

УДК 539.14

## КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕЧНОЙ СТРУКТУРЫ ЯДЕР

*В. М. Струтинский,  
А. Г. Магнер*

Институт ядерных исследований  
АН УССР, Киев

Квазиклассическое приближение для плотности одночастичных уровней, основанное на представлении фейнмановских интегралов по траекториям, распространяется на случай вырожденного классического движения. Показано, что появление значительных разрежений и сгущений одночастичных уровней соответствует квазиклассическому квантованию движения по многомерным периодическим орбитам. Получены формальные оценки масштаба и периода осцилляций одночастичной плотности уровней, плотности уровней нагретого ядра и оболочечных поправок к энергиям связи и энергиям деформации ядер. Обсуждается связь классической теории с методом численного усреднения.

Semiclassical approximation for the single-particle level density based on the Feynman's path integral representation is extended to the case of degenerate classical motion. It is shown that the significant non-uniformity of the distribution of single-particle energies (gross shell) is the result of semiclassical quantization of motion along many-dimensional closed orbits. Formal estimates are presented for magnitudes and periods of oscillating components of the single-particle level densities, the level density in the excited nucleus and the shell corrections to the binding and deformation energies of nuclei. The relationship between the semiclassical theory and the method of numerical averaging is discussed.

### ВВЕДЕНИЕ

Оболочечная структура ядра является одним из самых важных понятий современной теории сложных ядер. Однако, несмотря на солидную историю развития, лишь в последнее время в результате численных расчетов для сильно деформированных ядер было обнаружено [1, 2], что одночастичные уровни группируются в регулярно распределенные пучки — большие оболочки, причем это явление не связано ни со сферической симметрией, ни с предполагаемой близостью ядерного нуклонного потенциала к потен-

плулу гармонического осциллятора. Ранее это было известно только для сферических ядер, где таким образом объяснялись свойства магических ядер. Проявления больших оболочек в деформированных ядрах не менее значительны и еще более многочисленны. С ними связаны не только аномалии масс ядер, но

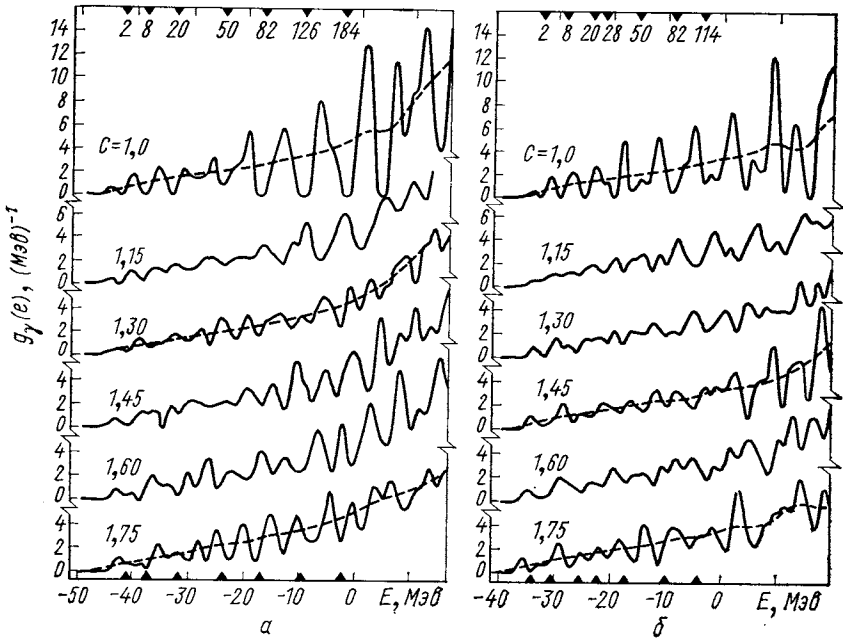


Рис. 1. Плотность одночастичных уровней  $g_{\gamma}(e)$  в потенциалах Вудса — Саксона ядра  $^{240}\text{Pu}$  с различными формами поверхности, которые приблизительно соответствуют изменению формы ядра в процессе деления:

$a$  — нейтроны;  $b$  — протоны; параметр деформации  $c$  — длина большой полуоси в единицах  $R$ ; — — — получены с параметром  $\gamma = 2 \text{ Мэв}$ ; — — — —  $\gamma = 7 \text{ Мэв}$ . В верхней и нижней частях рисунка показаны магические числа нуклонов для сферической формы [2]

и такие фундаментальные явления, как несферичность формы ядер редкоземельных элементов и актиноидов, существование квазистационарного промежуточного состояния в делении ядер.

Таким образом, оболочечная структура деформированных ядер — важнейший фактор, определяющий свойства тяжелых ядер при не очень большом возбуждении [1—4]. Примеры распределения плотности уровней в потенциале Вудса — Саксона с весьма произвольной формой поверхности показаны на рис. 1. Значительные вариации числа уровней на интервале 2—3 Мэв, который использовался в расчетах, нельзя объяснить случайной

флуктуацией. Подобная картина наблюдается также в других случаях, и, вероятно, речь идет о некоторой общей закономерности распределения одночастичных уровней в трехмерной потенциальной яме. Поэтому вопрос о природе больших оболочек, выяснении тех физических условий, при которых оболочечная неоднородность спектра особенно значительна, не ограничен рамками оболочечной модели. В равной мере проблема больших оболочек существует в любых самосогласованных теориях, допускающих почти независимое движение квазичастиц в общем потенциале. Физическая адекватность такой картины в настоящее время установлена. Однако отсутствие последовательной теории, объясняющей происхождение структуры типа больших оболочек, привело к своеобразному «непризнанию» их значения в теории ядра и появлению ошибочных качественных интерпретаций, как правило, опирающихся на пример гармонического осциллятора. Чтобы дальше развивать количественную теорию сложных ядер и ее приложений, необходимо более глубокое понимание оболочечных явлений.

Первое последовательное теоретическое объяснение сгущения уровней, основанное на примере квазиклассического решения задачи о распределении собственных частот в полости произвольной формы, было дано Бальяном и Блоком [5, а также см. 6, 7]. В работе [5г] было получено квазиклассическое решение квантовой задачи для сферического бесконечно высокого потенциала, исходя из представления многократного отражения для функции Грина задачи с отражающими стенками [5б]. Оказывается, что осциллирующие компоненты плотности уровней соответствуют некоторым орбитам периодического движения в ограниченной полости. В работе [5д] сделана попытка распространить эти результаты на общий случай уравнения Шредингера. Важный качественный вывод работы [5д] состоит в утверждении общности происхождения структуры больших оболочек одночастичного спектра и гросс-структурных резонансов амплитуды рассеяния типа резонансов оптической модели. Там же обсуждается значение спиновых переменных, которые не учитывались в других работах. К сожалению, решение конкретной задачи и метод решения, разработанный специально для частного примера, оставляют без ответа многие важные вопросы, связанные с общей характеристикой явления оболочечной структуры. Попытки получить решение, не связанное со специфическими свойствами задачи с бесконечной ямой, делались в других работах Бальяна и Блока на основе общего итерационного разложения для одночастичной функции Грина, в котором компонента  $G_0$  функции Грина, отвечающая кратчайшей классической траектории между точками  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$ , является пропагатором [5в]. Компонента  $G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', e)$  соответствует приближению Томаса — Ферми для распределения

частиц и согласно работе [5в] должна являться главным членом итерационного ряда в квазиклассическом пределе. В действительности такое представление неудобно для получения квазиклассического приближения, потому что члены ряда, связанные со сложными траекториями с одной или большим числом точек отражения, содержат вклад по крайней мере того же порядка по  $\hbar$ , что и  $G_0$ . Для гамильтонианов высокой симметрии вклад более сложных орбит в функцию Грина может оказаться величиной даже более низкого порядка по  $\hbar$ , чем компонента Томаса — Ферми.

