«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1976, ТОМ 7, ВЫП. 1

УДК 539.182

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ В АКСИОМАТИКЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Т. С. Тодоров,
Институт ядерных исследований и ядерной энергетики
Болгарской АН, София

Дается обзор результатов алгебраического направления в аксиоматике релятивистской квантовой теории. A review of the algebraic approach to axciomatics in relativistic quantum theory is presented.

ВВЕДЕНИЕ

Аксиоматический метод в релятивистской квантовой теории первоначально был создан с целью преодоления некоторых принципиальных трудностей, связанных с обычным подходом, использующим теорию возмущений [1, 2]. Доказываемые в аксиоматике утверждения на основе только немногих общих и физически приемлемых постулатов косвенно подтверждаются экспериментом.

Аксиоматический метод позволяет глубже понять сущность и взаимосвязь некоторых явлений релятивистской квантовой теории. В этом отношении характерен так называемый алгебраический подход *, который оказался успешным [7] при понимании таких понятий, связанных с общими структурными свойствами теории, как наблюдаемая, состояние системы, заряд и зарядовое сопряжегие, суперотборные секторы и введенное через них понятие квантованного поля, локальность и ее следствия, статистика частиц как внутреннее свойство сектора и ее связь со спином, операции симметрии и др.

Характерной чертой является фундаментальность используемых понятий в том смысле, что исходными считаются наблюдаемые

* Называемый иногда теорией локальных наблюдаемых, или подходом, основанным на использовании C^*-алгебр [3—5]. Его методы находят также применение и в квантовой статистике [6].

(измерения) над физической системой, а все другие (ненаблюдаемые) величины (например, поля) могут по мере надобности вводиться как производные. Этот подход развивается интенсивно на протяжении последних десяти — пятнадцати лет. Особо следует отметить работы Р. Хаага, Х. Араки, С. Доплихера, Д. Робертса, В. Сушко, С. Хоружего, Х. Борхерса, Д. Кастлера и др., которые входят в основу дальнейшего изложения.

В алгебраическом подходе квантовая система фиксируется совокупностью своих наблюдаемых (измерений, произведенных над системой, которые по предположению образуют некоторую алгебру *) и множеством физических состояний (рассматриваемых как линейные функционалы над этой алгеброй). С каждой ограниченной областью пространства — времени также связывается алгебра «локальных наблюдаемых», отвечающих измерениям, произведенным над системой локально, в этой области. Основные постулаты, которым подчиняются наблюдаемые и состояния — это обычные постулаты релятивистской квантовой физики: лоренцева ковариантность, положительность энергии, причинность (локальная коммутативность) и существование вакуумного состояния, сформулированные на новом «алгебраическом» языке. Другие, менее существенные предположения, естественным образом связаны с новым математическим аппаратом и вводятся с целью уточнения и упрощения основной системы аксиом. Им тоже можно придать определенный физический смысл. Известны и некоторые модели, реализующие аксиомы алгебраической теории.

Следует подчеркнуть, что в противоположность обычному подходу, здесь совокупность всех чистых состояний системы не подчиняется принципу суперпозиции; суперпозиция двух чистых состояний может привести к смешанному состоянию. В соответствии с этим совокупность наблюдаемых и совокупность состояний распадаются на «суперотборные секторы»: суперпозиция двух состояний из двух разных секторов всегда приводит к смешанному состоянию. Чистое состояние из данного сектора можно определить однозначно совокупностью средних значений, принимаемых наблюдаемыми (данного сектора) в этом состоянии. Наблюдаемые различных секторов рассматриваются как алгебры (из операторов), которые унитарно неэквивалентны. (Совокупность наблюдаемых любого сектора можно рассматривать математически как представления — с точностью до унитарной эквивалентности — некоторой «абстрактной» алгебры.) Физический смысл этой суперотборной структуры связан с наличием абсолютно сохраняющихся физических величин типа полного электрического, полного барионного, лептонного и других зарядов системы. Эти величины принимают разные значения в состояниях из разных секторов и имеют одно

* Их можно умножать друг на друга и на числа, а также складывать.

и то же значение —«заряд»— для всех состояний одного и того же сектора. Поэтому физические процессы с переходом из состояния в состояние, принадлежащие разным секторам, не возможны в силу законов сохранения. Таким образом, секторы «нумерируются» значениями абсолютно сохраняющихся величин. (Название абсолютно сохраняющейся характеристики системы здесь употребляется в обобщенном смысле: такой характеристикой может оказаться, например, и изоспин, если он точно сохраняется в данном приближении.) Каждому сектору могут отвечать несколько видов «заряда» (характеристик), и тогда состояния сектора описывают объекты («частицы»), обладающие такими зарядами.

Суперотборная структура оказывается центральным понятием теории в смысле техники получения основных ее физических результатов. Пользуясь понятием суперотборной структуры, можно ввести хрошо известные понятия релятивистской квантовой системы, как, например, квантованное поле, статистика и заряд частиц, и описать их свойства, которые, естественно, следуют из постулатов в терминах фундаментальных (наблюдаемых) величин теории.

Поле вводится как производное понятие * (реконструируется по наблюдаемым), как объект, «переносящий заряд» из одного сектора в другой. Пусть Aq_1 (соответственно Aq_2) обозначает произвольную наблюдаемую сектора q_1 (соответственно сектора q_2). На математическом языке поле описывается операторами V, называемыми «сплетающими» между наблюдаемыми Aq_1 и Aq_2 разных секторов, т. е. такими операторами, что для них выполняется условие $Aq_1V = VAq_2$. В результате полю отвечают алгебры (порожденные операторами V), определенные для каждой ограниченной области пространства — времени и описывающие локальные свойства поля. Например, если любая точка из некоторой области пространственно-подобна любой точке из другой области, то операторы поля, отвечающие разным областям, получаются уже по конструкции коммутирующими или антикоммутирующими (поля Бозе или Ферми). Поскольку принцип причинности требует коммутативности наблюдаемых, разделенных пространственно-подобными интервалами, то антикоммутирующие поля не наблюдаемы. Определенное таким образом поле обладает всеми другими более важными свойствами, характеризующими поле в релятивистской квантовой теории. Наоборот, если поле задано как первоначальный объект, то наблюдаемые определяются при помощи преобразования симметрии полей. Операторы поля, которые остаются неизменными при таких преобразованиях симметрии,

* В отличие от аксиоматики Вайтмана или от лагранжева подхода в теории квантованных полей, где понятие поля ставится в основу всех рассмотрений.

считаются наблюдаемыми. Эти преобразования аналогичны калибровочным преобразованиям первого рода в лагранжевой теории, в которой только билинейные комбинации полей оказываются наблюдаемыми и калибровочно-инвариантными.

Чтобы математически описать объект, обнаруженный измерениями в некоторой ограниченной области $\mathfrak{O}$ и имеющий определенные характеристики (несущего заряды, т. е. принадлежащего данному сектору), необходимо ввести понятие локального изменения наблюдаемых, вызванного существованием объекта (частицы) в области $\mathfrak{O}$, по сравнению с наблюдениями, произведенными в отсутствие объекта — в вакууме. Математически это изменение описывается «локализованным морфизмом»— преобразованием, действующим на множестве наблюдаемых, которое преобразует каждую наблюдаемую из области $\mathfrak{O}$ в другую наблюдаемую из той же области, но не изменяет наблюдаемые в причинно-независимых от $\mathfrak{O}$ областей. Все наблюдаемые (а значит, и состояния) любого сектора можно получить из наблюдаемых одного и того же «вакуумного» сектора, преобразуя их при помощи локализованного морфизма.

Доказывается, что разные виды статистик частиц (Бозе, Ферми и парастатистика) определяются суперотборной структурой теории. В квантовой теории поля обычная статистика Бозе (или Ферми) определяется коммутационными (или антикоммутационными) соотношениями полевых операторов для пространственно-подобных интервалов. Это соответствие остается и в алгебраической теории, если дополнительно построить поле, связывающее разные суперотборные секторы. Однако восстановление поля для описания статистики здесь необязательно, так как статистика определяется однозначно наблюдаемыми теории и связана с типом частиц (суперотборным сектором). Подобно квантовой механике статистика здесь определяется типом симметрии «вектора состояния» при перестановках нескольких одинаковых частиц, находящихся во взаимно пространственно-подобных областях.

В терминах наблюдаемых (на языке локализованных морфизмов) интерпретируются механизм рождения и уничтожения заряда, переход к сопряженному заряду и сложение зарядов. Поскольку заряды связаны однозначно с секторами, а последние получаются из вакуумного сектора, то в принципе алгебраический подход может по заданной алгебре наблюдаемых предсказать все типы частиц, встречающихся в данной теории. (Чтобы получить таким путем экспериментальные предсказания теории, необходимо научиться сопоставлять каждой конкретной физической системе отвечающий ей конкретный математический объект — алгебру наблюдаемых.) Известная в квантовой теории поля связь между спином и статистикой в теории локальных наблюдаемых вводится без обращения к полям. Здесь это будет связь между спином частиц и их статистикой, определяемой через наблюдаемые, причем не только для обычных Бозе- и Ферми-частиц, но также и для парачастиц.

Теория рассеяния строится в терминах локализованных морфизмов и наблюдаемых величин без реконструкции поля. Замечательна ее аналогия с соответствующей теорией в случае квантованных полей. Эта аналогия базируется на глубоком анализе математической сущности суперотборной структуры, что позволяет непосредственно использовать многие идеи и приемы полевой теории рассеяния, не повторяя ее тривиально, а обогащая участием парачастиц и некоторыми другими новыми результатами, например новыми выражениями для вероятностей перехода.

Отметим, что некоторые из основных физических результатов теории локальных наблюдаемых получены при дополнительном предположении, что силы взаимодействия, как и в обычной адронной физике, имеют ограниченный радиус действия, хотя постулаты теории применимы к любой релятивистской квантовой системе. Это дополнительное предположение находит свое выражение в сужении класса допустимых физических состояний, т. е. в сужении совокупности секторов.

В силу своей общности и использования только наблюдаемых величин формализм алгебраического подхода очень удобен для изучения некоторых фундаментальных свойств теории типа причинной зависимости, локальности, свойства симметрии, процесса измерения и его связи с физикой системы. На этом пути получены определенные результаты, но можно ожидать и больших достижений.

В целом, можно сказать, что алгебраический подход позволил увидеть по-новому релятивистскую квантовую теорию, объяснив большинство ее закономерностей с точки зрения только наблюдаемых величин. Он позволил глубже понять связь между некоторыми основными характеристиками релятивистской квантовой системы и, в частности, дополнил наше понимание физической сущности поля *.

Теория локальных наблюдаемых пользуется некоторыми результатами современного функционального анализа, иногда выходящими за пределы обычных курсов по математике, предназначенных для физиков. Отсюда некоторая непривычность используемых понятий из топологии, теории операторных алгебр, теории

* В этом отношении представляет интерес замечание, высказанное Д. И. Блохинцевым на теоретическом заседании IV Международного симпозиума в г. Варне (1974), что в настоящий момент физики, может быть, требуют больше от понятия поля, чем оно может нам дать (например быть инструментом для изучения структуры частиц). В алгебраическом подходе поле выступает как объект, «связывающий» разные заряды, но не как объект участвующий в их структурных изменениях, см. также работу [8].

групп и теории представлений. Характерная особенность современной математики — «замена вычислений идеями» — предъявляет иногда повышенные требования к более углубленному осознанию понятий, чем в случае, когда большинство рассуждений заменяются вычислительными процедурами. Поэтому оригинальные работы требуют от читателя некоторого опыта в абстрактном математическом мышлении, хотя количество новых понятий невелико, а многие из них использовались физиками ранее, в несколько иных ситуациях. Чтобы облегчить чтение, во введении определяются все основные новые алгебраические и другие математические понятия и утверждения, встречающиеся в тексте. Полезный обзор используемых математических методов имеется в работе [9] (а также в конце монографии [10]). Предполагается, что читатель знаком с элементами теории линейных пространств, операторов и теории представлений групп, в объеме, необходимом для квантовой механики.

В дальнейшем используются следующие общепринятые математические символы. Если X и Y — множества, то $x \in X$ означает, что x — элемент множества X; $X \cap Y$ (соответственно $X \cup Y$) означает множество общих элементов или пересечение (соответственно объединение) множеств X и Y. Включение X, как подмножества в Y, обозначается $X \subset Y$, при этом элементы Y, не принадлежащие X, образуют совокупность, называемую дополнением X в Y. Множество тех элементов x из X, которые обладают свойством P, обозначается $\{x \in X : P\}$. Отображение (функция) f из множества X в множество Y обозначается $f \colon X \to Y$ или $f(x) = y$ для $x \in X$ и $y \in Y$. Далее, если $X_1 \subset X$, то отображение $f \colon X_1 \to Y$ есть «сужение» f с X на X_1 в обозначениях $f \mid X_1$. Множество $\{f(x) \colon x \in X_1\}$ обозначается $f(X_1)$.

Результат нескольких последовательных (в порядке возрастания i) отображений $f_i \colon X_i \to X_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, представляющий отображение X_1 в X_{n+1}, обозначается $f_n \ldots f_2 f_1$. Действие оператора A на вектор Φ обозначается $A\Phi$. Символ (Φ_1, Φ_2) означает скалярное произведение векторов Φ_1 и Φ_2. Топология в множестве X определяется сопоставлением каждому $Y \subset X$ некоторого другого подмножества X его «замыкания» $\overline{Y}$ так, чтобы это соответствие обладало свойствами $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$, $Y \subset \overline{Y}$, $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$ для $Z \subset X$ и замыкание пустого множества пусто. Множества $\overline{Y}$ называются замкнутыми, а их дополнения до всего X открытыми (открытыми окрестностями каждой своей точки).

Совокупность таких окрестностей каждой точки $x \in X$ тоже определяет однозначно топологию в X и позволяет указывать на «близость» элементов X (описывать сходимость последовательности элементов из X к x). В линейных пространствах достаточно задать открытые окрестности нулевого вектора, чтобы сдвигом на произвольный вектор получить окрестности любого другого элемента.

Линейное (векторное) пространство называется нормированным, если в нем определена норма («длина» вектора) — функция $\|\cdot\|$, сопоставляющая любым $x, y \in X$ положительные числа $\|x\|, \|y\|$ со свойствами $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$; $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, где α — скаляр; $\|x\| = 0$ влечет $x = 0$.

Открытыми окрестностями нулевого вектора в линейном нормированном пространстве X являются, например, множества $\{x \in X: \|x\| < \varepsilon\}$ для $\varepsilon > 0$. В частности, если X — прямая линия, то $\|x\|$ — модуль числа x, интервалы $\{x: -\varepsilon < x < \varepsilon\}$ являются окрестностями нуля, а сходимость последовательности к нулю в топологии нормы X совпадает с известной из анализа сходимостью. Если все последовательности Коши из элементов X сходятся по норме к элементу из X, то X называется полным нормированным (банаховым) пространством.

Отображение f топологического пространства X в топологическом пространстве Y называется непрерывным, если для любой точки $f(x) \in Y$ и любой ее окрестности U найдется окрестность V точки x, такой, что $f(V) \subset U$, т. е. «близкие» к x точки отображаются в «близких» к $f(x)$ точках. Если $X_1 \subset X$ и в любой окрестности U любой точки X есть точки из X_1, то X_1 называется плотным в X, эквивалентно $\overline{X}_1 = X$.

Топологическое пространство X называется компактным, если каждая последовательность* его элементов имеет предельную точку в X.

Алгеброй $\mathfrak{A}$ с единицей I над полем комплексных чисел $\mathscr{C}$ называется линейное пространство $\mathfrak{A}$ над $\mathscr{C}$ с определенным в нем умножением $(a \cdot b) \in \mathfrak{A}$ любых двух элементов a и b пространства $\mathfrak{A}$, подчиняющимся законам дистрибутивности, ассоциативности, и $aI = Ia = a$ для $a \in \mathfrak{A}$. Симметрической (с инволюцией, обозначенной алгеброй называется алгебра с определенной в ней операцией «сопряжения» ($*$) со свойствами: $(a + \lambda b)^* = \lambda^* (a^* + b^*)$; $(ab)^* = b^* a^*$; $a^{**} = a$; где λ — число, а λ^* — его комплексное сопряжение. Если в симметрической алгебре $\mathfrak{A}$ задана норма (соответственно алгебра полна в этой норме), она называется нормированной (соответственно банаховой), если $\| a^* \| = \| a \|$ для $a \in \mathfrak{A}$. Симметрическая банахова алгебра называется C^*-алгеброй, если норма в ней удовлетворяет кроме обычных свойств нормы, еще и равенству $\| a^* a\| = \| a \|^2$ для $a \in \mathfrak{A}$. Гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_1$ в алгебру $\mathfrak{A}_2$ называется линейное отображение f алгебры $\mathfrak{A}_1$ в алгебру $\mathfrak{A}_2$, сохраняющее определенные в алгебре

* Последовательность можно занумеровать не только натуральными числами, но и любым соответствующим образом упорядоченным множеством индексов.

операции сложения и умножения: $f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2)$, $f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2)$, где α_1, α_2 — числа, $a_1 a_2 \in \mathfrak{A}$. Если в $\mathfrak{A}_1$ определена инволюция «$*$» и при гомоморфизме f «сопряженные» элементы переходят в «сопряженные» $f(a^*) = f(a)^*$, то f называется симметрическим гомоморфизмом. Если f взаимно-однозначно и отображает $\mathfrak{A}_1$ на всю $\mathfrak{A}_2$, тогда f называется изоморфизмом. Если $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$, то изоморфизм называется автоморфизмом. Симметрический гомоморфизм f для $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ (эндоморфизм) в тексте называется морфизмом. Гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $B(\mathscr{H})$ (в множестве всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$) задает представление $\pi(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$. Оператор A называется ограниченным, если для любого $\Phi \in \mathscr{H}$ выполняется $\|A\Phi\| \leqslant C\|\Phi\|$, где C — константа, а норма вектора Φ в $\mathscr{H}$ определена скалярным произведением: $\|\Phi\| = (\Phi, \Phi)^{1/2}$. Наименьшая из констант C, удовлетворяющая приведенному неравенству, есть норма A в линейном пространстве $B(\mathscr{H})$.

Каждая C^*-алгебра симметрически изоморфна такой же алгебре ограниченных операторов, определенных в $\mathscr{H}$ (теорема Гельфанда — Наймарка). В этом случае норма в алгебре — обычная норма оператора и операция «$*$» означает переход к сопряженному оператору.

