

$K\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

П. С. Исеев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В обзоре дано описание принципа выделения процессов взаимодействия нестабильных частиц с нестабильными частицами (типа $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $K\pi \rightarrow K\pi$, $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$) из процессов неупругого взаимодействия π - и K -мезонов с нуклонами. Дан обзор мировых экспериментальных данных по $K\pi$ -рассеянию и $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$ -аннигиляции и теоретическая интерпретация этих данных на основе метода дисперсионных соотношений и унитаризованной модели Венециано.

The principle of extracting the interaction of unstable particles with unstable particles (for instance, $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $K\pi \rightarrow K\pi$, $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$, from the inelastic interaction processes is described.

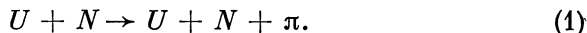
A review of the world experimental data on $K\pi$ -scattering and $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$ -annihilation and a theoretical interpretation of these data by the dispersion relation method and unitarized Veneziano model is given.

1. ОСНОВЫ МЕТОДА ИЗВЛЕЧЕНИЯ СЕЧЕНИЙ

$K\pi$ ($\pi\pi$)-ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

ИЗ ПРОЦЕССОВ НЕУПРУГИХ СОУДАРЕНИЙ

В 1959 г. Чу и Лоу [1] указали на возможность использования нестабильных частиц в качестве мишеней. Рассмотрим неупругое соударение некоторой U -частицы с нуклоном N с рождением π -мезона:



При малой передаче импульса нуклону можно предположить, что налетающая U -частица взаимодействует периферически с нуклоном, т. е. с π -мезонной шубой нуклона. В этом предположении правомерно поставить в соответствие реакции (1) диаграмму Фейнмана, изображенную на рис. 1, б. Четырехмерные импульсы частиц U , N и π обозначаются k , p и q соответственно. Введем

обычные переменные: квадрат энергии $s = (p + k)^2$ и квадрат передачи импульса $t = (p' - p)^2$. Амплитуду $F(s, t)$ процесса (1), рассматриваемую в приближении периферического соударения (в полюсном приближении), можно записать в виде [2]:

$$F(s, t) \sim \frac{f(t) \cdot T(U\pi \rightarrow U\pi)}{t - \mu^2}, \quad (2)$$

где μ — масса π -мезона; $f(t)$ — π -мезонный форм-фактор нуклона:

$$\lim_{t \rightarrow \mu^2} f(t) = g_{\pi NN}, \quad (3)$$

$g_{\pi NN}$ — константа связи π -мезона с нуклоном; $T(U\pi \rightarrow U\pi)$ — амплитуда рассеяния U -частицы на виртуальном π -мезоне. В физической области процесса (1) величина $t \leq 0$ и амплитуда $F(s, t)$

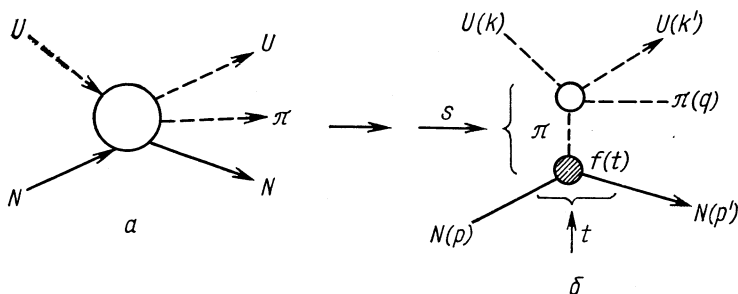


Рис. 1. Процесс рождения π -мезона $U + N \rightarrow U + N + \pi$ в общем случае (а) и в случае периферического столкновения (б).

не содержит особенностей. В нефизической области $t > 0$ амплитуда имеет полюс в точке $t = \mu^2$. Поведение $F(s, t)$ как функции переменной t в области $t > 0$ можно получить с помощью аналитического продолжения $F(s, t)$ по t из области физических значений t . Один из теоретических способов продолжения дан в работах [2, 3]. В работе [2] авторы рассматривают процесс $N + N \rightarrow N + N + \pi$ и описывают его с помощью процесса упругого рассеяния $N + \pi \rightarrow N + \pi$. Для амплитуды $T(U\pi \rightarrow U\pi)$, где U обозначает теперь нуклон, т. е. для амплитуды $T(N\pi \rightarrow N\pi)$, при нефизических значениях t постулируются дисперсионные соотношения по некоторой инвариантной переменной, связанной линейно с квадратом полной энергии W в системе центра инерции нуклона и π -мезона: $W^2 = (k' + q)^2$ (обозначения даны на рис. 1, б). Величины t и $\tau = (k - k')^2$ фиксируются. Делая ряд предположений, авторы исключают всюду зависимость амплитуды $T(N\pi \rightarrow N\pi)$ от нефизических значений t , оставляя ее лишь в виде форм-факторной функции $f(t)$. Таким образом, зависимость от t входит в сечение процесса $N + N \rightarrow N + N + \pi$

в виде мультипликативной функции и ее можно определить из эксперимента. Если при различных энергиях и передачах t вид функции $f(t)$ не меняется, то предположения, сделанные в работе [2] при аналитическом продолжении амплитуды $T(U\pi \rightarrow U\pi)$ в нефизическую точку $t = \mu^2$, будут оправданы и метод расчета периферических соударений с помощью полюсных диаграмм (см. рис. 1, б) получит подтверждение. С теоретической точки зрения представление амплитуды $F(s, t)$ в виде (2) справедливо в области $|t| \leq \mu^2 c^2$. В работах [4—6] было показано, что такой подход справедлив для более широкого интервала значений t . Включение всех значений t не меняет мультипликативной зависимости амплитуды $F(s, t)$ от t и незначительно меняет, менее чем на 10%, выражение для форм-факторной функции $f(t)$ [6]. Различные виды форм-фактора $f(t)$ обсуждались в работах [2—8].

Итак, выбирая в качестве частицы U или нуклон, или π -мезон, или K -мезон и изучая процесс рождения π -мезона по реакции (1), можно с помощью представления (2) получить сведения соответственно о $N\pi$ -, $\pi\pi$ - и $K\pi$ -рассеянии. Остановимся на анализе $K\pi$ -взаимодействия.

Для реакции $KN \rightarrow KN\pi$ соотношение (2) ведет к связи между дифференциальными сечениями процессов $KN \rightarrow KN\pi$ и $K\pi \rightarrow K\pi$ в следующем виде [3]:

$$\frac{d^3\sigma}{dt \cdot dW \cdot d\Omega} \xrightarrow{t \rightarrow \mu^2} \frac{W^2 \kappa g_{\pi NN}^2 (-t)}{4\pi M^2 k_{\text{лаб}}^2 (t - \mu^2)} \frac{d\sigma_{K\pi}(W)}{d\Omega}, \tag{4}$$

где W и κ — эффективная масса и импульс $K\pi$ -системы в $K\pi$ -вершине; M — масса нуклона; $k_{\text{лаб}}$ — импульс налетающего K -мезона в лабораторной системе; Ω — телесный угол рассеяния K -мезона в $K\pi$ -системе. Функция

$$\Phi(t, W, \Omega) = \frac{4\pi M^2 k_{\text{лаб}}^2 (t - \mu^2)^2}{W^2 \kappa g_{\pi NN}^2 (-t)} \cdot \frac{d^3\sigma}{dt \cdot dW \cdot d\Omega} \tag{5}$$

экстраполируется в точку $t = \mu^2$ и дает физические значения $d\sigma_{K\pi}(W)/d\Omega$. Обычный способ экстраполяции состоит в том, что функция $\Phi(t, W, \Omega)$ определяется в узких интервалах ($\Delta t, \Delta W, \Delta\Omega$) в области экспериментально измеренных значений t, W и Ω усреднением для некоторых средних значений $t_{\text{ср}}, W_{\text{ср}}$ и $\Omega_{\text{ср}}$, выбранных внутри интервалов (обычно интервал значений t : $0 > t > -0,5 (G_{\text{эл}}/c)^2$ делится на меньшие интервалы шириной $|\Delta t| = 0,1 (G_{\text{эл}}/c)^2$, интервал значений W : $0,64 \leq W \leq 1,24 G_{\text{эл}}$ делится на интервалы шириной $\Delta W = 0,1 G_{\text{эл}}$ и т. д.).

В области малых значений t сечение $\Phi(t_{\text{ср}}, W_{\text{ср}}, \Omega_{\text{ср}})$ при фиксированных значениях переменных W и Ω хорошо аппроксимируется линейной функцией по t [9]:

$$\Phi(t, W_{\text{ср}}, \Omega_{\text{ср}}) = a + bt. \tag{6}$$

Экстраполируя в этой формуле выражение справа в точку $t = \mu^2 = 0,02 (Гэв/c)^2$, получаем физическое значение сечения $d\sigma_{K\pi}(W)/d\Omega$ в данной точке $W_{ср}, \Omega_{ср}$.

$K\pi$ -взаимодействие можно выделять из более сложных реакций, когда в конце наблюдаются четыре частицы, например $K + p \rightarrow K + p + \pi + \pi$. В этом случае выделение $K\pi$ -рассеяния связано с одновременным выделением $p\pi$ -рассеяния (рис. 2) [3]:

$$\frac{d^4\sigma(Kp\pi\pi)}{dt \cdot dW \cdot dM(p\pi) d\Omega} \xrightarrow{t \rightarrow \mu^2} \frac{M^2(p\pi) Q \cdot \sigma(p\pi) W^2 \kappa}{4\pi^3 M^2 k_{лаб}^2 (t - \mu^2)^2} \frac{d\sigma_{K\pi}(W)}{d\Omega}, \quad (7)$$

где t — квадрат 4-импульса обменного π -мезона; $M(p\pi)$ -эффективная масса $(p\pi)$ -системы; Q — импульс в $p\pi$ -системе. Остальные переменные имеют тот же смысл, что и в формуле (4).

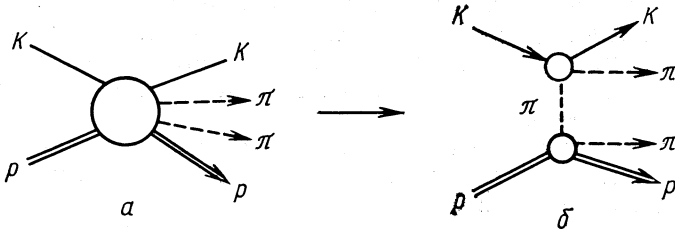


Рис. 2. Процесс рождения π -мезонов $K + p \rightarrow K + p + \pi + \pi$ в общем случае (а) и в случае периферического взаимодействия (б).

Сечение $d\sigma_{K\pi}(W)/d\Omega$, выделенное из формулы (4) или (7), разлагается в ряд по сферическим гармоникам Y_l^m :

$$\frac{d\sigma(W)}{d\Omega} = A_0 + A_1 Y_1^0(\theta) + A_2 Y_2^0(\theta) + \dots \quad (8)$$

Выражение (8) часто записывают в виде:

$$\frac{d\sigma(W)}{d\Omega} = 4\pi A_0 [\langle Y_0^0 \rangle + \langle Y_1^0 \rangle Y_1^0 + \langle Y_2^0 \rangle Y_2^0 + \dots]. \quad (9)$$

Величины $\langle Y_l^m \rangle = A_l / (4\pi A_0)$ называются нормированными моментами.

Во всем дальнейшем рассмотрении ограничимся двумя низшими парциальными волнами. В этом случае коэффициенты A_l формулы (8) весьма просто связаны с парциальными волнами T_l с данным значением орбитального момента l ($l = 0, 1$):

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= |T_0|^2 + 3|T_1|^2; \\ A_1 &= 12\sqrt{\pi/3} \operatorname{Re} |T_0 T_1^*| \text{ (ибо } T_0 T_1^* + T_0^* T_1 = 2 \operatorname{Re} T_0 T_1^*); \\ A_2 &= 12\sqrt{\pi/5} |T_1|^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Функции T_l выражаются различными комбинациями парциальных амплитуд с изотопическим индексом I . Введем следующие обозначения для амплитуды Кл-рассеяния:

$$T(\pi^\alpha + K^{\alpha'} \rightarrow \pi^\beta + K^{\beta'}) \rightarrow T_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$$

где α, β — знак заряда начального и конечного π -мезона соответственно; α', β' — знак заряда начального и конечного K -мезона. В Кл-системе имеются две инвариантные изотопические амплитуды: $T^{1/2}$ с изотопическим спином $T = 1/2$ и $T^{3/2}$ — с изотопическим спином $T = 3/2$.

Простые расчеты ведут к следующим связям физически наблюдаемых амплитуд $T_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$ с амплитудами T^I :

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } T_{00}^{--} = T_{++}^{++} &= T^{3/2}; \\ \text{б) } T_{00}^{00} = T_{++}^{00} &= (2T^{3/2} + T^{1/2})/3; \\ \text{в) } T_{00}^{++} = T_{--}^{00} &= (T^{3/2} + 2T^{1/2})/3; \\ \text{г) } T_{0+}^{+0} = T_{0+}^{0+} &= \sqrt{2}(-T^{3/2} + T^{1/2})/3; \\ \text{д) } T_{0+}^{0-} = T_{+0}^{-0} &= \sqrt{2}(T^{3/2} - T^{1/2})/3. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Меняя знак заряда K -мезона (+) на знак (-), получаем те же соотношения для K^- -мезона. Амплитуды $T_{\alpha\beta}^{\alpha'\beta'}$ и T^I зависят

от инвариантных переменных s, u, t для Кл-системы (рис. 3):

$$\begin{aligned} s &= (k + q)^2; \\ u &= (k - q')^2; \\ t &= (k - k')^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где k, k' — 4-мерные импульсы K -мезона в начальном и конечном состояниях; q, q' — 4-мерные импульсы π -мезона в начальном и конечном состояниях.

Амплитуды с определенным значением изотопического спина $T^I(s, u, t)$ разлагаются в ряд по полиномам Лежандра:

$$T^I(s, u, t) = \sum_l (2l + 1) T_l^I(s) P_l(\cos \theta), \quad (13)$$

где $\cos \theta$ — угол рассеяния π -мезона на K -мезоне. Для процесса упругого рассеяния парциальные амплитуды $T_l^I(s)$ имеют

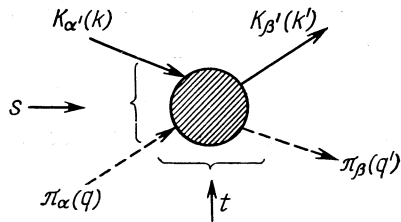


Рис. 3. График полной амплитуды Кл-рассеяния.

вид:

$$T_l^I = \frac{1}{|q|} \exp(i\delta_l^I) \sin \delta_l^I, \quad (14)$$

где δ_l^I — фаза рассеяния с изотопическим спином I и значением орбитального момента l . С помощью формул (10), (11) и (14) можно выразить связь коэффициентов A_l с T_l^I . Например, для упругого рассеяния $K^+\pi^- \rightarrow K^+\pi^-$ получим:

$$|T_0|^2 = \frac{1}{9q^2} [4 \sin^2 \delta_0^{1/2} + \sin^2 \delta_0^{3/2} + 4 \sin \delta_0^{1/2} \sin \delta_0^{3/2} \cos(\delta_0^{1/2} - \delta_0^{3/2})].$$

Аналогичное выражение можно найти и для $|T_1|^2$ [21].