Общее квазиклассическое решение задачи можно получить в рамках метода стационарной фазы из фейнмановского интеграла по траекториям для пропагатора  $K(\mathbf{r}'t', \mathbf{r}''t'')$ , из которого, в свою очередь, функция Грина получается простым фурье-преобразованием [8—11]. Распределение одночастичных уровней и пространственное распределение частиц получаются интегрированием функции Грина по пространственным или энергетическим переменным. При таком подходе не возникает трудность, связанная со специфическим вырождением финитного классического движения: из-за сингулярности в точках поворота решение классической задачи не является однозначным. Многозначность не отражается на решении временной задачи, поскольку все такие пути отличаются по времени движения. Дополнительное вырождение, которое может еще остаться, обусловлено только физическими свойствами гамильтониана. Другими преимуществами решения, основанного на представлении фейнмановских интегралов, являются его общность и наглядность.

### 1. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА

**Общие положения.** Амплитуду вероятности перехода частицы из точки  $\mathbf{r}'t'$  в точку  $\mathbf{r}''t''$  можно представить фейнмановским интегралом по траекториям [12, 13]:

$$K(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} [M/2\pi i \hbar (t_{k+1} - t_k)]^{3/2} \int \dots \dots \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{n-1} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{n-1} R(\mathbf{r}_{k+1}t_{k+1}, \mathbf{r}_k t_k) \right\}, \quad (1)$$

где  $M$  — масса частицы;  $t_0 = t'$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = t''$  — последовательные промежутки времени, которые разбивают интервал  $t'' - t'$  на  $n$  малых интервалов  $t_1 - t'$ ,  $t_2 - t_1, \dots$ ;  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n = \mathbf{r}''$  — соответствующие значения координат вдоль формальной траектории  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , соединяющей  $(\mathbf{r}'', t'')$  и  $(\mathbf{r}', t')$ . Для бесконечно малых интервалов  $R$  выражается через классическую функцию Лагранжа  $L(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ :

$$R(\mathbf{r}_{k+1}t_{k+1}, \mathbf{r}_k t_k) = (t_{k+1} - t_k) L((\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k)/(t_{k+1} - t_k), \mathbf{r}_k, t_k). \quad (2)$$

Квазиклассическое выражение для  $K$  получено в [9, 11] из (1) в результате применения метода стационарной фазы в каждом из парциальных интегрирований. Если положить  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^* + \delta \mathbf{r}_i$  для  $i = 1, \dots, n-1$ , то

$$R = R^*(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') + \sum_{ij=1}^{n-1} (\partial^2 R / \partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_j)^* \delta \mathbf{r}_i \delta \mathbf{r}_j + \dots,$$

где  $\mathbf{r}_i^*$  — стационарные точки. Далее, матрица  $(\partial^2 R / \partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_j)^*$  преобразуется к главным осям, что приводит к  $3(n-1)$  интегралам Френеля, каждый из которых пропорционален  $\hbar^{1/2}$  и является классически малой величиной. В результате получаем

$$K^*(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') \approx \sum_{\alpha} (2\pi\hbar)^{-3/2} |\chi_{\alpha}(\mathbf{p}'; \mathbf{r}'')|^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} R_{\alpha}^*(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') + i\chi_{\alpha} \right\}. \quad (3)$$

Отмечены звездочками стационарные значения величин, сумма содержит все реальные классические траектории ( $\alpha$ ), которые начинаются в  $\mathbf{r}'$  при  $t = t'$  и заканчиваются в  $\mathbf{r}''$  при  $t = t''$ ;  $R_{\alpha}^*$  — классический интеграл действия, не зависящий от времени, для  $\alpha$ -го пути, а  $3 \times 3$ -детерминант

$$\chi_{\alpha}(\mathbf{p}'; \mathbf{r}'') = \det \|\partial^2 R_{\alpha}^* / \partial \mathbf{r}' \partial \mathbf{r}''\| = \det \|\partial \mathbf{p}' / \partial \mathbf{r}''\|_{\alpha} \quad (4)$$

— якобиан преобразования от начальных импульсов в  $\mathbf{r}'$ , определяемых как

$$\mathbf{p}' = -\partial R^*(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') / \partial \mathbf{r}' \quad (5)$$

к конечным координатам  $\mathbf{r}''$ . Фазы  $\chi_{\alpha}$  в (3) определяются числом отрицательных собственных значений матрицы, составленной из вторых частных производных  $R_{\alpha}$  в каждой из промежуточных стационарных точек  $\mathbf{r}_1^*, \dots, \mathbf{r}_{n-1}^*$ .

Фурье-преобразование  $K$  дает стационарную функцию Грина

$$G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^{\infty} K(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'0) \exp\left(\frac{i}{\hbar} te\right) dt, \quad (6)$$

которая получается в квазиклассическом приближении в следующем виде:

$$G^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) = -\frac{1}{2\pi\hbar^2} \sum_{\alpha} \left\{ |\chi_{\alpha}(\mathbf{p}'t_{\alpha}; \mathbf{r}'e)|^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S_{\alpha}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) + i\nu \right] \right\}_{\alpha}. \quad (7)$$

Здесь  $S_{\alpha}$  — классический интеграл действия

$$S_{\alpha}^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) = \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}''} p_{\alpha} dl_{\alpha} \quad (8)$$

вдоль  $\alpha$ -й классической траектории, соединяющей  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  при заданной энергии  $e$ ; а  $4 \times 4$ -детерминант

$$\mathcal{Y}_\alpha(\mathbf{p}'t_\alpha; \mathbf{r}''e) = \det \left\| \begin{array}{cc} \partial \mathbf{p}' / \partial \mathbf{r}'' & \partial \mathbf{p}' / \partial e \\ \partial t_\alpha / \partial \mathbf{r}'' & \partial t_\alpha / \partial e \end{array} \right\|_\alpha, \quad (9)$$

где

$$t_\alpha(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) = \partial S_\alpha^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) / \partial e = \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}''} \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|} dl_\alpha \quad (10)$$

классическое время движения между точками  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  для  $\alpha$ -го пути.

Детерминант  $\mathcal{Y}_\alpha$  можно рассматривать как якобиан преобразования от переменных  $(\mathbf{p}'t_\alpha)$  к переменным  $(\mathbf{r}''e)$ , связанных соотношением (10) и уравнением

$$\mathbf{p}' = -\partial S_\alpha^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) / \partial \mathbf{r}'. \quad (11)$$

Фазы  $\nu_\alpha$  определяются сингулярностями матрицы

$$\| \partial^2 S / \partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_j \|^*, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, \quad (12)$$

собственные значения которой являются коэффициентами разложения интеграла действия при вычислении фейнмановского интеграла методом стационарной фазы. Точки траектории, в которых собственные значения (12) обращаются в нуль, называются точками каустики. В этих точках необходимо учесть третьи (или более высокого порядка) производные интеграла действия и рассмотреть предел малого, но конечного собственного значения [14]. Сингулярности другого типа связаны с точками поворота, в которых одна или несколько компонент производной классического импульса по координатам таких точек обращаются в бесконечность. В окрестности точки поворота интегралы приводятся к сингулярности первого типа преобразованием переменных в комплексной плоскости  $w = -i^{3/4} \lambda x$ , где  $x$  — нормальная к поверхности отражения координата, а  $\lambda = (\partial^2 S / \partial x^2)^* \rightarrow \infty$  на такой поверхности. Соответствующее собственное значение (12) мало в новом представлении. Другой метод решения основан на преобразовании функции Грина к импульсному представлению [10]. Результаты обоих методов для дополнительной фазы в (7) совпадают и приводят к  $\nu_\alpha = -\pi(c_\alpha + c_t)/2$ , где  $c_\alpha$  — число всех сингулярных точек вдоль траектории между начальной и конечной точками с учетом их кратности;  $c_t$  соответствует числу сингулярностей  $\partial R^2 / \partial t^2$  при  $t = t^*$ . В обычных случаях  $c_t$  равняется нулю или единице в зависимости от знака  $(\partial^2 R / \partial t^2)^*$ , где  $t^*$  — стационарная точка интегрирования по времени в (6).

