac{i}{2J} (I_1)_{ji} \mathcal{V}^{\circ}_{ji}, \tag{П.37}$$

где $\bar{V}_{ij, kl} = V_{ij, kl} - V_{ij, lk}$.

Нетрудно убедиться, что подстановка

$$- \frac{2J}{i} (r_2)_{ji} \sim = f_{ji} \omega^{-1} \tag{П.38}$$

приводит (П.37) к тождественному соответствию с уравнениями, полученными С. Т. Беляевым (см. уравнения (17) в работе [23]). В (П.38) f_{ji} — коэффициенты обобщенной канонической трансформации, ω — угловая скорость, введенные С. Т. Беляевым.

б. Момент инерции в приближении свободных квазичастиц. Исследование случая, когда операторы ротонов коммутируют с членами остаточного взаимодействия, дается легко, потому что члены, содержащие $\bar{V}_{ij, kl}$, не участвуют в уравнениях (П.37). Здесь решения для r -операторов получаются в аналитическом виде:

$$(r_2)_{ji} \sim = \frac{i}{2J} \cdot \frac{(I_1)_{ji} \mathcal{V}^{\circ}_{ji}}{E_i + E_j} \text{ и т. д.,} \tag{П.39}$$

и подставляя их в (П.36), получаем результат:

$$J = \sum_{\mu\nu} \frac{|(I_1)_{\mu\nu}|^2}{E_{\mu} + E_{\nu}} \mathcal{V}^{\circ 2}_{\mu\nu}. \tag{П.40}$$

Эта формула [23] представляет собой известную формулу Инглиса для момента инерции вращающихся деформированных ядер [22] при явном учете сил спаривания.

Возможности применения формулы (П.40) были исследованы детально (см., например, [31]). Имея в распоряжении одночастичный потенциал Вудса—Саксона, более совершенный, чем использованный ранее потенциал Нильссона, сделаем некоторые иллюстративные расчеты, чтобы найти эффект влияния изменения одночастичной схемы на результаты, даваемые формулой Инглиса. При этом использовался более строгий критерий для определения констант парного взаимодействия (G_N, G_Z), чем в цитируемой работе, а именно искались те значения парных параметров, которые приводят к лучшим результатам для парной энергии исследуемого ядра. Расчеты свидетельствуют, что для ядер, далеких от области стабильности, инглисовская формула дает меньшее по сравнению с приводимыми, обычно теоретическими, оценки значения момента инерции (см. табл. 3 для ядер ^{168}Yb , ^{170}Yb , ^{172}Yb и результаты расчета при значении параметра деформации $\beta_{20} = 0,300$, $\beta_{40} = 0$).

в. Учет ротационной энергии в основном состоянии. Полученные выше результаты основаны на предположении, что состояние, по которому производится усреднение в (П.26), можно аппроксимировать квазичастичным вакуумом $| \rangle$, который минимизирует энергию системы, описываемой гамильтонианом H . Из теории следует, что нам следовало бы оперировать с состоянием $| - \rangle$, отвечающим условию:

$$(H - E_R - I^2/2J) | - \rangle = 0. \tag{П.41}$$

Т а б л и ц а 3

Сравнение момента инерции с экспериментом и данными работы [10] для различных ядер Yb

Ядро	$J, Mэв^{-1}$			
	без корреляции	с корреляцией	данные работы [10]	эксперимент
^{168}Yb	21,69	—	31,5	34,19
^{170}Yb	24,46	27,7	30,0	35,60
^{172}Yb	27,39	37,3	32,8	38,12

Примечание. Результаты Приора и др. [31] хорошо воспроизводятся в случае, когда используется их методика для выбора парных параметров.

Естественно поставить задачу вариационным способом и найти состояние $|0\rangle$, минимизирующее среднее значение $\mathcal{H} = H - E_k - I^2/2J$ и считать $|-\rangle$ приближенно совпадающим с $|0\rangle$.

