

УДК 539.182

## КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*В. А. Ризов, И. Т. Годоров*

Институт ядерных исследований  
и ядерной энергии Болгарской  
Академии наук, София

В статье исследуются два типа квазипотенциальных уравнений. В первом разделе рассматривается уравнение с нелокальным потенциалом, полученное из уравнений движения квантовой электродинамики, и устанавливается его связь с уравнением для запаздывающей функции Грина. Большая часть обзора посвящена систематическому изучению недавно предложенного локального варианта квазипотенциального подхода Логунова — Тавхелидзе.

The paper reviews two types of quasipotential equations. In Part I an equation with a non-local potential is derived from the equations of motion of quantum electrodynamics. It is also related to a Bethe — Salpeter type of equation for the retarded Green function. Most of the paper (Parts II—IV) is devoted to a systematic study of a local version of the Logunov — Tavkhelidze quasipotential approach.‡

### ВВЕДЕНИЕ

**Проблема релятивистского взаимодействия  $n$  частиц.** В то время как релятивистская механика одной частицы во внешнем поле возникла практически вместе с созданием специальной теории относительности [95], общепринятой релятивистской теории нескольких взаимодействующих частиц не существует и по сей день. Самая прямолинейная попытка построения канонической релятивистской динамики двух и более частиц в рамках гамилтонова подхода Дирака [37] привела к теореме об отсутствии взаимодействия [25—27]. В работах [31, 32] было показано, что, отказываясь от канонического подхода, можно построить лоренц-инвариантные уравнения взаимодействующих частиц таким образом, чтобы массы покоя частиц оставались неизменными, а законы сохранения выполнялись асимптотически \*. Другой подход состо-

\* Обзоры по классической релятивистской механике взаимодействующих частиц и дальнейшие ссылки читатель найдет в работах [27, 119], а также [28].

ит в отказе от рассмотрения траекторий и в использовании лишь матрицы рассеяния, выраженной в терминах асимптотических наблюдаемых (см., например, работу [53]). Такой подход наиболее естествен в рамках квантовой механики и последовательно проводится Кёстером [22, 103]. В этих работах учитывается замечание [39], что законы двухчастичного взаимодействия должны воспроизводиться в присутствии других удаленных частиц. Это рассмотрение имеет, однако, одну нереалистическую черту: оно предполагает существование унитарного  $S$ -оператора в пространстве с ограниченным числом частиц. Как опыт, так и фундаментальные теоретико-полевые соображения подсказывают, что при достаточно высоких энергиях нельзя запретить рождение новых частиц. Другой недостаток подхода Кёстера состоит в том, что он не дает принципа для определения закона (в частности, потенциала) взаимодействия.

Последовательный подход к задаче релятивистского взаимодействия частиц, учитывающий близкодействие и возможность рождения новых частиц, должен основываться на локальной квантовой теории поля. Во всяком случае, можно сказать определенно, что до сих пор только на этом пути удалось добиться запоминающихся успехов: в первую очередь, вычисления тонкой структуры и лэмбовского смещения спектра водородоподобных систем. Для того чтобы сделать этот подход эффективным, полезно исключить полевые переменные (и матричные элементы, соответствующие неупругим процессам) и заменить их эффективным потенциалом взаимодействия. В случае многочастичной системы решение этой задачи находится в начальной стадии (см., например, работы [75, 76, 104, 114—117]). Здесь ограничимся лишь проблемой взаимодействия двух частиц.

Отметим, что поскольку релятивистская квантовая теория взаимодействия (двух) частиц имеет более солидные теоретические, а также и экспериментальные основания, чем соответствующая классическая теория, то имеет смысл искать правильное классическое (релятивистское, двухчастичное) уравнение как предел (при  $\hbar \rightarrow 0$ ) подходящего квантового уравнения [57—59].

**Трехмерные или четырехмерные уравнения для двухчастичной задачи.** Формулировка двухчастичной задачи в рамках квантовой теории поля далеко не однозначна. Среди работ в этой области можно выделить два основных направления: 1) трехмерные одно-временные уравнения; 2) четырехмерные уравнения, в которых каждой частице приписывается свое время.

Трехмерный подход (который более естествен с точки зрения нерелятивистского предела) ведет свое начало от классических работ Фока и Подольского [50—52, 96], в которых закон Кулона выводится из основных уравнений квантовой электродинамики. Вполне в стиле современной теоретической физики, эта идея пер-

воначально была забыта, а затем переоткрывалась по крайней мере дважды и получила название метода Тамма — Данкова (см., например, работы [9, 33, 105], а также сборник статей [83]).

Четырехмерный подход также берет свое начало в тридцатых годах — в многовременном формализме Дирака, Фока и Подольского [38]. Он принимает свой теперешний вид в начале пятидесятих годов (см., например, работы [62, 88, 100, 102], а также обзор [85], где приведена полная библиография).

В течение многих лет явно ковариантный четырехмерный подход, основанный на уравнении Бете — Солпитера (БС), был, несомненно, наиболее популярен. Уравнение БС на самом деле является удобным инструментом для суммирования высокоэнергетических вкладов лестничных диаграмм. Однако это уравнение (в том же, обычно употребляемом лестничном приближении) выглядит гораздо менее удачным применительно к двухчастичной задаче о связанных состояниях. Источник затруднений как раз и есть добавочная переменная относительно времени (или сопряженная с ней относительная энергия), которая участвует в уравнении. С ней связано появление лишних (нефизических) решений уравнения БС, которые возникают, например, в точно решаемой модели Вика — Кутковского [29, 110, 118]. Физикам не следовало забывать простую истину, что «протон сегодня и электрон вчера не образуют водородного атома» [42]. Появление лишних решений не есть единственный дефект уравнения БС. В лестничном приближении (так же, как и в любом другом практически достижимом приближении), в котором ядро уравнения задается конечной суммой диаграмм оно не воспроизводит правильный предел релятивистского уравнения (Клейна — Гордона или Дирака) во внешнем поле, когда масса одной из частиц стремится к бесконечности. В случае кулоновского взаимодействия некоторый (неполный) выход из упомянутого затруднения указан в работе [6].

Примечательно, что трехмерный подход свободен от перечисленных затруднений. Несмотря на довольно распространенное заблуждение, он не противоречит и релятивистской инвариантности, так как система центра инерции определяется импульсами рассматриваемых частиц [39, 43]. В то же время трехмерный подход оставляет априори значительно больший произвол, чем четырехмерный. Многообразие трехмерных уравнений обусловлено: 1) различными выборами переменной, по которой можно выйти за массовую или энергетическую оболочку, и 2) неоднозначностью экстраполяции амплитуды рассеяния вне (массовой или энергетической) оболочки. Некоторые варианты трехмерного подхода связываются с системой бесконечного импульса (см., например, работы [19, 87, 88]). Не будем говорить здесь о многочисленных феноменологических уравнениях (см., например, работу [61]), которые не связаны непосредственно с квантовой теорией поля.

Квазипотенциальный подход возник [79, 80] как некий компромисс между упомянутой выше теоретико-полевой программой Фока и других и непосредственным заданием зависящего от энергии эффективного потенциала, который подгоняется по заданной амплитуде рассеяния (см., например, работу [82], а также более ранние [21, 71], в которых ядерный потенциал связывается с квантовой теорией поля). В отличие от более амбициозной программы, исходящей или из уравнений движения [50—52], или из уравнения БС [34—36, 73, 74, 80], или из старой теории возмущения [66, 67] и приводят к довольно сложному нелокальному потенциалу, подход Логунова — Тавхелидзе [79, 80] (см. также более поздние работы [12, 40, 45—49, 64, 69, 90, 92, 93, 106, 113, 121]) претендует только на правильное воспроизведение амплитуды рассеяния на массовой поверхности, удовлетворяющей условию упругой унитарности ниже первого неупругого порога. Это требование не определяет однозначно функции Грина, и потенциал оставляет место разным возможностям, соответствующим различным критериям «простоты» и «естественности» [55, 56, 63, 65, 68, 79, 80, 109—112].

## 1. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ТЕРМИНАХ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

**Вывод уравнения для одновременной волновой функции методом Фока — Подольского — Тамма — Данкова**

**Уравнения для одновременных матричных элементов от произведения дираковских полей.** Пусть  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  — два противоположно заряженных поля и  $|B\rangle$  — вектор связанного состояния соответствующих частиц 1 и 2. Рассмотрим систему матричных элементов

$$\Phi_{nB}(x_1, x_2) = \langle n | \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) | B \rangle, \quad (1)$$

где  $\langle n |$  пробегает полную систему физических состояний. Приведем здесь эвристический вывод уравнения для волновой функции связанного состояния  $\Phi_{0B}$ , пользуясь методом Фока — Подольского (Тамма — Данкова). Более последовательное рассмотрение будет проводиться ниже на основе анализа четырехточечной запаздывающей функции Грина. В качестве первого шага найдем систему уравнений для матричных элементов (1), исходя из гайзенберговских уравнений движения для операторов  $\psi_a(x)$ , взаимодействующих с электромагнитным полем  $A^\mu(x)$ :

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial x_a^0} - H_a(\mathbf{p}_a) \right] \psi_a(x_a) = e_a \alpha_\mu^{(a)} A^\mu(x_a) \psi_a(x_a), \quad a = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь  $e_a$  — заряд частицы  $a$ ;  $\alpha_0^{(a)} = 1$ ;  $\alpha_j^{(a)} = \beta^{(a)} \gamma_j^{(a)}$ ,  $j = 1, 2$ ,  
 3  $([\gamma_\mu^{(1)}, \gamma_\nu^{(2)}] = 0)$ ;  $H_a$  — свободный квантовомеханический

гамильтониан частицы  $a$ :

$$H_a(\mathbf{p}_a) = m_a \beta^{(a)} + \mathbf{p}_a \alpha^{(a)}; \quad \mathbf{p}_a = -i \nabla_a, \quad a = 1, 2. \quad (3)$$

Пользуемся, как обычно, такой реализацией  $\gamma$ -матриц, в которой  $\gamma_0^* = \gamma_0$ ,  $\gamma_j = -\gamma_j$ , так что  $\beta^{(a)} = \gamma_0^{(a)}$ . Будем пока рассматривать (1) и (2) формально, не выписывая явно перенормировочных членов и не вдаваясь в определение произведения гайзенберговских полей в одной точке. Вопрос об устранении расходимостей проще рассмотреть в рамках подхода, исходящего из четырехточечной функции Грина.

Предположим теперь, что вектор относительной координаты  $x_1 - x_2$  пространственно-подобен, и выберем систему отсчета так, что

$$x_1^0 = x_2^0 = t. \quad (4)$$

Тогда из (2) вытекает следующая система уравнений для матричных элементов (1):

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H_1(-i \nabla_1) - H_2(-i \nabla_2) \right] \Phi_{nB}(x_1, x_2) = \\ = \sum_{n'} A_{nn'}(x_1, x_2) \Phi_{n'B}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$A_{nn'}(x_1, x_2) = \langle n | e_1 \alpha_\mu^{(1)} A^\mu(x_1) + e_2 \alpha_\mu^{(2)} A^\mu(x_2) | n' \rangle, \quad (6)$$

а сумма по  $n'$  включает интегрирование по импульсам и суммирование по дискретным квантовым числам промежуточных состояний.

Пусть  $|B\rangle$  и  $|n\rangle$  — нормированные на  $\delta$ -функцию состояния с определенными импульсами  $P_B$  и  $P_n$ . Тогда, в силу трансляционной инвариантности теории, при любом выборе положительных чисел  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , для которых  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ , можно положить

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{nB}(x_1, x_2) &= \exp [i (P_n - P_B) X] \mathcal{F}_{nB}(\mathbf{x}); \\ A_{nn'}(x_1, x_2) &= \exp [i (P_n - P_{n'}) X] \mathcal{A}_{nn'}(\mathbf{x}), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$X = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = (t, \mathbf{X}); \quad x = x_1 - x_2 = (0, \mathbf{x}). \quad (8)$$

Подставляя (7) в уравнение (5), получаем

$$\begin{aligned} [P_B^0 - P_n^0 - H_1(\mu_1 (\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_n) - i \nabla) - \\ - H_2(\mu_2 (\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_n) + i \nabla)] \mathcal{F}_{nB}(\mathbf{x}) = \sum_{n'} \mathcal{A}_{nn'}(\mathbf{x}) \mathcal{F}_{n'B}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (9)$$

**Запаздывающая функция Грина для системы двух частиц.** Определим свободную функцию Грина  $\mathcal{G}_0^R(P, \mathbf{x})$  как запаздываю-

щее решение уравнения

$$[H_1(\mu_1 \mathbf{P} - i\nabla) + H_2(\mu_2 \mathbf{P} + i\nabla) - P_0] \mathcal{G}_0^R(P, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}). \quad (10)$$

Имеем

$$\mathcal{G}_0^R(P, \mathbf{x}) = \int G_0(P, \mathbf{p}) \exp(ipx) \frac{d^2 p}{(2\pi)^3}, \quad (11)$$

где

$$G_0(P, \mathbf{p}) = [H_1(\mathbf{p}_1) + H_2(\mathbf{p}_2) - P_0 - i0]^{-1}; \quad (12)$$

$$p_1 = \mu_1 P + p, \quad p_2 = \mu_2 P - p. \quad (13)$$

В координатном пространстве функция  $\mathcal{G}_0^R$  факторизуется:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^R(X, x) &= \int \mathcal{G}_0^R(P, x) \exp(-iPX) \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} = \\ &= \frac{1}{i} S_1^R(t, \mathbf{x}_1) \beta^{(1)} S_2^R(t, \mathbf{x}_2) \beta^{(2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $x_1$  и  $x_2$  определяются равенствами (8) ( $x_1 = X + \mu_2 x$ ,  $x_2 = X - \mu_1 x$ ), а  $S_a^R$  — одночастичные запаздывающие функции:

$$S_a^R(x) = \int \frac{m_a + \gamma^{(a)} p}{m_a^2 - p^2 - i0p^0} \exp(-ipx) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \equiv (m_a + i\hat{\partial}_a) D_{m_a}^R(x). \quad (15)$$

Чтобы убедиться в справедливости (14), заметим, что если импульсы  $p_1$  и  $p_2$  выражены  $P$  и  $p$  посредством (13), то

$$\int \frac{m_1 + \gamma^{(1)} p_1}{m_1^2 - p_1^2 - i0p_1^0} \beta^{(1)} \frac{m_2 + \gamma^{(2)} p_2}{m_2^2 - p_2^2 - i0p_2^0} \beta^{(2)} \frac{d^4 p^0}{2\pi} = \frac{i}{H_1(\mathbf{p}_1) + H_2(\mathbf{p}_2) - P_0 - i0}.$$

Факторизованное выражение (14) для свободной функции Грина подсказывает следующее определение полной (несвязной) запаздывающей функции двух частиц:

$$\mathcal{G}^R(X, \mathbf{x}) = \frac{1}{i} S_1^R(t, \mathbf{x}_1) \beta^{(1)} S_2^R(t, \mathbf{x}_2) \beta^{(2)}, \quad (16)$$

где  $S_a^R(x)$  ( $a = 1, 2$ ) — полные одночастичные запаздывающие функции:

$$S_a^R(x) = i\theta(x^0) \langle 0 | \{ \psi_a(x), \tilde{\psi}_a(0) \} | 0 \rangle, \quad a = 1, 2. \quad (17)$$

При исследовании системы (9) для  $\mathcal{F}_{nB}(\mathbf{x})$  удобно ввести разность  $\Sigma(P, \mathbf{x})$  между обратными (в смысле свертки) функциями Грина:

$$\Sigma(P, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_0^R(P, \mathbf{x})^{-1} - \mathcal{G}^R(P, \mathbf{x})^{-1}, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{G}^R(P, \mathbf{x}) = \int \mathcal{G}^R(X, \mathbf{x}) \exp(iPX) d^4 X. \quad (19)$$

Из (18) следует, что  $\Sigma(P, \mathbf{x})$  приобретает значение ядра неоднородного интегрального уравнения для функции Грина  $\mathcal{G}^R$ :

$$\mathcal{G}^R(P, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_0^R(P, \mathbf{x}) + \int \mathcal{G}_0^R(P, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \Sigma(P, \mathbf{y} - \mathbf{y}') \times \\ \times \mathcal{G}^R(P, \mathbf{y}') d^3y d^3y'. \tag{20a}$$

Преобразование Фурье по  $P$  дает следующее уравнение в координатном пространстве:

$$\mathcal{G}^R(X, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_0^R(X, \mathbf{x}) + \int \mathcal{G}_0^R(X - Y, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \Sigma(Y - Y', \mathbf{y} - \mathbf{y}') \times \\ \times \mathcal{G}^R(Y', \mathbf{y}') d^4Y d^3y d^4Y' d^3y', \tag{20b}$$

где

$$\Sigma(X, \mathbf{x}) = \int \Sigma(P, \mathbf{x}) \exp(-iPX) \frac{d^4P}{(2\pi)^4}.$$

**Уравнение для волновой функции связанного состояния.** Вернемся к рассмотрению системы уравнений (9). Нашей целью будет вывести из этой бесконечной системы уравнение для одновременной волновой функции  $\mathcal{F}_{0B}(\mathbf{x})$ .

При помощи свободной запаздывающей функции (11) можно записать уравнение (9) в интегральной форме:

$$\mathcal{F}_{nB}(\mathbf{x}) = f_{nB}^{(0)}(\mathbf{x}) - \sum_s \int \mathcal{G}_0^R(P_B - P_n, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{A}_{ns}(\mathbf{y}) \mathcal{F}_{sB}(\mathbf{y}) d^3y, \tag{21}$$

где  $f_{nB}^{(0)}(\mathbf{x})$  — решение однородного уравнения

$$[P_B^0 - P_n^0 - H_1(\mu_1(\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_n) - i\nabla) - \\ - H_2(\mu_2(\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_n) + i\nabla)] f_{nB}^{(0)}(\mathbf{x}) = 0. \tag{22}$$

Отметим, что в общем случае нельзя обойтись без свободного члена  $f_{nB}^{(0)}$ . Действительно, если  $\langle n | = \langle B' | a_1^{(-)}(\mathbf{p}_1) a_2^{(-)}(\mathbf{p}_2)$ ,  $P_n = P_B + p_1 + p_2$ , где  $a_1^{(-)}$  и  $a_2^{(-)}$  — операторы уничтожения античастиц 1 и 2, а  $B'$  — состояние с теми же квантовыми числами (и массой), что и  $B$ , то в правой части (21) будет присутствовать член

$$f_{nB}^{(0)}(\mathbf{x}) = C \delta(\mathbf{P}_B - \mathbf{P}_B') u_1^{(-)}(\mathbf{p}_1) u_2^{(-)}(\mathbf{p}_2) \exp[-i(\mu_2 \mathbf{p}_1 - \mu_1 \mathbf{p}_2) \mathbf{x}],$$

где  $u_a^{(-)}$  — дираковский спинор, удовлетворяющий уравнению

$$(\hat{p}_a + m_a) u_a^{(-)}(\mathbf{p}_a) = 0 = [p_a^0 + H_a(-\mathbf{p}_a)] u_a^{(-)}(\mathbf{p}_a),$$

а  $C$  — нормировочная постоянная.

Для низколежащих состояний, при  $P_n^2 < (\sqrt{P_B^2} + m_1 + m_2)^2$ , из граничного условия для связанных состояний вытекает, что

$$f_{nB}^{(0)}(\mathbf{x}) = 0. \tag{23}$$

В дальнейшем, чтобы упростить изложение, будем пренебрегать вкладом связанного состояния в сумме по полной системе и будем считать, что условие (23) имеет место всегда. Это не приведет к ошибке в рассматриваемом здесь низшем приближении, в котором в квазипотенциале учтены лишь члены порядка  $e_1 e_2$ . Последовательный учет высших поправок будет проведен на основе уравнения для запаздывающей функции Грина, без использования гипотезы типа (23).

Подставляя (21), (23) в правую часть (9), находим

$$[P_B^0 - P_n^0 - H_1(\mu_1(P_B - P_n) - i\nabla) - H_2(\mu_2(P_B - P_n) + i\nabla)] \mathcal{F}_{nB}(\mathbf{x}) = - \int \sum_{n's} \mathcal{A}_{nn'}(\mathbf{x}) \mathcal{G}_0^R(P_B - P_{n'}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{A}_{n's}(\mathbf{y}) \mathcal{F}_{sB}(\mathbf{y}) d^3y. \quad (24)$$

Для дальнейших преобразований системы (24) полезно ввести следующие матричные обозначения:

$$\mathcal{F}_B(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{0B}(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathcal{F}_{nB}(\mathbf{x}) \\ \dots \end{pmatrix}; \quad \mathcal{G}_0^{-1} = \{\mathcal{G}_0(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y})_{ns}^{-1}\};$$

$$K = \{K(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y})_{ns}\},$$

где

$$\mathcal{G}_0(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y})_{ns}^{-1} = \mathcal{G}_0^R(P_B - P_n, \mathbf{x})^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ns};$$

$$K(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y})_{ns} = \sum_{n'} \mathcal{A}_{nn'}(\mathbf{x}) \mathcal{G}_0^R(P_B - P_{n'}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{A}_{n's}(\mathbf{y}).$$

Определим  $\Pi_0$  как проекционный оператор, действующий на

произвольные столбцы  $C = \{C_n\}_{n=0}^\infty$ :  $\Pi_0 C = \begin{pmatrix} C_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \equiv C_0.$

Тогда систему (24) можно переписать в виде

$$\Pi_0 (\mathcal{G}_0^{-1} + K) \Pi_0 \mathcal{F}_B + \Pi_0 K (1 - \Pi_0) \mathcal{F}_B = 0; \quad (25a)$$

$$(1 - \Pi_0) (\mathcal{G}_0^{-1} + K) (1 - \Pi_0) \mathcal{F}_B + (1 - \Pi_0) K \Pi_0 \mathcal{F}_B = 0. \quad (25b)$$

Из существования нетривиального решения  $\mathcal{F}_B$  системы  $(\mathcal{G}_0^{-1} + K) \mathcal{F}_B = 0$  вытекает, что оператор  $\mathcal{G}_0^{-1} + K$  не имеет обратного в пространстве  $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$  всех столбцов. Предположим, что оператор  $(1 - \Pi_0) (\mathcal{G}_0^{-1} + K) (1 - \Pi_0)$  обратим в подпространстве  $(1 - \Pi_0) \mathcal{H}_{\mathcal{F}}$  и обозначим его обратный оператор  $Q$ . Другими словами, оператор  $Q$  должен удовлетворить соотношениям

$$Q(1 - \Pi_0) (\mathcal{G}_0^{-1} + K) (1 - \Pi_0) = (1 - \Pi_0); \quad Q \Pi_0 = \Pi_0 Q.$$



Действуя оператором  $Q$  на обе части уравнения (25б), находим  $(1 - \Pi_0) \mathcal{F}_B = -Q(1 - \Pi_0) K \Pi_0 \mathcal{F}_B$ . Подставляя это выражение в (25а), получаем искомое уравнение для волновой функции связанного состояния  $-\mathcal{F}_{0B}(\mathbf{x}) = \Pi_0 \mathcal{F}_B(\mathbf{x})$ :

$$[(\mathcal{G}_0^R)^{-1} + K'_{00}] \mathcal{F}_{0B} = 0, \quad (26)$$

где

$$K'_{00} = \Pi_0 K' \Pi_0; \quad (27)$$

$$K' = K - KQ(1 - \Pi_0)K;$$

$$(\mathcal{G}_0^R)^{-1}(P; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = [H_1(\mu_1 \mathbf{P} - i\nabla) + H_2(\mu_2 \mathbf{P} + i\nabla) - P_0] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (28)$$

Далее, выделим нетривиальную часть  $\mathcal{V}$  ядра интегрального оператора  $K'_{00}$ , полагая

$$K'_{00}(P; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Sigma(P, \mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathcal{V}(P; \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (29)$$

где  $\Sigma(P, \mathbf{x})$  — собственно-энергетическая поправка (18) к запаздывающей функции Грина  $\mathcal{G}^R$ . В этих обозначениях уравнение (26) приобретает вид

$$[(\mathcal{G}^R)^{-1} + \mathcal{V}] \mathcal{F}_{0B} = 0. \quad (30)$$

Для реального применения этого уравнения необходимо разложить ядро интегрального оператора  $K'_{00}(P; \mathbf{x}, \mathbf{y})$  по степеням зарядов  $e_1$  и  $e_2$ . Чтобы найти это разложение, воспользуемся итерационным решением уравнений Янга — Фельдмана:

$$A_\mu(x) = A_\mu^{in}(x) + \int D_0^R(x-y) j_\mu(y) d^4y; \quad (31a)$$

$$\psi_a(x) = \psi_a^{in}(x) + \int S_a^R(x-y) h_a(y) d^4y, \quad a = 1, 2, \quad (31б)$$

где электромагнитный ток  $j_\mu$  и «спинорный ток»  $h_a$  определяются (формально) равенствами

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^2 e_a [\tilde{\Psi}_a(x), \gamma_\mu^{(a)} \Psi_a(x)]; \quad (31в)$$

$$h_a(x) = e_a \gamma_\mu^{(a)} A^\mu(x) \Psi_a(x), \quad a = 1, 2; \quad (31г)$$

$S_a^R$  и  $D_0^R$  — свободные запаздывающие функции (15). Из найденного ряда для  $K'_{00}$  следует вычесть разложение по степеням  $e_1$  и  $e_2$  для суммы и таким образом получить ряд для величины  $\mathcal{V}$ , играющей роль взаимодействия (квазипотенциала) в уравнении (30) для волновой функции  $\mathcal{F}_{0B}$ .

**Вычисление двухчастичной собственно-энергетической части во втором порядке теории возмущения.** Сначала найдем функции  $\Sigma(X, \mathbf{x})$  в низшем порядке по теории возмущения, т. е. члены порядка  $e_1^2$  и  $e_2^2$  в ее разложении по степеням зарядов. Покажем,

что вклад  $\Sigma^{(2)}$  второго порядка в  $\Sigma$  факторизуется наподобие (14) и (16). Точнее, справедливо равенство

$$\Sigma^{(2)}(X, \mathbf{x}) = \frac{1}{i} \{ \beta^{(1)} \Sigma_1^{(2)}(X_0, \mathbf{X} + \mu_2 \mathbf{x}) S_2^R(X_0, \mathbf{X} - \mu_1 \mathbf{x}) \beta^2 + \\ + S_1^R(X_0, \mathbf{X} + \mu_2 \mathbf{x}) \beta^{(1)} \beta^{(2)} \Sigma_2^{(2)}(X_0, \mathbf{X} - \mu_1 \mathbf{x}) \}, \quad (32)$$

где  $\Sigma_a$  — одночастичные собственно-энергетические части:

$$\Sigma_a(x) = S_a^R(x)^{-1} - S_a'^R(x)^{-1}, \quad a = 1, 2; \quad (33)$$

$S_a'^R$  — полная одночастичная запаздывающая функция (17).

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся уравнением (20б), которое в искомом приближении дает

$$\mathcal{G}^R(X, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_0^R(X, \mathbf{x}) + \int \dots \int \mathcal{G}_0^R(X + Y, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \\ \times \Sigma^{(2)}(Y - Y', \mathbf{y} - \mathbf{y}') \mathcal{G}_0^R(Y', \mathbf{y}') d^4 Y d^3 y d^4 Y' d^3 y' + \dots, \quad (34)$$

и сравним правую часть с разложением правой части (16) по степеням зарядов. Свертывая обе части равенства (33) слева с  $S_a^R$  и справа с  $S_a'^R$  и раскладывая подынтегральный член по степеням  $e_a^2$ , находим

$$S_a'^R(x_a) = S_a^R(x_a) + \\ + \int S_a^R(x_a - x'_a) \Sigma_a^{(2)}(x'_a - y_a) S_a^R(y_a) d^4 x' d^4 y + \dots, \quad (35)$$

где, как и в предыдущем равенстве, были выписаны явно лишь члены порядка  $e_a^2$  ( $a = 1, 2$ ). Подстановка (35) в (16) еще не приводит правую часть к виду (34). Для восполнения пробела нам понадобится тождество

$$S_a^R(x - y) = \frac{1}{i} \int S_a^R(x - x') \gamma_0^{(a)} S_a^R(x' - y) d^3 x', \quad (a = 1, 2), \quad (36)$$

справедливое при  $x^0 > x'^0 > y^0$ . Равенство (36) получается из аналогичного тождества для антикоммутирующего свободного дираковского поля

$$S(x - y) = \frac{1}{i} \int S(x - x') \gamma_0 S(x' - y) d^3 x'. \quad (37)$$

Чтобы проверить это равенство, заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} S(x - x') \gamma_\mu S(x' - y) = 0$$

и, следовательно, интеграл в правой части не зависит от  $x'_0$ . Далее справедливость (37) следует из того, что обе части равенства удовлетворяют уравнению Дирака и что  $-iS(0, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \gamma_0 = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Равенство (36) вытекает отсюда в силу связи  $S_a^R(x - y) = \theta(x^0 - y^0) S_a(x - y)$ .

