

УДК 539.14+539.142

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЯДРА

В. В. Ванагас

Институт физики и математики
АН Литовской ССР

Изложена микроскопическая теория, основанная на общих кинематических свойствах гамильтониана ядра и на специальном образом выбранных пространственных переменных, описывающих коллективные и внутренние степени свободы ядра.

The microscopical theory of nucleus, based on the general kinematical properties of the nuclear hamiltonian as well as on the special type of space variables, related to the collective and internal degrees of freedom of nuclei, is presented.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье будут осмыслены кинематические аспекты результатов работ [1—3], которые изложены в обзорной статье [4]. В этих работах введен микроскопический аналог коллективных переменных модели Бора — Моттельсона, что позволяет корректно сформулировать в координатном представлении задачу о выделении коллективных степеней свободы ядра. Здесь будут также описаны частично результаты, полученные в [5—8], где была предложена и детализирована теория микроскопического аналога коллективной модели Бора — Моттельсона, разработана ее расчетная техника и впервые дано кинематическое обоснование микроскопической теории ядра с помощью трех простых требований, два из которых очевидным образом вытекают из свойств гамильтониана ядра. В соответствии с этими результатами построен и план настоящего обзора: изложение материала начинается с наиболее общих формулировок и кончается постепенной их детализацией.

Излагаемый здесь микроскопический подход в теории ядра по существу опирается на теорию индуцированных представлений групп Ли, поэтому нам придется коснуться вопросов этой теории.

Чтобы чтение этой статьи не было затруднительным и для тех читателей, знакомство которых с основами теории групп ограничивается группой вращения и симметрической группой, по возможности будем избегать использования в явной форме алгебраического аппарата индуцированных представлений.

Попробуем коротко изложить предпосылки, которые позволяют ставить и решать вопросы, связанные с кинематическим обоснованием микроскопической теории ядра. Если считать протоны и нейтроны частицами одинакового вида, т. е. пользоваться понятием изоспина, то атомное ядро можно рассматривать как изолированную систему тождественных фермиевских частиц. Такая система обладает свойствами, выгодно отличающими ее от других существующих в природе смешанных квантовых систем, в составе которых фермионы сосуществуют с частицами другого вида. Примеры смешанных систем хорошо известны: это свободные атомы, молекулы или кристаллы. В смешанных системах наличие частиц нескольких видов обуславливает появление пространственной структуры, а, значит, особо выделенных точек трехмерного пространства. В атоме такой точкой является ядро, которое обеспечивает существование атома как стабильной квантовой системы и в большой степени определяет поведение электронов, привязывая их к естественному, созданному атомным ядром силовому центру. В свою очередь, силовой центр позволяет ввести электронные конфигурации, т. е. классифицировать состояния с помощью неприводимых представлений трехмерной группы вращений.

Еще более ярко выражена пространственная структура в молекулах и кристаллах. Она обуславливает появление пространственной симметрии, наличие которой следует считать экспериментальным фактом, который не удастся доказать, исходя из общего вида гамильтониана таких систем. Атомные ядра с инертными электронными оболочками, соответствующим образом расположенные в молекулах и кристаллах, создают внешние (в известном смысле) поля, в которых находятся электроны — фермиевская система тождественных частиц. Наличие пространственной структуры ведет к появлению пространственной симметрии, а следовательно, и соответствующих групп, неприводимые представления которых в нулевом приближении классифицируют состояния этой фермиевской системы.

В атомных ядрах отсутствуют выделенные силовые точки трехмерного пространства, и, несмотря на кажущуюся парадоксальность, это обстоятельство может послужить отправной точкой для выяснения кинематических вопросов структуры ядра. При описании связанных состояний такой фермиевской системы тождественных частиц с помощью нерелятивистской квантовой механики, в противоположность приведенным выше примерам, трехмерное

пространство уже не является а priori выделенным по сравнению с многомерным пространством, задаваемым числом пространственных степеней свободы ядра. Если исключить три несущественные степени свободы, связанные с движением центра масс ядра, то n -нуклонное ядро описывается $3(n - 1)$ пространственными степенями свободы. Поэтому естественно сначала рассматривать пространственную волновую функцию ядра как функцию точки $3(n - 1)$ -мерного пространства, а затем проецировать из этого многомерного «наше» трехмерное пространство.

Практически такая программа осуществляется выбором специальных переменных волновой функции ядра, позволяющих индуцировать преобразования многомерного пространства, и с помощью этих преобразований эффективно сортировать волновые функции ядра по определенным признакам, которые задаются общими кинематическими требованиями, налагаемыми на волновую функцию ядра. При этом теория групп выступает не в традиционной своей роли. Группы, которые будем здесь рассматривать, как правило, не будут группами симметрии гамильтониана ядра. Неприводимые пространства таких групп осуществляют конкретную реализацию абстрактного многочастичного пространства Гильберта, причем докажем, что эта реализация в смысле кинематики является оптимальной и однозначно определенной. При этом не обязательно знать ни конкретный вид гамильтониана ядра, ни вид потенциала межнуклонного взаимодействия. Несущественно будет предположение о парности ядерных сил, неважные другие экспериментально установленные факты, такие, как малый радиус действия и свойство насыщения ядерных сил и т. п. Существенно будет лишь то обстоятельство, что гамильтониан ядра удовлетворяет общим кинематическим требованиям квантовой механики; с этого и начнем следующий раздел настоящей статьи.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИ КОРРЕКТНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ЯДРА И КРИТИЧЕСКИЙ ВЗГЛЯД НА КРАЙНИЕ ЯДЕРНЫЕ МОДЕЛИ

При выборе определенных переменных волновой функции удобно исходить из обсуждения коллективных и внутренних переменных ядра. Коллективные степени свободы ядра изучались во многих работах, разнообразных по постановке вопроса и по используемому в них математическому аппарату. Некоторую ясность можно внести, если классифицировать эти работы по используемому в них математическому аппарату и отделить работы, основанные на методе вторичного квантования, от работ, в которых рассматриваются волновые функции, заданные в координатном представлении. Так как речь идет о задачах, решаемых

в рамках перелятивистской квантовой механики, то эти два способа описания в принципе эквивалентны, хотя весьма трудно или по некоторым причинам даже практически невозможно проследить их взаимосвязь.

Подобные замечания приведены с целью подчеркнуть то обстоятельство, что здесь будем рассматривать лишь второй способ описания, т. е. будем исследовать волновые функции ядра, заданные в координатном представлении. Это сужает круг изучаемых вопросов. Тем не менее количество и разнообразие работ второго направления еще остаются столь обширными, что невозможно сделать сколько-нибудь удовлетворительный их обзор. Однако в этом и нет необходимости, так как здесь проблема выделения коллективных и внутренних степеней свободы ядра рассматривается только с определенной точки зрения, которую можно сформулировать, исходя из простых и естественных условий, налагаемых на произвольную волновую функцию ядра.

Приступим к формулировке этих условий.

1. Микроскопичность. Если допустить, что наблюдаемые свойства атомных ядер можно описать волновой функцией, являющейся решением уравнения Шредингера, то она должна быть микроскопической, т. е. волновая функция должна зависеть от всех переменных ядра. Набор этих переменных составляют $3n$ пространственные координаты, скажем $3n$ компоненты векторов $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$, заданные в исходной системе координат, и, кроме того, или спиновые переменные всех протонов и всех нейтронов, если эти частицы считаются различными (в данном случае будем говорить о протонно-нейтронном ядре), или спино-изоспиновые переменные всех нуклонов, если предполагается, что протоны и нейтроны являются двумя состояниями частиц одного вида — нуклонов (тогда будем говорить о нуклонном ядре).

Необходимо особо подчеркнуть требование, чтобы число пространственных переменных микроскопической волновой функции ядра в точности равнялось $3n$, так как в случае меньшего числа переменных функция уже не будет микроскопической, а в случае большего числа переменных она будет перегружена лишними переменными.

2. Трансляционная инвариантность. Это условие требует, чтобы волновая функция свободного от внешних воздействий атомного ядра выражалась в виде произведения плоской волны, описывающей движение центра масс ядра, и трансляционно-инвариантной функции, описывающей внутренние свойства ядра.

Волновая функция может быть микроскопической, но не трансляционно-инвариантной, или, наоборот, трансляционно-инвариантной, но не микроскопической. Разумеется, эти два условия можно объединить и говорить о микроскопической трансляционно-инвариантной волновой функции свободного ядра.

3. Микроскопическая трансляционная инвариантность. Обеспечить ее можно, выбрав набор $3n$ пространственных переменных ядра таким образом, чтобы выделить в этом наборе три переменные, например вектор ρ_0 , задающий положение центра масс ядра по отношению к исходной системе координат, и $3(n-1)$ переменных, например вектора $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, задающие остальные трансляционно-инвариантные пространственные переменные ядра. Если к этим переменным еще добавить спиновые или спино-изоспиновые переменные, то волновая функция в таких переменных автоматически удовлетворит условиям микроскопичности и трансляционной инвариантности. В случае свободного ядра она факторизуется на произведение $\Psi_0\Psi$, где Ψ_0 — плоская волна, описывающая движение центра масс; Ψ — любая трансляционно-инвариантная волновая функция, в частности функция, являющаяся решением уравнения Шредингера для трансляционно-инвариантного гамильтониана, произвольным образом зависящего от пространственных, спиновых или спино-изоспиновых переменных ядра.

4. Точные интегралы движения. Известно, что гамильтониан ядра с высокой степенью точности сохраняет общий момент ядра J , его проекцию M_J , пространственную четность, вид и число частиц и, наконец, перестановочную (по всем переменным) симметрию волновой функции ядра. Следовательно, потребуем, чтобы волновая функция ядра характеризовалась этими пятью интегралами движения. Последнее требование здесь выступает в двух вариантах: или антисимметричность по переменным протонов и нейтронов в отдельности (для протонно-нейтронных ядер), или антисимметричность по переменным всех нуклонов (для нуклонных ядер). Обратим еще внимание на то обстоятельство, что в интегралы движения включено требование сохранения вида и числа частиц. Этот интеграл движения позволяет зафиксировать число и природу степеней свободы ядра.

Теперь обсудим смысл сформулированных выше условий. Очевидно, они являются необходимыми в том смысле, что истинная волновая функция ядра заведомо должна им подчиняться, однако недостаточны в том смысле, что далеко не все им подчиняющиеся функции являются истинными волновыми функциями ядра. Если удастся сконструировать какие-нибудь функции, удовлетворяющие условиям 3 и 4, то они, вообще говоря, не будут удовлетворять точному уравнению Шредингера для ядра. Тем не менее в них будут учтены некоторые свойства этого уравнения, а именно кинематические свойства гамильтониана ядра. Чтобы подчеркнуть это, любые функции, удовлетворяющие условиям 3 и 4 (но не обязательно являющиеся решением точного уравнения Шредингера), назовем кинематически корректными функциями. Заметим еще, что понятие «кинематические свойства» здесь используется в обобщенном смысле, так как в него вкладывается не толь-

ко обычно подразумеваемое требование 4, связанное с обеспечением интегралов движения, но и требование 3 микроскопической трансляционной инвариантности.

Проверим кинематическую корректность некоторых модельных волновых функций ядра, заданных в координатном представлении. Чтобы не вдаваться в подробное перечисление всех модификаций различных моделей и выяснить лишь сущность вопроса, остановимся на двух крайних взглядах на структуру ядра, один из которых опирается на концепцию независимых частиц, а второй рассматривает атомные ядра как самодеформирующиеся системы, в которых сложные движения нуклонов описываются несколькими коллективными переменными.

Первое из этих направлений реализуется в различных вариантах оболочечной модели. Волновая функция этой модели задается с помощью конфигураций, которые составлены из линейных комбинаций произведения однонуклонных волновых функций, зависящих от однонуклонных переменных r_1, \dots, r_n . Использование такого набора переменных уже обеспечивает условие 1. Для функций оболочечного типа сравнительно легко обеспечить и требование 4, так что остается лишь проблема трансляционной инвариантности. Одночастичные переменные не являются трансляционно-инвариантными, в них содержатся три переменные, описывающие движение центра масс ядра не в виде плоской волны, поэтому условие 2 резко противоречит оболочечным представлениям. Строго говоря, оболочечной картине можно верить, лишь отказываясь от заведомо правильного требования 2. Физическая причина этого заключается в том очевидном обстоятельстве, что единственной выделенной точкой пространства является центр масс свободного ядра, следовательно, нельзя строить корректные функции, заданные в лабораторной системе координат.

Необходимо подчеркнуть, что трудности, возникающие из-за условия 2 при построении функций оболочечного типа, в первую очередь касаются принципиальной стороны вопроса, так как в конкретных расчетах функцию, описывающую движение центра масс ядра, часто удается точно или приближенно зафиксировать в одном определенном состоянии и тем самым избежать появления ложных, нефизических состояний ядра. Это, однако, не устраняет приведенных выше возражений, так как замена свободного движения центра масс ядра связанным состоянием возможна лишь при наличии физических внешних полей.

В крайних коллективных моделях предполагается, что из-за каких-то до конца не понятых причин «заморожено» подавляющее число переменных волновой функции ядра, а свойства низколежащих уровней, по крайней мере, для избранных ядер обуславливаются небольшим числом степеней свободы ядра. Как прямое следствие таких предположений при построении модельной волно-

вой функции ядра используется лишь несколько коллективных переменных, вводимых интуитивно из полуклассических соображений. В них утерян смысл одночастичных переменных и, следовательно, не может быть и речи о выполнении условия 1 и проверки условия 2. Коллективные переменные не содержат механизма для перестановки нуклонов и, следовательно, отсутствует возможность говорить о принципе Паули, так что в лучшем случае и условие 4 можно обеспечить лишь частично. Поэтому коллективные модели во всех их модификациях в кинематическом смысле значительно менее корректны, чем модели оболочечного типа. Несмотря на это, для ядер в определенных областях массовых чисел опытные данные часто свидетельствуют в их пользу и тем самым подтверждают мнение, что в коллективных моделях удачно угадан ряд характерных свойств атомных ядер. Этим можно объяснить те многочисленные усилия, которые в течение последнего десятилетия были затрачены на их обоснование.

Только что обсуждались два крайних взгляда на структуру ядра. Основные их предпосылки настолько противоположны, что кажется исключают друг друга. В такой же мере противоречивы и экспериментальные данные, говорящие в пользу то одного, то другого подхода. Это тем более странно, что подобная ситуация встречается даже в близких по числу нуклонов ядрах, например ядра ^{17}O , имеющем ярко выраженный одночастичный спектр, и ядрах ^{20}Ne и ^{24}Mg , в спектрах которых наблюдаются серии уровней ротационного типа. Трудно поверить, что добавление нескольких нуклонов так перестраивает структуру этих ядер, что для ее понимания требуется совершенно противоположная физическая картина.

Выход из этого тупика можно найти, если допустить, что эти противоречия не столь глубокие, как это кажется на первый взгляд. Может быть, в одночастичном подходе кроются задатки коллективного движения или, наоборот, коллективные модели допускают микроскопизацию, содержащую скрытые одночастичные черты? Возможно, существует подход, объединяющий одночастичные и коллективные аспекты, которые в спектрах избранных ядер проявляют себя в чистом виде лишь в результате удачного стечения некоторых специфических обстоятельств? Можно ли, исходя из одночастичных переменных, понять картину возникновения коллективных степеней свободы ядра?