Сделаем предположение, что $|0\rangle$ является снова квазичастичным вакуумом, и запишем \mathcal{H} в виде:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \sum_i \varepsilon_i \alpha_i^\dagger \alpha_i + \mathcal{H}_{res}, \tag{П.42}$$

где \mathcal{H}_{res} содержит нормальное произведение четырех операторов рождения и уничтожения. Тогда в ротонные уравнения будет входить гамильтониан

$$H = \mathcal{H} + E_k + I^2/2J = C + \sum_i \varepsilon_i \alpha_i^\dagger \alpha_i + \sum_{ij} h_{ij}^{(1, 1)} \alpha_i^\dagger \alpha_j + \sum_{ij} h_{ij}^{(2, 0)} \alpha_i^\dagger \alpha_j^\dagger + \dots, \tag{П.43}$$

где члены $h^{(1, 1)}$, $h^{(2, 0)}$ и т. д. имеют структуру:

$$\left. \begin{aligned} h_{ij}^{(1, 1)} &= (\langle 0 | \alpha_i h \alpha_j^\dagger | 0 \rangle - \langle 0 | h | 0 \rangle) = \\ &= \frac{1}{2J} \sum_{l=1, 2, 3} \left\{ \sum_{\mu} (I_l)_{i\mu} (I_l)_{\mu j} [2u_{\mu} v_{\mu} (u_i v_j + u_j v_i) + \right. \\ &+ (u_{\mu}^2 - v_{\mu}^2) (u_i u_j - v_i v_j)] + 2 \left[\sum_{\mu} (I_l)_{\mu\mu} v_{\mu}^2 \right] (I_l)_{ij} U_{ij} \left. \right\}; \\ h_{ij}^{(2, 0)} &= \frac{1}{2} \langle 0 | \alpha_j \alpha_i h | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{4J} \sum_{l=1, 2, 3} \left\{ \sum_{\mu} (I_l)_{i\mu} (I_l)_{\mu j} (\mathcal{U}_{i\mu} \mathcal{V}_{j\mu}^{\circ} + \mathcal{U}_{j\mu} \mathcal{V}_{i\mu}^{\circ}) + \right. \\ &+ 2 \left[\sum_{\mu} (I_l)_{\mu\mu} v_{\mu}^2 \right] (I_l)_{ij} \widetilde{\mathcal{V}}^{\circ} ij \left. \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{П.44}$$

Решая систему (П.26) с новым гамильтонианом (П.43), надо иметь в виду, что нельзя отбрасывать члены типа $\alpha^+ \alpha$ в ротонном операторе

из-за присутствия членов $h^{(2,0)}$ в H , т. е. в этом случае

$$r_{\mu} = \left. \begin{aligned} & \sum_{\lambda\nu} [(r_{\mu})_{\lambda\nu} \alpha_{\lambda}^+ \alpha_{\nu}^+ + (r_{\mu})_{\lambda\nu}^* \alpha_{\nu} \alpha_{\lambda} + (r'_{\mu})_{\lambda\nu} \alpha_{\lambda}^+ \alpha_{\nu}] ; \\ & (r'_{\mu})_{\lambda\nu} = (r'_{\mu})_{\nu\lambda}^* . \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.45})$$

Таким образом, вместо уравнений (П.34) будем иметь:

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_j + \varepsilon_i) (r_1)_{ji} + \sum_{\lambda} [h_{j\lambda}^{(1,1)} (r_1)_{\lambda i} - h_{i\lambda}^{(1,1)} (r_1)_{\lambda j}] + \sum_{\lambda} [h_{i\lambda}^{(2,0)} (r_1)_{j\lambda} - h_{j\lambda}^{(2,0)} (r_1)_{i\lambda}] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\nu} [\bar{W}_{ji, \lambda\nu} \mathcal{U}_{ji} \mathcal{U}_{\lambda\nu} + 2\bar{W}_{j\nu, i\lambda} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\gamma}_{\lambda\nu}] (r_1)_{\lambda\nu} = \\ & = \frac{i}{J} \left\{ \frac{1}{2} (I_2)_{ji} \tilde{\gamma}_{ij} - \frac{1}{i} (r_1)_{ji} + \left(\sum_m (I_3)_{mm} v_m^2 \right) (r_2)_{ji} + \right. \\ & + \sum_{\lambda} [(I_3)_{j\lambda} \mathcal{U}_{j\lambda} (r_2)_{\lambda i} - (I_3)_{i\lambda} \mathcal{U}_{i\lambda} (r_2)_{\lambda i} - \\ & \left. - (I_2)_{j\lambda} \mathcal{U}_{j\lambda} (r_3)_{\lambda i} + (I_2)_{i\lambda} \mathcal{U}_{i\lambda} (r_3)_{j\lambda}] \right\} , \quad (\text{П.46}) \end{aligned}$$