Подстановка (35) в (16) вместе с повторным применением (36) и сравнение полученного результата с (34) приводят к искомой формуле (32).

Явный вид собственно-энергетической поправки  $\Sigma_a^{(2)}$  можно получить на основе диаграммной техники для запаздывающих функций, развитой в работе [91]. Чтобы не загромождать здесь изложение обсуждением этой техники, выведем интересующее нас разложение непосредственно — подстановкой итерационного решения уравнений Янга — Фельдмана в определение (17). Вновь используя тождество (36), находим:

$$S_a^{R'}(x) = S_a^R(x) - ie_a^2 \int S_a^R(x-y) \gamma_\mu^{(a)} [S_a^R(y-z) D_0^{(+)}(y-z) - S_a^{(-)}(y-z) D_0^R(y-z)] \gamma^{(a)\mu} S_a^R(z) d^4y d^4z + \dots, \quad (38)$$

где использованы обычные обозначения:

$$D_0^{(\pm)}(x) = \pm \frac{1}{i} \int \exp(\mp iqx) (dq)_0, \quad (D_0(x) = D_0^{(+)}(x) + D_0^{(-)}(x));$$

$$D_0^{R, A}(x) = \int \frac{\exp(-iqx)}{q^2 \pm i0q^0} \cdot \frac{d^4q}{(2\pi)^4}; \quad (39a)$$

$$S_a^{(\pm)}(x) = i \int (\gamma^{(a)q} \pm m_a) \exp(\mp iqx) (dq)_{m_a} \quad (a = 1, 2); \quad (39b)$$

$$(dq)_m = \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0}; \quad q^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2}. \quad (39b)$$

Сравнивая равенства (38) и (35), находим

$$\Sigma_a^{(2)}(x) = -i e_a^2 \gamma_\mu^{(a)} [S_a^R(x) D_0^{(+)}(x) - S_a^{(-)}(x) D_0^R(x)] \gamma^{(a)\mu}. \quad (40)$$

Произведение обобщенных функций в правой части (40) на самом деле не определено, как явствует из линейной расходимости фурье-образа:

$$\Sigma_a^{(2)}(p) = e_a^2 \gamma_\mu^{(a)} \int \frac{(p-k) \gamma^{(a)} + m_a}{(p-k)^2 - m_a^2 + i0(p_0 - k_0)} (dk)_0 \gamma^{(a)\mu} - e_a^2 \gamma_\mu^{(a)} \int \frac{k \gamma^{(a)} - m_a}{(p+k)^2 + i0(p_0 + k_0)} (dk)_{m_a} \gamma^{(a)\mu}.$$

Конечный вклад собственно-энергетической части  $\Sigma_a^{(2)}(p)$  определяется обычными условиями перенормировки. Если записать  $\Sigma_a^{(2)}$  из соображений ковариантности в виде

$$\Sigma_a^{(2)}(p) = A_a(p^2) + (p\gamma^{(a)} - m_a) B_a(p^2), \quad (41a)$$

то положим

$$A_a(m_a'^2) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \Sigma_a^{(2)} \Big|_{\hat{p}=m_a'} \equiv \equiv \left[ 2 \frac{dA_a}{dp^2} \hat{p} + B_a + 2(\hat{p} - m_a) \hat{p} \frac{dB_a}{dp^2} \right] \Big|_{\hat{p}=m_a'} = 0, \quad (41b)$$

где в задаче о связанных состояниях удобно считать  $m_a - m'_a = \mu_a \alpha^2 (> 0)$ .

Явное перенормированное выражение для  $\Sigma_a^{(2)}$  удобнее всего найти дисперсионным методом, пользуясь тем, что для функций  $A_a$  и  $B_a$ , удовлетворяющих (41б), справедливы представления

$$A_a(p^2) = \frac{p^2 - m_a^2}{\pi} \int_{m_a^2}^{\infty} \frac{\rho_a(\tau) d\tau}{(\tau - m_a^2)(\tau - p^2 - i0p^0)}; \quad (42a)$$

$$B_a(p^2) = C_a + \frac{p^2 - m_a^2}{\pi} \int_{m_a^2}^{\infty} \frac{\sigma_a(\tau) d\tau}{(\tau - m_a^2)(\tau - p^2 - i0p^0)}, \quad (42б)$$

где  $C_a = C_a(m_a, m'_a)$  определяется из второго условия (41б). Абсорбтивные части определяются, согласно работе [16], из первого приближения к среднему по вакууму от спинорных токов (31г):

$$\begin{aligned} & 2\rho_a(k^2) + 2(k\gamma^{(a)} - m_a)\sigma_a(k^2) = \\ & = \int \langle 0 | h_a(x) \tilde{h}_a(0) | 0 \rangle \exp(ikx) d^4x, \quad a = 1, 2. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\frac{1}{\tau - m_a^2} \rho_a(\tau) = \frac{e_a^2 m_a}{16\pi\tau} \left( 3 - \frac{m_a^2}{\tau} \right), \quad \frac{1}{\tau - m_a^2} \sigma_a(\tau) = \frac{e_a^2}{16\pi\tau} \left( 1 + \frac{m_a^2}{\tau} \right).$$

Перейдем к интересующей нас поправке запаздывающей функции Грина (32). Запишем ее фурье-образ в виде суммы

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(P, \mathbf{p}) &= \int \Sigma^{(2)}(X, \mathbf{x}) \exp[(iPX - i\mathbf{p}\mathbf{x}]) d^4X d^3x = \quad 38 \\ &= \Sigma_1^{(2)}(P, \mathbf{p}) + \Sigma_2^{(2)}(P, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

где по определению

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1^{(2)}(P, \mathbf{p}) &= \frac{1}{i} \int \beta^{(1)} \Sigma_1^{(2)}(X_0, \mathbf{X} + \mu_2 \mathbf{x}) S_2^R(X_0, \mathbf{X} - \mu_1 \mathbf{x}) \beta^{(2)} \times \\ &\quad \times \exp(iPX - i\mathbf{p}\mathbf{x}) d^4X d^3x; \\ \Sigma_2^{(2)}(P, \mathbf{p}) &= \frac{1}{i} \int S_1^R(X_0, \mathbf{X} + \mu_2 \mathbf{x}) \beta^{(1)} \beta^{(2)} \Sigma_2^{(2)}(X_0, \mathbf{X} - \mu_1 \mathbf{x}) \times \\ &\quad \times \exp(iPX - i\mathbf{p}\mathbf{x}) d^4X d^3x. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Выполняя указанные интегрирования в (43) с учетом перенормированных выражений (41), (42) для  $\Sigma_a^{(2)}$ , приходим к следующему

результату:

$$\begin{aligned} & \Sigma_1^{(2)}(P, \mathbf{p}) = \\ & = [(P_0 - H_2(\mathbf{p}_2))^2 - E_1^2(\mathbf{p}_1)] \frac{1}{\pi} \int_{m_1^2}^{\infty} \frac{\sigma_1(\tau)}{\tau - m_1^2} \cdot \frac{d\tau}{H_1(-\mathbf{p}_1; \tau) - H_2(\mathbf{p}_2) - P_0 - i0} + \\ & \quad + [(P_0 - H_2(\mathbf{p}_2))^2 - E_1^2(\mathbf{p}_1)] \frac{\beta^{(1)}}{\pi} \int_{m_1^2}^{\infty} \frac{(m_1 + \sqrt{\tau}) \sigma_1(\tau)}{\tau - m_1^2} \times \\ & \quad \times \frac{d\tau}{(P_0 - H_2(\mathbf{p}_2) + i0)^2 - E^2(\mathbf{p}_1; \tau)} - [(P_0 - H_2(\mathbf{p}_2))^2 - E_1^2(\mathbf{p}_1)] \times \\ & \quad \times \frac{\beta^{(1)}}{\pi} \int_{m_1^2}^{\infty} \frac{\rho_1(\tau)}{\tau - m_1^2} \cdot \frac{d\tau}{(P_0 - H_2(\mathbf{p}_2) + i0)^2 - E^2(\mathbf{p}_1; \tau)}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \Sigma_2^{(2)}(P, \mathbf{p}) = [(P_0 - H_1(\mathbf{p}_1))^2 - E_2^2(\mathbf{p}_2)] \frac{1}{\pi} \int_{m_2^2}^{\infty} \frac{\sigma_2(\tau)}{\tau - m_2^2} \times \\ & \quad \times \frac{d\tau}{H_1(\mathbf{p}_1) + H_2(-\mathbf{p}_2; \tau) - P_0 - i0} + [(P_0 - H_1(\mathbf{p}_1))^2 - E_2^2(\mathbf{p}_2)] \frac{\beta^2}{\pi} \times \\ & \quad \times \int_{m_2^2}^{\infty} \frac{(m_2 + \sqrt{\tau}) \sigma^2(\tau)}{\tau - m_2^2} \cdot \frac{d\tau}{(P_0 - H_1(\mathbf{p}_1) + i0)^2 - E^2(\mathbf{p}_2; \tau)} - \\ & \quad - [(P_0 - H_1(\mathbf{p}_1))^2 - E_2^2(\mathbf{p}_2)] \frac{\beta^2}{\pi} \int_{m_2^2}^{\infty} \frac{\rho^2(\tau)}{\tau - m_2^2} \cdot \frac{d\tau}{(P_0 - H_1(\mathbf{p}_1) + i0)^2 - E^2(\mathbf{p}_2; \tau)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Новые обозначения в последних двух равенствах следующие:

$$\begin{aligned} E_a(\mathbf{p}) &= \sqrt{m_a^2 + \mathbf{p}^2}; \quad E(\mathbf{p}; \tau) = \sqrt{\tau + \mathbf{p}^2}; \\ H_a(\mathbf{p}; \tau) &= \sqrt{\tau} \beta^{(a)} + \mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}^{(a)}, \quad a = 1, 2; \end{aligned}$$

напомним еще, что  $\mathbf{p}_1 = \mu_1 \mathbf{P} + \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_2 = \mu_2 \mathbf{P} - \mathbf{p}$ .

**Первое приближение для квазипотенциала.** Следующий шаг после выделения расходящейся собственно-энергетической части  $\Sigma^{(2)}$  — это вычисление низшего приближения для ядра  $K'_{00}$ . Использование итерационного решения уравнений Янга — Фельдмана (31) показывает, что для нахождения требуемого результата достаточно подчитать сумму

$$\sum_{n'} \mathcal{A}_{0n'}(\mathbf{x}) \mathcal{G}_0^R(P_B - P_{n'}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{A}_{n'0}(\mathbf{y}) = K(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y})_{00}. \quad (46)$$

Следует добавить, что в качестве промежуточных состояний  $|n'\rangle$  берутся состояния с одним фотоном и  $A_\mu$  заменяется операторами свободного электромагнитного поля.

Таким образом, сумма по  $n'$  в (46) сводится к интегрированию по импульсу однофотонных состояний и к суммированию по поляризациям фотона. Точнее, при нормировке, в которой оператор уничтожения и рождения фотонов (в фейнмановской калибровке) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu^*(\mathbf{q})] &= -g_{\mu\nu}(2\pi)^3 2p_0\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}), \\ p_0 &= |\mathbf{p}|, \quad (g_{\mu\nu}) = (+ - - -), \end{aligned} \quad (47)$$

имеем

$$|n'\rangle \rightarrow a_\mu^*(\mathbf{k})|0\rangle, \quad \sum_{n'} \rightarrow -\sum_\mu \int (dk)_0 g^{\mu\mu} \quad (48)$$

(ср. приложение 2).

Теперь несложно подсчитать матричные элементы  $\mathcal{A}_{0n'}$  и  $\mathcal{A}_{n'0}$ , определенные равенством (6), при  $\mathbf{x}_1 = \mu_2\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_2 = -\mu_1\mathbf{x}$  и проинтегрировать по  $k$ . Разность

$$\mathcal{Y}^{(2)}(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_{00}^{(2)}(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum^{(2)}(P_B, \mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad P_B = (w, \mathbf{0}), \quad (49)$$

дает низшее приближение для квазипотенциала. В явном виде для  $\mathcal{Y}^{(2)}$  имеем следующее нелокальное выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{(2)}(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= e_1 e_2 \int [\alpha_\mu^{(1)} \mathcal{G}_0^R(w - |\mathbf{k}|, -\mathbf{k}; \mathbf{x} - \mathbf{y}) \alpha^{(2)\mu} \times \\ &\times \exp[i\mathbf{k}(\mu_2\mathbf{x} + \mu_1\mathbf{y})] + \alpha_\mu^{(2)} \mathcal{G}_0^R(w - |\mathbf{k}|, -\mathbf{k}; \mathbf{x} - \mathbf{y}) \alpha^{(1)\mu} \times \\ &\times \exp[-i\mathbf{k}(\mu_1\mathbf{x} - \mu_2\mathbf{y})]] (dk)_0. \end{aligned} \quad (50)$$

В импульсном пространстве потенциал можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} V_w^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \int \mathcal{Y}^{(2)}(P_B; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \exp(-ipx + iqu) d^3x d^3y = \\ &= \frac{e_1 e_2}{2|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} \left[ \alpha_\mu^{(1)} \frac{1}{H_1(\mathbf{g}) + H_2(-\mathbf{p}) + |\mathbf{p}-\mathbf{q}|-w} \alpha^{(2)\mu} + \right. \\ &\left. + \alpha_\mu^{(2)} \frac{1}{H_1(\mathbf{p}) + H_2(-\mathbf{q}) + |\mathbf{p}-\mathbf{q}|-w} \alpha^{(1)\mu} \right], \quad P_B = (w, \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (51)$$

Отметим, что проекция этого оператора на состояния с положительной энергией совпадает с выражением, полученным в работе [34] приравниванием времен в ядре Бете — Солпитера. В приближении, в котором  $H_1 + H_2$  заменяется полной энергией  $w$ :

$$H_1(\mathbf{q}) + H_2(-\mathbf{p}) = w = H_1(\mathbf{p}) + H_2(-\mathbf{q}),$$

для  $V_w^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  находим «релятивистский закон Кулона» (см. работу [39]):

$$V_w^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} [1 - \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}]. \quad (52)$$

**Вывод квазипотенциального уравнения из уравнения типа Бете-Солпитера для четырехточечной запаздывающей функции Грина**

Связь двухвременной волновой функции с запаздывающей четырехточечной функцией Грина. Будем здесь применять аппарат запаздывающих функций Грина нескольких аргументов с целью вывести уравнение для волновой функции  $\langle 0 | \psi_1(t, x_1) \psi_2(t, x_2) | B \rangle$ . Первым шагом к этому будет нахождение уравнения для двухвременной волновой функции, определяемой матричным элементом (см. работы [9, 94]:

$$\psi_S(x_1, x_2) = \langle 0 | \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) | S \rangle. \tag{53}$$

Здесь  $| S \rangle$  — асимптотическое состояние рассеяния, образованное из двух заряженных частиц типа 1 и 2 с импульсами  $q_1$  и  $q_2$ :

$$| S \rangle = b_1^{*in}(q_1) b_2^{*in}(q_2) | 0 \rangle \tag{54}$$

(спиновые индексы опущены). Операторы уничтожения и рождения спиновых частиц удовлетворяют антиперестановочным соотношениям

$$\{b_a^{in}(p), b_{a'}^{*in}(q)\} = (2\pi)^3 \frac{p_a^0}{m_a} \delta(p - q) \delta_{aa'},$$

$$p_a^0 = \sqrt{m_a^2 + p_a^2}, \quad (a, a' = 1, 2).$$

При помощи редукционной техники находим

$$\begin{aligned} \psi_S(x_1, x_2) = & - \langle 0 | \psi_1(x_1) b_1^{*in}(q_1) \psi_2(x_2) b_2^{*in}(q_2) | 0 \rangle + \\ & + i \int d^4 y_1 \langle 0 | \psi_1(x_1) R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_1(y_1)) b_2^{*in}(q_2) | 0 \rangle \times \\ & \times \overleftarrow{D}_1(y_1) u_1(q_1) \exp(iq_1 y_1), \end{aligned} \tag{55}$$

где

$$\overleftarrow{D}_1(y_1) = i\gamma^{(1)} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_1} + m_1.$$

В этой и следующих формулах символом  $R(\psi(x); \varphi(y))$  обозначается величина  $\theta(x^0 - y^0) \{\psi(x), \varphi(y)\}$ .

Дальнейшие преобразования полученных матричных элементов дают

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \psi_1(x_1) b_1^{*in}(q_1) \psi_2(x_2) b_2^{*in}(q_2) | 0 \rangle = \\ & = i \int d^4 y_1 \langle 0 | R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_1(y_1), \psi_2(x_2)) b_2^{*in}(q_2) | 0 \rangle \times \\ & \quad \overleftarrow{D}_1(y_1) u_1(q_1) \exp[-iq_1 y_1] \end{aligned} \tag{56}$$

и

$$\begin{aligned}
& i \int d^4 y_1 \langle 0 | \psi_1(x_1) R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_1(y_1)) b_2^{*in}(\mathbf{q}_2) | 0 \rangle \times \\
& \quad \times \tilde{D}_1(y_1) u_1(\mathbf{q}_1) \exp[-iq_1 y_1] = \\
& = \int d^4 y_1 d^4 y_2 \langle 0 | [\psi_1(x_1) R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_2(y_2), \tilde{\psi}_1(y_1)) - \\
& \quad - R_1(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_2(y_2)) R(\psi_1(x_2); \tilde{\psi}_1(y_1))] | 0 \rangle \times \\
& \quad \times \tilde{D}_1(y_1) \tilde{D}_2(y_2) u_1(\mathbf{q}_1) u_2(\mathbf{q}_2) \exp(-iq_1 y_1 - iq_2 y_2). \quad (57)
\end{aligned}$$

Перебрасывая оператор  $b_2^{*in}$  налево и подставляя все результаты в правую часть (55), получаем

$$\begin{aligned}
\psi_S(x_1, x_2) &= i^2 \int d^4 y_1 d^4 y_2 G(x_1, x_2; y_1, y_2) i\beta^{(1)}\beta^{(2)} \times \\
& \times \tilde{D}_1(y_1) \tilde{D}_2(y_2) u_1(\mathbf{q}_1) u_2(\mathbf{q}_2) \exp[-iq_1 y_1 - iq_2 y_2], \quad (58)
\end{aligned}$$

где по определению

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2; y_1, y_2) &= \frac{1}{i} \langle 0 | [ -R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_1(y_1)) \times \\
& \times R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_2(y_2)) + R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_2(y_2)) R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_1(y_1)) - \\
& \quad - \psi_1(x_1) R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_2(y_2), \tilde{\psi}_1(y_1)) + \\
& \quad + R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_1(y_1), \tilde{\psi}_2(y_2)) \psi_2(x_2) - \\
& \quad - R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_1(y_1), \psi_2(x_2), \tilde{\psi}_2(y_2))] | 0 \rangle \beta^{(1)}\beta^{(2)}. \quad (59)
\end{aligned}$$

Участвующие здесь запаздывающие произведения нескольких спинорных операторов определяются равенствами

$$\begin{aligned}
R(\psi(x); \varphi(y), \chi(z)) &= \\
&= [\{\psi(x), \varphi(y)\}, \chi(z)] \theta(x^0 - y^0) \theta(y^0 - z^0) - \\
& - [\{\psi(x), \chi(z)\}, \varphi(y)] \theta(x^0 - z^0) \theta(z^0 - y^0) \quad (60a)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_1(y_1), \psi_2(x_2), \tilde{\psi}_2(y_2)) = \\
& = R(\psi_1(x_1); \Phi_1(\xi_1), \Phi_2(\xi_2), \Phi_3(\xi_3)) = \\
& = \sum_{(ijk)} (-1)^{\pi(ijk)} \{[\{\psi_1(x_1), \Phi_i(\xi_i)\}, \Phi_j(\xi_j)], \Phi_k(\xi_k)\} \times \\
& \quad \times \theta(x_1^0 - \xi_i^0) \theta(\xi_i^0 - \xi_j^0) \theta(\xi_j^0 - \xi_k^0). \quad (60б)
\end{aligned}$$

В последнем определении сумма берется по перестановкам  $(ijk)$  трех индексов  $i, j$  и  $k$ ;  $\pi(ijk)$  — четность перестановки  $(ijk)$ ; исходному набору (123) индексов сопоставляется набор координат

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (y_1, x_2, y_2) \quad (61a)$$



и набор операторов

$$(\Phi_1(\xi_1), \Phi_2(\xi_2), \Phi_3(\xi_3)) = (\tilde{\Psi}_1(y_1), \Psi_2(x_2), \tilde{\Psi}_2(y_2)). \quad (616)$$

В отличие от работы [15] вывод выражения (59) для запаздывающей четырехточечной функции Грина проделан здесь редукцией лишь по двум из четырех частиц, другими словами, наше выражение содержит амплитуду рассеяния, частично экстраполированную — по двум концам — вне массовой оболочки. В связи с этим в правой части равенства (59) кроме первого и последнего членов, полученных в работе [15], имеются еще три слагаемых. Их вклад на массовой поверхности равен нулю.

Введем дополнительные обозначения для более удобной записи равенства (58):

$$\tilde{G}_0^{-1}(y_1, y_2) = i\beta^{(1)}\beta^{(2)}\tilde{D}_1(y_1)\tilde{D}_2(y_2); \quad (62)$$

$$\Psi_{q_1q_2}(y_1, y_2) = -u_1(\mathbf{q}_1)u_2(\mathbf{q}_2)\exp(-iq_1y_1 + iq_2y_2). \quad (63)$$

Отметим, что, когда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — операторы свободных спинорных полей, матричный элемент (53) равен  $\Psi_{q_1q_2}(y_1, y_2)$ . Знак минус появляется из-за антикоммутируемости операторов  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . В новых обозначениях равенство (58) принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_S(x_1, x_2) &= \\ &= \int G(x_1, x_2; y_1, y_2)\tilde{G}_0^{-1}(y_1, y_2)\Psi_{q_1q_2}(y_1, y_2)d^4y_1d^4y_2. \end{aligned} \quad (64)$$

**Уравнение для двухвременной волновой функции.** Выведем уравнение для четырехточечной функции Грина (59), на основе которого получим из (64) уравнение для функции  $\psi_S$ .

Прежде всего отметим, что определенная равенством (59) полная запаздывающая функция естественным образом разбивается на сумму двух слагаемых

$$G(x_1, x_2; y_1, y_2) = G_0^R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) + G'(x_1, x_2; y_1, y_2), \quad (65)$$

где

$$G_0^R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = i^{-1}S_1^R(x_1 - y_1)S_2^R(x_2 - y_2)\beta^{(1)}\beta^{(2)}. \quad (66)$$

Действительно, первый член в правой части (59) после введения полной системы промежуточных состояний приобретает вид

$$\begin{aligned} i^{-1}\langle 0 | iR(\Psi_1(x_1); \tilde{\Psi}_1(y_1))iR(\Psi_2(x_2); \tilde{\Psi}_2(y_2)) | 0 \rangle \beta^{(1)}\beta^{(2)} &= \\ = G^R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) + \sum_n' i^{-1}\langle 0 | iR(\Psi_1(x_1); \tilde{\Psi}_1(y_1)) | n \rangle \times \\ \times \langle n | iR(\Psi_2(x_2); \tilde{\Psi}_2(y_2)) | 0 \rangle \beta^{(1)}\beta^{(2)}, \end{aligned} \quad (67)$$

где

$$G^R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = i^{-1}S_1^{\prime R}(x_1 - y_1)S_2^{\prime R}(x_2 - y_2)\beta^{(1)}\beta^{(2)}. \quad (68)$$

Знак  $\sum'_n$  означает суммирование по всем состояниям  $|n\rangle$  полной системы, за исключением вакуумного. При получении равенства (67) использовано еще определение (17) полных запаздывающих функций  $S_a^R$ .

Разложение  $G^R$  в ряд по степеням зарядов  $e_1$  и  $e_2$  начинается со свободной функции Грина (66):

$$G^R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = G_0^R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) + \dots$$

Следовательно, правая часть (67) записывается как

$$\begin{aligned} & G_0^R(x_1 - y_1, x_2 - y_2) + \\ & + \sum'_n i^{-1} \langle 0 | iR(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_1(y_1)) | n \rangle \times \\ & \times \langle n | iR(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_2(y_2)) | 0 \rangle \beta^{(1)} \beta^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

Объединение этого выражения с остальными членами в правой части (59) приводит к представлению (65) для полной функции Грина.

Перейдем к выводу уравнения для  $G$ . Полагая

$$\begin{aligned} K(u_1 u_2; v_1 v_2) &= i\beta^{(1)} \vec{D}_1(u_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(u_2) \times \\ &\times G'(u_1 u_2; v_1 v_2) i\beta^{(1)} \vec{D}_1(v_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(v_2) = \\ &= \vec{G}_0^{-1}(u_1, u_2) G'(u_1 u_2; v_1 v_2) G_0^{-1}(v_1, v_2), \end{aligned} \quad (69)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_0^{-1}(v_1, v_2) &= i\beta^{(1)} \vec{D}_1(v_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(v_2); \\ \vec{D}_a(x) &= -i\gamma_\mu^{(a)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_a, \quad a = 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

перепишем соотношение (65) в форме

$$\begin{aligned} G(x_1 x_2; y_1 y_2) &= G_0^R(x_1 x_2; y_1 y_2) + \int G_0^R(x_1 x_2; u_1 u_2) K(u_1 u_2; v_1 v_2) \times \\ &\times G_0^R(v_1, v_2; y_1 y_2) d^4 u_1 d^4 u_2 d^4 v_1 d^4 v_2. \end{aligned} \quad (71)$$

Для явного нахождения величины  $K$ , согласно (69), следует подсчитать  $G'$ , т. е. некоторое среднее по вакууму от произведения четырех спинорных операторов. Ряд по степеням зарядов для функций  $G'$  и  $K$  можно получить теперь при помощи итерационного решения уравнений Янга — Фельдмана (31). Исходя из представления (71) для  $G$ , в котором величина  $K$  дается бесконечным рядом по  $e_1$  и  $e_2$ , получаем следующее уравнение

для четырехточечной функции Грина:

$$G(x_1x_2; y_1y_2) = G_0^R(x_1x_2; y_1y_2) + \int G_0^R(x_1x_2; u_1u_2) U(u_1u_2; v_1v_2) \times \\ \times G(v_1v_2; y_1y_2) d^4u_1 d^4u_2 d^4v_1 d^4v_2, \quad (72a)$$

или в операторной форме

$$G = G_0^R + G_0^R UG. \quad (72b)$$

Можно показать, что в терминах диаграммной техники, развитой в работе [91] для запаздывающих функций, ядро  $U$  выражается в виде суммы двухчастично неприводимых диаграмм. Это значит, что в указанной сумме отсутствуют двухчастично приводимые блоки, которые связаны линиями, соответствующими запаздывающим пропагаторам.

В уравнении (72) величина  $U$  связана с  $K$  равенством

$$U = K(1 + G_0^R K)^{-1}. \quad (73)$$

Если записать  $U$  как бесконечный ряд

$$U = K \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (G_0^R K)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} U_n,$$

то  $n$ -й член этого ряда будет иметь следующую структуру:

$$U_n(x_1x_2; y_1y_2) = \\ = i\beta^{(1)} \vec{D}_1(x_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(x_2) \tilde{U}_n(x_1x_2; y_1y_2) i\beta^{(1)} \vec{D}_1(y_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(y_2),$$

где

$$\tilde{U}_n(x_1x_2; y_1y_2) = (-1)^n \int G'(x_1x_2; u'_1u''_1) \times \\ \times i\beta^{(1)} \vec{D}_1(u'_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(u''_1) G'(u'_1u''_1; u'_2u''_2) \dots i\beta^{(1)} \vec{D}_1(u'_n) \times \\ \times \beta^{(2)} \vec{D}_2(u''_n) G'(u'_nu''_n; y_1y_2) d^4u'_1 d^4u''_1 \dots d^4u'_n d^4u''_n.$$

Из последних соотношений вытекает, что  $U$  можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} U(x_1x_2; y_1y_2) &= i\beta^{(1)} \vec{D}_1(x_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(x_2) \times \\ &\times \tilde{U}(x_1x_2; y_1y_2) i\beta^{(1)} \vec{D}_1(y_1) \beta^{(2)} \vec{D}_2(y_2); \\ \tilde{U}(x_1x_2; y_1y_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n(x_1x_2; y_1y_2). \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Из равенства (64) при помощи уравнения (72a) приходим к неоднородному интегральному уравнению

$$\psi_S(x_1, x_2) = \psi_{q_1q_2}(x_1, x_2) + \\ + \int G_0^R(x_1x_2; y_1y_2) U(y_1y_2; z_1z_2) \psi_S(z_1, z_2) d^4y_1 d^4y_2 d^4z_1 d^4z_2. \quad (75)$$

**Переход к одновременной волновой функции.** Теперь сделаем последний шаг: перейдем от уравнения (75) к уравнению для волновой функции с равными временами

$$\varphi_S(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi_S(x_1, x_2)|_{x_1^0=x_2^0=t}. \quad (76)$$

Полагая  $x_1^0 = x_2^0 = t$  в (75), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_S(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \varphi_{q_1 q_2}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \\ &+ \int \mathcal{G}_0^R(t - y_1^0, \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1; t - x_2^0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2) U(y_1 y_2; z_1 z_2) \times \\ &\times \psi_S(z_1, z_2) d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 z_1 d^4 z_2, \end{aligned} \quad (77)$$

где

$$\varphi_{q_1 q_2}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi_{q_1 q_2}(x_1, x_2)|_{x_1^0=x_2^0=t}. \quad (78)$$

При помощи тождества (38), используя выражение (14) для функции Грина  $\mathcal{G}_0^R$ , запишем интеграл в правой части (77) в виде

$$\begin{aligned} \int \mathcal{G}_0^R(t - t', \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2) U'(t', t''; \mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1; \mathbf{y}_2, \mathbf{u}_2; z_1, z_2) \times \\ \times \psi_S(z_1, z_2) dt' dt'' d^3 y_1 d^3 y_2 d^3 u_1 d^3 u_2 d^4 z_1 d^4 z_2, \end{aligned}$$

где по определению

$$\begin{aligned} U'(t', t''; \mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1; \mathbf{y}_2, \mathbf{u}_2; z_1, z_2) = \\ = (-i) [S_2^R(t' t'', \mathbf{y}_2 - \mathbf{u}_2) \beta^{(2)} \delta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{u}_1) U(t' \mathbf{u}_1, t'' \mathbf{u}_2; z_1, z_2) + \\ + S_1^R(t' - t'', \mathbf{y}_1 - \mathbf{u}_1) \beta^{(1)} \delta(\mathbf{y}_2 - \mathbf{u}_2) U(t'' \mathbf{u}_1, t' \mathbf{u}_2; z_1, z_2)]. \end{aligned} \quad (79)$$

Приведенные преобразования под ядром  $U$  аналогичны операциям, проделанным выше, где было использовано тождество (36) для получения функций с приравненными временами при подсчете первого приближения к функции Грина.