В линейном пространстве $B(\mathscr{H})$ можно ввести разные топологии (соответственно, сходимости), например равномерную, отвечающую сходимости по норме операторов, сильную, слабую и др. Тогда, говоря о непрерывности некоторого отображения с областью значений в пространстве $B(\mathscr{H})$, предполагается, что в пространство $B(\mathscr{H})$ введена одна из перечисленных выше топологий. Например, говоря о сильно непрерывном представлении $U(G)$ топологической группы G в $B(\mathscr{H})$ подразумевают, что отображение $U: G \to B(\mathscr{H})$ непрерывно в сильной операторной топологии. Далее, говоря о равномерном $\overline{\mathscr{F}}$- или слабом $\mathscr{F}^{-}$-замыкании множества $\mathscr{F} \in B(\mathscr{H})$ понимают замыкание множества $\mathscr{F}$, соответственно в равномерной или слабой операторной топологии. Операторные C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, которые замкнуты в слабой операторной топологии, называются слабо замкнутыми алгебрами (W^*-алгебрами, алгебрами фон Неймана). Другое эквивалентное для них определение — совпадение симметрической алгебры с единицей $\mathfrak{A}$ со своим вторым коммутантом $\mathfrak{A}''$, т. е. $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}$. Коммутантом R' множества ограниченных операторов R называется совокупность всех тех ограниченных операторов в $\mathscr{H}$, которые перестановочны со всеми операторами из R, а R'' определяется как коммутант R'. Если между операторными множествами R_1 и R_2 имеется соотношение $R_1 \subset R_2$, тогда ясно, что $R_2' \subset R_1'$. Коммутант R_1' любого R_1 — W^*-алгебра. Наименьшая W^*-алгебра, содержащая симметрическую алгебру $\mathfrak{A}$, называется порожденной (генерированной) $\mathfrak{A}$ и совпадает с $\mathfrak{A}''$. Отсутствие инвариантных векторных подпространств в $\mathscr{H}$ для симметрической алгебры $\mathfrak{A}$ из ограниченных операторов, определенных в $\mathscr{H}$, эквивалентно тривиальности $\mathfrak{A}'$, т. е. $\mathfrak{A}'$ состоит из операторов, кратных единичному оператору. W^*-алгебра называется фактором $\mathfrak{A}$, если ее центр $\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A}$ тривиален. Если спектральное семейство неограниченного оператора A принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$, то оператор A называется присоединенным к $\mathfrak{A}$.

Функционалом ω над алгеброй $\mathfrak{A}$ называется ее линейное отображение $\omega(a)$ в поле комплексных чисел $\mathscr{C}$, т. е. $\omega(\alpha a + \beta b) = \alpha\,\omega(a) + \beta\omega(b)$ для $a, b \in \mathfrak{A}$; $\alpha, \beta \in \mathscr{C}$. Функционал ω называется положительным, если $\omega(a^*a) \geqslant 0$ для любого $a \in \mathfrak{A}$. Положительный функционал ω в симметрической банаховой алгебре с единицей непрерывен. Норма $\|\omega\|$ функционала ω определяется, как и в случае оператора A, при замене всюду символа A на ω. Ограниченность функционала (оператора) в нормированном пространстве эквивалентна его непрерывности. Совокупность непрерывных линейных функционалов над $\mathfrak{A}$ образует линейное (и нормированное) пространство $\mathfrak{A}^*$, называемое сопряженным к $\mathfrak{A}$. Положительные линейные функционалы (их совокупность обозначается $\mathfrak{A}^*$) с единичной нормой называются состояниями.

В пространстве $\mathfrak{A}^*$ представляет интерес кроме топологии нормы также и слабая топология, определяемая множеством окрестностей $\{V\}$ нулевого функционала:

$$V(\varepsilon, A_i, i=1, 2, \ldots, n) = \{\Phi \in \mathfrak{A}^* : |\Phi(A_i)| < \varepsilon, \quad i=1, 2, \ldots, n\}.$$

Окрестность V зависит от выбора целого числа n, положительного числа ε и оператора $A_i \in \mathfrak{A}$. При обсуждении процесса измерения будем использовать такие «слабые» окрестности.

Функционал ω называют чистым (неразложимым), если из равенства $\omega = \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\,\omega_2$ для функционалов ω_1 и ω_2 и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ следует $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$. В противоположном случае можно считать, что состояние ω — «смесь» двух состояний ω_1 и ω_2 с вероятностями соответственно λ и $1-\lambda$. Функционал $\omega_\Phi(\pi(a)) = (\pi(a)\Phi, \Phi)$, $\Phi \in \mathscr{H}$, $a \in \mathfrak{A}$, называют векторным. Если $\pi(\mathfrak{A})$ неприводимо, Φ единствен.

Любое состояние ω над $\mathfrak{A}$ можно записать как векторный функционал ω_Φ в некотором представлении $\pi(\mathfrak{A})$ в пространстве $\mathscr{H}_\pi$, для которого Φ — циклический вектор, т. е. $\overline{\{\pi(A)\Phi : A \in \mathfrak{A}\}} = \mathscr{H}_\pi$. Построение $\pi(\mathfrak{A})$, $\mathscr{H}_\pi$ и $\Phi \in \mathscr{H}_\pi$ (с точностью до унитарной эквивалентности) по заданному ω называется конструкцией Гельфанда — Наймарка — Сигала (ГНС). Если некоторая группа $G = \{g\}$ автоморфизмов $\mathfrak{A}$ оставляет $\omega(a)$, $a \in \mathfrak{A}$ инвариантным, т. е. $\omega(g(a)) = \omega(a)$, $g \in G$ и удовлетворяет условиям непрерывности, тогда в представлении $\pi(\mathfrak{A})$, полученном конструкцией ГНС из ω, автоморфизмы задаются унитарными операторами.

Состояния $\omega(A) = \mathrm{Tr}(WA)$, где $A \in \pi(\mathfrak{A})$ и W — положительно определенный оператор с конечным следом (Tr), называются состояниями, задаваемыми матрицей плотности W.

Если $\pi(\mathfrak{A})$ и $\pi_1(\mathfrak{A})$ — два представления $\mathfrak{A}$, то ограниченный линейный оператор V, удовлетворяющий равенству $\pi(\mathfrak{A})V = V\pi_1(\mathfrak{A})$, называют сплетающим. Если существует сплетающий унитарный оператор, осуществляющий изоморфизм π, π_1 и двух соответствующих пространств представлений, то π, π_1 называются унитарно эквивалентными ($\pi \simeq \pi_1$). Если слабые замыкания $\pi(\mathfrak{A})$ и $\pi_1(\mathfrak{A})$ симметрически изоморфны, π и π_1 называют квазиэквивалентными ($\pi \approx \pi_1$). Если в любой слабой окрестности состояния ω над π, представляемого матрицей плотности, можно найти такое же состояние ω_1 над π_1 и наоборот, то π и π_1 называются слабо (или физически) эквивалентными [9]: $\pi_1 \sim \pi$.

Теорема Фелла для C^* алгебр утверждает, что $\pi \sim \pi_1$ эквивалентно совпадению ядер: $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ker}\,\pi_1$. Если $\pi \simeq \pi_1$, тогда $\pi \approx \pi_1$. Если $\pi \approx \pi_1$, тогда $\pi \sim \pi_1$. Ядро Ker π представления π — это $\{A \in \mathfrak{A} : \pi(A) = 0\}$. Ядро всегда является двусторонним идеалом J алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. J — алгебра и $AJ = JA \subset J$, $A \in \mathfrak{A}$. Фактор-множество $\mathfrak{A}/J$ является алгеброй, изоморфной $\pi(\mathfrak{A})$.

Если G — группа, а N — ее нормальная подгруппа, то через G/N обозначается соответствующая фактор-группа. Рассмотрим последовательность отображений групп: $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{k} G/N$, где i отображает любой элемент из N на тот же элемент из G, а k отображает любой элемент G на его класс эквивалентности по модулю N. Тогда группу G можно рассматривать как «расширение» своей подгруппы N (подгруппу G/N). Характером коммутативной группы G называется всякая непрерывная функция $\chi(g)$ на группе со свойствами: $\chi(g_1)\chi(g_2) = \chi(g_1, g_2)$; $|\chi(g)| = 1$, $g_1, g_2 \in G$, т. е. $\chi(g)$ задает унитарное одномерное представление G. Множество характеров G с обычным умножением функций образует коммутативную $\overline{G}$-группу характеров G (дуальная группа G).

Если G компактна, то ее коммутативность влечет дискретность группы $\overline{G}$ ее характеров. Неприводимые представления компактной группы G конечномерны. Совокупность $\hat{G}$ всех унитарно неэквивалентных представлений группы G называется в тексте иногда спектром G.

Подробное рассмотрение изложенных математических результатов можно найти, например, в монографиях [11—16].

1. АКСИОМЫ И ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В релятивистской квантовой теории принцип локальности (локальной коммутативности) состоит в том, что измерения системы, произведенные в причинно-независимых областях, совместимы. Последовательное применение этого принципа определяет во многом характер аксиом теории.

Каждой области $\mathfrak{O}$ четырехмерного пространства — времени Минковского M сопоставляется абстрактная алгебра $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, которая образована наблюдениями (физическими операциями), произведенными над системой в области $\mathfrak{O}$. Различные теории, отражающие специфику разных систем, получаются выбором соответствия

$$\mathfrak{O} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{O}). \tag{1}$$

Можно считать, что указанное соответствие представляет содержание физической теории. Если оно известно, то отсюда в принципе должны получаться все интересующие нас физические величины.

Соответствие (1) подчиняется следующим аксиомам [9].

1. Области $\mathfrak{O}$ должны быть открытыми областями из M с компактным замыканием, что физически означает конечную протяженность пространственно-временных областей. Каждой области $\mathfrak{O}$ сопоставляется абстрактная C^*-алгебра $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, называемая локальной алгеброй наблюдаемых.

2. Изотония $\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}_2$ влечет $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1) \supset \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2)$, т. е. «бóльшая» область содержит «больше» наблюдаемых. В работах [17, 18] показано, что если евклидово расстояние между границами областей $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ положительно, то $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1) \neq \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2)$. Однако если $\mathfrak{O}_i$ пробегают все области определенного типа [19], то пересечение $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_i)$ содержит только кратные единичному оператору.

3. Локальная коммутативность. Если все точки из $\mathfrak{O}_1$ пространственно подобны всем точкам из $\mathfrak{O}_2$, тогда $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1)$ коммутирует с $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2)$, т. е. измерения в $\mathfrak{O}_1$ не влияют на измерения в $\mathfrak{O}_2$, и наоборот (области $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ причинно независимы). Рассмотрим объединение всех $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, $\mathfrak{O} \in M$, которое будет нормированной симметрической алгеброй [9] и называется алгеброй всех локальных наблюдаемых. Замыкая эту алгебру по норме, получаем C^*-алгебру $\mathfrak{A}$ (алгебра квазилокальных наблюдаемых).

4. Пуанкаре-ковариантность. Группа Пуанкаре $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ индуцирует автоморфизм α_L алгебраической структуры $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \ni A \xrightarrow{\alpha_L} A_L \in \mathfrak{A},$$

удовлетворяющий равенству $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})_L = \mathfrak{A}(L\mathfrak{O})$, где $L\mathfrak{O}$ — образ $\mathfrak{O}$ при преобразовании $L \in \mathfrak{P}_+^\uparrow$. Эти абстрактные постулаты

Хаага — Кастлера [9] были развиты на основе обычного формализма квантовой теории поля.

Если ограничиться только абстрактной алгеброй наблюдаемых, то нельзя сформулировать некоторые более тонкие структурные свойства теории, которые удобно выразить в операторной форме. Связывающим звеном в рассмотрении конкретного физически интересного операторного представления $\mathfrak{A}$ является следующая аксиома.

5. Релятивистский вакуум [9, 20]. Существует чистое состояние ω_0 над $\mathfrak{A}$, инвариантное относительно α_L:

$$\omega_0\alpha_L = \omega_0, \quad L \in \mathfrak{P}_+^\uparrow.$$

Пусть (π_0, U_0) — сильно непрерывное Пуанкаре-ковариантное представление, т. е.

$$U_0(L)\,\pi_0(\mathfrak{A})\,U_0(L)^{-1} = \pi_0(\alpha_L(\mathfrak{A})) \tag{2}$$

в пространстве $\mathscr{H}_0$, заданном ω_0 (конструкцией ГНС). Пусть Ω — циклический вектор, отвечающий ω_0. Если T — группа трансляций, то спектр $U|_T$ принадлежит замкнутому будущему световому конусу $\overline{V}_+$ (постулат спектральности*). В силу теоремы Стоуна [21] постулат спектральности можно выразить следующим образом.

6. Носитель спектральной меры $E(x)$ в разложении подгруппы трансляции $U_0(a) = \int \exp(iax)\,dE(x)$ содержится в $\overline{V}_+$. Спектральное условие в абстрактно-алгебраической форме приведено в работах [22, 23], а независимость постулатов 6 и 3 доказана в работе [24].

Представления абстрактных C^*-алгебр $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ операторными алгебрами в $\mathscr{H}_0$ удобно определять как слабозамкнутые W^*-алгебры и формулировать все постулаты в операторной форме** (постулаты типа Хаага — Араки [25]). Это удобство происходит из-за наличия операции перехода к коммутанту $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})'$, что позволяет определить следующее свойство, имеющее существенное значение в теории.

7. Свойство дуальности. Для любой $\mathfrak{O}$ имеет место $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')' = \mathfrak{A}(\mathfrak{O})$. Оно выражает аксиому 3 и усиливает ее, указывая на невозможность расширить локальные алгебры способом, согласованным с локальной коммутативностью. Здесь $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')$ определяется как W^*-алгебра, генерированная всеми $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_i)$, где $\mathfrak{O}_i \subset \mathfrak{O}'$ и $\mathfrak{O}'$ — область, пространственно-подобная обла-

* Представление $\pi_0(\mathfrak{A})$ называется «вакуумным».

** Ниже всегда будем предполагать это выполненным. (Об этом см. также работы [26].) Поэтому далее $\mathfrak{A}$ обозначает также операторную алгебру.

сти $\mathfrak{O}$. Область $\mathfrak{O}'$ неограничена в M. Для любой неограниченной области $\tilde{\mathfrak{O}}$ можно определить алгебру $\mathfrak{A}(\tilde{\mathfrak{O}})$, полагая $\mathfrak{A}(\tilde{\mathfrak{O}}) = [\bigcup_{\mathfrak{O}_i \subset \mathfrak{O}} \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_i)]''$.

Замечание. Аксиома 4 при операторной реализации $\mathfrak{A} \equiv \pi(\mathfrak{A})$ в H дополняется условием (2), где $U_0(L)$ — сильно непрерывное представление $\mathfrak{P}_+^\uparrow$ в $\mathcal{H}$. Аксиомы 6—12 можно иногда формулировать для любой операторной реализации $\mathfrak{A}$, но это не всегда необходимо (см. ниже). Слабое замыкание $[\bigcup_{\mathfrak{O} \in M} \mathfrak{A}(\mathfrak{O})]^- = \mathfrak{A}_\infty$ называется алгеброй глобальных наблюдаемых.

8. Условие $H = H_p$ [27—31]. Оно выражает свойство W^*-алгебры $\mathfrak{A}_\infty$ обладать достаточным числом чистых векторных состояний, т. е. векторы, отвечающие чистым векторным состояниям над алгеброй $\mathfrak{A}_\infty$, образуют всюду плотное множество в пространстве представления H. Здесь H_p обозначает замыкание линейной оболочки этих векторов.

9. Аддитивность [9, 32]

$$[\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1) \cup \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2)]'' = \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1 \cup \mathfrak{O}_2).$$

10. Слабая аддитивность; для любого $\mathfrak{O} \subset M$

$$[\bigcup_{x \in M} \mathfrak{A}(\mathfrak{O} + x)]'' = \mathfrak{A}_\infty,$$

где x — произвольная трансляция.

11. Непрерывная изотония [33]. Если $\mathfrak{O}_k$ — убывающая последовательность областей $\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}_2 \supset \ldots$ и $\mathfrak{O} = \operatorname{int} \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{O}_k$ — внутренность пересечения всех $\mathfrak{O}_k$, тогда $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_k)$.

12. Примитивная причинность [34]. Для каждого «временного слоя» $\mathfrak{O}_\varepsilon = \{x \in M : |x^0| < \varepsilon\}$ выполняется равенство* $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_\varepsilon) = \mathfrak{A}_\infty$. Это означает, что можно определить однозначно состояние системы, наблюдая за ней в течение произвольно малого временного интервала ε. Кроме соответствия $\mathfrak{O} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ для любого $\mathfrak{O} \in M$, определяющего физические операции над системой, вводится понятие состояния системы как положительный непрерывный линейный функционал $\varphi(A)$ над $\mathfrak{A}$, такой, что $\varphi(I) = 1$ [3, 4, 9, 37].

Состояние означает произвольный статистический ансамбль, а наблюдаемая (операция) обозначает любое физическое устройство, действующее на состояние ансамбля в течение ограниченного

---

* О множествах $\mathfrak{O}_t \subset M$, таких, что $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_t) = \mathfrak{A}_\infty$, см. также работы [33, 35, 36].

времени и переводящее его в конечное состояние [9]. Чистым состояниям и смесям отвечают соответствующие функционалы. Преобразование состояния $\varphi(A)$ под действием (чистой*) операции B, $\varphi(A) \to \varphi_B(A)$ дается выражением $\varphi_B(A) = \varphi(B^*AB)$, а вероятность этого перехода — $\varphi(B^*B)$.

Любой эксперимент можно рассматривать как определяющий вероятность p_i-переходов состояний, но только для конечного числа операций B_i над системой. Таким образом, имеется конечное число N вероятностей p_i, измеренных с конечной точностью ε_i, которые определяют поэтому не единственное состояние, а некоторую слабую ее окрестность [9] $|\varphi(B_i^*B_i) - p_i| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, в пространстве $\mathfrak{A}^{*+}$-состояний.

Описанный формализм включает в себя и схему квантовой механики, которая определяет систему с конечным числом степеней свободы. На алгебраическом языке квантовая механика задает представление n пар элементов p_i, q_i (импульс и координата) ограниченными операторами в виде $\exp(\mathrm{i}\ \mathrm{const}\ p_i)$, $\exp(\mathrm{i}\ \mathrm{const}\ q_i)$ с коммутационными соотношениями в форме Вейля [38]. В соответствии с известной теоремой Неймана, указанные перестановочные соотношения задают всегда унитарно эквивалентные представления системы с конечным числом степеней свободы. В случае бесконечного числа степеней свободы, у физической системы допускаются унитарно неэквивалентные представления [39, 40].

Чтобы освободиться от этой неоднозначности, иногда выделяют одно из возможных представлений как физическое (например, содержащее вакуумный вектор [41]). В работе [42] для конкретного случая сильных взаимодействий некоторые представления отбрасывают как неинтересные, а остальные, удовлетворяющие критерию физичности, интерпретируются как «секторы».

В силу указанной выше неточности процесса измерения разные унитарно неэквивалентные представления алгебры $\mathfrak{A}$ («секторы») оказываются «физически эквивалентными» для сил с малым радиусом действия, и их можно описать единой абстрактной алгеброй [9]. В этом состоит обоснование абстрактно-алгебраического рассмотрения в релятивистской квантовой теории.

Не все аксиомы, которые собраны для полноты, используются при получении основных результатов теории локальных наблюдаемых. Так, все результаты, приведенные в разд. 4—7, и главные результаты разд. 3 зависят в основном от свойств дуальности, Пуанкаре-ковариантности, спектральности и слабой аддитивности**, которые можно отнести к вакуумному представлению***.

* Переводящей чистые состояния опять в чистые.

** Использованной только для доказательства свойства B, разд. 2.

*** Отметим роль аксиомы 8 при постановке проблемы суперотбора [28—31] в терминах суперотборных операторов для произвольной квантовой системы.

2. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

Первоначальная цель алгебраического подхода состояла в замене ненаблюдаемых величин (полей) локальными наблюдаемыми, в сохранении и расширении основных результатов аксиоматической теории поля и избавлении, при этом, от неоднозначности, связанной с использованием ненаблюдаемых величин, и от трудности с использованием неограниченных операторов.

