«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1973, том 4, вып. 4

УДК 539.142.2+539.142.3

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Ф. Филиппов

Институт теоретической физики АН УССР

Изложены основные положения метода обобщенных гиперсферических функций, позволяющего изучать структуру связанных состояний атомных ядер. Базис обобщенных гиперсферических функций $(A-1)$-мерного пространства использован для выделения коллективных движений в системе A нуклонов и построения волновых уравнений коллективных возбуждений.

A method of generalized hyperspherical functions which makes it possible to study the structure of nuclear bound states is presented. The basis of hyperspherical distributions of a $(A-1)$ dimensional space is used to extract collective motion in a system of A nucleons and construct wave equations for collective excitations.

ВВЕДЕНИЕ

Модель оболочек и коллективная модель Бора — Моттельсона [1, 2] относятся к числу наиболее интенсивно эксплуатируемых сейчас моделей структуры атомного ядра. Даже при поверхностном сопоставлении названных моделей обнаруживается, что в их основу заложены прямо противоположные концепции. Если при построении модели оболочек исходят из предположения о независимом движении нуклонов в самосогласованном поле, то согласно коллективной модели в результате сильной корреляции в нуклонном движении у атомных ядер проявляются четко выраженные коллективные степени свободы. Чтобы примирить эти противоречивые концепции, обычно обращаются к представлению о независимом движении нуклонов в несферическом самосогласованном поле [3], что позволяет связать коллективные степени свободы с параметрами, характеризующими деформированное поле. К сожалению, такая точка зрения, простая и физически очень наглядная, приводит к появлению лишних переменных.

В принципе лишние переменные можно устранить или введением связи на координаты нуклонов, или проектированием волновой функции на состояния с определенным значением момента количества движения. Однако при технической реализации и той, и другой возможности приходится иметь дело с неоправданно громоздкими вычислениями и от первоначальной простоты подхода ничего не остается. Поэтому остаются актуальными поиски объединения идей модели оболочек и коллективной модели на основе, приемлемой для практических расчетов. Причем задача состоит не только в построении рационального приближения, гармонично сочетающего коллективный и одночастичный аспекты нуклонного движения в ядрах, но и в определении пути, на котором можно осуществить постепенный переход от этого приближения к точному описанию.

Приступая к обсуждению поставленной задачи, прежде всего попытаемся установить, какие результаты коллективной модели и модели оболочек необходимо принять во внимание при синтезировании этих моделей.

Главный успех коллективной модели заключается в интерпретации явлений, обусловленных несферичностью атомных ядер [4, 5]. Интерпретация оказалась возможной на основе предложенных О. Бором [1] динамических уравнений малых колебаний формы поверхности ядер. Сами уравнения были заимствованы им из гидродинамики и к атомному ядру применены благодаря отмеченной ранее Н. Бором и Уилером аналогии в движении нуклонов ядра и молекул капли несжимаемой жидкости. Поначалу кинематические параметры уравнений модели выбирались такими, каких требует гидродинамический вывод, а силовые константы приводились в соответствие с поверхностной энергией в формуле Вайцзеккера. Однако очень скоро стало ясно, что такой способ подбора параметров не отвечает экспериментальным данным, и феноменологические параметры модели стали задавать, опираясь на эксперимент по нижайшим коллективным возбуждениям [5]. Этот второй способ задания параметров модели, впрочем, как и в первый, нельзя признать свободным от произвола. Нуждается в более тщательном выводе на основе многочастичного уравнения Шредингера и само динамическое уравнение коллективной модели, тем более, что оно справедливо только для малых деформаций, а на опыте деформации не всегда малы. Наконец, динамические переменные модели также требуют микроскопической интерпретации: должна быть установлена их связь с координатами отдельных нуклонов.

Что же касается модели оболочек, то предположение о независимом движении нуклонов позволило в рамках этой модели сформулировать простой и эффективный метод построения антисимметричной фермионной волновой функции. Этот метод является самым конструктивным элементом модели оболочек, и его значение для решения практических задач ядерной физики трудно переоценить. Спрашивается, можно ли, сохранив конструктивность метода, ослабить предположение о независимости движения нуклонов? Ответ оказывается положительным.

Волновые функции модели оболочек относятся к предельному случаю системы независимых частиц и учитывают только те корреляции в движении нуклонов, которые связаны с принципом Паули, а также с требованием, чтобы волновая функция системы нуклонов соответствовала состояниям с определенными значениями полного момента количества движения и определенной четностью. Если используются одночастичные функции нуклонов в осцилляторном поле, то в рамках модели оболочек удается учесть и корреляции, обусловленные выделением движения центра инерции системы нуклонов. Все перечисленные корреляции носят кинематический характер и в отличие от динамических не имеют непосредственного отношения к силам, действующим между нуклонами. Частичный учет динамических корреляций был сделан с помощью метода K-гармоник [6].

Если волновые функции модели оболочек построены на осцилляторном базисе, то каждую из них можно представить в виде произведения гиперсферической функции на функцию от «глобального» радиуса, причем одной и той же гиперсферической функции соответствует бесконечное число функций модели оболочек, отличающихся лишь зависящим от глобального радиуса множителем.

Основная задача метода K-гармоник состоит в уточнении этого множителя и, следовательно, в замене той функциональной зависимости от глобального радиуса, которую предлагает модель оболочек, зависимостью, более приспособленной к действующим между нуклонами силам.

Если при последовательном применении модели оболочек волновую функцию ядра представляют в виде разложения по полному набору антисимметризованных одночастичных функций, а коэффициенты разложения находят диагонализацией гамильтониана системы нуклонов, то в методе K-гармоник разложение осуществляют по гиперсферическим функциям и сводят задачу к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для функций от глобального радиуса.

Уточнение функциональной зависимости от глобального радиуса позволяет обнаружить и описать динамические корреляции, связанные с объемными колебаниями ядер. Что же касается динамических корреляций, приводящих к колебаниям формы поверхности ядра, то их учет методом K-гармоник, так же как и с помощью сферическисимметричного осцилляторного базиса модели оболочек, требует привлечения очень большого числа базисных функций.

Эффективного описания поверхностных коллективных движений в системе A нуклонов можно достигнуть с помощью базиса обобщенных гиперсферических функций в n-мерном пространстве, где $n = A - 1$.

Напомним, что гиперсферические функции для системы A нуклонов порождаются оператором вращения в $3n$-мерном пространстве и классифицируются в зависимости от значения полного орбитального момента системы (L), представления группы перестановок (схемы Юнга) и момента в $3n$-мерном пространстве (числа K). При вращении в $3n$-мерном пространстве движение происходит вдоль поверхности $3n$-мерной сферы, радиус которой (глобальный радиус) ρ. Можно, однако, рассматривать более узкий класс движений, происходящих вдоль поверхности $3n$-мерного эллипсоида инерции и оставляющих неизменными ориентацию и величину его главных полуосей a, b, c. Эти движения можно представить как вращение трех взаимно перпендикулярных векторов n-мерного пространства:

$$\overset{>}{A}_\xi = \{a_{1\xi},\ a_{2\xi},\ \ldots,\ a_{n\xi}\};$$
$$\overset{>}{A}_\eta = \{a_{1\eta},\ a_{2\eta},\ \ldots,\ a_{n\eta}\};\quad \overset{>}{A}_\zeta = \{a_{1\zeta},\ a_{2\zeta},\ \ldots,\ a_{n\zeta}\}.$$

Компоненты первого вектора суть ξ-е проекции векторов Якоби в системе координат, оси которой ξ, η, ζ совпадают с главными осями эллипсоида инерции; компоненты второго вектора суть η-е проекции векторов Якоби в той же системе и т. д.; n-мерные векторы ортогональны в силу определения системы координат, связанной с главными осями эллипсоида инерции:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k\xi}a_{k\eta} = 0;\quad \sum_{k=1}^{n} a_{k\xi}a_{k\zeta} = 0;\quad \sum_{k=1}^{n} a_{k\eta}a_{k\zeta} = 0.$$

Полезно отметить, что при перестановке частиц тройка n-мерных векторов совершает поворот в n-мерном пространстве без изменения своей длины. При некоторых перестановках поворот сопровождается отражением. Ориентация этой тройки векторов в n-мерном пространстве задается $3\,(n-2)$ углами, которые можно выбрать в качестве динамических переменных задачи A тел наряду с тремя главными полуосями эллипсоида инерции и тремя углами Эйлера (φ, θ, ψ), определяющими ориентацию в обычном трехмерном пространстве главных осей эллипсоида инерции.