Итак, вместо (78) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_S(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \varphi_{q_1 q_2}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \\ &+ \int \mathcal{G}_0^R(t - t', \mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2) U'(t', t''; \mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1; \mathbf{y}_2, \mathbf{u}_2; z_1, z_2) \times \\ &\times \psi_S(z_1, z_2) dt' dt'' d^3 y_1 d^3 y_2 d^3 u_1 d^3 u_2 d^4 z_1 d^4 z_2. \end{aligned} \quad (80)$$

Под интегралом в последнем равенстве подставим вместо  $\psi_S$  правую часть уравнения (75). Опуская в этом члене интеграционные переменные, кроме  $z_1$  и  $z_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \int U'(\dots; z_1, z_2) \psi_S(z_1, z_2) d^4 z_1 d^4 z_2 = \\ = \int U'(\dots; z_1, z_2) \psi_{q_1 q_2}(z_1, z_2) d^4 z_1 d^4 z_2 + \\ + \int U'(\dots; z_1, z_2) G_0^R(z_1 z_2; z'_1 z'_2) U(z'_1 z'_2; z''_1 z''_2) \times \\ \times \psi_S(z''_1, z''_2) d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z'_1 d^4 z'_2 d^4 z''_1 d^4 z''_2. \end{aligned} \quad (81)$$

Далее выражаем  $G_0^R$  в виде произведения  $S_1^R$  и  $S_2^R$  и опять применяем представление (36) для запаздывающих функций. Используя также определение (79) для  $U'$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int U'(\dots; z_1, z_2) \psi_S(z_1, z_2) d^4z_1 d^4z_2 = \\ & = \int U'(\dots; z_1, z_2) \psi_{q_1 q_2}(z_1, z_2) d^4z_1 d^4z_2 + \\ & + \int U'(\dots; z_1, z_2) G_0^R(z_1 z_2; z_1^0 \mathbf{u}_1; z_1^0 \mathbf{u}_2) \times \\ & \times U'(z_1^0, z_2^0; \mathbf{u}_1, \mathbf{z}'_1; \mathbf{u}_2, \mathbf{z}'_2; z_1'', z_2'') \psi_S(z_1'', z_2'') \times \\ & \times d^4z_1 d^4z_2 d^4z_1' d^4z_2' d^4z_1'' d^4z_2'' d^3u_1 d^3u_2. \end{aligned} \tag{82}$$

Преобразуем (в отдельности) первый и второй интегралы в правой части этого равенства. Сначала рассмотрим член с

$$\psi_{q_1 q_2} = -u_1(\mathbf{q}_1) \exp(-iq_1 z_1) u_2(\mathbf{q}_2) \exp(-iq_2 z_2).$$

Воспользуемся обстоятельством, что решения свободного уравнения Дирака можно представить при помощи запаздывающих функций Грина:

$$\begin{aligned} u_a(\mathbf{q}_a) \exp(-iq_a z_a) &= -i \int S_a^R(z_a - \zeta_a) \beta^{(a)} u_a(\mathbf{q}_a) \times \\ & \times \exp(-iq_a \zeta_a) d^3 \zeta_a, \quad z_a^0 > \zeta_a^0 \quad (a = 1, 2). \end{aligned} \tag{83}$$

Это дает возможность написать

$$\begin{aligned} & \int U'(\dots; z_1, z_2) \psi_{q_1 q_2}(z_1, z_2) d^4z_1 d^4z_2 = \\ & = -i \int [U'(\dots; z_1^0 \mathbf{z}_1, z_2^0 \mathbf{z}_2) \delta(\mathbf{z}_1 - \mathbf{v}_1) S_1^R(z_2^0 - z_1^0, \mathbf{z}_2 - \mathbf{v}_2) \beta^{(2)} + \\ & + U'(\dots; z_2^0 \mathbf{z}_1, z_1^0 \mathbf{z}_2) S_1^R(z_2^0 - z_1^0, \mathbf{z}_1 - \mathbf{v}_1) \beta^{(1)} \delta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{v}_2)] \times \\ & \times \varphi_{q_1 q_2}(z_1^0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d^4z_1 d^4z_2 d^3v_1 d^3v_2. \end{aligned} \tag{84}$$

Для оставшегося второго интеграла в правой части (82) отметим, что при интегрировании по  $z_1$  и  $z_2$  выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \int U'(\dots; z_1, z_2) G_0^R(z_1 z_2; z_1^0 \mathbf{u}_1, z_1^0 \mathbf{u}_2) d^4z_1 d^4z_2 = \\ & = -i \int [U'(\dots; z_1^0 \mathbf{z}_1, z_2^0 \mathbf{z}_2) \delta(\mathbf{z}_1 - \mathbf{v}_1) S_2^R(z_2^0 - z_1^0, \mathbf{z}_2 - \mathbf{v}_2) \beta^{(2)} + \\ & + U'(\dots; z_2^0 \mathbf{z}_1, z_1^0 \mathbf{z}_2) S_1^R(z_2^0 - z_1^0, \mathbf{z}_1 - \mathbf{v}_1) \beta^{(1)} \delta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{v}_2)] \times \\ & \times \mathcal{G}^R(z_1^0 - z_1^0, \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2) d^4z_1 d^4z_2 d^3v_1 d^3v_2. \end{aligned} \tag{84a}$$

Из равенств (84а), (84б) и (80) вытекает, что интеграл в левой части (82) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int U'(\dots; z_1, z_2) \Psi_S(z_1, z_2) d^4z_1 d^4z_2 = \\ & = -i \int [U'(\dots; z_1^0 z_1, z_2^0 z_2) \delta(z_1 - v_1) S_2^R(z_2^0 - z_1^0, z_2 - v_2) \beta^{(2)} + \\ & \quad + U'(\dots; z_2^0 z_1, z_1^0 z_2) S_1^R(z_2^0 - z_1^0, z_1 - v_1) \beta^{(1)} \delta(z_2 - v_2)] \times \\ & \quad \times \varphi_S(z_1^0, v_1, v_2) dz_1^0 dz_2^0 d^3z_1 d^3z_2 d^3v_1 d^3v_2. \end{aligned} \quad (84б)$$

Подставляя этот результат под знак интеграла в уравнении (82), находим

$$\begin{aligned} \varphi_S(t, x_1, x_2) &= \varphi_{q_1 q_2}(t, x_1, x_2) + \\ &+ \int \mathcal{G}_0^R(t-t', x_1-y_1, x_2-y_2) \mathcal{V}'(t', y_1, y_2; t'', v_1, v_2) \times \\ & \quad \times \varphi_S(t'', v_1, v_2) dt' d^3y_1 d^3y_2 dt'' d^3v_1 d^3v_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'(t', y_1, y_2; t'', v_1, v_2) &\equiv U''(t', y_1, y_2; t'', v_1, v_2) = \\ &= -i \int [U'(t', \tau; y_1, u_1; y_2, u_2; t'' z_1, \tau' z_2) \times \\ & \quad \times \delta(z_1 - v_1) S_2^R(\tau' - t'', z_2 - v_2) \beta^{(2)} + \\ & \quad + U'(t', \tau; y_1, u_1; y_2, u_2; \tau' z_1, t'' z_2) S_1^R(\tau' - t'' z_1 - v_1) \times \\ & \quad \times \beta^{(1)} \delta(z_2 - v_2)] d\tau d^3u_1 d^3u_2 d\tau' d^3z_1 d^3z_2. \end{aligned} \quad (85)$$

Равенство (85) и есть искомое уравнение для волновой функции  $\varphi_S$  с приравненными временами двух частиц.

Воспользуемся определением (79) функции  $U'$ , чтобы придать другую форму квазипотенциалу  $\mathcal{V}'$ . Наличие операторов  $\vec{D}_a$  и  $\vec{D}_a$  ( $a = 1, 2$ ) в представлении (74) для  $U$  сводит выражение (84а) к следующему:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'(t, x_1, x_2; t', x'_1, x'_2) &= [\beta^{(1)} \vec{D}_1(t x_1) + \beta^{(2)} \vec{D}_2(t x_2)] \times \\ & \quad \times \tilde{U}(t x_1, t x_2; t' x'_1, t' x'_2) [\beta^{(1)} \vec{D}_1(t' x'_1) + \beta^{(2)} \vec{D}_2(t' x'_2)]. \end{aligned} \quad (86)$$

Отсюда видно, что квазипотенциал определяется ядром  $\tilde{U}$  с приравненными временами.

### Вычисление квазипотенциала в низшем приближении

**Фейнмановская калибровка электромагнитного поля.** На основании формул (74), (68) и (73) низшее приближение  $\mathcal{V}'_{(2)}$  равно низшему приближению нетривиальной части функции Грина

$$\mathcal{V}'_{(2)} = G_{(2)} - G_0^R = G'_{(2)} \quad (87)$$

после приравнивания времен соответственно двух начальных и двух конечных частиц.

Рассмотрение всех слагаемых в выражении (59) для функции Грина показывает, что запаздывающее четырехточечное произведение тождественно равно нулю при двух равных временах и только член

$$A(x_1 x_2; x'_1 x'_2) \equiv \frac{1}{i} \langle 0 | R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}(x'_1)) R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_2(x'_2)) | 0 \rangle \beta^{(1)} \beta^{(2)} \quad (88)$$

дает ненулевой вклад в первом приближении. Это выражение удобно разделить на две части, вставляя полную систему промежуточных состояний между  $R(\psi_1; \tilde{\psi}_1)$  и  $R(\psi_2, \tilde{\psi}_2)$ :

$$A(x_1 x_2; y_1 y_2) = G^R(x_1 x_2; y_1 y_2) + \sum'_n \frac{1}{i} \langle 0 | R(\psi_1(x_1); \tilde{\psi}_1(y_1)) | n \rangle \langle n | R(\psi_2(x_2); \tilde{\psi}_2(y_2)) | 0 \rangle \beta^{(1)} \beta^{(2)}. \quad (89)$$

Здесь воспользовались определением (68) полной несвязной функции Грина. Штрих в знаке суммы  $\Sigma'$  означает, что суммирование происходит по всем промежуточным состояниям  $|n\rangle$ , за исключением вакуумного.

Выше была рассмотрена функция Грина  $\mathcal{G}^R$  и выведено явное выражение для поправки к свободной запаздывающей функции в первом приближении. Поэтому здесь остановимся только на том вкладе  $\mathcal{Y}'_{12}$  в  $\mathcal{Y}_{12}$ , который пропорционален  $e_1 e_2$ . Итерирование уравнений Янга — Фельдмана (31) приводит к следующему выражению для  $\mathcal{Y}'_{12}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}'_{12}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) = & - e_1 e_2 [\alpha_\mu^{(1)} S_1^R(t-t', \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \beta^{(1)} D^{(+)}(t-t', \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_2) \times \\ & \times S_2^R(t-t', \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) \beta^{(2)} \alpha^{(2)\mu} + \alpha_\mu^{(2)} S_1^R(t-t', \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \times \\ & \times \beta^{(1)} D^{(+)}(t'-t, \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_2) S_2^R(t-t', \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2) \beta^{(2)} \alpha^{(1)\mu}]. \quad (90) \end{aligned}$$

Интересно сравнить фурье-образ взаимодействия  $\mathcal{Y}'_{12}$  с выражением (51) для квазипотенциала. Используя формулы (39б) и (15) для функций  $D^{(+)}$  и  $Q_{1,2}^R$ , находим

$$\begin{aligned} V_{12}(w, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; w', \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = & \int \exp(iwt - i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1 - i\mathbf{p}_2 \mathbf{x}_2) \mathcal{Y}'_{12}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) \times \\ & \times \exp(iw't' + i\mathbf{q}_1 \mathbf{x}'_1 + i\mathbf{q}_2 \mathbf{x}'_2) dt d^3 x_1 d^3 x_2 dt' d^3 x'_1 d^3 x'_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^4 \delta(w - w') \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{e_1 e_2}{2|\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1|} \times \\
&\quad \times \left[ \alpha_\mu^{(1)} \frac{1}{H_1(\mathbf{q}_1) + H_2(\mathbf{p}_2) + |\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1| - w} \alpha^{(2)\mu} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_\mu^{(2)} \frac{1}{H_1(\mathbf{p}_1) + H_2(\mathbf{q}_2) + |\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1| - w} \alpha^{(1)\mu} \right] \equiv \\
&\equiv (2\pi)^4 \delta(w - w') \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) U_{12}(w; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2). \quad (91)
\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&\varphi_S(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \\
&= \int \Phi_S(w; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \exp(-iwt + i\mathbf{p}_1\mathbf{x}_1 + i\mathbf{p}_2\mathbf{x}_2) \frac{dw}{2\pi} \cdot \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3}
\end{aligned}$$

и проведем фурье-преобразование уравнения (85) для  $\varphi_S$ . В результате получим следующее неоднородное уравнение для волновой функции  $\Phi_S$  в случае задачи рассеяния:

$$\begin{aligned}
&\Phi_S(w; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \\
&= -(2\pi)^7 \delta(w - q_1^0 - q_2^0) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) u_1(\mathbf{q}_1) u_2(\mathbf{q}_2) + \\
&+ G_0^R(w, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \int (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) [\Sigma^{(2)}(w, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) + \\
&\quad + U_{12}(w; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)] \Phi_S(w; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}. \quad (92)
\end{aligned}$$

Под знаком интеграла в этом выражении участвует  $\Sigma^{(2)}$  — первая поправка к свободной запаздывающей функции Грина  $\mathcal{G}^R$ .

При отыскании связанных состояний в двухчастичной системе волновая функция удовлетворяет уравнению вида (92) без свободного члена. Это уравнение в системе центра инерции, в которой  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ , имеет вид

$$f_w(\mathbf{p}) = G_0^R(w, \mathbf{p}) \left[ \int V_w^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) f_w(\mathbf{k}) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} + \Sigma^{(2)}(w, \mathbf{p}) f_w(\mathbf{p}) \right], \quad (93)$$

где положено

$$\begin{aligned}
f_w(\mathbf{p}) &= \Phi_S(w; \mathbf{p}, -\mathbf{p}); \quad G_0^R(w, \mathbf{p}) = G_0^R(w, \mathbf{p}, -\mathbf{p}); \\
V_w^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) &= U_{12}(w; \mathbf{p}, -\mathbf{p}; \mathbf{k}, -\mathbf{k}); \quad \Sigma^{(2)}(w, \mathbf{p}) = \Sigma^{(2)}(w, \mathbf{p}, -\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Последнее равенство оправдано тем, что  $U_{12}(w; \mathbf{p}, -\mathbf{p}; \mathbf{k}, -\mathbf{k})$  в точности совпадает с величиной  $V_w^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ , приведенной в (51). В эквивалентной форме можно записать уравнение (93) еще в такой форме:

$$\begin{aligned}
&[H_1(\mathbf{p}) + H_2(-\mathbf{p}) - w + \Sigma^{(2)}(w, \mathbf{p})] f_w(\mathbf{p}) + \\
&\quad + \int V_w^{(2)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_w(\mathbf{q}) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = 0, \quad (94)
\end{aligned}$$

где  $\Sigma^2(w, \mathbf{p})$  дается равенством (45) при  $P = (w, 0)$ .



**Электромагнитное поле в калибровке излучения.** В уравнениях Лагранжа — Эйлера для квантованных операторов  $\psi^r(x)$  и  $A^r(x)$  в калибровке излучения временная компонента электромагнитного потенциала не участвует, а на пространственные компоненты накладывается трехмерное условие Лоренца:

$$\nabla A^r(x) = 0. \tag{95}$$

Уравнения движения выглядят следующим образом (см. [96]):

$$\square A^r(x) = \mathbf{j}^r(x); \tag{96}$$

$$(-i\hat{\partial} + m_a)\psi_a^r(x) = -\frac{1}{2}e_a \int \frac{1}{4\pi|x-x'|} \{j_0(x_0, x'), \psi_a^r(x)\} d^3x' + e_a \mathbf{Y}^{(a)} A^r(x) \psi_a^r(x), \quad a = 1, 2, \tag{97}$$

где

$$\mathbf{j}^r(x) = \mathbf{j}(x) - \nabla^{-2} \nabla (\nabla \mathbf{j}(x)). \tag{98}$$

Как и в случае фейнмановской калибровки, удобно начинать вычисления с нахождения первого приближения для ядра  $U(y_1, y_2; z_1 z_2)$  в уравнении (74). Приближенные вычисления отдельных вакуумных средних проводятся опять итерированием уравнений Янга — Фельдмана. При этом следует иметь в виду новую форму спинорного тока, даваемую правой частью (97).

Запишем ниже приближение для  $U$  в виде суммы, состоящей из вкладов  $U_c$  — от кулоновой части спинорного тока,  $U_t$  — от поперечной части и  $G_d (= G_{\text{disconnected}})$  — поправки к свободной несвязанной функции Грина:

$$U_{(2)} = U_c + U_t + G_d. \tag{99}$$

Вклад  $U_c$  происходит от четырехточечного запаздывающего произведения, а поперечная часть  $U_t$  и поправка к несвязанной функции Грина — от  $\langle 0 | R(\psi_1 \tilde{\psi}_1) R(\psi_2; \tilde{\psi}_2) | 0 \rangle$ . В этом, ниже, приближении остальные члены в функции Грина (59) вклада не дают. Выпишем явный вид только  $U_c$  и  $U_t$ , поскольку они связаны с особенностями калибровки излучения электромагнитного поля, и лишь в конце приведем выражение для  $G_d$ :

$$U_c(y_1 y_2; z_1 z_2) = \frac{-e_1 e_2}{4\pi|y_1 - y_2|} \delta(y_1^0 - y_2^0) \delta(y_1 - z_1) \delta(y_2 - z_2); \tag{100}$$

$$U_t(y_1 y_2; z_1 z_2) = -e_1 e_2 \mathbf{Y}_i^{(1)} D_{ij}^{(+)}(y_1 - y_2) \mathbf{Y}_j^{(2)} \delta(y_1 - z_1) \delta(y_2 - z_2), \tag{101}$$

где

$$D_{ij}^{(+)}(x) = \frac{1}{i} \int \left( \delta_{ij} - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{\mathbf{k}^2} \right) \exp(-ikx) (dk)_0. \tag{102}$$

Из написанных формул вытекает, что кулоновская часть взаимодействия  $U_c$  в отличие от поперечной имеет равные времена двух начальных и двух конечных аргументов. Поэтому к  $U_c$  не следует

применять описанную выше процедуру последовательного приравнивания времен, при которой совершается переход от ядра  $U$  к  $U'$  и от  $U'$  к  $U''$ . Упомянутая процедура существенно использует разбиение области интегрирования по  $y_1^0$  и  $y_2^0$  (так же как и по  $z_1^0$  и  $z_2^0$ ) на две части:  $y_1^0 > y_2^0$  и  $y_1^0 < y_2^0$ , а в  $U_c$  временные аргументы равны между собой. Следовательно, из уравнения (77) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_S(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = & \varphi_{q_1 q_2}(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \int \mathcal{G}_0^R(t-t', \mathbf{x}_1-\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2-\mathbf{x}'_2) \times \\ & \times \frac{-e_1 e_2}{4\pi |\mathbf{x}'_1-\mathbf{x}'_2|} \varphi_S(t', \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) dt' d^3 x'_1 d^3 x'_2 + \\ & + \int \mathcal{G}_0^R(t-y_1^0, \mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1; t-y_2^0, \mathbf{x}_2-\mathbf{y}_2) [U_t(y_1 y_2; z_1 z_2) + \\ & + G_d(y_1 y_2; z_1 z_2)] \psi_S(z_1, z_2) d^4 y_1 d^4 y_2 d^4 z_1 d^4 z_2. \end{aligned} \quad (103)$$

По аналогии со случаем фейнмановской калибровки, перейдем от ядра  $U_t + G_d$  к ядрам  $U'_t + G'_d$  и  $U''_t + G''_d$  и сведем (103) к уравнению для одновременной волновой функции  $\varphi_S(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . В рамках задачи о связанных состояниях однородное уравнение для волновой функции в системе покоя двух частиц имеет вид

$$G_r^R(w, \mathbf{p})^{-1} f_w(\mathbf{p}) + \int V_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_w(\mathbf{q}) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = 0, \quad (104)$$

где

$$\begin{aligned} G_r^R(w, \mathbf{p})^{-1} = & H_1(\mathbf{p}) + H_2(\mathbf{p}) - w + \\ & + \int \left\{ \alpha^{(1)}(\mathbf{q}) \frac{e^2}{H_1(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + H_2(-\mathbf{p}) + |\mathbf{q}|-w} \alpha^{(1)}(\mathbf{q}) + \right. \\ & \left. + \alpha^{(2)}(\mathbf{q}) \frac{e^2}{H_1(\mathbf{p}) + H_2(\mathbf{q}-\mathbf{p}) + |\mathbf{q}|-w} \alpha^{(2)}(\mathbf{q}) \right\} (dq)_0, \end{aligned} \quad (105)$$

а квазипотенциал

$$\begin{aligned} V_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & -\frac{e^2}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} + \frac{e^2}{2|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} \times \\ & \times \left[ \alpha^{(1)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{1}{H_1(\mathbf{q}) + H_2(-\mathbf{p}) + |\mathbf{p}-\mathbf{q}|-w} \alpha^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) + \right. \\ & \left. + \alpha^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{1}{H_1(\mathbf{p}) + H_2(-\mathbf{q}) + |\mathbf{p}-\mathbf{q}|-w} \alpha^{(1)}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \right]. \end{aligned} \quad (106)$$

Здесь  $\alpha_i^{(a)}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij} - \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j / k_2) \alpha_j^{(a)}$ ,  $a = 1, 2$ , и ограничились случаем  $e_1 = -e_2 = e$ . Конечное регуляризованное выражение для  $(\mathcal{G}_r^R)^{-1}$  можно получить при помощи калибровочного преобразования из соответствующих выражений (43) — (45) для  $\Sigma^{(2)}(P, \mathbf{p})$ .

Целесообразность использования калибровки излучения обнаруживается при вычислении тонкой структуры уровней рассматриваемой двухчастичной системы. Выбор квантования в фейнма-

новской калибровке оказывается неудачным, так как первое приближение квазипотенциала дает неправильный вклад порядка  $\alpha^3$  в собственные значения  $w$  (см., например, [90]). Он устраняется вкладом лишь следующего приближения ( $\sim e^4$ ) для  $V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Таким образом, фейнмановская калибровка электромагнитного поля оказывается неэкономной при нахождении тонкой структуры. В то же время уравнение (104), выведенное в калибровке излучения, этим недостатком не обладает.

Вычисление спектра  $w$  удобнее сделать, если сначала спроектировать уравнение (104) на состояние с положительной энергией, умножая обе стороны равенства слева на

$$\Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) \frac{E_1(\mathbf{p}) + H_1(\mathbf{p})}{2E_1(\mathbf{p})} \cdot \frac{E_2(-\mathbf{p}) + H_2(-\mathbf{p})}{2E_2(-\mathbf{p})}, \quad (107)$$

где

$$E_a(\mathbf{p}) = \sqrt{m_a^2 + \mathbf{p}^2}, \quad a = 1, 2.$$

Если обозначить

$$\Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) f_w(\mathbf{p}) = f_w^{++}(\mathbf{p}),$$

а вместо интеграла в правой части (105) писать  $\Sigma_r^{(2)}$ , получим

$$[E_1(\mathbf{p}) + E_2(-\mathbf{p}) - w] f_w^{++}(\mathbf{p}) + \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) \Sigma_r^{(2)} f_w(\mathbf{p}) + \\ + \int \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) V_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}) f_w(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0. \quad (108)$$

Естественно, получение собственных значений  $w$  с точностью до  $\alpha^4$  проводится применением теории возмущения. Простая оценка вкладов отдельных членов показывает, что для  $f_w^{++}(\mathbf{p})$  имеем уравнение

$$[E_1(\mathbf{p}) + E_2(\mathbf{p}) - w] f_w^{++}(\mathbf{p}) + \Sigma_r^{(2)++}(\mathbf{p}) f_w^{++}(\mathbf{p}) - \\ - e^2 \int \frac{\Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p})}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} f_w^{++}(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} + \\ + e^2 \int \alpha^{(1)++}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \alpha^{(2)++}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{f_w^{++}(\mathbf{q})}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \cdot \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0, \quad (109)$$

где

$$\Sigma_r^{(2)++}(\mathbf{p}) = \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) \Sigma_r^{(2)}(\mathbf{p}) \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}), \\ \alpha^{++}(\mathbf{p}-\mathbf{q}) = \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{p}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{p}) \alpha(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \Lambda_1^{(+)}(\mathbf{q}) \Lambda_2^{(+)}(-\mathbf{q}).$$

Это уравнение точно так же, как и дальнейшие его упрощения, получается введением в (104) безразмерных переменных для импульсов (см. ниже)

$$\mathbf{p} = \alpha m \mathbf{p}_c; \quad \mathbf{q} = \alpha m \mathbf{q}_c; \quad m^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1} \quad (110a)$$

и для энергии связи

$$w - (m_1 + m_2) = \alpha m E_c. \quad (110b)$$

Разложение ядра  $V_c$  в (104) по степеням  $\alpha$  и подстановка проекций  $f_w^{++}(q)$  позволяют вывести уравнение (109) из (104) и (108). Таким образом, вернулись в записи (109) к размерным переменным. Дальнейшее разложение левой части уравнения (109) по степеням  $\alpha$  после введения переменных (110) по существу эквивалентно так называемому приближению Паули малых импульсов и в итоге превращает его в уравнение Брейта (за исключением члена  $\Sigma_r^{(2)++}$ ) (см. работу [94]):

$$\begin{aligned} & [p_c^2/2 - (\alpha^2 p_c^4/8)(1 - 3m/M) - E_c] \Phi(p_c) + \\ & + (1/\alpha^2 m) \Sigma_r^{(2)++}(\alpha m p_c) \Phi(p_c) + \\ & + \int V_B(p_c, q_c) \Phi(q_c) d^3 q_c / (2\pi)^3 = 0. \end{aligned} \quad (111)$$

Здесь  $V_B(p, q)$  — потенциал Брейта:

$$\begin{aligned} V_B(p, q) = & \frac{-1}{(p-q)^2} + \frac{\pi\alpha^2 m^2}{2m_1^2} + \frac{\pi\alpha^2 m^2}{2m_2^2} - \\ & - \frac{4\pi\alpha^2 m^2}{m_1 m_2 (p-q)^2} \left\{ q^2 - \frac{[(p-q)q]^2}{(p-q)^2} \right\} - i \frac{\pi\alpha^2 m^2}{m_1^2} \frac{(p \times q) \sigma_1}{(p-q)^2} - \\ & - i \frac{\pi\alpha^2 m^2}{m_2^2} \frac{(p \times q) \sigma_2}{(p-q)^2} - i \frac{2\pi\alpha^2}{m_1 m_2} m^2 \frac{(p \times q)}{(p-q)^2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \\ & + \frac{\alpha^2 \pi m^2}{m_1 m_2} \left\{ \sigma_1 \sigma_2 - \frac{[(p-q) \sigma_1][ (p-q) \sigma_2]}{(p-q)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (112)$$

Оставляя открытым вопрос о вкладе  $\Sigma_r^{(2)++}$ , отсюда выводим, что вытекающее из (104) приближенное уравнение (111) дает такой же спектр  $w$  до порядка  $\alpha^4$ , как и уравнение Брейта. Соответствующее выражение приведено ниже [см. (196)].