В связи с последним вопросом коротко остановимся на работах, в которых пытаются дать микроскопическое обоснование коллективных движений в ядрах с помощью следующего искусственного приема. Сначала конструируются волновые функции, зависящие от всех микроскопических одночастичных переменных $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ и от определенного числа коллективных переменных, например переменных ξ_1, \dots, ξ_h . Исходным материалом для

построения функций такого вида обычно служат функции оболочечного типа. Затем с помощью определенной процедуры (чаще всего с помощью некоторых операторов, зависящих от переменных ξ_1, \dots, ξ_n) инжектируются коллективные переменные. Даже не вникая в детали такого приема, легко понять, что уже сама постановка вопроса свидетельствует о его поверхностности; в нем отсутствует механизм образования коллективных степеней свободы их одночастичных переменных, оба вида переменных существуют как бы независимо друг от друга, вследствие чего с самого начала возникает проблема исключения лишних переменных. Поэтому не удивительно, что успехи, достигнутые в данном направлении, не пропорциональны затраченным усилиям. Если посмотреть на эту задачу с нашей точки зрения, то очевидно, что такие функции в кинематическом смысле не корректны, по крайней мере по двум причинам; из-за отсутствия трансляционной инвариантности и из-за лишних переменных, наличие которых, как было специально подчеркнуто при формулировке условия 1, ведет к перегруженной микроскопичности.

Чтобы решить поставленную выше задачу примирения двух крайних взглядов на структуру ядра, необходимо искать другие пути. При этом полезно для начала попытаться ответить на некоторые конкретные вопросы. Вот они. Как можно строго в смысле квантовой механики определить коллективные переменные? Сколько существует коллективных и каков смысл остальных переменных ядра? Можно ли ввести микроскопический аналог переменных, описывающих поверхностные колебания квадрупольного, октупольного и т. д. типа, и если да, обрывается ли этот ряд на некоторой мультипольности или его можно продолжать сколько угодно? Можно ли найти функциональную связь между коллективными и одночастичными переменными?

Проверка крайних моделей дала неутешительные результаты: они оказались некорректными в кинематическом отношении. В связи с этим возникают такие вопросы: как строить кинематически корректные модели ядра, какие из них самые простые и в каком направлении они обобщают некорректные модели ядра? Существуют ли модели, объединяющие одночастичные, коллективные и промежуточные аспекты движения нуклонов в ядре?

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП И ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Позаботимся в первую очередь о выборе таких переменных, которые автоматически удовлетворяют микроскопической трансляционной инвариантности. Набор таких переменных хорошо известен — это нормированные координаты Якоби, связанные

с одночастичными векторами $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ с помощью следующих соотношений:

$$\rho_i = \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} \left(\sum_{t=1}^i \mathbf{r}_t - i\mathbf{r}_{i+1} \right), \quad (1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$. Если набор спиновых или спино-изо-спиновых переменных обозначить Q , то наша задача будет состоять в изучении класса волновых функций

$$\Psi(\Gamma | \rho_1, \dots, \rho_{n-1}; Q), \quad (2)$$

которые заведомо удовлетворяют условию 3. В (2) Γ — произвольный, но обязательно полный набор квантовых чисел ядра, причем полнота здесь должна обеспечить разложение $\hat{T}\Psi(\Gamma)$ через исходный набор функций $\Psi(\Gamma)$, где \hat{T} — некие «хорошие» операторы. Ниже дано подробное описание операторов \hat{T} , из которого видно, что они действительно являются «хорошими» операторами.

До тех пор пока квантовые числа Γ неопределенные, набор функций (2) в высшей степени произволен. С первого взгляда кажется, что для таких функций невозможно дать какие-либо конструктивные утверждения, позволяющие выделить их зависимость от коллективных переменных ядра. В действительности это не так: существует математический аппарат, с помощью которого удастся сформулировать работоспособный метод выделения коллективной функции ядра без каких-либо существенных дополнительных предположений о виде функции (2).

Выше были приведены критические замечания по поводу тех работ, в которых в качестве лишних переменных вводятся коллективные степени свободы ядра; их ограниченный успех обусловлен некорректной с самого начала постановкой задачи. При правильном подходе вместо совместного использования одночастичных и коллективных степеней свободы ядра необходимо осуществить обычную замену пространственных переменных, т. е. взять $3(n-1)$ функций f_i^s и положить, что

$$\rho_i^s = f_i^s(\xi_1, \dots, \xi_k; q_{k+1}, \dots, q_{3(n-1)}), \quad (3)$$

где ρ_i^s — три декартовы компоненты вектора ρ_i ($s = x, y, z$; $i = 1, 2, \dots, n-1$); ξ_1, \dots, ξ_k — k коллективных, а $q_{k+1}, \dots, q_{3(n-1)}$ — $3(n-1) - k$ остальных переменных ядра. Ради краткости часто наборы ξ_1, \dots, ξ_k и $q_{k+1}, \dots, q_{3(n-1)}$ обозначим буквами ξ и q и назовем их соответственно коллективными и внутренними переменными ядра. Первоочередная задача — разумным способом определить функции (3).

Чтобы выяснить смысл функций (3), необходимо знать подходящую параметризацию группы собственных вращений r -мерного пространства. В этом пространстве имеется $r(r-1)/2$ плоско-

стей, которые можно нумеровать двумя индексами p и t , если считать, что $p = 2, 3, \dots, r$ и $t = 1, 2, \dots, p - 1$. Вращение в плоскости tp можно задать оператором T_{tp} , который реализован в виде r -мерной вещественной матрицы, зависящей от параметра ϑ_{tp} , с матричными элементами $(T_{tp})_{ij}$, отличающимися от матричных элементов единичной матрицы лишь двумя диагональными элементами $(T_{tp})_{tt} = (T_{tp})_{pp} = \cos \vartheta_{tp}$ и двумя недиагональными элементами $(T_{tp})_{tp} = -(T_{tp})_{pt} = \sin \vartheta_{tp}$. Очевидно, что любое вращение можно представить в виде произведения однопараметрических вращений $T(\vartheta_{tp})$. При этом следует обратить внимание на то обстоятельство, что порядок расположения этих операторов в их произведении по существу неважен по той причине, что T_{tp} составляют полный набор разных операторов вращений, т. е. операторов, каждый из которых осуществляет вращение в своей плоскости. Такой способ параметризации общего вращения r -мерного пространства — группы собственного вращения O_r^+ — удобен в инфинитезимальном отношении, так как с его помощью в пространстве параметров ϑ_{tp} в окрестности единичного элемента задаются однопараметрические кривые, которым соответствуют и различные инфинитезимальные операторы.

Такая параметризация, однако, слишком громоздка для глобальных методов, т. е. методов, опирающихся на интегрирование по группе. Существует другой способ задания вращения r -мерного пространства с помощью операторов, осуществляющих вращение лишь в плоскостях с $t = p - 1$. Общее число параметров, задающих группу, должно остаться прежним, поэтому для каждой плоскости $p - 1, p$ необходимо ввести ν параметров, где $\nu = 2, 3, \dots, p$; каждому из этих параметров соответствует и свой оператор, так что вместо T_{tp} следует говорить об операторах $T_p^{(\vartheta)}$, задаваемых r -мерными матрицами

$$T_{p-1,p}^{(\vartheta)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} p-1 \\ p \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} p \\ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} p-1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_p^{(\vartheta)} & S_p^{(\vartheta)} \\ -S_p^{(\vartheta)} & C_p^{(\vartheta)} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{array} \end{array} \quad (4)$$

В (4) введены сокращенные обозначения $c_p^{(v)} = \cos \vartheta_{p-1p}^{(v)}$ и $s_p^{(v)} = \sin \vartheta_{p-1p}^{(v)}$. Все параметры ϑ с $p > 2$ принимают значения в интервале $0 \leq \vartheta_{p-1p}^{(v)} < \pi$, а параметры ϑ с $p = 2$ — в интервале $0 \leq \vartheta_{12}^{(v)} < 2\pi$.

Любое собственное вращение G_r^+ r -мерного пространства можно задать с помощью произведения операторов $T_{p-1p}^{(v)}$, однако теперь уже безразличен их порядок. Действительно, нельзя ставить рядом операторы с одинаковыми p , так как в их произведение вместо двух параметров $\vartheta_{p-1p}^{(v)}$ и $\vartheta_{p-1p}^{(v')}$ войдет лишь их сумма, т. е. будет потерян один из этих параметров. Следовательно, необходимо зафиксировать определенный правильный порядок умножения операторов $T_{p-1p}^{(v)}$. Требование не помещать рядом операторы с одинаковыми p оставляет обширную свободу выбора, которая может быть частично снята, если пользоваться рекуррентным построением. Пусть уже выбран определенный порядок построения оператора G_{r-1}^+ собственного вращения $r - 1$ -мерного пространства и необходимо его дополнить до оператора G_r^+ вращения r -мерного пространства. Ради определенности это дополнение осуществим «справа», т. е. положим

$$G_r^+ = G_{r-1}^+ g_r^+, \quad (5)$$

а g_r^+ зафиксируем, полагая, что

$$g_r^+ = \prod_{p=r}^2 T_{p-1p}^{(r)}. \quad (6)$$

Чтобы разобраться в структуре формулы (5), выпишем ее в случае $r = 4$: $G_4^+ = T_{12}^{(2)} T_{23}^{(3)} T_{12}^{(3)} T_{34}^{(4)} T_{23}^{(4)} T_{12}^{(4)}$. Из этого примера видно, что при переходе от $(r - 1)$ -мерного к r -мерному вращению появляется лишь один существенно новый поворот $T_{r-1r}^{(r)}$, своим нижним индексом r зацепляющий новое измерение. Слева от него находятся все, а справа — только некоторые из поворотов пространства $r - 1$ измерений. Теперь уже понятно, что такая параметризация удобна в глобальном, интегральном отношении из-за минимального числа существенно новых поворотов, появляющихся при переходе от группы O_{r-1}^+ к группе O_r^+ . Однако если попытаться с помощью этой параметризации найти инфинитезимальные матрицы, то нас ждет разочарование, так как дифференцирование по параметрам даст лишь $r - 1$ базисных инфинитезимальных операторов $I_{12}, I_{23}, \dots, I_{r-1r}$. Чтобы определить остальные $r(r - 1)/2 - (r - 1)$ операторы, необходимо обратиться к их коммутационным соотношениям.

Элементы ортогональной группы O_r^+ , параметризация которой была только что получена, осуществляют собственное вращение r -мерного пространства. Существует веская причина, требующая расширения этой группы. Она связана с принципом Паули. Допустим, что переменные x_1, \dots, x_r , являющиеся объектами

преобразования группы O_r^+ , — это переменные частиц, подчиняющиеся определенной статистике. Чтобы обеспечить перестановочные свойства функций, зависящих от этих переменных, необходимо воспользоваться операторами перестановки, матрицы которых имеют определитель, равный -1 , тогда как определитель матриц собственных вращений равен 1 . Отсюда заключаем, что перестановки являются внешними операциями по отношению к операциям собственных вращений, т. е. действие операторов перестановки выходит за рамки алгебраического аппарата ортогональных групп O_r^+ . Следовательно, необходимо расширить группу ортогональных преобразований, включая в нее не только операторы собственных вращений, но и операторы перестановки. Это расширение можно осуществить, воспользовавшись лишь одной численной ортогональной матрицей с определителем, равным -1 , так как ее произведение на матрицы собственных вращений из-за групповых свойств последних исчерпывает и все вещественные ортогональные матрицы несобственных вращений. В качестве такой матрицы возьмем диагональную матрицу s_r , отличающуюся от единичной матрицы e_r лишь знаком r -го элемента главной диагонали. Введем теперь группу отражений σ_r , которая состоит из двух элементов $\sigma_r \equiv \{e_r, s_r\}$, реализуемых в виде матриц r -го порядка, и умножим, например, слева эти элементы на элементы группы собственных вращений. Теперь элементы G_r полной ортогональной группы O_r можно задать с помощью матриц $G_r = G_r^+ \sigma_r$, где σ_r — элементы группы отражений. Для дальнейшего необходимо провести еще рекуррентное по r построение элементов G_r . Учитывая (5), имеем $G_r = G_{r-1}^+ g_r^+ \sigma_r = G_{r-1}^+ \sigma_{r-1} \sigma_{r-1}^{-1} g_r^+ \sigma_r$, поэтому

$$G_r = G_{r-1} g_r \quad (g_r = \sigma_{r-1}^{-1} g_r^+ \sigma_r). \quad (7)$$

В математике такую совокупность элементов, как элементы g_r группы O_r , обычно называют фактор-пространством и символически обозначают $g_r = G_r/G_{r-1}$. То же самое можно написать и для группы собственных вращений: $g_r^+ = G_r^+/G_{r-1}^+$. Выше уже встречались с еще одним фактор-пространством $\sigma_r = G_r/G_r^+$, появляющимся при расширении O_r^+ до группы O_r .

Если говорить о произвольной группе G и некоторой ее подгруппе H , то можно ввести фактор-пространство $g = G/H$. При дополнительных условиях, когда H инвариантна относительно внутренних автоморфизмов (это означает, что $gHg^{-1} = H$ для всех g , т. е. H является нормальным делителем группы G), фактор-пространство превращается в фактор-группу. В нашем случае множества G_r/G_{r-1} или G_r^+/G_{r-1}^+ являются лишь фактор-пространствами, тогда как G_r/G_r^+ образует фактор-группу.

Понятие фактор-пространства и удобное его обозначение позволяют записать в компактном виде формулы перехода к сферической системе координат многомерного пространства. Согласно

(6) и учитывая операторы отражения, для r -мерной матрицы $D^{(1r)}$, зависящей от элементов фактор-пространства G_r/G_{r-1} , имеем

$$D^{(1r)}(g_r) = \sigma_{r-1}^{-1} \prod_{p=r}^2 T_{p-1p}^{(r)} \sigma_r. \quad (8)$$

Последняя формула показывает, что элементы g_r этого фактор-пространства задаются с помощью $r - 1$ непрерывных $\vartheta_{12}^{(r)}, \vartheta_{23}^{(r)}, \dots, \vartheta_{r-1r}^{(r)}$ и двух дискретных σ_{r-1} и σ_r переменных.

Теперь приведем формулу, которая выявляет алгебраическую сущность перехода к сферической системе координат. Пусть D_{ri}^{1r} — матричные элементы последней строки матрицы (8), а x_1, \dots, x_r — декартовы координаты вектора r -мерного пространства. Тогда переход к новым угловым и дискретным переменным многомерной сферической системы координат осуществляется формулой

$$x_i = \rho D_{ri}^{(1r)}(g_r), \quad (9)$$

где $i = 1, 2, \dots, r$, а ρ — многомерный (глобальный) радиус $\rho = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$. Непосредственное перемножение в (8) позволяет

легко убедиться в том, что последняя строка матрицы (8) не зависит от σ_{r-1} , поэтому в замене переменных (9) участвует лишь группа отражения σ_r . Для наглядности приведем развернутую формулу (9) при $r = 3$. Если записать входящие в (8) операторы в виде матриц и их перемножить, то легко получить, что $x_1 = \rho \sin \vartheta_{23}^{(3)} \sin \vartheta_{12}^{(3)}$; $x_2 = -\rho \sin \vartheta_{23}^{(3)} \cos \vartheta_{12}^{(3)}$; $x_3 = (-1)^{\sigma_3} \rho \cos \vartheta_{23}^{(3)}$, (10)

где $(-1)^{\sigma_3} = 1$ при $\sigma_3 = e_3$ и $(-1)^{\sigma_3} = -1$ при $\sigma_3 = s_3$. Изменим на противоположные знаки обоих углов ϑ , входящих в (10), что равнозначно выбору других знаков недиагональных элементов матриц вращения (4), и положим в (10) $\sigma_3 = e_3$. Тогда эта замена переменных приведет к привычной формуле перехода к сферической системе координат.

Чтобы понять причины, позволяющие записать формулу замены переменных в виде (9), необходимо вспомнить, что матричные элементы матриц неприводимых представлений ортогональной группы составляют полную систему функций, зависящих от $r(r - 1)/2$ непрерывных переменных. Из-за неприводимых свойств координат x_1, \dots, x_r в качестве набора функций, осуществляющих переход к новым переменным, достаточно взять только те матричные элементы матрицы D , представления (1r), которые зависят лишь от $r - 1$ непрерывных параметров. В случае нашей параметризации этому условию удовлетворяют функции, составляющие последнюю строку матрицы $D^{(1r)}$. Они и входят в формулу (9), в которой O_r -инвариантная переменная ρ по очевидным причинам выбрана в качестве r -й новой переменной.