Особое значение для последующих построений будет иметь тот репер n-мерного пространства (назовем его привилегированным), у которого один из ортов направлен вдоль вектора $\overset{>}{A}_\xi$, второй — вдоль вектора $\overset{>}{A}_\eta$ и третий — вдоль вектора $\overset{>}{A}_\zeta$. Преимущество этой системы ортов обусловлено возможностью очень просто выразить скорость изменения любого из векторов $\vec{A}_\xi$, $\vec{A}_\eta$, $\vec{A}_\zeta$ через угловые скорости их вращения Ω_{sl} в плоскостях выбранного репера:

$$\dot{\vec{A}}_\xi = \{a\Omega_{A-3,1}\ a\Omega_{A-3,2},\ \ldots,\ a\Omega_{A-3,A-4},\ \dot{a},\ a\Omega_{A-3,A-2},\ a\Omega_{A-3,A-1}\};$$

$$\dot{\vec{A}}_\eta = \{b\Omega_{A-2,1},\ b\Omega_{A-2,2},\ \ldots,\ b\Omega_{A-2,A-4},\ b\Omega_{A-2,A-3},\ \dot{b},\ b\Omega_{A-2,A-1}\};$$

$$\dot{\vec{A}}_\zeta = \{c\Omega_{A-1,1},\ c\Omega_{A-1,2},\ \ldots,\ c\Omega_{A-1,A-4},\ c\Omega_{A-1,A-3},\ c\Omega_{A-1,A-2},\ \dot{c}\},$$

где a, b, c — длины векторов $\vec{A}_\xi$, $\vec{A}_\eta$ и $\vec{A}_\zeta$; $\Omega_{sl} = -\Omega_{ls}$ — угловая скорость вращения в плоскости (sl).

Наряду с угловыми скоростями вращения в A — 1-мерном пространстве целесообразно ввести момент количества движения в этом пространстве J вместе с его проекциями J_{sl}, соответствующими плоскостям (sl). По определению, проекция момента количества движения J_{sl} является величиной, канонически сопряженной углу поворота в плоскости (sl). Как и Ω_{sl}, компоненты J_{sl} можно выразить через углы, задающие ориентацию привилегированного репера в A — 1-мерном пространстве, и производные по времени от этих углов.

Уже в трехмерном пространстве проявляется нетождественность момента количества движения точки (одномерной системы) и момента количества движения волчка: вращение точки целиком определяется двумя углами и проекция ее момента количества движения на ось, проходящую через точку и начало координат, равна нулю, в то время как вращение волчка характеризуется тремя углами, и все три проекции момента на собственные оси волчка отличны от нуля. Подобно этому в n-мерном пространстве можно говорить о моменте количества движения точки (одномерной системы), двумерного волчка, трехмерного волчка и т. д. Момент количества движения интересующей нас трехмерной системы (трех ортогональных n-мерных векторов) имеет $3n$ отличные от нуля проекции на плоскости привилегированного репера и в этом отношении отличается от момента количества движения n-мерного волчка.

Компонентам момента количества движения J_{sl} можно поставить в соответствие операторы $\hat{J}_{sl}$, совпадающие с генераторами группы вращений n-мерного пространства. Выразим через них оператор кинетической энергии системы A тождественных частиц [7—9]:

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{A-4}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{c^2-a^2}\right) 2a\frac{\partial}{\partial a} + \right.$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{A-4}{b}\cdot\frac{\partial}{\partial b} + \left(\frac{1}{b^2-c^2} - \frac{1}{a^2-b^2}\right) 2b\frac{\partial}{\partial b} +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial c^2}+\frac{A-4}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial c}+\left(\frac{1}{c^2-a^2}-\frac{1}{b^2-c^2}\right)2c\frac{\partial}{\partial c}-$$
$$-\sum_{s=1}^{A-4}\left(\frac{1}{a^2}\hat{J}^2_{s,\,n-2}+\frac{1}{b^2}\hat{J}^2_{s,\,n-1}+\frac{1}{c^2}\hat{J}^2_{s,\,n}\right)-$$
$$-\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}(\hat{I}^2_\xi+\hat{I}^2_{n-1,\,n})-\frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2}(\hat{I}^2_\eta+\hat{I}^2_{n,\,n-2})-$$
$$-\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}(\hat{I}^2_\zeta+\hat{J}^2_{n-2,\,n-1})-\frac{4ab}{(b^2-c^2)^2}\hat{I}_\xi\hat{J}_{n-1,\,n}-$$
$$-\frac{4ca}{(c^2-a^2)^2}\hat{I}_\eta\hat{J}_{n,\,n-2}-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\hat{I}_\zeta\hat{J}_{n-2,\,n-1}\Big\}.$$

Переменные a, b, c изменяются в области, определяемой неравенствами $0<a<\infty$, $0<b<\infty$, $0<c<\infty$. Элемент объема в этой области имеет вид: $|a^2-b^2|\,|b^2-c^2|\,|c^2-a^2|\,(abc)^{A-4}\times\times dadbdc$. Переменные a, b, c, определяя мгновенное значение главных полуосей эллипсоида инерции, характеризуют распределение масс нуклонов ядра в пространстве. Эти переменные приспособлены для описания объемных и поверхностных колебаний эллипсоида инерции. Колебания поверхности эллипсоида инерции можно сопоставить квадрупольным колебаниям поверхности ядра в коллективной модели Бора — Моттельсона. Такое сопоставление позволяет относить многие представления коллективной модели не к поверхности ядра, а к поверхности его эллипсоида инерции и, следовательно, распространить коллективную модель на легкие ядра, у которых, в отличие от тяжелых ядер, нет четко выраженной поверхности, но имеется, как и у тяжелых ядер, эллипсоид инерции. Позже будут приведены соотношения, устанавливающие формальное соответствие между переменными a, b, c и переменными β, γ коллективной модели.

Собственные функции оператора момента количества движения в n-мерном пространстве: $\hat{J}^2=\sum\limits_{s<l}\hat{J}^2_{sl}$, $1\leqslant s$, $l\leqslant n$, по аналогии с обобщенными сферическими функциями Вингера уместно назвать обобщенными гиперсферическими функциями. Среди них в дальнейшем нас будут интересовать лишь те, которые соответствуют нулевым собственным значениям всех операторов $\hat{J}_{sl}$, $1\leqslant s$, $l\leqslant A-4$ не участвующих явно в выражении оператора кинетической энергии, поскольку именно эти обобщенные гиперсферические функции, как и волновая функция системы A-частиц, инвариантны относительно поворотов в плоскостях (sl), где $1\leqslant s$, $l\leqslant\leqslant A-4$.

Волновую функцию системы A-частиц можно представить в виде ряда по обобщенным гиперсферическим функциям. В частности, обратившись к волновым функциям модели оболочек, построенным на осцилляторном базисе, нетрудно усмотреть, что каждая из них является линейной комбинацией некоторого числа собственных функций оператора $\hat{J}^2$, причем коэффициенты линейной комбинации зависят от переменных a, b, c и от углов Эйлера φ, θ, ψ. Уточнение функциональной зависимости этих коэффициентов от a, b, c по сравнению с той зависимостью, которую дает модель оболочек, позволяет приближенно передать как объемные, так и поверхностные динамические корреляции в движении нуклонов. Задача описания объемных и поверхностных корреляций сводится тогда к нахождению зависящих от a, b, c функций, что достигается решением уравнений типа уравнения Бора — Моттельсона.

1. ДЕКАРТОВЫ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРОВ ЯКОБИ В СИСТЕМЕ ЭЛЛИПСОИДА ИНЕРЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ УГЛЫ ЭЙЛЕРА

Компоненты трех взаимно перпендикулярных векторов $\vec{A}_\xi = \vec{A}^{(1)}$, $\vec{A}_\eta = \vec{A}^{(2)}$, $\vec{A}_\zeta = \vec{A}^{(3)}$ n-мерного пространства можно выразить через обобщенные углы Эйлера. Эти углы, следуя Виленкину [10], введем как параметры вращения в n-мерном эвклидовом пространстве.

Пусть совокупность векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ образует ортонормированный базис. Тогда вектора $\vec{A}^{(i)}$ можно представить в виде разложения

$$\vec{A}^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\vec{e}_k. \tag{1}$$

При повороте системы координат совершается переход от базисных векторов $\vec{e}_m$ к векторам $\vec{e}'_m$:

$$\vec{e}'_m = g\vec{e}_m = \sum_k g_{km}\vec{e}_m. \tag{2}$$

Предположим, что осуществляется поворот системы координат на угол θ в плоскости (l, k) в направлении от вектора $\vec{e}_l$ к вектору $\vec{e}_k$. В результате такого поворота орты $\vec{e}_l$ и $\vec{e}_k$ перейдут в новые:

$$g^{l\to k}(\theta)\,\vec{e}_l = \cos\theta\vec{e}_l + \sin\theta\vec{e}_k; \quad g^{l\to k}(\theta)\,\vec{e}_k = -\sin\theta\vec{e} + \cos\theta\vec{e}_k,$$

а остальные не изменятся:

$$g^{l\to k}(\theta)\,\vec{e}_m = \vec{e}_m, \quad m \neq l, k.$$

Произвольное вращение системы координат в n-мерном евклидовом пространстве можно представить в виде:

$$g = G^{(n-1)} G^{(n-2)} \ldots G^{(1)}, \tag{3}$$

где

$$G^{(l)} = g^{1\to 2}(\theta_1^{n-l})\, g^{2\to 3}(\theta_2^{n-l+1}) \ldots g^{l\to l+1}(\theta_l^{n-1}), \tag{4}$$

а обобщенные углы Эйлера θ_j^k изменяются в пределах:

$$0 \leqslant \theta_j^k \leqslant (1 + \delta_{j,1})\,\pi. \tag{5}$$

Преобразование (3) содержит в общем случае $n(n-1)/2$ обобщенных углов Эйлера. Пусть, однако, в n-мерном евклидовом пространстве имеются три взаимно ортогональных вектора, ориентированных в некоторой исходной системе координат произвольным образом. Тогда вращение системы координат, ориентирующее оси n, $n-1$ и $n-2$ новой координатной системы (ее ранее называли привилегированной) вдоль направлений этих векторов, можно представить в виде преобразования:

$$G = G^{(n-1)}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})\, G^{(n-2)}(\theta_1', \ldots, \theta_{n-2}') \times$$
$$\times\, G^{(n-3)}(\theta_1'', \ldots, \theta_{n-3}''), \tag{6}$$

содержащего $3n-6$ параметров — углов Эйлера. Повороты $G^{(i)}$, где $i < n-3$, не затрагивают орты $\vec{e}_n$, $\vec{e}_{n-1}$, $\vec{e}_{n-2}$, поэтому отвлекаемся от них.