где $\bar{W}_{ij, kl}$ — матричные элементы двухчастичного взаимодействия, дополненные членами от h [см. (П.43)]. Уравнения для r_2 (соответственно r_3) получаются по описанным в п. 26 правилам.

Уравнения (П.46) решались в приближении, где все члены, кроме первого в правой части, были отброшены и учитывался только вклад диагональных членов $h^{(1,1)}$ и $h^{(2,0)}$; снова предполагалось, что выполняется соотношение $[W, R_{\mu}^+] = 0$, что ведет к пропаданию членов, содержащих $\bar{W}_{ij, kl}$ в левых частях уравнений. Из-за того, что диагональная часть $h^{(2,0)}$ отсутствует, части ротоннов $(r')_{\lambda\nu}$ выпадают из уравнений.

Энергиям ε_i , входящим в (П.42) и (П.46), можно придать следующий смысл. Предположим, что $|0\rangle$ является хорошим приближением к состоянию $|-\rangle$, которое представляет собой линейную комбинацию из состояний, принадлежащих исследуемой полосе данного ядра, а состояние $a_i^+ |0\rangle$, со своей стороны, хорошо аппроксимирует состояние $|-\rangle_i$, являющееся комбинацией из состояний ротационной полосы, выстроенной на одноквазичастичном уровне i в соседнем нечетном ядре, где момент инерции имеет значение J_i . Тогда, при самых простых предположениях о характере ротационного движения в соседнем нечетном ядре, получаем

$$\varepsilon_i = E_i - \frac{1}{2J} K_i (K_i + 1) + \left(\frac{1}{2J_i} - \frac{1}{2J} \right) \langle 0 | \alpha_i h \alpha_i^+ | 0 \rangle , \quad (\text{П.47})$$

где K_i — квантовое число проекции углового момента на ось симметрии в состоянии i . Таким образом, энергии, фигурирующие в ротонных уравнениях и в формуле для момента инерции, оказываются связанными с одноквазичастичными энергиями и ротационными характеристиками нечетного соседа.

Оценка эффектов, происходящих из-за учета вклада ротационной энергии в основное состояние, была проделана для ядер ^{170}Yb и ^{172}Yb . Полученные значения момента инерции представлены в табл. 3 в графе «с корреляцией».

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
КВАЗИРОТАЦИОННЫХ ПОЛОС *

Для фиксации модели, в которой будут применяться методы, описанные в разд. 5, надо выбрать модельный гамильтониан h , т. е. ограничить разложение (5.9). В данном случае целесообразно ослабить требования к операторам O_{lm}^+ , фиксирующие их алгебраические свойства, определенные в разд. 5, и считать только, что они тензорные операторы и, следовательно, выражаются через B_α^+ , B_α , R^+ , I [см., например, (5.7)]. Далее оператор h будет выбран так, чтобы получить феноменологическую формулу [53] для энергий E_I , состоящую из линейного и квадратичного членов по I и годящуюся для переходной области. Этому отвечает оператор, удовлетворяющий уравнению

$$[h, O_{lm}^+] = \omega_l O_{lm}^+ + a [I^2, O_{lm}^+]. \quad (\text{П.48})$$

Уравнение (П.48) обобщает уравнение случайной фазы для колебаний (первый член справа) и ротонной теории для идеального вращения (П.26) и (П.29) (второй член справа).