Заметим еще, что в случае произвольной группы G и ее подгруппы H формулы замены переменных с помощью матричных элементов матриц, заданных на фактор-пространстве G/H , позволяют понимать алгебраическую сущность связи между различными системами координат, используемыми в математической физике. Пояснить истинный смысл этого утверждения можно, лишь опираясь на связь теории специальных функций с алгебраическим аппаратом индуцированных представлений.

3. КОЛЛЕКТИВНЫЕ И ВНУТРЕННИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ЯДРА

Ничем не примечательная на первый взгляд формула (9) дает алгебраический инструмент, позволяющий ответить на вопросы, поставленные выше. Теперь уже стало известно, в каком классе функций следует искать функции (3), осуществляющие переход от координат Якоби к новым трансляционно-инвариантным переменным ядра: это произведение переменной ρ и матричных элементов матриц неприводимого представления $D^{(1r)}$ ортогональной группы O_r при $r = 3(n - 1)$.

Кажется, что искомую формулу замены переменных (3) можно получить из (9) при $r = 3(n - 1)$, и это даст переход от ρ_i^{\dagger} к новым пространственным переменным ядра. Чтобы убедиться правильно ли это предположение или нет, необходимо какие-то конструктивные утверждения о смысле новых переменных. По каким признакам можно рассортировать микроскопические переменные на коллективные и внутренние переменные ядра? Можно ли произвести такую сортировку в наборе переменных ρ , $\vartheta_{12}^{(3(n-1))}$, $\vartheta_{23}^{(3(n-1))}$, \dots , $\vartheta_{3(n-1)-1}^{(3(n-1))}$, $z(n-1)$, который следует выбрать, исходя из описанной выше параметризации фактор-пространства g_r с $r = 3(n - 1)$, или необходимо придумать другую параметризацию, более естественную для наших целей? Чтобы понять, что означает естественная параметризация группы $O_{3(n-1)}$ для выбора новых переменных волновой функции ядра, необходимо прежде всего дать ответ на первый из этих вопросов.

Начнем с определения коллективных переменных. Коллективными переменными будем называть те избранные переменные, построенные из микроскопических переменных ядра, которые, образно говоря, могут существовать независимо от остальных переменных. Этому определению, которое пока еще весьма неопределенно, можно придать строгий смысл, если вспомнить, что причиной, из-за которой перемешиваются переменные квантовой системы тождественных частиц, является принцип Паули. Требования принципа Паули обеспечиваются с помощью операторов перестановки, т. е. с помощью элементов симметрической группы S_n . Поэтому независимо от остальных могут существовать

лишь те переменные, которые «не чувствуют» принципа Паули, т. е. являются инвариантами симметрической группы S_n . По определению их и будем называть коллективными переменными ξ . Остальные переменные q назовем внутренними переменными ядра.

Чтобы остаться в рамках кинематической корректной теории, этими строгими определениями следует пользоваться, лишь опираясь на условия 3 и 4, сформулированные выше. Действительно, исходя, например, из r переменных x_1, \dots, x_r , всегда можно сконструировать r функций, инвариантных по отношению к преобразованиям группы S_r , и таким образом ввести соответствующие им коллективные переменные ядра. Однако волновые функции, зависящие от таких переменных, неизбежно будут S_r -инвариантными функциями, поэтому такая конструкция исключает возможность обеспечить принцип Паули, а тем самым и условие 4. Отсюда следует, что для данного n число коллективных переменных ядра должно быть строго ограничено. Иными словами, принцип Паули можно обеспечить лишь с помощью определенного числа внутренних переменных ядра, и задача состоит в отыскании их минимального набора, причем минимальность здесь понимается в том смысле, что дальнейшее его сужение ведет к невозможности обеспечения принципа Паули.

Чтобы отыскать минимальный набор внутренних переменных ядра, необходимо более подробно выяснить значение симметрической группы при разделении переменных на коллективные и внутренние. А чтобы испытать «реакцию» переменных на действие операторов симметрической группы S_n , необходимо понять, каким образом эта группа вложена в ортогональную группу $O_{3(n-1)}$. Операторы симметрической группы переставляют однонуклонные векторы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. С помощью выражений (1) можно найти преобразование координат Якоби, индуцированное перестановкой переменных \mathbf{r}_i . Перестановки действуют на индексы i векторов \mathbf{r}_i , откуда следует, что элементы симметрической группы S_n действуют лишь на нижние индексы i векторов Якоби ρ_i , генерируя на базисе этих векторов неприводимое представление группы S_n (подробно см. в работе [9]). Если подвергнуть векторы $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ преобразованиям ортогональной группы O_{n-1} , то станет очевидно, что любое преобразование симметрической группы можно представить в виде произведения собственных поворотов $(n-1)$ -мерного пространства и операции отражения; ради такой возможности и была расширена ортогональная группа собственных вращений до полной ортогональной группы. Другими словами, симметрическая группа S_n , переставляющая векторы $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$, является подгруппой ортогональной группы O_{n-1} , преобразующей векторы $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, где ρ_i и \mathbf{r}_i связаны между собою соотношениями (1). Это утверждение сокращенно обозначается $O_{n-1} \supset S_n$, т. е. симметрическая группа S_n вложена в ортогональную группу

O_{n-1} по цепочке $O_{n-1} \supset S_n$. Обратим внимание на тот факт, что ранг ортогональной группы на единицу меньше симметрической группы, так что S_n весьма плотно вставлена в O_{n-1} .

Теперь уже нетрудно сообразить, каким образом вложить симметрическую группу S_n в ортогональную $O_{3(n-1)}$; это вложение подсказывают индексы координат Якоби ρ_i^s . Наличие двух индексов $s = x, y, z$ и $i = 1, 2, \dots, n-1$ означает, что эта нумерация приспособлена для прямого произведения 3×3 матрицы, осуществляющей вращение «нашего» трехмерного пространства, на $(n-1) \times (n-1)$ матрицу, осуществляющую вращение абстрактного $(n-1)$ -мерного пространства векторов Якоби. Прямому произведению таких матриц соответствует прямое произведение групп O_3^+ и O_{n-1} , поэтому естественно ввести цепочку $O_{3(n-1)} \supset O_3^+ \times O_{n-1}$, означающую, что элементы ортогональной группы $O_{3(n-1)}$ сужаются на прямое произведение элементов группы O_3^+ и группы O_{n-1} . При таком сужении подразумевается, что матрица отражения $3(n-1)$ -мерного пространства заменяется матрицей отражения $(n-1)$ -мерного пространства; такая замена законна, ибо учет отражения требует использования лишь одной численной матрицы с определителем, равным -1 .

Приступим к детализации формулы (3). Выше было выяснено, что в этой формуле под фактор-пространством нельзя понимать фактор-пространство g_r с $r = 3(n-1)$, которое параметризовано способом, описанным выше; параметризация такого рода приспособлена для канонической цепочки $O_{3(n-1)} \supset O_{3(n-1)-1} \supset \dots \supset O_1$, тогда как наиболее плотно симметрическую группу можно вложить лишь в физическую цепочку $O_{3(n-1)} \supset O_3^+ \times O_{n-1} \supset O_3^+ \times S_n$. Чтобы раскрыть смысл формулы (3) для такого вложения, запишем элементы $g_{3(n-1)}$ группы $O_{3(n-1)}$ в виде $g_{3(n-1)} = \tilde{g}G_3^+q_{n-1}$, где G_3^+ — параметры группы вращения O_3^+ (углы Эйлера); q_{n-1} — параметры группы O_{n-1} , смысл которых нам еще предстоит выяснить, и \tilde{g} — остальные параметры, дополняющие набор $G_3^+q_{n-1}$ до полного набора $3(n-1) - 1$ переменных. Теперь формула замены переменных (9) приобретает следующий вид:

$$\rho_i^s = \rho D_{s_0 i_0, s i}^{(1_{3(n-1)})} (\tilde{g}G_3^+q_{n-1}), \quad (11)$$

где $s_0 i_0$ обозначает последнюю строку $3(n-1)$ -мерной матрицы $D^{(1_{3(n-1)})}$; ρ — глобальный радиус ядра.

Чтобы разобраться в смысле параметров матрицы $D^{(1_{3(n-1)})}$, необходимо записать ее в виде произведения трех матриц, зависящих соответственно от \tilde{g} , G_3^+ и q_{n-1} , и воспользоваться известными свойствами матричных элементов матриц неприводимых представлений. Подробно этот вопрос рассмотрен в работе [8], здесь лишь приведем окончательный результат. Формула (11) имеет следующий развернутый вид [5]:

$$\rho_i^s = \sum_{s'} \rho^{(s')} D_{s's}^{(13)} (G_3^+) D_{s'i}^{(1, n-1)} (q_{n-1}), \tag{12}$$

где $D^{(13)}$ и $D^{(1, n-1)}$ — 3-мерная и $(n - 1)$ -мерная матрицы неприводимых представлений групп O_3^+ и O_{n-1} ;

$$\rho^{(s')} = \rho D_{3o_{i0}, s's'}^{(1, 3(n-1))} (\tilde{g}). \tag{13}$$

В (12) $q_{n-1} = g_{n-3} g_{n-2} g_{n-1}$, что можно записать также и в виде $q_{n-1} = \sigma_{n-4}^{-1} g_{n-4}^+ g_{n-3}^+ g_{n-2}^+ g_{n-1}^+ \sigma_{n-1}$, где входящие g^+ определяются выражением (6). Нетрудно подсчитать, что q_{n-1} зависит от 3 $(n - 3)$ непрерывных параметров. Согласно замечанию, следующему за формулой (8), фактор-пространства g_{n-3}^+ , g_{n-2}^+ и g_{n-1}^+ задаются соответственно $n - 2$, $n - 3$ и $n - 4$ непрерывными параметрами, сумма которых и дает 3 $(n - 3)$. Если еще учесть три параметра группы O_3^+ и глобальный радиус ρ , то в случае $n > 3$ общий баланс переменных 3 $(n - 1) - 3 (n - 3) - 3 - 1 = 2$ показывает, что оставшееся фактор-пространство $\tilde{g} = G_{3(n-1)} / G_3^+ \times G_{n-1}$ задается лишь двумя непрерывными параметрами, которые обозначим ϕ_1 и ϕ_2 , где $0 \leq \phi_1, \phi_2 < -\pi/2$. Когда же $n = 3$, тогда имеем переменную ρ , три угла Эйлера и один параметр группы O_2 , и баланс переменных показывает, что фактор-пространство \tilde{g} задается лишь одной переменной ϕ_1 . Первое, на что следует обратить внимание в (12), — это корреляция строк матрицы $D^{(1, n-1)}$ со строками матрицы $D^{(13)}$, обуславливаемая свойствами матричных элементов матрицы $D^{(1, 3(n-1))} (\tilde{g})$, которая имеет следующий вид:

$s'i' \backslash$	$x1 \dots$	$x \ n-3$	$y \ n-2$	$z \ n-1$
$x1$	1 0			
\vdots	\cdot	0	0	0
\cdot	0 1			
$x \ n-3$	0	C_2	S_2	0
$y \ n-2$	0	$-C_1 S_2$	$C_1 C_2$	S_1
$z \ n-1$	0	$S_1 S_2$	$-S_1 C_2$	C_1

(14)

В (14) введены обозначения $c_2 = \cos \vartheta_2$ и т. д. Из этой матрицы непосредственно видно, что ее матричные элементы не равны нулю лишь при $s' = i'$, что и обуславливает своеобразный смысл нумерации строк матрицы $D^{(1n-1)}$: в (12) входят матричные элементы последних трех строк матрицы $D^{(1n-1)}$, причем при $n > 3$ ее строкам

$$s' = x', \quad s' = y' \quad \text{и} \quad s' = z'$$

соответствуют строки

$$i' = n - 3, \quad i' = n - 2 \quad \text{и} \quad i' = n - 1$$

матрицы $D^{(1n-1)}$. Если же $n = 3$, то в (14) следует положить $\vartheta_2 = 0$, и тогда получим, что значения $s' = y'$ и $s' = z'$ скоррелированы с первой и второй строками матрицы $D^{(12)}$ представления группы O_2 .

Выше уже говорилось, что операции симметрической группы являются внутренними операциями группы O_{n-1} . Переменные $\rho^{(s)}$ и G_3^+ не затрагиваются операторами группы O_{n-1} , т. е. все эти шесть переменных являются инвариантами симметрической группы S_n . Однако, по нашему определению, S_n -инвариантные переменные называются коллективными переменными ядра, поэтому результаты, изложенные выше, доказывают, что при $n > 3$ существует по крайней мере шесть коллективных переменных ядра: три угла Эйлера и три переменные $\rho^{(s)}$ ($s = x, y, z$) радиального типа, принимающие значения в интервале $0 \leq \rho^{(s)} < \infty$; если же $n = 3$, группа O_{n-1} вырождается до группы O_2 , то вместо трех $\rho^{(s)}$ остаются лишь две переменные $\rho^{(s)}$ ($s = y, z$). Ради полноты можно рассмотреть и почти тривиальный случай $n = 2$. Тогда группа O_{n-1} вырождается до дискретной группы отражения O_1 , для параметризации которой не нужны непрерывные переменные, в связи с чем все три переменные двухуклонной задачи ($\rho^{(z)}$ и два угла Эйлера) являются коллективными переменными.

Существуют ли еще другие коллективные переменные ядра? Теперь уже выяснилось, что этому вопросу эквивалентен следующий: существует ли еще какая-либо непрерывная группа G_0 , которую можно было бы вставить между группами O_{n-1} и S_n , т. е. существует ли цепочка $O_{n-1} \supset G_0 \supset S_n$ с нетривиальной непрерывной группой G_0 ?

Если бы ответ на этот вопрос был положительным, то дополнительные параметры, появляющиеся при расширении группы G_0 до группы O_{n-1} , были бы S_n -инвариантными, т. е. коллективными переменными ядра. Можно доказать, что такая группа G_0 не существует. Не останавливаясь на формальной стороне этого доказательства, наметим лишь его этапы. Группа O_{n-1} компактна, следовательно, должна быть компактной и группа G_0 . Все компактные группы классифицированы и хорошо известны, поэтому это утверждение легко проверить для малых n , например $n = 2, 3, 4$,

и далее, методом математической индукции, провести доказательство для любого n *.

Итак, нами выяснено максимально возможное число коллективных переменных ядра. Сформулируем окончательный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Не нарушая требования микроскопической трансляционной инвариантности и антисимметричности волновой функции ядра, состоящего из n нуклонов, можно ввести шесть коллективных переменных при $n > 3$, пять коллективных переменных при $n = 3$ и три коллективных переменных при $n = 2$. Остальные $3(n - 3)$ непрерывных переменных с отражением при $n > 3$, одна непрерывная переменная с отражением при $n = 3$ и отражение при $n = 2$ являются существенно неколлективными (внутренними) переменными ядра.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в формулировке теоремы говорится о нуклонах, а это, как было условлено выше, означает, что протоны и нейтроны различаются с помощью проекции изоспина. Другими словами, условие теоремы требует антисимметричности по всем переменным ядра, вследствие чего в качестве «сторожа» выступает симметрическая группа S_n , запрещающая выделение более шести коллективных переменных ядра.