### Релятивистское уравнение Липмана — Швингера

**Кинематика вне массовой поверхности. Общий вид уравнения.** Рассмотрим упругое рассеяние двух частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$  и с начальными (конечными) импульсами  $q_1$  и  $q_2$  ( $p_1$  и  $p_2$ ). Инвариантная амплитуда рассеяния  $T$  определяется своей связью с  $S$ -матричным элементом:

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 | S | q_1 q_2 \rangle = & \langle p_1 | q_1 \rangle \langle p_2 | q_2 \rangle + \\ & + i (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) T(p_1, p_2; q_1, q_2). \end{aligned} \quad (113)$$

Нормировка одночастичных состояний задается равенством \*

$$\langle p_a | q_a \rangle = (2\pi)^3 2p_a^0 \delta(p_a - q_a) \mathbf{1}; \quad p_a^0 = \sqrt{m_a^2 + p_a^2}, \quad a = 1, 2,$$

\* Будем придерживаться этого выбора нормировки, начиная с работ [72, 98]. Амплитуда  $T$  в равенстве (113) связана с амплитудой  $T_{\text{old}}$  соотношением  $T = (2\pi)^3 T_{\text{old}}$  [112].

где  $\mathbf{1}$  — единичная матрица по спиновым и зарядовым переменным. Этот выбор связан с соглашением, что каждое интегрирование в импульсном пространстве сопровождается умножением  $(2\pi)^{-1}$ , а каждая (одномерная)  $\delta$ -функция импульсов появляется с множителем  $2\pi$ .

Равенство (113) имеет смысл на массовой и энергетической поверхности. Однако, чтобы написать линейное (интегральное) уравнение для амплитуды  $T$ , необходимо сначала экстраполировать ее вне этой поверхности. Чаще всего (см., например, работы [66—69, 79—81]) уравнение Липмана — Швингера для  $T$  пишется в соответствии с нерелятивистским случаем, вне энергетической поверхности. С точки зрения явного учета релятивистской инвариантности удобнее работать с уравнением вне массовой (но не энергетической) поверхности.

Следуя [17, 111, 112], рассмотрим минимальный симметричный выход за массовую оболочку, при котором сохраняются соотношения

$$p_1^2 - p_2^2 = q_1^2 - q_2^2 = m_1^2 - m_2^2. \quad (114)$$

Удобно вместо переменных  $p_a$  и  $q_a$  ввести полный импульсь

$$P = p_1 + p_2 = q_1 + q_2 \quad (114a)$$

и ортогональные к нему относительные импульсы начального и конечного состояний

$$q = \mu_2 q_1 - \mu_1 q_2; \quad p = \mu_2 p_1 - \mu_1 p_2. \quad (114b)$$

Здесь параметры  $\mu_a$  определяются из требования ортогональности

$$Pq = Pp = 0 \quad (115)$$

и условия  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ; учитывая (111), находим

$$\mu_1 = (s + m_1^2 - m_2^2)/(2s); \quad \mu_2 = (s - m_1^2 + m_2^2)/(2s), \quad (s \equiv P^2). \quad (116)$$

Отметим, что в нерелятивистском пределе, при  $s \rightarrow (m_1 + m_2)^2$ ,  $\mu_a \rightarrow m_a/(m_1 + m_2)$ ,  $a = 1, 2$ , и  $p$  и  $q$  переходят в нерелятивистские относительные импульсы.

Рассмотрим релятивистское уравнение Липмана — Швингера вида

$$T_P(p, q) + V_P(p, q) + \int V_P(p, k) G_P(k) T_P(k, q) \delta(Pk) d^4k / (2\pi)^3 = 0, \quad (117)$$

где импульсы  $P$ ,  $p$  и  $q$  связаны соотношением ортогональности (115). В случае частиц со спином в произведении  $VGT$  подразумевается суммирование по спином промежуточных частиц.

В  $s$ -канале при  $s = w^2 > 0$  можно перейти в систему центра инерции, в которой

$$\begin{aligned} P &= (w, \mathbf{o}); \quad p = (\mathbf{o}, \mathbf{p}); \quad q = (\mathbf{o}, \mathbf{q}) \\ (p_1 &= (E_1, \mathbf{p}), \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{p}), \quad q_1 = (E_1, \mathbf{q}), \\ q_2 &= (E_2, -\mathbf{q}), \quad E_a = \mu_a w). \end{aligned} \quad (118)$$

Тогда уравнение (117) приобретает вид

$$\begin{aligned} T + V + VGT &\equiv T_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + V_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \\ + \int V_w(\mathbf{p}, \mathbf{k}) G_w(\mathbf{k}) T_w(\mathbf{k}, \mathbf{q}) d^3k / (2\pi)^3 &= 0, \end{aligned} \quad (119)$$

где

$$G_w(\mathbf{k}) = \frac{1}{w} G_P(k), \quad T_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T_P(p, q), \quad V_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = V_P(p, q)$$

[в системе (118)]. При заданном квазипотенциале  $V$  и функции Грина  $G$  уравнение (119) является линейным интегральным уравнением для амплитуды  $T$ .

**Итерационное определение квазипотенциала. Вид функции Грина.** Теперь свяжем уравнение (119) или (117) с квантовой теорией поля (с заданным лагранжианом). Для этой цели потребуем, чтобы формально, без исследования сходимости рядов, уравнение (119) удовлетворялось тождественно перенормированным рядом теории возмущения для амплитуды  $T$ , когда внешние импульсы  $p_a$  и  $q_a$  лежат на массовой поверхности, т. е. когда

$$\begin{aligned} (-p^2 = -q^2 =) \mathbf{p}^2 = \mathbf{q}^2 = b^2(s) = \\ = [s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2] / (4s), \quad (s = w^2). \end{aligned} \quad (120)$$

Предполагая, что  $G$  не зависит от константы связи, а ряды теории возмущения для  $T$  и  $V$  имеют вид

$$T = T_1 + T_2 + \dots, \quad V = V_1 + V_2 + \dots, \quad (121)$$

находим (на массовой поверхности) рекуррентную систему

$$V_1 = -T_1; \quad V_2 = -T_2 + V_1 G V_1, \dots, \quad (122)$$

где  $V_1$  — в правой части второго равенства (некоторое) продолжение амплитуды  $-T_1$  вне массовой поверхности. При такой постановке уравнение (119), подобно уравнению Бете — Солпитера, становится не более чем инструментом для частного суммирования ряда теории возмущений. Ограничиваясь конечным числом членов в разложении для  $T$  и  $V$  и решая затем непertурбационным способом полученное (приближенное) уравнение (119), получаем информацию для  $T$ , которая не содержится ни в каком конечном отрезке ее ряда теории возмущений. В частности, в дальнейшем

получим таким же путем формулы для уровней энергии связанных состояний.

Чтобы определить функцию Грина, наложим еще два требования: первое из них имеет общий характер и связано с условием двухчастичной унитарности; второе — специфично для нашего подхода и обеспечивает (в случае бесспиновых частиц) переход к уравнению Клейна — Гордона во внешнем поле для соответствующего однородного уравнения, когда одна из масс стремится к бесконечности.

*а. Для эрмитова потенциала  $V_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \bar{V}_w(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv V_w^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  потребуем, чтобы решение уравнения (119) удовлетворяло условию унитарности:*

$$\begin{aligned} & T(p_1, p_2; q_1, q_2) - T^*(p_1, p_2; q_1, q_2) = \\ & = (2\pi)^4 i \int T^*(p_1, p_2; k_1, k_2) T(k_1, k_2; q_1, q_2) \times \\ & \quad \times \delta(P - k_1 - k_2) (dk_1)_{m_1} (dk_2)_{m_2}, \end{aligned} \quad (123)$$

где

$$(dk)_m = \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3k}{2\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}}.$$

В переменных (114а), (114б) при  $s > 0$ ,  $P_0 > 0$  уравнение (123) приобретает вид

$$\begin{aligned} & T_P(p, q) - T_P^*(p, q) = \\ & = \frac{i}{(2\pi)^2} \int T_P^*(p, k) T_P(k, q) \delta(2Pk) \delta(k^2 + b^2(s)) d^4k, \end{aligned} \quad (124)$$

или в системе центра инерции (118)

$$\begin{aligned} & T_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - T_w^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ & = \frac{i}{(2\pi)^2 2w} \int T_w^*(\mathbf{p}, \mathbf{k}) T_w(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}^2 - b^2(s)) d^3k, \end{aligned} \quad (125)$$

где  $b^2(s)$  дается равенством (120) и  $w = \sqrt{s} > 0$ .

Покажем, что условие *а* фиксирует мнимую часть функции Грина  $G$ . Для этой цели запишем формально решение уравнения (119) в виде

$$T = -\frac{1}{1+VG} V = -V \frac{1}{1+GV}. \quad (126)$$

При  $V = V^*$  имеем  $T - T^* = \left( V \frac{1}{1+GV} \right)^* - \frac{1}{1+VG} V = \frac{1}{1+VG^*} \times$   
 $\times V(G - G^*) \frac{1}{1+VG} V = T^*(G - G^*) T$  или

$$T_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - T_w^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2i \int T_w^*(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \text{Im } G_w(\mathbf{k}) T_w(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (127)$$

Сравнивая (125) и (127), находим

$$\text{Im } G_w(\mathbf{k}) = (\pi/2w) \delta(\mathbf{k}^2 - b^2). \quad (128)$$

Наложённые до сих пор требования на квазипотенциал и на функцию Грина относятся по существу к свойствам на массовой поверхности. Они приняты практически во всех вариантах квазипотенциального подхода. Однако они еще не определяют функцию Грина в уравнении (119), а удовлетворяются, например, пятью неэквивалентными между собой уравнениями, рассмотренными в работах [65—68, 79—81, 109, 110]. Следуя работам [111, 112], устраним остающийся произвол требованием, обеспечивающим близость квазипотенциального уравнения к локальному уравнению Шредингера.

*б. Обратная функция Грина  $G_w^{-1}(\mathbf{k})$  является линейной функцией от  $\mathbf{k}^2$  (с коэффициентами, зависящими от параметра  $w$ ).*

Вместе с (119) это требование полностью определяет функцию  $G_w$ :

$$G_w(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}^2 - b^2 - i0)^{-1}/(2w). \quad (129)$$

**Замечания к принятому здесь выбору квазипотенциального уравнения.** Уравнение (119) с функцией Грина (129) отличается от первоначального уравнения Логунова — Тавхелидзе [79] лишь заменой\* зависящего от  $\mathbf{p}$  множителя  $(m^2 + \mathbf{p}^2)^{-1/2}$  (для случая равных масс, рассмотренного в работе [79]) множителем  $2/w$  в уравнениях (119), (129). [Оба выражения совпадают на массовой оболочке (120).] Упрощение, которое достигается подобной заменой, приведет к точно решаемому локальному уравнению для релятивистской кулоновской задачи.

Подчеркнем, что, хотя функция Грина была определена однозначно сделанными предположениями, требование (122) оставляет произвол в выборе продолжения потенциала вне массовой поверхности. В случае электродинамики на этот произвол накладывается еще неоднозначность в выборе калибровки. Однако по построению эта неоднозначность не сказывается на физических результатах, так как все они отражены в значениях амплитуды на массовой поверхности. Из (122) видно, что изменение в экстраполяции  $V_1$  вне массовой поверхности приводит к соответствующим изменениям  $V_2$  (уже на массовой поверхности) так, чтобы воспроизвести правильное значение фейнмановской амплитуды  $T_2$ .

Для частиц со спином выход за массовую поверхность может привести к изменению даже матричной структуры уравнения (в том числе и функции Грина). Рассмотрим в качестве примера случай, когда первая частица имеет спин  $1/2$ , а вторая — спин  $0$ .

\* Добавочное отличие в выборе знака  $V$  зависит от соглашения. Наш выбор воспроизводит в нерелятивистском пределе обычный потенциал.



Наряду с амплитудой  $T(p_1\zeta, p_2; q_1\eta, q_2)$  ( $\zeta, \eta = \pm 1/2$ ) можно также ввести ковариантную дираковскую амплитуду  $A = \{A_{\beta}^{\alpha}\}$  в четырехмерном спинорном пространстве, полагая

$$A(p_1, p_2; q_1q_2) = \frac{1}{4m_1^2} \sum_{\eta, \zeta} u_{\zeta}(\mathbf{p}_1) T(p_1\zeta, p_2; q_1\eta, q_2) \tilde{u}_{\eta}(\mathbf{q}_1); \quad (130a)$$

$$T(p_1\zeta, p_2; q_1\eta, q_2) = \tilde{u}_{\zeta\alpha}(\mathbf{p}_1) A_{\beta}^{\alpha}(p_1, p_2; q_1, q_2) u_{\eta}^{\beta}(\mathbf{q}_1), \quad (130b)$$

где  $u_{\zeta}$  — положительно частотные решения уравнения Дирака, нормированные условием

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{\eta}(\mathbf{p}) u_{\zeta}(\mathbf{p}) &\equiv \tilde{u}_{\eta\alpha}(\mathbf{p}) u_{\zeta}^{\alpha}(\mathbf{p}) = 2m_1 \delta_{\eta\zeta}; \\ \sum_{\zeta} u_{\zeta}(\mathbf{p}) \otimes \tilde{u}_{\zeta}(\mathbf{p}) &= m_1 + \hat{p} \quad (p_0 = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}^2}, \quad \hat{p} = \gamma^{\mu} p_{\mu}). \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

Условие унитарности для амплитуды  $A$  имеет вид

$$\begin{aligned} &(\hat{p}_1 + m_1) \left\{ A(p_1, p_2; q_1, q_2) - A^+(p_1, p_2; q_1, q_2) - \right. \\ & - \frac{i}{(2\pi)^2} \int A^+(p_1, p_2; k_1, k_2) (\hat{k}_1 + m_1) A(k_1, k_2; q_1, q_2) \times \\ & \left. \times \delta(2Pk) \delta(k^2 + b^2) d^4k \right\} (\hat{q}_1 + m_1) = 0, \end{aligned} \quad (132)$$

где, согласно (114a), (114б),

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \mu_1 P + k; \quad k_2 = \mu_2 P - k; \\ A^+ &= \beta A^* \beta \quad (\beta = \gamma_0). \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Оно является следствием условия унитарности для  $T$ -амплитуды (124) и соотношений (130), (131).

Соответствующая спинорная функция Грина определяется равенством

$$S_w^{(1/2, 0)}(\mathbf{k}) = (\hat{k}_1 + m_1) G_w(\mathbf{k}), \quad \hat{k}_1 = (\mu_1 w, \mathbf{k}), \quad (134)$$

где  $G_w(\mathbf{k})$  задано формулой (129).

Аналогично можно переопределить амплитуду и видоизменить условие унитарности в случае рассеяния двух дираковских частиц. В этом случае функция Грина

$$S_w^{(1/2, 1/2)}(\mathbf{k}) = (\hat{k}_1 + m_1) (\hat{k}_2 + m_2) G_w(\mathbf{k}). \quad (135)$$

В дальнейшем будем придерживаться в основном двухкомпонентного формализма и работать соответственно с  $T$ -амплитудой. Поскольку всевозможные квазипотенциальные уравнения, которые воспроизводят ряд теории возмущения для амплитуды рассеяния на массовой поверхности, физически эквивалентны (в пределе, когда берется весь бесконечный ряд для потенциала), то

оценку преимущества одного выбора перед остальными можно сделать только на основе сопоставления приближенных уравнений, в которых ряд для потенциала оборван на некотором члене. Основным критерий при этом — практический: сколько членов ряда (122) необходимо взять, чтобы воспроизвести определенный физический результат с данной точностью (например, тонкую структуру уровней энергии водородоподобной системы с точностью  $\alpha^4$ ), и насколько сложно решается выбранное уравнение с полученным потенциалом. Такой практической проверке уравнений (119), (129) посвящена вся остальная часть настоящего обзора. Здесь же ответим на вопрос, какие общие свойства амплитуды рассеяния сохраняются итерациями квазипотенциального уравнения при приближенном задании потенциала (по теории возмущений).

С одной стороны, по построению (в силу условия *a*) наше уравнение согласовано с условием унитарности в *s*-канале. С другой, оно разделяет недостатки всех известных двухчастичных уравнений (трехмерных и четырехмерных): при оборванном ряде для ядра уравнения (потенциала) нарушается условие перекрестной симметрии. Ниже увидим, что в эйкональном приближении (в асимптотической области) рассматриваемое уравнение (в противоположность уравнению Бете — Солпитера) воспроизводит результат суммирования кроссинг-симметричного набора диаграмм.

Относительно свойств аналитичности рассуждения работы [80] показывают, что если квазипотенциал  $V_w$  является суперпозицией потенциалов Юкавы, то итерационное решение уравнения (119) удовлетворяет дисперсионным соотношениям по переданному импульсу  $t = (p - q)^2 = -(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2$ . Итерации (приближенного) квазипотенциала обладают правильным пороговым поведением при  $s = (m_1 + m_2)^2$ . Однако у них возникают нефизические особенности при  $s = (m_1 - m_2)^2$  и при  $s = 0$ . Такое нарушение известных аналитических свойств, которое имеет место и в других трехмерных подходах, показывает, что область применимости уравнения с приближенным потенциалом — не слишком сильные связи, когда дефект массы не превосходит массы одной из частиц.

**Однородное уравнение Шредингера.** Из уравнения (119) можно получить однородное уравнение для волновой функции задачи рассеяния, определяемой равенством

$$\Phi_q(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + G_q(\mathbf{p}) T_q(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (136)$$

где индексом *q* для краткости заменена величина  $w_q = \sqrt{m_1 + \mathbf{q}^2} + \sqrt{m_2 + \mathbf{q}^2}$  и  $G_q$  задано уравнением (129). Умножая обе части равенства (136) на  $G_q^{-1}$  и учитывая (119), получаем

$$G_q^{-1}(p) \Phi_q(p) + \int V_q(p, k) \Phi_q(k) d^3k / (2\pi)^3 = 0.$$

Продолжая это равенство для произвольных  $w$ , находим релятивистский аналог уравнения Шредингера:

$$[\mathbf{p}^2 - b^2(w^2)] \Phi_w(\mathbf{p}) + \frac{1}{2w} \int V_w(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \Phi_w(\mathbf{k}) d^3k / (2\pi)^3 = 0. \quad (137)$$

В случае локального потенциала, когда  $\mathbf{V}_w = \mathbf{V}_w(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ , уравнение (137) эквивалентно локальному уравнению Шредингера в координатном пространстве:

$$[b^2 + \Delta - \mathcal{V}_w(\mathbf{r})/2w] \varphi_w(\mathbf{r}) = 0, \quad (138)$$

где

$$\mathcal{V}_w(\mathbf{r}) = \int V_w(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3k / (2\pi)^3.$$

128

Здесь будем встречаться также и с обменным потенциалом  $V_{ex}$ , который зависит в импульсном пространстве от суммы импульсов:  $V_{ex}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = V_{ex}(\mathbf{p} + \mathbf{k})$ . В координатном пространстве этот потенциал имеет вид  $\mathcal{V}_{ex}(\mathbf{r}) I_s$ , где  $I_s$  — оператор пространственного отражения

$$(I_s \varphi)(\mathbf{r}) = \varphi(-\mathbf{r}). \quad (139)$$

При взаимодействии бесспиновых частиц можно так распорядиться свободой продолжения потенциала вне массовой поверхности, чтобы полный потенциал был суперпозицией локального и «псевдолокального» (обменного) членов:

$$\mathcal{V}_w(\mathbf{r}) = \mathcal{V}_w^{(1)}(\mathbf{r}) + \mathcal{V}_w^{(2)}(\mathbf{r}) I_s. \quad (140)$$

В случае частиц со спином потенциал обладает матричной структурой и является линейным дифференциальным оператором с переменными, (псевдо) локальными коэффициентами. Если  $\mathcal{V}_w^{(1)}$  и  $\mathcal{V}_w^{(2)}$  — сферически-симметричные функции, то уравнение Шредингера (138) с потенциалом вида (140) решается обычным разложением по сферическим функциям. В радиальном уравнении для парциальной амплитуды  $u_l(r)$  эффективный потенциал  $\mathcal{V}_w^{(1)}(r) + (-1)^l \mathcal{V}_w^{(2)}(r)$ .

Отметим, что если значение параметра  $w = \sqrt{s}$  соответствует связанному состоянию, то  $b^2(s) < 0$  и волновая функция  $\varphi_w(\mathbf{r})$  стремится к нулю на бесконечности. Тогда ее преобразование Фурье  $\Phi_w(\mathbf{p})$  не имеет особенности при  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$  и простая связь (136) между волновой функцией и амплитудой рассеяния не имеет места. В этом случае можно связать волновую функцию с вычетом в полюсе четырехточечной функции Грина в точке, соответствующей связанному состоянию (см., например, работы [65, 110]).

### Скалярное взаимодействие Юкавы и релятивистская эйкональная формула

**Релятивистская приведенная масса.** С целью проиллюстрировать некоторые черты уравнения (138) рассмотрим, следуя работе [112], модель двух заряженных (комплексных) полей  $\psi_1$  и  $\psi_2$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  взаимодействующие через нейтральное скалярное поле  $\varphi$  массы  $\mu$  с лагранжианом взаимодействия

$$\mathcal{L}_I(x) = [g_1 \psi_1^*(x) \psi_1(x) + g_2 \psi_2^*(x) \psi_2(x)] \varphi(x). \quad (141)$$

(Двоеточия:: обозначают, как обычно, нормальное упорядочение Вика.) Используя рецепт (122), для низшего борновского приближения  $V$  находим юкавский потенциал

$$V = V_1 = -g_1 g_2 / [\mu^2 + (p - q)^2]. \quad (142)$$

Вместо постоянных связей  $q_1$  и  $q_2$ , имеющих размерность массы, удобно ввести одну безразмерную величину  $\alpha$ , полагая  $q_1 q_2 = = 16\pi m_1 m_2 \alpha$ . Уравнение (133) с потенциалом Юкавы (142) принимает вид

$$\left[ b^2(w^2) + \Delta + 2 \frac{m_1 m_2}{w} \cdot \frac{\alpha}{r} \exp(-\mu r) \right] \varphi_w(\mathbf{r}) = 0. \quad (143)$$

В этом виде оно отличается от соответствующего нерелятивистского уравнения Шредингера

$$\left[ E_{NR} + \frac{1}{2m} \Delta + \frac{\alpha}{r} \exp(-\mu r) \right] \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (144)$$

лишь кинематическими факторами. Уравнение (144) перейдет в (143), если подставим вместо нерелятивистской приведенной массы  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  и энергии (связи)  $E_{NR}$  следующие функции  $w$ :

$$m \rightarrow m_w = m_1 m_2 / w, \quad E_{NR} \rightarrow b^2(w^2) / (2m_w). \quad (145)$$

Величину  $m_w$  назовем релятивистской приведенной массой. Для малых импульсов и слабой связи, когда  $w \approx m_1 + m_2 + E_{NR} \rightarrow \rightarrow m_1 + m_2$ ,  $m_w$  переходит в  $m$ .

Таким образом, зависимость  $m_w$  и  $b^2(w^2)$  от энергии учитывает релятивистские эффекты отдачи, которые обычно вычисляются гораздо сложнее.

**Приближение эйконала.** Простое соответствие между уравнениями (143) и (144) позволяет написать (точное или приближенное) решение нашего квазипотенциального уравнения всегда, когда такое решение известно для соответствующей нерелятивистской задачи. В частности, из (144) можно получить релятивистское эйкональное приближение [1, 5, 13, 77, 87]. Действительно, согласно работам [18, 84,] эйкональное поведение нерелятивистской

амплитуды на малых углах дается выражением

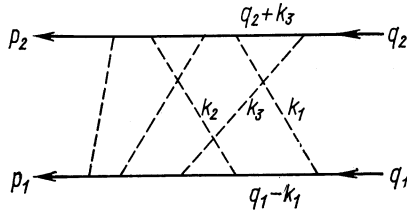
$$T_{NR}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m) = -i4|\mathbf{p}| \int d^2y \exp[i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{y}] \left\{ \exp\left[\frac{2im}{|\mathbf{p}|} \alpha K_0(\mu|y|)\right] - 1 \right\}, \quad (146)$$

где интегрирование по  $\mathbf{y}$  проводится в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ . Представление (146) заведомо справедливо в пределе  $\mu \rightarrow 0$ ,  $t = -(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 \rightarrow 0$ . Полагают, что оно является разумным приближением (в нерелятивистской области) при  $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$  (или  $w \rightarrow \infty$ );  $\mu$ ,  $t \rightarrow$  конечные.

При помощи подстановки (145) получаем отсюда эйконоальное приближение для релятивистской амплитуды

$$T_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = wT_{NR}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m_w). \quad (147)$$

Чтобы понять значение этого результата, напомним, в чем состоит эйконоальное приближение на языке диаграмм Фейнмана. Рассмотрим произвольную перекрестную лестничную диаграмму типа:



Эйконоальное приближение для такой диаграммы означает пренебрежение квадратичными по  $k_i$  членами в пропагаторах заряженных частиц 1 и 2:

$$T_D^{eik}(p_1, p_2; q_1, q_2) = i(ig_1g_2)^n \int \dots \int \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} \frac{1}{\mu^2 - k_i^2 - i0} \right] \times \\ \times \frac{1}{\mu^2 - (k_1 + \dots + k_{n-1})^2 - i0} \cdot \frac{1}{2k_1q_1 - i0} \times \\ \times \frac{1}{2(k_1 + k_2)q_1 - i0} \dots \frac{1}{-2k_3q_2 - i0} \cdot \frac{1}{-2(k_1 + k_3)q_2 - i0} \dots \quad (148)$$

[при написании (148) было учтено, что внешние импульсы находятся на массовой поверхности]. Выражения (147), (146) возникают суммированием всех таких вкладов (см., например, работу [1]). Легко видеть, что выражение (148) действительно получается в пределе малых  $\mu$  от фейнмановской амплитуды рассеяния вперед  $T_D(p_1, p_2; p_1, p_2)$ . Действительно, при замене переменных \*

\* Это рассуждение принадлежит Р. Дашену (частное сообщение).

интегрирования  $k_i = \mu \kappa_i$  получаем

$$\begin{aligned}
 T_D(p_1, p_2; p_1, p_2) = & i \left( \frac{ig_1 g_2}{\mu^2} \right)^n \int \dots \int \prod_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{d^4 \kappa_i}{(2\pi)^4} \frac{1}{1 - \kappa_i^2 - i0} \right] \times \\
 & \times \frac{1}{1 - (\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1})^2 - i0} \cdot \frac{1}{2\kappa_1 p_1 - \mu \kappa_1^2 - i0} \times \\
 & \times \frac{1}{2(\kappa_1 + \kappa_2) p_1 - \mu(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - i0} \dots \frac{1}{-2\kappa_3 p_2 - \mu \kappa_3^2 - i0} \dots \\
 & \dots \approx T_D^{eh}(p_1, p_2; p_1, p_2).
 \end{aligned}$$

(Пренебрежение членами типа  $\mu \kappa^2$  в последней строке возможно, так как после их опускания интеграл остается сходящимся при больших  $\kappa$ .)

Обратим внимание, что лестничное приближение в уравнении Бете — Солпитера не позволяет воспроизвести этот результат. Дело в том, что старший логарифмический член (при больших  $s$ ) в каждой лестничной диаграмме сокращается со старшими членами перекрестных лестничных диаграмм [107, 108]. Необходимо учесть бесконечное число неприводимых диаграмм в ядре Бете — Солпитера, чтобы прийти к эйкональному приближению, которое получается из одного борновского члена в рассматриваемом квазипотенциальном подходе.

**Релятивистская формула Бальмера.** Уравнение (144) при  $\mu = 0$  совпадает с уравнением Шредингера для частицы с массой  $m_w$  в кулоновском потенциале и, следовательно, точно решается. Подстановка (145) дает для уровней энергий следующую релятивистскую формулу, которая получена другими способами в работах [7, 23, 59]:

$$w_n^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 (1 - \alpha^2/n^2)^{1/2}. \quad (149)$$

[Знак минус опускается перед квадратным корнем, поскольку, согласно сказанному выше, соответствующее значение  $w_n$  выходит за область применимости уравнения (144).] Уровни энергии (149) вырождены относительно квантового числа  $l$ , потому что работаем со скалярными «фотонами», которые не связаны с магнитным полем, взаимодействующим с угловым моментом системы. Это приводит к  $O(4)$ -симметрии уравнения, подобной фоковской симметрии нерелятивистской кулоновской задачи.

Полученный результат для  $w_n$  демонстрирует замечательный факт, что простая подстановка (145) в нерелятивистском уравнении Шредингера правильно учитывает релятивистские эффекты отдачи. В этом можно убедиться, вычисляя уровни энергии  $w_n$  с точностью до  $\alpha^4$  из более конвенционального, но в то же время более сложного и логически менее удовлетворительного уравнения Брейта (см. работу [11] и приложение 1).