В теории поля тоже можно определить алгебры (неограниченных*) операторов полей, связанных с областями $\mathfrak{O} \subset M$, выбирая основные функции с носителями в $\mathfrak{O}$ [2]. Если бы операторы поля были существенно самосопряженными, то, рассматривая их спектральные семейства, можно было бы такому полю поставить в соответствие W^*-алгебру и установить связь между двумя подходами [45—48].

В общем случае требование существенной самосопряженности для операторов поля не выполняется (для выполнения его достаточно, чтобы вакуум был аналитическим вектором [49] для всех операторов поля).

Удобнее несколько изменить постановку задачи и определить поле $\mathcal{F}$ не как неограниченный операторнозначный функционал [2], а как совокупность локальных алгебр $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$, $\mathcal{F} = \overline{U\mathcal{F}(\mathfrak{O})}$ из ограниченных операторов* и их равномерных пределов. Таким образом, сохраняются основные свойства поля при некоторых изменениях по существу технического характера. Тогда устанавливается [50] глубокая связь между полем и наблюдаемыми. В случае сильных взаимодействий эта связь использует понятие компактной калибровочной группы симметрии, причем получается интересная аналогия с теорией представлений компактных групп.

Вектор $\psi \in \mathcal{H}$ называется аналитическим [49] по энергии**, если степенной ряд $\sum\limits_n \frac{r^n}{n!} \| P_0^n \psi \|$ имеет ненулевой радиус сходимости по r, где P_0 — оператор энергии теории (генератор группы временной трансляции). Следующее свойство аналитических по энергии векторов (свойство Рее — Шлидера) вводится как один из постулатов разд. 6. Если ψ — аналитический вектор по энергии, то ψ — циклический вектор, соответственно, отделяющий вектор*** для любой локальной алгебры $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$, т. е. $\{\mathcal{F}(\mathfrak{O})\psi\}$

---

* См. работу [43, 44]] о полевых алгебрах из неограниченных операторов.

** Поле, как понимает Хааге, см. ниже в разд. 6.

*** О существовании таких векторов в суперотборных секторах см. работу [51].

плотно в $\mathscr{H}$, соответственно, $F\psi = 0$ и $F \in \mathscr{F}(\mathfrak{O})$ влечет $F = 0$ [2, 17, 52—55].

В разных вариантах такое свойство доказывается в рамках алгебраического подхода, если вместо $F(\mathfrak{O})$ писать $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, и в теории поля ($F(\mathfrak{O})$ неограниченные полевые операторы). Свойство Рее — Шлидера эквивалентно [56] «слабой аддитивности» (см. работу [50]).

Во многих проблемах алгебраического подхода изучается действие некоторой группы G как группы симметрии, на алгебру * $\mathfrak{A}$ в виде группы автоморфизмов α_g, $g \in G$ алгебры $\mathfrak{A}$ (например, группа Пуанкаре, калибровочная группа G). В применениях часто переходят к конкретному представлению $\pi(\mathfrak{A})$ ограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Во многих физически интересных случаях существует унитарное представление $U(g)$ группы G, действующее в $\mathscr{H}$ и задающее автоморфизмы алгебры:

$$\pi(\alpha_g A) = U(g)\,\pi(A)\,U(g)^{-1}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Обычно представление $U(g)$ удовлетворяет и некоторым условиям непрерывности [57]. Тогда говорят, что $\pi(\mathfrak{A})$, G — ковариантно. В теории локальных наблюдаемых дополнительное ограничение на множество всех суперотборных (см. разд. 3) секторов есть условие Пуанкаре-ковариантности представления $\pi(\mathfrak{A})$ алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}$ в каждом секторе (см. разд. 5).

В работе [58] вводится понятие ковариантной алгебры $\mathfrak{A}^G$ (удобное для описания G-ковариантных представлений $\mathfrak{A}$), и оно применяется в релятивистской теории поля. Условие счетности числа суперотборных секторов** формулируется как условие на $\mathfrak{A}^G$. С помощью $\mathfrak{A}^G$, построенной из пространственных трансляций, изучается связь между свойствами разложения на пучки, единственности вакуума и неприводимости. Алгебра поля изучается как ковариантная алгебра в работе [50]. Свойства групп автоморфизмов для C^*-алгебр приведены также в работах [57, 60, 61]. Иногда используется свойство «асимптотической абелевости» для наблюдаемых из $\mathfrak{A}$ [58, 62—64]. Основная идея состоит в том, что если даны две наблюдаемые $A, B \in \mathfrak{A}$ и одна из них транслируется в бесконечность (в пространственно-подобном направлении), то они становятся в пределе независимыми, т. е. их операторы в некотором представлении, в пределе коммутируют. В простейшем случае [58, 64, 65] это группа R^3 3^x-мерных трансляции и дано ее представление $x \to \alpha_x$, $x \in R^3$ автоморфизмами $\mathfrak{A}$, удовлетворяю-

* Например, на алгебру наблюдаемых, на полевую алгебру.

** Об ограничениях, накладываемых этим условием на тип C^*-алгебр $\mathfrak{A}$, см. работу [59].

щими

$$\lim_{x\to\infty} \| \alpha_x(A) B - B\alpha_x(A) \| = 0. \tag{3}$$

В работе [66] свойства типа (3) формулируются в более общем виде не для алгебры $\mathfrak{A}$, а для состояний над ней. На основе асимптотической абелевости алгебры $\mathfrak{A}$ обсуждаются и свойства асимптотической факторизации (разложение на пучки) для состояний над $\mathfrak{A}$ [58, 66]. В простейшем случае пространственных трансляций x и вакуумного среднего любых трех операторов A_1, A_2, A_3 из $\mathfrak{A}$ это условие записывается как

$$\lim_{|x|\to\infty} (\Omega, A_1\alpha_x(A_2) A_3\Omega) = (\Omega, A_1, A_3\Omega)(\Omega, A_2\Omega). \tag{4}$$

В квантовой теории поля, где A_i — операторы поля, условие (4) доказывается в рамках аксиоматики Вайтмана [67]. Ниже для поля $\mathcal{F}$ Хаага условие (4) является естественным постулатом (см. также работу [31] о выполнении равенств типа (4) для теории с $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p$). Классификация состояний над алгеброй наблюдаемых дана также в работе [26].

Разные понятия локализованности состояния введены в работах [68—72]. В силу свойства Рее — Шлидера множество векторов $\{A\Omega\}$, где $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, не «локализовано», а заполняет все пространство. Если вместо A ограничиться только унитарными операторами U из локальных алгебр, то получатся локализованные состояния $U\Omega$ [68]. В общем случае, действуя произвольным изометрическим оператором W из алгебры $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})'$ на вакуум Ω, можно получить «строго локализованное» состояние [69] ω, которое совпадает с вакуумным состоянием ω_0 над алгеброй $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})'$ в пространственно-подобном дополнении $\mathfrak{O}'$ области $\mathfrak{O}$:

$$(\omega - \omega_0)\,|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')} = 0. \tag{5}$$

В работе [42] физические состояния S (см. разд. 4) имеют свойство, подобное (5), но только в асимптотическом смысле при бесконечном увеличении области $\mathfrak{O}$.

Свойство асимптотического совпадения состояния ω с вакуумным состоянием для больших трансляций («асимптотическое условие») рассматривалось в работах [31, 73, 74].

W^*-алгебры, связанные с теорией свободных полей, изучаются в работах [73, 75—79]. Ограничения на класс W^*-алгебр* теории описаны в работах [27, 33, 73, 78, 80—82], а также обсуждаются в работе [10].

Свойство дуальности для алгебр свободного нейтрального скалярного поля доказывалось в работах [75, 76, 79], а также (на

* По классификации фон Неймана [11] для факторов (см. разд. 9).

основе некоторых постулатов теории) в работах [81, 83, 18]. Связь между свойством дуальности и автоморфизмами алгебры дается ниже в разд. 4.

В работе [50] вводится свойство t-дуальности* (его определение см. в разд. 6) и доказывается, что им обладает алгебра свободного Ферми-поля. Более простое доказательство дуальности свободного Бозе-поля, чем в предыдущих работах [75, 76, 79], дано в работе [83]. Некоторые следствия дуальности приводятся в работах [84, 51].

В работе [82] рассматривается свойство «расширенной локальности» (см. также [18, 74, 81]) для двух взаимно пространственно-подобных областей $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$: $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1) \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2) = \mathrm{const}\, I$. Оно следует [74] из выполнения асимптотического условия, а также из отсутствия нетривиального трансляционно-инвариантного оператора в алгебре всех локальных наблюдаемых.

Определим локальные состояния $\omega_1 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1)^{*+}$ и $\omega_2 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2)^{*+}$ как функционалы только над локальными алгебрами областей $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$. Тогда эти алгебры называются (причинно или статистически) независимыми, если для любой пары ω_1, ω_2 существует глобальное состояние $\omega \in \mathfrak{A}^{*+}$, сужение которого на каждой из алгебр $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1)$ и $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2)$ совпадает с ω_1 и ω_2 соответственно [9, 85]. Независимость алгебр $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1)$ и $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_2)$, определенных на взаимно пространственно-подобных областях $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$, в рамках алгебраического подхода доказано в работе [85]. В работах [86, 87] рассмотрена обратная задача: исследуются дополнительные условия, при которых независимость локальных алгебр (для пространственно-подобных областей) приводит к их локальной коммутативности. В работе [81] причинными называют те соотношения алгебраической теории, которые связывают между собой свойства локальных алгебр, определенных во взаимно пространственно-подобных (причинно независимых) областях.

В этот класс соотношений войдут локальная коммутативность, дуальность, расширенная локальность. Для случая теории с достаточным числом чистых векторных состояний в работе [81] исследуется связь между перечисленными свойствами, а также их связь с понятиями локальности, введенными в работах [33, 88].

В работах [27, 29] изучается соответствие между векторными состояниями ω_Φ и отвечающими им векторами Φ («прообраз» ω_Φ). Свойства векторных состояний описываются в пространстве $\mathscr{H}$ не свойствами отдельного вектора, а скорее свойствами некоторой совокупности векторов. Физически это связано с тем, что в сущности на практике наблюдаются не отдельные $\Phi \in \mathscr{H}$, а средние значения $(A\Phi, \Phi)$, т. е. функционалы ω_Φ. На языке прообразов ω_Φ изучаются некоторые свойства состояний, в том числе их чисто-

* «Twisted duality».

та, и доказывается, что условие $\mathscr{H} = \mathscr{H}_p$ эквивалентно тому, что алгебра наблюдаемых $\mathfrak{A}_\infty$ есть W^*-алгебра типа I с центром из операторов с точечным спектром. Исходя из свойств прообразов ω_Φ, в работе [27] показано, что используемая иногда в теории гипотеза [2, 89]: проектор P_Φ на чистые состояния Φ является наблюдаемой, $P_\Phi \in \mathfrak{A}_\infty$ приводит к дополнительному сужению классов, введенных выше аксиомами допустимых алгебр.

Свойства проекторов в W^*-алгебрах локальных наблюдаемых рассматриваются в работах [88, 90]. Далее, алгебры $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ не содержат вполне непрерывных операторов [18, 59, 80]. Свойство простоты алгебры наблюдаемых рассматривается в работах [9, 31, 82, 90, 91], а неограниченность спектра энергии — импульса — в работе [92]. Другие свойства локальных алгебр можно найти в работах Борхерса [53, 90, 93, 94].

На языке локальных алгебр наблюдаемых [95, 96] дано математическое описание понятия счетчика (детектора частиц) C, применяющееся в теории рассеяния [65, 97]. Счетчик C определяется свойствами: 1) $C = C^* = C^2$, т. е. является проектором; 2) $\omega_0(C) = \varepsilon > 0$, где ε — малое число и ω_0 — вакуумное состояние*; 3) $C \in \mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ (счетчики — локальные наблюдаемые). Если $C_x = \alpha_x(C)$ означает образ C при трансляции x, то $C_{x_1} \cdot C_{x_2}$ отвечает установке счетчиков в режим совпадения в некоторых точках пространства. Таким образом, локализацию состояния можно определять экспериментально [97].

Обсуждение алгебраического подхода в терминах теории пучков вместе с понятием интенсивной наблюдаемой, определяемой как генератор некоторой локальной симметрии, заданной унитарным оператором, дано в работе [98].

3. ГЛОБАЛЬНЫЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА. ПРАВИЛА СУПЕРОТБОРА. СИММЕТРИИ

Для многих задач квантовой теории (например, в квантовой механике или в теории поля) алгебру операторов удобно считать неприводимой (свойство «полноты» теории). Если рассматривать глобальные аспекты теории как операции симметрии, структуру множества наблюдаемых, абсолютно сохраняющиеся величины, а также многие другие физические свойства системы, то необходимо учитывать явление суперотбора, впервые описанного в работе [99]. Суть его в следующем: все гильбертово пространство состояний $\mathscr{H}$ разлагается на ортогональные подпространства («секторы») $\mathscr{H}_i$ так, что нельзя производить суперпозицию двух состояний, не принадлежащих одному и тому же $\mathscr{H}_i$, не выходя из класса

* Более естественное условие $\omega_0(C) = 0$ вместе с остальными условиями привело бы в силу свойства Рее — Шлидера к результату $C = 0$ [96].

чистых состояний. Так, нельзя получить чистое состояние из линейной комбинации бозонных Φ_B- и фермионных Φ_F-состояний, или из комбинации двух состояний $\Phi_{n/2}$ с полуцелым и Φ_n с целым спином соответственно. Подобная ситуация возникает всегда, когда имеется некоторая абсолютно сохраняющаяся физическая величина: полный барионный заряд $\mathscr{B}$, электрический заряд $\mathscr{Q}$, лептонный заряд $\mathscr{L}$, мюонный заряд $\mathscr{M}$. Векторы из пространства $\mathscr{H}$, отвечающие определенному (собственному) значению каждого из этих операторов, образуют секторы, названные Вайтманом [2] первоначально когерентными подпространствами.

Так как суперотборные операторы $\mathscr{B}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ можно измерить одновременно, то они должны коммутировать между собой. Это в сущности и есть гипотеза коммутативных правил суперотбора* [2]. Поскольку суперотборные операторы $\mathscr{Z}_i$ эрмитовы, они порождают унитарные группы $U_i = \exp(i\alpha\mathscr{Z}_i)$ (называемые еще калибровочными), которые тоже должны коммутировать между собой.

Далее, чтобы некоторый оператор в пространстве $\mathscr{H}$ представлял наблюдаемую** $A \in \mathfrak{A}_0$, он тоже должен коммутировать с калибровочными группами $U_i A U_i^{-1} = A$, что означает калибровочную инвариантность наблюдаемых. Это вторая основная гипотеза теории суперотбора, использованная в работах [50, 102]. Таким образом, на уровне теперешних знаний можно считать, что суперотборные операторы $\mathscr{Z}_i$ «присоединены» (см. ниже) к коммутанту*** $\mathfrak{A}_0'$ алгебры $\mathfrak{A}_0$, а также, естественно, и $\exp(i\alpha\mathscr{Z}_i) \in \mathfrak{A}_0'$. Тогда все физические величины из пространства $\mathfrak{A}$ будут оставлять инвариантными секторы $\mathscr{H}_i$, поскольку проекторы $P_{\mathscr{H}_i}$ на $\mathscr{H}_i$ принадлежат $\mathfrak{A}_0'$ и переходы из одного сектора в другой запрещаются: $(A\Phi_i, \Phi_k) = 0$ для $\Phi_i \in \mathscr{H}_i$ и $\Phi_k \in \mathscr{H}_k$, $i \neq k$.

Таким образом, не любой самосопряженный оператор в пространстве $\mathscr{H}$ отвечает наблюдаемой величине, а только такой оператор, который приводится разбиением $\mathscr{H}$ на секторы. В этом есть отличие от квантовомеханического рассмотрения, где любой самосопряженный оператор описывает наблюдаемую величину и нет ограничения при применении принципа суперпозиции состояний.

Описанное выше качественное рассмотрение представляет физическую основу разных схем суперотбора, встречающихся в литературе. Для выяснения некоторых его свойств во многом способствовало изучение его математической природы в рамках

---

* Однако в работах [28, 100, 101] эта гипотеза получается как следствие.

** Здесь W^*-алгебра $\mathfrak{A}_0$ определяется как порожденная спектральными семействами самосопряженных операторов, отвечающих физическим величинам [103] и не требующих выполнения постулатов, приведенных выше.

*** В работе [28] это уточняется: $Z_i \in \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}_0'$.

известных структур и в их связи с общими аксиомами квантовой теории. Так, в работе [100] предлагается сопоставить явлению суперотбора в пространстве $\mathscr{H}$ структуру прямого интеграла [11]

$$\mathscr{H} = \int_J \mathscr{H}_i \, d\mu \qquad (6)$$

по некоторой мере μ на множестве J, нумерующем суперотборные секторы $\mathscr{H}_i$, $i \in J$. В работе [100] существенно используется предположение о том, что W^*-алгебра наблюдаемых $\mathfrak{A}_0$ содержит максимальную коммутативную подалгебру N (полный набор коммутирующих наблюдаемых [101, 104]. Тогда, используя свойство максимальности N ($N' = N$), доказывают, что $\mathfrak{A}_0' \subset \mathfrak{A}_0$, т. е. из физических соображений получается, что для центра Z алгебры $\mathfrak{A}_0$, $Z = \mathfrak{A}_0'$. Пользуясь известной теоремой о разложении W^*-алгебры в прямой интеграл относительно ее центра, приходим к разложению (6). В зависимости от непрерывности или дискретности спектра суперотборных операторов соответствующие правила суперотбора можно назвать соответственно «непрерывными», или «дискретными».

Все известные до сих пор в релятивистской квантовой теории правила суперотбора имеют вид дискретных правил в описанном выше смысле, и поэтому прямой интеграл в разложении (6) вырождается в прямую сумму подпространств $\mathscr{H}_i$ всего пространства $\mathscr{H}$. В общем же случае [для $\mathscr{H}_i$ и $\mathscr{H}$ из разложения (6)], $\mathscr{H}_i \notin \mathscr{H}$ [105].

В нерелятивистской квантовой теории известным является правило суперотбора Баргмана [106] по массе: суперотборные секторы различаются значениями непрерывного массового параметра. В квантовой теории поля построена модель с непрерывным правилом суперотбора [107].

В работах [42, 50] на основе некоторых приемлемых постулатов, как, например, ограничение множества рассматриваемых состояний для сильных взаимодействий только «физически интересными» состояниями, показано, что множество всех секторов имеет структуру дискретной абелевой группы. Тем самым исключаются «непрерывные» правила суперотбора.

В работах [89, 108, 109] изучается явление суперотбора в терминах векторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. В предположении, что проектор на каждое «физически реализуемое» состояние является наблюдаемой, показана возможность построения теории суперотбора в терминах векторов и операторов из $\mathscr{H}$. Состояния в пространстве $\mathscr{H}$ описываются векторами, и не допускается, чтобы чистому состоянию отвечало подпространство более высокой размерности, чем одномерное. Этому условию эквивалентна абелевость коммутанта $\mathfrak{A}_\infty'$ W^*-алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}_\infty$ [110].