Рассмотрим другой вариант теории, когда протоны и нейтроны трактуются как различные частицы, и тогда отпадает требование антисимметричности относительно перестановки протонов с нейтронами. Пусть ядро состоит из n_1 протонов и n_2 нейтронов и пусть $n_1 + n_2 = n$. Введем ортогональные группы O_{n_1-1} и O_{n_2-1} и по цепочкам $O_{n_1-1} \supset S_{n_1}$ и $O_{n_2-1} \supset S_{n_2}$ вложим в них симметрические группы S_{n_1} и S_{n_2} , обеспечивающие принцип Паули по протонам и нейтронам в отдельности. Согласно теореме 1 протонная система описывается $3(n_1 - 3)$, а нейтронная система — $3(n_2 - 3)$ внутренними переменными. Группа O_{n-1} содержит $3(n - 3)$ переменных, часть которых, а именно $3(n_1 + n_2 - 3) - 3(n_1 - 3) - 3(n_2 - 3) = 9$, теперь становится коллективными переменными ядра. Из этого заключаем, что для протонно-нейтронной системы справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Не нарушая требований микроскопической трансляционной инвариантности и антисимметричности волновой функции ядра, состоящего из n_1 протонов и n_2 нейтронов ($n_1 > 3$ и $n_2 > 3$), можно ввести 15 коллективных переменных.

Во избежание излишней педантичности в формулировку теоремы 2 не включены случаи $n_1 = 1, 2, 3$ и $n_2 = 1, 2, 3$ и, кроме

* При поиске рационального способа классификации повторяющихся представлений симметрической группы S_n такое доказательство, исходя из цепочки $O_{3(n-1)} \supset S_n$, было проведено в работе [10]. Здесь достаточно рассмотреть более простую цепочку $O_{n-1} \supset S_n$.

того, в ней не говорится о числе внутренних переменных ядра. Эта теорема не дает рекомендаций, как выбрать такие коллективные переменные, потому что их явный вид зависит от конкретной решаемой физической задачи. Если требуется выделить степени свободы ядра, ответственные за относительное движение протонной и нейтронной подсистем, то в качестве коллективных переменных следует брать шесть S_{n_1} -инвариантных протонных, шесть S_{n_2} -инвариантных нейтронных переменных и к ним еще добавить три $S_{n_1} \times S_{n_2}$ -инвариантных переменных, задающих относительное положение центров масс обеих подсистем. Однако с точки зрения кинематики такие 15 переменных не являются оптимальными, так как среди них нет тех шести истинно коллективных S_n -инвариантных переменных, которые согласно теореме 1 заведомо можно ввести для нуклонного, а тем более для протонно-нейтронного ядра. Поэтому, если уж обязательно требуется иметь более шести коллективных переменных, то с теоретической точки зрения более привлекательно к шести истинным добавить девять дополнительных переменных, являющихся инвариантами лишь группы $S_{n_1} \times S_{n_2}$. Явную связь между описанными выше двумя различными наборами 15 коллективных переменных можно установить с помощью формулы (27) [5].

Второй из этих наборов позволяет естественным образом ввести понятие приближенных коллективных переменных нуклонного ядра, использование которых ведет к нарушению точности квантового числа изоспина ядра. Не исключено, что именно этот путь позволит понять микроскопический смысл используемых в феноменологических теориях коллективных степеней свободы ядра высших мультипольностей.

4. ОБЩИЙ МЕТОД ПРОЕКЦИРОВАНИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ И ВНУТРЕННИХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ЯДРА

Чтобы далее продвинуться при изучении коллективных и внутренних степеней свободы ядра, необходимо придать строгий математический смысл часто используемому в феноменологической теории ядра понятию собственная (подвижная) и исходная (неподвижная) системы координат и попутно вспомнить об операторах сдвига на группе. Из выражения (12) видно, что функции, с помощью которых осуществляется переход от координат Якоби к новым переменным ядра, зависят от параметров, задающих элементы групп вращений. При этом матричные элементы матрицы $D^{(1_3)}$ зависят от всех параметров группы O_3^+ , тогда как матричные элементы матрицы $D^{(1_{n-1})}$ — лишь от параметров факторпространства $q_{n-1} = G_{n-1}/G_{n-4}$. В математике функции первого

типа принято называть функциями, заданными на группе G , а функции второго типа — функциями, заданными на фактор-пространстве $g = G/H$. Когда H — тривиальная подгруппа, состоящая из единичного элемента, тогда фактор-пространство совпадает с полной группой G , поэтому, не теряя общности, можно говорить лишь о функциях, заданных на фактор-пространствах g , построенных для данной группы G с помощью всевозможных ее подгрупп H .

В (12) входят матричные элементы матриц неприводимых представлений. Для объяснения понятия индуцированного представления свойство неприводимости не существенно, поэтому, обобщая класс рассматриваемых функций, будем говорить о функциях, заданных на фактор-пространстве g и являющихся матричными элементами матрицы некоторого (не обязательно неприводимого) представления группы G . Такие матричные элементы уже не имеют верхнего индекса, поэтому обозначим их $B_{i'i}(g)$.

Реакцию этих функций на действие операторов вращений $\hat{T}(G_r)$ ортогональных групп O_r (в общем случае операторов $\hat{T}(G)$, заданных на произвольной группе G), можно испытать, придав смысл выражению $\hat{T}(G) B_{i'i}(g)$. В физической литературе, как правило, принято считать, что в результате действия \hat{T} на $B_{i'i}$ получаем функцию от нового аргумента $G^{-1}g$. В математике операторы такого типа принято называть операторами левого сдвига на группе G и обозначать буквой \hat{L} . Разлагая $\hat{L}B$ через исходный набор функций, получаем

$$\hat{L}(G) B_{i'i}(g) = B_{i'i}(G^{-1}g) = \sum_{i''} B_{i'i''}(G^{-1}) B_{i''i}(g). \quad (15)$$

Последняя формула показывает, что операторы левого сдвига преобразуют строки матричных элементов матрицы B , и это преобразование не зависит от номера столбца.

Придадим теперь другой смысл выражению $\hat{T}(G) B_{i'i}(g)$. Пусть в результате действия \hat{T} на $B_{i'i}$ получаем функцию от нового аргумента gG . Операторы такого типа будем называть операторами правого сдвига на группе G и обозначать буквой \hat{R} . Осуществляя разложение полученной функции через исходные, имеем

$$\hat{R}(G) B_{i'i}(g) = B_{i'i}(gG) = \sum_{i''} B_{i'i''}(g) B_{i''i}(G). \quad (16)$$

Из (16) видно, что операторы правого сдвига преобразуют столбцы матричных элементов матрицы B , и это преобразование не зависит от номера строки. С помощью \hat{L} и \hat{R} можно преобразовать строки и столбцы матрицы B , поэтому операторы левого и правого сдвигов составляют полный набор операторов, которые преобразуют функции, заданные на фактор-пространстве g .

Операторы \hat{L} и \hat{R} , приспособленные к окрестности единичного элемента для бесконечно малого сдвига по правильно выбранным однопараметрическим подгруппам группы G , дают левые и правые инфинитезимальные операторы. При формулировке кинематики микроскопической теории ядра понадобятся глобальные (заданные на группе) и инфинитезимальные операторы. Часто встречаемыми примерами последних являются проекции оператора трехмерного вращения на оси исходной и собственной систем координат. Хорошо известно, что коммутационные соотношения операторов в собственной системе координат отличаются знаком от коммутационных соотношений операторов в исходной системе координат. Такое отличие их алгебр и отражает то обстоятельство, что они являются или правыми, или левыми инфинитезимальными операторами вращения, действующими на левые или правые индексы матричных элементов $D_{KM}^L(G_3^+)$.

Рассмотрим поведение переменных ρ_i^s по отношению к действию операторов правого сдвига. С помощью (16) легко получаем

$$\hat{R}(G_{03}^+) \hat{R}(G_{n-1}) \rho_i^s = \sum_{s'} \rho^{(s')} D_{s's}^{(13)}(G_3^+ G_{03}^+) D_{s'i}^{(1)n-1}(q_{n-1} G_{n-1}). \quad (17)$$

Пусть, в частности, G_{n-1} — единичный элемент группы O_{n-1} , а $G_{03}^+ = (G_3^+)^{-1}$. Тогда (17) дает

$$\hat{R}((G_3^+)^{-1}) \rho_i^s \equiv \rho_i^s = \rho^{(s)} D_{si}^{(1)n-1}(q_{n-1}). \quad (18)$$

Каков же смысл последней формулы? Пусть в трехмерном пространстве имеем исходную и собственную системы координат и собственная система относительно исходной задается углами Эйлера G_3^+ . Операторы $\hat{R}((G_3^+)^{-1})$ задают поворот от исходной к собственной системе, поэтому если ρ_i^s — переменные ядра,

заданные в исходной системе, то ρ_i^s — переменные в собственной системе координат. Чтобы лишний раз проверить это утверждение, сравним симметрические тензоры второго ранга $\Pi^{ss'} = \sum_i \rho_i^s \rho_i^{s'}$

и $\overset{0}{\Pi}^{ss'} = \sum_i \overset{0}{\rho}_i^s \overset{0}{\rho}_i^{s'}$, заданные в обеих системах координат. Используя (12) и (18), легко убедиться в том, что $\overset{0}{\Pi}^{ss'} = \delta(ss') (\rho^{(s)})^2$,

т. е., как это и должно быть, переход к собственной системе координат приводит $\Pi^{ss'}$ к его главным осям.

Введение коллективных переменных ядра и связанное с этим приведение к главным осям тензора $\Pi^{ss'}$, компоненты которого составлены из усредненных по одночастичным индексам однонуклонных переменных, рассмотрены в работе [11]. Формула (18) в случае фактор-пространства без отражения $q_{n-1}^+ = g_n^+ - 3g_n^+ - 2g_n^- - 1$

впервые была получена в явном виде в работе [2] (см. также [4]), которая послужила началом для дальнейших работ в этом направлении.

Переход к главным осям тензора $\Pi^{ss'}$ поучителен и в том отношении, что позволяет понять математическую сущность перехода к собственной системе координат. Действительно, если исходить из компонент $\Pi^{ss'}$, которые являются функциями, зависящими от параметров G_3^+ группы O_3^+ (для дальнейших обобщений лучше сказать — параметров фактор-пространства G_3^+/G_1^+ , где G_1^+ — тривиальная группа), а также других переменных $\rho^{(s)}$, то можно получить новые функции $\overset{0}{\Pi}^{ss'}$, заданные в собственной системе координат. Эта система, в свою очередь, определяется фактор-пространством G_3^+/G_1^+ , а тензоры $\Pi^{ss'}$ и $\overset{0}{\Pi}^{ss'}$ связаны между собою соотношением $\overset{0}{\Pi}^{ss'} = \hat{R} ((G_3^+/G_1^+)^{-1}) \Pi^{ss'}$. Отсюда заключаем, что переход к собственной системе координат осуществляется с помощью оператора правого сдвига \hat{R} , взятого в «точке» $(G_3^+/G_1^+)^{-1}$.

Теперь уже ясно, как, обобщая этот пример, на групповом языке сформулировать правило перехода к «собственной» системе координат в случае любой группы G и ее подгруппы H . Пусть имеем функцию F , заданную на фактор-пространстве g , которая, может быть, еще зависит и от набора других переменных ξ . Тогда функция $\overset{0}{F}$ в «собственной» по отношению к фактор-пространству $g = G/H$ системе координат связана с функцией F соотношением

$$\overset{0}{F}(\xi) \equiv \hat{R}(g^{-1}) F(\xi, g) = F(\xi, gg^{-1}). \tag{19}$$

Продолжим наш пример. С помощью оператора правого сдвига можно не только получить тензор $\overset{0}{\Pi}^{ss'}$ из тензора $\Pi^{ss'}$, но даже осуществить разложение $\Pi^{ss'}$ через $\overset{0}{\Pi}^{ss'}$. Для этой цели достаточно развернуть тождество $\Pi^{ss'} \equiv \hat{R}\hat{R}^{-1}\Pi^{ss'}$, где \hat{R}^{-1} — оператор, обратный оператору \hat{R} , т. е. \hat{R}^{-1} есть \hat{R} , взятый в «точке» G_3^+/G_1^+ . Действуя на $\Pi^{ss'}$, оператор \hat{R}^{-1} преобразует компоненты этого тензора по формуле (16). Следовательно, имеем

$$\hat{R}^{-1}\Pi^{ss'} = \hat{R}(G_3^+) \Pi^{ss'} = \sum_{s_0 s'_0} \Pi^{s_0 s'_0} B_{s_0 s'_0, ss'}(G_3^+). \tag{20}$$

С помощью (12) и явного вида $\Pi^{ss'}$ легко проверить, что приводимая матрица B есть прямое произведение $D^{(1s)} \times D^{(1s)}$. Действуя

далее на (20) оператором \hat{R} , из $\Pi^{s_0 s'_0}$ проецируем $\overset{0}{\Pi}^{s_0 s'_0}$ и в итоге получаем

$$\Pi^{s' s} = \sum_{s_0} \overset{0}{\Pi}^{s_0 s_0} D_{s_0 s}^{(13)}(G_3^+) D_{s_0 s_0}^{(13)}(G_3^+). \quad (21)$$

При выводе (21) была также использована диагональность тензора $\overset{0}{\Pi}^{s_0 s_0}$.

Обобщение этого примера для набора любых функций F_γ , заданных на фактор-пространстве g , ведет к такой формуле:

$$F_\gamma(\xi, g) \equiv \hat{R}(g^{-1}) \hat{R}(g) F_\gamma(\xi, g) = \sum_{\gamma'} \overset{0}{F}_{\gamma'}(\xi) B_{\gamma' \gamma}(g). \quad (22)$$

Легко проверить, что матрицы B образуют приводимое представление группы G . Разложение (22) возможно лишь в том случае, когда набор функций F_γ полный по отношению к операторам правого сдвига, т. е. когда F_γ образуют полный базис для матричного представления оператора $\hat{R}(G)$. В этом смысле и шла речь выше о полноте класса волновых функций (2).

Разложения типа (22) встречаются во многих областях теоретической физики. Это, например, разложение плоской волны через произведение шаровых функций и функций Бесселя, разложение векторных полей через векторные шаровые гармоники, разложение центрального потенциала через полиномы Лежандра и т. п.

Итак, уже вплотную подошли к задаче выделения коллективных и внутренних компонент волновой функции (2). Она очень просто решается с помощью формулы (22). Запишем выражение (12) для переменных ρ_i^s в собственной по отношению к фактор-пространству $q_{n-1} = G_{n-1}/G_{n-4}$ системе координат:

$$\hat{R}(q_{n-1}^{-1}) \rho_i^s = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 1, 2, \dots, n-4 \\ \rho^{(i)} D_{is}^{(13)}(G_3^+) & \text{при } i = n-3, n-2, n-1 \end{cases} \quad (23)$$

и воспользуемся разложением (22) применительно к волновой функции (2). Имеем

$$\Psi(\Gamma | \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s; Q) = \sum_{\Gamma'} \overset{0}{\Psi}(\Gamma' | \xi Q) B_{\Gamma' \Gamma}(q_{n-1}). \quad (24)$$

Здесь и в дальнейшем ξ обозначает набор шести коллективных переменных $\rho^{(s)} G_3^+$, а $\overset{0}{\Psi}$ — исходная волновая функция, в которой вместо аргументов ρ_i^s подставлены их значения, даваемые форму-

лой (23). Теперь стал ясен смысл термина «хорошие» операторы, о которых говорилось выше, — это операторы \hat{R} компактной и, следовательно, безусловно «хорошей» группы O_{n-1} . Замечание, следующее за формулой (22), объясняет также и смысл полноты набора функций (2).

Формула (24) неудовлетворительна в том отношении, что входящая в нее коллективная функция Ψ зависит от спиновых или спино-изоспиновых переменных ядра. Аппарат ортогональных групп, приспособленный для изучения пространственных переменных, никак не затрагивает спиновых координат, поэтому в окончательной формуле (24) они и остались там, где были с самого начала, а именно в волновой функции Ψ . Поскольку нами изучаются пространственные степени свободы ядра, то стбит уже при постановке задачи с самого начала исключить переменные Q . Такая возможность существует благодаря предложенной в тридцатых годах Вигнером супермультиплетной схеме [12].