Параметры h , подлежащие определению, это ω_l и $a = 1/2J$. Структуру O_{lm}^+ здесь для простоты выразим через операторы частиц и дырок (введение спаривания достигается переходом к квазичастицам Боголюбова [14]):

$$O_{lm}^+ = \delta_{m0} + \sum_{\underline{j}\underline{k}} (Y_{\underline{j}\underline{k}}^{lm} a_{\underline{j}}^+ a_{\underline{k}} - Z_{\underline{j}\underline{k}}^{lm} a_{\underline{k}}^+ a_{\underline{j}}). \quad (\text{П.49})$$

Здесь ограничимся теми же членами, как в методе случайной фазы [52], а свободный член выбрали из соображений аксиальной симметрии, как и в (П.30). Нормировка произведена, произвольно фиксируя его значение для $m=0$, как $\delta_{00}=1$. (Черта сверху над индексом состояния означает частичное, снизу — дырочное состояние).

Подставим (П.49) в уравнения движения, которые получаются из (П.48), если туда подставить H вместо h . Будем считать, что выбрали базис ХФ не для H , а для $\mathcal{H} = H - a(I^2 - I_0^2)$. Тогда энергии в одночастичном члене \mathcal{H} будут не ε_i , а $\varepsilon_i - a\eta_i$, и матричные элементы остаточного взаимодействия не $V_{ij,kl}$, а $V_{ij,kl} - a\eta_{ij,kl}$, где

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= \sum_{\underline{k}} (2\delta_{\underline{k}\bar{\underline{k}}} - 1) (I_{i\underline{k}} I_{\underline{k}}^* + I_{\bar{\underline{k}}i}^* I_{\bar{\underline{k}}}); \\ \eta_{ij,kl} &= 2(I_{i\underline{k}} I_{\underline{j}l}^* + I_{\bar{\underline{k}}i}^* I_{\bar{\underline{j}}l}); \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.50})$$

$$I = I_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(I_x + iI_y); \quad \delta_{\bar{\underline{k}}\bar{\underline{k}}} = 1; \quad \delta_{\underline{k}\bar{\underline{k}}} = 0.$$

* Работа подготавливается к опубликованию.

Уравнения на коэффициенты Y, Z имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} & [\varepsilon_{\bar{i}K} - a\eta_{\bar{i}K}^m - \omega_l] Y_{\bar{i}K}^{lm} + \\ & + \sum_{\bar{j}l} [(\bar{V}_{\bar{i}l, \bar{K}\bar{j}} - a\bar{\eta}_{\bar{i}l, \bar{K}\bar{j}}) Y_{\bar{j}l}^{lm} + (\bar{V}_{\bar{i}\bar{j}, \bar{K}l} - a\bar{\eta}_{\bar{i}\bar{j}, \bar{K}l}) Z_{\bar{j}l}^{lm}] = 0; \\ & [\varepsilon_{\bar{i}K} - a\eta_{\bar{i}K}^m + \omega_l] Z_{\bar{i}K}^{lm} + \\ & + \sum_{\bar{j}l} [(\bar{V}_{\bar{K}l, \bar{i}\bar{j}} - a\bar{\eta}_{\bar{K}l, \bar{i}\bar{j}}) Y_{\bar{j}l}^{lm} + (\bar{V}_{\bar{K}\bar{j}, \bar{i}l} - a\bar{\eta}_{\bar{K}\bar{j}, \bar{i}l}) Z_{\bar{j}l}^{lm}] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.51})$$

Здесь $\varepsilon_{iK} = \varepsilon_i - \varepsilon_K$, $\eta_{iK}^m = \eta_i - \eta_K + m^2$, а черта над $\bar{V}, \bar{\eta}$ обозначает антисимметризованные матричные элементы.

Для упрощенного анализа системы (П.51) предположим модельное взаимодействие типа Брауна [54], а заодно сделаем аналогичные упрощения в $\bar{\eta}_{ij, Kl}$, пренебрегая обменными членами:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{ij, Kl} &\approx - \sum_m \chi_m V_{iK}^m V_{jl}^{-m}; \\ \bar{\eta}_{ij, Kl} &\approx 2 (I_{iK} I_{lj}^* + I_{Ki}^* I_{jl}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.52})$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_{\bar{j}l}^{lm} &= [l(l+1)]^{-1/2} Y_{\bar{j}l}^{lm}, \quad \tilde{Z}_{\bar{j}l}^{lm} = [l(l+1)]^{-1/2} Z_{\bar{j}l}^{lm}; \\ n^{lm} &= \sum_{\bar{j}l} (V_{\bar{i}j}^{-m} \tilde{Y}_{\bar{j}l}^{lm} + V_{\bar{j}l}^{-m} \tilde{Z}_{\bar{j}l}^{lm}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.53})$$