В квазиклассической формуле (7) берется сумма по всем классическим траекториям, соединяющим точки  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  при заданной

энергии  $e$ . Эти пути отличаются прежде всего числом и характером особых точек матрицы (12). Среди них есть одна особая траектория, длина которой  $l_\alpha$  обращается в нуль, когда  $\mathbf{r}''$  приближается к  $\mathbf{r}'$ . Для такого пути «нулевой длины» находим в пределе  $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'$  следующее выражение:

$$G_0^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) = -\frac{M}{2\pi\hbar^2 |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} |\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'| p(\mathbf{r}) \right\}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}'' + \mathbf{r}')/2$ . Эта компонента разложения (7) обеспечивает сингулярность, которую требует граничное условие для функции Грина. Она соответствует компонентам Томаса — Ферми в распределениях пространственной плотности и плотности уровней.

В дальнейшем при вычислении плотности уровней потребуется выражение для функции Грина при близких значениях координат, также и для других компонент функции Грина. При малом расстоянии между точками ( $|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'| \lesssim \lambda$ ) проявляется особенность квазиклассической аппроксимации, которая во многих важных случаях требует существенной модификации расчета. Дело заключается в том, что в изложенном выводе предполагалось, что все траектории, соединяющие точки  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  при данной энергии (или отвечающие заданному времени движения  $t'' - t'$ ), изолированы, так что любая вариация классической траектории при заданных условиях приводит к изменению интеграла действия. Однако если начальная и конечная точки на траектории совпадают, то в некоторых случаях через данную точку проходит семейство бесконечно близких орбит с одним и тем же действием. Формула (7) в таких случаях неприменима, так как интеграл действия оказывается стационарным по отношению к таким вариациям классической орбиты, которые сводятся к переходу от одной траектории данного семейства к другой. Очевидным примером является сферически-симметричный потенциал, где через любую заданную точку  $\mathbf{r}$  проходит континуум орбит определенного типа, которые получаются друг из друга поворотом на угол  $\Phi$  относительно оси  $(0, \mathbf{r})$ , где  $0$  — центр симметрии. Угол  $\Phi$  — свободный параметр, и в этом смысле можно говорить о вырождении семейства периодических орбит, проходящих через точку  $\mathbf{r}$ , причем порядок вырождения  $\mathcal{D}$ , или число свободных параметров, таких траекторий в данном случае равен единице. Вырождение классических орбит приводит к увеличению относительного вклада сложных периодических траекторий в квазиклассических разложениях, так как уменьшается число классически малых интегрирований (интегралов Френеля).

Как будет показано в разд. 8, явление вырождения классических орбит связано с наличием независимых однозначных интегралов движения, дополнительных к интегралу энергии, существование которых не обязательно обусловлено пространственной

симметрией. Максимальное значение степени вырождения периодических траекторий ограничивается числом таких интегралов, причем в заданном потенциале могут одновременно существовать несколько непрерывных семейств орбит с различным вырождением. Максимальное значение  $\mathcal{D}$  для трехмерной задачи оказывается равным двум. Семейства орбит с  $\mathcal{D} = 2$  возможны в случае так называемого полного вырождения классического движения, например в вырожденном гармоническом осцилляторе или в кулоновском потенциале. В произвольном сферическом потенциале  $\mathcal{D} = 1$ , но может существовать также семейство с  $\mathcal{D} = 0$ . Это прямолинейные орбиты-диаметры, вращение которых около оси  $(0, \mathbf{r})$  не имеет смысла.

Масштаб увеличения амплитуды функции Грина зависит от степени вырождения, которая была определена выше как число  $\mathcal{D}$  независимых параметров семейства траекторий, проходящих через фиксированную точку при заданной энергии и имеющих один и тот же интеграл действия. Кроме степени вырождения  $\mathcal{D}$  орбит, проходящих через заданную точку, масштаб интеграла по координатам в выражении плотности уровней через функцию Грина определяется также размерностью ( $\mathcal{N}$ ) той части классически достижимого пространства, которую заполняют орбиты заданного типа. Этот фактор учитывается в расчетах плотности уровней и связанных с ней физических проявлений оболочечной структуры.

**Сферический потенциал.** В дальнейшем будем интересоваться функциями Грина при близких аргументах ( $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'$ ). В таком виде функция Грина появляется в определении плотности уровней. При сферической симметрии гамильтониана и  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' = \mathbf{r}$  интеграл действия стационарен при вращении траектории около оси симметрии, проходящей через данную точку  $\mathbf{r}$  и центр симметрии  $0$ . Приведенный выше вывод теряет смысл, так как если расстояние между точками  $\mathbf{r}''$  и  $\mathbf{r}'$  меньше или порядка длины волны, то вместо суммирования по дискретному выбору траекторий необходимо вычислить сумму вкладов однотипных орбит, непрерывно переходящих друг в друга, с последующим вычислением суммы по выбору аксиально-симметричных поверхностей, которые отвечают разным типам орбит.

Чтобы вычислить  $G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e)$  в пределе  $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ , поступим следующим образом. Сначала устраним вырождение, фиксируя промежуточную точку  $\mathbf{r}_1$  в многократном интеграле Фейнмана (1). По правилу сложения амплитуд [12, 13]

$$K(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') = \int d\mathbf{r}_1 K(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}_1t_1) K(\mathbf{r}_1t_1, \mathbf{r}'t'). \quad (14)$$

Теперь можно использовать обычное квазиклассическое приближение для каждой из двух подынтегральных амплитуд, соответ-



ствующих двум частям изолированных классических траекторий ( $\mathbf{r}''t''$ ,  $\mathbf{r}_1t_1$ ) и ( $\mathbf{r}_1t_1$ ,  $\mathbf{r}'t'$ ). Для интегрирования по  $\mathbf{r}_1$  в (14) удобно использовать цилиндрическую систему координат ( $\rho z \varphi$ ), в которой ось Oz направлена вдоль оси симметрии (0,  $\mathbf{r}$ ), а центр в точке  $\mathbf{r}$  (рис. 2). Компоненты импульса  $p_\rho$ ,  $p_z$  и угол  $\varphi_p$  выражаются декартовыми компонентами импульса,  $p_\rho = (p_x^2 + p_y^2)^{1/2}$ ,  $p_z$ ,  $\varphi_p = \text{arctg}(p_y/p_x)$ . При фиксированном  $\varphi$  интегрирование по другим компонентам  $\mathbf{r}_1$  выполняется методом стационарной фазы. Стационарная точка ( $\rho^* z^* \varphi$ ) принадлежит указанной стационарной поверхности, и в последующем интегрировании по  $\varphi$  подынтегральная функция от  $\varphi$  не зависит. Окончательно получаем

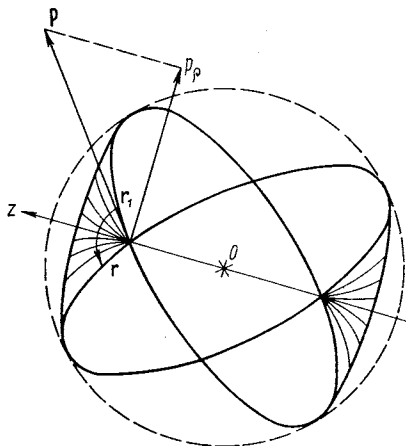


Рис. 2. Схема поверхности стационарного действия для расчета функции Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, e)$  для сферической потенциальной ямы:

показаны центр симметрии 0, точка  $\mathbf{r}$ , промежуточная точка  $\mathbf{r}_1$ , импульс  $\mathbf{p}(\mathbf{r})$  и перпендикулярная к  $\mathbf{r}$  компонента импульса  $p_\rho$

$$K^*(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') = K_0 + \Sigma_\alpha \frac{1}{2\pi\hbar^2} \times \\ \times \left\{ p_\rho \left| \mathcal{Y}(p'_\rho p'_z; \rho''z'') \right|^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} R^*(\mathbf{r}''t'', \mathbf{r}'t') + i\chi \right] \right\}_\alpha, \quad (15)$$