Коротко напомним сущность супермультиплетной схемы. Пусть S_n — симметрическая группы, переставляющая пространственные переменные ядра, а S'_n — симметрическая группа, переставляющая или спиновые (для протонно-нейтронного ядра), или спино-изоспиновые (для нуклонного ядра) переменные ядра. Для отделения орбитальных переменных от спино-изоспиновых необходимо допустить, что в наборе квантовых чисел волновых функций содержатся неприводимые представления группы S_n и S'_n , обычно называемые схемами Юнга.

Будем считать, что пространственная волновая функция, зависящая от переменных ρ_n^s , характеризуется набором квантовых чисел $\Gamma_0 LM\lambda\mu$, где L и M — полный орбитальный момент ядра и его проекция; λ и μ — S_n -неприводимое представление и его базис; Γ_0 — произвольный набор остальных квантовых чисел. Пусть далее спино-изоспиновая (или спиновая) функция, зависящая от переменных Q , характеризуется набором квантовых чисел $\Gamma_S SM_S\lambda'\mu'$, где S и M_S — спиновый момент ядра и его проекция; λ' и μ' — S'_n -неприводимое представление и его базис; Γ_S — остальные квантовые числа. Хорошо известно (см., например, работу [9]), каков смысл набора Γ_S и как строится спино-изоспиновая функция, поэтому здесь нет необходимости более подробно останавливаться на ее свойствах, так как в дальнейшем речь пойдет лишь об орбитальных функциях. От набора их квантовых чисел Γ_0 потребуем лишь полноты по отношению к разложению типа (22). В характеристиках орбитальной и спино-изоспиновой волновых функций неизбежно появились квантовые числа орбитального L и спинового S моментов и их проекций M , M_S , так как лишь с их помощью можно обеспечить точный интеграл движения ядра — общий его момент J и его проекцию M_J .

Симметрические группы S_n и S'_n действуют в независимых друг от друга пространствах, в связи с чем полную антисимметрическую функцию ядра можно построить связыванием представлений λ и λ' с коэффициентами Клебша — Гордана симметрической группы в результирующее одномерное антисимметрическое представление a . Хорошо известно, что при таком связывании λ' и μ' однозначно коррелированы с λ и μ ; чтобы подчеркнуть это, вместо $\lambda'\mu'$ будем писать $\tilde{\lambda}\mu$. С помощью коэффициента Клебша — Гордана группы O_3^+ свяжем также L и S в J , и в итоге получим полную антисимметрическую волновую функцию супермультиплетной схемы:

$$\Psi \left(\begin{array}{c} \Gamma_0 \Gamma_s (LS) JM_J \\ (\tilde{\lambda}\lambda) a \end{array} \right) = \sum_{\mu} \Psi \left(\begin{array}{c} \Gamma_0 LM \\ \lambda \mu \end{array} \right) \Psi \left(\begin{array}{c} \Gamma_s SM_s \\ \tilde{\lambda}\mu \end{array} \right) C_{MM_S M_J}^{LSJ} C_{\mu\tilde{\mu}}^{\lambda\tilde{\lambda}a}. \quad (25)$$

В (25) специально использованы коэффициенты Клебша — Гордана симметрической группы вместо обычно используемого множителя $(d_\lambda)^{-1/2}$, где d_λ — размерность S_n неприводимого представления λ ; такая запись оставляет свободу в выборе фаз этих коэффициентов, что иногда может оказаться существенным.

Сравнительно малой ценой — введением приближенных интегралов движения $\Gamma_s L S \lambda$ — нам удалось избавиться от переменных Q и перенести задачу выделения коллективных переменных на пространственную функцию, входящую в разложение (25). Техника проецирования из нее коллективных и внутренних функций ничем не отличается от техники, использованной при выводе формулы (24). Более того, в результате появления в характеристике орбитальной функции приближенных квантовых чисел LM имеется возможность в явном виде выделить ее зависимость от углов Эйлера G_3^+ . Запишем выражение переменных ρ_i^s в собственной системе координат по отношению к G_3^+ и q_{n-1} :

$$\hat{R} ((G_3^+)^{-1}) \hat{R} (q_{n-1}^{-1}) \rho_i^s \equiv \rho_i^{s0} = \rho^{(s)} \delta (si), \quad (26)$$

и тогда с помощью общей формулы (22) легко находим, что

$$\Psi \left(\begin{array}{c} \Gamma_0 LM \\ \lambda \mu \end{array} \middle| \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \right) = \sum_{\Lambda_0} \Theta (\Lambda_0 LM | \xi) B_{\Lambda_0, \Gamma_0 \lambda \mu} (q_{n-1}), \quad (27)$$

где B имеет тот же самый смысл, что и в (24); коллективная функция Θ зависит от углов Эйлера следующим образом:

$$\Theta (\Lambda_0 LM | \xi) = \sum_K \Theta_0 (\Lambda_0 LK | \rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)}) D_{KM}^L (G_3^+); \quad (28)$$

Θ_0 получаем из исходного набора функций Ψ с помощью формулы

$$\Theta_0(\Lambda_0 LK | \rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)}) = \Psi(\Lambda_0 LK | \rho_1^s = 0, \dots, \rho_{n-4}^s = 0, \rho_{n-3}^{(x)} = \rho^{(x)}, \rho_{n-3}^{(y)} = 0, \dots, \rho_{n-1}^{(y)} = 0, \rho_{n-1}^z = \rho^{(z)}). \quad (29)$$

В (28) K — проекция момента ядра на собственную ось z . Выражения типа (28) обычно используются в феноменологических коллективных моделях ядра при разложении коллективной функции по матричным элементам матрицы D^L .

Обратим особое внимание на индекс суммирования в (27), где он обозначен новой буквой. Это подчеркивает то, что нумерацию строк матрицы B можно задавать набором квантовых чисел Λ_0 , не имеющим ничего общего с набором $\Gamma_0 \lambda \mu$. Согласно (15) и (16) строки и столбцы матрицы B преобразуются независимо, поэтому нет необходимости коррелировать между собою и их обозначения. Вид функций B определяет зависимость волновой функции ядра от внутренних переменных, следовательно, эти функции можно называть внутренними волновыми функциями ядра [5].

Выражение (24) в общем случае и выражения (27) — (29) в случае супермультиплетных орбитальных функций дают общее решение поставленной выше задачи выделения коллективных и внутренних функций ядра. Действительно, функции $\overset{0}{\Psi}$ в (24) известны, если известен набор исходных функций Ψ . В свою очередь, при известных Ψ в принципе можно найти и функции B : умножая (24) на $\overset{0}{\Psi}^*$, интегрируя по ξ и суммируя по Q , получаем систему алгебраических уравнений для определения матричных элементов матрицы B :

$$\sum_Q \int d\tau(\xi) \overset{0}{\Psi}^*(\Gamma'' | \xi Q) \Psi(\Gamma | \rho_1^s, \dots, \rho_{n-1}^s; Q) = \sum_{\Gamma'} c_{\Gamma''\Gamma'} B_{\Gamma'\Gamma}(q_{n-1}), \quad (30)$$

где входящие числа $c_{\Gamma''\Gamma'}$ вычисляются по формуле

$$c_{\Gamma''\Gamma'} = \sum_Q \int d\tau(\xi) \overset{0}{\Psi}^*(\Gamma'' | \xi Q) \Psi(\Gamma' | \xi Q). \quad (31)$$

Выражение $d\tau(\xi)$ получено в работах [1, 2], а элемент объема для переменных q_{n-1} можно найти в работе [13] (см. также работы [4, 8]). Следует обратить внимание на тот факт, что коллективные функции Θ не ортогональны по Λ_0 , поэтому интеграл (31) при $\Lambda_0' \neq \Lambda_0$ отличен от нуля.

5. КИНЕМАТИЧЕСКИ ПРОСТЕЙШИЕ ОРБИТАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЯДРА

Хотя приведенные выше формулы в принципе решают задачу выделения коллективной и внутренней волновых функций ядра, их применение в случае набора произвольных исходных функций Ψ (Γ) или даже орбитальных функций супермультиплетной схемы Ψ ($\Gamma, \lambda, \mu, L, M$) может оказаться очень трудной задачей. Чрезмерная общность этих формул не позволяет раскрыть важные свойства коллективных и в особенности внутренних волновых функций и рассмотреть некоторые практически важные вопросы, такие, например, как полное или хотя бы частичное разделение коллективных и внутренних степеней свободы ядра. Желательно также выяснить смысл набора квантовых чисел Λ_0 в разложении (27) и записать условие ортогональности для функций B , а также аналог соотношения ортогональности для функций Θ .

Если еще раз проследить весь пройденный путь, то можно убедиться в том, что полученные выше результаты опираются лишь на два сформулированных в разд. 1 требования кинематической корректности и, кроме того, на предположение о супермультиплетной структуре волновой функции ядра. Все возможности, заложенные в условиях 3 и 4, уже исчерпаны, и теперь необходимо сформулировать новое требование, открывающее путь для дальнейшей детализации формул (27) и (29).

Существует необозримое множество супермультиплетных функций (25), удовлетворяющих требованию кинематической корректности. В их числе есть и собственные функции той части истинного гамильтониана ядра, которая сохраняет орбитальный момент и схему Юнга. До тех пор, пока не изучаются решения соответствующего уравнения Шредингера, из множества орбитальных функций разумно отыскать простейшие. При этом задача будет корректно сформулирована лишь тогда, когда будет указан критерий простоты. Алгебраический аппарат позволяет легко это сделать, так как в теории представлений групп синонимом простоты является понятие неприводимости. Действительно, по определению неприводимая величина (пространство, матрица, оператор) — это самая простая величина, не поддающаяся дальнейшему раздроблению. Поэтому неприводимость и является необходимым и достаточным кинематическим критерием для отбора простейших из класса орбитальных функций.

Сразу оговоримся, что требование кинематической простоты в очень большой степени сужает класс гамильтонианов, собственные функции которых удовлетворяют этому критерию. Сужение класса рассматриваемых гамильтонианов здесь производится вторично: с самого начала речь шла о функциях произвольного,

в том числе и точного, гамильтониана ядра, а затем рассматривались лишь собственные функции гамильтониана, сохраняющего квантовые числа λ и L . Пока еще рано говорить, какой именно тип гамильтонианов попадает под категорию кинематически простейших, но несомненно одно, что они будут сильно отличаться от реалистического гамильтониана ядра.

Условимся называть супермультиплетные функции, удовлетворяющие требованиям 3 и 4 и только что сформулированному критерию кинематической простоты, простейшими кинематическими корректными волновыми функциями и приступим к дальнейшей детализации результатов, полученных в разд. 4.

Критерий кинематической простоты можно применить к преобразованиям любой группы. Вид формулы (27) подсказывает, что в первую очередь его целесообразно применить к преобразованиям группы O_{n-1} . Действительно, входящая в (27) матрица B дает матричную реализацию представления оператора правого сдвига группы O_{n-1} . В этом можно сразу убедиться, если к функции (27) применить формулу (16). Потребуем, чтобы подобное представление было наиболее простым, т. е. неприводимым, а это возможно лишь тогда, когда набор квантовых чисел Γ_0 содержит характеристику неприводимых представлений ω ортогональной группы O_{n-1} . Симметрическая группа S_n вложена в группу O_{n-1} по цепочке $O_{n-1} \supset S_n$, и для характеристики полного базиса этой цепочки может понадобиться индекс α , который различает одинаковые λ , содержащиеся в ω . Поэтому критерий кинематической простоты, примененный по отношению к группе O_{n-1} , означает, что в (27) Γ_0 следует заменить новым набором $\Gamma_0 \omega \alpha$, где Γ_0 — произвольный набор остальных квантовых чисел. Набор Λ_0 также заменим $\Lambda_0 \omega' \nu^0$, где ν^0 — базис O_{n-1} -неприводимого представления ω ; Λ_0 — опять произвольный набор остальных квантовых чисел. Воспользовавшись еще свойствами матричных элементов матриц неприводимых представлений, которые дают $\delta(\Lambda_0 \Gamma_0) \delta(\omega' \omega)$ из (27), учитывая также (28), получим

$$\Psi \left(\begin{matrix} \Gamma_0 LM \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \right) = \sum_{\nu^0 \in K} \Theta \left(\begin{matrix} \Gamma_0 LK \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)} \right) \times \\ \times (d_L)^{1/2} D_{KM}^L(G_3^+) (d_\omega)^{1/2} D_{\nu^0, \alpha \lambda \mu}^\omega(q_{n-1}), \quad (32)$$

где D^ω — матрица O_{n-1} -неприводимого представления ω ; d_L и d_ω — размерности представлений L и ω , введенные из-за соображения нормировки. Формулы (28) и (29) модифицируются лишь незначительно: в них Λ_0 необходимо заменить $\Gamma_0 \omega \nu^0$.

Сравнение (32) с (27) показывает, что благодаря критерию простоты удалось их конкретизировать: вместо неопределенных внутренних функций ядра B теперь появились хорошо опреде-

ленные функции — матричные элементы матрицы D^ω , зависящие от основного массива, а именно $3(n-3)$ переменных ядра. Эти функции характеризуются физическим набором квантовых чисел $\alpha\mu$, нумерующим столбцы матрицы D^ω , и пока не определенным набором ν^0 , нумерующим строки матрицы D^ω , о котором лишь известно, что он задает базис O_{n-1} неприводимого представления ω . Полностью неопределенным остается новый набор квантовых чисел Γ_0 , характеризующий коллективную функцию ядра. К этой функции пока не применялся критерий кинематической простоты.

Сейчас появилась возможность доказать одно важное свойство внутренних волновых функций D^ω , позволяющее, в частности, многое сказать о смысле квантовых чисел ν^0 . Начнем с выяснения трансформационных свойств переменных (12) по отношению к преобразованиям группы O_{n-1} . Пусть G_{n-1} — произвольный элемент этой группы. Тогда, действуя на (12) оператором левого сдвига $\hat{L}(G_{n-1})$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}(G_{n-1}) \rho_i^s &= \sum_{s'} \rho^{(s')} D_{s's}^{(13)}(G_3^+) D_{s'i}^{(1)n-1}(G_{n-1}^{-1} q_{n-1}) = \\ &= \sum_{s'} \rho^{(s')} D_{s's}^{(13)}(G_3^+) \sum_{i'} D_{s'i'}^{(1)n-1}(G_{n-1}^{-1}) D_{i'i}^{(1)n-1}(q_{n-1}). \end{aligned} \quad (33)$$

Возьмем теперь в (33) в качестве элемента группы O_{n-1} элементы G_{n-4} ее подгруппы O_{n-4} и вспомним, что в (33) s' обозначает лишь последние три строки матрицы $D^{(1n-1)}$. Эти строки не зависят от G_{n-4} , в результате чего в качестве G_{n-4} можно взять единичный элемент e . Но тогда в (33) под знаком суммы появляется $\delta(s'i')$ и получаем $\hat{L}(G_{n-4}) \rho_i^s = \rho_i^s$. Это важное свойство переменных ρ_i^s показывает, что они являются инвариантами по отношению к левому сдвигу на произвольный элемент подгруппы O_{n-4} . Можно показать (подробно см. в работе [8]), что из-за этой левоинвариантности переменных ρ_i^s в разложение (32) входят лишь те строки матрицы D^ω , которые являются O_{n-4} скалярными строками. Иными словами, базис ν^0 нумеруется с помощью индексов неприводимых представлений групп G^0 цепочки $O_{n-1} \supset G^0 \supset O_{n-4}$, где G^0 — произвольные группы, которые помещаются между группами O_{n-1} и O_{n-4} .

Таким образом, доказано, что базис цепочки $O_{n-1} \supset G^0 \supset O_{n-4}$ дает правила отбора в разложении (32). Теперь выяснилась причина, по которой при обсуждении (27) было особенно подчеркнута различие в нумерации строк и столбцов матрицы B . Если возвратиться к более конкретной формуле (32), то станет ясным, что способ нумерации столбцов матрицы D^ω с точностью до выбора индекса повторения α задается принципом Паули, тогда как оптимальным базисом для строк этой матрицы служит базис только что рассмотренной цепочки. В дальнейшем будем считать, что

в (32) ν^0 обозначает базис лишь цепочки $O_{n-1} \supset G^0 \supset O_{n-4}$, причем верхний индекс нуль буквы ν указывает на свойство O_{n-4} -скалярности этого базиса.