Полная изотопическая структура амплитуды $K\pi$ -рассеяния имеет вид:

$$T_{\alpha\beta}(s, u, t) = A^{(+)}(s, u, t) \delta_{\alpha\beta} + ([\tau_\alpha \tau_\beta]/2) A^{(-)}(s, u, t), \quad (15)$$

где α, β — изотопические индексы π -мезона; τ_i — изотопические матрицы 2×2 ; $A^{(\pm)}(s, u, t)$ — скалярные функции, выражающиеся через инвариантные амплитуды $T^{1/2}$ и $T^{3/2}$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A^{(+)}(s, u, t) &= (2T^{3/2} + T^{1/2})/3; \\ A^{(-)}(s, u, t) &= -(T^{3/2} - T^{1/2})/3. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Изотопическая структура амплитуды процесса аннигиляции $K + \bar{K} \rightarrow \pi + \pi$ совпадает со структурой амплитуды $K\pi$ -рассеяния (15). В аннигиляционном канале имеются также две инвариантные амплитуды с изотопическими спинами $I=0$ (T^0) и $I=1$ (T^1). Функции $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ и амплитуды T^0 и T^1 связаны формулами:

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha\beta}^0(s, u, t) &= \sqrt{6} A^{(+)}(s, u, t); \\ T_{\alpha\beta}^1(s, u, t) &= 2A^{(-)}(s, u, t). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Связь между амплитудами каналов рассеяния и аннигиляции имеет вид:

$$\begin{pmatrix} T^0 \\ T^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 & 2\sqrt{6}/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{1/2} \\ T^{3/2} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Замена $\alpha \rightleftharpoons \beta$ в соотношениях (17) соответствует замене переменных $s \rightleftharpoons u$ (замена прямого канала его кроссинг-каналом), при этом:

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha\beta}(s, u, t) &= T_{\beta\alpha}(u, s, t); \\ A^{(+)}(s, u, t) &= A^+(u, s, t); \quad A^{(-)}(s, u, t) = -A^{(-)}(u, s, t). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Из формул (12), (17), (19) следует, что в разложении по парциальным волнам T_l^I амплитуда T^0 должна иметь только четные

волны (l — четные), а амплитуда T^1 — нечетные (l — нечетные). По формулам (4) — (19) проводится фазовый анализ Кл-рассеяния, а также фазовый анализ процесса $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$.

Был проведен ряд экспериментов, которые убедили в правильности метода извлечения процесса упругого Кл-рассеяния из процессов неупругих взаимодействий К-мезонов с нуклонами:

1. Функция $f(t)$ не должна зависеть от вида частицы U (проверено экспериментально — одна и та же функция используется в экспериментах с разными частицами) [9а, 10].

2. Если в процессе соударения $U + N$ в конечном состоянии вместо нуклона появится какая-либо другая частица (например, Δ — резонанс, рис. 4), то угловое распределение реакции $U + \pi \rightarrow U + \pi$ не должно меняться. Действительно, моменты $\langle Y_l^0 \rangle$, измеренные в реакциях $K^+p \rightarrow K^+\pi^-N^*$ и $K^+d \rightarrow K^+\pi^-p$ (p_s), оказываются практически совпадающими [9б] (рис. 5 и 6)*.

3. Частота появления Δ -резонанса не должна зависеть от вида налетающей частицы U , т. е. должно выполняться равенство отношений [9а]:

$$K\pi N / K\pi\Delta = \pi\pi N / \pi\pi\Delta,$$

что наблюдается экспериментально.

4. Чтобы убедиться в справедливости метода выделения фаз Кл-рассеяния, его проверяли сначала для хорошо изученного процесса рассеяния $\pi + p \rightarrow \pi + p$. Выделение фаз $\pi\pi$ -рассеяния из процесса с четырьмя частицами в конечном состоянии $p + p \rightarrow p + \pi^+ + p + \pi^-$ было проведено в работе [10]. Комбинация $p + \pi^-$ рассматривалась для случаев, когда инвариантная масса другой пары частиц в конечном состоянии лежала в области $1,16 \text{ Гэв} \leq M(p\pi^+) \leq 1,28 \text{ Гэв}$. Такому процессу можно поставить в соответствие диаграмму, изображенную на рис. 7. Дифференциальное сечение процесса $\pi\pi^- \rightarrow p\pi^-$ записывается в форме:

$$d\sigma(M_{p\pi^-})/d\Omega = \lambda^2 \sum A_l P_l = \sigma/4\pi \sum \frac{A_l}{A_0} P_l,$$

а коэффициенты A_l/A_0 , полученные экстраполяцией сечения $d\sigma(M_{p\pi^-})/d\Omega$ в точку $t = \mu^2$, сравнивались с аналогичными коэф-

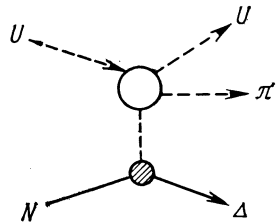


Рис. 4. Диаграмма периферического рождения Δ -резонанса в реакции $U + N \rightarrow U + \pi + \Delta$.

* Вместо дифференциального сечения экспериментаторы обычно приводят значения моментов Y_l^0 , по которым определяются фазы Кл-рассеяния (см., например, рис. 5 и 6 данного обзора).

коэффициентами, полученными из реального процесса рассеяния $p + \pi^- \rightarrow p + \pi^-$. Результат сравнения приведен на рис. 8. Согласие вполне хорошее.

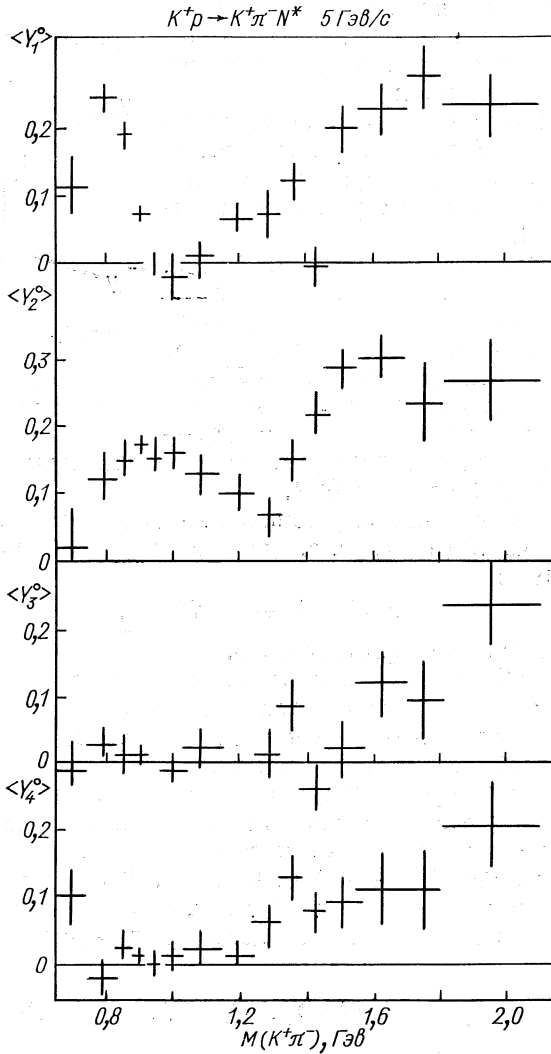


Рис. 5. Зависимость моментов $\langle Y_i^0 \rangle$ для $K\pi \rightarrow K\pi$ -рассеяния, выделенных из процесса $K^+ + p \rightarrow K^+ + p \rightarrow K^+ + \pi^- + N^*$, от энергии.

5. При выделении сечения $K\pi$ -рассеяния из реакции $K + p \rightarrow K + \pi + p + \pi$ по формуле (7) сначала отбирают случаи

с рождением K^* -мезона: $K + p \rightarrow p + \pi + K^*$. $p\pi$ -Вершина анализируется с помощью экстраполяции формулы (7) в точку $t = \mu^2$.

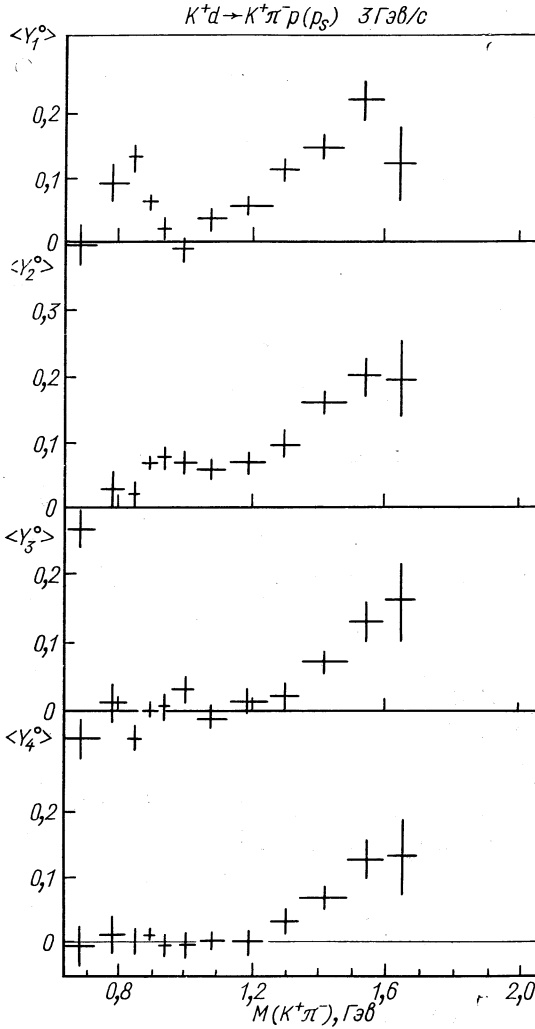


Рис. 6. Зависимость моментов $\langle Y_l^0 \rangle$ для $K\pi \rightarrow K\pi$ -рассеяния, выделенных из процесса $K^+ + d \rightarrow K + \pi^- + (p, p_s)$, от энергии.

Выделенные моменты $\langle Y_l^0 \rangle$ для $p\pi$ -системы сравниваются с моментами, полученными из рассеяния реального π -мезона на протоне. Результат сравнения зависит от выбора форм-факторной функции

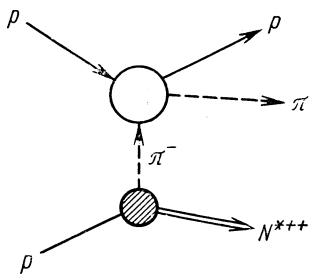


Рис. 7. Диаграмма периферического процесса соударения $p + p \rightarrow p + \pi^- + N^{*++}$.

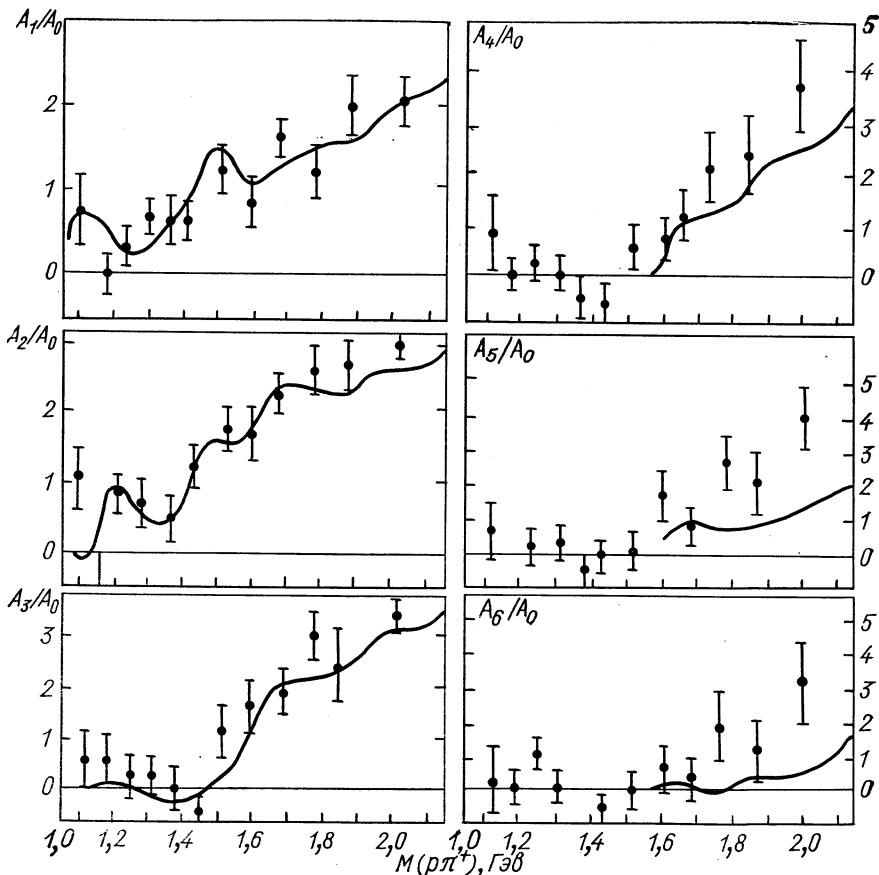


Рис. 8. Зависимость параметров A_i/A_0 для $p + \pi^- \rightarrow p + \pi^-$ от энергии: точки означают случаи, когда другая пара частиц ($p\pi^+$) лежит в области инвариантной массы $1,16 \leq M(p\pi^+) \leq 1,28$; сплошная кривая — поведение параметров, определенных из упругого рассеяния свободных частиц $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$.

$f(t)$. На рис. 9 дано сравнение экстраполированных значений $\langle Y_i^0 \rangle$ со значениями $\langle Y_i^0 \rangle$ полученного из реального $\rho\pi$ -рассеяния

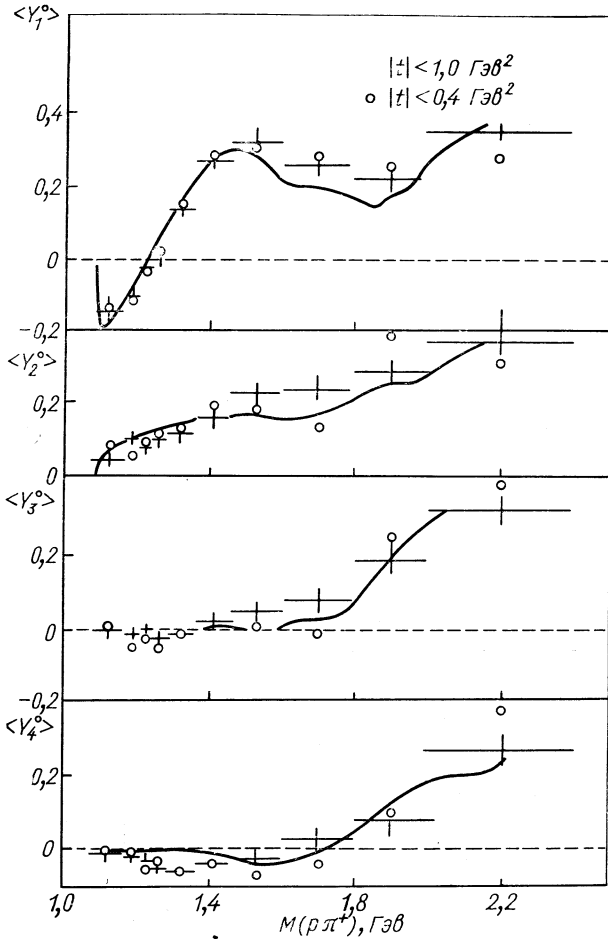


Рис. 9. Зависимость моментов $\langle Y_i^0 \rangle$ от энергии:
 0, + — моменты, выделенные из процесса $K + p \rightarrow K + \pi^+ + \pi^+ + p$ для упругого $\rho\pi$ -рассеяния; — — — моменты, полученные из рассеяния реального ρ -мезона на протоне.