Теперь положим:

$$\vec{A}^{(i)} = a^{(i)} G \vec{e}_{n-3+i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad a^{(1)} = a, \; a^{(2)} = b, \; a^{(3)} = c. \tag{7}$$

Из (1) следует, что $a_{k,i}$ трех взаимно перпендикулярных n-мерных векторов выражаются через матричные элементы матрицы G:

$$a_{k,i} = a^{(i)} G_{k,\,n-3+i}(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_1', \ldots, \theta_{n-2}', \theta_1'', \ldots, \theta_{n-3}''), \tag{8}$$

т. е. через $3A-9$ обобщенных углов Эйлера, что и решает поставленную в начале этого параграфа задачу.

Заметим еще, что

$$G_{k,s} = \sum_{lm} G_{kl}^{(n-1)} G_{lm}^{(n-2)} G_{ms}^{(n-3)}. \tag{9}$$

Но для матричных элементов $G^{(l)}$ справедливы следующие выражения:

$$G_{k,m}^{(l)}(\theta_1, \ldots, \theta_l) = \delta_{km}, \quad \text{если } m > l+1;$$

$$G_{k,l+1}^{(l)}(\theta_1, \ldots, \theta_l) = \begin{cases} (-1)^{l+1-k}\, \varepsilon_{k,l+1}(\theta_1, \ldots, \theta_l), & m = l+1, k \leqslant l+1; \\ 0, & m = l+1, k > l+1; \end{cases}$$

$$G^{(l)}_{k,\,m}(\theta_1,\,\ldots,\,\theta_l) = \\ = \begin{cases} (-1)^{m+1-k}\varepsilon_{k,\,m+1}(\theta_1,\,\ldots,\,\theta_{m-1},\,\theta_m-\pi/2), & m\leqslant l,\ k\leqslant m+1; \\ 0, & m\leqslant l,\ k>m+1, \end{cases}$$

где функция $\varepsilon_{km}(\theta_1,\,\ldots,\,\theta_{m-1})$ совпадает с выраженной в гиперсферических координатах k-й декартовой компонентой единичного вектора в m-мерном пространстве $(m>1)$:

$$\varepsilon_{1,\,m}(\theta_1,\,\ldots,\,\theta_{m-1}) = \sin\theta_{m-1}\sin\theta_{m-2}\,\ldots\,\sin\theta_2\sin\theta_1;$$

$$\varepsilon_{k,\,m}(\theta_1,\,\ldots,\,\theta_{m-1}) = \sin\theta_{m-1}\sin\theta_{m-2}\,\ldots\,\sin\theta_k\cos\theta_{k-1},\ m-1\geqslant k\geqslant 2;$$

$$\varepsilon_{m,\,m}(\theta_1,\,\ldots,\,\theta_{m-1}) = \cos\theta_{m-1}.$$

2. ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ МАГИЧЕСКИХ ЯДЕР В ПРИБЛИЖЕНИИ ОСЦИЛЛЯТОРНОЙ МОДЕЛИ ОБОЛОЧЕК

Итак, пусть a, b, c — полуоси эллипсоида инерции системы A нуклонов, φ, θ, ψ — углы Эйлера, определяющие ориентацию главных осей эллипсоида инерции, а α_i — обобщенные углы Эйлера в пространстве A — 1-измерений, задающие в этом пространстве направление трех единичных взаимно перпендикулярных векторов. Тогда в приближении осцилляторной модели оболочек волновую функцию основного состояния магического ядра можно представить в виде [11]:

$$\Psi_{0K}(a,\,b,\,c;\,\alpha_i,\,\sigma_i,\,\tau_i) = C_K(abc)^K\exp\left(-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\chi_K(\alpha_i,\,\sigma_i,\,\tau_i), \tag{10}$$

где C_K — нормировочная константа:

$$C_K^2 = \frac{64\sqrt{\pi}}{\Gamma(A+2K-1/2)\,\Gamma((A+2K-2)/2)\,\Gamma(A+2K-3)/2)}, \tag{11}$$

K — квантовое число, следующим образом связанное с числом нуклонов в ядре A и номером последней заполненной осцилляторной оболочки m:

$$K = mA/4 = [m(m+1)(m+2)(m+3)]/6, \tag{12}$$

а $\chi_K(\alpha_i,\,\sigma_i,\,\tau_i)$ — антисимметричная относительно перестановки координат любой пары нуклонов и нормированная на единицу функция спин-изоспиновых переменных $(\sigma_i,\,\tau_i)$ и обобщенных углов Эйлера A — 1-мерного пространства (α_i).

Среди возбужденных состояний магического ядра можно выделить такие, у которых волновые функции, подобно (10), представимы в виде произведения

$$\Psi_{\Lambda LMK}(a,\,b,\,c,\,\varphi,\,\theta,\,\psi;\quad \alpha_i,\,\sigma_i,\,\tau_i) = \\ = \Phi_{\Lambda LMK}(a,\,b,\,c,\,\varphi,\,\theta,\,\psi)\,\chi_K(\alpha_i,\,\sigma_i,\,\tau_i). \tag{13}$$

Эти функции отличаются от волновой функции основного состояния лишь множителем, содержащим коллективные координаты a, b, c, φ, θ, ψ. Квантовые числа L и M задают значения полного орбитального момента количества движения системы и его проекции на выделенную ось, а квантовое число Λ характеризует возбуждения, связанные с переменными a, b, c.

Функции $\Phi(a, b, c, \varphi, \theta, \psi)$ удовлетворяют уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{A-4}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial a}+\left(\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{c^2-a^2}\right)2a\frac{\partial}{\partial a}-\frac{K(A+K-5)}{a^2}+\right.$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial b^2}+\frac{A-4}{b}\cdot\frac{\partial}{\partial b}+\left(\frac{1}{b^2-c^2}-\frac{1}{a^2-b^2}\right)2b\frac{\partial}{\partial b}-\frac{K(A+K-5)}{b^2}+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial c^2}+\frac{A-4}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial c}+\left(\frac{1}{c^2-a^2}-\frac{1}{b^2-c^2}\right)2c\frac{\partial}{\partial c}-\frac{K(A+K-5)}{c^2}-$$
$$\left.-\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}I_\xi^2-\frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2}I_\eta^2-\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}I_\zeta^2\right\}\Phi+$$
$$+\frac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2+c^2)\Phi=E\Phi, \qquad (14)$$

где $\omega^2 = \hbar^2/m^2$, что является результатом определенного выбора единиц длины для измерения a, b, c. Для частного случая $A = 16$, $K = 4$ уравнение (14) вместе с его собственными функциями нижайших состояний было получено в работе [9]. Положив

$$\Phi(a, b, c, \varphi, \theta, \psi)=$$
$$=\breve{\Phi}(a, b, c, \varphi, \theta, \psi)(abc)^K\exp[-(a^2+b^2+c^2)/2], \qquad (15)$$

для $\breve{\Phi}(a, b, c, \varphi, \theta, \psi)$ получим несколько более простое, чем (14), уравнение

$$-\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{A+2K-4}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial a}+\left(\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{c^2-a^2}-1\right)2a\frac{\partial}{\partial a}-\right.$$
$$-\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}I_\xi^2+\frac{\partial^2}{\partial b^2}+\frac{A+2K-4}{b}\cdot\frac{\partial}{\partial b}+\left(\frac{1}{b^2-c^2}-\frac{1}{a^2-b^2}-1\right)2b\frac{\partial}{\partial b}-$$
$$-\frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2}I_\eta^2+\frac{\partial^2}{\partial c^2}+\frac{A+2K-4}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial c}+\left(\frac{1}{c^2-a^2}-\frac{1}{b^2-c^2}-1\right)2c\frac{\partial}{\partial c}-$$
$$\left.-\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}I_\zeta^2\right\}\breve{\Phi}=[\varepsilon-3(A+2K-1)]\breve{\Phi},$$

где $\varepsilon = 2mE/\hbar^2$. Функции $\breve{\Phi}$ имеют вид полиномов по a, b, c, степень которых тем выше, чем выше лежит возбуждение.