В работе [28] дается детальное изложение правил суперотбора, полученных на основе изученного в работе [27] соответствия между векторными состояниями над $\mathfrak{A}_\infty$ и их прообразами в $\mathscr{H}$ для случая, когда имеется достаточное число чистых векторных состояний. Математическая схема, заложенная в основе построения, — та же, что и в работе [100], — разложение W^*-алгебры $\mathfrak{A}_\infty$ по ее центру на факторы. Более детальное использование физической информации в работе [100], и, в частности, постулата $\mathscr{H}=\mathscr{H}_p$ дает возможность разложить $\mathscr{H}$ только в прямую сумму секторов $\mathscr{H}_i$ (алгебры секторов являются дискретными факторами типа I) и найти математически естественное описание некоторых явлений, отмеченных в более ранних работах. В работах [99, 111] доказано с помощью трансформационных свойств относительно инверсии времени или относительно группы вращений, что для суперпозиции $\Phi_\lambda = \Phi_B + \exp(i\lambda)\,\Phi_F$ бозонного Φ_B- и фермионного Φ_F-состояний выполняется равенство $(A\Phi_{\lambda_1}, \Phi_{\lambda_1}) = (A\Phi_{\lambda_2}, \Phi_{\lambda_2})$ для любых наблюдаемых A и любых вещественных λ_1, λ_2. Это и есть часто встречаемое утверждение о том, что суперпозиция определяется неоднозначно с точностью до неопределенного фазового множителя. Но в терминах векторных состояний это означает, что Φ_{λ_1} и Φ_{λ_2} принадлежат прообразу одного и того же векторного состояния.

Использование свойств проекторов из W^*-алгебры и свойств прообразов состояний в работе [28] позволяет доказать следующее утверждение: пусть квантовая теория* с алгеброй $\mathfrak{A}_1$ и с пространством представления $\mathscr{H} = \sum_{\alpha\in\sigma} \mathscr{H}_\alpha$ (σ — произвольное множество), где для $\mathscr{H}$ имеет место свойство полноты чистых векторных состояний. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) векторы, являющиеся суперпозицией векторов из разных секторов $\mathscr{H}_\alpha$, представляют смеси;

2) переходы между разными $\mathscr{H}$ отсутствуют, т. е. $(A\Phi_{\alpha_1}, \Phi_{\alpha_2}) = 0$ для $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Прообраз любого векторного состояния ω_{Φ_α}, для которого $\Phi_\alpha \in \mathscr{H}_\alpha$, тоже принадлежит $\mathscr{H}_\alpha$;

3) существуют операторы $\mathfrak{Z}_i$, присоединенные к центру $\mathfrak{A}_1$ (может быть, неограниченные) и такие, что все $\mathscr{H}_\alpha$ являются их собственными подпространствами. Далее, любому $\mathfrak{Z}_i$ можно однозначно сопоставить суперотборную структуру с этими свойствами. «Коммутативность правил суперотбора» получается как естественное следствие описанной выше постановки.

В работе [28] подчеркивается принадлежность (или присоединенность) суперотборного оператора $\mathfrak{Z}_i$ к центру Z алгебры $\mathfrak{A}_1$,

---

* Не обязательно удовлетворяющая аксиомам, изложенным выше: $\mathfrak{A}_1$ обозначает, например, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_\infty$ (см. также работы [27, 110]).

а не только к ее коммутанту $\mathfrak{A}'_1$, что согласуется также с физической интерпретацией $\mathfrak{Z}_i$ как наблюдаемой.

Для теории, не обладающей свойством $\mathscr{H} = \mathscr{H}_p$, теряется эквивалентность условий 1—3, а также появляются непрерывный спектр у суперотборных операторов и разложение $\mathscr{H}$ в прямой интеграл.

Далее, принцип суперпозиции для векторов из данного сектора не выполняется в классическом смысле [28], так как можно найти такие векторы Φ_1 и Φ_2, которые отвечают чистым состояниям ω_{Φ_1} и ω_{Φ_2}, и такую их суперпозицию, которая уже не представляет чистого состояния. Можно, однако, слегка модифицировать этот принцип. Если существует другая пара векторов Φ и ψ из прообразов ω_{Φ_1} и ω_{Φ_2} соответственно, для которых суперпозиция представляет чистое состояние, то выполняется «обобщенный принцип суперпозиции» в любом секторе.

Условие достаточности числа чистых векторных состояний, показанное в работе [110], эквивалентно тому, что каждое векторное состояние над алгеброй можно слабо аппроксимировать конечными выпуклыми линейными комбинациями чистых векторных состояний. Напомним, что возможность такой аппроксимации отвечает реальному процессу измерения при определении состояния.

Далее покажем, что при экспериментах в фиксированных конечных областях $\mathfrak{O}$ нельзя различить, в каком секторе происходят явления [9]. Так обосновывается возможность абстрактно-алгебраического описания системы. Поскольку при измерениях всегда допускается неточность в некоторой слабой окрестности состояния, то для любого состояния Φ_α сектора $\mathscr{H}_\alpha$ можно найти такое состояние Φ_β сектора $\mathscr{H}_\beta$, чтобы Φ_β находилось в произвольной слабой окрестности Φ_α. Если α — собственное значение суперотборного оператора, номерирующего сектор (например, заряд), то достаточно к Φ_α добавить заряд величиной $(\beta - \alpha)$ в достаточно далекой области $\mathfrak{O}_1$, чтобы полученное состояние Φ_β, с одной стороны, принадлежало $\mathscr{H}_\beta$, а с другой — очень мало отличалось от Φ_α. Здесь использовалось важное допущение, что рассматриваемые состояния описывают короткодействующие силы (например, сильное взаимодействие). Но тогда алгебры π_α и π_β любых двух разных секторов H_α и H_β физически слабо эквивалентны $\pi_\alpha \sim \pi_\beta$, где π_α и π_β можно рассматривать как представления абстрактной алгебры $\mathfrak{A}$.

Применяя теорему Фелла [112], получаем, что ядра представлений π_α совпадают для любого α. Отсюда имеем, что все представления π_α можно считать точными, т. е. имеющими нулевое ядро: $K' = 0$, если вместо $\mathfrak{A}$ рассматривать $\mathfrak{A} \mid K'$ [9]. Это имеет место, в частности, если $\mathfrak{A}$ проста, т. е. не имеет нетривиальных идеалов. Несмотря на то что представления π_α, π_β в разных секторах считают унитарно неэквивалентными, нет ни одного физического примера [9], противоречащего «локальной унитарной эквивалентности» разных секторов. Под этим понимается, что для любой области $\mathfrak{O}$ рассматриваются сужения $\pi_\alpha(\mathfrak{O})$ и $\pi_\beta(\mathfrak{O})$ представлений π_α и π_β на алгебру $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$. Тогда утверждается, что $\pi_\alpha(\mathfrak{O}) \approx \pi_\beta(\mathfrak{O})$. Таким же образом можно ввести и понятия локальной физической эквивалентности $\pi_\alpha(\mathfrak{O}) \sim \pi_\beta(\mathfrak{O})$ и локальной квазиэквивалентности секторов $\pi_\alpha(\mathfrak{O}) \approx \pi_\beta(\mathfrak{O})$. Если вместе с такой локальной структурой алгебр $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, отвечающей разным $\mathfrak{O}$, рассмотреть и соответствующую асимптотическую структуру $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')$ [26, 31] *, то можно ввести соответствующие понятия «асимптотической» унитарной эквивалентности, физической эквивалентности и квазиэквивалентности между $\pi_\alpha(\mathfrak{O}')$ и $\pi_\beta(\mathfrak{O}')$.

В работе [31] рассмотрен случай теории типа $\mathscr{H} = \mathscr{H}_P$. Перечисленные ниже свойства для нее эквивалентны (см., например, в работе [28] теорию типа $\mathscr{H} = \mathscr{H}_P$, не обладающую этими свойствами): 1) все секторы π_α физически эквивалентны; 2) $\mathfrak{A}$ проста; 3) выполняется расширенная локальность; 4) ни один суперотборный оператор не принадлежит квазилокальной алгебре $\mathfrak{A}: \mathfrak{A} \cap Z = \text{const}\, I$ (все суперотборные операторы истинно глобальны). Отметим, что полный заряд, полная энергия и т. п., которые отвечают наблюдениям в бесконечных областях, не могут принадлежать алгебре квазилокальных наблюдаемых [9].

Для теории типа $\mathscr{H} = \mathscr{H}_P$ в работе [31] просто сформулированы необходимые и достаточные условия **, при которых локальная (соответственно асимптотическая) квазиэквивалентность π_α и π_β влечет за собой локальную (соответственно, асимптотическую) унитарную эквивалентность. Для теории с $\mathscr{H} = \mathscr{H}_P$ локальная квазиэквивалентность двух секторов (для любой $\mathfrak{O}$) равносильна их физической эквивалентности. Далее локальная унитарная эквивалентность совпадает с одновременной выполнимостью глобальных условий и физической эквивалентностью. Для тех же теорий асимптотическая унитарная эквивалентность сектора π_α вакуумному сектору совпадает с существованием в $\mathscr{H}_\alpha$ всюду плотного множества строго локализованных векторов и выполнения для этих двух секторов глобальных условий. Если эти условия выполняются для некоторой $\mathfrak{O}_0$***, тогда любое векторное состояние при бесконечно больших трансляциях совпадает с вакуумным состоянием, которое оказывается единственно необходимым. Похожее условие асимптотической унитарной эквива-

---

* Эти структуры называют еще «сетями» алгебр.

** Это условия на размерность секторов и «кратность» унитарно эквивалентных представлений алгебры $\mathfrak{A}$ внутри сектора. Они не зависят от пространственно-временной структуры («глобальные условия»).

*** Для области $\mathfrak{O}_0$ со свойством $\mathfrak{O}_0'' = \mathfrak{O}$.

лентности *, но для определенной совокупности K «двойных конусов», используется в работе [42] для нахождения множества физически интересных состояний. Критерии локальной унитарной эквивалентности приведены в работе [51].

Суперотбор изучается в работах [20, 42, 50] для случая сил с малым радиусом действия, как в адронной физике. Секторы π_q по определению рассматриваются, как неэквивалентные неприводимые представления алгебры $\mathfrak{A}$, а в терминах функционалов сектор — множество всех чистых состояний над данным представлением. Состояния, принадлежащие отдельным секторам, не могут в суперпозиции задавать чистое состояние, а только статистическую смесь. Кроме того, каждый сектор π_q физически эквивалентен $\mathfrak{A}$ и задает ее ковариантное представление, удовлетворяющее спектральному условию. Алгебра $\mathfrak{A}$ допускает слишком много таких представлений, чтобы их можно было номеровать собственными значениями суперотборных операторов с дискретным спектром. Поэтому вводят дополнительные критерии «физичности» представления и выбирают те из них (соответственно функционалы над ними), которые «физически интересны», а другие отбрасывают. В основе этих критериев лежит идея, что все эти представления (состояния) получаются из вакуумного представления (состояния) локальным изменением. Основное значение при этом приобретает понятие «локализованного морфизма», и любой сектор (представление $\mathfrak{A}$) находится из вакуумного сектора $\pi_0(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{A}$ действием такого морфизма. Тогда все секторы получаются сильно локально эквивалентными вакуумному сектору для некоторого множества областей K. В случае, когда секторы π_q получаются автоморфизмами из π_0 (π_q называются тогда простыми), множество ковариантных секторов π_q имеет структуру дискретной абелевой группы Γ_0 [50]. Элементы ξ этой группы имеют значение суперотборных квантовых чисел — «зарядов»** таких как барионный заряд, или странность для сильных взаимодействий. Так как Γ_0 определяется знанием π_0, то по виду вакуумного представления π_0 можно предсказать суперотборную структуру теории. В работах [50, 65] показано, что автоморфизмы Пуанкаре задаются унитарными операторами в любом секторе π_q с физическим спектром, если это выполняется только для π_0. Дуальная группа абелевой группы Γ_0 приобретает значение калибровочной группы симметрии G-теории. Отдельные детали этого сжатого описания общей картины суперотбора будут выясняться ниже с использованием вводимых там важных понятий, имеющих и другие применения.

* Называемой еще «сильной локальной эквивалентностью» [50].

** В дальнейшем удобнее именно такая интерпретация суперотборных зарядов, а не только, как собственных значений операторов Z_i.

18—01012

Если, наоборот, в качестве первоначального понятия ввести локальные алгебры поля $\mathscr{F}$ ($\mathfrak{O}$), то локальные алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{O}$) можно определить через них. При этом понятие поля и калибровочной группы позволяют независимо и совершенно по другому (без техники локализованных морфизмов) описать структуру суперотборных секторов.

При описании наблюдаемых квантовой системы операторами в пространстве $\mathscr{H}$ симметрия, как известно, связывается с наличием некоторого унитарного или антиунитарного оператора [2, 113, 114] * U, сохраняющего скалярные произведения (средние значения и вероятности перехода) при отображении множества состояний в себе (отображение симметрии U). Наделяя множество всех симметрий структурой группы G, в работе [50] изучают унитарное представление U (G)-группы со свойствами $U(G)\, A\, U(G)^{-1} = A$, где $A \in \mathfrak{A}$ **. Группа симметрий $G_{\text{макс}}$ из всех унитарных операторов, удовлетворяющая некоторым естественным предположениям ***, будет всегда компактной, если нет среди частиц мультиплетов с бесконечной кратностью и выполнены постулаты теории рассеяния Хаага — Рюеля.

Поскольку алгебра наблюдаемых $\mathfrak{A}$ фиксирует теорию в абстрактной алгебраической формулировке, иногда удобно определять симметрию как некоторый симметрический автоморфизм τ_a алгебры $\mathfrak{A}$ [115—124]. Если для представления π ($\mathfrak{A}$) существует унитарный оператор U, такой, что $\pi(\tau_a(\mathfrak{A})) = U\pi(\mathfrak{A})U^{-1}$, то τ_a описывается унитарным оператором. Если к тому же $U \in \pi(\mathfrak{A})$, то автоморфизм называется внутренним. Известно, что преобразование Лоренца, описываемое согласно аксиоме 4 автоморфизмом ω_L, не является внутренним автоморфизмом $\mathfrak{A}$ [9].

В работе [125] исследуется вопрос, насколько описание симметрий автоморфизмами алгебры отвечает самому общему понятию физической симметрии как преобразованию (состояний и наблюдаемых), сохраняющему неизменными «физические предсказания» теории.

Исходя из наличия W^*-алгебр, необязательно удовлетворяющих всем аксиомам $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{O}$), и полного **** семейства $\mathscr{F}_{\mathfrak{O}}$-состояний, определяются: понятие локальной «предсимметрии» как пары $(\nu_{\mathfrak{O}}\tau_{\mathfrak{O}})$ отображений ν; $\mathscr{F}_{\mathfrak{O}} \to \mathscr{F}$, $\tau : \mathfrak{A}(\mathfrak{O})_h \to \underset{\mathfrak{O}\subset M}{U}\mathfrak{A}(\mathfrak{O})_h$

* Теорема Вигнера.

** Действие G на $\mathfrak{A}$ выбрано так, чтобы описывать калибровочные группы первого рода, связанные с сохранением зарядов. Теория с подобной группой «суперсимметрии» будет теорией типа $\mathscr{H} = \mathscr{H}_p$ [28].

*** Имеются в виду коммутативность U ($G_{\text{макс}}$) с представлением группы Пуанкаре и с локальным полем и инвариантность вакуума.

**** Выпуклое множество состояний $\{\varphi\}$ в $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ такое, что из $\varphi(A) \geqslant 0$, $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ для всех $\varphi \in \mathscr{F}_{\mathfrak{O}}$ следует $A \geqslant 0$. Аналогично определяется множество $\mathscr{F}$ в $\mathfrak{A}$.

[$\mathfrak{A}(\mathfrak{O})_h$ — эрмитовая часть $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$] со свойством: $\nu_0(\omega_0)(\tau_0(A)) = \omega_0(A)$ для всех открытых ограниченных $\mathfrak{O} \subset M$ [125]; понятие согласованных пар $(\nu_{\mathfrak{O}}, \tau_{\mathfrak{O}})$, как предсимметрии согласующихся с аксиомами 2 и 3. При этом согласованность множества $\{(\nu_{\mathfrak{O}}, \tau_{\mathfrak{O}})\}$, $\mathfrak{O} \subset M$ эквивалентна существованию пары (ν, τ)-отображений («квазилокальная симметрия»): $\nu : \mathfrak{A}^{*+} \to \mathfrak{A}^{*+}$, $\tau : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющей некоторым естественным условиям [125] и такой, что τ является линейным биективным отображением, сохраняющим операцию инволюции, и $\tau(A^2) = (\tau(A))^2$, $A \in \mathfrak{A}$, а ν — афинное изометрическое отображение. Пара (ν, τ)-отображение не разрушает классы физической эквивалентности теории и приводит к симметрии, отвечающей симметрическому автоморфизму (антиавтоморфизму [105]) лишь в некоторых частных случаях, например, когда $\mathfrak{A}$ проста, или к внутренним автоморфизмам, если соответствующие [125] симметрии образуют связную группу.

Любая связная локально-компактная группа таких симметрий для теорий с $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P$ описывается некоторым набором представлений группы, задаваемых унитарными операторами из $\mathfrak{A}_\infty$. В частности, отсюда следует, что генераторы группы Пуанкаре для теорий с $\mathcal{H} = \mathcal{H}_P$ можно считать присоединенными к $\mathfrak{A}_\infty$ [125] (см. также работу [65]).

Для систем с бесконечным числом степеней свободы не каждый автоморфизм можно описать унитарным оператором, в чем еще одно отличие таких систем от систем с конечным числом степеней свободы. Если отождествить, как и раньше, $\mathfrak{A}$ с некоторым ее представлением операторами, то можно [115, 116] ввести понятие «внутренней» (или локальной) симметрии, которое отражает локальные свойства теории [125].

Унитарный оператор U задает внутреннюю симметрию, если для любой области $\mathfrak{O} \subset M$

$$U\mathfrak{A}(\mathfrak{O})\,U^{-1} = \mathfrak{A}(\mathfrak{O}), \tag{7}$$

т. е. при автоморфизме τ область $\mathfrak{O}$ остается инвариантной. Важность внутренних симметрий состоит в том, что преобразование (7) в известном смысле достаточно для описания самых общих симметрий, сохраняющих при преобразовании свойство локальности [116]. В квантовой теории поля аналогом внутренней симметрии является преобразование, действующее только на индексы α поля $\psi_\alpha(x)$, но не на пространственно-временной аргумент x.

Исходя из аксиом локальности, цикличности вакуума, спектральности и трансляционной инвариантности, в работе [115], с помощью техники обобщенных функций, показано в терминах локальных W^*-алгебр, что U коммутирует с четырехмерными трансляциями. В теории рассеяния локальных наблюдаемых «внутренняя» симметрия [116] U отображает одночастичные состояния на одночастичные, сохраняет локальную структуру при переходе к асимптотическим операторам и действует линейно на асимптотические операторы рождения [117].

Если автоморфизм $\mathfrak{A}$ невозможно задать унитарным оператором, то соответствующая симметрия называется спонтанно нарушенной [118—121]. Часто встречается нарушенная симметрия, для которой соответствующий автоморфизм $A \to \tau(A)$ для любой локальной алгебры $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ задается унитарным оператором, зависящим от $\mathfrak{O}$, но не существует единственного унитарного оператора, общего для всех $\mathfrak{O}$ [120].

Если для вакуума $\Omega \in \mathscr{H}$ выполняется равенство $(\Omega, \tau(A)\Omega) = (\Omega, A\Omega)$ (инвариантность по отношению к τ), тогда τ можно задать унитарным оператором [120, 122] и наоборот. В случае спонтанного нарушения симметрии вакуум неинвариантен по отношению к τ. При этих предположениях в рамках алгебраического подхода доказано [122] отсутствие массовой щели в спектре оператора энергии (теорема Голдстоуна) [119]. Симметрия в алгебраическом подходе обсуждается также в работах [118, 121, 123, 124]. Свойства спектра внутренних симметрий даны в работах [50, 55], а достаточные условия существования PCT оператора теории — в работе [126].

4. ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МОРФИЗМЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только определенного класса S-состояний, так называемых «физических состояний системы» [42]. Для сильных взаимодействий с небольшим радиусом сил эффект взаимодействия будет исчезающе мал при бесконечном отдалении в пространстве — времени, что не имеет места, например, в квантовой электродинамике. Это происходит из-за закона Остроградского — Гаусса, в силу которого заряженный источник дает постоянный поток напряженности поля через любую сферу $\mathfrak{O}$, его содержащую, независимо от ее радиуса и дает измеримый эффект в любом $\mathfrak{O}'$ [42]. Поэтому, ограничиваясь сильными взаимодействиями, будем говорить, что состояние ω принадлежит классу S, если

$$\lim_{n\to\infty} \| (\omega - \omega_0)|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_n')} \| = 0, \tag{8}$$

где сужения состояния ω берутся по алгебрам $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_n')$, а $\{\mathfrak{O}_n\}$, последовательность возрастающих «двойных конусов» * $\mathfrak{O}_n \subset \mathfrak{O}_{n+1}$ таких, что все пространство M содержится в их объедине-

* Они определяются пересечением будущих световых конусов с прошлыми.

нии. Вместо того чтобы изучать S-состояния, удобнее описать те неприводимые представления π_q алгебры $\mathfrak{A}$, состояния ω над которыми принадлежат классу S. Они и будут физическими представлениями, отвечающими S. Рассмотрим следующий критерий.

1. Физически интересные π-представления описываются как представления, обладающие свойством сильной локальной эквивалентности по отношению к вакуумному π_0- представлению для K_π-множества областей, которые содержат вместе с некоторым $\mathfrak{O}$ и его образы при всевозможных трансляциях. Сильная локальная эквивалентность π и π_0 определяется как унитарная эквивалентность ($\cong$) сужений π и π_0 для некоторого $\mathfrak{O}$:

$$\pi\,|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')} = \pi_0\,|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')}. \tag{9}$$

Этот критерий отбора представлений дает описание эквивалентно [42] класса S-состояний при некотором естественном дополнительном свойстве, выводимом в работах [42, 90] из постулатов разд. 2, а именно:

2. Если $E \in \pi\,(\mathfrak{A}\,(\mathfrak{O}'))$ — ненулевой проектор, тогда для любого $\mathfrak{O}_1$, содержащего $\mathfrak{O}$, существует изометрический оператор $W \in \pi\,(\mathfrak{A}\,(\mathfrak{O}_1'))'$, такой, что $WW^* = E$ и $W^*W = I$.

Далее будет везде предполагаться свойство сильной локальной эквивалентности для всех представлений. Центральное место во всей дальнейшей теории занимает понятие локализованного морфизма ρ.

Все физически интересные π-представления можно будет получить из вакуумного π_0-представления действием некоторого ρ, и тем самым структурные свойства теории сводятся к свойствам ρ. Далее, локализованные морфизмы допускают интересное физическое истолкование, позволяющее увидеть физический смысл многих абстрактных построений. Наконец, из-за возможности переходить из алгебры наблюдаемых к соответствующему полю и наоборот (см. разд. 6 и работы [50, 127]) почти все свойства, обычно выражаемые при помощи полевой алгебры, можно выразить на языке локализованных морфизмов, и тем самым восстановление поля по алгебре наблюдаемых не обязательно для построения теории. В качестве характерного примера можно сослаться на полное описание статистики частиц, без привлечения коммутационных соотношений для полей.

Удобно исходить из конкретной реализации $\mathfrak{A}$ в виде операторной алгебры, обозначаемой тем же символом и совпадающей с вакуумным представлением $\pi_0\,(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Его можно определить как $\mathcal{P}_+^\uparrow$-ковариантное представление $(\pi_0,\ U_0)$, индуцированное конструкцией ГНС на пространстве $\mathcal{H}_0$ с циклическим вакуумом Ω.

Морфизм ρ алгебры $\mathfrak{A}$ называется локализованным в $\mathfrak{O}$, если выполняется условие:

$$\rho\,(A) = A \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{A}\,(\mathfrak{O}'), \tag{10}$$

т. е. ρ действует как тождественное отображение в алгебре $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')$, определенной на причинном дополнении $\mathfrak{O}'$ области $\mathfrak{O}$ *. Тогда, если $\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}$, то пользуясь дуальностью, можно показать [127], что $\rho(\mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1)) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{O}_1)$. Характерный пример получения локализованных морфизмов возникает в следующей ситуации [42]. Так как π-представление в пространстве $\mathcal{H}_\pi$ сильно локально эквивалентно представлению π_0 в $\mathcal{H}_0$, то V — унитарный оператор, осуществляющий указанную эквивалентность: $V^{-1}\pi(A)V = A$, $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{O}')$. Определим $\rho \equiv V^{-1}\pi(A)V$ для всех A из $\mathfrak{A}$. Как и выше, получается $\rho(\mathfrak{A}(\mathfrak{O})) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, и это включение продолжается, в силу плотности $\underset{\mathfrak{O}}{U}\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ в $\mathfrak{A}$ и непрерывности нормы, до $\rho(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$. Таким образом, условие $\pi_0|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')} \approx \approx \pi|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')}$ для некоторого $\mathfrak{O}$ эквивалентно [42] существованию локализованного морфизма ρ с «носителем» $\mathfrak{O}$, такого, что

$$\pi(\mathfrak{A}) \approx \pi_0\rho(\mathfrak{A}) \tag{11}$$

и любое «физически интересное» представление можно получить, действуя на π_0 некоторым ρ. При этом из унитарной эквивалентности представлений ($\pi_0\rho_1 \approx \pi_0\rho_2$) можно определить соотношение эквивалентности в множестве локализованных морфизмов ($\rho_1 \approx \rho_2$). Класс эквивалентности ρ будем обозначать $\hat{\rho}$.

Другой пример локализованных морфизмов дает множество $J(\mathfrak{O})$ всех внутренних автоморфизмов $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$. Если $\sigma_U \in J(\mathfrak{O})$, тогда $\sigma_U(A) \equiv UAU^{-1}$. Множество всех автоморфизмов, локализованных в $\mathfrak{O}$, образуют, очевидно, подгруппу группы всех автоморфизмов $\mathfrak{A}$. Обозначим $\Gamma = \underset{\mathfrak{O}\in K}{U}\Gamma(\mathfrak{O})$ и $J = \underset{\mathfrak{O}\in K}{U}J(\mathfrak{O})$. Здесь Γ будет группой всех локализованных морфизмов и соответственно J — подгруппой всех внутренних автоморфизмов $\mathfrak{A}$. Можно показать [127], что J — нормальная подгруппа группы Γ.

Для любых локализованных морфизмов ρ_1, ρ_2 имеет место следующее свойство [42]: $\rho_1 \approx \rho_2$ эквивалентно существованию $\sigma_U \in J$, так, что $\rho_1 = \sigma_U\rho_2$. В соответствии с изложенным критерием 1 вводятся множества $\Delta_t(\mathfrak{O})$ и Δ_t локализованных морфизмов, определяемых так: $\rho \in \Delta_t(\mathfrak{O})$, если носитель ρ содержится в $\mathfrak{O}$ и если для любого $\mathfrak{O}_t$, полученного из $\mathfrak{O}$ произвольной трансляцией t, существует морфизм, локализованный в $\mathfrak{O}_t$ и эквивалентный ρ. Объединение $\Delta_t(\mathfrak{O})$ по всем $\mathfrak{O}$ обозначается Δ_t.

Используя условие эквивалентности двух представлений в виде (11), легко показать, что классы эквивалентности $\hat{\rho}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами фак-

* В дальнейшем $\mathfrak{O}$ обозначает элемент множества K всех двойных конусов.

тор-множества $\Delta_t|_J$. Можно показать [42], что Δ_t — полугруппа, а $\Delta_t|_J$ — абелева полугруппа (в случае автоморфизмов получим соответственно структуру группы). Коммутативность $\Delta_t|_J$ доказывается на основе свойства коммутативности двух морфизмов $\rho_1, \rho_2 \in \Delta_t$ [127] с пространственно-подобными носителями $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ и возможности (в силу определения Δ_t) выбрать при помощи достаточно большой трансляции областей $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ внутри одного класса эквивалентности морфизмы ρ_1 и ρ_2.

Их алгебра $\mathfrak{A}$ проста [42, 50], а значит ее представления точны. В силу сохранения нормы при изоморфизме C^*-алгебры получаем, что любое $\rho \in \Delta_t$ осуществляет изоморфизм C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в $\rho(\mathfrak{A})$.

Важный критерий, позволяющий отличать локализованные автоморфизмы от произвольных локализованных морфизмов, состоит в эквивалентности следующих условий [42]:

1) ρ-автоморфизм;

2) представление, задаваемое ρ, удовлетворяет условию дуальности:

$$\rho(\mathfrak{A}(\mathfrak{O}'))' = \rho(\mathfrak{A}(\mathfrak{O})), \tag{12}$$

где $\mathfrak{O} \in K_\rho$.

Значение автоморфизмов, отвечающих реальным Ферми- и Бозе-частицам, выступает особенно ясно при описании статистики разных секторов. В первую очередь интерес представляют те морфизмы, которые задают неприводимые представления в силу их физического истолкования как суперотборных секторов.

Пусть $\rho \in \Delta_t(\mathfrak{O})$ — неприводимый морфизм и $\rho_k \in \Delta_t(\mathfrak{O}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность эквивалентных ему морфизмов, таких, что их носители отдаляются в бесконечности таким образом, чтобы, каков бы ни был двойной конус $\mathfrak{O}$, можно было бы найти такое l, при котором $\mathfrak{O}_l$ пространственно-подобно $\mathfrak{O}$ для $k \geqslant l$. Легко видеть, что это можно сделать многими способами, например, рассматривая последовательность бесконечно больших трансляций $\mathfrak{O}$. В силу построения ρ_k и их свойства локализованности выполняется условие [42]:

$$\lim_{k\to\infty} \| \rho_k(A) - A \| = 0. \tag{13}$$

Свойство эквивалентности между ρ_k и ρ можно записать следующим образом:

$$\rho_k(A) = U_k \rho(A) U_k^{-1} \equiv \sigma_{U_k} \rho(A). \tag{14}$$

Из (13) и (14) получается [42], что любой морфизм ρ можно задать как предел последовательности внутренних автоморфизмов:

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} U_k^* A U_k \equiv \lim_{k\to\infty} \sigma_{U_k^*}(A), \tag{15}$$

где сходимость понимается в равномерной операторной топологии.

Изложенные выше математические свойства допускают интересное физическое толкование. Действительно, в соответствии с физическим смыслом сектора $\hat{\rho}$ как пространства состояний, для которых суперотборные заряды (например, полный барионный или электрический) одни и те же для всех состояний сектора, ρ_k генерирует некоторый тип заряда в области своего носителя $\mathfrak{O}_k$. Очевидно, что тогда состояние $\omega_0\rho_k$ будет совпадать с вакуумным ω_0 на $\mathfrak{O}'$ и $\omega_0\rho_k$ можно считать строго локализованным в $\mathfrak{O}$. Формула (14) указывает на некоторый «перенос» заряда из области $\mathfrak{O}$ в область $\mathfrak{O}_k$, а обратное движение заряда из $\mathfrak{O}_k$ в $\mathfrak{O}$ производится при помощи сопряженного автоморфизма σ_{U^*k}. Таким образом, формула (15) описывает «рождение» заряда в области $\mathfrak{O}$ переносом его из бесконечности в $\mathfrak{O}$. Так можно формально из вакуумного сектора получить все секторы. Структура полугруппы в $\Delta_t|_J$ отвечает «произведению» нескольких независимых состояний. Если $\rho_i \in \Delta_t\,(\mathfrak{O}_i)$, где $\mathfrak{O}_1$ пространственно-подобно $\mathfrak{O}_2$, и соответственно $\omega_i = \omega_0\rho_i$, $i = 1, 2$, — два векторных состояния в представлениях $\pi_0\rho_i$, то состояние $\omega_0\rho_1\rho_2 = \varphi$ — это векторное состояние в представлении $\pi_0\rho_1\rho_2$. Если производить измерения в области $\mathfrak{O}_1'$, то $\omega = \omega_2$, а для измерений в $\mathfrak{O}_2'$ получим, что $\omega = \omega_1$, так как $\omega_0\rho_i$ строго локализованы.

В силу коммутативности $\Delta_t|_J$ произведение секторов отвечает сложению квантовых чисел («зарядов») соответствующих состояний. Поскольку, однако, произведение секторов может привести к приводимому представлению, «сложение зарядов» не является аналогом сложения в арифметике, а скорее аналогично сложению угловых моментов в квантовой механике.

Можно показать [42, 65], что последовательность $\{\sigma_{U_k}\}$ «сопряженная» последовательности $\{\sigma_{U^*k}\}$ приводит к зарядово-сопряженному сектору. Это интересная математическая конструкция описана в работах [42, 65]. Доказывается, что последовательность $\{\sigma_{U_k}\}$ имеет своей предельной точкой линейное отображение Φ алгебры $\mathfrak{A}$ в себя такое, что Φ — левое обратное* отображение к ρ. Тогда π_Φ-представление, полученное из состояния $\omega_0\Phi$ конструкцией ГНС, отвечает зарядово-сопряженному сектору. Действительно, состояние $\omega_0\Phi$ удовлетворяет (8), так как Φ как левое обратное отображение оказывается локализованным там же, где и ρ [$\Phi\,(A) = A$ для $A \in \mathfrak{A}\,(\mathfrak{O}')$]. Поэтому π_Φ при дополнительном условии 2 удовлетворяет критерию 1 и, значит, существует $\bar{\rho}$ («сопряженный сектор»), такой, что $\pi_\Phi\,(A) \approx \bar{\rho}\,(A)$. Композиция $\bar{\rho}\rho$ двух представлений $\bar{\rho}$ и ρ приводит к представлению, содержащему в своем разложении на чистые заряды вакуумное представ-

* Точное определение левого обратного дано в работе [42].

ление, причем только один раз. При этом $\bar{\rho}\rho$ Пуанкаре ковариантно, неприводимо и удовлетворяет спектральному условию, если этими же свойствами обладает ρ.

5. СТАТИСТИКА СЕКТОРОВ. ЧАСТИЦЫ И АНТИЧАСТИЦЫ. СПИН И СТАТИСТИКА

Здесь каждому суперотборному сектору канонически сопоставляется свойство принадлежности к определенному типу статистики, зависящее только от внутренних свойств алгебры наблюдаемых сектора [42]. Рассмотрим n неприводимых эквивалентных морфизмов $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ с попарно пространственно-подобными носителями $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \ldots, \mathfrak{O}_n$, соответствующие им неприводимые представления $\pi_0\rho_i$ и произведение $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Тогда можно считать, что состояния $\omega_i = \omega_0\rho_i$ описывают частицы одного типа, а состояние $\omega = \omega_0\rho_1 \ldots \rho_n$ описывает множество n одинаковых частиц, каждая из которых локализованна в некоторой области $\mathfrak{O}_i$. Поскольку все ρ_i эквивалентны, то ω — векторное состояние в представлении $\pi_0\rho^n$, где $\rho \approx \rho_i$. Если ρ — не автоморфизм, то $\pi_0\rho^n$ оказывается приводимым, а если ρ — автоморфизм, $\pi_0\rho^n$, очевидно, неприводимо. Тогда вектор, отвечающий этому состоянию в пространстве неприводимого представления, единствен. Если $\pi_0\rho^n$ приводимо, то при помощи любого унитарного оператора U из коммутанта $(\rho^n(\mathfrak{A}))'$ можно получить новый вектор, отвечающий тому же состоянию. Действительно, если $\omega_0\rho^n = (\rho^n\psi, \psi)$, тогда $U\psi$ задает то же состояние.

Можно конкретно подсчитать векторы ψ. Если унитарный оператор U_k осуществляет указанную выше эквивалентность между ρ и ρ_k, а Ω — вакуумный вектор, тогда $\omega_0\rho_k(A) \equiv \equiv (\Omega, \rho_k(A)\Omega) = (U_k^*\Omega, \rho(A)U_k^*\Omega)$. Значит, в ρ-представлении вектор $U_k^*\Omega$ задает состояние $\omega_0\rho_k$. В случае произведения n морфизмов легко подсчитать:

$$\omega_0\rho_1 \ldots \rho_n(A) = (\Omega, \sigma_{U_1}\rho\sigma_{U_2}\rho \ldots \sigma_{U_n}\rho(A)\Omega) =$$
$$= (\Omega, U_1\rho\{U_2\rho[U_3\rho \ldots \rho(A) \ldots U_3^{-1}]U_2^{-1}\}U_1^{-1}\Omega) \equiv (\psi, \rho^n(A)\psi),$$

где $\psi \equiv \rho^{n-1}(U_n^*) \ldots \rho(U_2^*)U_1^*\Omega$. (16)

Операторы U_k приобретают значение сплетающих операторов между ρ- и ρ_k-представлениями. Формулу (16) можно записать * еще так [42]: $\psi = U_1^* \times U_2^* \times \ldots \times U_n^*\Omega$. По смыслу произведения представлений ψ служит естественным определением произведения векторов ψ_i:

$$\psi \equiv \psi_1 \times \psi_2 \times \ldots \times \psi_n. \tag{17}$$

* Это «прямое» произведение сплетающих операторов задает сплетающий оператор между произведениями ρ^n и $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$ [42].

Доказывается [42], что можно ввести унитарный сплетающий оператор $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)$ между представлениями $\rho_1\rho_2 \ldots \rho_n$ и $\rho_{p(1)}\rho_{p(2)} \ldots \rho_{p(n)}$, где p — некоторая перестановка $p \in P^{(n)}$, а $P^{(n)}$ — симметрическая группа перестановок из n элементов. Операторы $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)$ задают унитарное представление группы перестановок $P^{(n)}$. Действие $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)$ на вектор ψ сводится к перестановке сомножителей. Далее, $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)$ принадлежат коммутанту $(\rho^{(n)}(\mathfrak{A}))'$ ρ^n-представления и их кратность единичному оператору $\varepsilon_\rho^{(n)}(p) = CI$ эквивалентна тому, что ρ — автоморфизм. Поэтому очевидно, что вектор $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)\psi$ отличен от ψ. Возникает ситуация, полностью подобная имеющейся в квантовой механике, где перестановка $p \in P^{(n)}$ одинаковых частиц не приводит к изменению состояния (неразличимость частиц). Здесь же состояние $\omega_0\rho_1 \ldots \rho_n$ не меняется при перестановке p в силу выбора их носителей.