(см. сплошные кривые) [11]. Далее предполагается, что аналогичная экстраполяция при выделении $K\pi$ -взаимодействия из той же реакции $K^+p \rightarrow K\pi\rho\pi^+$, в которой система $(\rho\pi^+)$ образует резонансное состояние Δ^{++} , даст правильные моменты $\langle Y_i^0 \rangle$ для $K\pi$ -рассеяния и они будут соответствовать реальному $K\pi$ -рассеянию.

Приведенные примеры (их число можно увеличить) не являются строгим доказательством справедливости метода выделения $K\pi$ -взаимодействия. Однако в настоящее время нет серьезных обоснованных возражений против такого подхода. Метод выделения упругого $\pi\pi$ -рассеяния процесса $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ полностью совпадает с методом выделения $K\pi$ -взаимодействия. И доказательства справедливости метода остаются теми же.

Однако методика выделения $\pi\pi$ -взаимодействия из $pp \rightarrow pN\pi$ или $pp \rightarrow pp\pi\pi$ реакции имеет одно специфическое отличие по сравнению с выделением $\pi\pi$ - или $K\pi$ -взаимодействия. В $\pi\pi$ -взаимодействии имеются большие p -волны и малые s -волны, а в $\pi\pi$ - и $K\pi$ -взаимодействии как s -волны, так и p -волны оказываются большими. Может ли это различие отразиться на истинности выделения сечений $\pi\pi$ - и $K\pi$ -взаимодействий? Ответа на этот вопрос пока нет.

2. ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО $K\pi$ -РАССЕЯНИЮ И АННИГИЛЯЦИИ $K + K \rightarrow \pi + \pi^*$

Представление о размахе работ, проводимых в лабораториях мира по изучению $K\pi$ -взаимодействия можно получить из табл. 1—3, в которых приводится перечень групп и проведенных ими

Таблица 1
Исследование реакций с $I = 3/2$

Реакция	Лаборатория	Импульс, Гэв/с	Литература
$K^-p \rightarrow K^-\pi^-\Delta^{++}$	Колорадо — Небраска — Иова	4; 6; 5,0 2,05; 2,63	[12]
	Калифорнийский университет, Лос-Аламос (UCLA) — Радиационная лаборатория им. Лоуренса (LRL)		[13]
	Амстердам — Неймеген	4,2	[14]
$K^-n \rightarrow K^-\pi^-p$	Сакле — Амстердам — Болонья — Реховос — Эколе Политехникум (SABRE)	3,0	[15]
	Аргоннская национальная лаборатория (ANL) — Северо-Западный университет (NW) — Канзас	5,5	[16]
	Университет Джона Гопкинса (JHU)	12,6	[17]

* Обзор экспериментальных данных составлен, в основном по материалам Аргоннской конференции [9] и обзорным докладам G. Tröppel [11] и V. P. Henri [34]. Табл. 1—3 и рис. 10—13 взяты из работы [11], табл. 4—6 и рис. 14 — из работы [9].

Продолжение табл. 1

Реакция	Лаборатория	Импульс, Гэв/с	Литература
$K^+p \rightarrow K^+\pi^+n$	ANL Брюссель—ЦЕРН	2,5 5,0	[18] [19]
$K^+n \rightarrow K^+\pi^+\Delta^-$	Не исследовалась		

Таблица 2

Исследования реакций с $I=3/2$ и $I=1/2$

Реакция	Лаборатория	Импульс, Гэв/с	Литература
$K^+p \rightarrow K^+\pi^-\Delta^{++}$ $\rightarrow K^0\pi^0\Delta^{++}$	UCLA	7,3	[20]
	Брюссель—ЦЕРН	5,0	[19]
	Брюссель—ЦЕРН—UCLA (обзор мировых данных—WDST)*—JHU (реакция $K^+p \rightarrow K^0\pi^0\Delta^{++}$ не анализировалась)	5,5	[21] [22]
	JHU (обзор мировых данных—WDST*)		[23]
	LRL	12,6	**
$K^+n \rightarrow K^+\pi^-p$ $\rightarrow K^0\pi^0p$	UCLA—национальная ускорительная лаборатория (NAL)—Калифорнийский Технологический институт (CIT)	2,0	**
	LRL (реакция $\rightarrow K^0\pi^0p$ не исследовалась)	12,0	[24]
$K^-p \rightarrow K^-\pi^+n$ $\rightarrow \bar{K}^0\pi^-p$	ANL—Институт им. Энрико Ферми (EFI)	5,5	[25]
	UCLA—CIT—NAL (реакция $\rightarrow \bar{K}^0\pi^-p$ не исследовалась)	2,0	**
$K^-n \rightarrow K^+\Delta$	Не исследовалась		

* WDST — World Data Summary Tape.

** Данные не опубликованы.

Таблица 3

Данные международного сотрудничества по изучению взаимодействия K^+ -мезонов с протонами

Лаборатория	Импульс K^+ -мезонов, Гэв/с	$K^+p \rightarrow K^+\pi^-p$		$K^+p \rightarrow K^0\pi^+p$		Литература
		Сечение, мбарн	Число случаев	Сечение, мбарн	Число случаев	
Иллинойс	2,53	$2,18 \pm 0,17$	2 723			[26]
Иллинойс	2,76	$2,27 \pm 0,18$	4 586			[26]
Брюссель — ЦЕРН	2,95	$2,13 \pm 0,11$	1 108	$2,20 \pm 0,19$	788	[27]
Иллинойс	3,2	$2,17 \pm 0,17$	4 823			[26]
Брюссель — ЦЕРН	3,43	$2,15 \pm 0,11$	1 848	$2,19 \pm 0,20$	556	[28]
Чикаго	4,27	$2,00 \pm 0,20$	1 838			[29]
LRL (Беркли)	4,6	$1,80 \pm 0,20$	2 668	$1,65 \pm 0,20$	759	[30]
Брюссель — ЦЕРН	4,97	$1,95 \pm 0,10$	6 241	$1,68 \pm 0,10$	3 077	[19]
JHU	5,44	$1,71 \pm 0,20$	9 518	$1,44 \pm 0,15$	900	[22, 23]
UCLA	7,3	$1,75 \pm 0,15$	11 619	$1,37 \pm 0,15$	2 279	[20]
Брюссель — ЦЕРН	8,25	$1,36 \pm 0,08$	4 780	$1,33 \pm 0,09$	2 721	[31]
LRL (Беркли)	8,92	$1,16 \pm 0,20$	7 559	$0,66 \pm 0,20$	2 272	[30]
Бирмингем — Глазго — Оксфорд	10,0	$1,19 \pm 0,13$	14 265	$0,86 \pm 0,16$	4 620	[32]
Рочестер	12,6	$0,97 \pm 0,09$	3 619	$0,57 \pm 0,07$	834	[33]
Полное число случаев			77 195		18 806	

экспериментов. Не вдаваясь в детали, перечислим экспериментальные данные.

1. Измерены полные сечения реакций $K^+\pi^- \rightarrow K^+\pi^-$, $K^+\pi^- \rightarrow K^0\pi^0$, $K^+\pi^0 \rightarrow K^0\pi^+$ в интервалах $0,64 \leq W \leq 1,35$ Гэв, $0,073 \leq -t \leq 0,30$ (Гэв/с)² (см. табл. 4—6).

Таблица 4

Сечения $\sigma(K^+\pi^- \rightarrow K^+\pi^-)$

Энергия $K^+\pi^-$ -системы, Гэв	$t_{\text{мин}}$, (Гэв/с) ²	Число случаев	σ , мбарн	$\frac{\chi^2}{ND}$
0,64—0,86	0,0726	167	10 ± 1	0,61
0,80—0,88	0,0780	216	27 ± 3	0,60
0,86—0,89	0,0808	227	70 ± 7	0,68
0,88—0,90	0,0836	250	111 ± 11	0,26
0,89—0,91	0,0865	243	110 ± 11	0,25
0,90—0,92	0,0894	217	109 ± 10	1,51
0,91—0,94	0,0955	214	65 ± 7	0,91
0,92—0,98	0,1085	237	35 ± 4	0,21
0,94—1,06	0,1379	210	18 ± 2	2,22
0,98—1,16	0,1824	163	9 ± 1	1,40
1,03—1,13	0,1680	94	8 ± 2	1,23
1,10—1,30	0,2636	132	8 ± 2	0,69
1,15—1,35	0,2997	131	7 ± 2	1,13

Таблица 5
Сечения $\sigma(K^+\pi^- \rightarrow K^0\pi^0)$

Энергия $K^0\pi^0$ -системы, Гэв	$t_{\text{мин}}$, (Гэв/с) ²	Число случаев	σ , мбарн	$\frac{\chi^2}{ND}$
0,64—0,86	0,0726	139	12±2	0,65
0,80—0,88	0,0780	97	22±3	0,86
0,86—0,89	0,0808	67	22±7	0,63
0,88—0,90	0,0836	61	32±10	0,52
0,89—0,91	0,0865	69	42±9	1,66
0,90—0,92	0,0894	69	52±11	0,01
0,91—0,94	0,0955	63	35±7	1,07
0,92—0,98	0,1085	79	17±4	1,67
0,94—1,06	0,1379	85	10±2	1,63
0,98—1,16	0,1824	77	5±2	1,77
1,03—1,13	0,1680	44	4±2	1,13
1,10—1,30	0,2636	49	4±2	0,25
1,15—1,35	0,2997	46	5±2	0,39

Таблица 6
Сечения $\sigma(K^+\pi^0 \rightarrow K^0\pi^+)$

Энергия $K^0\pi^+$ -системы, Гэв	Число случаев	σ , мбарн	$\frac{\chi^2}{ND}$
0,800—0,880	71	20±5	1,76
0,880—0,900	48	29±14	0,60
0,890—0,910	40	51±13	0,48
0,900—0,920	40	47±18	1,20
0,910—0,940	45	32±12	0,29
0,920—0,980	54	24±6	1,75
0,940—1,06	68	16±3	1,33
0,980—1,160	63	8±3	1,08
1,030—1,130	36	5±3	0,48
1,100—1,300	59	5±3	0,98

2. В области энергий $0,64 \leq W \leq 2,2$ Гэв имеет место приблизительное равенство [9a]:

$$2(d\sigma/dW)_{K^+\pi^- \rightarrow K^0\pi^0} \approx d\sigma/dW_{K^+\pi^- \rightarrow K^+\pi^-}. \quad (20)$$

Это соотношение справедливо в пределах 20%. Из формул (11в, г) и (20) следует, что $T^{1/2} \gg T^{3/2}$ в рассматриваемой области энергий.

3. Величина полного сечения $\sigma(K^\pm\pi^\pm \rightarrow K^\pm\pi^\pm, I = 3/2)$ невелика ($\sigma \leq 2-3$ мбарн, рис. 10).

4. Проведен фазовый анализ упругого Кл-рассеяния в области энергий $W \leq 1,20$ Гэв в предположениях [34]: а) в области $W \leq 1,20$ Гэв вклад в сечение дают только s - и p -волны (это предположение проверялось затем дополнительным анализом, учитывающим вклад d -волн); б) ниже энергии $W = 1,2$ Гэв нет вкладов неупругих процессов (рис. 11); в) фаза $\delta_0^{3/2}$ отрицательная

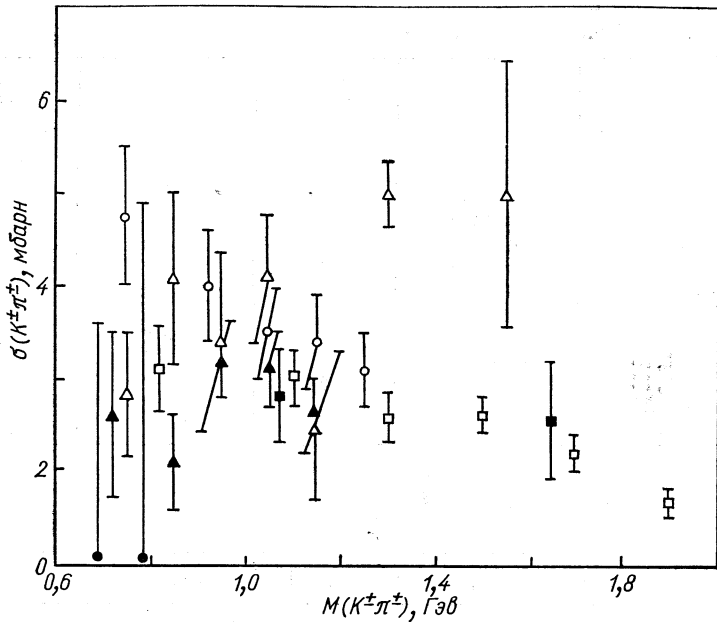


Рис. 10. Зависимость полного сечения $K^{\pm}\pi^{\pm} \rightarrow K^{\pm}\pi^{\pm}$ от энергии ($I=3/2$).

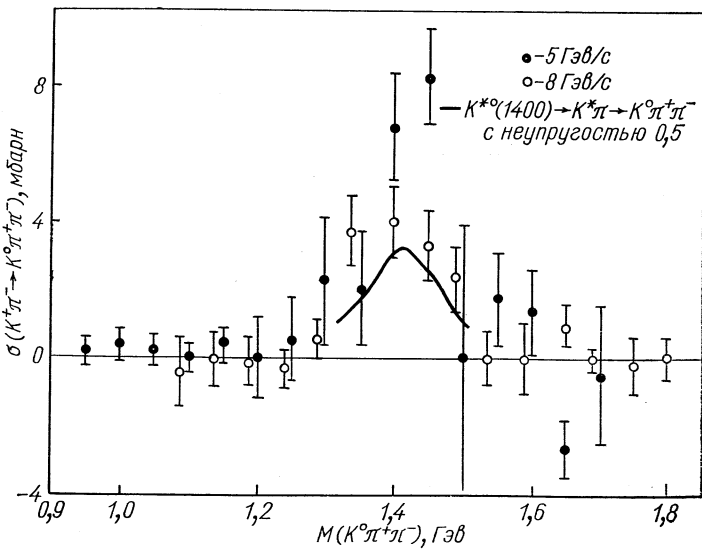


Рис. 11. Зависимость полного сечения неупругого процесса $K^{\pm}\pi^{\mp} \rightarrow K^0\pi^{\pm}\pi^{\mp}$ от энергии.

и небольшая. Фаза $\delta_1^{3/2}$ пренебрежимо мала во всей области энергий от порога до $W \lesssim 1,20 \text{ Гэв}$ (рис. 12); г) фаза $\delta_1^{1/2}$ в рассматриваемой области хорошо описывается формулой Брайта — Вигнера (с положением резонанса K^* в точке $W = 891 \text{ Мэв}$ и шириной $\Gamma_{K^*} = 50 \text{ Мэв}$).