Если число частиц велико ($A \gg 1$), то уравнение (14) после несложных преобразований, оставив в разложении по обратным степеням $A^{1/3}$ лишь главные члены, можно представить в виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{\rho^{3A-4}}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{3A-4}\frac{\partial}{\partial\rho}+\right.$$

$$+\frac{6K}{\rho^2}\left[\frac{1}{\beta^4}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{1}{\sin 3\gamma}\cdot\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\right.$$

$$-\frac{I_\xi^2}{4\beta^2\sin^2(\gamma-2\pi/3)}-\frac{I_\eta^2}{4\beta^2\sin^2(\gamma+2\pi/3)}-$$

$$\left.\left.-\frac{I_\zeta^2}{4\beta^2\sin^2\gamma}-\beta^2\right]-\frac{3K(3K+3A-15)}{\rho^2}-\rho^2\right\}\Phi=E\Phi. \qquad (16)$$

Переменные ρ, β, γ следующим образом связаны с a, b, c:

$$\rho^2=a^2+b^2+c^2; \quad [\rho^2/\sqrt{3(K+A-5)}]\,\beta\sin\gamma=(\sqrt{3}/2)(a^2-b^2);$$

$$[\rho^2/\sqrt{3(K+A-5)}]\,\beta\cos\gamma=c^2-(a^2+b^2)/2.$$

Оператор, выделенный в (16) квадратными скобками, совпадает с гамильтонианом модели Бора — Моттельсона для малых колебаний поверхности ядра относительно сферически симметричной равновесной формы. Таким образом, если отождествить форму ядра с формой его эллипсоида инерции, то для коллективных возбуждений магических ядер с большим числом частиц осцилляторная модель оболочек приводит к той же зависимости волновой функции от параметров β и γ и от углов Эйлера φ, θ, ψ, что и коллективная модель.

3. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ НА ФУНКЦИЯХ χ_K $(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$

Используя обобщенные гиперсферические функции и спин-изоспиновые функции состояний с определенным значением полного спина и изоспина, можно построить базис антисимметричных относительно перестановки частиц функций $\chi_s(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$ и по этому базису разложить волновую функцию системы взаимодействующих нуклонов. Коэффициенты разложения будут зависеть от коллективных координат a, b, c, φ, θ, ψ и должны удовлетворять бесконечной системе зацепляющихся уравнений, эквивалентной многочастичному уравнению Шредингера для исходной волновой функции. Приближенное решение задачи, удовлетворяющее вариационному принципу Ритца, можно получить, оборвав разложение на том или другом числе членов. Для магических ядер самое простое приближение соответствует случаю, когда из всего полного набора функций остается только функция $\chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$, о которой говорилось выше*. Тогда уравнение для единственного, зависящего от коллективных координат коэффициента совпадает с уравнением (14), если только в последнем осцилляторный потенциал $m\omega^2(a^2+b^2+c^2)/2$ заменить на $U(a, b, c)$ — среднее значение оператора потенциальной энергии системы в состоянии с волновой функцией $\chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$. Алгоритм усреднения оператора потенциальной энергии системы нуклонов по состоянию с волновой функцией χ_K и будет далее установлен [11].

Прежде всего напомним, что в осцилляторной модели оболочек матричные элементы оператора потенциальной энергии двухчастичного взаимодействия

$$\hat{U}=\sum_{l>K} V(|\vec{r}_l-\vec{r}_K|) \tag{17}$$

на волновых функциях основных состояний магических ядер имеют следующий простой вид:

$$\langle\Psi_{0K}|\hat{U}|\Psi_{0K}\rangle=\int_0^\infty \exp(-q^2)\,P_K(q^2)\,V\left(\sqrt{2}\,r_0q\right)q^2\,dq, \tag{18}$$

где r_0 — осцилляторный радиус; $P_K(q^2)$ — хорошо известные полиномы от q^2, степень и полиномиальные коэффициенты которых зависят от того, какому магическому ядру они соответствуют. Для ряда магических ядер эти полиномы приведены, например, в работе [12].

Матричные элементы оператора $\hat{U}$ на функциях $\chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$:

$$U(a, b, c)=\int \chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)\sum_{l>k} V(|\vec{r}_k-\vec{r}_l|)\,\chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)\,d\vec{\alpha}_{A-1}, \tag{19}$$

можно выразить через трехкратный интеграл от двухчастичного потенциала

$$U(a, b, c)=P_K\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)I(\lambda;\ a, b, c)\big|_{\lambda=1/2}, \tag{20}$$

где

$$I(\lambda;\ a, b, c)=\frac{\sqrt{\pi}}{4(2\pi\lambda)^{3/2}}\cdot\frac{\Gamma((A+2K-1)/2)}{\Gamma((A+2K-4)/2)}\int_0^\pi d\alpha_1\int_0^\pi d\alpha_2\int_0^\pi d\alpha_3\times$$

* Это приближение дает более точное значение энергии основного состояния системы, чем прямой вариационный метод на пробной функции нижайшей конфигурации модели оболочек или метод K-гармоник [6] в приближении $K_{\text{мин}}$. Кроме того, в этом приближении можно найти не только частоту монопольных колебаний, как в методе K-гармоник, но и частоту пятикратно вырожденных квадрупольных колебаний.

$$\times (\sin \alpha_1)^{A+2K-3} (\sin \alpha_2)^{A+2K-4} (\sin \alpha_3)^{A+2K-5} \times$$
$$\times V \left(\sqrt{(a^2/\lambda)\sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \cos^2\alpha_3 + (b^2/\lambda)\sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + (c^2/\lambda)\cos^2\alpha_1}\right); \tag{21}$$

$P_K(x)$ — определенные выше полиномы.

При выводе выражений (20) и (21) будем следовать методу, предложенному для вычисления матричных элементов оператора потенциальной энергии на гиперсферических функциях Сурковым [13]. Рассмотрим сначала интеграл

$$j = \int G(\alpha_i)\, d\vec{\alpha}_{A-1}, \tag{22}$$

где $\vec{\alpha}_{A-1}$ — совокупность обобщенных углов Эйлера A — 1-мерного пространства, $G(\alpha_i)$ — некоторая зависящая от них функция.

Пусть q_{kx}, q_{ky}, q_{kz} — декартовы компоненты векторов Якоби в произвольной системе координат; $a_{K\xi}$, $a_{K\eta}$, $a_{K\zeta}$ — декартовы компоненты тех же векторов, но в системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей эллипсоида инерции, а φ, θ, ψ — углы Эйлера, задающие ориентацию в пространстве главных осей эллипсоида инерции. Пусть, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{A-1} a_{k\xi}^2 = a_0^2; \qquad \sum_{k=1}^{A-1} a_{k\eta}^2 = b_0^2; \qquad \sum_{k=1}^{A-1} a_{k\zeta}^2 = c_0^2. \tag{23}$$

Используя два тождества

$$8 \int \delta(a^2 - a_0^2)\, \delta(b^2 - b_0^2)\, \delta(c^2 - c_0^2)\, a_0 b_0 c_0\, da_0\, db_0\, dc_0 = 1; \tag{24}$$

$$|a_0^2 - b_0^2|\, |b_0^2 - c_0^2|\, |c_0^2 - a_0^2| \times$$
$$\times \int \delta\left(\sum_{l=1}^{A-1} q_{lx} q_{ly}\right) \delta\left(\sum_{l=1}^{A-1} q_{ly} q_{lz}\right) \delta\left(\sum_{l=1}^{A-1} q_{lz} q_{lx}\right) d\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\psi = 1, \tag{25}$$

преобразуем j к следующему виду:

$$j = \frac{8}{(abc)^{A-5}} \int \delta\left(\sum_l q_{lx} q_{ly}\right) \delta\left(\sum_l q_{ly} q_{lz}\right) \delta\left(\sum_l q_{lz} q_{lx}\right) \times$$
$$\times \delta\left(a^2 - \sum_{l=1}^{A-1} q_{lx}^2\right) \delta\left(b^2 - \sum_{l=1}^{A-1} q_{ly}^2\right) \delta\left(c^2 - \sum_{l=1}^{A-1} q_{lz}^2\right) G(\alpha_i)\, d\tau_{3A-3}, \tag{26}$$

где

$$d\tau_{3A-3} \equiv d\vec{q}_1\, d\vec{q}_2 \ldots dq_{A-1} = (a_0 b_0 c_0)^{A-4}\, |a_0^2 - b_0^2|\, |b_0^2 - c_0^2|\, |c_0^2 - a_0^2| \times$$
$$\times da_0\, db_0\, dc_0\, d\vec{\alpha}\, d\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Введем теперь интегральные представления для δ-функций

$$\delta(a^2-a_0^2)\,\delta(b^2-b_0^2)\,\delta(c^2-c_0^2)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi^3)}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int dk_1\,dk_2\,dk_3\exp\left[ik_2(a^2-a_0^2)+\right.$$

$$\left.+ik_2(b^2-b_0^2)+ik_3(c^2-c_0^2)\right]; \tag{27}$$

$$\delta\left(\sum_{l=1}^{A-1}q_{lx}q_{ly}\right)\delta\left(\sum_{l=1}^{A-1}q_{ly}q_{lz}\right)\left(\sum_{l=1}^{A-1}q_{lz}q_{lx}\right)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int dp_1\,dp_2\,dp_3\times$$

$$\times\exp\left[-i\sum_{l=1}^{A-1}(p_1q_{ly}q_{lz}+p_2q_{lz}q_{lx}+p_3q_{lx}q_{ly})\right]. \tag{28}$$

Следующий шаг состоит в приведении квадратичной относительно декартовых компонент векторов Якоби формы, стоящей в экспоненте произведения интегральных представлений всех δ-функций, к диагональному виду, причем это осуществляется поворотом координатных осей трехмерного пространства, в котором заданы вектора Якоби, а углы поворота определены по значениям параметров.