В математике изученные специальные функции, заданные на фактор-пространствах ортогональных групп (см., например, работу [13]), очень просты по сравнению с функциями D^ω . Поэтому были затрачены значительные усилия для подробного их изучения, вплоть до разработки рекуррентного метода построения (подробно см. в работах [6, 7]). В настоящее время свойства таких функций известны столь подробно, что разложение (32) можно применять для исследования свойств конкретных ядер.

Не будем здесь подробно излагать общую теорию внутренних волновых функций D^ω , а обсудим лишь простейшие их свойства. Эти функции ортогональны по индексам $\nu^0 \omega \alpha \mu$ [6, 7]. Из ортогональности функций D^ω вытекает несколько своеобразное свойство ортогональности коллективных волновых функций ядра Θ [7, 8].

Базис ν^0 задает число слагаемых в (32); от этого числа зависит, насколько связаны между собою внутреннее и коллективное движения нуклонов в ядре. Выше было выяснено, что промежуточные группы G^0 можно выбрать по своему усмотрению. В математическом отношении наиболее просты группы $G^0 \rightarrow O_{n-2} \supset O_{n-3}$, ведущие к канонической цепочке $O_{n-1} \supset O_{n-2} \supset O_{n-3} \supset O_{n-4}$, в случае которой вместо ν^0 удобно писать набор $\overline{\omega\omega\bar{0}}$, подразумевая, что $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}$ и $\bar{0}$ — это неприводимые представления группы O_{n-2} , O_{n-3} и O_{n-4} соответственно. Когда группы G^0 полностью зафиксированы, появляется возможность найти число слагаемых разложения (32). Это можно легко осуществить, пользуясь правилами приведения на канонической цепочке ортогональных групп и таблицами, приведенными в работах [9, 14], в которых перечислены состояния ω , разрешаемые принципом Паули.

Анализ таблиц разрешенных состояний ядер с числом нуклонов $n \leq 40$ показывает [8], что разложение (32) с одним слагаемым встречается крайне редко. В подавляющем большинстве случаев даже для простейших кинематических корректных волновых функций (32) имеется больше одного слагаемого, а это означает, что из-за кинематических причин в ядре внутреннее и коллективное движения нуклонов не разделяются.

Сколько же слагаемых имеется в сумме (32)? Возьмем, например, O_{11} — неприводимое состояние $\omega = (44)$ ядра ^{12}C . Подсчет дает, что в этом случае базис ν^0 состоит из 15 компонент. Много ли это или мало? С одной стороны, достаточно много, чтобы сделать невозможным разделение коллективного и внутреннего движений нуклонов в ядре. Но, с другой стороны, очень мало по сравнению с размерностью матрицы $D^{(44)}O_{11}$ — неприводимого представле-

ния (44). Можно найти, что эта размерность равна 112200. Поэтому лишь благодаря O_{n-4} -скалярным свойствам базиса v^0 сумма (32) становится обозримой.

При желании в (32) можно пользоваться другими промежуточными группами G^0 и, например, вместо $\overline{\omega\omega}$ взять базис цепочки $O_{n-1} \supset O_3 \dot{+} O_{n-4}$, где $\dot{+}$ обозначает прямую сумму матриц; O_3 — группа вращения абстрактного трехмерного пространства, натянутого на векторы Якоби ρ_{n-3} , ρ_{n-2} и ρ_{n-1} . Эту группу нельзя путать с группой вращения «нашего» трехмерного пространства.

Для цепочки $O_3 \dot{+} O_{n-4}$ базис v^0 удобно обозначать набором $\beta l v_l$, где β — индекс повторения; l — неприводимое представление группы O_3 ; v_l — его базис. Индекс l принимает значения $0, 0^*, 1, 1^*, \dots$, где звездочка обозначает сопряженные представления. Если не интересоваться отражением и спуститься по цепочке $O_3 \supset O_3^+$, то l^* эквивалентно l , и l приобретает смысл привычного момента. Этот момент связан с собственным вращением абстрактного трехмерного пространства, поэтому его можно назвать квазимоментом [5].

Приведем простые правила, позволяющие перечислять все возможные значения квазимомента l . В теории ядра встречаются O_{n-1} -неприводимые представления ω , задаваемые тремя положительными целыми числами $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \omega_3$. Если ввести обозначения $E_1 = \omega_1 - \omega_3$ и $E_2 = \omega_2 - \omega_3$, то справедливо следующее утверждение: в O_{n-4} -скалярном базисе O_{n-1} -неприводимого представления $\omega \equiv (\omega_1 \omega_2 \omega_3)$ есть в точности такие квазимоменты l , какие моменты L есть в SU_3 -неприводимом представлении $[E_1 E_2]$. Правила приведения для цепочки $SU_3 \supset O_3^+$ хорошо известны (см., например, работу [9]), поэтому становятся известными и значения квазимомента, содержащиеся в представлении $(\omega_1 \omega_2 \omega_3)^*$. Если необходимо перечислить представления полной ортогональной группы O_3 , то приходится обратиться к более сложным правилам [8].

Приведем здесь простой пример базиса цепочки $O_3 \dot{+} O_{n-4}$. Пусть $\omega = (64)$, тогда l принимает значения $0, 2$ (два раза), $3^*, 4$ (два раза), $5^*, 6$.

Квантовые числа цепочки $O_{n-1} \supset O_3 \dot{+} O_{n-4}$ менее удобны в математическом отношении, чем числа канонической цепочки, но более интересны из-за особой роли абстрактного трехмерного пространства. Зафиксировать базис $v_l O_3$ -неприводимого пред-

* Этот, по-видимому, никем до сих пор не отмеченный изоморфизм между нумерациями базисов столь различной природы интересен с алгебраической точки зрения. Разумеется, его можно установить и в общем случае O_{r_2} -скалярного базиса $O_{r_1+r_2}$ -неприводимого представления $(\omega_1, \dots, \omega_{r_1})$.

ставления l можно несколькими способами. Первый из них — это введение обычной проекции m , задаваемой цепочкой $O_3^+ \supset O_2^+$. Но эта возможность не единственная. Базис v_l для группы O_3 (но не группы O_3^+), например, можно задать с помощью цепочки $S_3 \supset S_2$, подразумевая при этом, что группы S_3 переставляют векторы $\rho_{n-3}, \rho_{n-2}, \rho_{n-1}$, а группы S_2 — векторы ρ_{n-2} и ρ_{n-1} .

Такой базис позволяет сортировать коллективные и внутренние функции относительно их поведения на геометрическую перестановку трех осей трехмерного подпространства $(n-1)$ -мерного пространства векторов Якоби; симметрическая группа S_3 вложена здесь в цепочку $O_3 \supset S_3$, поэтому перестановки непосредственно не переставляют однонаправленных векторов r .

Имеется еще одна возможность выбора базиса v_l с помощью максимально плотного вложения симметрической группы S_4 в ортогональную группу O_3 по цепочке $O_3 \supset S_4$. Тогда элементы группы S_4 , переставляя переменные $\Gamma_{n-3}, \Gamma_{n-2}, \Gamma_{n-1}$ и Γ_n , индуцируют преобразование векторов Якоби $\rho_{n-3}, \rho_{n-2}, \rho_{n-1}$. Далее базис S_4 неприводимого представления фиксируется цепочкой $S_3 \supset S_2$, причем S_3 и S_2 соответственно переставляют векторы $\Gamma_{n-2}, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$ и Γ_{n-1}, Γ_n .

Здесь специально подробно описаны различные возможности выбора базиса v^0 , так как, будучи эквивалентными в формуле (32), они могут быть различными при искусственном обрывании этого ряда.

Может оказаться, что квантовые числа одного из таких наборов иногда являются «хорошими» приближенными квантовыми числами, допускают приближенное обрывание ряда (32) и тем самым приближенное разделение коллективных и внутренних степеней свободы ядра. Если попытаться провести параллель между квантовым числом K в разложении (28) и базисом v^0 , то можно сказать, что K представляет проекцию момента L в собственной (по отношению к трехмерному вращению) системе координат, тогда как v^0 для любой из перечисленных выше цепочек дает «проекцию момента» ω в собственной (по отношению к $(n-1)$ -мерному вращению) системе координат. Если эту аналогию продолжать, то можно еще заметить, что формула (28) выделяет зависимости коллективных функций от углов Эйлера — при этом требуется использовать весь запас неприводимых функций на группе O_3^+ , тогда как формула (32) дополнительно раскрывает зависимость микроскопической волновой функции и от внутренних переменных ядра, причем для этой цели достаточно использовать лишь ничтожную часть запаса неприводимых функций, заданных на группе O_{n-1} , а именно набор O_{n-4} -скалярных (по отношению к левому сдвигу) функций, заданных на фактор-пространстве O_{n-1}/O_{n-4} .

6. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ФУНКЦИЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИ ПРОСТЕЙШИЕ КОЛЛЕКТИВНЫЕ ФУНКЦИИ ЯДРА

Формула (32) дает кинематически простейшие по отношению к преобразованиям группы $O_3^+ \times O_{n-1}$ орбитальные волновые функции ядра $D_{KM}^L D_{\nu^0, \alpha\lambda\mu}^0$. Существенно, что в характеристике этих функций имеются супермультиплетные квантовые числа LM и $\lambda\mu$, наличия которых необходимо и достаточно для построения с их помощью полной волновой функции ядра. Из (25) видно, что такая функция будет характеризоваться точными JM_J и приближенными $\nu^0 \omega \alpha \lambda K \Gamma_S L S$ квантовыми числами.

Возьмем теперь произвольный трансляционно-инвариантный гамильтониан ядра $\mathcal{H}(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}; Q)$, с помощью (12) осуществив в нем замену переменных и усредним его по переменным G_3^+, q_{n-1}, Q на базисе только что описанных функций. Такое усреднение дает следующую систему дифференциальных уравнений по переменным $\rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)}$:

$$\sum_{\nu^0 K} \langle \nu^0 \omega' \alpha' K' \lambda' \Gamma_S' (L' S') J | \mathcal{H} - \mathcal{E} | \nu^0 \omega \alpha K \lambda \Gamma_S (L S) J \rangle = \\ = \Theta(\nu^0 K | \rho^{(s)}) = 0, \quad (34)$$

где \mathcal{E} — собственное значение гамильтониана ядра.

Если в действительности атомные ядра склонны в первую очередь возбуждаться по коллективным степеням свободы, то такая система уравнений позволяет найти хорошие коллективные волновые функции ядра $\Theta(\rho^{(s)})$. Уравнения (34) характеризуются всеми точными интегралами движения, сформулированными в условии 4, поэтому они являются корректными в кинематическом отношении. Такая система уравнений является микроскопическим обобщением уравнений коллективной модели Бора — Моттelsona. Она бесконечна, но в бесконечность «уходит» лишь по одному квантовому числу ω . Действительно, фиксированное ω определяет наборы ν^0 и $\alpha\lambda$. В свою очередь, каждый λ задает конечный набор Γ_S и S , а для данного J каждый S допускает конечный набор орбитальных моментов L . Следовательно, реальной задачей является исследование системы (34) в диагональном по ω приближении. Уравнения еще более упрощаются, если для начала довольствоваться гамильтонианом, не зависящим от спиновых и изоспиновых переменных. Техника усреднения \mathcal{H} по переменным $G_3^+ q_{n-1} Q$ приводится в работах [15, 5—7], а в работах [16, 17] приведены примеры таких уравнений (см. также работу [4]) и обсуждены их свойства.

При выводе разложения (32) из более общего разложения (27) было использовано требование кинематической простоты по отно-

шению к группе O_{n-1} , что позволило перейти от неопределенных внутренних волновых функций $B_{\Delta_0, \Gamma_0 \lambda \mu}$ к полностью определенным волновым функциям $D_{\nu^0, \alpha \lambda \mu}^{\omega}$. Этот принцип можно применить и к другим группам, в частности к группе $O_{3(n-1)}$. С помощью (13) в функциях (29) $\rho^{(s)}$ заменим $\tilde{\rho} \tilde{g}$ и Γ_0 заменим $\Gamma_0 \omega \nu^0$; подействуем на них оператором $T(\tilde{g}^{-1}) T(\tilde{g})$ и, воспользовавшись разложением (22), применяя его к фактор-пространству \tilde{g} , получим

$$\Theta \left(\begin{matrix} \Gamma_0 L K \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \tilde{\rho} \tilde{g} \right) = \sum_{\Delta} \Theta(\Delta | \rho) B_{\Delta, \Gamma_0 L K \omega \nu^0}(\tilde{g}). \quad (35)$$

Матрицы B являются проводимыми матрицами представления группы $O_{3(n-1)}$. Как и в (27), использование нового обозначения Δ в качестве индекса суммирования означает, что строки и столбцы матрицы B можно нумеровать различными способами. Требования кинематической простоты по отношению к группе $O_{3(n-1)}$ означает, что рассматривается лишь такой класс функций (35), для которого матрица B является $O_{3(n-1)}$ -неприводимой матрицей. Это значит, что набор Γ_0 заменяется $\Gamma_0 \Omega \delta$, где Ω обозначает $O_{3(n-1)}$ -неприводимое представление; δ — индекс повторения L и ω в Ω ; Γ_0 — произвольный новый набор остальных характеристик. Базис Δ пронумеруем по-другому: вместо него будем писать $\Delta \Omega' \bar{\Omega} \xi$, где $\bar{\Omega} \xi$ — $O_{3(n-1)-1}$ неприводимое представление и его базис; Δ — остальные квантовые числа. Как и в разд. 5, можно показать, что переменные ρ_i^{ξ} являются инвариантами по отношению к левому сдвигу операторов группы $O_{3(n-1)-1}$. По этой причине, в полной аналогии с правилами отбора, обусловливаемыми O_{n-4} -скалярностью строк матрицы D^{ω} , здесь появляются лишь $O_{3(n-1)-1}$ -скалярные строки матрицы D^{ω} , т. е. $\bar{\Omega} = 0$ (подробно см. в работе [8]), вследствие чего в (35) остается лишь одно слагаемое, и кинематически простейшая по отношению к фактор-пространству \tilde{g} коллективная функция Θ приобретает такой вид:

$$\Theta \left(\begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L K \\ \omega \nu^0 \end{matrix} \middle| \tilde{\rho} \tilde{g} \right) = \Theta(\Gamma_0 \Omega | \rho) D_{\delta L K \omega \nu^0}^{\Omega}(\tilde{g}). \quad (36)$$

Функция $D^{\Omega}(\tilde{g})$ — микроскопический аналог базисных функций модели Бора — Моттельсона, используемых при описании β - и γ -колебаний ядра. Подставляя (36) в (32) и осуществляя суммирование по $\nu^0 K$, получаем

$$\Psi \left(\begin{matrix} \Gamma_0 \Omega \delta L M \\ \omega \alpha \lambda \mu \end{matrix} \middle| \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \right) = \Theta(\Gamma_0 \Omega | \rho) D_{\delta L M \omega \alpha \lambda \mu}^{\Omega}(g), \quad (37)$$

где $g = \tilde{g}G_3^+g_{n-1}$. Функция D^Ω нормирована на d_Ω , где d_Ω — размерность представления Ω .

Формула (37) остается справедливой и в том случае, если переменным g придать другой смысл. Переходя от более общего класса функций (32) к более простым (37), мы отказались от решения уравнения Шредингера по коллективным переменным \tilde{g} и вместо точных решений взяли кинематически простейшие функции. Поэтому отпала необходимость знать зависимость матричных элементов матрицы D^Ω от коллективных и внутренних переменных ядра. Вспомним, что эти переменные появились в результате специально выбранной параметризации группы $O_{3(n-1)}$, которая обуславливала и сложную структуру аргумента функции D в (11). Возражения против использования параметров факторпространства $O_{3(n-1)}/O_{3(n-1)-1}$ теперь отпадают, поэтому при замене переменных можно пользоваться формулой (9) с $r = 3(n-1)$, в которую входят матричные элементы последней строки матрицы D , параметризованной по формуле (8).