Оператор $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)$ — аналог квантовомеханического оператора, который описывает изменение волновой функции при перестановке ее аргументов. Поэтому совокупность классов эквивалентности представлений $\varepsilon_\rho^{(n)}$ группы перестановок $P^{(n)}$, когда n меняется для данного ρ, можно назвать статистикой сектора $\hat{\rho}$. Можно показать [42], исходя из приведенного выше свойства, что любая неприводимая компонента $\varepsilon_\rho^{(n)}$ встречается с кратностью $\dim \mathscr{H}_0$. Таким образом, достаточно классифицировать неприводимые компоненты $\varepsilon_\rho^{(n)}$. Используя свойства левого обратного отображения Φ к неприводимому морфизму ρ, в работе [42] доказывают, что каждому сектору $\hat{\rho}$ можно сопоставить единственным образом число λ, описывающее статистику $\hat{\rho}$ с возможными значениями * $0, \pm d$, где $d \geqslant 0$ — целое число, называемое порядком статистики. В силу соответствия между неприводимыми представлениями $P^{(n)}$ и диаграммами Юнга с n клетками [128] доказывается, что представлениям $\varepsilon_\rho^{(n)}$ для $n \geqslant 1$ отвечают те и только те диаграммы Юнга, для которых: а) длина столбцов $\leqslant d$, если $\lambda = d^{-1}$; б) длина строк $\leqslant d$, если $\lambda = -d^{-1}$; в) все диаграммы без ограничения, если $\lambda = 0$. Все случаи отвечают соответственно пара-Бозе, пара-Ферми и бесконечной статистике. В частности, обычная статистика Ферми и Бозе получается для $\lambda = \pm 1$ только в случае, когда ρ — автоморфизм.

Из определения статистики сектора ρ как представления $\varepsilon_\rho^{(n)}(p)$, канонически связанного с секторами $\hat{\rho}$, видно, что статистика сектора задается как его внутреннее свойство, определяемое наблюдаемыми в данном секторе, безотносительно к свойствам ненаблюдаемых величин (как, например, коммутативность или антикоммутативность полей).

---

* Можно определить λ из равенства: $\Phi(\varepsilon_\rho) = \lambda I$, где $\varepsilon_\rho \equiv \varepsilon_\rho^{(2)}(\tau)$ и τ — транспозиция из двух элементов.

Описанную схему можно обобщить [42] на случай приводимого представления ρ^0 алгебры $\mathfrak{A}$. Если ρ^0 имеет левый обратный Φ^0, удовлетворяющий равенству $\Phi^0(\varepsilon_{\rho^0}) = \lambda I$, то статистика представления $\hat{\rho}^0$ задается рассмотренными выше случаями а)—в). Для произвольного приводимого ρ^0 статистика не является «чистой» а описывается «смесью» пара-Бозе и пара-Ферми статистик порядка $b(\rho^0)$ и $f(\rho^0)$ соответственно. Целые числа $b(\rho^0)$ и $f(\rho^0)$ являются унитарными инвариантами. Их сумма $d(\rho^0) = b(\rho^0) + f(\rho^0)$ называется статистической размерностью ρ^0.

Приводимые ρ^0 встречаются при описании произведения неприводимых ρ, отвечающее «сложению» секторных зарядов. В теории рассеяния асимптотическое состояние для произвольной конфигурации пара-частиц задается функционалом над некоторым приводимым представлением ρ_α алгебры $\mathfrak{A}$.

В дальнейшем ограничимся теми секторами ρ, которые задают Пуанкаре-ковариантные представления. Удобно выделить множество Δ_S неприводимых Пуанкаре-ковариантных локализованных морфизмов с конечной статистикой. Определим Δ_r, как множество локализованных морфизмов ρ, содержащее Δ_S и замкнутое относительно перехода к произведениям и подпредставлениям, которые принадлежат разложению ρ в прямую сумму представлений Δ_S. Тогда Δ_r состоит из Пуанкаре-ковариантных морфизмов конечной статистики и разлагается в конечную сумму морфизмов из Δ_S [42, 65].

Показано [65], что для $\rho \in \Delta_S$ конструкция сопряженного сектора $\bar{\rho}$ приводит к единственному $\bar{\rho} \in \Delta_S$ с тем же статистическим параметром $\lambda(\rho) = \lambda(\bar{\rho})$. Далее, представление $U_\rho(L)$ группы Пуанкаре в секторе $\rho \in \Delta_S$ определяется однозначно самим сектором и $U_\rho(L) \in \rho(\mathfrak{A})''$ (см. также работу [129]). Следствием этой однозначности является правило суперотбора по унивалентности: невозможны переходы между состояниями с целым и полуцелым спином.

Переходим к свойствам спектра $S(\rho)$ энергии-импульса, который определяется как замкнутое множество в 4-пространстве импульсов, несущее спектры операторов энергии-импульса P_μ в представлении $\rho \in \Delta_r : U_\rho(x) = \exp(iP_\mu x_\mu)$, где x_μ — 4-трансляция. Имеет место свойство аддитивности $S(\rho)$ [65]*:

$$\text{а)}\ S(\rho_1) + S(\rho_2) \subset S(\rho_1 \cdot \rho_2);$$

$$\text{б)}\ S(\rho_1) + S(\rho_2) \subset S(\rho),$$

где $\rho_1, \rho_2 \in \Delta_r$ и ρ — подпредставление $\rho_1\rho_2$.

---

* Это свойство подобно хорошо известному свойству аддитивности в теории поля.

Постулируем спектральное условие для вакуумного сектора $S_{-}(\rho_0) \in \overline{V}^+$ (§ 1). Пользуясь тем, что ρ_0 — подпредставление $\rho\bar{\rho}$, из свойства б) получаем, что $S(\rho) \in \overline{V}^+$ для $\rho \in \Delta_r$, т. е. спектральное условие выполняется для любого сектора (см. также работу [53]).

Введем в рассмотрение векторы одночастичных состояний с массой m и спином s. Рассмотрим такие секторы ρ, что U_ρ содержит дискретную точку m в своем массовом спектре. Тогда спектральная проекция $E_\rho(\{m\})$ массового оператора в ρ-представлении неравна нулю и проектируется на $\mathscr{H}_\rho^m$, состоящее из векторов в пространстве ρ-представления и описывающее частицы с массой m. Если $K^{(m,s)}$ означает подпространство $\mathscr{H}_\rho^m$ неприводимого представления $U^{(m,s)}$ группы Пуанкаре с массой m и спином s, то $\mathscr{H}_\rho^m$ представится прямой суммой $\sum_s K^{(m,s)}$ подпространств из векторов состояний с зарядом ρ, массой m и спином s. Предположим, что имеется только конечное число видов частиц с массой m. Тогда в работе [65] доказывается, что существует унитарный оператор («зарядового сопряжения»), отображающий $\mathscr{H}_\rho^m$ на $\mathscr{H}_{\bar{\rho}}^m$ и устанавливающий унитарную эквивалентность представлений U_ρ^m и $U_{\bar{\rho}}^m$. Это означает, что существование некоторого вида частицы с массой m, спином s и зарядом ρ эквивалентно существованию частицы с той же массой, спином и зарядом $\bar{\rho}$. Далее для всех спинов s, встречающихся в $\mathscr{H}_\rho^m$, величина $(-1)^{2s}$ равна знаку λ_ρ (статистического параметра сектора ρ). Другими словами, частица со спином s подчиняется пара-Бозе (пара-Ферми)-статистике, только если ее спин целый (полуцелый).

Заметим, что в отличие от теории поля эта теорема о связи между спином и статистикой не предполагает существования коммутационных соотношений между полевыми операторами, а связывает два внутренних свойства сектора: пара-Бозе (Ферми)-статистику с правилом суперотбора по унивалентности. Существуют модели [130, 131], показывающие отсутствие такой связи между спином и статистикой при нарушении условия конечности массового и спинового вырождения.

Для случая секторов ρ со свойством $\rho = \bar{\rho}$, т. е. частица и античастица имеют одни и те же суперотборные квантовые числа, доказан вариант теоремы Каррутерса (см. работу [65]).

Обсуждение физической сущности пара-статистики дано в работе [132] на нескольких примерах для случая пара-Ферми полевой теории с точки зрения теории локальных наблюдаемых. Предлагается свести случай пара-Ферми полевого описания к эквивалентному описанию в терминах обычных Ферми-полей. Тогда алгебра наблюдаемых задается как инвариантная по отношению к некоторой неабелевой группе симметрии части алгебры Ферми-полей. В этих случаях пара-статистика сводится к обычной статистике в результате введения дополнительных величин как локальных наблюдаемых.

Для бесконечной статистики $\lambda = 0$, появившейся в данной схеме, не известны модельные реализации, но пока нет аргументов, отрицающих ее появление. Если, однако, существуют секторы с такой статистикой, их свойства должны быть совершенно отличными от свойств секторов с $\lambda \neq 0$. В работе [65] показано, что если ρ — ковариантный сектор с положительной энергией и бесконечной статистикой, то для него не существует сопряженного сектора $\bar{\rho}$ в понятиях, данных выше.

6. СВЯЗЬ С ТЕОРИЕЙ ПОЛЯ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛЯ ПО НАБЛЮДАЕМЫМ И НАОБОРОТ.

Известно, что понятие квантованного поля* занимает центральное место в современной релятивистской квантовой теории. И хотя алгебраический подход можно сформулировать и его основные результаты получать и без понятия поля, но в силу взаимной связи между наблюдаемыми и полем его формально можно считать тоже основным понятием и в этом подходе [8, 133]. Взаимная восстанавливаемость этих двух объектов друг через друга указывает на важность алгебраического подхода, в рамках которого удобнее изучать, например, структурные свойства релятивистской квантовой теории. Ненаблюдаемые величины (поля) в теории исполняют еще и роль «объединяющего» представления, так как можно найти такое неприводимое представление поля, что все физически интересные состояния всех секторов содержатся в этом единственном представлении. Значение понятия поля в этом подходе объясняется еще тем, что с его помощью можно перенести многие результаты квантовой теории поля, например связь спина со статистикой, симметрию частиц и античастиц, построение состояний рассеяния.

Следующие аксиомы определяют [50, 134] понятие локального поля $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$ (см. аналогию с соответствующими аксиомами **:

1. Существует соответствие $\mathfrak{O} \to \mathcal{F}(\mathfrak{O})$ открытых ограниченных областей $\mathfrak{O}$ и W^*-алгебр $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$, обладающее свойством изотонии (из $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$ следует $\mathcal{F}(\mathfrak{O}_1) \subset \mathcal{F}(\mathfrak{O}_2)$. Обозначим $\mathcal{F} \equiv \overline{\bigcup_{\mathfrak{O} \subset M} \mathcal{F}(\mathfrak{O})}$ (замыкание в равномерной топологии). Предполагается свойство

* Здесь и далее «поле» означает локальную полевую алгебру из ограниченных операторов (см. ниже) в смысле Хаага.

** Отметим, что аксиома локальной коммутативности отсутствует, так как поле может не быть наблюдаемым объектом и для него не обязательно выполняется эйнштейновский принцип причинности. В частности $\mathcal{F}(\mathfrak{O}_1)$ и $\mathcal{F}(\mathfrak{O}_2)$ могут антикоммутировать для пространственно-подобных $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$.

$\mathcal{F}'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, что эквивалентно неприводимости $\mathcal{F}$.

2. Сильно непрерывное унитарное представление $U(L)$ накрывающей группы Пуанкаре $\mathcal{P}_+^\uparrow$, $L \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ в $\mathcal{H}$ задает автоморфизм $\mathcal{F}$ по следующей формуле:

$$U(L)\mathcal{F}U(L)^{-1} = \alpha_L(\mathcal{F}), \quad \alpha_L(\mathcal{F}(\mathfrak{O})) = \mathcal{F}(L(\mathfrak{O})).$$

Генератор временных трансляций (оператор энергии) удовлетворяет спектральному условию.

3. Существует компактная группа G (калибровочная группа) и точное, сильное непрерывное представление унитарными операторами $U(g)$ в $\mathcal{H}$, $g \in G$, задающее автоморфизм $\mathcal{F}$ по формулам $U(g)\mathcal{F}U(g)^{-1} = \alpha_g(\mathcal{F})$ и $\alpha_g(\mathcal{F}(\mathfrak{O})) = \mathcal{F}(\mathfrak{O})$. Представления $U(L)$ и $U(g)$ коммутируют.

Локальная алгебра наблюдаемых $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ определяется как подмножество, инвариантное по отношению к $U(G)$, т. е. $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}) = \mathcal{F}(\mathfrak{O}) \cap U(G)'$. Для $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$, $\mathfrak{O} \in M$ необходимо постулировать свойство локальной коммутативности. Аксиомы 1—3 формализируют на языке алгебр стандартные предположения теории поля.

4. Постулируется свойство «разложения на пучки» для операторов поля $F \in \mathcal{F}$, вакуума Ω и пространственной трансляции x. Предполагается выполненным свойство Рее — Шлидера для аналитических векторов и любой $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$.

На основе этих аксиом в работе [50] показано, что алгебра наблюдаемых распадается на множество физических секторов, свойства которых определяются калибровочной группой G. При этом используются свойства среднего $m(F)$ алгебр операторов $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$ и $\mathcal{F}$ на компактной группе G по мере Хаара μ на G:

$$m(F) \equiv \int_G \alpha g(F)\, d\mu(g),$$

где

$$F \in \mathcal{F}(\mathfrak{O});$$

$m(F)$ — локальное и нормальное [105] отображение. Тогда локальную алгебру наблюдаемых $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ можно представить еще как среднее по локальному полю $\mathcal{F}(\mathfrak{O})$: $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}) = m(\mathcal{F}(\mathfrak{O}))$ и в силу непрерывности (нормальности) продолжить это равенство на алгебру квазилокальных наблюдаемых: $\mathfrak{A} = m(\mathcal{F})$. На основе неприводимости $\mathcal{F}$ (аксиома 1), определения $\mathfrak{A}(\mathfrak{O})$ (аксиома 3) и непрерывности m для слабого замыкания $\mathfrak{A}^-$ получается

$$\mathfrak{A}^- = m(\mathcal{F}^-) = U(G'). \tag{18}$$

Отсюда можно показать, что разложение $\mathfrak{A}$ на секторы сводится к нахождению множества $\hat{G}$ всех классов унитарно неэквивалентных неприводимых G-представлений.

Используя (18) и свойство аксиомы 4, доказывают [50], что некоторые из неэквивалентных неприводимых представлений $\mathfrak{A}$ (секторы) взаимно-однозначно соответствуют множеству $\hat{G}$ всех классов унитарно неэквивалентных неприводимых G-представлений (полный «спектр» G). Таким образом, это соответствие, по определению, выделяет физически интересные $\mathfrak{A}$-представления («физический спектр» $\mathfrak{A}$ или множество всех секторов). При этом в пространстве представления $\mathscr{H}_\xi$ каждого $\xi \in \hat{G}$ действует конечномерное в силу компактности G неприводимое G-представление (в общем случае) с бесконечной кратностью. Если $\dim \mathscr{H}_\xi = 1$, сектор называется абелевым. Если воспользоваться теорией двойственности для случая абелевой калибровочной группы G, то получится, что множество всех секторов (параметризованное множеством $\hat{G}$ дуальной группой G) дискретно * и имеет структуру абелевой группы. На физическом языке это означает возможности сложения зарядов, характеризующих отдельные секторы.

Из этой конструкции видна аналогия между суперотборной структурой, рассматриваемой выше для общего случая, и такой же структурой, полученной (по существу феноменологически) из введенной калибровочной группы G-симметрии. Дальнейшую связь между структурой в множестве $\Delta r/J = \{\xi\}$ суперотборных секторов и структурой в множестве $\hat{G} = \{\xi\}$ классов конечномерных представлений компактной группы G-симметрии можно увидеть в следующем соответствии [135]: сложению зарядов ξ, ξ' отвечает прямое произведение $\xi \otimes \xi'$ представлений G; сопряженному сектору $\bar{\xi}$ отвечает комплексно-сопряженное $\bar{\xi}$ представление G; порядок статистики $d(\xi)$ равен размерности $\dim \xi$. Это соответствие продолжается на сплетающие операторы для этих представлений [102].

Далее можно показать [50], что полученные таким образом представления (секторы) сильно локально эквивалентны и для абелевой калибровочной группы определяются локализованными автоморфизмами из вакуумного сектора. Для этого надо постулировать следующие свойства:

5. Полевая алгебра $\mathscr{F}(\mathfrak{O})$ коммутирует с наблюдаемой алгеброй $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}')$, т. е. $\mathscr{F}(\mathfrak{O}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{O}')'$.

5а. Можно уточнить ** аксиому 5, потребовав $\mathfrak{A}(\mathfrak{O}'))^- = \mathscr{F}(\mathfrak{O})' \cap U(G)'$.

Пользуясь свойством Рее — Шлидера для $F(\mathfrak{O})$ и свойствами аксиом 5 и 5а, можно доказать сильную локальную эквивалент-

* Каждая его точка изолирована, и, значит, нет «непрерывных» правил суперотбора.

** Это видно после взятия коммутанта у соотношения $F(\mathfrak{O}) \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{O}')'$ в аксиоме 5.

ность для любого $\mathfrak{O}'$ [50]

$$V_q \pi_0 (A) = \pi_q (A) V_q, \quad A \in \mathfrak{A} (\mathfrak{O}'), \tag{19}$$

где V_q — сплетающий унитарный оператор между вакуумным сектором π_0 и сектором π_q.

Приведем интуитивно ясное рассуждение [136], проясняющее ситуацию. Если $A \in \mathfrak{A} (\mathfrak{O})$ и если считать (как это делается в теории поля *), что поле $\psi^* (f)$ определено на основной функции f с носителем в $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}'$, а ψ^* создает единицу заряда, то свойство

$$\psi^* (f) A = A \psi^* (f) \tag{20}$$

означает, что векторные состояния, на которые действует A слева от равенства, имеют на единицу меньше заряда, чем состояния, на которые действует A справа от равенства.

Если допустить, что (20) верно и для унитарных образующих поля, то его можно записать как

$$\psi^* (f) \pi_q (A) = \pi_{q+1} (A) \psi^* (f), \tag{21}$$

где ψ^* — уже унитарно. Запись указывает явно на приводимость A секторами с «зарядами» q и $q+1$ соответственно. Видно, что поле ψ^* играет роль сплетающего оператора V_q, «переносящего» заряд между секторами. Напомним, что понятие поля возникло в физике как объект, несущий заряд и взаимодействие, в противоположность представлению о дальнодействии [137]. Идея о введении поля подобным способом была впервые высказана в работе [94]. Таким образом, открывается путь для решения обратной задачи: восстановить поле по наблюдаемым.

Более точно, если дана алгебра наблюдаемых $\mathfrak{A}$, то множество Пуанкаре-ковариантных секторов, полученных из ее вакуумного представления действием локализованных автоморфизмов, имеет структуру абелевой группы $\hat{G}$ зарядов, находящейся во взаимно-однозначном соответствии с автоморфизмами из Γ_0/J. Эти секторы сильно локально эквивалентны вакуумному сектору. Ставится задача построить поле, несущее заряды из $\hat{G}$. Описанный выше результат [равенства (19) и (21)] наводит на мысль, что автоморфизмы из Γ_0/J должны задаваться унитарными операторами V_q, принадлежащими полевой алгебре.

Автоморфизмы ** σ_U из $J (\mathfrak{O})$, определяемые унитарными операторами U из $\mathcal{A} (\mathfrak{O})$, не выводят за пределы данного сектора (представления), и два автоморфизма σ_1 и σ_2 такие, что $\sigma_2 = \sigma_U \sigma_1$ приводят к одному и тому же сектору. Поэтому не все σ из $\Gamma_0 (\mathfrak{O})$

* Например, в аксиоматике Вайтмана.

** Обозначим $\mathcal{A} (\mathfrak{O})$ (соответственно $\mathcal{A}$) множество всех унитарных операторов U из $\mathfrak{A} (\mathfrak{O})$ (соответственно $\mathfrak{A}$), а J — соответствующие внутренние для $\mathfrak{A}$ автоморфизмы (см. разд. 3).