Итак, приведем к диагональному виду квадратичную форму $L(x, y, z) = k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2 + p_1yz + p_2zx + p_3xy$. Это легко сделать, если временно ввести вместо декартовых сферические координаты $x = r\sin\theta_1\cos\varphi_1$; $y = r\sin\theta_1\sin\varphi_1$; $z = r\cos\theta_1$, тогда

$$L(x, y, z)=\frac{2}{\sqrt{3}}tr^2+\sqrt{\frac{4\pi}{15}}r^2\sum_{\mu=-2}^{2}\tilde{\alpha}_\mu Y_{2\mu}(\theta_1, \varphi_1); \tag{29}$$

$$t=\frac{k_1+k_2+k_3}{2\sqrt{3}};$$

$$\tilde{\alpha}_{\pm2}=\frac{k_1-k_2\mp ip_3}{\sqrt{2}};\quad \tilde{\alpha}_{\pm1}=\frac{p_2\mp ip_1}{\sqrt{2}};\quad \tilde{\alpha}_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(k_3-\frac{k_1+k_2}{2}\right).$$

Хорошо известно следующее преобразование [1] суммы, стоящей в правой части равенства (29):

$$\sum_\mu\tilde{\alpha}_\mu Y_{2\mu}(\theta_1, \varphi_1)=\tilde{\lambda}\cos\delta Y_{20}(\theta_1', \varphi_1')+$$

$$+\tilde{\lambda}\sin\delta\,[Y_{22}(\theta_1', \varphi_1')+Y_{2,-2}(\theta_1', \varphi_1')]/\sqrt{2}. \tag{30}$$

Это преобразование, осуществляемое поворотом системы координат в трехмерном пространстве, и решает поставленную задачу, так как после возвращения к декартовым компонентам квадратичная форма оказывается диагональной:

$$L(x', y', z') = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[t + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\cos\left(\delta - \frac{2\pi}{3}\right)\right]x'^2 + \\ + \frac{2}{\sqrt{3}}\left[t + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\cos\left(\delta + \frac{2\pi}{3}\right)\right]y'^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left[t + \frac{\tilde{\lambda}}{2}\cos\delta\right]z'^2. \quad (31)$$

Разумеется, величины $\tilde{\lambda}$, δ, как и $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\psi}$ — эйлеровы углы поворота в трехмерном пространстве, являются функциями переменных $\tilde{\alpha}_\mu$ или, что то же самое, k_i, p_i. Заметим еще, что элементы объема в пространстве переменных t, $\tilde{\lambda}$, δ, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\psi}$ и в пространстве переменных k_i, p_i связаны следующим соотношением:

$$dk_1\,dk_2\,dk_3\,dp_1\,dp_2\,dp_3 = (1/2)\,dt\tilde{\lambda}^4\,d\tilde{\lambda}\,|\sin 3\delta|\,d\delta\,d\tilde{\varphi}\sin\tilde{\theta}\,d\tilde{\theta}\,d\tilde{\psi}. \quad (32)$$

Полученный только что результат позволяет установить следующее необходимое для дальнейших преобразований равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int dk_1\,dk_2\,dk_3\,dp_1\,dp_2\,dp_3 \exp\sum_{l=1}^{A-1} \mathrm{i}\,\{-k_1q_{lx}^2 - k_2q_{ly}^2 - \\ - k_3q_{lz}^2 - p_1q_{ly}q_{lz} - p_2q_{lz}q_{lx} - p_3q_{lx}q_{ly}\} = \\ = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_0^{\infty}\tilde{\lambda}^4\,d\tilde{\lambda}\int_0^{\pi/3}\sin 3\delta\,d\delta\int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}\int_0^{\pi}\sin\tilde{\theta}\,d\tilde{\theta}\int_0^{2\pi} d\tilde{\psi}\times \\ \times\exp\sum_{l=1}^{A-1}\mathrm{i}\,\{-s_1q_{lx'}^2 - s_2q_{ly'}^2 - s_3q_{lz'}^2\}, \quad (33)$$

где

$$s_1 = (2/\sqrt{3})\,[t + (1/2)\,\tilde{\lambda}\cos(\delta - 2\pi/3)];$$
$$s_2 = (2/\sqrt{3})\,[t + (1/2)\,\tilde{\lambda}\cos(\delta + 2\pi/3)];$$
$$s_3 = (2/\sqrt{3})\,[t + (1/2)\,\tilde{\lambda}\cos\delta].$$

Теперь положим $G(\alpha_i) = \hat{U}\chi_K^2(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$ и будем подразумевать, что при вычислении интеграла j осуществляется не только интегрирование по α_j, но и суммирование по спин-изоспиновым переменным σ_i, τ_i.

Если ввести еще под знак интеграла (26) по $d\tau_{3A-3}$ множитель, равный $C_K^2(abc)^{2K}$, который обеспечивает превращение выражения $C_K\,(abc)^K\,\chi_K^2(\alpha_i)$ в предэкспоненциальную часть нормированной на единицу волновой функции основного состояния соответствующего магического ядра в осцилляторной модели оболочек (этот множитель, конечно, должен быть скомпенсирован), а также множитель [13]

$$\int \sqrt{\frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{\pi^3}} \exp(-\Delta_1 R_{x'}^2 - \Delta_2 R_{y'}^2 - \Delta_3 R_{z'}^2)\, dR_{x'}\, dR_{y'}\, dR_{z'} = 1,$$

$$\Delta_1 = A(\varepsilon + is_1), \quad \Delta_2 = A(\varepsilon + is_2), \quad \Delta_3 = A(\varepsilon + is_3),$$

выражающийся через декартовы компоненты центра инерции $R_{x'}$, $R_{y'}$, $R_{z'}$, то в итоге для интеграла (26) получается следующее выражение:

$$j = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_0^{\infty} \breve{\lambda}^4 d\breve{\lambda} \int\limits_0^{\pi/3} \sin 3\delta\, d\delta \int\limits_0^{2\pi} d\breve{\varphi} \int\limits_0^{\pi} \sin\breve{\theta}\, d\breve{\theta} \int\limits_0^{2\pi} d\breve{\psi} \times$$

$$\times D(t, \breve{\lambda}, \delta, \breve{\varphi}, \breve{\theta}, \breve{\psi}; a, b, c) \times$$

$$\times \int d\tau_{3A} \hat{U} \Psi_{\text{об}}^2 (r_{ix'}\sqrt{\varepsilon + is_1},\ r_{iy'}\sqrt{\varepsilon + is_2},\ r_{iz'}\sqrt{\varepsilon + is_3}). \quad (34)$$

Здесь $\Psi_{\text{об}}$ — волновая функция основного состояния магического ядра, построенная из одночастичных нуклонных функций в анизотропном осцилляторном поле с тремя различными частотами

$$\omega_{x'} = (\hbar/m)(\varepsilon + is_1); \quad \omega_{y'} = (\hbar/m)(\varepsilon + is_2); \quad \omega_{z'} = (\hbar/m)(\varepsilon + is_3);$$

$$D(t, \breve{\lambda}, \delta, \breve{\varphi}, \breve{\theta}, \breve{\psi}; a, b, c) = \frac{\exp(ik_1a^2 + ik_2b^2 + ik_3c^2)}{64\pi^{9/2}\, (abc)^{A+2K-5}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma((A+2K-1)/2)\, \Gamma((A+2K-2)/2)\, \Gamma((A+2K-3)/2)}{[(\varepsilon + is_1)(\varepsilon + is_2)(\varepsilon + is_3)]^{[(A+2K-3)/2]}}. \quad (35)$$

Обобщив выражение (18) на случай анизотропного осциллятора, можно найти интеграл по $d\tau_{3A}$ в правой части (34)

$$\int d\tau_{3A} \hat{U} \Psi_{\text{об}}^2 (r_{ix'}\sqrt{\varepsilon + is_1},\ r_{iy'}\sqrt{\varepsilon + is_2},\ r_{iz'}\sqrt{\varepsilon + is_3}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}[(\varepsilon + is_1)x^2 + (\varepsilon + is_2)y^2 + (\varepsilon + is_3)z^2]\right\} \times$$

$$\times P_k\left\{\frac{1}{2}[(\varepsilon + is_1)x^2 + (\varepsilon + is_2)y^2 + (\varepsilon + is_3)z^2]\right\} \times$$

$$\times V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\sqrt{(\varepsilon + is_1)(\varepsilon + is_2)(\varepsilon + is_3)}\, dx\, dy\, dz =$$

$$= P_k\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\{-\lambda[(\varepsilon + is_1)x^2 + (\varepsilon + is_2)y^2 +$$

$$+ (\varepsilon + is_3)z^2]\} V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \times$$

$$\times \sqrt{(\varepsilon + is_1)(\varepsilon + is_2)(\varepsilon + is_3)}\, dx\, dy\, dz. \quad (36)$$

Нам остается найти интеграл

$$j_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int\limits_0^{\infty} \widetilde{\lambda}^4 d\widetilde{\lambda} \int\limits_0^{\pi/3} \sin 3\delta\, d\delta \int\limits_0^{2\pi} d\widetilde{\varphi} \int\limits_0^{\pi} \sin\widetilde{\theta}\, d\widetilde{\theta} \int\limits_0^{2\pi} d\widetilde{\psi} \times$$

$$\times D(t, \widetilde{\lambda}, \delta, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\theta}, \widetilde{\psi}; a, b, c) \times$$

$$\times \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\lambda[(\varepsilon + is_1)x^2 + (\varepsilon + is_2)y^2 + (\varepsilon + is_3)z^2]\} \times$$

$$\times V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\sqrt{(\varepsilon+is_1)(\varepsilon+is_2)(\varepsilon+is_3)}\, dx\, dy\, dz. \tag{37}$$