При такой интерпретации входящие в (37) функции D^Ω родственны многомерным шаровым функциям (см., например, гл. IX работы [13]). Причина этого кроется в том, что те и другие функции являются матричными элементами скалярной строки (или столбца) матриц неприводимых представлений группы вращений. Однако многомерные шаровые функции намного проще функций D^Ω , которые характеризуются неканоническим базисом цепочки $O_{3(n-1)} \supset O_3^+ \times O_{n-1} \supset O_3^+ \times S_n$. Такое обстоятельство очень затрудняет их построение. Несмотря на это, в настоящее время существует детально разработанная техника расчета на базисе таких функций и, в частности, развиты методы вычисления, основанные на идее генеалогического разложения [18]. Подставляя (37) в (25), получаем функции так называемого метода K -гармоник (метода гиперсферических функций) [19, 20]. Усредняя гамилтониан ядра по всем угловым и спино-изоспиновым переменным на функциях метода K -гармоник, получаем систему дифференциальных уравнений по переменной ρ :

$$\langle \Omega' \delta' \omega' \alpha' \lambda' \Gamma_S' (L'S') J | \mathcal{H} - \mathcal{E} | \Omega \delta \omega \alpha \lambda \Gamma_S (LS) J \rangle \Theta(\Omega | \rho) = 0. \quad (38)$$

Бесконечная система уравнений (38), позволяющая в принципе найти коллективные функции $\Theta(\rho)$, «уходит» в бесконечность по квантовому числу Ω , поэтому в практических расчетах приходится ограничить возможные значения Ω , а зачастую — и другие квантовые числа. Имеется немало работ, в которых исследуются решения укороченной системы (38) в случае малонуклонных систем и для магических или околomagических ядер, содержащих до нескольких десятков нуклонов. Разбор этих работ

(ссылки на многие из них можно найти в работе [21]) не входит в нашу задачу. Здесь только укажем, что сравнительно простая техника усреднения, разработанная в наиболее общем алгебраическом виде в работе [22], позволяет легко выписать укороченную систему уравнений (38).

Таким образом, выяснилось, что система уравнений (38) получается из системы (34), если последнюю дополнительно усреднить по \tilde{g} на функциях $D^\Omega(\tilde{g})$. Неопределенными остались еще функции, зависящие от переменной ρ , и последнее, что необходимо сделать, — это наложить на них требование кинематической простоты по отношению к подходящей непрерывной группе. В качестве такой группы выберем унитарную группу $U_{3(n-1)}$, которая является универсальной среди так называемых компактных групп (см., например, работу [23]). Эта универсальность, однако, приносит и дополнительные условия, так как в случае унитарных групп необходимо четко определить объект их преобразования, что в конечном итоге задает и конкретный вид функций, зависящих от переменной ρ .

Не вдаваясь в детали [8], здесь только отметим, что в том случае, когда объектами преобразования $U_{3(n-1)}$ -группы являются операторы рождения и уничтожения осцилляторных квантов, тогда

$$(d_\Omega)^{-1/2} \Theta(E\Omega | \rho) = R_{E\Omega}(\rho), \quad (39)$$

где R — радиальная функция $3(n-1)$ -мерного гармонического осциллятора; E — число осцилляторных квантов.

Выбор $\Theta(\rho)$ в виде радиальной осцилляторной функции принципиально сужает рассматриваемое пространство функций до пространства функций дискретного спектра. Действительно, как это неоднократно отмечалось в работах по методу K -гармоник, функции (37) дают полный n -частичный базис по угловым переменным, пригодный для исследования связанных состояний и состояний непрерывного спектра. Переменная ρ всегда обеспечивает возможность уйти в бесконечность нуклону или некоторой нуклонной ассоциации. Технически это осуществляется с помощью такого генеалогического переразложения [18], которое подготавливает волновую функцию для отщепления интересующего фрагмента ядра. Выбор $\Theta(\rho)$ в виде (39) закрывает каналы всех процессов, требующих учета свойств непрерывного спектра, и оставляет, строго говоря, возможность изучать лишь связанные состояния.

Если ограничиться задачами на связанных состояниях, то, подставляя (39) в (36) и учитывая множители, которые обеспечивают нормировку на единицу, получаем кинематически простейшие коллективные функции:

$$\Theta(E\Omega \delta L K \omega^0 | \rho \tilde{g}) = (d_\Omega / d_L d_\omega)^{1/2} R_{E\Omega}(\rho) D_{0, \delta L K \omega^0}^\Omega(\tilde{g}). \quad (40)$$

В (40) можно возвратиться к переменным $\rho^{(x)}$, $\rho^{(y)}$, $\rho^{(z)}$. Для этих переменных существует другой, более естественный базис, задаваемый цепочкой $U_{3(n-1)} \supset U_3 \times U_{n-1} \supset O_3^+ \times O_{n-1}$, переход к которому имеет следующий вид [24]:

$$\Theta \left(\begin{array}{c} [E_1 E_2 E_3] \gamma LK \\ \beta \omega \nu^0 \end{array} \middle| \rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)} \right) = \sum_{\Omega \delta} A_{\beta [E_1 E_2 E_3] \gamma, \Omega \delta}^{(E \omega L)} \times \Theta (E \Omega \delta L K \omega \nu^0 | \rho^{(x)} \rho^{(y)} \rho^{(z)}). \quad (41)$$

Здесь $[E_1 E_2 E_3]$ обозначает неприводимое представление U_3 -группы, а β и γ — индексы повторения для цепочек $U_{n-1} \supset O_{n-1}$ и $U_3 \supset O_3^+$. Во многих практически интересных случаях матрица A единична, поэтому, имея функции (41), заменой переменных (13) легко получить и функции (40). Два способа конструирования функций (41) приведены в работах [5, 7].

Прежде чем закончить описание простейших кинематически корректных волновых функций ядра, обратим внимание на то обстоятельство, что эти функции теперь стали полностью определенными, и, следовательно, как и в случае функций (37), еще раз появилась дополнительная свобода выбора их переменных. Если мы не собираемся решать динамическую задачу по какому-либо переменным, а хотим пользоваться лишь простейшими функциями, то отпадает необходимость представить эти функции в виде (37), и проще всего в них возвратиться к исходным переменным ρ_i^{\pm} . Тогда имеем полную волновую функцию ядра (25), построенную с помощью орбитальных функций, квантовые числа которых задаются или цепочкой $U_{3(n-1)} \supset U_3 \times U_{n-1} \supset O_3^+ \times O_{n-1} \supset O_3^+ \times S_n$, или цепочкой $U_{3(n-1)} \supset O_{3(n-1)} \supset O_3^+ \times O_{n-1} \supset O_3^+ \times S_n$.

Волновые функции первого типа можно назвать функциями унитарной схемы, а второго типа — функциями ортогональной схемы. Базис функций этих схем связан преобразованием (41), следовательно, если нет необходимости их различать, удобно функции обоих типов называть функциями схемы $U_{3(n-1)}$ [24]. Существует подробно разработанная техника расчета с такими функциями [9, 18], основанная на генеалогическом разложении или на еще более экономном методе разложения матрицы плотности через групповые операторы. Эта техника позволяет усреднять физические операторы на базисе функций схемы $U_{3(n-1)}$ и тем самым использовать их для изучения свойств связанных состояний ядер. На основе этих методов в работах [5—7, 22] приводится техника вывода уравнений (34) и (38), позволяющая заменить невыполнимую задачу построения базисных функций D^{ω} и D^{Ω} намного более простой задачей вычисления компонент соответствующих матриц плотности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Требования кинематической корректности и аппарат индуцированных представлений позволили заменить произвольные волновые функции ядра (2) совершенно конкретными внутренними и коллективными функциями или функциями схемы $U_{3(n-1)}$. Этот алгебраический аппарат, в частности, позволил сформулировать требование кинематической простоты, которое наряду с техническим вопросом — отделением пространственных функций от спино-изоспиновых с помощью супермультиплетной схемы — приводит к наиболее простым кинематически корректным волновым функциям ядра. Уточним последнее утверждение. Откуда известно, что эти функции действительно наиболее просты? Теория групп Ли дает гарантию подобному утверждению. Уже говорилось, что кинематическая простота означает неприводимость по отношению к преобразованиям некоторой непрерывной группы. Простейшие среди групп Ли — это компактные группы [23]. Они классифицированы: известен их полный список, подобно, например, списку точечных или пространственных групп, используемых в теории молекул и кристаллов. Более того, известны цепочки, позволяющие подняться от компактной подгруппы к компактной группе по максимально плотной цепочке, т. е. такой цепочке, в которой между группой и ее подгруппой нельзя вставить еще какую-нибудь непрерывную группу.

Плотное вложение группы S_n в группу O_{n-1} было использовано при доказательстве сформулированных выше теорем. Это дало нам гарантию того, что группа O_{n-1} наиболее проста, и позволило найти внутренние функции ядра. В настоящем обзоре, хотя это специально и не акцентировалось, также использовалось свойство наиболее плотного вложения при переходе от подгруппы $O_3^+ \times O_{n-1}$ к группе $O_{3(n-1)}$ и далее от подгруппы $O_{3(n-1)}$ к группе $U_{3(n-1)}$; здесь имеется некоторая неоднозначность ввиду того, что существует и другой путь — переход от подгруппы $O_3^+ \times O_{n-1}$ к группе $U_3 \times U_{n-1}$ и затем — к группе $U_{3(n-1)}$. Однако эта неоднозначность несущественна, так как базисы, задаваемые подгруппами обеих цепочек из-за преобразования (41), являются унитарно-эквивалентными. Поэтому фактически было доказано, что функции унитарной (или ортогональной) схемы действительно самые простые из всех возможных функций. Сформулируем это утверждение в виде следующей теоремы.

Теорема. В классе кинематически корректных волновых функций простейшими являются функции схемы $U_{3(n-1)}$.

Практическую пользу этой теоремы легко понять, если вспомнить, что для отыскания решений многих типов дифференциаль-

ных уравнений, описывающих те или иные физические процессы, как правило, удается подобрать естественную систему базисных функций. Например, для периодических процессов — это экспоненты, когда несущественна операция отражения, или синусы и косинусы, когда разлагаемые функции характеризуются определенной четностью; для задач рассеяния в сферически-симметричном поле — это произведение функций Бесселя и шаровых функций; для разложения векторных полей — векторные сферические гармоники. Все подобные функции являются неприводимыми (по нашей терминологии «кинематически простейшими») базисами соответствующих групп: группы O_2^+ без отражения или O_2 с отражением — в случае рядов Фурье, группы движения трехмерного пространства, приведенной на ее максимальной компактной подгруппе O_3^+ — в случае задачи рассеяния и, наконец, неприводимым базисом, образованным с помощью коэффициентов Клебша — Гордана из прямого произведения шаровых функций и ортов, — для разложения векторных полей. Сформулированная теорема показывает, что для связанных состояний трансляционно-инвариантного гамильтониана ядра таким естественным базисом являются функции схемы $U_{3(n-1)}$. Как всегда, вопрос сходимости разложения по таким базисам остается открытым.

Из-за высокого ранга унитарной группы базис схемы $U_{3(n-1)}$ очень сложен, поэтому сколько-нибудь удовлетворительное разложение по нему решений уравнения Шредингера можно осуществить лишь для малонуклонных систем. В случае же ядер, содержащих несколько десятков нуклонов, размерность этого базиса растет очень быстро. Если для $n < 16$, а также n , близких к массовым числам: $n = 16$, $n = 40$ и $n = 80$, число компонент функции схемы $U_{3(n-1)}$ еще поддается контролю, то, например, при $n \approx 30$, а тем более при $n \approx 60$ для самого простого допускаемого принципом Паули значения $E = E_{\text{мин}}$ это число составляет сотни и тысячи. В этом нет ничего удивительного, потому что разложение по такому набору функций эквивалентно решению многочастичного уравнения Шредингера, и нетрудно представить себе, насколько эта задача сложна.

Из сказанного ясно, что практические расчеты можно осуществить лишь на ограниченном базисе, а это означает, что состояниям, обрывающим разложение, придается смысл приближенных квантовых чисел. Если хотим сохранить алгебраическую структуру неприводимого базиса группы $U_{3(n-1)}$, то первое, что можно сделать, — это ограничиться одним слагаемым по E , т. е. в расчетах не учитывать недиагональные по E матричные элементы. Тогда матрица полного гамильтониана ядра разбивается на блоки и тем самым состояния сортируются по квантовому числу E .

Допущение, что E — квантовое число, приписываемое наблюдаемым на опыте состояниям ядра, означает отказ от практически

неосуществимой попытки точно решить ядерную задачу многих тел и переход к более скромной, но зато реальной задаче изучения свойств ядер в ограниченном подпространстве многочастичного пространства Гильберта. Такое приближение равносильно введению модели ядра: по определению упрощенную картину строения ядра, задаваемую базисными функциями $U_{3(n-1)}$ — неприводимого представления E , будем называть моделью схемы $U_{3(n-1)}$. В отличие от крайних ядерных моделей и их модификаций, которые обсуждались в разд. 1, схема $U_{3(n-1)}$ дает простейшую кинематически корректную модель ядра.

Законно спросить: насколько конструктивен этот результат? Не тривиальна ли эта модель, не дает ли она слишком примитивную картину строения ядра? Какова эта картина?

Чтобы раскрыть физический смысл модели схемы $U_{3(n-1)}$, необходимо реализовать орбитальные функции через функции определенного гамильтониана, который будем называть модельным гамильтонианом ядра. Известно, что характеристики неприводимых представлений задаются собственными значениями набора операторов Казимира; по отношению к группе $U_{3(n-1)}$ модельные функции ядра характеризуются лишь одним квантовым числом E , поэтому для определения явного вида подобных функций достаточно решить уравнение на собственные значения для первого оператора Казимира группы $U_{3(n-1)}$. Вид этого оператора зависит от способа реализации объектов преобразования группы $U_{3(n-1)}$. Нельзя также забывать о том, что каждое преобразование пространства, в котором действует унитарная группа, индуцирует преобразование сопряженного с ним пространства, в котором действует так называемое контраградиентное представление этой группы (см., например, работу [9]). Такое представление, обычно обозначаемое как $D^{[0...0-1]} \equiv D^{[-1]}$, неэквивалентно исходному представлению $D^{[10...0]} \equiv D^{[1]}$, поэтому необходимо задать две системы объектов преобразования; одну в пространстве [1], а другую в пространстве [-1]. Пусть объектами преобразования в пространстве представления [1] группы $U_{3(n-1)}$ будут компоненты векторов Якоби ρ_i^s , а в сопряженном с ним пространстве [-1] — импульсы \hat{q}_i^s . Легко проверить, что прямое произведение этих объектов $\rho_i^s \hat{q}_i^s$ дают $(3(n-1))^2$ операторы, которые являются инфинитезимальными операторами группы $U_{3(n-1)}$. Первый оператор Казимира для этих инфинитезимальных операторов, очевидно, имеет вид $\sum_{i,s} \rho_i^s \hat{q}_i^s$.