Следует отметить, что этот результат, так же как и эйкональное приближение, обсуждаемое выше, нельзя получить из лестничного приближения в уравнении Бете — Солпитера. Отвлекаясь от трудности с лишними решениями, уравнение Бете — Солпитера дает в этом случае неправильный вклад порядка  $\alpha^3$  в  $w_n$  [29, 110, 118].

### 3. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

#### Эффективный 4-потенциал для взаимодействия скалярных заряженных частиц

Переход к уравнению с векторным 4-потенциалом. Электромагнитное взаимодействие двух противоположно заряженных бесспиновых частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ , описываемых полями  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , задается калибровочно-инвариантным лагранжианом:

$$\mathcal{L}_{em}(x) = ie [\overset{\leftrightarrow}{\psi_1^*(x)} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi_1(x) - \overset{\leftrightarrow}{\psi_2^*(x)} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi_2(x)] A^\mu(x) + e_2 [\psi_1^*(x) \psi_1(x) + \psi_2^*(x) \psi_2(x)] A^\mu(x) A_\mu(x), \quad (150)$$

где

$$\overset{\leftrightarrow}{\psi^*(x)} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi(x) = \psi^*(x) [\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi(x)] - [\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi^*(x)] \psi(x).$$

Оказывается удобным переписать уравнение (138) в форме, в которой скалярный потенциал  $V_w$  заменен некоторой квадратичной функцией от эффективного векторного 4-потенциала  $V_\mu$ . Запишем уравнение (137) в виде

$$[(p - V)^2 - m_w^2] \Phi_w = 0, \quad (151)$$

где

$$p_0 \equiv E = \sqrt{m_w^2 + b^2(w^2)} = (w^2 - m_1^2 - m_2^2)/(2w);$$

$V_\mu$  — интегральные операторы, действующие на  $\Phi_w$ . В частности, произведение  $V^2 \Phi_w$  определяется сверткой

$$V^2 \Phi_w(p) = \int \int V_\mu(p, k) V^\mu(k, q) \Phi_w(q) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3q}{(2\pi)^3}.$$

Приравнивание левых частей уравнений (151) и (137) дает следующее соотношение:

$$2EV_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - [V_0^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - V^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})] = V_w(\mathbf{p}, \mathbf{q})/(2w). \quad (152)$$

С целью построить 4-потенциал  $V_\mu$  в первом порядке по  $e^2$  приравниваем линейные по  $V_\mu$  члены в левой части (152) борнов-

скому приближению для  $V_w$ , умноженному на  $1/2 w$ :

$$\begin{aligned} 2EV_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= V_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})/(2w) = \\ &= -T_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})/(2w) = -\frac{e^2}{2w} \cdot \frac{4E_1E_2 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \end{aligned} \quad (153)$$

(здесь воспользовались фейнмановской калибровкой фотонного пропагатора). Это равенство рассматривается на массовой поверхности, т. е. при  $\mathbf{p}^2 = \mathbf{q}^2 = \mathbf{b}^2$ .

Ясно, что 4-потенциал не определяется однозначно из (153). Действительно, левая часть равенства не меняется при добавлении к  $V_\mu$  произвольного 4-вектора, ортогонально вектору  $(2E, \mathbf{p} + \mathbf{q})$ . Эта неоднозначность, связанная с выбором калибровки для  $V_\mu$ , позволяет отождествить  $V_0$  с кулоновским потенциалом

$$V_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -e^2/(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2. \quad (154)$$

Используя, что  $E_1E_2 + b^2 = Ew$ , для 3-векторного потенциала находим  $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -e^2/(2w)$ .

В результате выбора трехмерной калибровки можно добиться, чтобы

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{e^2}{2w} \cdot \frac{1}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} (\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (155)$$

Проекстраполируем выражения (154) и (155) и вне массовой поверхности. В координатном пространстве они соответствуют псевдолокальному потенциалу

$$\mathcal{V}_0(\mathbf{r}) = -\alpha/r, \quad \mathcal{V}(\mathbf{r}) = -i\alpha r I_s/(2wr^3), \quad (156)$$

где  $I_s$  — оператор пространственного отражения (139). Эффективный потенциал оказывается при этом локальным оператором, так как

$$\{\mathbf{p}, \mathcal{V}(r)\} = -2\pi\alpha\delta(\mathbf{r})/w; \quad \mathcal{V}^2(\mathbf{r}) = \alpha^2/(4w^2r^4) (\mathbf{p} = -i\nabla). \quad (157)$$

Из явного вида выражений для  $\mathcal{V}_0$  и  $\mathcal{V}$  следует, что если устремить массу одной из двух частиц к бесконечности, уравнение с эффективным 4-потенциалом  $\mathcal{V}_\mu$ :  $[(\mathbf{p} - \mathcal{V})^2 - m_w^2] \Phi_w = 0$ ,  $\mathbf{p} = -i\nabla$ , сведется к уравнению Клейна — Гордона для второй частицы во внешнем кулоновском поле. Этот факт может служить оправданием выбора первого калибровочного условия (154).

**Релятивистская формула Бальмера с тонкой структурой.** При подстановке выражений (156) и (157) в уравнение (151) можно найти собственные значения энергии  $w_{nl}$ . При этом нельзя ожидать точности больше  $\alpha^4$ , так как до сих пор в амплитуде не были учтены радиационные поправки и диаграммы с обменом двух и более фотонов. При расчете уровней энергии порядка меньше  $\alpha^6$ , кроме того, нам будет достаточно знать волновые функции нереляти-



вистской кулоновской задачи  $\varphi_{nl\zeta}(\mathbf{r})$ . Действительно, после подстановки (156) и (157) в уравнение (151) оно сводится к

$$[\Delta + 2E\alpha/r + \alpha^2/r^2 - 2\pi\alpha\delta(\mathbf{r})/w - \alpha^2/(4w^2r^4) + b^2(w^2)]\Phi_w(\mathbf{r}) = 0. \quad (158)$$

Выразим теперь величины в этом уравнении через безразмерные кулоновские переменные  $r_c$  и  $b_c^2$ , соответственно для вектора относительной координаты и для квадрата импульса, с помощью подстановок

$$r = (\alpha E)^{-1} r_c; \quad b^2(w^2) = \alpha^2 E^2 b_c^2(w^2), \quad (159a)$$

добавим сюда и переменную  $\mathbf{p}_c$  для импульса:

$$\mathbf{p} = -i\nabla = \alpha E \mathbf{p}_c = \alpha E (-i\nabla_c). \quad (159b)$$

В результате перехода к единицам (159) уравнение (158) примет вид

$$[\Delta_c + 2/r_c + b_c^2 + \alpha^2/r_c^2 - 2\pi\alpha^2 E \delta(\mathbf{r}_c)/w - \alpha^4 E^2/(4w^2 r_c^4)]\Phi_w(\mathbf{r}_c) = 0. \quad (160)$$

Эта форма уравнения уже удобна для вычислений по теории возмущения, так как в ней выделены, с одной стороны, невозмущенный оператор  $\Delta + (2/r_c)$  кулоновской задачи, а с другой — пропорциональное  $\alpha^2$  возмущение. Первым приближением к  $\Phi_w$  будут служить функции  $\varphi_{nl\zeta}(\mathbf{r}_c)$  нерелятивистской кулоновской задачи; первая поправка к невозмущенному спектру  $(b_c^2)_{0,n} = -1/n^2$  выразится в виде среднего значения по  $\varphi_{nl\zeta}$  от возмущения, взятого со знаком минус, в левой части (160). Уровни энергии следует затем вычислять из  $b^2(w^2)$ , используя связь (159) между  $b^2$  и  $b_c^2$ . Здесь необходимо обратить внимание на то, что любая поправка к  $(b_c^2)_0$  порядка  $\alpha^h$  даст в  $b^2(w^2)$  вклад порядка  $\alpha^{h+2}$  в силу (159a). В частности, первые два члена возмущения в (160) дадут в  $b^2(w^2)$  вклад пропорциональный  $\alpha^4$ . Последний член, соответствующий  $\mathbf{V}^2$  не даст вклада с учитываемой нами точностью, по крайней мере при  $l \neq 0$ , так как его среднее значение по функциям  $\varphi_{nl\zeta}$  пропорционально  $\alpha^4$ :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\alpha^4 E^2}{4w^2 nl} \langle nl\zeta | r_c^{-4} | nl\zeta \rangle = \\ & = \frac{\alpha^4 m^2}{4M^2} \cdot \frac{3n^2 - l(l+1)}{2n^5 (l+3/2)(l+1)(l+1/2)l(l-1/2)} + O(\alpha^6); \end{aligned} \right\} \quad (161)$$

$$|nl\zeta\rangle = \varphi_{nl\zeta}(\mathbf{r}_c); \quad M = m_1 + m_2.$$

Из (161) и (159a) вытекает, что вклад этого члена в  $b^2$  после умножения на  $\alpha^2 E^2$  окажется порядка  $\alpha^6$  (при  $l \neq 0$ ). В дальнейшем будем пренебрегать этим членом, оставляя вопрос о строгом рас-

смотрении его  $s$ -волнового вклада открытым. Ниже будет показано, что расходимость правой части (161) при  $l = 0$  совпадает с аналогичной расходимостью  $s$ -волнового вклада среднего значения итерации  $T_1GT_1$ .

Окончательный результат для собственных значений энергии с точностью до  $\alpha^4$  имеет вид

$$w_{nl} = M - \frac{m\alpha^2}{2n^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{m\alpha^4}{n^4} - \frac{m\alpha^4}{n^3(2l+1)} - \frac{m^2\alpha^4}{8Mn^4} + \frac{m^2}{M} \frac{\alpha^4}{n^3} \delta_{l0}, \quad (162)$$

где  $M = m_1 + m_2$ ;  $Mm = m_1m_2$ . Последние два члена в этой формуле, пропорциональные  $M^{-1}$ , исчезают, когда одна из масс стремится к бесконечности. Последний член в правой части (160), дающий смещение  $s$ -уровней, характерен для скалярной электродинамики. Он был воспроизведен также в рамках уравнения Бете — Солпитера (см. работу [89], где нет ссылки на более раннюю работу [110], в которой этот результат был получен впервые изложенным выше способом). Отметим еще, что структура уровней, даваемая равенством (162), получается в таком же виде и при вычислениях, основанных на уравнении Брейта (см. приложение 1)

### Электромагнитное взаимодействие частиц со спином 0 и 1/2

Двухкомпонентная форма квазипотенциала в борновском приближении. Перейдем к случаю, который может иметь практический интерес: взаимодействие частицы со спином  $s_1 = 1/2$  с бесспиновой частицей ( $s_2 = 0$ ); сюда подходят такие наблюдаемые системы, как ион гелия  $\text{He}^+$  или  $\mu$ -мезоатом  $\text{He}^{++} + \mu^-$ , а также система  $\pi^+ + e^-$ . В этом случае потенциал  $V_w$  в уравнении (137) будет двухрядной матрицей в пространстве спиновых индексов, выражаемых итерационным рядом (121), (122) посредством амплитуды  $T(p_1\zeta, p_2; q_1\eta, q_2)$  ( $\zeta, \eta = \pm 1/2$ ).

Для технического удобства будем работать с амплитудой  $T = \{T_{ab}\}_{a,b=1,2}$ , которая связана с  $T(p_1\zeta, p_2; q_1\eta, q_2)$  равенством  $T_{ab}(p_1, p_2; q_1, q_2) = T(p_1, {}^3/2 - a, p_2; q_1, {}^3/2 - b, q_2)$ ,  $a, b = 1, 2$  (163)

Это равенство можно записать и таким образом:

$$T(p_1\zeta, p_2; q_1\eta, q_2) = \sum_{a,b=1}^2 \bar{e}_\zeta^a T_{ab}(p_1, p_2; q_1, q_2) e_\eta^b, \quad (163a)$$

где  $e_\zeta$  ( $\zeta = \pm 1/2$ ) — двухкомпонентные спиноры, собственные векторы оператора третьей проекции спина в покое:  $\sigma_3 e_\zeta = 2\zeta e_\zeta$ ,  $\bar{\zeta} = \pm 1/2$ . Компоненты спинора, нормированного условием  $e_\eta e_\zeta = \delta_{\eta\zeta}$ ;  $e_\zeta^a = \exp(i\varphi) \delta_{2-a, \zeta+1/2}$  ( $\varphi$  — вещественно; черта над  $e$  означает комплексное сопряжение).

Связь (163) можно использовать для явного выражения амплитуды  $T_{ab}$  через ковариантную четырехмерную амплитуду  $A$ . Действительно, пользуясь равенством (130б) и разложением дираковских спиноров

$$u_{\xi}^{\alpha}(\mathbf{p}) = \sum_{\alpha=1}^2 u_{\alpha}^{\alpha}(\mathbf{p}) e_{\xi}^{\alpha},$$

можно написать

$$T_{ab}(p_1, p_2; q_1, q_2) = \tilde{u}_{a\alpha}(\mathbf{p}_1) A_{\beta}^{\alpha}(p_1, p_2; q_1, q_2) u_b^{\beta}(\mathbf{q}_1).$$

Проиллюстрируем сказанное на примере первого приближения квазипотенциала в случае электромагнитного взаимодействия частицы спина 1/2 со скалярной частицей. Лагранжиан взаимодействия

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{em}(x) = & -i \frac{e_1}{2} [\tilde{\Psi}(x), \gamma_{\mu} \Psi(x)] A^{\mu}(x) - \\ & - ie_2: \Phi^{*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \Phi(x): A^{\mu}(x) + e_2^2 \Phi^{*}(x) \Phi(x) A^{\mu}(x) A_{\mu}(x), \end{aligned}$$

где  $\Psi(x)$  — оператор, описывающий спинорное поле массы  $m_1$  и заряда  $e_1$ ;  $\Phi(x)$  — оператор скалярного поля массы  $m_2$  и заряда  $e_2$  ( $e_1 e_2 < 0$ ).

Борновский член четырехмерной амплитуды  $A$  в системе центра инерции

$$A_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = - \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} [2E_2 \gamma_0 + (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \boldsymbol{\gamma}]. \quad (164)$$

Воспользуемся, например, базисом, соответствующим представлению Паули для  $\gamma$ -матриц:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

в котором

$$u_{\xi}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + m_1} e_{\xi} \\ \sqrt{p_0 - m_1} \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} e_{\xi} \end{pmatrix}, \quad p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} \quad (165)$$

(в самом деле, результат для  $T_{ab}$  не зависит от выбора представления). Тогда из (163), (130) и (164) находим квазипотенциал в первом приближении:

$$\begin{aligned} V_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & -T_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ = & \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \left[ 4E_1 E_2 + 4b^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 \left( 1 + \frac{E_2}{E_1 + m_1} \right) + \right. \\ & \left. + 2i \left( 1 + \frac{E_2}{E_1 + m_1} \right) (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (166) \end{aligned}$$

(единичная матрица для краткости не выписана).

**Выделение эффективного 4-потенциала. Спинорная структура.**  
Введем 4-потенциал в уравнение

$$[\mathbf{p}^2 - b^2 (w^2)] \Phi_w(\mathbf{p}) + \frac{1}{2w} \int V_w(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Phi_w(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0 \quad (167)$$

по аналогии со случаем бесспиновых частиц. Наличие частицы со спином приводит к тому, что к члену  $(p - V)^2 - m_w^2$  [см. (166)] следует добавить линейную комбинацию всех матриц  $\sigma_\mu$  вида  $D + F\sigma$ , т. е. записать (167) как

$$[(E - V_0)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 - m_w^2 + D + F\sigma] \Phi_w(\mathbf{p}) = 0. \quad (168)$$

Обозначения те же, что и прежде:

$$E = (w^2 - m_1^2 - m_2^2)/(2w); \quad m_w = m_1 m_2 / w;$$

$V^\mu$ ,  $D$  и  $F$  — интегральные операторы, действующие на  $\Phi_w$ . Поскольку  $E^2 - m_w^2 = b^2 (w^2)$ , приравнивание левых частей (167) и (168) дает

$$2EV_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - [V_0^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \mathbf{V}^2(\mathbf{p}, \mathbf{q})] - \\ + D(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma = V_w(\mathbf{p}, \mathbf{q})/(2w). \quad (169)$$

Естественно, замечания, сделанные выше, относительно калибровочного произвола в определении  $V_\mu$  и  $\mathbf{V}$  остаются справедливыми, и здесь будем следовать тем же правилам при нахождении первого по  $\alpha$  приближения для  $V^\mu$ .

Подставим в правую часть (169) борновское приближение (166) для квазипотенциала, а в левой части отбросим члены, квадратичные по  $V_\mu$ . В результате получим

$$2EV_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - D(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma = \\ = \frac{1}{2w} \cdot \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} [4Ew - (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2] - \frac{e_1 e_2}{2w} \cdot \frac{E_2}{E_1 + m_1} + \\ + i \frac{e_1 e_2}{2w} \left( 1 + \frac{E_2}{E_1 + m_1} \right) \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \sigma. \quad (170)$$

Приравнивание первого слагаемого в правой части (170) разности  $2EV_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  дает знакомое уравнение (153) на массовой поверхности. Отсюда вытекает, что для  $V_0$  и  $\mathbf{V}$  можно взять выражения (154) и (155):

$$V_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2}; \quad \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{e_1 e_2}{2w} \cdot \frac{1}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} (\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (171)$$

Теперь  $D$  и  $F$  определяются однозначно:

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{e_1 e_2}{2w} \cdot \frac{E_2}{E_1 + m_1}; \quad (172a)$$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -i \frac{e_1 e_2}{2w} \left( 1 + \frac{E_2}{E_1 + m_1} \right) \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{q}}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2}. \quad (172b)$$

Перейдем в уравнении (168) к координатному пространству, помня, что для фурье-образа  $V_0$  и  $\mathbf{V}$  имеем формулы (156) и (157), а относительно  $D$  и  $\mathbf{F}$  нетрудно получить

$$D(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi\alpha}{w} \cdot \frac{E_2}{E_1+m_1} \delta(\mathbf{r}), \quad \mathcal{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{w r^3} \left(1 + \frac{E_2}{E_1+m_1}\right) \mathbf{L}, \quad (173)$$

где  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  — орбитальный угловой момент;  $\alpha = -e_1 e_2 / 4\pi$ . В итоге приходим к уравнению в форме

$$\left[ \Delta + 2E \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{2\pi\alpha}{w} \delta(\mathbf{r}) - \frac{2\pi\alpha}{w} \cdot \frac{E_2}{E_1+m_1} \delta(\mathbf{r}) - \frac{\alpha^2}{4w^2} \cdot \frac{1}{r^4} - \frac{\alpha}{w r^3} \left(1 + \frac{E_2}{E_1+m_1}\right) \mathbf{L}\sigma + b^2(w^2) \right] \Phi_w(\mathbf{r}) = 0. \quad (174)$$

Уравнение (174) обладает следующим свойством. В пределе, когда масса спиновой частицы стремится к бесконечности ( $m_1 \rightarrow \infty$ ,  $E_1/w \rightarrow 1$ ), уравнение (174) переходит в уравнение Клейна — Гордона для скалярной частицы во внешнем кулоновском поле. В пределе же, когда  $m_2 \rightarrow \infty$  ( $E_2/w \rightarrow 1$ ), из (174) получаем уравнение Дирака в кулоновском поле для частицы массы  $m_1$  в форме, возникающей после устранения «малых» компонент волновой функции. Такое же замечание остается в силе и при предельных случаях квазипотенциального уравнения с функцией Грина (134), рассмотренной ниже.

**Релятивистская формула тонкой структуры.** Собственные значения  $w$  удобно искать в безразмерных кулоновских переменных (159). В этих переменных уравнение (174) приобретает вид

$$\left[ \Delta_c + \frac{2}{r_c} + \frac{\alpha^2}{r_c^2} - 2\pi\alpha^2 \left(1 + \frac{E_2}{E_1+m_1}\right) \delta(\mathbf{r}_c) - \alpha^4 \frac{E_2}{4w^2} \cdot \frac{1}{r_c^4} - \alpha^2 \frac{E}{w} \left(1 + \frac{E_2}{E_1+m_1}\right) \mathbf{L}\sigma + b_c^2 \right] \Phi_w(\mathbf{r}_c) = 0. \quad (175)$$

В качестве исходного приближения к  $\Phi_w$  будут использованы следующие собственные функции оператора  $\Delta_c + 2r_c^{-1}$ :

$$\Phi_{nlj_3}(\mathbf{r}_c) = \sum_{\zeta} (l1/2j; j_3 - \zeta, \zeta) \Phi_{nl, j_3 - \zeta}(\mathbf{r}_c) e_{\zeta}, \quad (176)$$

где  $(l1/2j; j_3 - \zeta, \zeta)$  — коэффициенты Клебша — Гордана;  $\Phi_{nl\eta}(\mathbf{r}_c)$  — нерелятивистские кулоновские функции;  $e_{\zeta}$  — 2-двухкомпонентные спиноры, введенные выше. Функции (176) являются одновременно собственными функциями операторов квадрата орбитального момента  $\mathbf{L}$ , спина  $\mathbf{S} = \sigma/2$  и полного момента  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ :

$$\mathbf{L}^2 \Phi_{nlj_3} = l(l+1) \Phi_{nlj_3}; \quad \mathbf{S}^2 \Phi_{nlj_3} = 3\Phi_{nlj_3}/4; \quad (177a)$$

$$\mathbf{J}^2 \Phi_{nlj_3} = j(j+1) \Phi_{nlj_3}; \quad j = l \pm 1/2 \quad (j = 1/2, \text{ если } l = 0); \quad (177b)$$

$$J_3 \Phi_{nlj_3} = j_3 \Phi_{nlj_3}. \quad (177b)$$

Поскольку  $b^2 = \alpha^2 E^2 b_c^2$ , из (175) следует, что для нахождения тонкой структуры уровней с точностью  $\alpha^4$  достаточно вычислить среднее значение возмущения по функциям  $\Phi_{nljj_3}$ . При этом в соответствии с замечанием относительно члена пропорционального  $\alpha^4 r^{-c}$  в дальнейшем будем пренебрегать его вкладом в собственные значения.

Используя равенство

$$L\sigma\Phi_{nljj_3} = [j(j+1) - l(l+1) - 3/4] \Phi_{nljj_3}$$

и тождество

$$\frac{1}{2} \left[ \delta_{l0} + \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(2l+1)} (1 - \delta_{l0}) \right] = \frac{1}{2l+1} - \frac{1}{2j+1}$$

для  $j = 1/2, 3/2, \dots, l = j \pm 1/2$ , находим следующее разложение по степеням  $\alpha$  собственных значений энергии:

$$w_{nlj} = M - \frac{m\alpha^2}{2n^2} + \frac{ma^4}{8n^4} \left( 3 - \frac{m}{M} \right) - \frac{m\alpha^4}{Mn^3} \left( \frac{m_1 - m}{2l+1} + \frac{m_2 + m}{2j+1} \right) + o(\alpha^4); \quad (178)$$

$$M = m_1 + m_2, \quad Mm = m_1 m_2, \quad \alpha = -e_1 e_2 / 4\pi.$$

Этот результат совпадает с вычислением  $w$  на основе уравнения Брейта (см. приложение 1).

Формула (178) для тонкой структуры  $w$  совпадает и с вычислением тонкой структуры энергетического спектра из четырехкомпонентного уравнения с функцией Грина (134) [112]. Проследим несколько ближе связь между двумя уравнениями.

Согласно [112] четырехмерное уравнение для рассматриваемой нами системы имеет вид

$$[(p - V)^2 - m_w^2 - s_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \Phi_w = 0, \quad (179)$$

где по-прежнему  $p_0 = E$ ,  $V_0$  и  $\mathbf{V}$  задаются равенствами (154) и (155), а

$$s_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4; \quad F_{\mu\nu} = \frac{ie_1 e_2}{w(p-q)^2} (p_{2\mu} q_{2\nu} - q_{2\mu} p_{2\nu}). \quad (180)$$

При вычислении тонкой структуры уровней  $w_{nlj}$  удобно устранить «малые компоненты» 4-спиноров (в представлении Паули), пользуясь подстановкой

$$\alpha = \gamma_0 \gamma \rightarrow (\mathbf{p} + i\mathbf{p} \times \boldsymbol{\sigma}) / (2m_1) \quad (181)$$

(см., например, работу [11] § 12). Полученное таким путем двухкомпонентное уравнение не совпадает с уравнением (175), хотя приводит к идентичному результату (178) для  $w_{nlj}$  в  $\alpha^4$ -приближении. Путь к вычислению  $w_{nlj}$ , исходя из двухкомпонентного уравнения (175), более прямой, так как он не требует подстановки

типа (181). Однако истинным критерием для выделения практически наиболее удачного квазипотенциального уравнения для частиц со спином должен послужить расчет высших поправок к  $w_{nij}$ .

### Электромагнитное взаимодействие двух частиц со спином 1/2

**Уравнение с 4-векторным потенциалом.** Теперь переходим к наиболее изученному и наиболее интересному с точки зрения применений случаю взаимодействия двух спинорных частиц. Здесь тоже удобно описать квазипотенциальное уравнение в двухкомпонентном формализме и ввести по аналогии с (162) амплитуду

$$T_{a_1 a_2, b_1 b_2}(p_1, p_2; q_1, q_2) = T(p_1, 3/2 - a_1, p_2, 3/2 - a_2; q_1, 3/2 - b_1, q_2, 3/2 - b_2). \quad (182)$$

При помощи двух наборов двухкомпонентных спиноров  $e_{\xi}^{(1)}, e_{\xi}^{(2)}$ , определенных так же, как и спиноры  $e_{\xi}$  выше, вместо (182) можно написать

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1, a_2=1}^2 \sum_{b_1, b_2=1}^2 \bar{e}_{\xi_1}^{(1)a_1} \bar{e}_{\xi_2}^{(2)a_2} T_{a_1 a_2, b_1 b_2}(p_1, p_2; q_1, q_2) e_{\eta_1}^{(1)b_1} e_{\eta_2}^{(2)b_2} = \\ & = T(p_1 \xi_1, p_2 \xi_2; q_1 \eta_1, q_2 \eta_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=1}^4 \sum_{\beta_1, \beta_2=1}^4 \tilde{u}_{\xi_1 \alpha_1}(\mathbf{p}_1) \tilde{u}_{\xi_2 \alpha_2}(\mathbf{p}_2) \times \\ & \times A_{\beta_1 \beta_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(p_1, p_2; q_1, q_2) u_{\eta_1}^{\beta_1}(\mathbf{q}_1) u_{\eta_2}^{\beta_2}(\mathbf{q}_2). \end{aligned} \quad (183)$$

Последнее равенство с участием 16-компонентной ковариантной амплитуды  $A$  является аналогом (130б) в случае двух частиц со спином 1/2. Используя, как и раньше, соотношение

$$u_{\xi}^{\alpha}(\mathbf{p}) = \sum_{a=1}^2 u_a^{\alpha}(\mathbf{p}) e_{\xi}^a,$$

можно непосредственно связать амплитуды  $T = \{T_{a_1 a_2, b_1 b_2}\}_{a_i b_j=1,2}$  и  $A$ .

В первом исчезающем приближении в системе центра инерции  $A$  дается выражением

$$A_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \gamma_{\mu}^{(1)} \gamma^{(2)\mu}, \quad (184)$$

а соответствующий потенциал в двухкомпонентном формализме дается, согласно (183) и (184), равенством

$$\begin{aligned} V_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} [4Ew - (\mathbf{p}-\mathbf{q})^2] - e_1 e_2 \left[ \frac{E_1}{E_2 + m_2} + \frac{E_2}{E_1 + m_1} - \right. \\ & \left. - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}{4(E_1 + m_1)(E_2 + m_2)} \right] + 2i \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \left[ 1 + \frac{E_2}{E_1 + m_1} - \right. \\ & \left. - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}{4(E_1 + m_1)(E_2 + m_1)} \right] (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \sigma_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2i \frac{e_1 e_2}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \left[ 1 + \frac{E_1}{E_2+m_2} - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}{4(E_1+m_1)(E_2+m_2)} \right] (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \sigma_2 - \\
& \quad - e_1 e_2 \left[ \delta_{ij} - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})_i (\mathbf{p}-\mathbf{q})_j}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(E_1+m_1)(E_2+m_2)} \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{q})_i (\mathbf{p} \times \mathbf{q})_j}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \right] \sigma_{1i} \sigma_{2j}. \quad (185)
\end{aligned}$$

Это выражение проще всего получить в представлении, в котором  $\gamma_0^{(i)}$  диагональны, но, как было отмечено и раньше, результат не зависит от конкретного базиса для  $\gamma$ -матриц.