Предварительно заметим, что

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda(\varepsilon+is_1)x^2 - \lambda(\varepsilon+is_2)y^2 - \lambda(\varepsilon+is_3)z^2] \times$$

$$\times \sqrt{(\varepsilon+is_1)(\varepsilon+is_2)(\varepsilon+is_3)}\, dx\, dy\, dz = 1. \tag{38}$$

Поэтому

$$\frac{64\pi^{9/2}(abc)^{A+2K-5}}{\Gamma((A+2K-1)/2)\,\Gamma((A+2K-2)/2)\,\Gamma((A+2K-3)/2)}\, j_1 \equiv j_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int \ldots \int dt\widetilde{\lambda}^4\, d\widetilde{\lambda} \sin 3\delta\, d\delta\, d\widetilde{\Omega} \exp\{i(k_1a^2 + k_2b^2 + k_3c^2)\} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\pi}}{4(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3(A+2K-2)/2} \times$$

$$\times \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1\, dy_1\, dz_1 \ldots dx_{A+2K-1}\, dy_{A+2K-1}\, dz_{A+2K-1} \times$$

$$\times V(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}) \times \exp\Big\{-\lambda \sum_{l=1}^{A+2K-1} [(\varepsilon+is_1)x_l^2 +$$

$$+ (\varepsilon+is_2)y_l^2 + (\varepsilon+is_3)z_l^2]\Big\}. \tag{39}$$

Таким образом, упрощение подынтегральной функции достигнуто в результате перехода к конфигурационному пространству $A + 2K - 1$ «эффективных частиц». Теперь от переменных t, $\widetilde{\lambda}$, δ, $\widetilde{\Omega}$ следует возвратиться к переменным k_i, p_i:

$$j_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3(A+2K-2)/2} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1\, dy_1\, dz_1 \ldots$$

$$\ldots dx_{A+2K-1}\, dy_{A+2K-1}\, dz_{A+2K-1} \times V(\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int dk_1\, dk_2\, dk_3\, dp_1\, dp_2\, dp_3 \exp\left[\mathrm{i}\,(k_1a^2 + k_2b^2 + k_3c^2)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-\mathrm{i}\lambda \sum_{l=1}^{A+2K-1} (k_1x_l^2 + k_2y_l^2 + k_3z_l^2 + p_1y_lz_l + p_2z_lx_l + p_3x_ly_l)\right] =$$

$$= \frac{16\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3(A+2K-4)/2} \times$$

$$\times \pi^3 \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int dx_1 \ldots dz_{A+2K-1} V\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right) \times$$

$$\times \delta\left[a^2 - \lambda \sum_{l=1}^{A+2K-1} x_l^2\right] \delta\left[b^2 - \lambda \sum_{l=1}^{A+2K-1} y_l^2\right] \delta\left[c^2 - \lambda \sum_{l=1}^{A+2K-1} z_l^2\right] \times$$

$$\times \delta\left[\sum_{l=1}^{A+2K-1} y_lz_l\right] \delta\left[\sum_{l=1}^{A+2K-1} z_lx_l\right] \delta\left[\sum_{l=1}^{A+2K-1} x_ly_l\right]. \qquad (40)$$

В конфигурационном пространстве $A + 2K - 1$-«одночастичных» векторов введем эллипсоид инерции с полуосями $\breve{a}_0$, $\breve{b}_0$, $\breve{c}_0$ и одночастичные переменные x_i, y_i, z_i выразим $\breve{a}_0$, $\breve{b}_0$, $\breve{c}_0$, углы Эйлера θ_i, задающие ориентацию главных осей эллипсоида инерции, и обобщенные углы Эйлера α_i абстрактного $A + 2K - 1$-мерного пространства. Тогда

$$j_2 = \frac{16\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3(A+2K-4)/2} \times$$

$$\times \pi^3 \int \ldots \int (\breve{a}_0\breve{b}_0\breve{c}_0)^{A+2K-4}\, d\breve{a}_0\, d\breve{b}_0\, d\breve{c}_0\, d\vec{\alpha}_{A+2K-1} \times$$

$$\times \delta(a^2 - \lambda\breve{a}_0^2)\, \delta(b^2 - \lambda\breve{b}_0^2)\, \delta(c^2 - \lambda\breve{c}_0^2) \times$$

$$\times V\left(\sqrt{\breve{a}_0^2 \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \cos^2\alpha_3 + \breve{b}_0^2 \sin^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 + \breve{c}_0^2 \cos^2\alpha_1}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{(2\lambda)^{3/2}} \left(\frac{abc}{\pi^{3/2}}\right)^{A+2K-5} \int d\vec{\alpha}_{A+2K-2} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} (\sin\alpha_1)^{A+2K-3}\, d\alpha_1 \int_0^{\pi} (\sin\alpha_2)^{A+2K-4}\, d\alpha_2 \int_0^{\pi} (\sin\alpha_3)^{A+2K-5}\, d\alpha_3 \times$$

$$\times V\left(\sqrt{\frac{a^2}{\lambda} \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \cos^2\alpha_3 + \frac{b^2}{\lambda} \sin^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2 + \frac{c^2}{\lambda} \cos^2\alpha_1}\right). \qquad (41)$$

Так как

$$\int d\overset{>}{\alpha}_n = \frac{8\,(\pi)^{3(n-1)/2}}{\Gamma\,(n/2)\,\Gamma\,((n-1)/2)\,\Gamma\,((n-2)/2)},$$

то, приняв во внимание (40) и связь между j_1 и j_2, нетрудно получить, что $j_1 = I\,(\lambda;\ a,\ b,\ c)$, и, следовательно, доказать соотношение (20).

Представляется интересным найти предел выражения для $I\,(\lambda;\ a,\ b,\ c)$ при $A + 2K \gg 1$. Это просто сделать, если предварительно под знаком трехкратного интеграла перейти к новым переменным $\cos\alpha_1 = r\cos\theta_1$; $\sin\alpha_1\cos\alpha_2 = r\sin\theta_1\sin\varphi_1$; $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 = r\sin\theta_1\cos\varphi_1$, тогда

$$I\,(\lambda;\ a,\ b,\ c) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\,(2\pi\lambda)^{3/2}}\cdot\frac{\Gamma\,((A+2K-1)/2)}{\Gamma\,((A+2K-4)/2)}\times$$

$$\times\int_0^1 (1-r^2)^{(A+2K-6)/2}\,r^2\,dr\int_0^{\pi}\sin\theta_1\,d\theta_1\int_0^{2\pi}d\varphi_1\times$$

$$\times V\,(\sqrt{r^2/\lambda\,(a^2\sin^2\theta_1\cos^2\varphi_1 + b^2\sin^2\theta_1\sin^2\varphi_1 + c^2\cos^2\theta_1)}). \quad (42)$$

Положим $r^2 = [2/(A + 2K - b)]\,q^2$. После несложных преобразований, ограничиваясь двумя первыми членами разложения по обратным степеням $A + 2K - b$, получаем

$$I\,(\lambda;\ a,\ b,\ c) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4\,(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,dz\exp\,(-\lambda q^2)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{15/4 - \lambda^2 q^4}{A+2K-6}\right)V\,(\sqrt{a_0^2x^2 + b_0^2y^2 + c_0^2z^2}), \quad (43)$$

где

$$a_0^2 = [2/(A+2K-6)]\,a^2;\ \ b_0^2 = [2/(A+2K-6)]\,b^2;$$

$$c_0^2 = [2/(A+2K-6)]\,c^2.$$

Главный член разложения после подстановки (43) в (20) дает результат, совпадающий с результатом усреднения потенциальной энергии по состоянию магического ядра, волновая функция которого построена из одночастичных нуклонных функций нижайшего заполнения в анизотропном осцилляторном поле с частотами $\omega_x = \hbar/(ma_0^2)$, $\omega_y = \hbar/(mb_0^2)$, $\omega_z = \hbar/(mc_0^2)$.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ МАГИЧЕСКИХ ЯДЕР

Выражения, полученные выше, позволяют построить самое простое приближение для изучения коллективных возбуждений магических ядер. Это приближение соответствует представлению пробной волновой функции магического ядра в виде:

$$\Psi(a, b, c, \varphi, \theta, \psi; \alpha_i, \sigma_i, \tau_i) = (abc)^{-(A-4)/2} u(a, b, c, \varphi, \theta, \psi) \chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i). \tag{44}$$

Функция $\chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$, принадлежащая основному состоянию магического ядра, определена выше, а функция $u(a, b, c, \varphi, \theta, \psi)$ должна удовлетворять уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\left(\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{c^2-a^2}\right)2a\frac{\partial}{\partial a}-\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{a^2}+\frac{\partial^2}{\partial b^2}+\left(\frac{1}{b^2-c^2}-\frac{1}{a^2-b^2}\right)2b\frac{\partial}{\partial b}-\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{b^2}+\frac{\partial^2}{\partial c^2}+\left(\frac{1}{c^2-a^2}-\frac{1}{b^2-c^2}\right)2c\frac{\partial}{\partial c}-\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{c^2}-\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2}I_\xi^2-\frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2}I_\eta^2-\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}I_\zeta^2\right\}u+U(a, b, c)u=Eu, \tag{45}$$

которое получается как результат усреднения уравнения Шредингера магического ядра по состоянию $\chi_K(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$, причем $\Lambda = (A+2K-6)/2$.