Подставляя (П.52) в (П.51), получаем коэффициенты \tilde{Y}, \tilde{Z} в явном виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_{\bar{i}K}^{lm} &= [\varepsilon_{\bar{i}K} - a\eta_{\bar{i}K}^m - \omega_l]^{-1} \times \\ & \times (\chi_m n^{lm} V_{\bar{i}K}^m + a(\delta_{m1}(I_+)_{\bar{i}K} + \delta_{m,-1}(I_-)_{\bar{i}K})); \\ \tilde{Z}_{\bar{i}K}^{lm} &= [\varepsilon_{\bar{i}K} - a\eta_{\bar{i}K}^m + \omega_l]^{-1} \times \\ & \times [\chi_m n^{lm} V_{\bar{K}i}^m + a(\delta_{m1}(I_+)_{\bar{K}i} + \delta_{m,-1}(I_-)_{\bar{K}i})], \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.54})$$

где $I_{\pm} = I_x \pm iI_y$, и мы использовали обозначения (П.53) и условия коммутации O_{lm}^+ с \mathbf{I} [как для тензорного оператора, см. (П.25)].

Чтобы найти ω_l, a , подставляем \tilde{Y}, \tilde{Z} из (П.54) в выражение для n^{lm} (П.53):

$$\left. \begin{aligned} n^{lm} &= \sum_{\bar{i}K} \left[\frac{V_{\bar{K}i}^{-m} (\chi_m n^{lm} V_{\bar{i}K}^m + a\delta_{m,1}(I_+)_{\bar{i}K} + a\delta_{m,-1}(I_-)_{\bar{i}K})}{\varepsilon_{\bar{i}K} - a\eta_{\bar{i}K}^m - \omega_l} + \right. \\ & \left. + \frac{V_{\bar{i}K}^{-m} (\chi_m n^{lm} V_{\bar{K}i}^m + a\delta_{m,1}(I_+)_{\bar{K}i} + a\delta_{m,-1}(I_-)_{\bar{K}i})}{\varepsilon_{\bar{i}K} - a\eta_{\bar{i}K}^m + \omega_l} \right], \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.55})$$

и в условии коммутации I_{\mp} с $O_{l, \pm 1}^+$ [см. (П.25)] (при $m = \pm 1$):

$$1 = \sum_{\bar{i}_K} \left[\frac{(I_{\pm})_{\bar{K}\bar{i}} (\chi_{mn}{}^{lm} V_{\bar{i}_K}^m + a (I_{\mp})_{\bar{i}_K})}{\varepsilon_{\bar{i}_K} - a \eta_{\bar{i}_K}^m - \omega_l} + \frac{(I_{\pm})_{\bar{i}_K} (\chi_{mn}{}^{lm} V_{\bar{K}\bar{i}}^m + a (I_{\mp})_{\bar{K}\bar{i}})}{\varepsilon_{\bar{i}_K} - a \eta_{\bar{i}_K}^m + \omega_l} \right]. \quad (\text{П.56})$$

Видно, что пренебрежение a в (П.55) превращает его в дисперсионное уравнение для ω_l [54] метода случайной фазы со взаимодействием Брауна. В случае пренебрежения ω_l в (П.56) превращается в уравнение (П.36) и (П.46) ротонной теории, но с упрощенным взаимодействием Брауна [54] и без учета спаривания. Таким образом, система (П.55) и (П.56) содержит как предел сферического, так и деформированного ядра. В формулах (54) есть три неизвестных параметра ω_l , a и n^{lm} , и поэтому система пишется второй раз для $O_{2l, m}^+ = O_{\mu}^+ O_{\mu'}^+$, для которого $\omega_{2l} = 2\omega_l$. Получаются четыре

уравнения (П.55) и (П.56) для l и $2l$ на определение величин ω_l , a , n^{lm} , $n^{2l, m}$.