Теперь видно, что нами неудачно выбраны объекты преобразования — уж слишком оператор Казимира не похож на гамильтониан, хотя бы и из-за того, что в него входят лишь первые производные. Попытаемся поднять порядок уравнения. Для этого ве-

дем картановскую комбинацию координат и импульсов $\sqrt{2}\xi_i^s = \rho_i^s - i\hat{q}_i^s$ и $\sqrt{2}\xi_i^{\dagger s} = \rho_i^s + i\hat{q}_i^s$, которые дают бозевские операторы рождения и уничтожения. Пусть теперь ξ_i^s и $\xi_i^{\dagger s}$ преобразуются по $U_{3(n-1)}$ -неприводимым представлениям [1] и [-1] соответственно. Тогда алгебра унитарной группы задается инфинитезимальными операторами $\xi_i^s \xi_i^{\dagger s}$, которым соответствует первый оператор Казимира $H_0 = \sum_{is} \xi_i^s \xi_i^{\dagger s}$. Оператор H_0 , если в нем возвратиться к переменным ρ_i^s , принимает следующий вид:

$$H_0 + \frac{3}{2}(n-1) = -\frac{1}{2} \sum_{is} \left(\frac{\partial^2}{(\partial \rho_i^s)^2} - (\rho_i^s)^2 \right). \quad (42)$$

Этот оператор является гамильтонианом $3(n-1)$ -мерного изотропного осциллятора, записанного в безразмерных единицах. Его собственное значение равно E . При желании в (42) можно ввести параметр осцилляторной частоты.

Полученная реализация оператора Казимира $U_{3(n-1)}$ -группы позволяет заключить, что простейшую волновую функцию схемы $U_{3(n-1)}$ можно интерпретировать как функцию, пространственная часть которой построена из функций $3(n-1)$ -мерного изотропного гармонического осциллятора. Другими словами, пространственная картина движения нуклонов отображается ансамблем потенциально невзаимодействующих квазичастиц, причем под квазичастицами здесь подразумеваются нуклонные образования, описываемые координатами Якоби.

Независимые квазичастицы могут возникнуть и в системе сильно-связанных частиц. Классическим примером таких систем является кристалл: движение локализованных, прикрепленных к своим местам атомов в идеальной кристаллической решетке в гармоническом приближении описывается системой независимых квазичастиц — фононов. С помощью этой аналогии приходим к заключению, что простейшая корректная модель атомного ядра в какой-то мере напоминает «кристалл», правда, весьма своеобразный. Этот кристалл изотропен, имеет конечные размеры и не обязательно сферически-симметрическую форму. Реальные частицы — нуклоны, из которых он образован, не закреплены в определенных узлах, а совершают замысловатые движения, описываемые переменными Якоби. Согласно такой картине ядро является бозевской системой по квазичастицам, что не мешает ему быть фермиевской системой по нуклонам (или протонам и нейтронам). Фермиевские свойства в бозевских операторах скрыты в структуре переменных ρ_i , составленных по формуле (1) из переменных \mathbf{r}_i .

«Кристаллическая» структура ядра не предполагает отсутствия в нулевом приближении взаимодействия между нуклонами и не

утверждает, что нуклоны в ядре двигаются почти независимо. Наоборот, подобно атомам в кристаллической решетке, уже в нулевом приближении нуклонам разрешается взаимодействовать, даже сильно взаимодействовать в случае большой осцилляторной частоты; важно лишь, что это взаимодействие привело к системе потенциально не взаимодействующих квазичастиц.

Здесь необходимо пояснить, почему, говоря о системе, описываемой нулевым модельным гамильтонианом H_0 , вместо общепринятого термина «невзаимодействующие квазичастицы» употребляем потенциально не взаимодействующие квазичастицы. При построении пространственной функции схемы $U_{3(n-1)}$ из собственных функций гамильтониана (42) действительно исходим из произведения функций независимых квазичастиц, но затем из-за необходимости обеспечить интегралы движения берем определенные линейные комбинации функций подобного базиса. В итоге функция всей системы уже не является произведением функций составляющих ее частиц, а это и означает, что частицы системы «чувствуют» друг друга, т. е. как-то взаимодействуют между собою. Такое кинематическое взаимодействие не задается потенциалом, поэтому и говорим о системе потенциально не взаимодействующих квазичастиц. Не следует недооценивать значения кинематического взаимодействия, так как без учета его нельзя сравнивать теоретические результаты с опытом.

Возвращаясь к функции схемы $U_{3(n-1)}$, можно также сказать, что приведенная выше интерпретация не является единственной, и это обусловливается хорошо известным фактом, что трансформационные свойства однозначно не восстанавливают явного вида функций. Имеется «вырождение по интерпретации» и это обстоятельство в какой-то мере объясняет наличие противоречивых взглядов на структуру ядра. Отсюда также можно заключить, что трансформационные свойства волновой функции более важны, чем ее конкретная реализация.

Способна ли модель схемы $U_{3(n-1)}$ объяснить противоречия между концепциями сильно коллективизированного и почти свободного движения нуклонов в ядре, о которых шла речь в разд. 1? Уже известно, что с помощью соответствующего разложения в волновой функции схемы $U_{3(n-1)}$ можно раскрыть ее коллективную и внутреннюю структуру. Оказывается, что существует разложение и другого типа, позволяющее представить эту функцию в виде, раскрывающем ее оболочечные свойства. Такое разложение, очевидно, возможно лишь в однонуклонных переменных r_1, \dots, r_n , набор которых эквивалентен векторам Якоби $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$, если к ним еще добавить и переменную ρ_0 , где $\sqrt{n}\rho_0 = \sum_i r_i$, описывающую движение центра масс ядра. Поэтому первое, что надо сделать,— это дополнить функцию схемы $U_{3(n-1)}$,

переменной ρ_0 . Чтобы понять, как осуществить это дополнение, запишем модельный гамильтониан H_0 в переменных $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$:

$$H_0 + \frac{3}{2}(n-1) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [(\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_j)^2 - (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2], \quad (43)$$

где \hat{p}_i^s — одночастичные импульсы. Придадим этому оператору одночастичный вид:

$$H_0 + \frac{3}{2}(n-1) + H_{\text{ц.м}} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \sum_i [(\hat{\mathbf{p}}_i)^2 - (\mathbf{r}_i)^2], \quad (44)$$

где $H_{\text{ц.м}} = \sum_s \xi_0^s \xi_0^s$ — осцилляторный гамильтониан, описывающий движение центра масс ядра. Правая сторона последнего выражения является модельным гамильтонианом оболочечной модели ядра; здесь имеются в виду осцилляторные оболочки. Оболочечный гамильтониан равен сумме H_0 и $H_{\text{у.м}}$, а это физически означает, что оболочечную картину ядра можно ввести лишь, помещая ядро в яму, которую нельзя создать межнуклонным взаимодействием. Общая яма для движения нуклонов, описываемых одночастичными переменными, имеет смысл ямы, созданной внешними причинами, которые немислимы в случае свободного ядра. При замене свободного движения центра масс ядра связанным осцилляторным состоянием теряется трансляционная инвариантность задачи, т. е. нарушаются требования кинематической корректности, и лишь этой ценою можно ввести оболочечную картину строения ядра. Отсюда заключаем, что оболочечная модель ядра несовместима с требованиями кинематической корректности. Это значит, что оболочечные представления о структуре ядра неправильны, т. е. в ядре не могут существовать потенциально не взаимодействующие частицы, а в лучшем случае можно говорить лишь о потенциально не взаимодействующих квазичастицах. Такой вывод вытекает из требования трансляционной инвариантности, поэтому он универсален и применим в случае произвольных функций ядра.

Эти вопросы неоднократно обсуждались в литературе, по крайней мере в двух аспектах: один из них связан с проблемой исключения движения центра масс ядра, рассмотренной в работе [25], а затем и в некоторых других. Эта задача обычно трактуется как проблема преодоления математической некорректности, которой не противопоставляется возможность существования в ядре одночастичного поля как физической реальности. На самом деле ситуация как раз противоположная, и чтобы особо подчеркнуть это, сформулируем здесь следующую теорему.

Теорема. В кинематически корректную теорию ядра нельзя ввести понятия одночастичного поля.

Из этой теоремы, которая, возможно, некоторым читателям покажется очевидной, вытекает, что даже в нулевом приближении в теорию ядра нельзя ввести самосогласованное поле частиц, т. е. строго говоря, к ядру неприменим метод Хартри — Фока. В таком аспекте подобный вопрос поднимался в литературе в связи с зависимостью среднего поля от свойств потенциала между-нуклонного взаимодействия. Здесь же такой вывод вытекает из кинематических требований и, следовательно, не зависит от конкретного вида гамильтониана ядра. Физическая причина этого кроется в тех свойствах фермионной системы тождественных частиц, о которых шла речь во введении: из-за отсутствия силовых центров концепция свободного движения нуклонов в ядре логически противоречит самому факту существования ядра как стабильной квантовой системы.

Имеют ли все разговоры об одночастичных уровнях, внешних нуклонах, одночастичных переходах и т. п. что-либо общее с реальностью? Неужели оболочечная картина строения ядра исчезла без следа? Если говорить по существу, то да, но с вычислительной стороны дела можно сказать следующее: бывают случаи, когда результаты расчетов на базисе оболочечных функций и функций схемы $U_{3(n-1)}$ совпадают, и это позволяет понять, почему иногда оболочечная картина строения ядра состоятельна.

Эти случаи можно найти, разлагая функцию схемы $U_{3(n-1)}$ через оболочечные функции. Выше было выяснено, что так можно разлагать лишь функцию схемы $U_{3(n-1)}$, умноженную на осцилляторную функцию, описывающую движение центра масс ядра. Зафиксируем самое простое, вакуумное, состояние центра масс ядра и напишем такое разложение:

$$\begin{aligned} 2\pi^{-1/4} \exp(-\rho_0^2/2) \Psi(E\tau | \rho_1, \dots, \rho_{n-1}; Q) = \\ = \sum_{\chi} \Psi(E\chi | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; Q) c_{\chi\tau}. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь τ — базис унитарной или ортогональной схемы; χ — все квантовые числа оболочечных конфигураций; c — коэффициенты разложения. Конкретный вид набора квантовых чисел χ зависит от смысла, вкладываемого в понятие конфигурации. Можно говорить о O_3^+ -конфигурациях, задаваемых квантовыми числами орбитальных моментов нуклонов. Тогда радиальные функции остаются произвольными и, в частности, аналогично теории атомных спектров их можно найти как решения уравнения Хартри—Фока. Можно говорить и о SU_3 -конфигурациях (модель Эллиотта), задаваемых осцилляторными энергиями нуклонов. Тогда радиальные функции являются осцилляторными радиальными функциями.

Ради определенности будем считать, что τ в (45) обозначает квантовые числа унитарной схемы, а χ — квантовые числа SU_3 -

конфигураций, и попытаемся выяснить, когда в (45) есть лишь одно слагаемое. Чтобы найти число слагаемых в (45), необходимо перечислить все SU_3 -конфигурации с общим числом квантов E . Рассмотрим сначала случай наименьших разрешаемых принципом Паули $E = E_{\text{мин}}$. Оказывается, что тогда возможна лишь одна SU_3 -конфигурация, поэтому при $E = E_{\text{мин}}$ для любых n в разложении (45) имеется только одно слагаемое. Это и есть те случаи, когда движение потенциально не взаимодействующих квазичастиц из-за внешней осцилляторной ямы перестраивается в движение потенциально не взаимодействующих частиц. SU_3 -конфигурацию далее можно разлагать через O_3^+ -конфигурации. Случается, что в этом разложении также содержится только одно слагаемое (это всегда имеет место в случае $n \leq 16$), и тогда, пользуясь общепринятой терминологией, можно сказать, что нуклоны двигаются по сферическим орбитам: эти случаи и соответствуют классической оболочечной модели ядра.

Для состояний $E = E_{\text{мин}} + 1$ схемы $U_{3(n-1)}$ в разложении (45) имеются два слагаемых, для $E = E_{\text{мин}} + 2$ — четыре [9] и т. п. Поэтому при $E > E_{\text{мин}}$ движение квазичастиц, как правило, уже не может перестроиться в движение частиц. Тем не менее бывают случаи, когда часть коэффициентов разложения (45) по разным причинам становится равной нулю и опять остается лишь одна SU_3 -конфигурация, которая изредка вырождается до одной O_3^+ -конфигурации. Иными словами, даже в случае $E > E_{\text{мин}}$ иногда встречаются $U_{3(n-1)}$ -состояния, которые в общей осцилляторной яме могут перестраиваться в состояния оболочечного типа; подробный анализ таких состояний в случае $E = E_{\text{мин}} + 1$ для $6 \leq n \leq 16$ можно найти в работе [26].

Резюмируя, можно сказать, что схема $U_{3(n-1)}$ в виде исключения допускает состояния в упомянутом смысле оболочечного типа. Однако при переходе от $E = E_{\text{мин}}$ к $E > E_{\text{мин}}$, а также от легких к более тяжелым ядрам такие состояния встречаются все реже и реже, вследствие чего для многих состояний схемы $U_{3(n-1)}$ «кристаллическую» структуру атомного ядра нельзя перестроить в оболочечную структуру с помощью внешней потенциальной ямы.

Подведем итоги. Из кинематических свойств гамильтониана ядра удается получить в явном виде все групповые характеристики модельных функций и с их помощью дать простейшую физическую картину строения ядра. Нельзя утверждать, что эта картина точно соответствует действительности: атомное ядро — слишком уж сложный объект, чтобы понять его структуру с помощью простых и наглядных представлений. Однако можно утверждать, что она является простейшей из всех возможных картин. Построенная таким способом модель, несмотря на простоту, содержит в себе одночастичные, коллективные, а также промежуточные

аспекты движения нуклонов в ядре. Работая с волновыми функциями, заданными в координатном представлении, необходимо начать изучение свойств атомных ядер с модели схемы $U_{3(n-1)}$; эту модель можно усложнять и тем самым совершенствовать, однако ее нельзя упростить без нарушения общих кинематических принципов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзюблик А. Я. Препринт ИТФ-74-122Р, Киев, 1974.
2. Дзюблик А. Я., Овчаренко В. И., Стещенко А. И., Филиппов Г. Ф. Препринт ИТФ-74-134Р, Киев, 1974; «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 869.
3. Zickendraht W. «J. Math. Phys.», 1971, v. 12, p. 1663.
4. Филиппов Г. Ф. ЭЧАЯ, 1973, т. 4, с. 992.
5. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К. «Ядерная физика», 1973, т. 18, с. 768.
6. Калинаускас Р. К., Ванагас В. В. «Лит. физич. сб.», 1974, т. 14, с. 491.
7. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К. «Лит. физич. сб.», 1974, т. 14, с. 549.
8. Ванагас В. В. Методы теории представлений групп и выделение коллективных степеней свободы ядра. Конспект лекций школы МИФИ. М., Изд. МИФИ, 1974.
9. Ванагас В. Алгебраические методы в теории ядра. Вильнюс, «Минтис», 1971.
10. Levy-Leblond J. M. «J. Math. Phys.», 1966, v. 7, с. 2217.
11. Bohr A. Rotational States of Atomic Nuclei. Copenhagen, 1954.
12. Айзенбуд Л., Вигнер Е. Структура ядра. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
13. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
14. Смирнов Ю. Ф., Шитикова К. В., Орлова Н. В. «Вест. МГУ», 1973, т. 14, с. 553.
15. Стещенко А. И., Филиппов Г. Ф. Препринт ИТФ-72-66Р, Киев, 1972.
16. Филиппов Г. Ф., Стещенко А. И. Препринт ИТФ-73-91Р, Киев, 1973.
17. Филиппов Г. Ф. Препринт ИТФ-74-14Р, Киев, 1974.
18. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К. «Лит. физич. сб.», 1972, т. 12, с. 217.
19. Бадалян А. М., Симонов Ю. А., «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 1032.
20. Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1968, т. 7, с. 1210.
21. Calogero F., Simonov Yu. E., Surkov E. L. «Nuovo cimento A», 1971, v. 1, p. 739.
22. Петраускас А. К., Янкаускас К. И., Ванагас В. В. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 724.
23. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М., «Наука», 1970.
24. Ванагас В. В. Теория низколежащих ядерных состояний в схеме $U_{3(A-1)}$. В сб.: «Проблемы современной ядерной физики». М., «Наука», 1971.
25. Elliott J. P., Skyrme T. H. R. «Proc. Roy Soc. A.», 1955, v. 232, p. 561.
26. Ванагас В. В., Калинаускас Р. К. «Лит. физич. сб.», 1971, т. 11, с. 729.