Предположим, что силы, действующие между нуклонами, обеспечивают насыщение, а кулоновское взаимодействие отсутствует. Тогда предельная при больших A энергия системы (45) совпадает с минимумом выражения

$$E_0(a, b, c) = (\hbar^2/2m)\Lambda(\Lambda+1)(1/a^2+1/b^2+1/c^2)+U(a, b, c). \tag{46}$$

Если минимум достигается при $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0$ и $a_0 = b_0 = c_0 = \rho_0/\sqrt{3}$, то от переменных a, b, c удобно перейти к ρ, β, γ и уравнение (45), отбросив в нем малые слагаемые порядка $1/\Lambda^{3/4}$, записать в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{\rho^8}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^8\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{3\Lambda(3\Lambda+3)}{\rho^2}+\frac{6\Lambda}{\rho^2}(\Delta_{\beta, \gamma, \theta_i})-\beta^2\right\}u+U(\rho, \beta, \gamma)u=Eu. \tag{47}$$

Условие нормировки для функции $u(\rho, \beta, \gamma)$ имеет следующий вид:

$$\int\ldots\int u^2\rho^8\,d\rho\,\beta^4\,d\beta\,\sin 3\gamma\,d\gamma\,d\varphi\,\sin\theta\,d\theta\,d\psi = 1.$$

Выражение (46) тоже несколько упрощается:

$$E_0(\rho)=\frac{3\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{\rho^2}+U\Big|_{\beta=0}. \tag{48}$$

В случае сил, обеспечивающих насыщение, $E_0(\rho)$ имеет минимум при таком значении $\rho=\rho_0$, которое пропорционально $A^{5/6}$, а минимальное значение $E_0(\rho)$ пропорционально A, причем пропорциональны оба слагаемых в правой части (48) — кинетическая энергия системы (первое слагаемое) и потенциальная энергия. Заметим здесь же, что, согласно определению Λ, в пределе, когда A велико, $\Lambda\approx(1/4)(3/2)^{4/3}A^{4/3}$.

Чтобы выделить явную зависимость ρ_0 от A при ее больших значениях, введем r_0, положив

$$\rho_0^2=(3/4)(3/2)^{1/3}A^{5/3}r_0^2. \tag{49}$$

В отличие от ρ_0, когда A велико, величина r_0 не зависит от A. Явную зависимость от A удобно выделить и в выражении (48):

$$E_0(\rho_0)\equiv AF(r_0)=A\{(3/8)(3/2)^{1/3}\hbar^2/(mr_0^2)-V(r_0)\}, \tag{50}$$

где

$$V(r_0)=-\frac{1}{A}U\Big|_{\beta=0\,\rho=\rho_0}.$$

Выражение (50) является следствием уравнения (47). К нему можно прийти, оставив в (47) лишь главные (пропорциональные A) слагаемые. Что же касается слагаемых порядка $1/A^{1/3}$, то они дают волновое уравнение для малых монопольных и квадрупольных колебаний. Для монопольных колебаний это уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{A^{1/3}}\left\{-\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{2}{3}\right)^{4/3}\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{1}{2}F''(r_0)\,\xi^2\right\}u(\xi)=E_{1\xi}u(\xi), \tag{51}$$

где

$$\xi^2=A^{4/3}(r-r_0)^2,$$

а для квадрупольных колебаний:

$$\frac{1}{A^{1/3}}\left\{-\frac{\hbar^2}{mr_0^2}\Delta_{\beta,\gamma,\theta_i}+\left[\frac{\hbar^2}{mr_0^2}-\frac{8}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}r_0^4\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\partial^2}{\partial(r_0^2)^2}V(r_0)\right]\beta^2\right\}u(\beta,\gamma,\theta_i)=E_{1\beta}u(\beta,\gamma,\theta_i). \tag{52}$$

Если эффективная потенциальная энергия U не зависит от β, жесткость β-колебаний целиком определяется кинематическими эффектами. Ее природа обусловлена стремлением системы независимых частиц (фермионов), движущихся в осцилляторном поле и имеющих квантовые числа нижайшего заполнения осцилляторных оболочек, сохранить при магическом числе частиц сферически-симметричную форму своего эллипсоида инерции. Силы притяжения, действующие между нуклонами, ослабляют это стремление, так как при заданном значении глобального радиуса ρ потенциальная энергия притяжения тем меньше, чем более деформировано ядро. В результате, при учете зависимости потенциальной энергии от β, жесткость β-колебаний уменьшается по сравнению с тем случаем, когда она обусловлена только кинематическими эффектами.

Используя (51) и (52), нетрудно получить выражения для частот монопольных ω_ξ- и квадрупольных ω_β-колебаний:

$$\omega_\xi^2 = \frac{1}{A^{2/3}}\left[3\,\frac{\hbar^2}{m^2 r_0^4} - \frac{2}{m}\left(\frac{2}{3}\right)^{4/3}\frac{d^2}{dr_0^2}V(r_0)\right]; \qquad (53)$$

$$\omega_\beta^2 = \frac{1}{A^{2/3}}\left[\frac{18}{5}\cdot\frac{\hbar^2}{m^2 r_0^4} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{m}\left(\frac{2}{3}\right)^{4/3}\frac{d^2}{dr_0^2}V(r_0)\right]. \qquad (54)$$

Приведем одно важное следствие соотношений (53) и (54):

$$\omega_\beta^2 = \frac{2}{5}\,\omega_\xi^2 + \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{A^{2/3}}\cdot\frac{\hbar^2}{m^2 r_0^4}. \qquad (55)$$

Последняя формула показывает, что частота β-колебаний остается конечной, когда частота монопольных колебаний стремится к нулю. При малых значениях ω_ξ частота квадрупольных колебаний может существенно превышать частоту монопольных колебаний.

Учет ангармонических эффектов кинематической и динамической природы можно произвести после уточнения уравнения (47) за счет слагаемых, имеющих порядок $1/\Lambda^{3/4}$ и $1/\Lambda^{5/4}$. Чтобы найти эти слагаемые, необходимо обратиться к уравнению (45).

5. ПРОБНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ВАРИАЦИОННОГО РАСЧЕТА СВОЙСТВ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ НЕМАГИЧЕСКИХ ЯДЕР

Из одночастичных волновых функций центрально симметричного поля нетрудно построить волновую функцию модели оболочек для состояний с заданным значением момента количества движения (см., например, [14]). Однако такая функция неспособна передать деформацию атомных ядер. Для того чтобы описать деформированные ядра, обычно используют одночастичные функции несферического самосогласованного поля, но тогда волновая функция модели оболочек представляет собой суперпозицию состояний с разными значениями момента количества движения.

Таким образом, ортодоксальная модель оболочек ставит нас перед необходимостью сделать выбор между функциями с заданным значением момента количества движения, но не приспособленными к описанию деформированных состояний, и функциями, приспособленными к описанию деформаций, но не принадлежащими к состояниям с определенным значением орбитального момента. Для деформированных ядер предпочтение следует отдать одночастичным функциям несферического поля [15—17]. Тем не менее вопрос о неточности, вносимой в расчет энергии, размеров и формы основных состояний несферических ядер неопределенностью величины момента количества движения, требует специального исследования.

Пробную функцию, соответствующую состоянию с определенным значением момента количества движения и способную описать деформированные ядра, удается построить с помощью обобщенных гиперсферических функций, сопоставив коллективные степени свободы не параметрам несферического самосогласованного поля, а полуосям эллипсоида инерции ядра.

Заметим, что в приближении осцилляторной модели оболочек волновую функцию основного состояния четно-четного ядра, имеющую нулевое значение момента количества движения, можно представить в виде

$$\Psi_0(a, b, c; \alpha_i, \sigma_i, \tau_i) = \\ = \sum_{k+l+m=n} C_{klm} a^{2k} b^{2l} c^{2m} \exp\left(-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) \chi_{lmn}(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i).$$

Число n, коэффициенты C_{klm} и функции χ_{klm} определяются осцилляторной конфигурацией ядра. Функции χ_{klm} антисимметричны относительно перестановки пространственных и спин-изоспиновых координат произвольной пары нуклонов. Нижайшей осцилляторной конфигурации системы четырех нейтронов (или протонов) отвечает, например, волновая функция

$$\Psi_0 = C\,[(c^2-(a^2+b^2)/2)\,\chi_0(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i) + \\ + (\sqrt{3}/2)(a^2-b^2)\,\chi_2(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i)]\exp[-(a^2+b^2+c^2)/2], \quad (56)$$