Результаты фазового анализа по $\delta_0^{1/2}$ -фазе приведены на рис. 13. Результат анализа мировых данных по фазе $\delta_0^{1/2}$ приведен

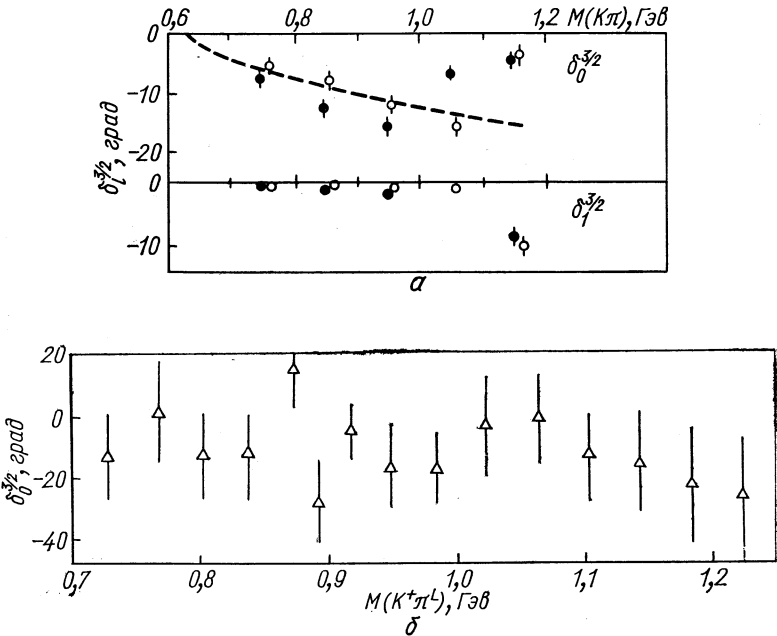


Рис. 12. Зависимость фазы $\delta_l^{3/2}$ от энергии:

----- $\delta_0^{3/2}$ -фаза, соответствующая полному сечению $\sigma = 1,8 \text{ мбарн}$ в состоянии $I = 3/2$; \circ — из $K^-p \rightarrow K^-p\Delta^{++}$ при энергии $4,2 \text{ Гэв}$ (Amsterdam — Ni megen); \bullet — из $K^-n \rightarrow K^-n\Delta^{++}$ при энергии $3,0 \text{ Гэв}$ (S.A.V.R.E); \triangle — из работы [23].

на рис. 14. Фаза $\delta_0^{1/2}$, по-видимому, достигает 90° при значении $W \approx 1100-1200 \text{ Мэв}$ (это будет обосновано в разд. 4). Ширина резонанса большая: $200 \text{ Мэв} \lesssim \Gamma \lesssim 400 \text{ Мэв}$.

5. Если сечение $\sigma_{K\pi}$ записать как сумму s, p, d -волновых вкладов ($\sigma_{K\pi} = \sigma_s + \sigma_p + \sigma_d$), то для $W \sim 1,2 \text{ Гэв}$ величина $\sigma_s \approx 10 \text{ мбарн}$ в предположении, что $\delta_0^{1/2} = 90^\circ$ в этой области энергий.

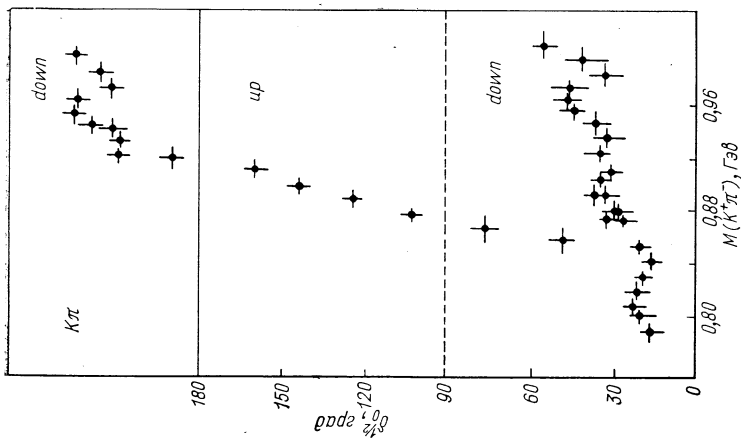


Рис. 13. Зависимость фазы $\delta_0^{1/2}$ от энергии [34].

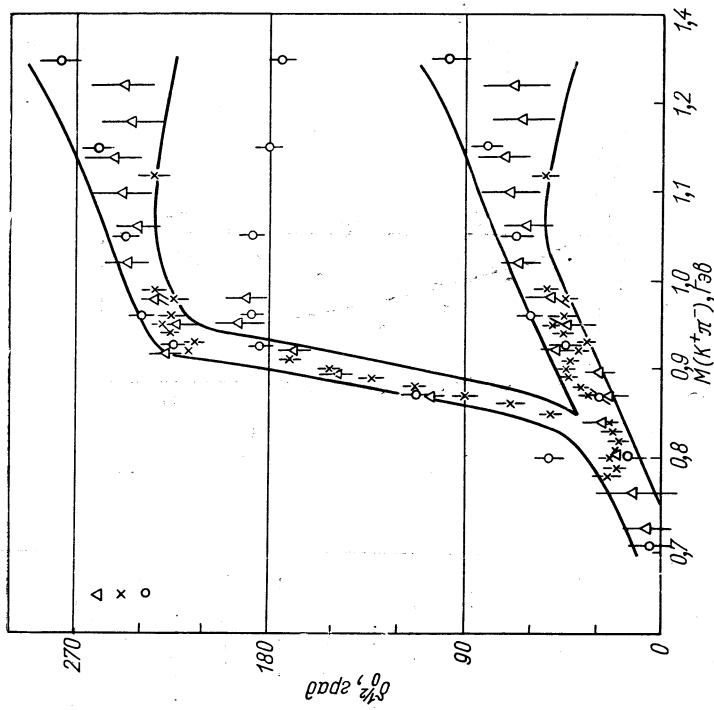


Рис. 14. Зависимость фазы $\delta_0^{1/2}$ (два коридора значений) от энергии (обзор мировых данных [11]).

6. Имеются явные указания на наличие d -волны в области K^* (1400)-резонанса.

7. В реакции $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$ наблюдались следующие резонансные состояния: s — волновой резонанс S^* (1060 $Mэв$); d — волновой резонанс f^* (1515 $Mэв$).

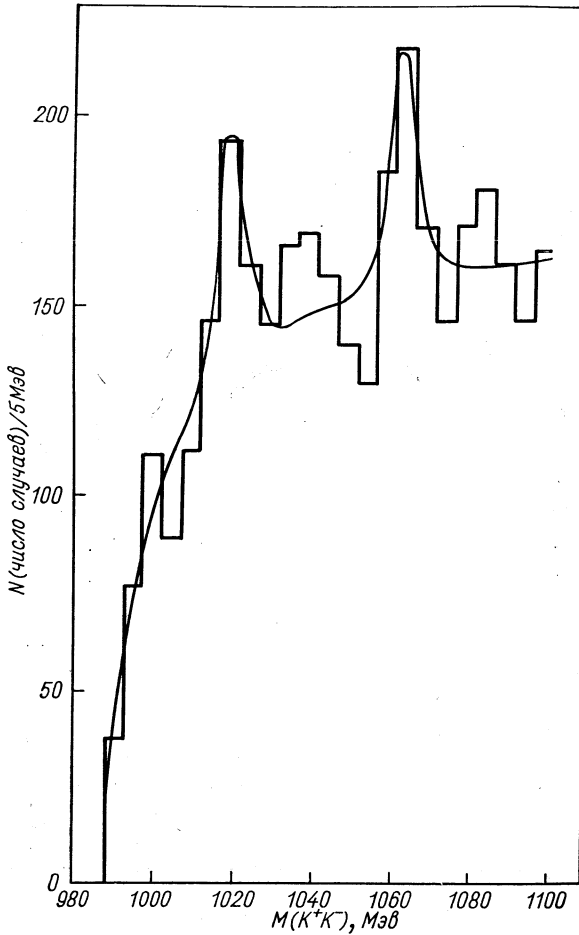


Рис. 15. Спектр масс K^+K^- -системы, полученной из реакции $\pi^-p \rightarrow K^+K^-n$.

8. В K^+K^- -спектре масс, полученном из реакции $\pi^-p \rightarrow K^+K^-n$ [35], наблюдаются два пика. Один отождествляется с Φ -мезоном ($\sim 1018,7 \pm 0,5 Mэв$), ширина $\Gamma_\Phi = 3,3_{-0,9}^{+1,5} Mэв$, полное сечение $\sigma(\pi^-p \rightarrow \Phi n) = 0,28 \pm 0,06$ мкбарн. Другой наблюдается

при значении массы S^* ($1063 \pm 2 \text{ Мэв}$) $\Gamma_{S^*} = 4 \pm 2 \text{ Мэв}$, сечение процесса $\pi^- p \rightarrow K^+ K^- n$, который идет через распад $S^* \rightarrow KK, \sigma(\pi^- p \rightarrow K^+ K^- n) = 0,09 \pm 0,02 \text{ мкбарн}$. После вычитания этих двух пиков в сечении $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ остается широкое распределение с полным сечением $\sigma(W_{K+K^-} \leq 1,1 \text{ Гэв}, |t| \leq 0,5 \text{ (Гэв/c)}^2) = 3,0 \pm 0,5 \text{ мкбарн}$ (рис. 15).

9. В реакции $\pi^- p \rightarrow K^0 \bar{K}^0 n$ сечение рождения $\pi\pi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$ вблизи порога рождения пары $K^0 \bar{K}^0$, т. е. в области S^* -резонанса, примерно равно $0,44 \text{ мкбарн}$. Полное сечение рождения пары приблизительно 1 мкбарн . Различие в полном сечении рождения $K^+ K^-$ и $K^0 \bar{K}^0$ можно объяснить большим вкладом p -волны в $K^+ K^-$ -случае, которая проявляется в распределении при распаде на $2K$ -мезона.

10. Известен большой набор значений для констант связи

$$g_{\pi p}^2/4\pi, \quad g_{\rho K\bar{K}}^2/4\pi, \quad g_{K^* \pi K}^2/4\pi$$

и для длин рассеяния [36]. Данные по длинам $K\pi$ -рассеяния можно объединить в приближенные неравенства: $-0,1 \leq a_0^{1/2} \leq 0,4$; $-0,2 \leq a_0^{3/2} \leq 0$; $0 \leq a_0^{1/2} - a_0^{3/2} \leq 0,6$. В работе [36] приведен следующий набор значений констант связи и длин рассеяния, при которых в полном приближении получается удовлетворительное описание экспериментальных данных по $K\pi$ -рассеянию в области $640 \text{ Мэв} \leq W \leq 1100 \text{ Мэв}$:

$$a_0^{1/2} = 0,08; \quad a_0^{3/2} = -0,04; \quad g_{K^* \pi K}^2/4\pi = 1,65;$$

$$\frac{g_{\pi p} g_{\rho K\bar{K}}}{4\pi} = 4,81; \quad \frac{g_{\pi K\pi}^2}{4\pi} = 1,79 \text{ (}\Gamma_{\kappa} = 370 \text{ Мэв)}; \quad \frac{g_{\pi \rho} g_{\sigma K\bar{K}}}{4\pi} = 6,08$$

(σ обозначает σ -мезон, т. е. резонансное состояние $\pi\pi$ -системы в S -волне; $M_{\sigma} \approx 1000 \text{ Мэв}$ [37], κ -резонансное состояние $K\pi$ -системы в $s^{1/2}$ -состоянии, $M_{\kappa} \approx 1100 \text{ Мэв}$). Определение экспериментальных значений длин $K\pi$ -рассеяния — далеко еще не законченный процесс, и это находит отражение в том разбросе значений, который приведен здесь.

3. РОЛЬ $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В πK -РАССЕЯНИИ [38]

Вклад $\pi\pi$ -взаимодействия в процесс $K\pi$ -рассеяния (или в процесс πN -рассеяния) в явном виде можно оценить с помощью метода двойных дисперсионных соотношений. Одна и та же функция Грина G описывает три различных процесса:

а) $\pi + K \rightarrow \pi' + K'$ ($\pi + N \rightarrow \pi' + N'$);

б) $\pi' + K \rightarrow \pi + K'$ ($\pi' + N \rightarrow \pi + N'$);

в) $\pi + \pi' \rightarrow \bar{K} + K'$ ($\pi + \pi' \rightarrow \bar{N} + N'$).

В условие унитарности для процессов ν) в явном виде войдет процесс $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \pi\pi' | S | \bar{K}K' \rangle &= \sum_n \langle \pi\pi | S | n \rangle \langle n | S^+ | \bar{K}K' \rangle = \\ &= \langle \pi\pi | S | \pi\pi \rangle \langle \pi\pi | S^+ | \bar{K}K' \rangle + \tilde{\Sigma}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Sigma}$ означает сумму по всем остальным возможным промежуточным состояниям. Следовательно, $\pi\pi$ -взаимодействие входит в процесс $K\pi$ -рассеяния (πN -рассеяния) через аннигиляционный канал.

В свою очередь, амплитуда $K\pi$ -взаимодействия входит в условие унитарности процесса аннигиляции $K\bar{K} \rightarrow N\bar{N}$:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \bar{K}K | S | N\bar{N} \rangle &= \sum_n \langle \bar{K}K | S | n \rangle \langle n | S^+ | N\bar{N} \rangle = \\ &= \langle \bar{K}K | S | \pi\pi \rangle \langle \pi\pi | S^+ | N\bar{N} \rangle + \tilde{\Sigma}, \end{aligned}$$

т. е. $K\pi$ -взаимодействие через процессы аннигиляции $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$ и $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ входит в процесс KN -рассеяния.

$\pi\pi$ - и $K\pi$ -Взаимодействия необходимо учитывать при описании следующих физических процессов: $\gamma\pi \rightarrow \pi\pi$, $\gamma N \rightarrow \pi N$, $NN \rightarrow NN$, электромагнитных форм-факторов π -, K -мезонов и нуклонов и т. д. [39]. Таким образом, двойные дисперсионные соотношения содержат взаимосвязь многих, на первый взгляд, очень далёких друг от друга процессов взаимодействия элементарных частиц.

При переходе от двойных дисперсионных соотношений к обычным, в которых аналитичность задается по одной переменной, например s , где s — квадрат полной энергии, другая переменная, например t , фиксируется. Вернемся снова к выяснению роли $\pi\pi$ -взаимодействия в $K\pi$ -рассеянии (πN -рассеянии). Величина вклада $\pi\pi$ -взаимодействия, описываемая в t -канале переменной t , при фиксировании величины t как бы «замораживается» и в этом состоянии в виде функции, зависящей от t , войдет в $K\pi$ -рассеяние (πN -рассеяние): и в длину рассеяния, и в интегральные члены. В области энергий $W \sim 1,2 \text{ Гэв}$, когда достаточно ограничиться s - и p -волнами, существуют соотношения между вкладами $\pi\pi$ -взаимодействия в s - и p -волны πK -рассеяния (πN -рассеяния). Обозначим $G_l^{(\pm)}$ парциальный вклад $\pi\pi$ -взаимодействия в парциальную волну $K\pi$ -рассеяния с орбитальным моментом l . Знаки (\pm) соответствуют знакам амплитуды $A^{(\pm)}$ из формулы (15). Вклад $G_l^{(\pm)}$ зависит от t (или от угла рассеяния) в $K\pi$ -системе, и для случая рассеяния вперед он входит в дисперсионные соотношения в виде некоторой постоянной. Предположим, что эта

постоянная равна нулю. Тогда между величинами $G_i^{(\pm)}$ существуют следующие соотношения [40]:

$$\left. \begin{aligned} G_s^{(\pm)}(W) &= -3G_p^{(\pm)}(W); \\ WG_i^{(\pm)}(W) &= W'G_i^{(\pm)}(W'), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $W = E + \omega$; $W' = E - \omega$; E — полная энергия K -мезона; ω — полная энергия π -мезона.

Для πN -рассеяния существуют аналогичные, но более сложные соотношения между вкладами $\pi\pi$ -взаимодействия в парциальные волны πN -рассеяния. Усложнения вызваны наличием спина у нуклона [40]. Если постоянная, описывающая вклад $\pi\pi$ -взаимодействия в $K\pi$ -рассеяние для случая рассеяния вперед, не равна нулю, то равенства (21) следует заменить соответствующими дифференциальными равенствами. Соотношения (21) должны быть контрольными для всех работ по низкоэнергетическим $K\pi$ - и πN -взаимодействиям, в которых явным образом учитывается вклад $\pi\pi$ -взаимодействия.

4. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО $K\pi$ -РАССЕЯНИЮ И $KK \rightarrow \pi\pi$ -АННИГИЛЯЦИИ

Теоретические исследования по взаимодействию нестабильных частиц с нестабильными можно разбить на два этапа. Первый относится к появлению двойных дисперсионных представлений Мандельштама, когда для описания экспериментальных данных по упругому $\pi N \rightarrow \pi N$ - и $KN \rightarrow KN$ -рассеянию необходимо было иметь сведения о $\pi\pi$ - и $K\pi$ -взаимодействии (см. разд. 3). В 1959—1961 гг. появились работы, посвященные теоретическому исследованию $\pi\pi$ - и $K\pi$ -взаимодействий методом теории возмущений и методом двойных дисперсионных соотношений. Метод теории возмущений для описания $K\pi$ -рассеяния был использован в работе [41]; в работах [42—46] $K\pi$ -взаимодействие рассматривалось методом двойных дисперсионных соотношений. В работах [41, 45] проведено сравнение результатов, полученных методом теории возмущений и дисперсионным методом. Второй этап начинается с момента появления экспериментальных данных по $\pi\pi$ - и $K\pi$ -рассеянию (примерно с 1967 г.). Это период активного накопления экспериментальных данных и применения новых теоретических моделей и гипотез (модель Венециано [47, 48], алгебра токов, РСАС, хиральная симметрия [49]), а также улучшенных подходов в методе дисперсионных соотношений [50, 51] к описанию низкоэнергетического $\pi\pi$ - и $K\pi$ -рассеяния.

Цель данного обзора — рассмотреть $K\pi$ -взаимодействие. Наиболее полные теоретические результаты для него (поведение фаз

Кл-рассеяния в широком энергетическом интервале) получены с помощью модели Венециано [48] и метода дисперсионных соотношений [50, 51], поэтому основное содержание второй половины данного параграфа будет посвящено обзору работ [48, 50, 51].

Теоретические исследования первого этапа. Окубо [41] рассмотрел процесс Кл-рассеяния по теории возмущений, используя следующий гамильтониан взаимодействия:

$$H_{Кл} = 4\pi g_{Кл} \cdot (\Phi_K^* \Phi_K) (\Phi_\pi^* \Phi_\pi), \tag{22}$$

где $g_{Кл}$ — перенормированная константа связи Кл-взаимодействия. В s -канале была рассмотрена амплитуда Кл-рассеяния,

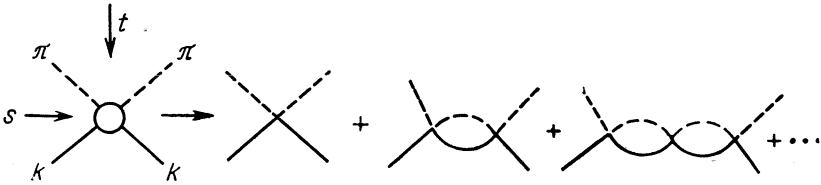


Рис. 16. Диаграмма амплитуды Кл-рассеяния в s -канале (сумма фейнмановских диаграмм типа цепочки).

графически представленная в виде суммы фейнмановских диаграмм типа цепочек (рис. 16). Эта амплитуда зависит, кроме параметра обрезания расходящихся интегралов, только от переменной s , не зависит от угла рассеяния и, следовательно, дает вклад только в s -волну. Кроме цепочек, изображенных на рис. 16, в амплитуду Кл-рассеяния будут давать вклад две другие цепочки диаграмм, представленные на рис. 17, а, б.

Так как в диаграммах рис. 17, б в промежуточных состояниях содержатся K -мезоны и лл-взаимодействие предполагается более сильным, чем Кл-взаимодействие, то вкладом этих диаграмм можно с достаточным основанием пренебречь по сравнению с вкладами диаграмм рис. 17, а.

Полные выражения для s - и p -фаз получаются довольно громоздкими. В области малых энергий (кинетическая энергия л-мезона меньше или примерно равна энергии, соответствующей массе покоя л-мезона) можно провести разложение выражений для фаз в ряд по трехмерному импульсу л-мезона \mathbf{q}^2 (или K -мезона, что одно и то же в системе центра энергии). После этого формулы Окубо принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{q}{W} \operatorname{ctg} \delta_0^I &= -\frac{1}{g_{\pi K}} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{g_{\pi\pi}}{g_{\pi K}} + \frac{1,4}{\pi} + \\ &+ \frac{q^2}{\pi} \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{g_{\pi\pi}}{g_{\pi K}} + \frac{1}{M^2} \right) + 0(q^4); \\ \frac{q^3}{W} \operatorname{ctg} \delta_1^I &= \frac{9}{5} \cdot \frac{\pi}{g_{\pi K} g_{\pi\pi}} \left(1 + \frac{2}{5} q^2 \right) + 0(q^4), \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

где $g_{\pi\pi}$ — перенормированная константа связи $\pi\pi$ -взаимодействия. Энергетическая зависимость фаз для состояний с различным значением изотопического спина одна и та же (т. е. $T_l^{1/2} = T_l^{3/2}$).

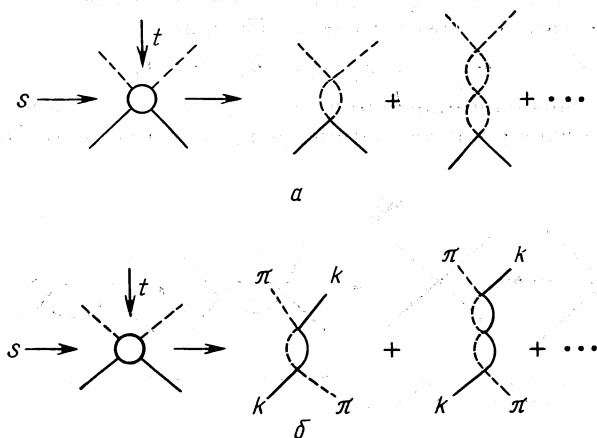


Рис. 17. Диаграммы, описывающие процесс $K\pi$ -рассеяния и содержащие в промежуточном состоянии π -мезоны (а) и π - и K -мезоны (б).

Расчет, аналогичный расчету фаз $K\pi$ -рассеяния, был проведен Окубо и для фаз $\pi\pi$ -рассеяния [41]. Так же, как и для $K\pi$ -рассеяния, амплитуда $\pi\pi$ -рассеяния рассматривалась в виде совокупности диаграмм типа цепочек в прямом и кроссинг-каналах. Выражения для s - и p -фаз $\pi\pi$ -рассеяния, полученные Окубо, совпали с выражениями, полученными Чу и Мандельштамом [52] на основе двойных дисперсионных соотношений.

Однако схема Чу — Мандельштама содержит серьезные внутренние трудности, анализ которых дан в работах [39, 53]. Главный недостаток схемы состоит в том, что мнимая часть амплитуды в нефизической области аппроксимируется малым числом парциальных волн. Такая аппроксимация вносит большую погрешность, особенно при приближении к границе спектральной плотности. Таким образом, согласие результатов расчетов, проведенных Окубо для фаз $\pi\pi$ -рассеяния, с расчетами Чу и Мандельштама, проведенными с помощью метода дисперсионных соотношений, не гарантирует согласия с экспериментальными данными.

Аналогичная ситуация может возникнуть и при сравнении фаз (23) с фазами $K\pi$ -рассеяния, полученными на основе метода дис-

персионных соотношений. Дисперсионные соотношения после ряда сделанных в них приближений приводят, как правило, к системе нелинейных интегральных сингулярных уравнений. Эти системы имеют бесчисленное множество решений. Отобрать из них физические решения весьма трудно, а часто и невозможно. Только в тех случаях, когда о процессе рассеяния известны некоторые экспериментальные данные, например длины рассеяния, положения и ширины резонансов и т. д., можно отобрать такие решения дисперсионных уравнений, которые описывали бы эти экспериментальные данные.

В 1959—1961 гг. данных о Кл-взаимодействии не было и речь могла идти лишь о непротиворечивости теоретических результатов, полученных различными методами.

Как уже упоминалось выше, низкоэнергетические дисперсионные соотношения для рассеяния π -мезонов на K -мезонах были получены свыше десяти лет назад в работах [42—45]. В работах [42—43] решения искались в effective range приближении, и результаты этих работ совпадают с результатами Окубо. В работах [44, 45] системы интегральных уравнений были получены двумя способами: усреднением по углам и комбинацией амплитуд рассеяния и их производных для угла рассеяния назад. Аналитические свойства изотопических амплитуд $A^{(+)}(s, u, t)$ и $A^{(-)}(s, u, t)$, метод устранения нефизического разреза от реакции $\pi + \pi \rightarrow K + \bar{K}$, области аналитичности действительной и мнимой частей амплитуды реакции $\pi + \pi \rightarrow K + \bar{K}$ и некоторые другие вопросы детально рассмотрены в работе [44]. Там же приведены в полном виде системы интегральных уравнений для парциальных амплитуд $T_i^1(q^2)$.

Интересным оказался следующий результат. В области низких энергий ($q^2 \leq \mu^2 c^2$) и в предположении, что амплитуды с различными значениями изотопического спина равны ($T^{1/2} = T^{3/2}$), системы дисперсионных соотношений для s - и p -волн, полученных как усреднением по углам, так и комбинацией амплитуд и их производных для случая рассеяния назад, оказываются совпадающими. Более того, системы распадаются на два независимых уравнения для s - и p -волн в отдельности:

$$\operatorname{Re} T_0(q^2) = \operatorname{Re} T_0(0) + \frac{q^2}{8\pi^2} P \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{W(x)} \cdot \frac{|T_0(x)|^2}{x(x-q^2)} dx; \quad (24)$$

$$\operatorname{Re} T_1(q^2) = \frac{q^2}{8\pi} P \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{W(x)} \cdot \frac{|T_1(x)|^2}{x(x-q^2)} dx, \quad (25)$$

где W — полная энергия Кл-системы. Решения уравнений (24) и (25) можно получить методом обратной функции [45] и в области

$q^2 = v < \mu^2 c^2$ записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{V\sqrt{v}}{W} \operatorname{ctg} \delta_0 &= 8\pi \operatorname{Re} v(0) + v \frac{2\sqrt{2+M}}{\pi(M+\mu)^2} + 0(v^2); \\ \frac{v\sqrt{v}}{W} \operatorname{ctg} \delta_1 &= 8\pi A \left(1 + \frac{B}{A}v\right) + 0(v^2). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Сравнивая решение (26) с решением Окубо (23) (в этом месте происходит отбор одного из решений дисперсионных уравнений), получим

$$\left. \begin{aligned} 8\pi \operatorname{Re} v(0) &= -\frac{1}{g_{\pi K}} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{g_{\pi\pi}}{g_{\pi K}} + \frac{1,4}{\pi} > 0; \\ \frac{2\sqrt{2+M}}{(M+\mu)^2} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{g_{\pi\pi}}{g_{\pi K}} + \frac{\mu^2}{M^2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Константы A и B однозначно определяются через константы $g_{\pi\pi}$ и $g_{\pi K}$ из сравнения выражений для $\operatorname{ctg} \delta_1$. Система (27) имеет решение $g_{\pi\pi}/g_{\pi K} \approx 0,09$; $g_{\pi K} \lesssim 2$; $g_{\pi\pi} \lesssim 0,2$. Найденная оценка константы связи $\pi\pi$ -взаимодействия ($g_{\pi\pi} \lesssim 0,2$) близка к значению, полученному в адиабатическом приближении Д. В. Ширковым и др. [39] ($g_{\pi\pi} \lesssim 0,4$). Таким образом, при определенном выборе констант связи $\pi\pi$ - и πK -взаимодействия решения (23) и (26) совпадают. Однако эти решения не могут претендовать на описание реального процесса $K\pi$ -рассеяния. В предположении $T^{1/2} = T^{3/2}$ (а именно, оно заложено в дисперсионные уравнения (24)) содержится весьма бедная динамика $K\pi$ -взаимодействия: в нем не учитываются ни резонансные состояния $\pi\pi$ - и $K\pi$ -систем, ни вклады неупругих процессов.

Очевидно, что описание реального $K\pi$ -взаимодействия возможно лишь после включения в расчеты резонансных состояний $\pi\pi$ -системы и после получения более полной экспериментальной информации о самом $K\pi$ -взаимодействии.

Применение унитаризованной модели Венециано к описанию $K\pi$ -рассеяния. Хорошо известно, что аналитические свойства амплитуд рассеяния, выписанных по рецептам модели Венециано [47], значительно отличаются от аналитических свойств тех же амплитуд, рассматриваемых по методу дисперсионных соотношений. В модели Венециано нет физических разрезов по переменным s , u , t и все резонансы имеют нулевую ширину.

Лавлес [48] предпринял попытку улучшить модель Венециано. Он предложил рассматривать парциальные волны, полученные по модели Венециано, как K -матрицу, т. е. для этих парциальных волн вводятся «истинные» парциальные волны T_l по формуле:

$$T_l(s) = V_l(s) / [1 + \rho(s) V_l(s)], \quad (28)$$

где функция $\rho(s)$ подбирается таким образом, чтобы у амплитуды $T_l(s)$ существовал правильный разрез по s в физической области

рассматриваемого процесса. Множитель $\rho(s)$ нарушает кроссинг-симметрию, однако при $s \rightarrow \infty$ амплитуда $T_l(s) \rightarrow V_l(s)$, и в этом смысле кроссинг-симметрия выполняется асимптотически.

Таким образом, Лавлес в своей унитаризованной модели идет на нарушение кроссинг-симметрии в области низких энергий ради сохранения аналитичности, условия унитарности (а следовательно, и правильного порогового поведения реальной и мнимой частей каждой парциальной волны) и ради получения физических резонансных состояний с шириной, отличной от нуля. Унитаризованная модель Лавлеса хорошо описывает данные по $\pi\pi$ -рассеянию, где имеется большая экспериментальная информация, позволяющая удовлетворительно записывать исходную амплитуду Венециано.

Однако данные по $K\pi$ -рассеянию плохо описываются унитаризованной моделью Лавлеса. Пусть

$$V_{x,y}(s, t) = -g^2 \frac{\Gamma(1-\alpha_x(s)) \Gamma(1-\alpha_y(t))}{\Gamma(1-\alpha_x(s)-\alpha_y(t))},$$

где g^2 — известная ρ -мезонная константа связи, определенная Сакураи; $g^2/4\pi \approx 2,1$; α_x и α_y — реджевские траектории x - и y -мезонов. Лавлес записывает амплитуды $K\pi$ -рассеяния с изотопическими спинами $1/2$ и $3/2$ в виде:

$$\left. \begin{aligned} T^{1/2}(s, u, t) &= \frac{\sqrt{v}}{8\pi W} \left[\frac{3}{2} V_{K^*, \rho}(s, t) - \frac{1}{2} V_{K^*, \rho}(u, t) \right]; \\ T^{3/2}(s, u, t) &= \frac{\sqrt{v}}{8\pi W} V_{K^*, \rho}(u, t), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где символ K^* обозначает известный резонанс ($M_{K^*} = 890 \text{ Мэв}$, $\Gamma_{K^*} = 50 \text{ Мэв}$); ρ — ρ -мезон. Предполагается, что $\alpha_\rho(m_\pi^2) = \alpha_{K^*}(m_{K^*}^2) = 1/2$.