где  $K_0$  — компонента, связанная с траекторией нулевой длины, для которой симметрия потенциала не существенна. Суммирование выполняется по периодическим траекториям, которые принадлежат различным стационарным поверхностям, причем предполагается, что такие поверхности состав-

ляют дискретный набор. Величина  $\mathcal{Y}_\alpha$  в (15) — пониженного ранга якобиан преобразования от начальных импульсов ( $p'_\rho p'_z$ ) к конечным координатам ( $\rho''$ ,  $z''$ ). При выводе (15) учтено, что якобианы соответствующих преобразований  $|\mathcal{Y}(\varphi'_p; \varphi)|$  и  $|\mathcal{Y}(\varphi''_p; \varphi)|$  равны единице. Фурье-преобразование (15) выполняется методом перевала. В результате получается следующее выражение для функции Грина задачи со сферическим потенциалом при  $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'$ :

$$G^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) = G_0 - \frac{1}{(2\pi\hbar^5)^{1/2}} \Sigma_\alpha \left\{ p_\rho \left| \mathcal{Y}(p'_\rho p'_z t_\alpha; \rho''z''e) \right|^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e) + i\nu - \frac{i\pi}{4} \right] \right\}_\alpha. \quad (16)$$

Дополнительная фаза  $-\pi/4$  связана с тем, что в последовательности фейнмановских интегралов (1) в данном случае на один

френелевский интеграл меньше. В формуле (16)  $\mathcal{Y}_\alpha$  — якобиан пониженного ранга для преобразования двух групп переменных, указанных как аргументы  $\mathcal{Y}_\alpha$  и связанных классическими уравнениями движения для данной траектории  $\alpha$ ;  $t_\alpha$  — время движения вдоль траектории  $\alpha$ , которое определяется в (10). Якобиан в (16) можно также представить в следующем виде:

$$\mathcal{Y}_\alpha = \det \left\| \begin{array}{cc|c} \frac{\partial p'_\rho / \partial \rho''}{\partial t_\alpha / \partial \rho''} & \frac{\partial p'_\rho / \partial z''}{\partial t_\alpha / \partial z''} & \frac{\partial p'_\rho / \partial e}{0} \\ \hline \frac{\partial p'_z / \partial \rho''}{\partial t_\alpha / \partial \rho''} & \frac{\partial p'_z / \partial z''}{\partial t_\alpha / \partial z''} & \frac{\partial p'_z / \partial e}{0} \end{array} \right\|, \quad (17)$$

потому что детерминант субматрицы, обведенной пунктирной линией, равен нулю как следствие уравнений Гамильтона.

Сравнивая (16) и (7), видим, что в случае сферической симметрии вклады несингулярных членов, связанных с периодическими траекториями, увеличиваются множителем, пропорциональным  $\hbar^{-1/2}$ , и они являются величинами, формально большими, чем  $G_0$ . Обусловлено это тем, что интегрирование по  $\mathbf{r}_1$  в (14) содержит классически малый объем трубки, пропорциональный  $\hbar$ , вместо эффективного объема малой окрестности точки  $\mathbf{r}_1$ , пропорционального  $\hbar^{3/2}$  в случае изолированных траекторий.

Формула (16) неприменима, если потенциал сферический, но степень вырождения классических орбит более высокая. Примерами могут быть сферический гармонический осциллятор и атом водорода, где кроме тривиальных интегралов энергии и углового момента имеются специфические дополнительные интегралы движения. При этом через заданную точку  $\mathbf{r}$  проходит двухпараметрическое семейство периодических траекторий. Амплитуда соответствующих слагаемых в квазиклассическом выражении для функции Грина усиливается дополнительным фактором порядка  $\hbar^{-1/2}$  по сравнению со сферическим случаем и является формально величиной порядка  $\hbar^{-1}$  по сравнению с  $G_0$ . Последнее не относится, впрочем, к величинам соответствующих слагаемых в разложениях для различных физических величин, которые выражаются как интегралы от функции Грина. Там сингулярность  $G_0$  при совпадающих аргументах приводит к относительному увеличению компонент Томаса — Ферми формально в  $\hbar^{-1}$  раз.

Вывод аналитических выражений для функций Грина задач «симметрией», отличной от сферической, требует знания конкретных однозначных интегралов движения, ответственных за «симметрию». Для решения таких задач можно воспользоваться описанным выше приемом выделения промежуточной точки интегрирования.

Нельзя использовать формулу (16) также и для оценки вклада прямолинейных орбит-диаметров, проходящих через центр симметрии. Даже при наличии сферической симметрии через данную

точку  $\mathbf{r}$  проходит только одна такая траектория. Поэтому вклад таких орбит в функцию Грина определяется обычным выражением (7), а их порядок по  $\hbar$  такой же, как вклад обычной изолированной траектории, т. е. в  $\hbar^{-1/2}$  меньше вклада более сложных орбит. Сказанное относится также и к вычислению функции Грина для задач с симметрией, меньшей чем сферическая, например для аксиально-симметричного потенциала.

## 2. ПЛОТНОСТЬ ОДНОЧАСТИЧНЫХ УРОВНЕЙ

**Изолированная орбита.** Одночастичная плотность уровней  $g(e)$  связана с функцией Грина следующим соотношением:

$$g(e) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int d\mathbf{r} \{G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e)\}_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}}. \quad (18)$$

С помощью квазиклассического выражения (16) для  $G$  представим плотность уровней в виде

$$g(e) = g_{TF} + g_{osc}, \quad (19)$$

где

$$g_{TF} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int d\mathbf{r} \{G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e)\}_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}} \quad (20)$$

выражение статистической модели Томаса—Ферми;

$$g_{TF} = \frac{M}{2\pi^2 \hbar^3} \int d\mathbf{r} p(\mathbf{r}). \quad (21)$$

Компоненты функции Грина, соответствующие траекториям, длина которых не исчезает в пределе  $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'$ , дают осцилляции, связанные с периодическими траекториями. Действительно, рассматривая  $\alpha$ -ю компоненту  $g_{osc}$ :

$$(g_{osc})_\alpha = \frac{1}{2\pi^2 \hbar^2} \int d\mathbf{r} \left\{ |\mathcal{Y}_\alpha(\mathbf{p}'t_\alpha; \mathbf{r}'e)|^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S_\alpha^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'e) + i\nu_\alpha \right] \right\}_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}}, \quad (22)$$

находим, что в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  наибольшие вклады дают стационарные точки, где

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial \mathbf{r}} = \left\{ \frac{\partial S_\alpha^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e)}{\partial \mathbf{r}'} + \frac{\partial S_\alpha^*(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e)}{\partial \mathbf{r}''} \right\}_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}} = \mathbf{p}'' - \mathbf{p}' = 0. \quad (23)$$

Равенство начального и конечного импульсов в данной точке есть условие периодического движения. Таким образом, именно периодические траектории вносят наибольший вклад, и в нашем дальнейшем обсуждении осцилляции плотности уровней будут учитываться только периодические траектории, которые обозначим новым индексом  $\beta$ :

$$g_{osc}(e) = \sum_{\beta} g_{osc}^{(\beta)}. \quad (24)$$

Опустим также звездочки над классическими величинами, поскольку только такие величины будут участвовать в дальнейших выводах. Сказанное выше не относится к расчету осцилляций пространственной плотности [15, 16], однако при интегрировании пространственных распределений также можно использовать условие стационарности, приводящее к выделению вклада периодических орбит.