В частном случае вращения ($\omega_l = 0$) формула (П.56) [с n^{lm} , определенным из (П.56)] дает простую возможность рассчитать влияние далекодействующего взаимодействия V на момент инерции $J = 1/2a$, чего еще не делалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rainwater J. Phys. Rev., 1950, 79, 432.
2. Bohr A. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1952, 26, No. 14.
3. Bohr A., Mottelson B. R. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1953, 27, No. 16.
4. Struble G. L., Sheline R. K., Kern J. Phys. Rev., 1964, 137, 772.
5. Михайлов И. Н., Наджаков Е., Сафаров П. Х. Препринт ОИЯИ, Р-2866, Дубна, 1966; Nadjakov E., Mikhailov I. N. Nucl. Phys., 1968, A107, 92.
6. Holmberg P., Lipas P. O. Nucl. Phys., 1968, A117, 552.
7. Harris S. M. Phys. Rev., 1965, 138, 509.
8. Mariscotti M. A., Scharff-Goldhaber G., Buck B. Phys. Rev., 1969, 178, 1864.
9. Давыдов А. С., Чобан А. А. Nucl. Phys., 1960, 20, 499.
10. Diamond R. M., Stephens F. S., Swiatecki W. T. Phys. Lett., 1964, 11, 315.
11. Alder K. e.a. Rev. Mod. Phys., 1956, 28, 432—542. Русский пер. в сб.: «Деформация атомных ядер». Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
12. Alaga G. e. a. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1955, 29, No. 9.
13. Керман А. «Вращательное движение ядер. В сб.: «Ядерные реакции». Гл. X. М., Госатомиздат, 1962; Nilsson S. G. Lectures in Theoretical Physics. V. 8C, University of Colorado Press, 1966; Натан О., Нильсон С. Г. В сб.: « α - β - γ -спектроскопия». Под ред. К. Зигбана. Перев. с англ. Вып. 2, гл. 10, М., Атомиздат, 1969.
14. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. М., «Наука», 1971.
15. Diamond R. M. e.a. Phys. Rev. Lett., 1969, 22, 564; Diamond R. M. e.a. Phys. Rev., 1971, C3, 344; Diamond R. M. e.a. Nucl. Phys., 1972, A184, 481; Ward R. e.a. High spin nuclear states and related phenomena. Stockholm, 1972.