Таким образом, в амплитудах $T^{1/2, 3/2}$ практически нет свободных параметров. Параметры g^2 и α' определены с погрешностью до 20 и 10% соответственно, и Лавлес мог варьировать свои расчеты только в этих пределах. Использовались следующие значения параметров: $g^2/4\pi = 2,5$; $\alpha' = 0,9$.

Парциальные волны $V_l(s)$ определялись с помощью формул (29):

$$V_l^{1/2, 3/2}(s) = \frac{1}{2} \int T_l^{1/2, 3/2}(s, u, t) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta),$$

а по выражениям $V_l^{1/2, 3/2}(s)$ и формуле (28) определялись «физические» парциальные волны $T_l^{1/2, 3/2}(s)$.

Сравнение рассчитанных Лавлесом теоретических фаз $\delta_0^{1/2}$, $\delta_0^{3/2}$ с мировыми экспериментальными данными дано на рис. 18. Две заштрихованные области выше 0° — два возможных экспериментальных коридора для фазы $\delta_0^{1/2}$. Заштрихованная область ниже

0° — экспериментальный коридор для фазы $\delta_0^{3/2}$. Из рисунка видно, что фаза $\delta_0^{1/2}$, полученная Лавлесом (она представлена на рисунке сплошной жирной линией), до энергий ≤ 800 Мэв идет выше экспериментальных данных, а начиная с энергий ≥ 900 Мэв идет между обоими коридорами. Предсказываемый резонанс в $s^{1/2}$ -волне значительно шире экспериментального (хотя нет доказательств его существования; более вероятно, что такого резонанса нет). Фаза $\delta_0^{3/2}$ заметно больше экспериментальных данных (она изображена жирной линией ниже 0° и ниже заштрихованной полосы). $p^{1/2}$ - и $p^{3/2}$ -Волны описываются моделью вполне удовлетворительно.

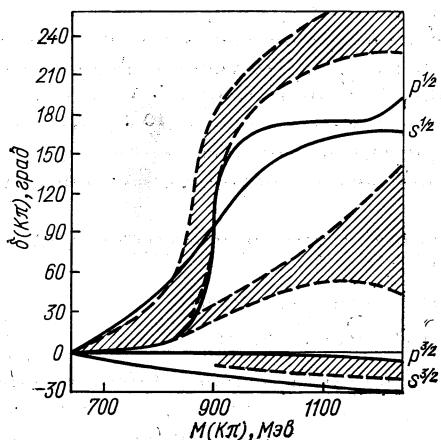


Рис. 18. Сравнение теоретических данных δ (Кл), полученных по унитаризованной модели Венециано для s - и p -волн (сплошные кривые) с мировыми данными (заштрихованные области).

но как-то сделать в рамках модели Венециано) могли бы изменить поведение $s^{1/2}$ - и $s^{3/2}$ -волн К π -рассеяния. Как показано ниже, в методе дисперсионных соотношений и σ -резонанс, и неупругие каналы дают заметные вклады в s -волны К π -рассеяния.

Дисперсионные соотношения для К π -рассеяния. Перейдем теперь к анализу экспериментальных данных по К π -рассеянию с помощью метода дисперсионных соотношений, считая, что $T^{1/2} \neq T^{3/2}$. Вывод дисперсионных соотношений для парциальных s - и p -волн основан на работах [37, 39, 54]. При выводе используемых ниже дисперсионных соотношений учет высокоэнергетических вкладов был проведен по методу Ширкова — Серебрякова [54], что позволяет свести дисперсионные уравнения для парциальных амплитуд к приближенным, но точно решаемым уравнениям. Окончательная форма дисперсионных соотношений имеет следующий вид (подробный вывод приводится в работах [36, 50]):

$$T_l^I(\omega) = \frac{P}{\pi} \int_1^\infty \frac{\text{Im } T_l^I(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \frac{1}{3\pi} \int_1^\infty \frac{\Phi_l^I(\omega') d\omega'}{\omega' + \omega} + \Pi_l^I(\omega) +$$

$$+ N_l \int_1^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{i=0, 1 \\ k=1/2, 3/2}} \text{Im } T_i^k(\omega') \cdot F_{l,I}^{(i,k)}(\omega', \omega) \right\} d\omega', \quad (30)$$

где $l = 0, 1$; $I = 1/2, 3/2$; $T_l^I(\omega) = \frac{1}{q} \exp[i\delta_l^I(\omega)] \cdot \sin \delta_l^I(\omega)$; ω — энергия π -мезона в системе центра инерции, $\omega = \sqrt{q^2 + \mu^2}$; $\mu = 1$; $N_0 = 1/2\pi$; $N_1 = 1/6\pi$;

$$\left. \begin{aligned} \Phi_l^{1/2}(\omega') &= 4 \text{Im } T_l^{3/2}(\omega') - \text{Im } T_l^{1/2}(\omega'); \\ \Phi_l^{3/2}(\omega') &= 2 \text{Im } T_l^{1/2}(\omega') + \text{Im } T_l^{3/2}(\omega'); \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Π_l^I — сумма полюсных вкладов от ρ -мезона, σ -мезона и λ -полюса, описывающего вклад высоких энергий. Обозначим полюсные вклады следующим образом:

от ρ -мезона

$$\frac{g_{\pi\rho\rho} g_{\rho K\bar{K}}}{4(v_\rho + v + 1)} = g(\rho); \quad M_\rho = \sqrt{v_\rho + 1};$$

от σ -мезона

$$\frac{g_{\pi\sigma\sigma} g_{\sigma K\bar{K}}}{4\sqrt{6}(v_\sigma + v + 1)} = g(\sigma); \quad M_\sigma = \sqrt{v_\sigma + 1};$$

от λ -полюса $\frac{\lambda_1}{v_1^2 + v^2} = \lambda_1$.

Положение полюса v_1 выбирается за пределами радиуса рассматриваемой области энергий ($v_1 \approx 15-20$). Параметр λ_1 можно приближенно оценить с помощью реджелогии, и он будет примерно равен $0,5-1$ при значении полного сечения $K\pi$ -рассеяния около $10-15$ мбарн, константы обрезания $v_L \sim 20-30$ (начиная с которой, амплитуда выходит в область высоких энергий). С помощью введенных обозначений вклады Π_l^I запишутся следующим образом:

$$\Pi_0^{1/2} = (g(\rho)\omega + g(\sigma) - \lambda)/2; \quad \Pi_0^{3/2} = (-\omega g(\rho)/2 + g(\sigma) - \lambda)/2;$$

$$\Pi_1^{1/2} = (-\omega g(\rho) - g(\sigma) - \lambda)/6; \quad \Pi_1^{3/2} = (\omega g(\rho)/2 - g(\sigma) - \lambda)/6.$$

Функции $F_{(l,I)}^{i,k}$ довольно громоздки, и здесь не выписываются, полный их вид приведен в работах [36, 50].

В дисперсионных соотношениях (30) первые два интегральных члена имеют порядок $0(1)$ в разложении по массе K -мезона (по μ/M), а подынтегральные члены в фигурных скобках имеют порядок $0(1/M)$. Вклад $\pi\pi$ -взаимодействия входит в соотношения (30) аддитивно через $g(\rho)$ - и $g(\sigma)$ -полюсные члены и удовлетворяет точным соотношениям (21). Вклад неупругих процессов описывается полюсным членом $\lambda = \lambda_1/(v_1^2 + v^2)$. Эти полюса нарушают аналитичность, но только вдали от рассматриваемой области

энергий π -мезона. Унитарность и кроссинг-симметрия такими полюсами не нарушаются [54]. В статическом приближении (в приближении $M \rightarrow \infty$) последним членом в (30) можно пренебречь. Тогда система четырех уравнений (30) расщепляется на две независимые явно кроссинг-симметричные системы уравнений: одна — для s -волн, другая — для p -волн $K\pi$ -рассеяния. Каждую из двух систем уравнений можно точно решить методом Вандерса [55]. Обобщение метода Вандерса на случай матриц произвольного ранга дано В. А. Мещеряковым [56].

Применимость статического приближения в πN -рассеянии имеет хорошо известные границы. Оно основано на малости отношения массы π -мезона к массе нуклона ($\mu/M_N \approx 1/7$). Отношение массы π -мезона к массе K -мезона в два раза хуже ($\mu/M \approx 1/3,5$). Поэтому статическим приближением в дисперсионных соотношениях (30) надо пользоваться с осторожностью. Однако отбрасывая только последний член в соотношениях (30), не получим чисто статического приближения. Вклад неупругих процессов, описываемый полюсным членом λ , несомненно, несет значительную долю поправок $O(1/M)$. Отбрасывая члены в фигурных скобках, имеем по-существу квазистатическое * приближение, а не статическое. Поэтому можно надеяться, что квазистатическое приближение окажется хорошим в достаточно широкой области энергий.

Полюсное приближение дисперсионных уравнений. Предположим, что в области низких энергий процесс рассеяния $K + \pi \rightarrow K + \pi$ идет в основном через промежуточные резонансные состояния: κ -мезон (в $s^{1/2}$ -волне) и K^* -мезон (в $p^{1/2}$ -волне), а процесс аннигиляции $K\bar{K} \rightarrow \pi + \pi$ идет через σ -мезон (s -волна, $I = 0$) и ρ -мезон. С учетом только этих резонансов и в приближении нулевой их ширины выражения для s - и p -волн в квазистатическом приближении $K\pi$ -рассеяния записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 T_0^{1/2}(\omega) &= g_{\pi K \kappa}^2 G(M_\kappa) \left[\frac{1}{\omega_\kappa - \omega} - \frac{1}{3(\omega_\kappa + \omega)} \right] + \frac{\omega g(\rho)}{2} + \frac{g(\sigma)}{2} - \frac{\lambda}{2}; \\
 T_0^{3/2}(\omega) &= g_{\pi K \kappa}^2 G(M_\kappa) \frac{2}{3(\omega_\kappa + \omega)} - \frac{\omega g(\rho)}{4} + \frac{g(\sigma)}{2} - \frac{\lambda}{2}; \quad (32) \\
 T_1^{1/2}(\omega) &= g_{\pi K K^*}^2 G(M_{K^*}) \left[\frac{1}{\omega_{K^*} - \omega} - \frac{1}{3(\omega_{K^*} + \omega)} \right] - \omega \frac{g(\rho)}{6} - \frac{g(\sigma)}{6} - \frac{\lambda}{6}; \\
 T_1^{3/2}(\omega) &= g_{\pi K K^*}^2 G(M_{K^*}) \frac{2}{3(\omega_{K^*} + \omega)} + \frac{g(\rho)}{12} \omega - \frac{g(\sigma)}{6} - \frac{\lambda}{6},
 \end{aligned}$$

где $G(M_\alpha) = (M_\alpha^2 + M^2 - 1)/4M_\alpha^3$; $g_{\pi K \kappa}^2$ — константа связи κ -мезона

* Слово «квазистатическое» означает здесь учет неупругих процессов, описываемых полюсным членом λ , который несет в себе долю поправок типа μ/M .

с K - и π -мезонами; $g_{\pi KK^*}^2$ — константа связи K^* -мезона с K - и π -мезонами. Из условия $T_1^{1/2}(\omega = 1) = T_1^{3/2}(\omega = 1) = 0$ получается связь констант:

$$g_{\pi KK^*}^2 \frac{G(M_{K^*})}{\omega_{K^*}^2 - 1} = \frac{g_{\pi\rho\rho} g_{\rho K\bar{K}}}{32(\nu_\rho + 1)}.$$

Используя экспериментальные значения для ширины K^* -мезона $\Gamma = 50 \text{ Мэв}$ и его массы $M_{K^*} = 890 \text{ Мэв}$ и массы ρ -мезона $M_\rho = 780 \text{ Мэв}$ ($\nu_\rho = 6,46$), получаем:

$$g_{\pi KK^*}^2/4\pi = 1,65; \quad g_{\pi\rho\rho} g_{\rho K\bar{K}}/4\pi = 4,81. \quad (33)$$

Значение константы $g_{\pi\rho\rho} g_{\rho K\bar{K}}/4\pi = 4,81$ примерно в два раза больше предсказываемой $SU(3)$ -симметрией. Возможно, что такое увеличение константы связано с возрастанием форм-факторной функции в области нефизического распада $\rho \rightarrow K + \bar{K}$.

Учет поправок $O(1/M)$ дает дополнительные соотношения, позволяющие определить константы $g_{\pi\rho\sigma} g_{\sigma K\bar{K}}$, λ_1 и длины рассеяния $a_0^{1/2}$ и $a_0^{3/2}$.

Если предположить, что в $K\pi$ -рассеянии, так же как и в πN -рассеянии, выполняется ρ -доминантное соотношение между длинами рассеяния, т. е. $a_0^{1/2} = -2a_0^{3/2}$, то длины рассеяния принимают значения:

$$a_0^{1/2} = (1/4\pi) T_0^{1/2} = 0,080; \quad a_0^{3/2} = (1/4\pi) T_0^{3/2} = -0,040. \quad (34)$$

Предполагая массу κ -мезона равной $M_\kappa \approx 1100 \text{ Мэв}$ [20], получаем:

$$g_{\pi K\kappa}^2/4\pi = 1,79 \text{ (или } \Gamma_\kappa \approx 370 \text{ Мэв)}; \quad g_{\pi\rho\sigma} g_{\sigma K\bar{K}}/4\pi = 6,08; \\ \lambda_1/4\pi = 0,115. \quad (35)$$

Все числа (33) — (35) находятся в разумном согласии с имеющимися данными по $K\pi$ -взаимодействию.

Если предположить, что гипотеза ρ -доминантности справедлива, но κ -мезон не существует, то система (32) с учетом поправок $O(1/M)$ оказывается несовместной. Она ведет к требованию обращения в нуль поправок $O(1/M)$, что заведомо неверно. Если отказаться от гипотезы ρ -доминантности и существования κ -мезона, то получаются следующие значения для искомым констант:

$$\left. \begin{aligned} 1,58 < g_{\pi\rho\sigma} g_{\sigma K\bar{K}}/4\pi < 10,6; \quad 0,064 < \lambda_1/4\pi < 0,172; \\ 0 < a_0^{1/2} < 1,37; \quad -1,37 < a_0^{3/2} < a; \quad a_0^{1/2} - a_0^{3/2} = 1,37. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Таким образом, для нерезонансных $s^{1/2}$ -волновых решений разность длин рассеяния оказывается довольно большой по сравнению с имеющимися теоретическими и экспериментальными

оценками ($\leq 0,6$), и гипотеза о существовании κ -резонанса более предпочтительна, чем отказ от нее. Ниже приведены теоретические соображения в пользу существования κ -резонанса.

Несколько слов о поправках $O(1/M)$ — о последнем слагаемом в соотношениях (30). В $s^{1/2}$ -волну эти поправки вносят вклад $\leq 5\%$, в $s^{3/2}$ -волну — меньше 15% . Такие же порядки малости вносят эти поправки и в $p^{1/2}$ -, $p^{3/2}$ -волны соответственно. Начиная с $q^2 = 10$ поправки $O(1/M)$ начинают быстро расти. Следовательно, квазистатическое приближение можно считать хорошим до энергии $\omega \leq 500$ Мэв ($W \leq 1100$ Мэв). Итак, уже в довольно грубом полюсном приближении удается получить непротиворечивое описание совокупности имеющихся данных по К π -рассеянию.