Для потенциалов, имеющих только изолированные периодические траектории, осциллирующая компонента плотности уровней

$$g_{osc}(e) = + \frac{1}{2\pi^2 \hbar^2} \times \\ \times \sum_{\beta} \text{Im} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(e) + i\nu \right] \oint dl \sigma(l) | \mathcal{Y}(p't_{\beta}; r'e) |^{1/2} \right\}_{\beta}. \quad (25)$$

Величина  $\sigma_{\beta}(l)$  в (25) — классически малое эффективное сечение трубки, содержащей траекторию, в точке  $l$  на траектории. Формально оно пропорционально  $(\hbar^{1/2})^2 = \hbar$ , согласно масштабу квантовой дисперсии в направлении двух поперечных координат:

$$\sigma_{\beta}(l) = 2\pi i \hbar \left\{ \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi'_i \partial \xi'_j} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial \xi'_i \partial \xi''_j} + \frac{\partial^2 S}{\partial \xi''_i \partial \xi''_j} \right\| \right\}_{\beta}^{-1/2}, \quad (26)$$

где  $\xi = (\xi_1 \xi_2)$  — малый вектор, перпендикулярный к траектории  $\beta$ . В (25) интегрирование проводится вдоль замкнутого контура периодической траектории  $\beta$ . Экспонента вынесена за знак интеграла, потому что для периодического движения интеграл действия  $S_{\beta}$  не зависит от координат.

Траектории, соответствующие различным числам  $m$  вращений, появляются в сумме (25) как независимые составляющие. Это прямо следует из зависящего от времени описания, изложенного выше. Для  $m$ -кратного пробега траектории действие

$$S_{\beta}(e) = m S_{\beta}^{(1)}(e). \quad (27)$$

Соответственно время движения вдоль траектории  $t_{\beta} = m T_{\beta}$ , где  $T_{\beta} = dS_{\beta}^{(1)}(e)/de = 2\pi/\Omega_{\beta}$  — период для орбиты  $\beta$ . Другие величины, фигурирующие в (25), также зависят от  $m$ . Согласно свойству (27), каждая периодическая орбита классического движения приводит к ряду Фурье в разложении плотности уровней (25), сумма которого является периодической функцией энергии  $e$  с периодом

$$\Delta e = \hbar \Omega_{\beta}. \quad (27a)$$

Согласно (25) и (26) осциллирующая компонента в разложении плотности уровней содержит малый фактор, пропорциональный  $\hbar^2$ , относительно томас-фермиевского члена (21), хотя соответствующие компоненты были формально одного и того же порядка в разложении функции Грина.

Для случая изолированных орбит каждую составляющую в (25) можно оценить как

$$(g_{osc})_{\beta} \approx a_{\beta} / \hbar \Omega_{\beta}, \quad (28)$$

где  $a_{\beta}$  — безразмерный множитель, который зависит от специфических свойств траектории. Используя приемы классической теории стабильности, можно выразить коэффициент  $a_{\beta}$  через индекс стабильности периодической орбиты. Эти выкладки [95] не приводим здесь, поскольку в дальнейшем простейший случай изолированной орбиты будет интересовать нас только как удобная единица для оценки амплитуды осцилляций плотности уровней.

**Усиление амплитуды осцилляций.** В общем случае масштаб интеграла от осциллирующих компонент функции Грина по пространственным переменным определяется размерностью  $\mathcal{R}$  той части области классически разрешенного движения, которую заполняют орбиты одного и того же типа с одинаковым значением интеграла действия. Величина действия не изменяется при изменении положения точки  $\mathbf{r}$  в интеграле (20) в пределах указанного пространства, так как это соответствует или перемещению точки вдоль орбиты, или переходу на другую периодическую орбиту с таким же действием. В случае изолированной орбиты  $\mathcal{R} = 1$  действие стационарно только при перемещении точки вдоль орбиты. При  $\mathcal{R} = 2$  и 3 число классически малых интегрирований в (20) уменьшается соответственно на одну и на две единицы, так как в первом случае действие стационарно при перемещении точки интегрирования по некоторой поверхности, а во втором — внутри объема порядка полного объема системы. Результат интегрирования определяется соответственно эффективным объемом классически малого слоя около стационарной поверхности или объемом пространства, заполненного орбитами. Амплитуда  $g_{osc}$  усиливается в (20) множителем, пропорциональным  $(\hbar^{-1/2})^{\mathcal{R}-1}$ , а вместе с возможным усилением амплитуды функции Грина полное усиление порядка  $\hbar^{-(\mathcal{D} + \mathcal{R} - 1)/2}$  по сравнению с изолированной орбитой.

Истинный безразмерный малый параметр квазиклассического разложения, соответствующий  $\hbar$ , порядка  $\hbar/pR$ , где  $R$  — пространственный размер системы. В случае ядра параметр приближенно равен  $0,7 A^{-1/3} \approx 0,1$ , где  $A$  — массовое число (см. разд. 8). Общий фактор усиления амплитуды осцилляций плотности уровней — порядка  $A^{(\mathcal{D} + \mathcal{R} - 1)/6}$ .

Значения  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{R}$  обычно находятся без труда. В обычном сферическом потенциале имеем два семейства орбит, одно с  $\mathcal{D} = 1$ ,  $\mathcal{R} = 3$  и другое с  $\mathcal{D} = 0$ ,  $\mathcal{R} = 3$  (диаметры). Соответственно амплитуда усиливается множителями порядка  $A^{1/2}$  или  $A^{1/3}$ . В произвольном аксиально-симметричном потенциале через заданную точку проходит только одна орбита ( $\mathcal{D} = 0$ ), а стационарные

точки лежат на аксиально-симметричной поверхности ( $\mathcal{R} = 2$ ). Для прямолинейных орбит, отвечающих движению вдоль оси симметрии,  $\mathcal{D} = 0$ ,  $\mathcal{R} = 1$ . Деформированный гармонический потенциал характеризуется большим разнообразием случаев, в том числе орбитами с максимальным вырождением ( $\mathcal{D} = 2$ ,  $\mathcal{R} = 3$ ). В следующем разделе изложен вывод квазиклассического выражения для плотности уровней произвольного сферического потенциала. Более сложное решение задачи для деформированного осциллятора будет изложено отдельно. Результаты приводятся ниже в данном обзоре.

**Сферический потенциал.** Выражение для осциллирующей компоненты плотности уровней в сферическом случае получаем, используя представление (16) для функции Грина, в следующем виде:

$$g_{osc}(e) = +4(2\pi\hbar^5)^{-1/2} \text{Im} \sum_{\beta} \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(e) + i\nu - i\frac{\pi}{4} \right] \times \right. \\ \left. \times \int_{r_{\text{мин}}}^{r_{\text{макс}}} r^2 dr p_{\rho} | \mathcal{Y}(p_{\rho}, p'_{\beta}; \rho'' z'' e) |^{1/2} \right\}_{\beta}. \quad (29)$$

Радиальное интегрирование производится от минимального до максимального значения  $r$  для траектории типа  $\beta$ . Для интересующих нас периодических орбит можно еще более упростить выражение для якобиана в формуле (29), если использовать соотношения между некоторыми производными, вытекающие из уравнений Гамильтона — Якоби. Для этого удобно ввести двухмерную декартову систему координат  $(x, y)$  в плоскости траекторий с центром в точке  $\mathbf{r}$  и осью абсцисс  $(x)$  в направлении импульса  $\mathbf{p}$  ( $\mathbf{r}$ ) (рис. 3). Так как новая система координат отличается от введенной выше системы  $(\rho, z)$  простым поворотом около общего центра, то значение якобиана сохраняется и в новой системе, т. е.