задаются внутренними автоморфизмами *, а те $\sigma \in \Gamma_0(\mathfrak{O})$, которые переводят в другой сектор, — обязательно не внутренние (их множество Γ_0/J получается факторизацией по внутренним автоморфизмам J). Согласно изложенной выше идее автоморфизмы из Γ_0 должны задаваться унитарными операторами $\{\psi\}$ из полевой алгебры в некотором $\mathfrak{A}$-представлении, содержащем каждый сектор из Γ_0/J точно один раз. В работах [20, 127, 138] показано, что множество $\{\psi\}$ можно искать в виде группы (полевая группа $\mathcal{F}^u$), определяемой следующими свойствами:

1) $\mathcal{A}$ — инвариантная подгруппа для $\mathcal{F}^u$;

2) гомоморфизм $\sigma : \mathcal{A} \ni U \to \sigma_U \in J$ расширяется до гомоморфизма $\sigma : \mathcal{F}^u \ni \psi \to \sigma_\psi \in \Gamma_0$, удовлетворяющего:

$$\text{а) } \sigma_\psi(U) = \psi U \psi^{-1}, \quad \psi \in \mathcal{F}^u, \quad U \in \mathcal{A},$$

$$\text{б) } \operatorname{Ker} \sigma|_{\mathcal{A}} = \{\exp(i\alpha)\} \equiv T$$

(α — действительное число). Тогда можно написать следующую диаграмму (стрелки обозначают гомоморфизмы групп):

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & J \arrow[d] \\
T \arrow[r] & \mathcal{F}^u \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \Gamma_0, \arrow[d] \\
 & \hat{G} & \hat{G}
\end{tikzcd}$$

где в каждой строке и в каждом столбце диаграммы конечная (по направлению стрелок) группа является фактором от средней группы по модулю начальной группы. (Если рассмотреть каждую строку или столбец в отдельности, то средняя группа — расширение начальной по последней.)

Таким образом, задача о нахождении $\mathcal{F}^u$ сводится к стандартной задаче теории когомологии о расширении группы $\mathcal{A}$ по группе $\hat{G}$. Это позволяет искать вначале $\mathcal{F}^u$ в абстрактном виде и классифицировать всевозможные решения (с точностью до эквивалентности), а потом описать конкретное ее ковариантное представление (поле) $\mathcal{F}$ операторами в гильбертовом пространстве. (Две полевые группы $\mathcal{F}_1^u$ и $\mathcal{F}_2^u$ считаются эквивалентными, если они изоморфны, и этот изоморфизм оставляет $\mathcal{A}$ инвариантной в каждой точке.)

Определим локальные подгруппы $\mathcal{F}^u(\mathfrak{O})$ группы $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}^u(\mathfrak{O}) \equiv \{\psi \in \mathcal{F}^u : \sigma_\psi \in \Gamma(\mathfrak{O})\}.$$

* Соответствующий унитарный оператор является наблюдаемым.

Далее определим понятия Бозе- и Ферми-полей. Если $\sigma_2 = \sigma_U \sigma_1$ (σ_1, σ_2 определяют один и тот же сектор с зарядом ξ из группы $\hat{G}$) и их носители пространственно-подобны, тогда * [50] $\sigma_1(U) = \varepsilon_\xi(U)$, где $\varepsilon_\xi = \pm 1$ и ε_ξ зависит только от сектора ξ. Легко видеть, что $\varepsilon_{\xi 1}\varepsilon_{\xi 2} = \varepsilon_{\xi 1 \xi 2}$, т. е. что ε задает гомоморфизм Γ_0/J в группу $\{\pm 1\}$, состоящую из двух элементов. Классы автоморфизмов, являющиеся прообразами $+1$ и -1 при отображении ε, образуют соответственно классы Бозе ($\hat{G}_B$)- и Ферми ($\hat{G}_F$)-секторов. По определению считаем, что ψ из $\mathcal{F}^u$ есть Бозе- или Ферми-поле, если соответствующий автоморфизм σ_ψ — Бозе- или Ферми-автоморфизм. Нетрудно показать [127], что для $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}^u$, если $\sigma_{\psi 1}$ и $\sigma_{\psi 2}$ локализованы пространственно-подобно и приводят к одному и тому же сектору («несут одинаковый заряд»), тогда между ними возможны только коммутационные или антикоммутационные соотношения $\psi_1\psi_2 = \pm\psi_2\psi_1$. Видно, что абстрактная структура $\mathcal{F}^u$ уже несет в себе свойство коммутации полей. (В общем случае, если σ_{ψ_1} и σ_{ψ_2} ведут к секторам ξ_1 и ξ_2 соответственно, коммутатор $\psi\psi_2\psi_1^{-1}\psi_2^{-2} = \varepsilon(\xi_1, \xi_2)$ оказывается равным по модулю единице и зависит только от ξ_1 и ξ_2.)

Подобно квантовой теории поля [2] и здесь в силу неоднозначности решения для $\mathcal{F}^u$ могут появиться аномальные перестановочные соотношения между разными пространственно разделенными полями, которые можно сделать нормальными при помощи некоторого обобщения преобразования Клейна [127]. Если коммутаторы нормальны, т. е. $\varepsilon(\xi_1, \xi_2) = +1$ для $\xi_1, \xi_2 \in \hat{G}_B$, $\varepsilon(\xi_1, \xi_2) = -1$ для $\xi_1, \xi_2 \in \hat{G}_F$, то $\mathcal{F}^u$ называется нормальной.

После определения $\mathcal{F}^u$ и ее свойства сформулируем основной результат [20, 127]. Любой алгебре наблюдаемых, удовлетворяющей свойству дуальности в вакуумном секторе, всегда соответствует множество $\{\mathcal{F}^u\}$ полевых групп, среди которых всегда существует единственная (с точностью до эквивалентности) нормальная полевая группа. Эквивалентность двух групп $\mathcal{F}_1^u$ и $\mathcal{F}_2^u$ равносильна совпадению функции $\varepsilon(\xi_1, \xi_2)$ на $\hat{G} \times \hat{G}$. Далее существует такое точное представление группы $\mathcal{F}^u$ унитарными операторами V в пространстве H, при котором (π, V) — ковариантное представление $(\mathfrak{A}, \sigma_\psi)$, задающее автоморфизмы σ_ψ в π-представлении, и совпадает с π, если сузить его на $\mathcal{A}$: $V\,|_{\mathcal{A}} = \pi\,|_{\mathcal{A}}$.

Наконец, можно определить полевые локальные алгебры как W^*-алгебры, порожденные ковариантными представлениями $V(\mathcal{F}^u(\mathfrak{O}))$ локальных полевых групп $\mathcal{F}^u(\mathfrak{O})$, и соответственно поле $\mathcal{F} = \overline{U\mathcal{F}(\mathfrak{O})}$. Тогда $\mathcal{F}$ удовлетворяет аксиомам поля 1—5;

* Следующий результат есть частный случай более общего факта, рассмотренного выше в работе [42]. Классификация Бозе- и Ферми-секторов — частный случай парастатистики.

представление $\mathscr{F}$ алгебры поля неприводимо и в этом представлении содержатся все секторы π_ξ, а значит, и все физически интересные состояния над $\mathfrak{A}$.

Сделаем замечания относительно аксиомы 5 и свойства дуальности. Если в множестве алгебр $\mathscr{F}(\mathfrak{O})$ определить t-операцию, удовлетворяющую $m(\mathscr{F}(\mathfrak{O})^t) = m(\mathscr{F}(\mathfrak{O}))$ и $m(\mathscr{F}(\mathfrak{O})^{t\prime}) = m(\mathscr{F}(\mathfrak{O})')$, т. е. отображение, сохраняющее средние от локальных алгебр и от их коммутантов, то можно многим понятиям, таким как коммутант, локальность, дуальность, сопоставить соответствующие t-понятия. Например, для t-дуальности $\mathscr{F}(\mathfrak{O}')^- = \mathscr{F}(\mathfrak{O})^{t\prime}$. Из свойств среднего m, легко видеть [50], что t-дуальность приводит к аксиоме 5. В частности, восстановленное через алгебру поле $\mathscr{F}$ имеет свойство t-дуальности [127].

Следующее замечание выявляет роль абелевых секторов: если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию слабой дуальности * для $\mathfrak{O}$, тогда для неабелевых секторов дуальность для $\mathfrak{O}$ не выполняется.

В работе [102] обсуждается задача о восстановлении алгебры поля по наблюдаемым в случае секторов, задаваемых произвольными морфизмами. Роль полевой группы выполняет некоторое множество, содержащее частично изометрические операторы, как сплетающие между секторами. Коммутационные соотношения полей в этом случае для пространственно разделенных областей «согласуются» с пара-статистикой соответствующего сектора. В работах [133, 139] рассмотрена модель алгебраической теории, отвечающая свободному скалярному бозонному полю с нулевой массой в двумерном пространстве — времени. При помощи локализованных морфизмов строятся алгебра наблюдаемых, секторы и соответствующие им поля. Модель, однако, не удовлетворяет всем постулатам теории локальных наблюдаемых, и появляются некоторые необычные свойства.

В работах конструктивного направления квантовой теории поля [140] по гамильтониану взаимодействия в двумерном пространстве — времени строится нетривиальная модель, удовлетворяющая аксиомам Хаага — Кастлера.

7. О ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Построение состояний рассеяния в теории локальных наблюдаемых можно провести [65, 97, 135] в близкой аналогии с квантовой теорией поля [1, 141]. При этом наряду с известными основными результатами можно получить еще и другие, связанные с дополнительными особенностями рассматриваемой теории. Например, доказывается, что статистика рассеянных частиц совпадает

* $[\mathfrak{A}^c(\mathfrak{O})]^- = \mathfrak{A}(\mathfrak{O})' \cap \mathfrak{A}^-$, где $\mathfrak{A}^c(\mathfrak{O}) \equiv \mathfrak{A}(\mathfrak{O})' \cap \mathfrak{A}$. Если выполняется свойство дуальности, тогда имеет место и слабая дуальность [50].

со статистикой соответствующего когерентного сектора, определенной как его внутренняя характеристика, выводимая из свойств наблюдаемой алгебры сектора. Далее появляются особенности в метрике пространства асимптотических состояний из-за включения в схему рассеяния наряду с Бозе- и Ферми-частицами еще и произвольных пара-частиц с конечной статистикой $d(\rho) < \infty$. Необходимо отметить и новые компактные выражения для вероятностей перехода и амплитуд.

Как обычно, первый шаг — построение «почти локальных» операторов *

$$B = \int \alpha_x(B')\, g(x)\, d^4x = \int U_\rho(x)\, B' U_0(x)^{-1}\, g(x)\, dx^4 \tag{22}$$

для каждого вида частиц, приобретающих значения операторов «рождения» одночастичных состояний с зарядом ξ и массой m. Здесь $B' \in \mathfrak{A}$, $\rho \in \Delta_r$ — морфизм класса ξ; $U_\rho(x)$ — представление трансляции в ρ; $g(x)$ — абсолютно интегрируемая функция, и носитель ее Фурье-образа пересекает спектр $S(\rho)$ оператора энергии импульса в ρ-представлении только по массовому гиперболоиду частицы с массой m. Предполагается, что сектор ξ содержит одночастичные состояния с массой m. Далее, как и в теории поля [67], при помощи соответствующих решений $f_i(x)$ уравнения Клейна — Гордона определяются зависящие от времени t операторы

$$B_i(t) = \int\limits_{x_0=t} f_i(x)\, \overleftrightarrow{\partial_0} U_\rho(x)\, B' U_0(x)^{-1}\, d^4x \tag{23}$$

и (как оказывается) не зависящие от времени векторы

$$\Psi_i = B_i(t)\, \Omega \tag{24}$$

(Ψ_i) описывают множество $\mathscr{L}_\rho$ одночастичных состояний всюду плотное в $\mathscr{H}_\rho^m$).

Выше дано выражение $(\Omega, \rho_1 \ldots \rho_n(A)\, \Omega)$ для состояния $\omega_{\rho_1} x \ldots x \omega_{\rho_n} n$ одинаковых частиц, отвечающих морфизмам ρ_i класса ξ. Это состояние можно описать еще вектором $\Psi_1 \times \Psi_2 \times \ldots \ldots \times \Psi_n = \rho^{n-1}(U_n^*) \ldots U_1^* \Omega$ в представлении ρ^n, где U_i — сплетающие унитарные операторы между морфизмами. Если вместо изометрических операторов U_i взять произвольные $B_i \in \in \rho(\mathfrak{A})$ и вектор $\Psi_i = B_i \Omega$, то вектор * $\Psi_1 \times \ldots \times \Psi_n$, отвечающий n частицам (с разными зарядами и массами), будет $\Psi_1 \times \ldots \ldots \times \Psi_n = \rho^{n-1}(B_n) \ldots B_1 \Omega$. Заменяя B_i операторами $B_i(t)$, зависящими от времени, получаем

$$\psi_1 \times \ldots \times \psi_n = \rho^{n-1}(B_n(t)) \ldots \rho(B_2(t))\, B_1(t)\, \Omega. \tag{25}$$

* Они будут квазилокальными «бесконечного порядка» [97].
* Это состояние не будет строго локализованным.

Произведение в (25) отвечает зависящему от времени произведению полевых операторов в теории поля [1, 67], которое можно в пределе бесконечно больших t интерпретировать как состояние асимптотических частиц.

Здесь уместно прервать изложение теории рассеяния с тем, чтобы ввести понятие «полевого расслоения» [65], при помощи которого можно придать соотношению (25) и некоторым другим формулам такой вид, в каком они встречаются в теории поля. Так, можно обойтись в явной записи без некоторых алгебраических усложнений, возникающих как следствие суперотборной структуры. Получающееся сходство с теорией поля полезно всегда в тех случаях, когда переносятся некоторые хорошо известные рассуждения из этой теории в схему алгебраической теории. Напомним, что все секторы отвечают ρ_i-представлениям в одном и том же гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_0$-представления вакуумного сектора ρ_0. Если бы каждому ρ_i отвечало свое пространство $\mathscr{H}_i$-представления, то можно было бы задать физические состояния в секторе ρ_i однозначно векторами $\Psi \in \mathscr{H}_i$. В случае совпадения $\mathscr{H}_i \equiv \mathscr{H}_0$ для описания состояний (как в теории поля) векторами нужно расслоить $\mathscr{H}_0$ по различным ρ, т. е. указать кроме вектора Ψ в $\mathscr{H}_0$ то неприводимое представление, (сектор ρ_i) над которым задано состояние.

Итак, состояние описывается векторным расслоением (парой) $\{\rho, \Psi\} = \widetilde{\Psi}$, первый элемент которой есть (приводимый) морфизм ρ, а второй элемент — вектор из $\mathscr{H}_0$. Соответственно оператор $\widetilde{B}_1 \in \mathscr{B}$ определяется как пара $\{\rho_1, B_1\}$ ($\rho_1 \in \Delta_r$, $B_1 \in \mathfrak{A}$), действующая на ψ по формуле:

$$\widetilde{B}_1\psi = \{\rho\rho_1, \rho(B_1)\psi\}.$$

Применяя далее оператор $\widetilde{B} = \{\rho, B\}$, получаем определение (ассоциативного) произведения $(\widetilde{B}\cdot\widetilde{B}_1) = \{\rho_1, \rho, \rho_1(B) B_1\}$. Для n-мерного произведения $\widetilde{B}_n \ldots \widetilde{B}_1$ операторный член этой пары имеет вид $\rho^{n-1}(B_n) \ldots B_1$, т. е. совпадает (с точностью до несущественных обозначений) с операторным множителем в (25). Тогда формулу (25) можно записать в полной формальной аналогии с соответствующей формулой теории поля [1]:

$$\overset{(t)}{\Psi_1 x} \ldots \overset{(t)}{x \Psi_n} = (\widetilde{B}_n(t) \ldots \widetilde{B}_1(t))\,\Omega, \tag{26}$$

где $\widetilde{\Omega} = \{\rho_0, \Omega\}$ — вакуумный «обобщенный» вектор.

Формулы (22)—(24) тоже можно записать на языке обобщенных векторов и операторов, заменяя соответствующие символы B, ψ, Ω на обобщенные $\widetilde{B}$, ψ, $\widetilde{\Omega}$ [65]. При этом действие элементов L

накрывающей группы Пуанкаре на $\widetilde{\psi}$ и $\widetilde{B}$ определяется как

$$U(L)\psi = \{\rho,\ U_\rho(L)\psi\},\quad \alpha_L\widetilde{B} = \{\rho,\ U_\rho(L)BU_0(L)^{-1}\}.$$

Объекты $\widetilde{B}$ образуют алгебру, в которой можно подобно полевой алгебре определить локальные подалгебры, операцию сопряжения и действие сплетающих операторов $\widetilde{T} = (\rho' \mid T \mid \rho)$ на $\widetilde{B}$: $\widetilde{T}_0\widetilde{B} \equiv \{\rho',\ TB\}$. В частности, если сплетающий оператор есть $\widetilde{\varepsilon}(\rho_1, \rho_2)$, где ρ_1, ρ_2 локализованы в пространственно-подобных $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ соответственно, и

$$\widetilde{B}_i = \{\rho_i,\ B_i\},\quad i = 1, 2,\ \text{то}$$

$$(\widetilde{B}_1\widetilde{B}_2) = \widetilde{\varepsilon}(\rho_1, \rho_2)(\widetilde{B}_2\widetilde{B}), \tag{27}$$

т. е. получаем аналог аксиомы локальной коммутативности. Далее можно ввести и понятие сходимости в $\mathscr{B}$, понимая под этим сходимость в отдельных слоях. В каждом слое вводится скалярное произведение $(\widetilde{\psi}, \widetilde{\Phi}) \equiv (\psi, \Phi)$.

Используя введенные обозначения и свойства решений уравнения Клейна — Гордона для больших $|t|$, можно исследовать асимптотику выражений (25) и (26). Ограничиваясь такими конфигурациями частиц, для которых носители функций f_i в (23) при разных i не перекрываются в пространстве скоростей, и применяя коммутационные соотношения типа (27) для произведения операторов в (26), можно доказать, что существуют сильные пределы при $t \to \pm\infty$, которые зависят только от одночастичных состояний * $\widetilde{B}_i(t)\widetilde{\Omega}$ и не зависят от лоренцовой системы отсчета:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{t\to-\infty} \widetilde{B}_n(t) \ldots \widetilde{B}_1(t)\Omega = \widetilde{\psi}_n^{\text{in}} \times \ldots \times \widetilde{\psi}_1^{\text{in}} \equiv \prod_i \psi_i^{\text{in}};\\ &\lim_{t\to+\infty} \widetilde{B}_n(t) \ldots B_1(t)\Omega = \widetilde{\psi}_n^{\text{out}} \times \ldots \times \widetilde{\psi}_1^{\text{ont}} \equiv \prod_i \psi_i^{\text{out}}.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Асимптотические состояния $\prod_i \psi_i^{\text{ex}}$ под действием элемента L-группы Пуанкаре преобразуются как произведения соответствующих представлений, что и следовало ожидать для свободных частиц:

$$U(L)\prod_i \widetilde{\psi}_i^{\text{ex}} = \prod_i U(L)\widetilde{\psi}_i^{\text{ex}}. \tag{29}$$

Далее эти состояния рассеяния $\prod_i \widetilde{\psi}_i^{\text{ex}}$ имеют тот же самый закон преобразования при перестановках векторов состояний, как и сам сектор (статистика асимптотических состояний совпадает со ста-

* Эти состояния необязательно относятся к частицам с одинаковым зарядом и массой.