Анализ К π -рассеяния в области энергий до 1 Гэв [51]. С помощью дисперсионных уравнений (30) проверим самосогласованность $\delta_0^{1/2}$ -, $\delta_0^{3/2}$ -, $\delta_1^{1/2}$ -, $\delta_1^{3/2}$ -фаз К π -рассеяния, приведенных в докладе [34]. Фаза $\delta_1^{3/2}$ считается пренебрежимо малой. Поэтому предположим, что $\text{Im } T_1^{3/2} = 0$.

Реальные и мнимые части амплитуд $T_0^{1/2}$, $T_0^{3/2}$ и $T_1^{1/2}$ считались по экспериментально известным фазам. Найденные таким путем мнимые части парциальных амплитуд можно подставить в дисперсионные уравнения (30) и рассчитать значения реальных частей амплитуд $T_0^{1/2}$, $T_0^{3/2}$, $T_1^{1/2}$. Затем проверялось отношение

$$R = \frac{\text{Re } T_l^I \text{ теор}}{\text{Re } T_l^I \text{ эксп}} = 1$$

в интервале энергий от порога реакции $K + \pi \rightarrow K + \pi$ ($W = 0,64$ Гэв) до $W = 1$ Гэв. Выполнение условия $R = 1$ следует требовать в пределах точности экспериментальных данных по $\delta_0^{1/2}$ - и $\delta_0^{3/2}$ -фазам (см. рис. 12—14). Для больших $s^{1/2}$ - и $p^{1/2}$ -волн точность расчета R равна 20% , а для малой $s^{3/2}$ -волны — 50% . Проверка показала, что $p^{3/2}$ -волна остается всюду пренебрежимо малой (фаза $\delta_1^{3/2}$ всюду меньше 1°). При анализе К π -рассеяния было обращено внимание: 1) на возможность провести теоретический отбор одного из двух проверяемых решений для $\delta_0^{1/2}$ -фазы (см. рис. 13) и 2) на справедливость использования приближения Брайта — Вигнера в окологороговой области и, как возможное следствие этого, на несколько неестественный рост $\delta_0^{1/2}$ - и $\delta_0^{3/2}$ -фаз в той же области энергий (см. экспериментальные точки на рис. 13, а в области энергий < 800 Мэв).

Дальнейший анализ зависит от выбора асимптотического поведения фаз и от выбора значений параметров задачи (длины рассеяния, значения констант связи $g_{\pi\rho\rho}g_{\rho KK}$, $g_{\pi\rho\sigma}g_{\sigma K\bar{K}}$ и значения константы λ_1).

Down-решение для $\delta_0^{1/2}$ -фазы, если фаза не достигает значения $\pi/2$, очевидно, стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Различный ход

спадания к нулю мало меняет значения интегралов от $\text{Im } T_0^{1/2}$ в дисперсионных уравнениях (30): они в основном определяются поведением фазы $\delta_0^{1/2}$ от порога до 1 Гэв.

Для u_r — down-решения $\delta_0^{1/2}$ -фазы можно выбрать три различных варианта асимптотического поведения (рис. 19). Однако для любого из этих вариантов вклад полюсного члена $\lambda_1/(v_1^2 + v^2)$ в длину рассеяния оказывается слишком большим по сравнению с вкладами всех остальных слагаемых справа в уравнениях (30).

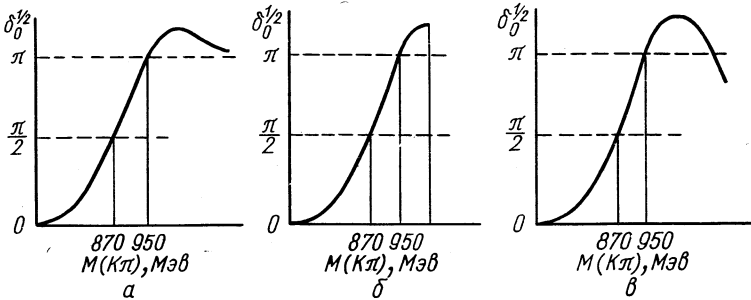


Рис. 19. Зависимость асимптотического поведения фазы $\delta_0^{1/2}$ от энергии.

Конечно, вклад далеких особенностей в длину рассеяния может быть заметным, но он не должен быть определяюще большим. Длина рассеяния $a_0^{1/2}$ зависит в основном от разности интеграла

$$J_1 = \mathcal{F} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } T_0^{1/2}(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} \tag{37}$$

и полюсного члена λ . Если фаза $\delta_0^{1/2}$ выбирается резонансной и положение резонанса лежит недалеко от порога, то величина J_1 всегда оказывается большой по сравнению с длиной рассеяния и скомпенсировать J_1 можно только за счет выбора больших значений λ . Таким образом, выбор резонансного u_r — down-решения для $\delta_0^{1/2}$ -фазы ведет искусственно к непропорционально большому вкладу далеких особенностей в область низких энергий. Большие значения λ существенно затрудняют подбор фаз $\delta_0^{1/2}$, $\delta_0^{3/2}$ и $\delta_1^{1/2}$, таких, чтобы обеспечить значение $R = 1$ всюду в области энергий до 1 Гэв. По этим причинам u_r — down-решение считается неприемлемым и далее не анализируется. Высказанные аргументы против u_r — down-решения не являются строгими, исключаящими это решение совсем, но достаточно убедительны, чтобы отказаться от него в пользу down-решения.

Для down-решения можно определить совокупность длин рассеяния и констант связи, обеспечивающих отношение $R \approx 1$

в рассматриваемой области энергий. Так, выбирая интервал возможных значений для произведения констант $1 \leq g_{\pi\rho}g_{\rho K\bar{K}}/4\pi \leq 4$ и значение $\nu_{\sigma} = 9$ ($M_{\sigma} = 890$ Мэв), можно получить соответствующий интервал для разности длин рассеяния $0,06 \leq a_0^{1/2} - a_0^{3/2} \leq 0,13$, откуда, полагая, что $a_0^{1/2} > 0$, а $a_0^{3/2} < 0$, получаем $0 \leq a_0^{1/2} \leq 0,13$ и $-0,13 \leq a_0^{3/2} \leq 0$.

В дальнейшем для определенности выбираются следующие значения длин рассеяния:

$$a_0^{1/2} = 0,08; \quad a_0^{3/2} = -0,02. \quad (38)$$

Этот выбор значений обеспечивает положительность константы $g_{\pi\rho}g_{\sigma K\bar{K}}/4\pi$ и разумную ее величину $g_{\pi\rho}g_{\sigma K\bar{K}}/4\pi \approx 1$.

Для down-решения были найдены варианты фаз $\delta_0^{1/2}$, $\delta_0^{3/2}$ и $\delta_1^{1/2}$, которые в широком интервале энергий (от 640 до 1000 Мэв) обеспечивают выполнение отношения $R \approx 1$ одновременно для всех трех фаз.

В табл. 7 приведены значения R для трех парциальных

Таблица 7

Отношения R для амплитуд $T_0^{1/2}$, $T_0^{3/2}$ и $T_1^{1/2}$

ω	$W, \text{ Гэв}$	$T_0^{1/2}$		$T_0^{3/2}$		$T_1^{1/2}$	
		R	R (для пунктирной кривой рис. 20)	R	R (для пунктирной кривой рис. 21)	R	R (для пунктирной кривой рис. 22)
1,01	0,64	1	1	1	0,89	1	1
1,31	0,69	1,13	0,95	0,7	0,43	1,14	1,91
1,91	0,82	1,18	0,83	0,65	0,14	0,94	1,09
2,33	0,91	1,12	0,72	1,03	0,11	1,03	0,96
2,91	1,05	0,97	0,32	1,70	0,32	0,99	0,90

амплитуд $T_0^{1/2}$, $T_0^{3/2}$ и $T_1^{1/2}$, описываемых фазами, приведенными на рис. 20—22 (сплошные линии). Параметры задачи имели следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} g_{\pi\rho}g_{\rho K\bar{K}}/4\pi &= 3,11; & g_{\pi\rho}g_{\sigma K\bar{K}}/4\pi &= 1,18; \\ \lambda_1/4\pi &= 0,138; & a_0^{1/2} &= 0,08; & a_0^{3/2} &= -0,02. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Для «экспериментальных» кривых (пунктирные кривые на рис. 20—22) отношение R с ростом энергии меняется неприемлемым образом (см. табл. 7, столбец R , пунктирная кривая). Чтобы

сохранить отношение $R \approx 1$, надо фазу $\delta_0^{1/2}$ уменьшить в области энергий ≤ 900 Мэв, как показано на рис. 20 (сплошная линия).

Относительно малые значения фазы $\delta_0^{3/2}$ (по сравнению с $\delta_0^{1/2}$ -фазой) получаются потому, что все интегралы в соотношениях (30),

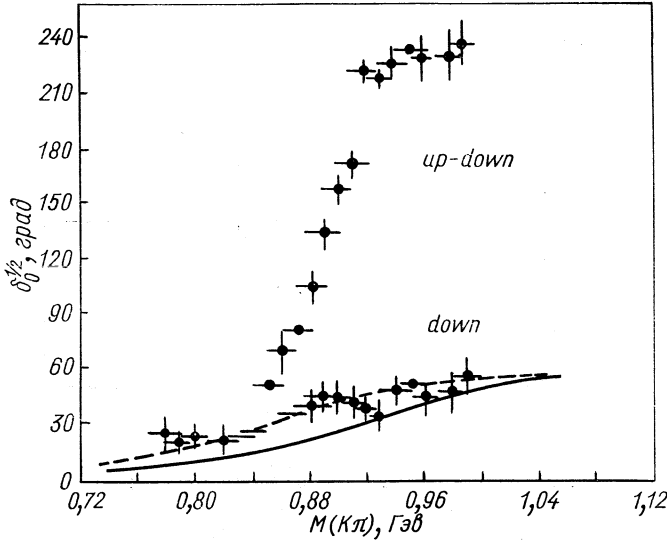


Рис. 20. Зависимость фазы $\delta_0^{1/2}$ от энергии:
 — фаза, удовлетворяющая $R \approx 1$; - - - фаза, не удовлетворяющая $R \approx 1$.

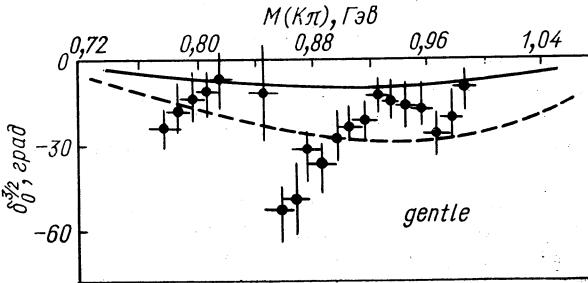


Рис. 21. Зависимость фазы $\delta_0^{3/2}$ от энергии:
 — фаза, рассчитанная методом дисперсионных соотношений и $R \approx 1$; - - - фаза, не удовлетворяющая $R \approx 1$.

за исключением интеграла $J_0^{3/2} = \mathcal{P} \int \text{Im } T_0^{3/2}(\omega') d\omega' / (\omega' - \omega)$, есть функции, медленно меняющиеся с ростом ω и большие по сравнению с $J_0^{3/2}$. Поэтому экспериментальные значения фазы

$\delta_0^{3/2}$ не могут быстро меняться, иначе отношение R окажется меньше единицы в той области энергий, в которой будет происходить быстрый рост фазы (см. пунктирную линию на рис. 21 и табл. 7). По этой причине необходимо выбирать фазу $\delta_0^{3/2}$ малой и с медленным ростом.

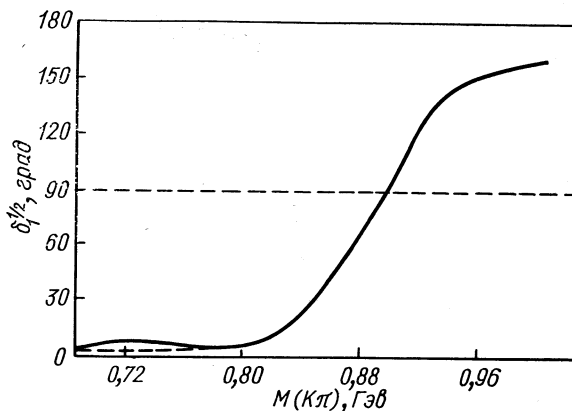


Рис. 22. Зависимость фазы $\delta_1^{1/2}$ от энергии:
 — фаза, удовлетворяющая $R \approx 1$; — — — — рассчитана по формуле Брайта — Вигнера и не удовлетворяет $R \approx 1$ в околопороговой области.

Парциальная волна $T_1^{1/2}$, которая описывается формулой Брайта — Вигнера, соответствующей K^* -мезону с массой $M_{K^*} = 890$ Мэв и шириной $\Gamma_{K^*} = 50$ Мэв, хорошо удовлетворяет отношению $R = 1$ всюду, за исключением пороговых значений. Увеличение брейт-вигнеровской кривой у порога примерно в два раза (см. сплошную кривую на рис. 22) практически не меняет значения $\text{Re } T_1^{1/2}$ теор и примерно в два раза увеличивает $\text{Re } T_1^{1/2}$ эксп, что позволяет исправить отношение R в точке $\omega = 1,31$ (см. табл. 7).

Таким образом, набор фаз $\delta_0^{1/2}$, $\delta_0^{3/2}$ и $\delta_1^{1/2}$, обозначенных на рис. 20—22 сплошными кривыми, наилучшим образом согласуется с дисперсионными уравнениями (30). Сравнение теоретически рассчитанных фаз $\delta_0^{1/2}$ и $\delta_0^{3/2}$ (сплошные линии на рис. 20, 21) с мировыми экспериментальными данными по этим же фазам приведено на рис. 23. Из рисунка видно, что фазы, полученные методом дисперсионных соотношений, хорошо согласуются с мировыми данными и значительно расходятся с фазами, рассчитанными Лавлесом по унитаризованной модели Венециано (см. рис. 18).

Продолжим анализ в область энергий выше 1 Гэв. Расчеты показывают [51], что $\text{Re } T_0^{1/2}$ в точке $\omega = 3,21$ становится отрицательной величиной [из-за изменения знака у J_1 — см. формулу

(37)]. И далее, с ростом энергии знак теоретически рассчитанной $\text{Re } T_0^{1/2}$ остается отрицательным. Если считать, что фаза $\delta_0^{1/2}$ не переходит через $\pi/2$ вблизи точки $\omega = 3,21$, то $\text{Re } T_0^{1/2}_{\text{эксп}}$ будет положительной, а отношение R становится отрицательной величиной. Чтобы сохранить величину R положительной и равной единице, необходимо или сильно уменьшить фазу $\delta_0^{1/2}$ в области $W < 1 \text{ Гэв}$ и сделать ее большой, близкой к $\pi/2$ в широком интервале энергий $W > 1 \text{ Гэв}$ (и этим самым несколько отодвинуть изменение знака у J_1 в область более высоких значений W , чем $W \approx 1,05$), или предположить, что в области $1,05 \text{ Гэв} \leq W \leq 1,2 \text{ Гэв}$ экспериментальная фаза $\delta_0^{1/2}$ проходит через $\pi/2$. Первое предположение ведет к большим противоречиям с имеющимися данными по фазе $\delta_0^{1/2}$ в области низких энергий. Практически остается единственное предположение о том, что фаза $\delta_0^{1/2}$ имеет резонансное поведение и положение резонанса лежит в области $1,05 \text{ Гэв} \leq W \leq 1,2 \text{ Гэв}$. Этот вывод согласуется с результатами работы [20] и не совпадает с результатами работы [48], в которой предполагается существование узкого резонанса в $T_0^{1/2}$ — амплитуде в области $W \sim 890 \text{ Мэв}$.