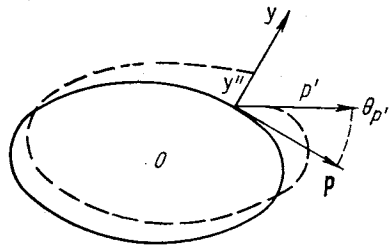


Рис. 3. Схема связи между смещением конечной координаты  $y''$  и вариацией импульса  $\mathbf{p}(\mathbf{r}')$ , которая используется при вычислении якобиана для сферической потенциальной ямы

$$\mathcal{Y}_{\beta} = \det \begin{vmatrix} \partial p'_x / \partial x'' & \partial p'_x / \partial y'' & \partial p'_x / \partial e \\ \partial p'_y / \partial x'' & \partial p'_y / \partial y'' & \partial p'_y / \partial e \\ \partial t_{\beta} / \partial x'' & \partial t_{\beta} / \partial y'' & 0 \end{vmatrix}_{\beta}$$

Следуя работе [96], вычисляем частные производные тождественных равенств  $H(p'_x p'_y, x' y') = e$ ,  $H(p''_x p''_y, x'' y'') = e$  (несущее-

ственные угловые переменные здесь не указаны) и замечаем, что в новой системе координат

$$\begin{aligned} dx'/dt &= \partial H / \partial p'_x = p/M; & dy'/dt &= \partial H / \partial p'_y = 0; \\ dx''/dt &= \partial H / \partial p''_x = p/M; & dy''/dt &= \partial H / \partial p''_y = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, находим:

$$\mathcal{Y}_\beta = \det \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -M/p \\ 0 & \partial p'_y / \partial y'' & \dots \\ M/p & \dots & \dots \end{array} \right\|_\beta = \left( \frac{M}{p} \right)^2 (\partial p'_y / \partial y'')_\beta. \quad (30)$$

Производная в (30) определяет смещение орбиты в точке  $\mathbf{r}$  в направлении, перпендикулярном к орбите, при вариации поперечной компоненты начального импульса, которая является характеристикой стабильности орбиты (см. рис. 3). Введя угол  $\theta_p \ll 1$ , как показано на рис. 3, можно записать

$$\mathcal{Y}_\beta = \frac{M^2}{p} (\partial \theta_p / \partial y''). \quad (31)$$

Подставляя выражение (31) в (29), получаем окончательно осциллирующую компоненту  $g(e)$ :

$$\begin{aligned} g_{osc}(e) &= 8 (2\pi\hbar^5)^{-1/2} \sum_\beta \sum_{m=1}^\infty M \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r^2 dr (p_p/p) \times \\ &\times |p \partial \theta_p / \partial y''|^{1/2} \sin [mS_\beta^{(1)}(e)/\hbar + \nu_{\beta m} - \pi/4]. \end{aligned} \quad (32)$$

Множитель  $4\pi$  в (32) появляется после интегрирования по угловым переменным. Кроме этого, результат удвоен для того, чтобы учесть как пути, начинающиеся в  $\mathbf{r}'$  и кончающиеся в  $\mathbf{r}''$ , так и те, что соответствуют движению в обратном направлении. Явно указано суммирование по повторяющимся путям. Импульс  $p(r) = \sqrt{2M(e - V(r))}$ , а  $p'_p$  — компонента  $\mathbf{p}$  в направлении, перпендикулярном к оси  $(0, \mathbf{r})$  (см. рис. 2). Формула (32) дает решение для произвольного сферического потенциала, исключая сферический гармонический осциллятор или другие случаи более высокого вырождения. Можно получить простую и довольно точную общую оценку масштаба амплитуды  $g_{osc}$  для сферического случая по порядку величины:

$$\partial \theta_p / \partial y'' \approx q_\beta (r/R) / l_\beta, \quad (33)$$

где  $l_\beta$  — длина орбиты;  $q_\beta$  — безразмерная функция порядка единицы. В (33)  $R$  — постоянный масштабный множитель порядка

радиуса системы. Выражение (32) можно представить как

$$\begin{aligned}
 g_{osc} &= 2 \frac{2MR^2}{\hbar^2} (2\pi)^{-1/2} (\bar{k}R)^{1/2} \times \\
 &\times \sum_{\beta m} \left( \frac{4R}{l_{\beta}} \right)^{1/2} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} m S_{\beta}^{(1)}(e) + \nu_{\beta m} - \frac{\pi}{4} \right] \times \\
 &\times \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{r^2 dr}{R^3} [p_{\rho} | q(r/R) / \bar{p} p |^{1/2}]_{\beta m}.
 \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь  $\bar{p}$  — среднее значение импульса вдоль траектории  $\beta$ ;  $\bar{k} = \bar{p}/\hbar$ ;  $4R$  — длина кратчайшей периодической орбиты-диаметра. В (34) интеграл — величина порядка единицы,  $4R/l_{\beta}$  также порядка единицы для  $m = 1$ . Отсюда следует приближенная оценка для амплитуды  $g_{osc}$  в виде

$$g_{osc} \approx (2MR^2/\hbar^2) \sqrt{2/\pi} (\bar{k}R)^{1/2} (4R/l_{\beta})^{1/2}. \quad (35)$$

Можно привести также выражение через частоту  $\Omega$  оборотов для  $\beta$ -й орбиты:

$$g_{osc} \approx \sqrt{2\pi} (\bar{k}R)^{3/2} (4R/l_{\beta})^{3/2} / \hbar \Omega_{\beta}, \quad (36)$$

где

$$\Omega_{\beta} = 2\pi \bar{p} / M l_{\beta} = 2\pi / T_{\beta}. \quad (37)$$

Из приведенных выражений следует, что амплитуда осциллирующей компоненты плотности одночастичных уровней в сферическом ядерном потенциале порядка нескольких единиц  $M e v^{-1}$ .

### 3. ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ

**Бесконечная сферическая потенциальная яма.** В этом случае все периодические орбиты являются правильными многоугольниками, и их можно характеризовать [5г] при помощи двух целых чисел, а именно числа вершин  $a$  и числа оборотов около центра  $b$ , совершаемых частицей в течение одного периода (рис. 4). Интеграл действия для одного периода

$$S_{\beta}^{(1)} = p(e) L(a, b), \quad 2a \gg b, \quad (38)$$

где  $p(e)$  — импульс частицы;  $L(a, b)$  — длина орбиты, равная

$$L(a, b) = 2aR \sin \phi. \quad (39)$$

Здесь угол  $\phi = b\pi/a$ . Полная длина пути после  $m$  оборотов  $l(a, b) = mL(a, b)$ , а период обращения по данной орбите

$$T(a, b) = L(a, b)/v, \quad (40)$$



где  $v = p/M$  — скорость. Компонента импульса  $p_\rho$ , перпендикулярная к оси (0, r):

$$p_\rho = (pR \cos \phi)/r. \tag{41}$$

Сингулярными являются те точки орбиты, где она касается каустической поверхности, а также точки отражения от стенок потенциальной ямы. Каустическая поверхность — сфера радиуса

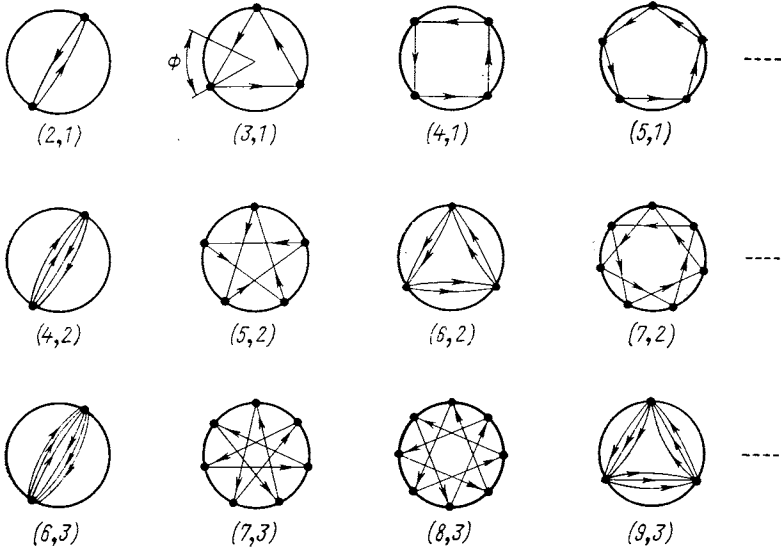


Рис. 4. Замкнутые орбиты в бесконечной сферической потенциальной яме

$r_{\min} = R \cos \phi$ . Число каустических точек на орбите равно  $a$ , и в каждой из них возникает дополнительная фаза, равная  $-\pi/2$ . В точках поворота возникает двойная особенность, так как одно из собственных значений матрицы (12), которое связано с вариацией  $r$ , касательной к граничной сфере и перпендикулярной к плоскости траектории, равно нулю, тогда как другое, связанное с вариацией координаты, нормальной к поверхности, обращается в бесконечность. Поэтому каждая точка отражения добавляет  $-\pi$  к полной фазе. В целом получаем сдвиг фазы

$$\nu_B = -3\pi a/2 - (mb - 1)\pi \tag{42}$$

Правильное значение  $[5\Gamma]$

$$\nu_B = -3\pi a/2 - (mb - 1)\pi, \tag{43}$$

но нам не удалось получить его. Различие между (42) и (43) не влияет на те результаты, которые обсуждаются в настоящем обзоре.