Далее, следуя аналогии с другими рассмотренными случаями, перейдем от уравнения (137) с потенциалом  $V_1$  к уравнению с 4-векторным потенциалом  $V_\mu$ :

$$[(E - V_0)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 - m_w^2 + D + \mathbf{F}_1 \sigma_1 + \mathbf{F}_2 \sigma_2 + \sigma_1 H \sigma_2] \Phi_w = 0. \quad (186)$$

Здесь, как и раньше,

$$E = (w^2 - m_1^2 - m_2^2)/(2w); \quad m_w = m_1 m_2 / w; \quad [\sigma_1, \sigma_2] = 0,$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — два коммутирующих между собой набора матриц Паули;  $\sigma_1 H \sigma_2$  — сокращенное обозначение для суммы  $\sum_{i,j=1}^3 (\sigma_1)_i H_{ij} (\sigma_2)_j$ . Чтобы определить ядра интегральных операторов, действующих на  $\Phi_w$  в левой части (185), необходимо вновь приравнять линейные по  $\alpha$  члены:

$$\begin{aligned}
& 2EV_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - D(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \\
& - \mathbf{F}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma_1 - \mathbf{F}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma_2 - \sigma_1 H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \sigma_2 = V_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})/(2w).
\end{aligned}$$

Выбирая  $V_0$  и  $\mathbf{V}$  согласно (154) и (155), отсюда можно однозначно определить  $D$ ,  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  и  $H$ :

$$\left. \begin{aligned}
D(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{e_1 e_2}{2w} \left[ \frac{E_1}{E_2+m_2} + \frac{E_2}{E_1+m_1} - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}{4(E_1+m_1)(E_2+m_2)} \right]; \\
\mathbf{F}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -i \frac{e_1 e_2}{w(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \left[ 1 + \frac{E_2}{E_1+m_1} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}{4(E_1+m_1)(E_2+m_2)} \right] (\mathbf{p} \times \mathbf{q}); \\
\mathbf{F}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -i \frac{e_1 e_2}{w(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \left[ 1 + \frac{E_1}{E_2+m_2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2}{4(E_1+m_1)(E_2+m_2)} \right] (\mathbf{p} \times \mathbf{q}); \\
\mathcal{H}_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{e_1 e_2}{2w} \left[ \delta_{ij} - \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{q})_i (\mathbf{p} \times \mathbf{q})_j}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(E_1+m_1)(E_2+m_2)} \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{q})_i (\mathbf{p} \times \mathbf{q})_j}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \right].
\end{aligned} \right\} \quad (187)$$



Введение безразмерных кулоновских переменных показывает, что приближенное уравнение, в котором учтены лишь члены, дающие вклад в тонкой структуре, имеет следующий вид в координатном пространстве:

$$\left[ \Delta_c + \frac{2}{r_c} + b_c^2 + \frac{\alpha^2}{r_c^2} - 2\pi\alpha^2 \frac{m}{M} \delta(\mathbf{r}_c) - \pi\alpha^2 \frac{m}{M} \left( \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) \delta(\mathbf{r}_c) - \right. \\ \left. - \alpha^2 \frac{m}{2M} \cdot \frac{1}{r_c^3} \mathbf{L} \left( \frac{m_2}{m_1} \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{m_1}{m_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \right) - \alpha^2 \frac{m}{M} \frac{1}{r_c^3} \mathbf{L} (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) - \right. \\ \left. - \frac{4\pi a^2}{3M} m \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}_c) + \frac{\alpha^2 m}{2M} \frac{1}{r_c^3} \left( \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{3}{r^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}_c) (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r}_c) \right) \right] \Phi_w(\mathbf{r}_c) = 0, \quad (188)$$

где снова положили  $e_1 e_2 = -4\pi\alpha$ . При преобразовании Фурье величин  $-\mathcal{H}_{ij}$  было учтено соотношение

$$4\pi \int (\mathbf{a}_1 \mathbf{k}) (\mathbf{a}_2 \mathbf{k}) \frac{1}{k^2} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \\ = \frac{1}{r^3} \left[ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 - \frac{3}{r^2} (\mathbf{a}_1 \mathbf{r}) (\mathbf{a}_2 \mathbf{r}) \right] + \frac{4\pi}{3} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2) \delta(\mathbf{r}),$$

справедливое для любых векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ .

**Формула тонкой структуры для нетождественных частиц.** Собственные значения  $w$ , соответствующие тонкой структуре, получаются из (188): по теории возмущений вычисляются поправки к  $(b_c^2)_0$ ,  $n = -1/n^2$  и из соотношения  $b^2 = \alpha^2 E^2 b_c^2$  определяются коэффициенты в разложении  $w$  в ряд по  $\alpha$ . Чтобы найти  $w$  с точностью  $\alpha^4$ , достаточно, как и раньше, вычислить первую поправку к  $(b_c^2)_0$  как среднее значение возмущения к оператору  $\Delta_c + 2/r_c^{-1}$ . В качестве исходных приближений к  $\Phi_w$ , по которым образуется указанное среднее значение, берем

$$\Psi_{nlSj_3}(\mathbf{r}_c) = \sum_{S_3=-S}^S (lSj; j_3 - S_3, S_3) \varphi_{nl, j_3 - S_3}(\mathbf{r}_c) \chi_{SS_3}, \quad (189)$$

где  $\varphi_{nl\zeta}$  — нерелятивистские кулоновские функции;

$$\chi_{SS_3} = \sum_{\zeta_1=-1/2}^{1/2} (1/2 \ 1/2 S; \zeta_1, S_3 - \zeta_1) e_{\zeta_1}^{(1)} e_{S_3 - \zeta_1}^{(2)}; \quad (190)$$

$(l_1 l_2 l; m - m_3, m_3)$  — коэффициенты Клебша — Гордана. Функции (190) являются собственными функциями квадрата полного спина  $S^2$ , где  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}_1/2 + \boldsymbol{\sigma}_2/2$ , и его третьей проекции  $S_3$ :

$$S^2 \chi_{SS_3} = S(S+1) \chi_{SS_3}, \quad S_3 \chi_{SS_3} = S_3 \chi_{SS_3}, \quad (191)$$

где  $S = 0$  или  $1$ . Собственные функции  $\psi_{nlSjj_3}$  оператора  $\Delta_c + \frac{1}{2r_c^2}$  удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} J^2 \psi_{nlSjj_3} &= j(j+1) \psi_{nlSjj_3}; & J_3 \psi_{nlSjj_3} &= j_3 \psi_{nlSjj_3}; \\ L^2 \psi_{nlSjj_3} &= l(l+1) \psi_{nlSjj_3}; & S^2 \psi_{nlSjj_3} &= S(S+1) \psi_{nlSjj_3}, \end{aligned} \right\} (192)$$

где  $\mathbf{J}$  — полный момент ( $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ ).

Приведем формулы для некоторых средних значений по функциям (190), которые понадобятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} & \langle nlSjj_3 | \frac{2m\alpha^2}{Mr_c^3} \mathbf{L}\mathbf{S} | nlSjj_3 \rangle = \\ & = \alpha^2 \frac{2m}{M} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 2}{n^3 l(l+1)(2l+1)} (1 - \delta_{l0})(1 - \delta_{S0}) + o(\alpha^2); \\ & \langle nlSjj_3 | \frac{4\pi\alpha^2 m}{3M} \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}_c) | nlSjj_3 \rangle = \\ & = \frac{8\alpha^2}{3M} m \delta_{l0} [S(S+1) - 3/2] + o(\alpha^2); \\ & \langle nlSjj_3 | \frac{\alpha^2 m}{2Mr_c^3} \left[ \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{3}{r_c^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r}_c) (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r}_c) \right] | nlSjj_3 \rangle = \\ & = \frac{4\alpha^2 m}{Mn^3} \frac{(1 - \delta_{l0})(1 - \delta_{S0})}{l(l+1)(2l+1)} \kappa_{lj} + o(\alpha^2), \end{aligned} \quad (193)$$

где по определению

$$\kappa_{lj} = \frac{1}{2(2l-1)(2l+3)} \begin{cases} l(2l-1), & \text{если } j = l+1; \\ -(2l-1)(2l+3), & \text{если } j = l; \\ (l+1)(2l+3), & \text{если } j = l-1. \end{cases} \quad (194)$$

Мы будем также пользоваться соотношением

$$\begin{aligned} & \langle nlSjj_3 | \frac{\alpha^2 m}{2Mr_c^3} \mathbf{L} \left( \frac{m_2}{m_1} \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{m_1}{m_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \right) | nlSjj_3 \rangle = \\ & = \frac{\alpha^2}{2M^2} \langle nlSjj_3 | \frac{1}{r_c^3} \mathbf{L} (m_2^2 \boldsymbol{\sigma}_1 + m_1^2 \boldsymbol{\sigma}_2) | nlSjj_3 \rangle = \\ & = \frac{\alpha^2}{2M^2} (m_1^2 + m_2^2) \langle nlSjj_3 | \frac{1}{r_c^3} \mathbf{L}\mathbf{S} | nlSjj_3 \rangle - \\ & - \frac{\alpha^2}{2M^2} (m_1^2 - m_2^2) \langle nlSjj_3 | \frac{1}{r_c^3} (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}_1 - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}_2) | nlSjj_3 \rangle + o(\alpha^2). \end{aligned} \quad (195)$$

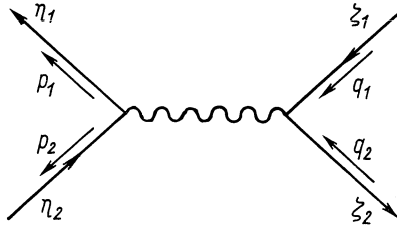
При помощи этих равенств находим для собственных значений энергии с погрешностью до  $\alpha^4$  формулу тонкой структуры, учи-

тывающую и эффекты отдачи [98]:

$$\begin{aligned}
 w_{nlsj} = & M - \frac{m\alpha^2}{2n^2} + \frac{3m\alpha^4}{8n^4} - \frac{m^2\alpha^4}{8Mn^4} - \frac{m\alpha^4}{n^3(2l+1)} + \frac{m\alpha^4}{2n^3}\delta_{l0} + \\
 & + \alpha^4 \frac{m(M^2+2m_1m_2)}{4M^2n^3} \frac{j(j+1)-l(l+1)-2}{l(l+1)(2l+1)} (1-\delta_{l0})(1-\delta_{s0}) + \\
 & + \frac{4m^2\alpha^4}{3Mn^3}\delta_{l0} \left[ S(S+1) - \frac{3}{2} \right] - \frac{2m^2\alpha^4}{Mn^3} \cdot \frac{(1-\delta_{l0})(1-\delta_{s0})}{l(l+1)(2l+1)} \kappa_{lj} + o(\alpha^4), \quad (196)
 \end{aligned}$$

где  $\kappa_{lj}$  определены в (194).

**Тонкая структура позитрония.** В случае, когда взаимодействуют частица и античастица (тогда  $m_1 = m_2 = m_e = 2m$ ,  $E_1 = E_2 = w/2$ ), требуется специальное рассмотрение. Естественно, общий вид уравнения (137) не меняется, но к выражению (185) для  $V_1$  необходимо добавить вклад от «аннигиляционной диаграммы»:



Остановимся здесь подробнее на вкладе этой диаграммы в квазипотенциал. Низшее приближение для амплитуды имеет вид

$$\begin{aligned}
 & T_1(p_1\zeta_1, p_2\zeta_2; q_1\eta_1, q_2\eta_2) = \\
 & = -\frac{e^2}{(p_1-q_1)^2} \tilde{u}_{\eta_1}^{(-)}(\mathbf{q}_1) \gamma_\mu u_{\zeta_1}^{(-)}(\mathbf{p}_1) \tilde{u}_{\zeta_2}(\mathbf{p}_2) \gamma^\mu u_{\eta_2}(\mathbf{q}_2) + \\
 & + \frac{e^2}{(p_1+p_2)^2} \tilde{u}_{\zeta_2}(\mathbf{p}_2) \gamma_\mu u_{\zeta_1}^{(-)}(\mathbf{p}_1) \tilde{u}_{\eta_1}^{(-)}(\mathbf{q}_1) \gamma^\mu u_{\eta_2}(\mathbf{q}_2), \quad (197)
 \end{aligned}$$

где отрицательные частотные спиноры Дирака снабжены знаком  $(-)$ .

Чтобы получить  $16 \times 16$ -ковариантную амплитуду  $A_1$ , спроектированную на спиноры с положительной энергией, необходимо преобразовать выражение (197). Преобразованием Паули — Фирца второй член в правой части (197) приводится к виду

$$\frac{e^2}{w^2} \sum_{R, R'=1}^{16} C^{RR'} \tilde{u}_{\zeta_2}(\mathbf{p}_2) \Gamma_R u_{\eta_2}(\mathbf{q}_2) \tilde{u}_{\eta_1}^{(-)}(\mathbf{q}_1) \Gamma_{R'} u_{\zeta_1}^{(-)}(\mathbf{p}_1), \quad (198)$$

где  $\Gamma_R$  ( $R = 1, \dots, 16$ ) — 16 линейно независимых матриц в комплексном пространстве  $\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$ . Далее вводятся зарядово-сопряженные спиноры  $u_\xi$  с положительной энергией:  $u_\xi(\mathbf{p}) =$

$= C\tilde{u}_{\xi}^{(-)}(\mathbf{p}), \tilde{u}_{\xi}^c(\mathbf{p}) = Cu_{\xi}^{(-)}(\mathbf{p})$  (описывающие позитрон в начальном и конечном состояниях). Таким образом, приходим к матричному элементу амплитуды  $A_1$ , спроектированной только на спиноры с положительной энергией:

$$\begin{aligned} & T_1(p_1\xi_1, p_2\xi_2; q_1\eta_1, q_2\eta_2) = \\ & = \tilde{u}_{-\xi_1}(\mathbf{p}_1)\tilde{u}_{\xi_2}(\mathbf{p}_2)\left[\frac{-e^2}{(p_1-q_1)^2}\gamma_\mu\otimes\gamma^\mu + \right. \\ & \left. + A_1^{an}(p_1, p_2; q_1, q_2)\right]u_{-\eta_1}^c(\mathbf{q}_1)u_{\eta_2}(\mathbf{q}_2), \end{aligned} \quad (199)$$

где

$$\begin{aligned} A_1^{an}(p_1, p_2; q_1, q_2) = & -\frac{e^2}{(p_1+p_2)^2}\left[\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \frac{1}{2}\gamma_\mu\otimes\gamma^\mu + \right. \\ & \left. + \gamma_5\otimes\gamma_5 + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_5\otimes\gamma^\mu\gamma_5\right]. \end{aligned} \quad (200)$$

Ясно, что добавочный член  $A_1^{an}$  в низшем приближении для квазипотенциала изменит левую часть уравнения (185) и в ней появятся новые слагаемые:

$$G + \mathbf{B}_1\sigma_1 + \mathbf{B}_2\sigma_2 + \sigma_1 C\sigma_2 \quad (201)$$

( $\sigma_1 = \sigma \otimes \mathbf{1}$ ,  $\sigma_2 = \mathbf{1} \otimes \sigma$ ). Выражение (201) определяется из равенства

$$\frac{1}{2w} T_1^{an} = G + \mathbf{B}_1\sigma_1 + \mathbf{B}_2\sigma_2 + \sigma_1 C\sigma_2. \quad (202)$$

В левой части (202) стоит матрица  $4 \times 4$ -амплитуды, полученной из  $A_1^{an}$  при помощи спиноров в используемом представлении Паули для  $\gamma$ -матриц:

$$\begin{aligned} & \bar{e}_{-\xi_1}^{(1)}\bar{e}_{\xi_2}^{(2)}T_1^{an}e_{-\eta_1}^{(1)}e_{\eta_2}^{(2)} = \\ & = \tilde{u}_{-\xi_1}^c(\mathbf{p}_1)\tilde{u}_{\xi_2}(\mathbf{p}_2)A_1^{an}u_{-\eta_1}^c(\mathbf{q}_1)u_{\eta_2}(\mathbf{q}_2) \end{aligned} \quad (203)$$

и в переменных системы центра инерции. Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях (202), получаем явные выражения для  $G$ ,  $\mathbf{B}_{1,2}$  и  $G_{ij}$ . Опуская громоздкие выражения, ограничимся приведением тех членов в координатном пространстве, которые дают вклад в  $w$  с искомой точностью. Это члены, пропорциональные  $\delta$ -функции:

$$-\frac{\pi\alpha}{w^2}(w+2m)\delta(\mathbf{r}) - \frac{\pi\alpha}{2w^3}m(w+m)\sigma_1\sigma_2\delta(\mathbf{r}); \quad (204)$$

$$\Delta w_{nlSj} = \alpha^4 m S(S+1)\delta_{l0}/(16n^3). \quad (205)$$

Добавляя подобный вклад аннигиляционной диаграммы, находим следующий окончательный результат для тонкой структуры

позитрония:

$$\begin{aligned}
 w_{nlSj} = & 2m_e - \frac{m_e \alpha^2}{4n^2} + \frac{11}{64} \frac{m_e \alpha^4}{n^4} - \frac{m_e \alpha^4}{2n^3 (2l+1)} + \\
 & + \frac{m_e \alpha^4}{4n^3} \delta_{l0} + \alpha^4 \frac{3m_e}{16n^3} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 2}{l(l+1)(2l+1)} (1 - \delta_{l0})(1 - \delta_{S0}) + \\
 & + \frac{m_e \alpha^4}{12n^3} \delta_{l0} [2S(S+1) - 3] - \frac{\alpha^4 m_e}{4n^3} \frac{(1 - \delta_{l0})(1 - \delta_{S0})}{l(l+1)(2l+1)} \kappa_{lj} + \\
 & + \frac{\alpha^4 m_e}{8n^3} S(S+1) \delta_{l0} + o(\alpha^4)
 \end{aligned}$$

(напомним, что приведенная масса  $m = m_e/2$ ).

#### 4. ЛЭМБОВСКОЕ СМЕЩЕНИЕ В СКАЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

##### Поправки от двухфотонных диаграмм четвертого порядка в квазипотенциал

**Вводные замечания.** Рассмотрим здесь величину

$$\Delta V_w^{(2\gamma)} = V_{2\gamma} - 2w (V^2 - V_0^2), \tag{206}$$

где

$$V_{2\gamma} = T_1 G T_1 - T_{2\gamma}, \tag{207}$$

связанную с вкладом в квазипотенциал диаграмм  $T_{2\gamma}$  четвертого порядка с двухфотонными промежуточными состояниями в  $t$ -канале (рис. 1). При нахождении величины  $\Delta V_w^{(2\gamma)}$  сталкиваемся с труд-

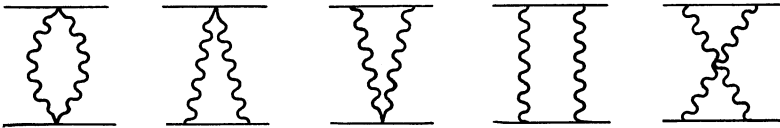


Рис. 1. Диаграммы 4-го порядка с двухфотонным обменом в  $t$ -канале в скалярной электродинамике

ностью принципиального характера, обусловленной наличием расходимостей в правой части (206). Линейная расходимость в интеграле, определяющем  $T_1 G T_1$ :

$$\begin{aligned}
 (T_1 G T_1)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & \int T_1(\mathbf{p}, \mathbf{k}) G_w(\mathbf{k}) T_1(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{i(2\pi)^3}; \\
 G_w(\mathbf{k}) = & \frac{1}{2w} \cdot \frac{1}{\mathbf{k}^2 - b^2 - i0},
 \end{aligned}$$

сокращается точно с линейной расходимостью в выражении

$$2wV^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2w \int V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) V(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Наряду с этим в суммарном вкладе  $T_{2\gamma}$ -диаграмм с двухфотонным обменом между заряженными частицами существует логарифмическая расходимость, присущая скалярной электродинамике [99]. Как следствие этого обстоятельства, в используемом нами дисперсионном методе устранения расходимостей возникает неопределенная постоянная вычитания  $f_0 = T_{2\gamma}(s_0, t_0, u_0)$  [точка вычитания  $(s_0, t_0, u_0)$  определена ниже]. Зафиксируем возникающий произвол, задавая определенным способом постоянную  $f_0$ . Оказывается [72], это можно сделать таким образом, чтобы  $\Delta V_w^{(2\gamma)}$  давало поправку в уровни энергии порядка выше  $\alpha^4$  и тем самым воспроизводилась релятивистская формула Бальмера (160), которая согласуется и с уравнением Брейта.

**Представление диаграмм  $T_{2\gamma}$  в виде дисперсионного интеграла.** Объектом изучения здесь будет поправка

$$\Delta V_w^{(2\gamma)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (T_1 G T_1)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - T_{2\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + 2w \mathcal{F}\left(\frac{\alpha^2}{r^2}\right) - 2w \int \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (208)$$

где

$$\mathcal{F}\left(\frac{\alpha^2}{r^2}\right) = \int \frac{\alpha^2}{r^2} \exp[-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\mathbf{r}] d^3r = \frac{2\pi^2\alpha^2}{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}. \quad (209)$$

Вклад  $\Delta V_w^{(2\gamma)}$  в собственные значения  $w$  дается средним значением

$$\langle n l \zeta | \Delta V_w^{(2\gamma)} | n l \zeta \rangle = \iint \bar{\Phi}_{nl\zeta}(\mathbf{p}) \Delta V_w^{(2\gamma)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Phi_{nl\zeta}(\mathbf{q}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \cdot \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \quad (210)$$

по нерелятивистским кулоновским функциям.

Рассмотрим сначала вклад  $T_{2\gamma}$ , записывая его в виде дисперсионного интеграла по  $s$  при фиксированных  $t < 0$ :

$$\Sigma \equiv \sum_{i=1}^2 (p_i^2 + q_i^2) = s + t + u \equiv 2(m_1^2 + m_2^2 - 2\lambda^2) \quad (\lambda^2 > 0). \quad (211)$$

Полагая

$$\begin{aligned} T_{2\gamma}(s+i0, t, u+i0) - T_{2\gamma}(s-i0, t, u-i0) &= \\ &= 2i \begin{cases} A_s(s, t) & \text{при } s \geq M^2; \\ A_u(u, t) & \text{при } u \geq M^2, \end{cases} \end{aligned} \quad (212)$$

имеем для абсорбтивных частей  $A_s$  и  $A_u$  следующие выражения:

$$\begin{aligned} A_s(x, t) = A_u(x, t) \equiv A(x, t) &= \\ &= 2\pi\alpha^2 \left\{ \frac{b(x)}{\sqrt{x}} + 2 \frac{x-S_0}{\sqrt{xb^2(x)}} \frac{1}{\sigma(x, -\lambda^2)} \ln \frac{\sigma(x, -\lambda^2) - 1}{\sigma(x, -\lambda^2) + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-s_0)^2}{t \sqrt{xb^2(x)}} \frac{1}{\sigma(x, t)} \ln \left[ \frac{\sigma(x, t) - 1}{\sigma(x, t) + 1} \right]^2 \right\}, \quad x \geq M^2, \end{aligned} \quad (213)$$

где

$$\sigma(x, y) = \sqrt{1 - \lambda^4 / [b^2(x) y]}. \tag{214}$$

Применяя теорему Коши, получаем следующее дисперсионное соотношение при фиксированных  $t$  и  $\Sigma$ :

$$T_{2\gamma}(s, t, u) = f_0(t) + \frac{s - s_0}{\pi} \times \\ \times \int_{M^2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(x - s_0)(x - s - i0)} + \frac{1}{(\Sigma - s_0 - t - x)(x - u - i0)} \right\} A(x, t) dx,$$

где

$$s_0 = (m_1^2 + m_2^2) / 2 + \Sigma / 4 = m_1^2 + m_2^2 - \lambda^2; \tag{216}$$

$$f_0(t) = T_{2\gamma}(s_0, t, \Sigma - s_0 - t). \tag{217}$$

Хотя  $A(x, t)$  при  $x \rightarrow \infty$  растет как  $x \ln x$ , однократное вычитание в точке  $s_0$  достаточно для сходимости интеграла в правой части (214), так как члены порядка  $1/x^2$  в фигурных скобках под знаком интеграла сокращаются.

Чтобы найти зависимость  $f_0(t)$  от  $t$ , необходимо записать  $T_{2\gamma}(s_0, t, u)$  в виде дисперсионного интеграла по  $t$ . Введем обозначения для скачков  $T_{2\gamma}(s, t, u)$  при фиксированных  $s$  (и  $\Sigma$ ):

$$T_{2\gamma}(s, t + i0, u + i0) - T_{2\gamma}(s, t - i0, u - i0) = \\ = 2i \begin{cases} A_t(t, s) & \text{при } t \geq 0; \\ \tilde{A}_u(u, s) & \text{при } u \geq M^2. \end{cases} \tag{218}$$

Проведенное в приложении 2 вычисление абсорбтивной части  $A_t(t, s)$  дает

$$A_t(t, s_0) = 4\pi\alpha^2 \left\{ 1 - \sum_{i=1}^2 [2(t - 2m_i^2) + 5\lambda^2] F(t, m_i^2, \lambda^2) + \right. \\ \left. + (t - t_0)^2 H(\Sigma - s_0 - t, t) \right\}, \quad t > 0, \tag{219}$$

где  $t_0 = -2\lambda^2$ . Функции  $F$  и  $H$  определены равенствами:

$$F(t, m^2, \lambda^2) = \\ = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t(t - 4m^2 + 4\lambda^2)}} \ln \frac{t + 2\lambda^2 + \sqrt{t(t - 4m^2 + 4\lambda^2)}}{t + 2\lambda^2 - \sqrt{t(t - 4m^2 + 4\lambda^2)}}, & t \geq 4(m^2 - \lambda^2), \\ \frac{1}{\sqrt{t(4m^2 - 4\lambda^2 - t)}} \arctg \frac{\sqrt{t(4m^2 - 4\lambda^2 - t)}}{t + 2\lambda^2}, & 0 \leq t \leq 4(m^2 - \lambda^2); \end{cases} \tag{220}$$

$$\begin{aligned}
 H(z, t) &= \int_{M^2}^{\infty} \frac{\theta(tb^2(x) - \lambda^4)}{[xt(tb^2(x) - \lambda^4)]^{1/2}} \frac{dx}{x-z} = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2} [zt(tb^2(z) - \lambda^4)]^{-1/2} \ln \frac{(m_1^2 + m_2^2 - z)t + 2\lambda^4 + 2\sqrt{zt(tb^2(z) - \lambda^4)}}{(m_1^2 + m_2^2 - z)t + 2\lambda^4 - 2\sqrt{zt(tb^2(z) - \lambda^4)}} = \\ = \frac{1}{2} [zt(tb^2(z) - \lambda^4)]^{-1/2} \ln \left[ \frac{\sqrt{z-s_1(t)} - \sqrt{z-s_2(t)}}{\sqrt{z-s_1(t)} + \sqrt{z-s_2(t)}} \right]^2 & \text{при } z \geq s_1(t); \\ \frac{4}{t} \frac{1}{\sqrt{(s_1(t)-z)(z-s_2(t))}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z-s_2(t)}{s_1(t)-z}} & \text{при } s_2(t) \leq z \leq s_1(t), \end{cases} \quad (221)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 s_{1,2}(t) &= m_1^2 + m_2^2 + 2\lambda^4/t \pm 2\sqrt{(m_1^2 + \lambda^4/t)(m_2^2 + \lambda^4/t)} = \\
 &= (\sqrt{m_1^2 + \lambda^4/t} \pm \sqrt{m_2^2 + \lambda^4/t})^2. \quad (222)
 \end{aligned}$$

Скачок в комплексной плоскости  $t$  (при  $t \leq \Sigma - s_0 - M^2$ , т. е. при  $u \geq M^2$ ) простым образом выражается через абсорбтивную часть  $A_u(u, t)$  [см. (213)]:

$$\tilde{A}_u(u, s_0) = A_u(u, \Sigma - s_0 - u).$$

Поведение  $\tilde{A}(x, s_0)$  и  $A_1(x, s_0)$  при больших  $x$  показывает, что для  $f_0(t)$  можно написать дисперсионное соотношение с одним вычитанием:

$$\begin{aligned}
 f_0(t) &= f_0 + \\
 &+ \frac{t-t_0}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{A_t(x, s_0) dx}{(x-t_0)(x-t-i0)} + \int_{M^2}^{\infty} \frac{\tilde{A}_u(x, s_0) dx}{(u_0-x)(x-u-i0)} \right], \quad (223)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_0 = s_0 = m_1^2 + m_2^2 - \lambda^2; \quad t_0 = -2\lambda^2; \quad s_0 + t_0 + u_0 = \Sigma; \\
 f_0 = T_{2\gamma}(s_0, t_0, u_0) = \text{const}.
 \end{aligned}$$

Сделанный выбор точки вычитания  $(s_0, t_0, u_0)$  оказывается удобным при приближенных вычислениях поправок к кулоновским уровням.