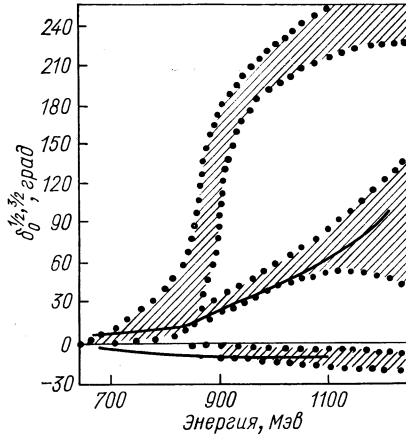


Рис. 23. Сравнение рассчитанных самосогласованных фаз $\delta_0^{1/2}$ и $\delta_0^{3/2}$ (сплошные линии) с мировыми экспериментальными данными (заштрихованные области).

Сечение процесса $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ в области низких энергий. В работах [57, 58] с помощью экстраполяционного метода Чу — Лоу были получены первые экспериментальные данные об энергетическом поведении сечений процесса рождения $K\bar{K}$ -пары] в реакции $\pi + \pi \rightarrow K + \bar{K}$ в состояниях с изотопическим спином $I = 0$ и $I = 1$. В них не было указаний на наличие S^* -резонанса, который был обнаружен позднее (см. разд. 2, п. 7 и рис. 15), но ход сечения процесса $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ для состояния с изотоп-спином $I = 0$ имел увеличение в области $W \approx 1,05 \text{ Гэв}$ (см. гистограмму на рис. 24).

На первом этапе теоретических исследований приводились некоторые результаты относительно поведения s - и p -волн процесса $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$. Так, в работе [42] была получена энергетическая зависимость поведения s -волны в области энергий $[2\mu, 4\mu]$. Вслед-

ствии использования приближения $T^{1/2} = T^{3/2}$ p -волна тождественно равна нулю.

В работе [46] были выведены уравнения для s - и p -волн процесса $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ (предполагалось, что $T^{1/2} \neq T^{3/2}$), было дано их решение в общем виде и проведен некоторый анализ этих

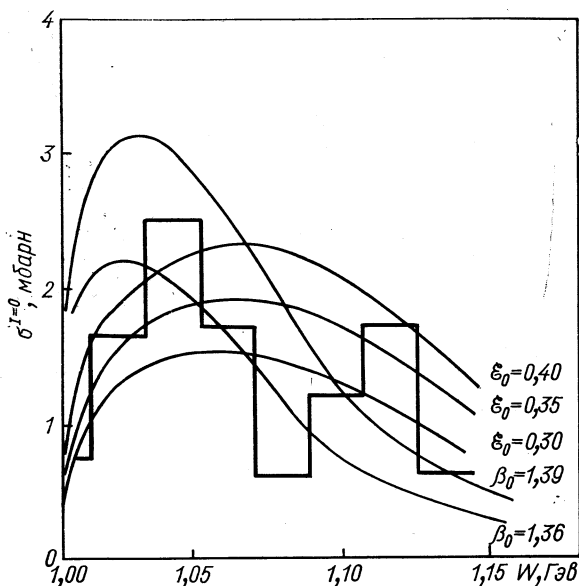


Рис. 24. Сравнение теоретически рассчитанного сечения процесса $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ в состоянии с изотоп-спином $I = 0$ (сплошные линии) с экспериментальными данными (гистограммы); $\beta_0 = \int g^2 \pi\pi \sigma / g^2 \sigma K\bar{K}$; β_0 — постоянная, учитывающая вклад высших состояний.

решений. В работе [59] расчеты по методу дисперсионных соотношений, начатые в работе [46], были доведены до сравнения с экспериментальными данными [57]. В работе [59] не ставилась цель получить точные количественные оценки использованных параметров, а лишь рассматривалась возможность качественно описать энергетический ход сечений в состояниях $I = 0$ и $I = 1$.

Фазы $\pi\pi$ -взаимодействия считались известными. Предполагалось, что p -волна имеет резонансный характер и ее параметры определяются параметрами ρ -мезона, а для s -волны рассматривались два варианта: нерезонансная и резонансная s -волна (с учетом σ -мезона). Дисперсионные уравнения для парциальных ампли-

туд имеют вид:

$$T_l^I(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{q'}{8\pi W'} \cdot \frac{T_l^I(\nu') \Pi_l^{I*}(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\nu_L} \frac{g_l^I(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu', \quad (40)$$

где W' — полная энергия в системе центра инерции лл-или $K\bar{K}$ -систем; $W^2 = 4(\nu + \mu^2) = 4(p^2 + M^2)$; $\nu = q^2$ — квадрат импульса лл-мезона;

$$\text{Im } T_l^I(\nu) = \frac{q}{8\pi W} T_l^I(\nu) \Pi_l^{I*}(\nu);$$

$\Pi_l^I(\nu)$ — амплитуда лл-рассеяния; $g_l^I(\nu')$ — скачок на левом разрезе, который можно вычислить явно в некоторых предположе-

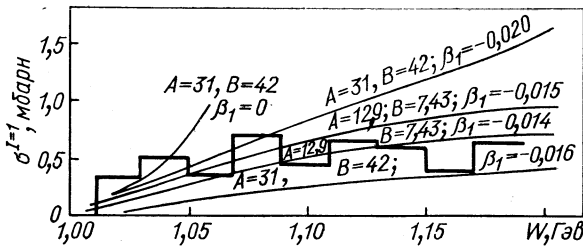


Рис. 25. Сравнение теоретически рассчитанного сечения (сплошные линии) с экспериментальными данными (гистограмма);

$$A = 12 \frac{g^2 K \pi K^*}{g^2 \text{ ллр}}; \quad B = 36 \left(\frac{g^2 \text{ ллр}}{4\pi} \right)^{-2};$$

β_1 — постоянная, учитывающая вклад высших состояний.

ниях. Если функции $g_l^I(\nu')$ и $\Pi_l^I(\nu)$ известны, то нахождение амплитуды $T_l^I(\nu)$ сводится к решению неоднородной краевой задачи Римана [60, 61]:

$$T_l(\nu + i0) = G_l(\nu) T_l(\nu - i0) + 2ig_l(\nu),$$

где коэффициент задачи Римана $G_l(\nu)$ определяется выбором фаз лл-рассеяния. Неоднородный член задачи Римана $g_l(\nu)$ ищется в предположении, что процесс рассеяния лл \rightarrow лл осуществляется обменом K^* -мезоном.

На рис. 24 приводится сравнение рассчитанного сечения процесса лл \rightarrow $K\bar{K}$ в состоянии с изотоп-спином $I = 0$ (сплошные линии) с экспериментальными данными [57] (гистограмма). Параметром ξ_0 помечены кривые, которые рассчитывались в предположении, что s-волна лл-рассеяния имеет резонансный характер;

параметром β отмечены кривые, соответствующие нерезонансному характеру s -волны $\pi\pi$ -рассеяния. Согласие расчетных кривых с экспериментальными данными улучшается, если учитывается вклад далеких особенностей.

На рис. 25 дано сравнение теоретического сечения $\sigma^{I=1}(\pi\pi \rightarrow K\bar{K})$, изображенного набором сплошных линий, с экспериментальными данными [57] (гистограмма). Как и в случае s -волны, здесь необходимо учитывать вклад высших состояний.

В теоретические расчеты легко можно включить S^* -резонанс через $\text{Im } T_0^0$. Однако в отсутствие более полных экспериментальных данных для процесса $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ более подробные теоретические расчеты пока не имеют смысла.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с максимальной полнотой дан обзор экспериментальных данных по $K\pi$ -взаимодействию. Что касается обзора теоретических работ, то он включает далеко не все работы, посвященные проблеме $K\pi$ -взаимодействия. Автор считал необходимым включить в обзор те работы, которые тесно связаны с фазовым анализом процессов $K\pi$ -рассеяния и $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ -аннигиляции. В приведенных здесь теоретических работах эти вопросы рассмотрены наиболее полно и доведены до сравнения с последними экспериментальными данными.

В обзоре показано, что метод дисперсионных соотношений полно и хорошо описывает данные по $K\pi$ -взаимодействию. Унитаризованная модель Венециано нуждается в серьезных улучшениях. По существу еще не начинался фазовый анализ процесса аннигиляции $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$. Здесь предстоит интересная исследовательская работа.

Наступает период, когда было бы важно решить совместно проблему πN - и $K N$ -рассеяния с учетом $\pi\pi$ - и πK -взаимодействия методом дисперсионных соотношений. Эта проблема сводится к решению очень сложной системы нелинейных интегральных сингулярных уравнений. Однако с помощью ЭВМ можно уже сейчас пытаться решать эту задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chew G. F., Low F. E. Phys. Rev., 1959, 113, 1640.
2. Ferrari E., Selleri F. Nuovo cimento, 1961, 21, 1028.
3. Ferrari E., Selleri F. Suppl. Nuovo cimento, 1962, 24, 453.
4. Ferrari E., Selleri F. Nuovo cimento, 1963, 27, 1450.
5. Amaldi U. Jr., Biancastelli R., Francaviglia S. Nuovo cimento, 1967, 47A, 85.
6. Сусленко В. К., Кочкин В. И. Сообщения ОИЯИ, P2-5572, 1971.
7. Durr H. P., Pilkun H. Nuovo cimento, 1965, 40, 899.

8. Wolf G. Phys. Rev. Lett., 1967, 19, 925.
- 9.a) Colton E., Schlein P. In: Proc. of Conference on the $\pi\pi$ - and $K\pi$ -interactions, Argonne National Laboratory, 1969. Ed. by F. Loeffler and E. Malamud. Argonne National Laboratory, Argonne, 1969, p. 1; Schlein P. Ibid., p. 446. б) Henri V. P. Ibid., p. 487.
10. Gellert E. e.a. Phys. Rev. Lett., 1966, 17, 884.
11. Trippe T. G. Recent experimental studies of the $K\pi$ -interaction. Preprint LBL-763, december, 1971.
12. Urvater E. e. a. Phys. Rev. Lett., 1967, 18, 1156.
13. Kirshbaum A. e.a. Phys. Rev., 1971, D4, 3254.
14. a) Proceedings of the XV Intern. Conf. «Naukova Dumka» Publishers, Kiev, 1972, p. 700, статья 12.
б) Jongejans B., Voorthuis H. On the s and P wave Phase Shifts of the $I = 3/2 K\pi$ Elastic Scattering, Amsterdam-Nijmegen collaboration preprint, 1971. Submitted to Bologna Conference.
15. a) Bakker A. M. e.a. Nucl. Phys., 1970, B24, 211.
б) Bakker A. M. Information on the s -and P -wave $I = 3/2 K\pi$ -Phase Shifts, SABRE Collaboration preprint, 1971. Submitted to Bologna Conference.
16. Cho Y. e.a. Phys. Lett., 1970, 32B, 409.
17. Antich P. e.a. Nucl. Phys., 1971, B29, 305.
18. Whitmore J. e.a. Bull. Amer. Phys. Soc., 1971, 16, 547.
19. De Baere W. e.a. Nucl. Phys., 1969, B14, 425.
20. Trippe T. G. e.a. Phys. Lett., 1968, B28, 203.
21. Bingham H. H. e.a. Nucl. Phys., 1972, 41B, 1.
22. См. [9], Antich P. e.a. p. 508.
23. См. [14a], с. 699, № 11.
24. Firestone A., Goldhaber G., Lissauer D. Phys. Rev. Lett., 1971, 26, 1460.
25. Yuta H. e. a. Phys. Rev. Lett., 1971, 26, 1502.
26. Abrams G. S. e.a. Phys. Rev., 1970, D1, 2433.
27. Ferro-Luzzi M. e.a. Nuovo cimento, 1965, 10, 417.
28. George R. e.a. Nuovo cimento, 1967, 49, 9.
29. Forman B. e.a. Phys. Rev., 1967, D3, 2610.
30. Fu C. e.a. Nucl. Phys., 1970, B18, 93.
31. См. [14a], с. 699, № 23.
32. Barnham K. J. e.a. Nucl. Phys., 1970, B25, 49.
33. См. [14a], с. 699, № 2; Ferbel T. e.a. Phys. Rev. Lett., 1971, 26, 344.
34. Henri V. P. $K\pi$ -Interaction, Preprint CERN/D. Ph. 11/Phys., 71—23, 1971.
35. См. [9], Dietl H. e.a. p. 529.
36. Исаев П. С. «Ядерная физика», 1970, 12, 389; Препринт ОИЯИ, P2-4375, 1969.
37. Исаев П. С., Мещеряков В. А. ЖЭТФ, 1962, 43, 1339.
38. Исаев П. С. «Роль $\pi\pi$ -взаимодействия в процессах πK - и πN -рассеяния». В кн.: Материалы 1-го международного совещания по NV - и πN -взаимодействию. Дубна, 11—15 июня 1968. Препринт P1-3974, 1971.
39. Широков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967, гл. 1, § 1.
40. а) Исаев П. С., Лендъел В. И., Мещеряков В. А. ЖЭТФ, 1963, 45, 294.
б) Isaev P. S., Lend'I V. I., Meshcheryakov V. A. Proc. of Intern. Conf. at Stanford University, University Press, Stanford, 1963, p. 145.
41. Okubo S. Phys. Rev., 1960, 118, 357.
42. Lee B. M. Phys. Rev., 1960, 120, 325.
43. Gourdin M., Noirot Y., Salin Ph. Nuovo cimento, 1960, 18, 651.
44. Isaev P. S., Severynski V. M. Nucl. Phys., 1961, 22, 663.
45. Isaev P. S., Severynski V. M. Nucl. Phys., 1961, 27, 148.
46. Исаев П. С., Сэвэрыйнский М. В. В кн.: Тр. VII международной конф-

- ренции по вопросам физики высоких энергий. София, Болгария, 14—22 сентября 1961. София, с. 91.
47. Veneziano G. *Nuovo cimento*, 1968, 57A, 190.
 48. Lovelace C. $\pi\pi$ -, $K\pi$ -, $K\bar{K}$ -phase shifts and their off-shell dependence from unitarised Veneziano formula, Preprint CERN, Ref. TH. 1041-CERN, 1969. (См. также ссылка [9] доклад С. Lovelace.)
 49. Серебряков В. В., Ширков Д. В. В сб.: Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра. Т. 1, вып. 1. М., Атомиздат, 1970, с. 172.
 50. Исаев П. С. Сообщение на сессии отделения ядерной физики АН СССР, Ленинград, 27—30 мая 1968.
 51. а) Isaev P. S., Khleskov V. I. Preprint E2-6525, Dubna, 1971.
б) Исаев П. С., Хлесков В. И. «Ядерная физика», 1973, 17, 163.
 52. Chew G., Mandelstam S. *Phys. Rev.*, 1960, 119, 467.
 53. Efremov A. V., Tzu H., Shirkov D. V., *Scientia Sinica*, 1961, 10, 312.
 54. Серебряков В. В., Ширков Д. В. «Ядерная физика», 1967, 6, 400.
 55. Wanders G. *Nuovo cimento*, 1962, 23, 817.
 56. Мещеряков В. А. Препринт Р-3369, ОИЯИ, Дубна, 1965; «Докл. АН СССР», 1967, 174, 1054; *Phys. Lett.*, 1967, 24B, 63.
 57. Erwin A. R. e.a. *Phys. Rev. Lett.*, 1962, 9, 34.
 58. Alexander G. e.a. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, 9, 460.
 59. Исаев П. С., Матвеев В. А. «Ядерная физика», 1966, 4, 198.
 60. Мухелишвили Н. И. Интегральные сингулярные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
 61. Гахов Ф. Д., Краевые задачи. М., Физматгиз, 1962.