Подставляя выражения (38) — (43) в уравнение (29), получаем

$$g_{osc}(e) = 4(2\pi\hbar^5)^{-1/2} \operatorname{Im} \sum_{\substack{a \geq 2 \\ b, m \geq 1}} pR \cos \phi \exp [ikl(a, b) + iv_{\beta} - i\pi/4] \times \\ \times \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} r dr |\mathcal{Y}(p'_r, p'_z t_{\beta}; \rho'' z'' e)|^{1/2}. \quad (44)$$

Якобиан в уравнении (44)  $|\mathcal{Y}| = (M^2/p) |(\partial\theta_{p'}/\partial y'')|$ , где  $\theta_{p'} = \operatorname{arctg}(p_y/p_x)$ . Декартова система координат выбрана здесь таким образом, что ось  $X$  совпадает с направлением вдоль траектории в точке  $\mathbf{r}$ , где находится начало координат, а плоскость  $(X, Y)$  совпадает с плоскостью орбиты (см. рис. 3). Условия отражения в точках поворота определяют

$$|\partial\theta_{p'}/\partial y''| = R |\sin \phi / 2am (r^2 - R^2 \cos^2 \phi)|, \quad (45)$$

откуда

$$|\mathcal{Y}| = \frac{RM^2}{2amp} |\sin \phi / (r^2 - R^2 \cos^2 \phi)|. \quad (46)$$

Теперь можно выполнить интегрирование по радиальной переменной в уравнении (44) и получить

$$g_{osc}(e) = (kR)^{1/2} (\hbar^2/2MR^2)^{-1} \operatorname{Im} \sum_{\substack{a \geq 2 \\ b \geq 1, m \geq 1}} \sin(2\phi) \sqrt{\frac{\sin \phi}{am\pi}} \times \\ \times \exp [ikmL(a, b) + iv_{\beta} - i\pi/4]. \quad (47)$$

Здесь  $k(e)$  — волновое число. Отброшены слагаемые, отвечающие орбите-диаметру ( $a = 2b$ ).

Формула (47) совпадает с полученным в работе Бальяна и Блока [5г] в квазиклассическом пределе выражением для плотности уровней в сферической потенциальной яме с бесконечными стенками, основанным на представлении многократных отражений для функции Грина данной задачи. Для приложений наибольший интерес представляют самые простые орбиты, имеющие достаточное вырождение. Согласно работе [5г] таковыми являются орбиты, имеющие формы равностороннего треугольника и квадрата, каждая с  $m = 1$  (один оборот). Им соответствуют параметры  $(a, b) = (3 : 1)$  и  $(4 : 1)$ . В частности, только такие орбиты дают вклад в осцилляции плотности уровней  $g_{\gamma}(e)$ , сглаженной усреднением по энергии на интервале  $\gamma$ , в несколько раз меньшем или порядка среднего расстояния между оболочками  $\hbar\Omega = 2\pi\hbar/T$ , где средний период  $\bar{T} = \bar{L}/v$ ,  $\bar{L} = [L(3,1) + L(4,1)]/2 = 5,42 R$  — средняя длина двух указанных орбит. Вклад таких орбит в  $g_{osc}$  согласно (47)

следующий:

$$(g_{osc})_{3+4} = -\frac{1}{2} \left( \frac{2MR^2}{\hbar^2} \right) \sqrt{\frac{kR}{\pi}} \times \\ \times \left\{ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{1/2} \sin \left( 3\sqrt{3}kR + \frac{\pi}{4} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{1/2} \sin \left( 4\sqrt{2}kR + \frac{3\pi}{4} \right) \right\}. \quad (48)$$

Амплитуды и периоды двух слагаемых в (48) весьма близки друг к другу, что приводит к интересному явлению — пульсации

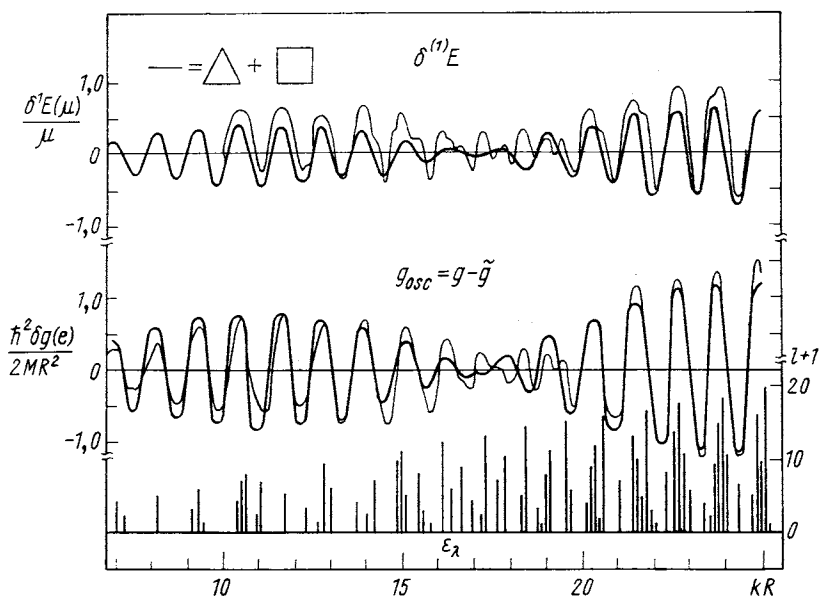


Рис. 5. Характеристики оболочечной структуры для сферической бесконечно глубокой потенциальной ямы:

внизу — собственные значения для сферической бесконечно глубокой потенциальной ямы и их вырождение; середина — осциллирующая компонента плотности уровней, вычисленная при помощи численного усреднения, как описано в тексте (тонкая линия), с параметрами усреднения  $\gamma = \hbar\Omega/3$  и  $\tilde{\gamma} = 2\hbar\Omega$ , и в квазиклассическом приближении (жирная линия) согласно (48); сверху — оболочечные поправки  $\delta E$  к энергии, найденные численно в рамках метода оболочечных поправок (тонкая линия) и в квазиклассическом приближении (жирная линия) согласно (80)

амплитуды  $g_{osc}$  как функции энергии вследствие интерференции вкладов двух разных классических орбит с близкими характеристиками (рис. 5). Выражение (48) можно переписать в более

наглядной форме:

$$(g_{osc})_{3+4} = - \left( \frac{\sqrt{3} kR}{2\pi} \right)^{1/2} \left[ \cos \left( k\Delta L + \frac{\pi}{4} \right) \cos(k\bar{L}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{1/4} \right) \cos \left( kL(4,1) + \frac{\pi}{4} \right) \right] \frac{2MR^2}{\hbar^2}. \quad (49)$$

Относительная амплитуда второго слагаемого в выражении (49) не превышает 5% первого слагаемого, и им можно пренебречь. В остающемся члене первый косинус представляет эффект пульсации амплитуды, которая возрастает для значений  $k(e)R$ , близких к  $13,7 (n - 1/4)$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , и равных  $10,2; 24,0$  и т. д., тогда как группировка уровней в большие оболочки практически отсутствует при энергиях, соответствующих значениям  $k(e)R$ , приблизительно равным  $13,7 (n + 1/4) = 3,5; 17,4; 30,8$  и т. д.