16. Бочев Б. и др. Препринты ОИЯИ, Дубна, P6-6229, P7-6415, 1972.
17. Гринь Ю. Т., Павличенков И. М. ЖЭТФ, 1964, 47, 1847; Phys. Lett., 1964, 9, 249.
18. Kerman A. K. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1966, 30, No. 15.
19. Давыдов А. С. Возбужденные состояния атомных ядер. М., Атомиздат, 1967.
20. Джелипов Б. С., Михайлов В. М. «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1963, 27, 267; Михайлов В. М. «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1964, 28, 308; 1966, 30, 1334.
21. Ryatov M. I., Chernej M. I., Baznat M. I. Preprint JINR, Dubna, E4-5468, 1970.
22. Inglis D. R. Phys. Rev., 1954, 96, 1059.
23. Belyaev S. T. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1959, 31, No. 11; ЖЭТФ, 1966, 40, 672.
24. Thouless D. J. Nucl. Phys., 1960, 21, 225; Thouless D. J., Valatin J. G. Nucl. Phys., 1962, 31, 211.
25. Мигдал А. Б. ЖЭТФ, 1959, 37, 249.
26. Боголюбов Н. Н. «Докл. АН СССР», 1958, 119, 52; Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. М., Изд-во АН СССР, 1958.
27. Bohr A., Mottelson B., Pines D. Phys. Rev., 1958, 110, 936.
28. Соловьев В. Г. ЖЭТФ, 1958, 35, 823; 1959, 36, 1869; «Докл. АН СССР» 1958, 123, 652; Nucl. Phys., 1958, 9, 655.
29. Das T. K., Dreizler R. M., Klein A. Phys. Lett., 1970, 31B, 333; 1970, 34B, 235.
30. Лейн А. М. Теория ядра. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1967.
31. Prior O., Voehm F., Nilsson S. G. Nucl. Phys., 1968, A110, 257.
32. Гринь Ю. Т., Павличенков И. М. ЖЭТФ, 1962, 43, 465; «Ядерная физика», 1968, 8, 477.
33. Гринь Ю. Т., Ларкин А. И. «Ядерная физика», 1965, 2, 40; Phys. Lett., 1965, 17, 315.
34. Mottelson B., Valatin J. Phys. Rev. Lett., 1960, 5, 511.
35. Sano M., Wakai M. Nucl. Phys., 1965, 67, 481; Chan K. Y., Valatin J. G. Nucl. Phys., 1966, 82, 222; Udagava T., Sheline R. K. Phys. Rev., 1966, 147, 671; Krumlinde J. Nucl. Phys., 1968, A121, 306; Ma C. W., Rasmussen J. O. Phys. Rev., 1966, 147, 671.
36. Hill D. L., Wheeler J. A. Phys. Rev., 1953, 89, 1006; Griffin J. J., Wheeler J. A. Phys. Rev., 1957, 108, 311; Peierls R. E., Yoccoz J. Proc. Phys. Soc. (L.), 1957, 70, 381; Skyrme T. H. R. Proc. Phys. Soc. (L.), 1957, 70, 433.
37. Frauendorf S., Janssen D., Münchow L. Nucl. Phys., 1969, A125, 369; Ikeda A. Progr. Theor. Phys. (T), 1970, 43, 1539; Фрауэндорф С., Янсен Д., Мюнхов Л. «Ядерная физика», 1971, 13, 60.
38. Meyer J. Nucl. Phys., 1969, A137, 193.
39. Александров Л. и др. Сообщения ОИЯИ, Дубна, P4-6279, P4-6280, 1972. Михайлов И. Н., Караджов Д., Шавер М. О. Препринт ОИЯИ, P4-6719.
40. Selin E., Hjorth S. A., Ryde H. Physica Scripta, 1970, 2, 181.
41. Klein A., Kerman A. K. Phys. Rev., 1965, 138, 1323; Klein A., Celenzia L., Kerman A. K. Phys. Rev., 1965, 140, B245.
42. Рогозински С. Г. Препринт ОИЯИ, Дубна, P4-4108, 1968.
43. Беляев С. Т., Зелевинский В. Г. Препринт ИЯФ СОАН СССР, Новосибирск, № 298, 1969; «Ядерная физика», 1970, 11, 741.
44. Михайлов И. Н., Наджаков Е. Сообщение ОИЯИ, Дубна, P4-4293, 1969; препринт ИТФ, Триест, IC/69/20; «Докл. АН Болгарии», 1969, 22, 1221; Наджаков Е., Михайлов И. Н. «Докл. АН Болгарии», 1969, 22, 1377.
45. Nadjakov E., Mikhailov I. N. Preprint ICTP, Trieste, IC/71/111, 1971.
46. Караджов Д., Михайлов И. Н., Наджаков Е. Сообщение ОИЯИ, Дубна, P4-6104, 1971.

47. **Lipkin H. J.** Lie Groups for Pedestrians, North-Holland, Amsterdam, 1965.
48. **Biedenharn L. C., Blatt J. M., Rose M. E.** Rev. Mod. Phys., 1952, **24**, 249, 1952; Эдмондс А. Угловые моменты в квантовой механике. В сб: «Деформация атомных ядер». Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
49. **Гареев Ф. А., Иванова С. П., Калинин Б. Н.** «Изв. АН СССР, сер. физ.», 1968, **32**, 1960.
50. **Marshalek E. R., Weneser J.** Ann. Phys., 1969, **53**, 569; Phys. Rev., 1970, **C2**, 1682; **Marshalek E. R.** Phys. Rev., 1971, **C3**, 1710.
51. **Holzwarth G.** Nucl. Phys., 1970, **A156**, 511; 1971, **A174**, 97.
52. **Rowe D. J.** Fundamentals in Nuclear Theory. Ch. 10, Vienna, 1967; Rev. Mod. Phys., 1968, **40**, 153; Nuclear Collective Motion, Lond. 1970.
53. **Ejiri H. e.a.** J. Phys. Soc. (Japan), 1968, **24**, 1189.
54. **Браун Д.** Единая теория ядерных моделей и сил. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1970.