Дисперсионные соотношения (215) для  $T_{2\gamma}(s, t, u)$ , в котором  $f_0(t)$  дается равенством (223), можно привести к виду, более удобному для исследования. Для этого воспользуемся тождествами



$$\int_{a^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y(y-a^2)}} \cdot \frac{dy}{y-t} = \frac{1}{\sqrt{t(t-a^2)}} \ln \frac{\sqrt{1-(a^2/t)}+1}{\sqrt{1-(a^2/t)}-1},$$

$$\frac{1}{t} \int_{M^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{xb^2(x)}} \cdot \frac{1}{\sigma(x,t)} \ln \left| \frac{\sigma(x,t)+1}{\sigma(x,t)-1} \right| \frac{dx}{x-z} = - \int_0^{\infty} H(z,x) \frac{dx}{x-t}.$$

Здесь  $t < 0$ ,  $a^2$  — положительная постоянная;  $\sigma(x, t)$  и  $H(z, x)$  определены соответственно равенствами (214) и (224). При помощи этих тождеств отдельные дисперсионные интегралы можно записать в виде

$$\frac{s-s_0}{\pi} \int_{M^2}^{\infty} \frac{A_s(x,t) dx}{(x-s_0)(x-s-i0)} = g(s, s_0) + h(s, s_0) + k(s, t, s_0) -$$

$$- 4\alpha^2 (s-s_0) \int_{M^2}^{\infty} \frac{1}{t \sqrt{xb^2(x)}} \cdot \frac{1}{\sigma(x,t)} \ln \left| \frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1} \right| dx; \quad (224a)$$

$$\frac{s-s_0}{\pi} \int_{M^2}^{\infty} \frac{A_u(x,t) dx}{(\Sigma-s_0-t-x)(x-u-i0)} = g(u, \Sigma-s_0-t) + h(u, u_0) -$$

$$- h(\Sigma-s_0-t, u_0) + k(u, t, u_0) - k(\Sigma-s_0-t, t, u_0) +$$

$$+ 4\alpha^2 (s-s_0) \int_{M^2}^{\infty} \frac{1}{t \sqrt{xb^2(x)}} \frac{1}{\sigma(x,t)} \ln \left| \frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1} \right| dx, \quad (224b)$$

где функции  $g, h$  и  $k$  определены равенствами

$$g(z, z_0) = 2\alpha^2 \int_{M^2}^{\infty} \frac{b(x)}{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{x-z-i0} - \frac{1}{x-z_0} \right) dx; \quad (225)$$

$$h(z, z_0) = 4\alpha^2 (z-z_0) \int_{M^2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{xb^2(x)}} \cdot \frac{1}{\sigma(x, -\lambda^2)} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{\sigma(x, -\lambda^2)-1}{\sigma(x, -\lambda^2)+1} \right| \frac{dx}{x-z-i0}; \quad (226)$$

$$k(z, t, z_0) = 4\alpha^2 (z-z_0)^2 \int_{M^2}^{\infty} \frac{1}{t \sqrt{xb^2(x)}} \cdot \frac{1}{\sigma(x,t)} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{\sigma(x,t)-1}{\sigma(x,t)+1} \right| \frac{dx}{x-z-i0}. \quad (227)$$

Далее, для дисперсионных интегралов в правой части (223) имеем

$$\begin{aligned} \frac{t-t_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_t(x, s_0) dx}{(x-t_0)(x-t-i0)} = 4\alpha^2(t-t_0) \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} - [2(x-2m_i^2) + \right. \\ \left. + 5\lambda^2] F(x, m_i^2, \lambda^2) \right\} \frac{dx}{(x-t_0)(x-t-i0)} + \\ + 4\alpha^2(t-t_0) \int_0^{\infty} H(\Sigma - s_0 - x, x) dx + \\ + 4\alpha^2(t-t_0)^2 \int_0^{\infty} H(\Sigma - s_0 - x, x) \frac{dx}{x-t-i0}; \quad (228a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{t-t_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_u(x, \Sigma - s_0 - x)}{(u_0 - x)(x - u - i0)} dx = g(\Sigma - s_0 - t, u_0) + \\ + k(\Sigma - s_0 - t, t, u_0) + h(\Sigma - s_0 - t, u_0) - \\ - 4\alpha^2(t-t_0) \int_0^{\infty} H(\Sigma - s_0 - x, x) dx - \\ - 4\alpha^2(t-t_0)^2 \int_0^{\infty} H(\Sigma - s_0 - x, x) \frac{dx}{x-t-i0}. \quad (228b) \end{aligned}$$

Подставляя равенства (224a) и (225) в (223) и (215), получаем амплитуду  $T_{2\gamma}(s, t, u)$  в виде

$$\begin{aligned} T_{2\gamma}(s, t, u) = f_0 + \sum_{i=1}^2 f_i(t) + g(s, s_0) + g(u, u_0) + \\ + h(s, s_0) + h(u, u_0) + k(s, t, s_0) + k(u, t, u_0), \quad (229) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_i(t) = 4\alpha^2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} - [2(x-2m_i^2) + 5\lambda^2] F(x, m_i^2, \lambda^2) \right\} \times \\ \times \left( \frac{1}{x-t-i0} - \frac{1}{x-t_0} \right) dx, \quad i=1, 2. \end{aligned}$$

**Постоянная вычитания в диаграммах  $T_{2\gamma}$  и формула тонкой структуры.** До сих пор постоянная вычитания  $f_0 = T_{2\gamma}(s_0, t_0, u_0)$  оставалась неопределенной. Как было отмечено выше, ее появление характерно для скалярной электродинамики. При электро-

магнитном взаимодействии частиц спина  $1/2$  примитивно расходятся лишь диаграммы с двумя и тремя внешними линиями (собственные энергии электрона и фотона и вершинная функция). В них устранение расходимостей связано с перенормировкой массы и электрического заряда. В скалярной электродинамике существует третья постоянная перенормировка, возникающая из расходящихся диаграмм упругого рассеяния двух заряженных частиц. Устранение этой расходимости при помощи контрчленов вида  $a(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2)^2$  в лагранжиане вводит в теорию новую вершину, в которую сходятся четыре линии заряженных частиц [99]. Константа вычитания  $f_0$  связана с неопределенным коэффициентом  $a$  в этом контрчлене. Следуя [72], покажем, что, выбирая  $f_0$  в виде

$$f_0 = 4\alpha^2 \sum_{i=1}^2 \int_0^{4(m_i^2 - \lambda^2)} \left\{ \frac{1}{2} - [2(x - 2m_i^2) + 5\lambda^2] \times \right. \\ \left. \times F(x, m_i^2, \lambda^2) \right\} \frac{dx}{x - t_0}; \quad t_0 = -2\lambda^2,$$

получаем значения уровней энергий, согласующиеся с результатом (160) и с расчетами главного члена лэмбовского смещения для частиц со спином  $1/2$ . Проведенные в работе [72] вычисления интегралов (225) — (229) показывают, что с необходимой точностью для  $T_{2\gamma}(s, t, u)$  имеет место равенство

$$T_{2\gamma}(s, t, u) = \frac{4\pi^2\alpha^2 M}{\sqrt{-t}} - \frac{4}{3}\alpha^2 \ln \alpha^{-2} + \\ + \frac{4\pi\alpha^2 (s - s_0)^2}{t \sqrt{s|b^2(s)|}} \cdot \frac{1}{\sigma(s, t)} \ln \left[ \frac{\sigma(s, t) - 1}{\sigma(s, t) + 1} \right] - \\ - \frac{8\pi\alpha^2 (s - s_0)}{\sqrt{s(b^2(s) + \lambda^2)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b^2(s) + \lambda^2}{-b^2(s)}} + o(\alpha^2). \quad (230)$$

Чтобы получить  $\Delta V_w^{(2\gamma)}$ , согласно (208) необходимо еще вычислить вклад  $T_1 G T_1$ . Записывая  $T_1$  в виде

$$T_1(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = e^2 \left[ \frac{2(s - s_0)}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2} - 1 \right],$$

находим

$$(T_1 G T_1)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{2e^4}{w} (s - s_0)^2 \int \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{1}{k^2 - b^2 - i0} \cdot \frac{d^3k}{(2\pi)^3} - \\ - \frac{2e^4}{w} (s - s_0) \int \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 (k^2 - b^2 - i0)} \cdot \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + D, \quad (231)$$

где

$$D = \frac{e^4}{2w} \int \frac{1}{k^2 - b^2 - i0} \cdot \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Результат интегрирования правой части (231) при помощи параметризации Фейнмана имеет вид

$$(T_1 G T_1)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{4\pi\alpha^2 (s-s_0)^2}{t \sqrt{s} |b^2(s)|} \cdot \frac{1}{\sigma(s, t)} \ln \left[ \frac{\sigma(s, t) - 1}{\sigma(s, t) + 1} \right] - \\ - \frac{8\pi\alpha^2 (s-s_0)}{\sqrt{s} (b^2(s) + \lambda^2)} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b^2(s) + \lambda^2}{-b^2(s)}} + D, \quad t = -(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2. \quad (232)$$

Последнее слагаемое  $D$  в правой части равенства (232) линейно расходится, но, как упомянули выше, его расходимость компенсируется членом  $2w\mathbf{V}^2$  в разности  $\Delta V_w^{(2\gamma)}$  — формула (208). Следовательно, из (230) — (232), (209) и (208) имеем

$$\Delta V_w^{(2\gamma)} = \frac{4\pi^2\alpha^2 (w-M)}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|} + \frac{4}{3} \alpha^2 \ln \alpha^{-2} + \\ + \frac{e^4}{2w} \int \frac{1}{\mathbf{k}^2 - b^2 - i0} \cdot \frac{d^3k}{(2\pi)^3} - \\ - 2w \int \mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \mathbf{V}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} + o(\alpha^2). \quad (233)$$

Среднее значение первого члена в правой части является величиной порядка  $\alpha^6$ . После подстановки явного выражения  $\mathbf{V}(\mathbf{p}, \mathbf{k})$  из (155) в сумме двух последних интегралов исчезают члены с расходимостью среднего значения при  $l=0$ . В целом среднее значение оказывается конечным и порядка  $\alpha^6$ . Слагаемое  $4\alpha^2 \ln \alpha^{-2}/3$  в (233), дающее вклад порядка  $\alpha^5 \ln \alpha^{-2}$  в собственные значения  $w$ , будет рассматриваться ниже при нахождении лэмбовского смещения.

Итак, задавая постоянную перенормировки  $f_0$  в виде (229), воспроизводим из диаграмм четвертого порядка  $T_{2\gamma}$  формулу тонкой структуры (160), согласующуюся с вычислениями на основе уравнения Брейта.

### Главная часть лэмбовского смещения

**Диаграммы поляризации вакуума.** Теперь рассмотрим диаграммы четвертого порядка, в которых однофотонный обмен в  $t$ -канале сопровождается радиационными поправками вершины и собственной энергии фотона и вершинной части (рис. 2 и 3). Покажем, что они не дают вклада в тонкую структуру (до  $\alpha^4$ ) и вычислим их вклад в уровни энергии порядка  $\alpha^5 \ln \alpha^{-2}$ .

Начнем с рассмотрения двух диаграмм на рис. 2, в которых замкнутые петли соответствуют двум заряженным частицам типа 1 и 2. Обозначим их сумму  $\mathcal{F}(s, t)$ . Удобно определить поляриза-

дисперсионный тензор  $\Pi_{\mu\nu}(Q)$ ,  $Q = q_1 - p_1 = p_2 - q_2$  при помощи равенства

$$58 \mathcal{F}(s, t) = -\alpha \frac{(p_1 + q_1)^\mu (p_2 + q_2)^\nu}{(Q^2)^2} \Pi_{\mu\nu}(Q) \quad (234)$$

и связать с ним скалярную функцию  $\rho(Q^2)$  следующим образом:

$$\Pi_{\mu\nu}(Q) = (g_{\mu\nu}Q^2 - Q_\mu Q_\nu) \rho(Q^2). \quad (235)$$

Запишем  $\rho(Q^2)$  в виде суммы

$$\rho(Q^2) = \sum_{i=1}^2 \rho_i(Q^2), \quad (236)$$

соответствующей вкладом диаграмм рис. 2, а и б. Получив выражение для  $\rho_i(Q^2)$ , можно вычислить вклад от  $\mathcal{F}(s, t)$ .

Функции  $\rho_i(t)$  аналитичны в комплексной плоскости  $t = Q^2$  с размером вдоль положительной полуоси от  $4m_i^2$  до  $\infty$ . Для них

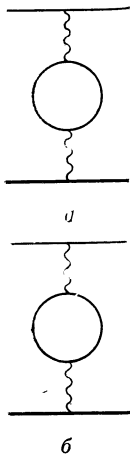


Рис. 2. Диаграммы поляризации вакуума с одной петлей

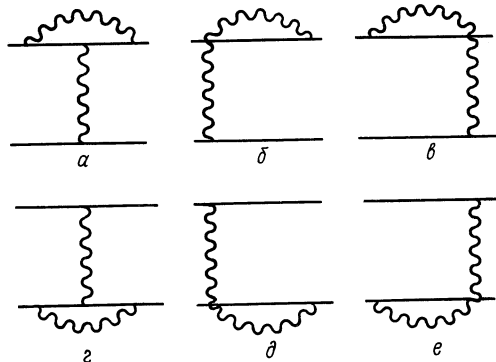


Рис. 3. Вершинные диаграммы четвертого порядка

имеет место дисперсионное соотношение по  $t$  с одним вычитанием, поскольку мнимая часть  $\rho_i(t)$  (пропорциональная скачку на разрезе):

$$\text{Im } \rho_i(t) = \frac{\pi\alpha}{3} \left( \frac{t - 4m_i^2}{t} \right)^{3/2}, \quad t \geq 4m_i^2, \quad (237)$$

стремится к постоянной  $\pi\alpha/3$  при  $t \rightarrow \infty$ . Равенство (237) получается из правил Кутковского. Учитывая требование  $\rho_i(0) = 0$ , запи-

шем дисперсионное соотношение для  $\rho_i(t)$  в виде

$$\rho_i(t) = \frac{\alpha t}{3} \int_{4m_i^2}^{\infty} \left( \frac{x-4m_i^2}{x} \right)^{3/2} \frac{dx}{x(x-t-i0)}. \quad (238)$$

Приближенное значение интеграла в правой части (238) равно

$$\rho_i(t) = \frac{\alpha}{6m_i^2} \left[ \frac{t}{5} + \frac{1}{70} \frac{t^2}{m_i^2} + o(t^3) \right], \quad i = 1, 2.$$

Возвращаясь обратно к  $\Pi_{\mu\nu}(Q)$  и  $\mathcal{F}(s, t)$ , находим, что

$$\mathcal{F}(s, t) = -\alpha^2 \frac{2(s-s_0) + t - t_0}{30} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{m_i^2} \left[ 1 + \frac{2}{7} \cdot \frac{t}{4m_i^2} + o(\alpha^2) \right].$$

Это означает, что вклад диаграмм рис. 2, *a* и *б* в квазипотенциал будет порядка  $\alpha^2$  и их вклад в собственные значения энергии — порядка  $\alpha^5$ . Следовательно, этими диаграммами в дальнейшем можно пренебречь.

**Вершинные диаграммы. Формула для лэмбовского смещения.** Рассмотрим вершинные диаграммы рис. 3, *a* — *e*. При этом вновь воспользуемся методом дисперсионных соотношений. Вклад  $T_{\Gamma}(s, t)$  вершинных диаграмм представим в виде суммы аналитических функций в комплексной плоскости  $t$  с разрезами вдоль вещественной оси от  $4m_i^2$  до  $\infty$  ( $i = 1, 2$ ). Это позволит получить единое для всех представление в виде дисперсионного интеграла  $n_0 t$ :

$$T_{\Gamma}(s, t) = \frac{\alpha^2}{\pi} [2(s-s_0) + (t-t_0)] \sum_{i=1}^2 \int_{4m_i^2}^{\infty} \frac{\text{Im } v_i(x) dx}{x(x-t-i0)}, \quad t < 0, \quad (239)$$

где спектральные функции  $\text{Im } v_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) вычислены в приложении 3 и равны

$$\begin{aligned} \text{Im } v_i(x) = & -\pi \frac{t-2m_i^2+\lambda^2}{t-4(m_i^2-\lambda^2)} \sqrt{\frac{t-4m_i^2}{t}} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{4m_i^2-t-2\lambda^2}{2\sqrt{(t-4m_i^2)(t-4m_i^2+4\lambda^2)}} \times \right. \\ & \left. \times \ln \frac{t-4m_i^2+2\lambda^2+\sqrt{(t-4m_i^2)(t-4m_i^2+4\lambda^2)}}{t-4m_i^2+2\lambda^2-\sqrt{(t-4m_i^2)(t-4m_i^2+4\lambda^2)}} \right\}. \quad (240) \end{aligned}$$

Перейдем к приближенному вычислению  $T_{\Gamma}(s, t)$  при малых отрицательных  $t$  ( $|t| \sim \alpha^2 m$ ). Для этой цели рассмотрим сначала некоторые вспомогательные интегралы. Пусть

$$\gamma_1(t, m^2, \tau) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{x-2m^2+\lambda^2}{x-4\tau} \sqrt{\frac{x-4m^2}{x}} \cdot \frac{dx}{x(x-t)}, \quad (241)$$

где  $\tau = m^2 - \lambda^2$ . Подстановкой  $y = \sqrt{(x - 4m^2)/x}$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , можно привести  $\gamma_1$  к виду

$$\gamma_1(t, m^2, \tau) = 2 \int_0^1 y^2 \frac{2m^2 + \lambda^2 + y^2 (2m^2 - \lambda^2)}{(4\lambda^2 + 4\tau y^2)(4m^2 - t + ty^2)} dy$$

и после несложных преобразований получить оценку

$$\gamma_1(t, m^2, \tau) = 1/3m^2 + o(\alpha) \tag{242}$$

для  $|t| \sim \alpha^2 m$ . Отсюда вытекает, что вклад  $\sum_{i=1}^2 \gamma_1(t, m_i^2, \tau_i)$  в  $T_\Gamma$  будет порядка  $\alpha^2$ , а поправка в уровни энергии — порядка  $\alpha^5$ .

Второй интеграл, для которого необходимо получить оценку при малых  $t$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_2(t, m^2, \tau) &= \int_{4m^2}^{\infty} \frac{x - 2m^2 + \lambda^2}{x - 4\tau} \sqrt{\frac{x - 4\tau}{x}} \cdot \frac{4m^2 - 2\lambda^2 - x}{2 \sqrt{(x - 4m^2)(x - 4\tau)}} \times \\ &\times \ln \left( \frac{\sqrt{x - 4m^2} + \sqrt{x - 4\tau}}{\sqrt{x - 4m^2} - \sqrt{x - 4\tau}} \right)^2 \frac{dx}{x(x-t)} = -\frac{1}{2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{x - 2m^2 + \lambda^2}{x - 4\tau} \times \\ &\times \frac{x - 4\tau - 2\lambda^2}{\sqrt{x(x - 4\tau)}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{B(x, m^2, \tau)}}{1 - \sqrt{B(x, m^2, \tau)}} \right]^2 \frac{dx}{x(x-t)}, \end{aligned} \tag{243}$$

где

$$B(x, m^2, \tau) = (x - 4\tau)/(x - 4m^2); \quad \tau = m^2 - \lambda^2.$$

Аргумент логарифма в правой части (243) получается простым алгебраическим преобразованием из аргумента логарифма в правой части (240) (и заменой  $m_i^2, \tau_i$  на  $m^2, \tau$ ). В интеграле, задающем  $\gamma_2$ , сделаем подстановку  $y = \sqrt{(x - 4\tau)/x}$ ,  $\varepsilon \leq y \leq 1$ , где  $\varepsilon = \lambda/m$  — величина порядка  $\alpha$ ; после некоторых преобразований находим

$$\begin{aligned} \gamma_2(t, m^2, \tau) &= - \int_{\varepsilon}^1 \frac{y^2 - (\lambda^2/2\tau)(1 - y^2)}{4\tau - t(1 - y^2)} \left[ 1 - \frac{2m^2 - \lambda^2}{4\lambda}(1 - y^2) \right] \times \\ &\times \ln \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{\tau}}{m} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 - \varepsilon^2}}}{1 - \frac{\sqrt{\tau}}{m} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 - \varepsilon^2}}} \right]^2 \frac{dy}{y^2}. \end{aligned} \tag{244}$$

Удобно представить логарифм под знаком интеграла в виде суммы:

$$L \equiv \ln \left[ \frac{1 + \frac{\sqrt{\tau}}{m} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 - \varepsilon^2}}}{1 - \frac{\sqrt{\tau}}{m} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 - \varepsilon^2}}} \right]^2 =$$

$$= 4 \ln \left( \frac{y}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{y^2}{\varepsilon^2} - 1} \right) + 2 \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \frac{y}{y + \sqrt{y^2 - \varepsilon^2}} \right) -$$

$$- 2 \ln \left[ 1 - \frac{y}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} (y + \sqrt{y^2 - \varepsilon^2}) \right]. \quad (245)$$

Разложение членов в правой части (245) в ряд по степеням дает

$$L = 2 \ln \frac{4}{\varepsilon^2} + 2 \ln y^2 - 2 \ln \left[ 1 - y \frac{y + \sqrt{y^2 - \varepsilon^2}}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right] +$$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \left( \frac{\varepsilon}{y} \right)^{2n} -$$

$$- 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^n \left( \frac{y}{y + \sqrt{y^2 - \varepsilon^2}} \right)^n. \quad (246)$$

Анализ вкладов всех слагаемых в (246) показывает, что лишь первый член  $2 \ln (4/\varepsilon^2)$  существен в интересующем нас приближении. Из его подстановки в интеграл (244) вытекает следующая оценка для  $\gamma_2$ :

$$\gamma_2(t, m^2, \tau) = (1/3m^2) \ln(\lambda^2/4m^2) + O(\alpha \ln \alpha). \quad (247)$$

Имея в виду определения (241) и (243) интегралов  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и результаты (242) и (247), приходим к следующей оценке вершинной части:

$$T_{\Gamma}(s, t) = \frac{16\alpha^2}{3} \sum_{i=1}^2 \frac{m_1 m_2}{m_i^2} \ln \left( \frac{\lambda^2}{4m_i^2} \right) + o(\alpha^2).$$

Отсюда следует, что интересующая нас поправка квазипотенциала из диаграмм однофотонного обмена на рис. 2 и 3

$$V_{\Gamma} = (16\alpha/3)^2 m_1 m_2 (1/m_1^2 + 1/m_2^2) \ln \alpha^{-2} + o(\alpha^2).$$

Теперь необходимо добавить к  $V_{\Gamma}$  вклад  $4\alpha^2 \ln \alpha^{-2}/3$  от диаграмм двухфотонного обмена и взять среднее значение по невозмущенным волновым функциям. Окончательно для сдвига уров-



ней энергии (главная часть лэмбовского смещения) находим

$$\Delta w_{nl}^{\text{Lamb}} = (4\alpha^5/3\pi n^3) m^3 \delta_{l_0} (1/m_1^2 + 1/m_2^2) \ln \alpha^{-2} + [\alpha^5 m^2 / (3\pi n^3 M)] \delta_{l_0} \ln \alpha^{-2}. \quad (248)$$

Первый член в правой части (248) происходит из вершинных частей, второй — из двухфотонных диаграмм. Оба члена при  $n = 2$  совпадают с результатами Фултона и Мартина [60] для главной части лэмбовского сдвига в случае двух частиц со спином  $1/2$ . Они, кроме того, переходят в известное выражение (см., например, работу [64]), полученное при разложении по степеням малой и большой масс, когда  $m_1/m_2 \rightarrow \infty$ .

Авторы выражают глубокую благодарность академику А. А. Логунову и доктору физ.-матем. наук Р. Н. Фаустову за полезные обсуждения на разных этапах работы над этой статьей.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

#### Уравнение Брейта для частиц со спином 0

Пусть  $\varphi(\mathbf{p})$  — функция, описывающая систему из двух бесспиновых частиц в системе центра каждой массы  $m_i$  и заряда  $e_i$  ( $i = 1, 2$ ). Если  $w$  — полная энергия рассматриваемой системы, исходным пунктом для получения так называемого уравнения Брейта является следующее уравнение для  $\varphi(\mathbf{p})$ , содержащее некоторый эффективный потенциал  $U(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ :

$$(E_1(\mathbf{p}) + E_2(\mathbf{p}) - w) \varphi(\mathbf{p}) + \int U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \varphi(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0, \quad (\text{II.1})$$

где  $E_i(\mathbf{p}) = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{p}^2}$ ,  $i = 1, 2$ . Потенциал  $U(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  связывается с амплитудой рассеяния двух заряженных частиц правилом, которое будет сформулировано ниже.

Отметим прежде всего, что при заданном  $U$  из (II.1) следует уравнение типа Липпмана — Швингера:

$$\tilde{T}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \int U(\mathbf{p}, \mathbf{k}) G(\mathbf{k}) \tilde{T}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 0, \quad (\text{II.2a})$$

$$G(\mathbf{k}) = (E_1(\mathbf{k}) + E_2(\mathbf{k}) - w - i0)^{-1}, \quad (\text{II.2b})$$

для «амплитуды»  $\tilde{T}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , определенной равенством

$$\varphi_q(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + (E_1(\mathbf{p}) + E_2(\mathbf{p}) - w_q - i0)^{-1} \tilde{T}(\mathbf{p}, \mathbf{q}). \quad (\text{II.3})$$

Здесь индекс  $q$  является сокращенным обозначением для

$$w_q = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{q}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{q}^2}.$$

Связь  $\tilde{T}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  с амплитудой упругого рассеяния  $T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  можно получить из условия унитарности (127). Сравним (127) с равенством

$$\tilde{T} - \tilde{T}^* = \tilde{T}^* (G - G^*) \tilde{T}, \quad (\text{II.4})$$

вытекающим из (II.2) при эрмитовом  $U$ . В более подробной записи (II.4) означает

$$\begin{aligned} & \tilde{T}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \tilde{T}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \\ & = 2\pi i \int \tilde{T}^*(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \delta(E_1(\mathbf{k}) + E_2(\mathbf{k}) - w) \tilde{T}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

После преобразования аргумента  $\delta$ -функции:

$$\delta(E_1(\mathbf{k}) + E_2(\mathbf{k}) - w) = 2E_1(\mathbf{k}) E_2(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}^2 - b^2(w^2))/w,$$

где  $b^2(w^2)$  дается равенством (120), устанавливаем эквивалентность (127) и (II.5), если отождествить  $\tilde{T}$  с «нековариантной амплитудой»

$$\tilde{T}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / \sqrt{16E_1(\mathbf{p}) E_2(\mathbf{p}) E_1(\mathbf{q}) E_2(\mathbf{q})}. \quad (\text{II.6})$$

Последнее равенство вместе с (формальным) соотношением  $U = (1 + G\tilde{T})^{-1} \tilde{T}$ , вытекающим из (II.2), дает искомую связь  $U$  с амплитудой рассеяния. В частности, если  $T_1$  — борновское приближение для  $T$ , эффективный потенциал в первом приближении

$$U_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -T_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) / \sqrt{16E_1(\mathbf{p}) E_2(\mathbf{p}) E_1(\mathbf{q}) E_2(\mathbf{q})}. \quad (\text{II.7})$$

По определению, уравнение Брейта получается из (II.1), если в нем сделать следующие приближения:

а) в качестве потенциала берется  $U_1$ :

$$U_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{e^2}{4i} \cdot \frac{(p_1 + q_1)^\mu (p_2 + q_2)^\nu D_{\mu\nu}^c(p_1 - q_1)}{\sqrt{E_1(\mathbf{p}) E_2(\mathbf{p}) E_1(\mathbf{q}) E_2(\mathbf{q})}}, \quad (\text{II.8})$$

где фотонный пропагатор  $D_{\mu\nu}^c$  взят в кулоновской калибровке:

$$D_{00}(k) = \frac{i}{\mathbf{k}^2}; D_{0i}(k) = D_{i0}(k) = 0; D_{ij}(k) = \frac{i}{k^2 + i0} \left( \delta_{ij} - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{\mathbf{k}^2} \right) \text{ и } p_i^0 = E_i(\mathbf{p}); \mathbf{q}_i^0 = E_i(\mathbf{q}) \quad (i = 1, 2);$$

б) энергии  $E_i(\mathbf{k}) = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{k}^2}$  разлагаются по степеням  $\mathbf{k}^2$  с точностью до членов четвертого порядка:

$$E_i(\mathbf{k}) \approx m_i + \mathbf{k}^2/(2m_i) - \mathbf{k}^4/(8m_i^3), \quad i = 1, 2.$$

В результате получаем следующее уравнение Брейта [112]:

$$\begin{aligned} & \left[ M + \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{8m^3} \left( 1 - 3 \frac{m}{M} \right) \mathbf{p}^4 - w \right] \Phi(\mathbf{p}) = \\ & = e^2 \int \left\{ \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{4Mm} \left[ 1 - 2 \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2} + \left( \frac{\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \right)^2 \right] \right\} \times \\ & \times \varphi(\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0; \quad M = m_1 + m_2; \quad Mm = m_1 m_2, \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

а после перехода к координатному пространству:

$$\begin{aligned} & \left\{ E_c + \Delta_c/2 + 1/r_c + \alpha^2/8 (1 - 3m/M) \Delta_c^2 - \right. \\ & \left. - \alpha^2 m/M r_c \left[ \frac{1}{r_c^2} \mathbf{r}_c (\mathbf{r}_c \nabla_c) \nabla_c + \Delta_c \right] \right\} \varphi(r_c) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Здесь безразмерные операторы  $\mathbf{r}_c$  и  $\nabla_c$  введены по формулам  $\mathbf{r} = (\alpha m)^{-1} \mathbf{r}_c$ ,  $\nabla = \alpha m \nabla_c$ ,  $\Delta_c = \nabla_c^2$ , а энергия связи  $E_c$  связана с  $w$  равенством  $w - M = \alpha^2 m E_c$ . Уравнение (II.10) приводит к разумным результатам лишь в рамках теории возмущений: выборка в качестве исходных собственных функций и собственных значений нерелятивистские кулоновские функции  $|nl\zeta\rangle$  и кулоновский спектр  $E_{c0} = -\alpha^2/2n^2$ .