тистикой сектора):

$$\varepsilon_p(\rho_1, \ldots, \rho_n) \prod_i \psi_i^{\mathrm{ex}} = \prod_i \psi_{p(i)}^{\mathrm{ex}}. \tag{30}$$

Необходимо распространить эти результаты на произвольные конфигурации частиц, а также исследовать метрику в пространстве асимптотических состояний. Для этого удобно [65] ввести некоторое гильбертово пространство $K_{i\lambda_i}^{\otimes n_i}$ как подпространство полного тензорного произведения $K_i^{\otimes n}$ из n-экземпляров пространства K_i для частиц типа* i. Гильбертово пространство $K_{i\lambda_i}^{\otimes n_i}$ зависит от статистического параметра λ_i сектора ρ_i и растягивается теми произведениями векторов из $K_i^{\otimes n}$, которые симметричны (антисимметричны) только по некоторым множителям. В случае $\lambda = \pm 1$ (Бозе- или Ферми-случай) $K_{i\lambda_i}^{\otimes n_i}$ полностью симметрично (антисимметрично). Далее в $K_{i\lambda_i}^{\otimes n_i}$ вводится скалярное произведение и определяется действие операторов $U_{\lambda_i}^{n_i}$-представления группы Пуанкаре и операторов $\varepsilon_{\lambda_i}^{n_i}(p)$ перестановки частиц. После этого доказывается, что пространство асимптотических состояний для произвольных конфигураций $n_1, n_2, \ldots,$ входящих (рассеянных) частиц типа $1, 2, \ldots$ будет изоморфно $K_{1\lambda_1}^{\otimes n_1} \otimes \otimes K_{2\lambda_2}^{\otimes n_2} \otimes \ldots$ При доказательстве этого факта используется свойство типа асимптотической факторизации (разложения на пучки) для вакуумных средних** от произведений операторов $\widetilde{B}_i$. Так как скалярное произведение (вероятность) в тензорном произведении задается как произведения таких же величин для отдельных компонент, то структура асимптотического пространства выражает независимость вероятностей для невзаимодействующих частиц.

Таким образом, указанный выше изоморфизм позволяет уже по непрерывности продолжить свойства, выражаемые равенствами (28)—(30) на произвольные конфигурации частиц, определяемые произвольными наборами векторов из $\mathscr{H}_{\rho_i}^{m_i}$, что следует из плотности $\mathscr{L}_\rho^m$ в $\mathscr{H}_\rho^m$***. Так получается гильбертово простран-

* См. обозначения, приведенные выше. Под типом частиц понимаются обобщенные векторы состояний из $\mathscr{H}_\rho^m$, отвечающие различным неприводимым представлениям $U^{(m, s_i)}$.

** Подобные свойства, но для усеченных вакуумных средних, используются и в соответствующем доказательстве теории поля.

*** Это также следует из самой конструкции пространства $K_{i\lambda_i}^{\otimes n_i}$ и действия операторов $U_{\lambda_i}^{n_i}$ и $\varepsilon_{\lambda_i}^{n_i}$ в нем.

ство асимптотических состояний, учитывающее еще и статистические свойства сектора, а также трансформационные свойства относительно группы Пуанкаре.

Для некоторой совокупности α одночастичных состояний обозначим соответствующий асимптотический вектор-произведение $\{\rho_\alpha, \psi_\alpha^{ex}\} \equiv \widetilde{\psi}_\alpha^{ex}$, а соответствующее состояние над алгеброй ω_α^{ex} (ex употребляется вместо in или out). Так как ρ_α приводимо, векторное состояние ω_α^{ex} будет конечной * смесью векторных состояний с разными зарядами ξ, отвечающими неприводимым секторам ξ:

$$\omega_\alpha^{ex} = \sum_\xi \sum_{i=1}^{l_\xi} (\psi_i^\xi, \rho_\xi \psi_i^\xi), \tag{31}$$

где ψ_i^ξ векторы в ξ-й компоненте соответствующего представления $\pi(\mathfrak{A}) = \bigoplus_\xi \rho_\xi(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ в пространстве $\mathscr{H}_\pi$. Они определяются равенством $\psi_i^\xi = T_i^{\xi *} \psi_\alpha^{ex}$, где $\widetilde{T}_i^\xi = (\rho_\alpha \mid T_i^\xi \mid \rho_\xi)$ — сплетающие операторы в разложении ρ_α на неприводимые компоненты, $i = 1, \ldots, l_\xi$. Обозначим $P_\alpha^{ex}(\xi)$ проектор на L-мерное пространство векторов ψ_i^ξ. Если одночастичные состояния в конфигурации α взаимно ортогональны, то можно доказать [65], что ω_α^{ex} задается следующей матрицей плотности W_α^{ex}:

$$W_\alpha^{ex} = \sum_\xi d(\xi)\, d\rho(\alpha)^{-1} P_\alpha^{ex}(\xi), \tag{32}$$

где множитель $d(\xi)\, d\rho(\alpha)^{-1}$ отвечает «весу» ξ-й компоненты в смеси. Тогда $E_\alpha^{ex} = \sum_\xi P_\alpha^{ex}(\xi)$ проектирует на подпространство, натянутое на все векторы состояния, которые отвечают асимптотической конфигурации α-частиц.

Согласно основным определениям квантовой теории на языке функционалов, вероятность перехода из начального состояния α в конечную конфигурацию [65] β задается выражением

$$w_{\alpha\beta} = \omega_\alpha^{in}(E_\beta^{out}). \tag{33}$$

Отметим, что проектор E_β^{out} можно интерпретировать, как отвечающий экспериментальной установке для обнаружения конечной конфигурации β. В работе [65] показано, что $E_\beta^{out} \in \pi(\mathfrak{A})''$.

Используя (32) и (33), легко получить [65] $w_{\alpha\beta}$ в виде линейной комбинации с коэффициентами, зависящими от статистических

---

* Это следует [65] из разложения произвольного ковариантного ρ_α с $d(\rho) < \infty$ в конечную прямую сумму неприводимых компонент ρ_ξ класса ξ. При этом, если $d(\xi) \neq 1$ (пара-статистика), ρ_ξ встречается в разложении с кратностью $L > 1$.

размерностей $d(\rho_i)$ представлений ρ_i, из квадратов модулей амплитуд перехода между неприводимыми компонентами ψ_β^{out} и ψ_α^{in}. В случае только чистых асимптотических состояний * амплитуда перехода A пропорциональна $(\psi_\beta^{\text{out}}, T\psi_\alpha^{\text{in}})$, где T — изометрический сплетающий оператор для представлений отвечающих ψ_β^{out} и ψ_α^{in}. Таким образом, амплитуды перехода играют роль S-матричных элементов.

В более старом варианте [97] теория рассеяния в терминах локальных наблюдаемых теряла ту простоту и изящество, присущее соответствующему изложению теории поля. В работе [97] показано, что все величины в теории рассеяния можно описать только в терминах алгебры наблюдаемых без введения полей. При этом использовались локальные наблюдаемые C как математический эквивалент понятия счетчика. Но соответствующие формулы, если не прибегать к ненаблюдаемым величинам, получаются громоздкими и практически неудобными.

Построение асимптотических состояний и матрицы рассеяния S по образцу теории поля дано и в работе [142] вместе с доказательством СРТ-инвариантности S-матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Йост Р.** Общая теория квантованных полей. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
2. **Стритер Р., Вайтман А.** РСТ, спин, статистика и все такое. Пер. с англ. М., «Наука», 1966.
3. **Segal I.** Ann. Math., 1947, v. 48, p. 73.
4. **Сигал М.** Математические проблемы релятивистской физики. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
5. **Haag R.** Colloque Internationale sur les Problemes Mathematiques de la Theorie Quantique des Champs. Lille, 1957.
6. **Рюель Д.** Статистическая механика. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.
7. **Тезисы** доклада международной конференции по математическим проблемам квантовой теории поля и статистике. М., 1972. Препринт Д-6823.
8. **Haag R.** Brand. Lect., 1970.
9. **Haag R., Kastler D.** J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 848.
10. **Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.** Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., «Наука», 1969.
11. **Наймарк М.** Нормированные кольца. М., «Наука», 1968.
12. **Dixmier J.** Les C*-algebres et leurs representations. Paris, 1964.
13. **Rickart C.** General Theory of Banach Algebras. Van Nostrand, 1960.
14. **Emch G.** Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. John Wiley, 1972.
15. **Reed M.** Introductory Lectures on Banach Algebras. Princeton Univ., 1969.
16. **Кириллов А.** Элементы теории представлений. М., «Наука», 1972.
17. **Wightmann A.** Ann. Inst. H. Poincare, 1964, v. 1, p. 403.
18. **Хоружий С.** ТМФ, 1969, т. 1, № 1.

* Общий случай приводится в работе [65].

19. **Woronowicz S.** Comm. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 142.
20. **Doplicher S.** Cargese Lectures in Physics. 1970.
21. **Ахиезер Н., Глазман.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966.
22. **Doplicher S.** Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 3.
23. **Kraus K.** Comm. Math. Phys., 1970, v. 16, p. 138.
24. **Doplicher S., Regge T., Singer E.** Comm. Math. Phys., 1968, v. 7, p. 51.
25. **Araki H.** Lectures, ETH, Zürich, 1961.
26. **Haag R., Kadison R., Kastler D.** Comm. Math. Phys., 1970, v. 16, p. 81.
27. **Сушко В., Хоружий С.** ТМФ, 1970, т. 4, с. 171.
28. **Сушко В., Хоружий С.** ТМФ, 1970, т. 4, с. 341.
29. **Сушко В., Хоружий С.** ТМФ, 1971, т. 8, с. 342.
30. **Сушко В., Хоружий С.** Препринт ОИЯИ Е2-5575, 1971.
31. **Сушко В., Хоружий С.** ТМФ, 1972, т. 13, с. 291.
32. **Pawlik B., Sadowski P.** Rep. Math. Phys., 1972, v. 4, N 3.
33. **Kraus K.** Z. Phys., 1964, Bd 1, S. 181.
34. **Haag R., Schroer B.** J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 248.
35. **Sadowski P., Woronowicz S.** Rep. Math. Phys., 1971, v. 2, N 2.
36. **Araki H.** Helv. Phys. A, 1963, v. 36, p. 132.
37. **Kadison R.** Ann. Math., 1956, v. 60, p. 304.
38. **Robinson D.** Brandies Lectures, 1965.
39. **Neumann J.** Comp. Math., 1938, v. 6, p. 1.
40. **Segal I.** Trans. Amer. Math. Soc., 1958, v. 88, p. 12.
41. **Borchers H., Haag R., Schroer B.** Nuovo cimento, 1963, v. 29, p. 148.
42. **Doplicher S., Haag R., Roberts J.** Comm. Math. Phys., 1971, v. 23, p. 199.
43. **Васильев А.** ТМФ, 1970, т. 2, № 2.
44. **Uhlmann A., Wiss Z.** Karl-Marx-Univ., 1962, v. 11, p. 213.
45. **Borchers H., Zimmermann W.** Nuovo cimento, 1964, v. 31, p. 1047.
46. **Гачок В.** Nuovo cimento, 1966, v. 45, p. 158.
47. **Гачок В.** Препринт ИТФ-66-5. Киев, 1966.
48. **Березанский Ю.** УМЖ, 1966, т. 18, № 3.
49. **Нельсон Е.** В сб.: «Математика», 1962.
50. **Doplicher S., Haag R., Roberts J.** Comm. Math. Phys., 1969, v. 13, p. 1.
51. **Хоружий С.** ТМФ, 1970, т. 5, с. 29.
52. **Reeh H., Schlieder S.** Nuovo cimento, 1966, v. 2, p. 49.
53. **Borchers H.** Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 57.
54. **Uhlmann A.** Preprint N 3/71. Wroclav, 1964.
55. **Jadczyk A.** Comm. Math. Phys., 1969, v. 12, p. 58.
56. **Borchers H.** Comm. Math. Phys., 1968, v. 10, p. 269.
57. **Borchers H.** Cargese Lectures in Physics, 1970.
58. **Doplicher S., Kastler D., Robinson D.** Comm. Math. Phys., 1966, v. 3, p. 1.
59. **Булинский А.** ТМФ, 1971, т. 81, с. 328.
60. **Булинский А.** ТМФ, 1973, т. 19, № 1.
61. **Булинский А.** ТМФ, 1973, т. 19, № 2.
62. **Doplicher S. e.a.** Comm. Math. Phys., 1967, v. 6, p. 101.
63. **Störmer S.** Comm. Math. Phys., 1967, v. 5, p. 1.
64. **Ruelle D.** Comm. Math. Phys., 1966, v. 3, p. 133.
65. **Doplicher S., Haag R., Roberts J.** Comm. Math. Phys., 1974, v. 35, p. 49.
66. **Miyata H.** Comm. Math. Phys., 1973, v. 34, p. 1.
67. **Вайтман А.** Проблемы в релятивистской динамике квантовых полей. М., «Наука», 1968.
68. **Knight J.** J. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 459.
69. **Licht A.** J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1443.
70. **Haag R., Swieca J.** Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 308.
71. **Schlieder S.** Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 265.
72. **Licht A.** J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 1656.

73. **Araki H.** Progr. Theor. Phys., 1964, v. 32, p. 956.
74. **Landau L.** Comm. Math. Phys., 1969, v. 13, p. 245.
75. **Araki H.** J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1343.
76. **Araki H.** J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 1.
77. **Kastler D.** Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 14.
78. **Kadison R.** J. Math. Phys., 1963, v. 4, p. 1511.
79. **Dell'Antonio G.** Comm. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 81.
80. **Guenin M., Misra B.** Nuovo cimento, 1963, v. 30, p. 1272.
81. **Сушко В., Хоружий С.** ТМФ, 1973, т. 15, № 2.
82. **Schoch A.** Intern. J. Theor. Phys., 1968, v. 1, p. 107.
83. **Osterwalder K.** Comm. Math. Phys., 1973, v. 29, p. 1.
84. **Guenin M., Misra B.** Helv. Phys. A, 1964, v. 37, p. 267.
85. **Ross H.** Comm. Math. Phys., 1970, v. 16, p. 238.
86. **Napiorkowsky K.** Rep. Math. Phys., 1972, v. 3, p. 33.
87. **Kruszynsky P., Napiorkowsky K.** Rep. Math. Phys., 1973, v. 4, N 4.
88. **Schlieder S.** Comm. Math. Phys., 1969, v. 13, p. 216.
89. **Харатян С.** «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, с. 564.
90. **Borchers H.** Comm. Math. Phys., 1967, v. 4, p. 315.
91. **Misra B.** Helv. Phys., A., 1965, v. 38, p. 189.
92. **Kadison R.** Comm. Math. Phys., 1967, v. 4, p. 258.
93. **Borchers H.** Comm. Math. Phys., 1966, v. 2, p. 49.
94. **Borchers H.** Comm. Math. Phys., 1965, v. 1, p. 281.
95. **Steinmann O.** Comm. Math. Phys., 1968, v. 7, p. 112.
96. **Haag R.** In: Mathematics of Contemporary Physics. Ed. R. Streater. Academic Press, 1972.
97. **Araki H., Haag R.** Comm. Math. Phys., 1967, v. 4, p. 77.
98. **Streater R.** J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 581.
99. **Wick C. e.a.** Phys. Rev., 1952, v. 88, p. 101.
100. **Jauch J.** Helv. Phys. A., 1960, v. 33, p. 711.
101. **Jauch J., Misra B.** Helv. Phys. A., 1961, v. 34, p. 699.
102. **Doplicher S., Roberts J.** Comm. Math. Phys., 1972, v. 28, p. 331.
103. **Нейман Дж.** Математические основы квантовой механики. Пер. с англ. М., «Наука», 1964.
104. **Maurin K.** Studia Math., 1956; **Todorov T.** Bull. Inst. Phys. Bulg., 1972, v. 22, p. 119.
105. **Dixmier J.** Les algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien. Paris, 1954.
106. **Bargmann V.** Ann. Math., 1954, v. 59, p. 1.
107. **Guenin M., Emch G.** J. Math. Phys., 1966, v. 7, p. 915.
108. **Kharatian S., Oksak A.** Preprint JINR E-2-3799, 1968.
109. **Харатян С.** «Ядерная физика», 1969, т. 9, с. 1305.
110. **Харатян С.** ТМФ, 1973, т. 14, с. 306.
111. **Hegerfeldt G., Kraus K., Wigner E.** J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 2029.
112. **Fell J.** Trans. Amer. Math. Soc., 1969, v. 94, p. 365.
113. **Roberts J., Roepstorf G.** Comm. Math. Phys., 1969, v. 11, p. 321.
114. **Харатян С.** ТМФ, 1974, т. 20, № 2.
115. **Landau L., Wichmann E.** J. Math. Phys., 1970, v. 11, N 1.
116. **Landau L.** Comm. Math. Phys., 1970, v. 17, p. 156.
117. **Lopuszanski J.** Dubna JINR, E-24832 (1969).
118. **Guenin M., Velo G.** Nuovo cimento, 1967, v. 47, p. 36.
119. **Streater R.** Proc. Roy. Soc. A, 1965, v. 287, p. 510.
120. **Streater R.** Phys. Scripta, 1971, v. 3, p. 1.
121. **Fabri F., Picasso L.** Nuovo cimento, 1967, v, 48, p. 376.
122. **Kastler D., Robinsin D., Swieca A.** Comm. Math. Phys., 1966, v. 2, p. 108.
123. **Nicolova L.** Rep. Math. Phys., 1971, v. 1, N 4.
124. **Nicolova L.** Rep. Math. Phys., 1971, v. 2, N 2.
125. **Зиновьев Ю., Сушко В.** ТМФ, 1974, т. 18, № 1.

126. **Зиновьев Ю.** ТМФ, 1973, т. 16, с. 21.
127. **Doplicher S., Haag R., Roberts J.** Comm. Math. Phys., 1969, v. 15, p. 173.
128. **Желобенко Д.** Компактные группы Ли и их представления. М., «Наука», 1970.
129. **Borchers H.** Comm. Math. Phys., 1966, v. 2, p. 49.
130. **Streater R.** Comm. Math. Phys., 1967, v. 5, p. 88.
131. **Стоянов Д., Тодоров И.** J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 2146.
132. **Drühl K., Haag R., Roberts J.** Comm. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 204.
133. **Поливанов М., Сушко В., Хоружий С.** ТМФ, 1973, т. 16, № 1.
134. **Roberts J.** Cargese Lectures, 1970.
135. **Doplicher S.** Доклад на международной конференции по математическим проблемам теории поля и статистики. Москва, 1972.
136. **Streater R.** Lecture Notes, XII internationale Universitatswochen fur Kernphysik, Schladming, 1973.
137. **Haag R.** Ann. Phys., 1963, v. 11, p. 29.
138. **Doplicher S.** In Systemes a un nombre infini des degres de liberte. Paris, 1969.
139. **Streater R., Wilde I.** Nucl. Phys. B, 1970, v. 24, p. 501.
140. **Cannon J., Jaffe A.** Comm. Math. Phys., 1970, v. 17, p. 261.
141. **Haag R.** Phys. Rev., 1958, v. 112, p. 669; **Ruelle D.** Helv. Phys. A., 1962, v. 35, p. 147.
142. **Epstein H.** J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 750.