где C — нормировочный множитель; Ψ_0 и χ_2 выражаются через спин-изоспиновые $\xi'(\sigma_i, \tau_i)$, $\xi''(\sigma_i, \tau_i)$ и пространственные $D_0'(\alpha_i)$, $D_0''(\alpha_i)$, $D_2'(\alpha_i)$ $D_2'(\alpha_i)$ функции, принадлежащие двухмерному представлению группы перестановок координат четырех частиц:

$$\chi_0 = D_0'\xi'' - D_0''\xi'; \qquad \chi_2 = D_2'\xi'' - D_2''\xi',$$

причем

$$D_0' = \frac{\sqrt{5}}{4\pi}\{\sqrt{2}\sin\alpha_2\cos\alpha_2\sin\alpha_3 + \sin\alpha_2\cos\alpha_2\cos\alpha_3\};$$

$$D_0'' = \frac{\sqrt{5}}{4\pi}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\alpha_2\sin 2\alpha_3 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha_2\cos 2\alpha_3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(1-3\cos^2\alpha_2)\right\};$$

$$D_2' = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{5}{3}}\{-\sqrt{2}\cos 2\alpha_1 \sin\alpha_2\cos\alpha_2\sin\alpha_3 -$$

$$-\sqrt{2}\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 - \cos 2\alpha_1 \sin\alpha_2\cos\alpha_2\cos\alpha_3 +$$

$$+\sin 2\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\};$$

$$D_2'' = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{5}{3}}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\alpha_1(1+\cos^2\alpha_2)\sin 2\alpha_3 -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2\sin 2\alpha_3 - \sqrt{2}\sin 2\alpha_1\cos\alpha_2\cos 2\alpha_2 +$$

$$\left.+\frac{1}{4}\cos 2\alpha_1(1+\cos^2\alpha_2)\cos 2\alpha_3 - \frac{3}{4}\cos 2\alpha_1\sin^2\alpha_2\right\}.$$

Что же касается углов Эйлера α_1, α_2, α_3, то они простым образом параметризуют декартовы компоненты трех векторов Якоби:

$$\vec{q}_1 = \vec{r}_1 - \frac{1}{3}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4);\quad \vec{q}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\vec{r}_2 - \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_4)\right];$$

$$\vec{q}_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)$$

в системе координат ξ, η, ζ, жестко связанной с главными осями эллипсоида инерции:

$$q_{1\xi} = (-\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3 - \sin\alpha_1\cos\alpha_3)\,a;$$

$$q_{2\xi} = (\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 - \sin\alpha_1\sin\alpha_3)\,a;\qquad q_{3\xi} = \cos\alpha_1\sin\alpha_2 a;$$

$$q_{1\eta} = (-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3 + \cos\alpha_1\cos\alpha_3)\,b;$$

$$q_{2\eta} = (\sin\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\alpha_1\sin\alpha_3)\,b;\quad q_{3\eta} = \sin\alpha_1\sin\alpha_2 b;$$

$$q_{1\zeta} = \sin\alpha_2\sin\alpha_3 c;\qquad q_{2\zeta} = -\sin\alpha_2\cos\alpha_3 c;\quad q_{3\zeta} = \cos\alpha_2 c.$$

Переход от декартовых компонент векторов Якоби к переменным a, b, c, φ, θ, ψ и α_i неоднозначен. Он зависит от выбора наименования осей ξ, η, ζ и от выбора направления отсчета по каждой из них. Однако эта неоднозначность не должна сказываться на функциях $\Psi(a, b, c; \alpha_i, \sigma_i, \tau_i)$ так же, как она не сказывается на значениях декартовых компонент векторов Якоби. Поэтому волновая функция (56) инвариантна относительно перестановки главных осей эллипсоида инерции ядра.

Необходимо отметить, что пробные функции, построенные на одночастичных функциях несферического поля, не обладают инвариантностью относительно перестановки осей координат несферического поля.

В случае системы четырех частиц принципиальные моменты вариационного расчета не маскируются техническими трудностями, так как все вычисления легко провести до конца. Поэтому мы и сосредоточим далее свое внимание на этом простом примере, имеющем чисто методический интерес.

Волновая функция (56) построена на одночастичных функциях сферически симметричного осцилляторного поля. У нее лишь одна степень свободы — осцилляторный радиус, что явно недостаточно для вариационного расчета несферического ядра. Однако выражение (56) допускает простое обобщение, при котором достигается более гибкое вариационное описание формы системы нуклонов с сохранением нулевого значения момента количества движения:

$$\Psi = \Phi_0(a, b, c)\,\chi_0(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i) + \Phi_2(a, b, c)\,\chi_2(\alpha_i, \sigma_i, \tau_i), \tag{57}$$

где Φ_0 и Φ_2 — произвольные функции от a, b, c. Единственное ограничение, накладываемое на Φ_0 и Φ_2 симметрией задачи, состоит в том, что при перестановке осей ξ, η, ζ они должны преобразовываться так же, как преобразуются функции $c^2 - (a^2 + b^2)/2$ и $\sqrt{3}(a^2 - b^2)/2$.

Систему уравнений для Φ_0 и Φ_2 легко найти из требования минимальности энергии четырех нуклонов, подсчитанной с помощью функций (57):

$$\left.\begin{aligned}
&(\hat{T}_{a,b,c} + V_s - E)\,\Phi_0 + \left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{b^2+c^2}{(b^2-a^2)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2}\right] + \right.\\
&\qquad \left. + V_0\right\}\Phi_0 + \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2} - \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. - \frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2}\right] - V_2\right\}\Phi_2 = 0;\\
&(\hat{T}_{a,b,c} + V_s - E)\,\Phi_2 + \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2} - \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. - \frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2}\right] - V_2\right\}\Phi_0 + \\
&\qquad + \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{b^2+c^2}{(b^2-c^2)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c^2-a^2)^2} + \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + 4\,\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}\right] - V_0\right\}\Phi_2 = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{b,b,c} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \left(\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{1}{c^2-a^2}\right) 2a\,\frac{\partial}{\partial a} + \right.\\
+ \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \left(\frac{1}{b^2-c^2} - \frac{1}{a^2-b^2}\right) 2b\,\frac{\partial}{\partial b} + \\
\left. + \frac{\partial^2}{\partial c^2} + \left(\frac{1}{c^2-a^2} - \frac{1}{b^2-c^2}\right) 2c\,\frac{\partial}{\partial c}\right\};
\end{aligned}$$

$$V_s = \frac{15}{8\pi}\int d\Omega\, U\left[\sqrt{\frac{3}{2}(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)}\right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{5}{8} \lambda_{13} (x^4 + y^4 + z^4) + \left(\frac{47}{16} \lambda_{33} - \frac{13}{16} \lambda_{13} \right) (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \right\} ;$$

$$V_0 = \frac{15}{8\pi} \int d\Omega U \left[\sqrt{\frac{3}{2} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{8} \lambda_{13} \left(z^4 - \frac{x^4 + y^4}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(-2\lambda_{33} + \frac{5}{4} \lambda_{13} \right) \left(x^2y^2 - \frac{y^2z^2 + z^2x^2}{2} \right) \right\} ;$$

$$V_2 = \frac{15}{8\pi} \int d\Omega\, U \left[\sqrt{\frac{3}{2} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)} \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{3}}{16} \lambda_{13} (x^4 - y^4) + \left(-2\lambda_{33} + \frac{5}{4} \lambda_{13} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} (x^2z^2 - y^2z^2) \right\} ;$$

U (r_{ij}) — двухчастичный потенциал взаимодействия между i-м и j-м нуклонами; λ_{33} и λ_{13} — коэффициенты, характеризующие интенсивность потенциала в разных спин-изоспиновых состояниях; x, y, z — декартовы компоненты единичного вектора. Интегрирование ведется по всем возможным направлениям (в трехмерном пространстве) единичного вектора.

Таким образом, вариационная задача свелась к решению системы уравнений (58) для наилучшей среди функций (57) пробной функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bohr A.** Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab, 1952, **26**, No. 14.
2. **Bohr A., Mottelson B.** Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab, 1953, **27**, No. 16.
3. **Nilsson S. G.** Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab, 1955, **29**, No. 16.
4. **Давыдов А. С., Филиппов Г. Ф.** ЖЭТФ, 1958, **35**, 440, Nucl. Phys., 1958, **8**, 237; **Davydov A. S., Chaban A. A.** Nucl. Phys., 1960, **20**, 499.
5. **Давыдов А. С.** Возбужденные состояния атомных ядер. М., Атомиздат, 1967.
6. **Симонов Ю. А.** «Ядерная физика», 1966, **3**, 630; «Ядерная физика», 1968, **7**, 1210.
7. **Филиппов Г. Ф.** Препринт ИТФ-68-14. Киев, 1968.
8. **Дзюблик А. Я.** и др. «Ядерная физика», 1972, **15**, 869, Препринт ИТФ-71-134, Киев, 1971.
9. **Zickendraht W.** J. Math. Phys., 1971, **12**, 1663.
10. **Виленкин Н. Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
11. **Стешенко А. И., Филиппов Г. Ф.** Препринт ИТФ-72-66, Киев, 1972.
12. **Стешенко А. И.** Кандидатская диссертация. ИЯИ АН УССР, 1971.
13. **Базь А. И.** В кн.: Проблемы современной ядерной физики. М., «Наука», 1971.
14. **Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф.** Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М., «Наука», 1969.
15. **Volkov A. B.** Nucl. Phys., 1965, **A91**, 27—43.
16. **Ripka G.** Adv. Nucl. Phys. Plenum Press, 1968.
17. **Стешенко А. И., Филиппов Г. Ф.** УФЖ, 1970, **15**, 4.