Для вычислений по теории возмущений используем равенство

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^2} \mathbf{r} (\mathbf{r} \nabla) \nabla + \Delta \right] = \Delta - \mathbf{r} \nabla / r^2 + \mathbf{L}^2 / 2r^2;$$

$$\mathbf{L} = -i \mathbf{r} \times \nabla,$$

опуская здесь и ниже индекс  $s$ , и средние значения  $s$  с участием степеней  $z$  и  $\Delta$ :

$$\left. \begin{aligned} \langle n l \zeta | r^{-1} | n l \zeta \rangle &= 1/n^2, & \langle n l \zeta | r^{-2} | n l \zeta \rangle &= 2/[n^3 (2l + 1)]; \\ \langle n l \zeta | r^{-3} | n l \zeta \rangle &= 2/[n^3 l (l + 1) (2l + 1)]; \\ \langle n l \zeta | \Delta^2 | n l \zeta \rangle &= (8/(2l + 1) - 3/n)/n^3 \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.11})$$

Суммируя всю поправку к кулоновским уровням, получаем

$$w_{nl} = M - \frac{m\alpha^2}{2n^2} + \frac{3}{8} \frac{m\alpha^4}{n^4} - \frac{m\alpha^4}{n^3 (2l + 1)} - \frac{m^2\alpha^4}{8Mn^4} + \frac{m^2}{M} \frac{\alpha^4}{n^3} \delta_{l0} \quad (\text{П.12})$$

в согласии с (162).

Аналогичным способом можно построить уравнение Брейта и в случае взаимодействия бесспиновой частицы с частицей спина 1/2. По сравнению с только что рассмотренным скалярным случаем, возникающий потенциал отличается на члены, происходящие от спина частицы 1:

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = & -e^2 \left\{ \frac{1}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} - \frac{1}{4m_1 m_2} \left[ 1 - 2 \frac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{q}^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \right)^2 \right] - \frac{1}{8m_1^2} + \frac{i}{4m_1^2} \frac{2m_1 + m_2}{m_2} \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\sigma}}{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Приближенное уравнение Брейта с этим потенциалом имеет вид

$$\left[ M + \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{8m^3} \left( 1 - 3 \frac{m}{M} \right) \mathbf{p}^4 - w \right] \Phi(\mathbf{p}) + \int U_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Phi(\mathbf{q}) \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} = 0; \quad (\text{П.14})$$

оно приводит к собственным значениям (178) для  $w$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Вычисление вклада $t$ -канальных спектральных функций для диаграмм с двухфотонным обменом

Вычислим здесь скачок  $A_t$  на разрезе в  $t$ -канале для диаграмм, изображенных на рис. 1. Поскольку это — совокупность всех диаграмм четвертого порядка с двухфотонным промежуточным состоянием, их суммарный вклад в абсорбтивную часть прежде всего получается из условия унитарности в  $t$ -канале:

$$\begin{aligned} T(p_1, -q_1; -p_2, q_2) - \bar{T}(-p_2, q_2; p_1, -q_1) = \\ = i (2\pi)^4 \sum_n \delta(p_1 - q_1 - \sum_{j=1}^n k_j) \times \\ \times \bar{T}(k_1, \dots, k_n; p_1, -q_1) T(k_1, \dots, k_n; -p_2, q_2). \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Здесь  $\sum_n$  включает, как обычно, интегрирование по импульсам  $k_1, \dots, k_n$  промежуточных частиц; предполагается, что  $-q_1^0 > 0$ ,  $p_1^0 > 0$ ,  $-p_2^0 > 0$ ,  $q_2^0 > 0$ .

Чтобы вычислить вклад в правую часть (П.15) от двухфотонных промежуточных состояний, необходимо заменить  $n$  на  $(k_1\sigma_1; k_2\sigma_2)$ , где  $k_i, \sigma_i$  — импульс и поляризация  $i$ -го фотона,  $k_i^0 = |k_i|$  ( $i = 1, 2$ ). Итак, символ суммы  $\sum_n$  (по двухфотонным состояниям) можно расшифровать формулой

$$\sum_n \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int (dk_1)_0 (dk_2)_0 (-g^{\sigma_1\sigma_1}) (-g^{\sigma_2\sigma_2}),$$

где  $(dk)_0$  дается равенством (38в) (при  $m = 0$ ) (множитель  $1/2$  идет в результате тождественности фотонов). Остается подставить в (П.15) градиентно-инвариантное борновское приближение для амплитуды двухфотонной аннигиляции:

$$T(k_1, \sigma_1, k_2\sigma_2; p_1, -q_1) = e^2 \left[ 2\varepsilon_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(2p_1+k_1)\varepsilon_{\sigma_2}(p_1+q_1+k_1)}{m_1^2 - (k_1+q_1)^2 - i0} + \frac{\varepsilon_{\sigma_2}(2q_1+k_2)\varepsilon_{\sigma_1}(p_1+q_1+k_2)}{m_1^2 - (k_2+q_1)^2 - i0} \right],$$

где  $\varepsilon_{\sigma_i}$  ( $i = 1, 2$ ) — 4-вектор поляризации фотона  $i$ ; набор четырех ортогональных векторов поляризации  $\varepsilon_{\sigma}$  ( $\sigma = 0, 1, 2, 3$ ) удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{\sigma=0}^3 g^{\sigma\sigma} (\varepsilon_{\sigma})^{\lambda} (\varepsilon_{\sigma})^{\mu} = g^{\lambda\mu}.$$

В полученном интеграле в правой части (П.15) сделаем замену переменных  $k_1 + k_2 = K$ ,  $k_1 - k_2 = 2k$  и снимем интегрирование по  $K$  за счет  $\delta$ -функции. В итоге получим

$$A_t = A_t^{(2\gamma)} = \alpha^2 \sum_{\sigma_1, \sigma_2} g^{\sigma_1\sigma_1} g^{\sigma_2\sigma_2} \int d^4k \delta((p_1 - q_1)k) \times \\ \times \delta\left(k^2 + \frac{t}{4}\right) \left[ 2\varepsilon_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(3q_1+p_1+2k)\varepsilon_{\sigma_2}(q_1+3p_1+2k)}{4m_1^2 - (p_1+q_1+2k)^2 + i0} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_{\sigma_2}(3q_1+p_1-2k)\varepsilon_{\sigma_1}(3p_1+q_1-2k)}{4m_1^2 - (p_1+q_1-2k)^2 + i0} \right] \times \\ \times \left[ 2\varepsilon_{\sigma_1}\varepsilon_{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(p_2+3q_2-2k)\varepsilon_{\sigma_2}(3p_2+q_2-2k)}{4m_2^2 - (p_2+q_2-2k)^2 - i0} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_{\sigma_1}(3p_2+q_2+2k)\varepsilon_{\sigma_2}(p_2+3q_2+2k)}{4m_2^2 - (p_2+q_2+2k)^2 - i0} \right], \quad (\text{П.16})$$

где  $t = (p_1 - q_1)^2 > 0$ .

Для вычисления интеграла (П.16) проще всего перейти в систему покоя в  $t$ -канале. В этой системе

$$p_1 - q_1 = q_2 - p_2 = (\sqrt{t}, 0), \\ p_1 + q_1 = \left( \frac{q^2 - p^2}{\sqrt{t}}, 2 \left[ m_1^2 + \frac{1}{4t} \Delta(t, -p^2, -q^2) - b^2(w^2) \right] \mathbf{n}_1 \right); \\ p_2 + q_2 = \left( \frac{p^2 - q^2}{\sqrt{t}}, 2 \left[ m_2^2 + \frac{1}{4t} \Delta(t, -p^2, -q^2) - b^2(w^2) \right] \mathbf{n}_2 \right),$$

где  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  — трехмерные единичные векторы, а

$$\Delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx,$$

$$\mathbf{p}^2 = -\frac{1}{w^2} (E_2 p_1 - E_1 p_2)^2, \quad \mathbf{q}^2 = -\frac{1}{w^2} (E_2 q_1 - E_1 q_2)^2.$$

Дальнейшее вычисление интеграла (П.16) приводит к формуле (219).

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### Мнимая часть вершинных диаграмм

Чтобы найти скачок вершинной части  $T_\Gamma$  (239) на разрезах от  $4m_i^2$  до  $\infty$ , необходимо снова исходить из условия унитарности (П.15) в  $t$ -канале. При

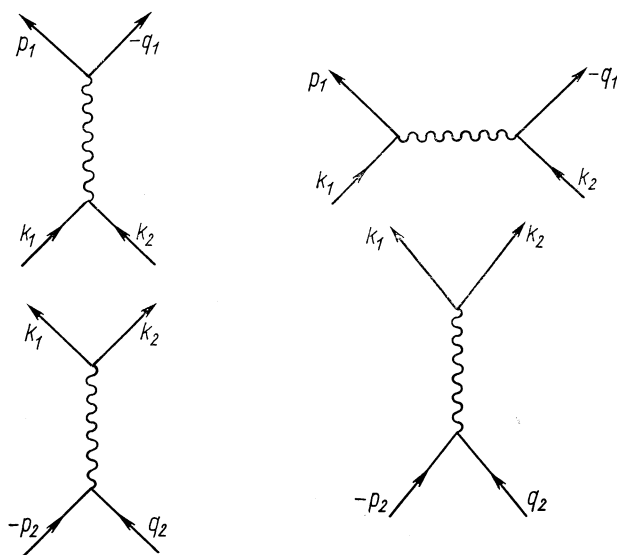


Рис. 4. Диаграммы рассеяния с однофотонным обменом, возникающие при вычислении мнимой части вершинной функции

этом в сумме по промежуточным состояниям будут удерживаться двухчастичные состояния частиц 1 и 2 (с импульсами  $k_1, k_2$ ). Это сводит суммирование в правой части (П.15) к операции

$$\sum_n \rightarrow \sum_{i=1}^2 \int (dk_1)_{m_i} (dk_2)_{m_i}. \tag{П.17}$$

Когда в промежуточном состоянии находятся две частицы с массами  $m_i$  при фиксированном  $i$ , допустимые амплитуды во втором порядке по  $e$  — это борновские амплитуды рассеяния (рис. 4). Подставляя их в правую часть условия унитарности (П.15), в котором суммирование проводится согласно

(П.17), получаем:

$$i(2\pi)^4 e^4 \sum_{i=1}^2 \int (dk_1)_{m_i} (dk_2)_{m_i} \delta(p_1 - q_1 - k_1 - k_2) \times \\ \times \left[ \frac{1}{t^2} (q_1 - p_1 + 2k_1) (p_2 + q_2) (q_1 - p_1 + 2k_1) (p_1 + q_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{t(p_1 - k_1)^2} (k_1 + p_2 - q_2 + q_1) (k_1 + p_1) (p_2 + q_2) (2k_1 + q_1 - p_1) \right]. \quad (\text{П.18})$$

В левой части условия унитарности запишем амплитуду с однофотонным обменом в общем виде

$$T(p_1, -q_1; -p_2, q_2) = \\ = \Gamma_{\mu}^{(1)}(p_1, -q_1) \Gamma_{\nu}^{(2)}(-p_2, q_2) g^{\mu\nu} (D_1(t) + D_2(t))/t. \quad (\text{П.19})$$

Здесь вершинная функция  $\Gamma_{\mu}^{(i)}$   $i$ -й частицы дается выражением

$$\Gamma_{\mu}^{(i)}(p, q) = e_i (p - q)_{\mu} F_i(t). \quad (\text{П.20})$$

Наша задача — нахождение скачка на разрезе от  $4m_i^2$  до  $\infty$  форм-фактора  $F_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ). Для этой цели удобно представить  $F_i$  в виде

$$F_i(t) = 1 + \alpha v_i(t), \quad (i = 1, 2), \quad (\text{П.21})$$

учитывая, что при  $\alpha \rightarrow 0$   $F_i(t)$  переходит в «голую» вершину скалярной частицы и что радиационные поправки пропорциональны  $\alpha$ . Тогда

$$T(p_1, -q_1; -p_2, q_2) - \bar{T}(-p_2, q_2; p_1, -q_1) = \\ = \frac{e^2}{t} \sum_{i=1}^2 (p_1 + q_1) (p_2 + q_2) [F_i(t) D_i(t) - \bar{F}_i(t) \bar{D}_i(t)].$$

Поскольку в низшем приближении  $D_i(t) = 1 + \rho_i(t)$ , где  $\rho_i$  определены равенствами (10.3) и (10.2), в левой части условия унитарности с точностью до  $e^4$  имеем

$$\frac{2i}{t} e^2 (p_1 + q_1) (p_2 + q_2) \sum_{i=1}^2 [\alpha \text{Im } v_i(t) + \text{Im } \rho_i(t)]. \quad (\text{П.22})$$

Приравнявая (П.18) и (П.22), при фиксированном  $i$  находим

$$\text{Im } \rho_i(t) + \alpha \text{Im } v_i(t) = \frac{\pi\alpha}{3} \left( \frac{t - 4m_i^2}{t} \right)^{3/2} - \pi\alpha \frac{t - 2m_i^2 + \lambda^2}{t - 4(m_i^2 - \lambda^2)} \sqrt{\frac{t - 4m_i^2}{t}} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{B_1(m_i^2, \lambda^2, t)}{2B_2(m_i^2, \lambda^2, t)} \ln \frac{B_1(m_i^2, \lambda^2, t) + B_2(m_i^2, \lambda^2, t)}{B_1(m_i^2, \lambda^2, t) - B_2(m_i^2, \lambda^2, t)} \right\}, \quad (\text{П.23})$$

где

$$B_1(m_i^2, \lambda^2, t) = t - 4m_i^2 + 2\lambda^2; \\ B_2(m_i^2, \lambda^2, t) = \sqrt{(t - 4m_i^2) [t - 4(m_i^2 - \lambda^2)]}.$$

Первый член в правой части (П.23) совпадает с мнимой частью функции  $\rho_i(t)$ . Отсюда следует, что в низшем приближении по  $\alpha$  мнимая часть вер-

шинной функции  $v_i(t)$  имеет вид

$$\text{Im } v_i(t) = -\pi \frac{t - 2m_i^2 + \lambda^2}{t - 4(m_i^2 - \lambda^2)} \sqrt{\frac{t - 4m_i^2}{t}} \times \\ \times \left[ 1 - \frac{B_1(m_i^2, \lambda^2, t)}{2B_2(m_i^2, \lambda^2, t)} \ln \frac{B_1(m_i^2, \lambda^2, t) + B_2(m_i^2, \lambda^2, t)}{B_1(m_i^2, \lambda^2, t) - B_2(m_i^2, \lambda^2, t)} \right].$$

Из этого равенства и из (П.21) для  $F_i(t)$  вытекает дисперсионное соотношение с одним вычитанием:

$$F_i(t) = 1 + \frac{\alpha t}{\pi} \int_{4m_i^2}^{\infty} \frac{\text{Im } v_i(x) dx}{x(x-t-i0)}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{П.24})$$

Объединяя вместе (П.20), (П.21) и (П.24), можно представить амплитуду (П.19) в виде суммы двух членов — амплитуды, включающей поляризацию вакуума и вершинной части. Вклад вершинной части  $T_T(s, t)$  дается при этом выражением (239).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abarbanel H. D. I., Itzykson C. Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 53.
2. Aneva V. L., Karchev N. I., Rizov V. A. A two-component quasipotential equation for spin 1/2 particles (to be published in Bulgarian Journal of Physics).
3. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
4. Atkinson D. A., Crater H. W. A non-perturbative approach to the quasipotential formulation of the relativistic bound state problem. Vanderbilt University preprint, Nashville, TN, 1974.
5. Барбашов Б. М. и др. ТМФ, 1970, т. 5, с. 330.
6. Barbieri R., Ciafolini M., Menotti P. Nuovo cimento A, 1968, v. 55, p. 701.
7. Barut A. O., Baiquni A. Phys. Rev., 1969, v. 184, p. 1342.
8. Barut A. O., Bronzin G. L. Phys. Rev. D, 1973, v. 7, p. 3018.
9. Baumann K. Z. Phys., 1958, Bd 152, S. 448.
10. Бете Г., де Гофман Ф. Мезоны и поля. Т. 2. Мезоны. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1957, гл. 40.
11. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1960.
12. Blankenbecler R., Sugar R. Phys. Rev., 1966, v. 142, p. 1051.
13. Blankenbecler R., Sugar R. Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 2512.
14. Bloch F. Sow Phys., 1934, v. 5, p. 301.
15. Блохинцев Д. И., Ризов В. А., Тодоров И. Т. Вывод уравнения квазипотенциального типа методом Фока — Подольского. — Сообщение ОИЯИ, P2-7719. Дубна, 1974.
16. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., «Наука», 1973.
17. Боголюбов П. Н. ТМФ, 1970, т. 5, с. 244.
18. Brezin E., Itzykson C., Zinn-Justin J. Phys. Rev. D, 1970, v. 1, p. 2349.
19. Brodsky S. Application of the infinite-momentum method to quantum electrodynamics and bound state problems. SLAC-PUB-1328 (T), Stanford, 1973.
20. Carlson C. E., Neff T. L. Phys. Rev. D, 1971, v. 4, p. 532.
21. Charap J. M., Fubini S. P. Nuovo cimento, 1959, v. 14, p. 540; 1960, v. 15, p. 73.

22. Coester F. *Helv. Phys. acta*, 1965, v. 38, p. 7.
23. Crater H. *Phys. Rev. D*, 1970, v. 2, p. 1060.
24. Crater H., Atkinson D. A. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 1973, v. 18, p. 573.
25. Currie D. G. *J. Math. Phys.*, 1963, v. 4, p. 1470.
26. Currie D. C., Jordan T. F., Sudarshan E. G. G. *Rev. Mod. Phys.*, 1963, v. 35, p. 350.
27. Currie D. G., Jordan T. F. *Interactions in relativistic classical particle mechanics.*—In: *Lectures in Theoretical Physics. V. XA.* Ed. by A. O. Barut and W. E. Brittin. N.Y., Gordon and Breach, 1968, pp. 91—139.
28. Currie D. G., Jordan T. F. *Phys. Rev.*, 1968, v. 167, p. 1178.
29. Cutkosky R. E. *Phys. Rev.*, 1954, v. 96, p. 1135.
30. Cutkosky R. E. *J. Math. Phys.*, 1960, v. 1, p. 429.
31. Van Dam H., Wigner E. P. *Phys. Rev. B*, 1965, v. 138, p. 1576.
32. Van Dam H., Wigner E. P. *Phys. Rev.*, 1966, v. 142, p. 838.
33. Dancoff S. M. *Phys. Rev.*, 1950, v. 78, p. 382.
34. Desimirov G. M., Mateev M. D. *Nuovo cimento A*, 1967, v. 52, p. 1366.
35. Desimirov G. M., Mateev M. D. *Nucl. Phys. B*, 1968, v. 4, p. 649.
36. Desimirov G. M., Stoyanov D. *Bull. Inst. Phys. Acad. Bulgare Sc.*, 1965, v. 13, N 1, p. 149; см. также Препринт ОИЯИ, P-1658, Дубна, 1964.
37. Dirac P. A. M. *Rev. Mod. Phys.*, 1949, v. 21, p. 392.
38. Dirac P., Fock V., Podolsky B. *Sow Phys.*, 1932, v. 2, p. 468.
39. Dirac P. A. M., Peierls R., Pryce M. H. L. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1942, v. 39, p. 193.
40. Дулян Л. С., Фаустов Р. Н. Модифицированное уравнение Дирака в квантовой теории поля.—Препринт ОИЯИ P2-7995, Дубна, 1974.
41. Dyson F. J. *Phys. Rev.*, 1964, v. 91, p. 1543.
42. Eddington A. *Relativity Theory of Protons and Electrons.* University Press, Cambridge, 1936, p. 110.
43. Eddington A. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1939, v. 35, p. 186; 1942, v. 39, p. 201.
44. Erickson G. W., Yennie D. R. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 1965, v. 35, p. 271.
45. Фаустов Р. Н. «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, с. 1329.
46. Faustov R. N. *Nucl. Phys.*, 1966, v. 75, p. 669.
47. Фаустов Р. Н. ТМФ, 1970, т. 3, с. 2407.
48. Фаустов Р. Н. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, с. 238.
49. Faustov R. N. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 1973, v. 78, p. 176.
50. Fock V. *Sow. Phys.*, 1934, v. 6, p. 425.
51. Fock V., Podolsky B. *Sow. Phys.*, 1932, v. 1, p. 798.
52. Fock V., Podolsky B. *Sow. Phys.*, 1932, v. 1, p. 801.
53. Foldy L. L. *Phys. Rev.*, 1961, v. 122, p. 275.
54. Fox J. A., Yennie D. R. *Ann. Phys.*, 1973, v. 81, p. 438.
55. Fronsdal C. *Phys. Rev. D*, 1971, v. 3, p. 1299.
56. Fronsdal C. *Phys. Rev. D*, 1971, v. 4, p. 1689.
57. Fronsdal C., Huff R. W. *Phys. Rev. D*, 1973, v. 7, p. 3609.
58. Fronsdal C., Huff R. W. *Phys. Rev. D*, 1971, v. 3, p. 933.
59. Fronsdal C., Lundberg L. E. *Phys. Rev. D*, 1970, v. 1 p. 3247.
60. Fulton T., Martin P. C. *Phys. Rev.*, 1954, v. 95, p. 811.
61. Гарсеванишвили В. Р., Матвеев В. А., Слепченко Л. А. ЭЧАЯ, 1970, т. 1, вып. 1, с. 91.
62. Gell-Mann M., Low F. *Phys. Rev.*, 1951, v. 84, p. 350.
63. Gross F. *Phys. Rev.*, 1969, v. 186, p. 1448.
64. Grotch H., Yennie D. R. *Rev. Mod. Phys.*, 1969, v. 41, p. 350.
65. Itzykson C., Kadyshesky V. G., Todorov I. T. *Phys. Rev. D*, 1970, v. 1, p. 2823.
66. Kadyshesky V. G. *Nucl. Phys.*, 1968, v. 136, p. 125.
67. Kadyshesky V. G., Mateev M. D. *Nuovo cimento A*, 1968, v. 55, p. 275.



68. Kadyshesky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. Nuovo cimento A, 1968, v. 55, p. 233.
69. Кадышевский В. Г., Тавхелидзе А. Н. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел.— В кн.: Проблемы теоретической физики. М., «Наука», 1969, с. 261—277.
70. Karloukovski V. I., Todorov I. T. Quasipotential approach to the  $\rho$ -resonance in  $\pi\pi$ -scattering.—Preprint DPh. T/74/47, Saclay, 1974.
71. Klein A. Prog. Theor. Phys., 1958, v. 20, p. 257.
72. Кранчев В. Б., Ризов В. А., Тодоров И. Т. Квазипотенциальный подход к электромагнитным взаимодействиям скалярных заряженных частиц.— Сообщение ОИЯИ P2-7311, Дубна, 1973.
73. Królikowski W., Rzewuski J. Nuovo cimento, 1955, v. 2, p. 203.
74. Królikowski W., Rzewuski J. Nuovo cimento, 1956, v. 3, p. 260; v. 4, p. 975.
75. Квинихидзе А. Н., Стоянов Д. Ц. ТМФ, 1970, т. 3, с. 332.
76. Квинихидзе А. Н., Стоянов Д. Ц. ТМФ, 1972, т. 11, с. 23.
77. Lévy M., Sucher J. Phys. Rev., 1969, v. 186, p. 1656.
78. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 2. М., «Наука», 1971.
79. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo cimento, 1963, v. 29, p. 380.
80. Logunov A. A. e.a. Nuovo cimento, 1963, v. 30, p. 134.
81. Логунов А. А. и др. ТМФ, 1971, т. 6, с. 157.
82. Martin A., Targonski G. Nuovo cimento, 1961, v. 20, p. 1182.
83. Метод Тамма — Данкова.—«Проблемы современной физики», № 10, М., Изд-во иностр. лит., 1955.
84. Molière G. Z. Naturforsch. A, 1947, Bd 2, S. 133.
85. Nakanishi N. Progr. Theor. Phys. Suppl., 1969, N 43, p. 1.
86. Nambu Y. Prog. Theor. Phys., 1950, v. 5, p. 614.
87. Namyslowski J. M. Lett. Nuovo cimento, 1972, v. 5, p. 991.
88. Namyslowski J. M. Infinite momentum dynamics and covariant quasipotential approach.—Warsaw University preprint IFT/72/19, 1972.
89. Nandy A. Phys. Rev. D, 1972, v. 5, p. 1531.
90. Nguen Van Hieu, Faustov R. N. Nucl. Phys., 1964, v. 53, p. 337.
91. Nissimov E., Pacheva S. Feynman Diagramms and Renormalization Procedure for Haag's Series and Retarded Functions.
92. Ньюнок Н. Е., Тухтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н. Влияние движения ядра на тонкую структуру водорода.— Сообщение ОИЯИ P2-7493, Дубна, 1973.
93. Ньюнок Н. Е., Тухтяев Ю. Н., Фаустов Р. Н. Структура протона и тонкое расщепление в атоме водорода.— Сообщение ОИЯИ P2-7530, Дубна, 1973.
94. Пачева С. Квазипотенциальный подход в терминах запаздывающих функций полевых операторов и формула Брейта. Дипломная работа Физ. фак. Софийского ун-та, София, 1974.
95. Planck M. Verhandl Dtsch. Phys., 1906, 4, 136 (см. пер. в сб.: Принцип относительности. М., Атомиздат, 1973, с. 163—167).
96. Podolsky V., Fock V. Sow. Phys., 1932, v. 2, p. 275.
97. Подубаринов И. В. Уравнения квантовой электродинамики.— Препринт ОИЯИ P2-2421, Дубна, 1965.
98. Rizov V. A., Todorov I. T. Fine structure of the hydrogen atom and positronium from a local quasipotential equation.— Preprint IC/72/115, Trieste, 1972.
99. Rohrlich F. Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 666.
100. Salpeter E. E., Bethe H. A. Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 1232.
101. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
102. Schwinger J. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, v. 37, pp. 452, 455.

103. Соколов С. Н. Релятивистские трехчастичные уравнения.— Препринт СТФ 73-34, Серпухов, 1973.
104. Stoyanov D., Tavkhelidze A. Phys. Lett., 1964, v. 13, p. 76.
105. Tamm I. E. J. Phys. (USSR), 1945, v. 9, p. 449.
106. Tavkhelidze A. Simplest dynamic models of composite particles.— In: «Fundamental Problems Physics». Proc. 14th Conf. on Phys. at the Univ. of Brussels. Oct., 1967, London, Wiley, 1968, pp. 145—154.
107. Tiktopoulos G., Treiman S. B. Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 805.
108. Tiktopoulos G., Treiman S. B. Phys. Rev. D, 1971, v. 3, p. 1037.
109. Todorov I. T. Derivation and solution of an infinite-component wave equation for the relativistic Coulomb problem.— In: Group Representations in Mathematics and Physics Battelle-Seattle 1969 Rencontres. Ed. by V. Bargmann. Berlin, Springer, 1970, p. 254—278.
110. Todorov I. T. On the three dimensional formulation of the relativistic two-body problem.— In: Lectures in Theoretical Physics XII. University of Colorado, 1969, Ed. by W. Brittin and K. Mahanthappa, N.Y., Gordon and Breach, 1972, pp. 183—212.
111. Todorov I. T. Phys. Rev. D, 1971, v. 3, p. 2351.
112. Todorov I. T. Quasipotential approach to the two-body problem in quantum field theory.—Preprint IC/71/75, Trieste, 1971.
113. Виноградов В. М. ТМФ, 1971, т. 7, с. 289.
114. Виноградов В. М. ТМФ, 1971, т. 8, с. 343.
115. Виноградов В. М. ТМФ, 1972, т. 10, с. 338.
116. Виноградов В. М. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 1091.
117. Виноградов В. М. ТМФ, 1972, т. 12, с. 29.
118. Wick G. C. Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 1124.
119. Wigner E. P. Relativistic interaction of classical particles.— In: Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy. Ed. by T. Gudehus e.a. N.Y., Gordon and Breach, 1969, pp. 344—355.
120. Zimmermann W. Nuovo cimento Suppl., 1954, v. 11, p. 43.
121. Зиновьев Г. М. и др. «Ядерная физика», 1970, т. 11, с. 1284.