Второй косинус в (49) представляет обычную группировку уровней в большие оболочки. Максимумы плотности уровней появляются при энергиях, отличающихся на  $\hbar\Omega$ , т. е. при значениях  $k(e)R$ , равных  $1,16 (n + 1/2)$ ,  $n = 1, 2$  и т. д. Все эти выводы общей теории находятся в отличном согласии с численными результатами, полученными при обработке конкретного спектра собственных значений рассматриваемой задачи. Сравнение прямых численных расчетов с квазиклассической аналитической теорией дано на рис. 5. В средней части рисунка показаны кривые осциллирующей части плотности уровней, рассчитанной при помощи квазиклассического выражения (48) (жирная линия) и прямым численным методом (тонкая линия). В последнем случае интервал усреднения  $\gamma$  при вычислении средней плотности уровней взят равным  $\hbar\Omega/3$ . Гладкое значение  $\tilde{g}(e)$  получено численным усреднением с  $\gamma = 2,0\hbar\Omega$  (см. разд. 7). В верхней части рисунка приведены рассчитанные двумя методами оболочечные поправки к энергиям связи, которые обсуждаются в разд. 6.

Приведенные численные результаты и общие выражения (34), (47) позволяют судить о сходимости вкладов различных орбит. В исходных полных выражениях для  $g_{osc}$  сходимость по числу оборотов  $m$  весьма медленная, амплитуда каждой гармоники убывает как  $m^{-1/2}$ . Поэтому истинная форма осциллирующей компоненты плотности заметно отличается от того, что изображено на рис. 5 [5г]. Однако вклад более высоких гармоник экспоненциально убывает в плотности уровней, усредненной по энергии (см. разд. 7), и тогда теоретическая форма осцилляций усредненной плотности приближается к сумме вкладов одной-двух первых гармоник. По существу именно такое усредненное значение представлено как теоретическая кривая на рис. 5. Быстро сходятся также вклады высоких гармоник в оболочечную энергию. Как

показано в разд. 6, вклады более длинных путей убывают быстрее, чем растет квадрат длины пути.

Вклады орбит с большим числом точек отражения  $a$  в  $g_{osc}$  быстро убывают, несмотря на то, что длина орбиты при этом приближается к постоянному пределу  $2\pi R$ . Сходимость связана с уменьшением объема сферического слоя, занимаемого орбитой (32). Действительно, легко убедиться в том, что величина  $R - r_{\min} \sim a^{-2}$  при  $a \gg 1$ . Основной вклад в оболочечные вариации плотности дают орбиты, не слишком близкие к поверхности, такие, как треугольники и квадраты в рассмотренном выше мере.

Приведем выражение для компоненты плотности, связанной с прямолинейными орбитами-диаметрами, для которых  $\mathcal{D} = 0$ ,  $\mathcal{R} = 2$ . Согласно работе [5г] для таких орбит

$$g_{osc}(e) = -(\hbar^2/2MR^2)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi m} \operatorname{Im} \exp(4ikmR). \quad (50)$$

Это выражение легко получается также и в методе стационарной фазы. Сумма ряда Фурье (50) представляет собой пилообразную кривую, характерную также для плотности уровней в бесконечной яме с границей в форме плоского параллелепипеда. Оболочки в последнем случае связаны с прямолинейными орбитами — отражениями от близких параллельных стенок. Амплитуда (50) порядка  $(1/kR)^{1/2} \approx A^{-1/6}$  относительно главного члена.

**Гармонический осциллятор.** В декартовой системе координат классические пути определяются заданием пяти параметров уравнений движения:

$$x = A_x \sin(\omega_x t); \quad y = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y); \quad z = A_z \sin(\omega_z t + \varphi_z), \quad (51)$$

где  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  — парциальные частоты-параметры деформированного осцилляторного потенциала. При любом соотношении частот существуют простейшие прямолинейные периодические орбиты, отвечающие движению вдоль каждой из осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Двух- и трехмерные периодические орбиты возможны только в том случае, когда две или более парциальных частот относятся друг к другу как целые числа. Когда в таком отношении находятся все три частоты

$$\omega_x : \omega_y : \omega_z = n_x : n_y : n_z, \quad (52)$$

то имеет место полное вырождение классического движения: все возможные пути периодические. Именно в этом случае появляются максимально вырожденные орбиты, которым соответствуют  $\mathcal{D} = 2$  и  $\mathcal{R} = 3$ . Через каждую точку классически разрешенной области проходит дважды вырожденное семейство периодических орбит, соответствующих одной и той же энергии. В этом легко убедиться

непосредственно из (51) и (52). Период обращения  $T_{xyz}$  для таких орбит определяется из соотношения

$$2\pi/T_{xyz} = \omega_x/n_x = \omega_y/n_y = \omega_z/n_z \quad (\mathcal{D} = 2, \mathcal{R} = 3). \quad (53)$$

Интеграл действия  $S(e)$  находим из общего для всех периодических орбит гармонического осциллятора соотношения

$$S(e) = eT \quad (54)$$

и формулы (53). Действие  $S(e)$  одинаково для всех орбит одного и того же типа (с одинаковым периодом обращения).

Если только два из параметров  $\omega_i$  относятся как целые числа, например  $\omega_x$  и  $\omega_y$ , то периодические орбиты расположены в плоскости  $(x, y)$ . Они получаются из (51) при  $A_z = 0$ . При этом исчезает зависимость от параметра  $\varphi_z$ , т. е. осуществляется случай  $\mathcal{D} = 1, \mathcal{R} = 2$ . Период  $T_{xy}$  таких орбит находим из следующего соотношения:

$$2\pi/T_{xy} = \omega_x/n_x = \omega_y/n_y \quad (\mathcal{D} = 1, \mathcal{R} = 2). \quad (55)$$

Плоские орбиты гармонического осциллятора — это хорошо известные фигуры Лиссажу (рис. 6). Плоские орбиты существуют, конечно, и в полностью вырожденном осцилляторном потенциале, но они составляют отдельное семейство лишь в том случае, когда период  $T_z = 2\pi/\omega_z$  отличается от периода  $T_{xy}$ .

В ядерной физике обычно рассматривается деформированный осциллятор с «сохраняющимся объемом», так что

$$\omega_0^3 = \omega_x \omega_y \omega_z = \text{const}. \quad (56)$$

При использовании осцилляторной модели в теории ядра  $\omega_0$  находят из условия постоянства плотности частиц. Таким образом, получается, что  $\hbar\omega_0 = \mu(3A)^{-1/3}$ , где  $\mu$  — химический потенциал. Это соотношение удобно использовать для оценки масштаба различных величин. С помощью (56), (55), (53) и (52) можно выразить периоды обращения  $T_{xyz}$ ,  $T_{xy}$  и связанные с ними частоты оборотов  $\Omega_{IV}$ ,  $\Omega_{II}$  через частоту сферического осциллятора с «равным объемом»  $\omega_0$ . Для аксиально-симметричного потенциала, который будет рассматриваться ниже, получаем

$$\hbar\Omega_{IV} = 2\pi\hbar/T_{xyz} = \hbar\omega_0 n_{\perp}^{-2/3} n_z^{-1/3}; \quad (57)$$

$$\hbar\Omega_{II} = 2\pi\hbar/T_{xy} = \hbar\omega_{\perp} = n_{\perp} \hbar\Omega_{IV}. \quad (58)$$

Здесь

$$\omega_{\perp} = \omega_x = \omega_y; \quad n_{\perp} = n_x = n_y;$$

$n_{\perp}$  и  $n_z$  — относительно простые целые числа, которые входят в (53) или (55). Римскими цифрами указана степень вырождения орбит, равная  $\mathcal{D} + \mathcal{R} - 1$ .

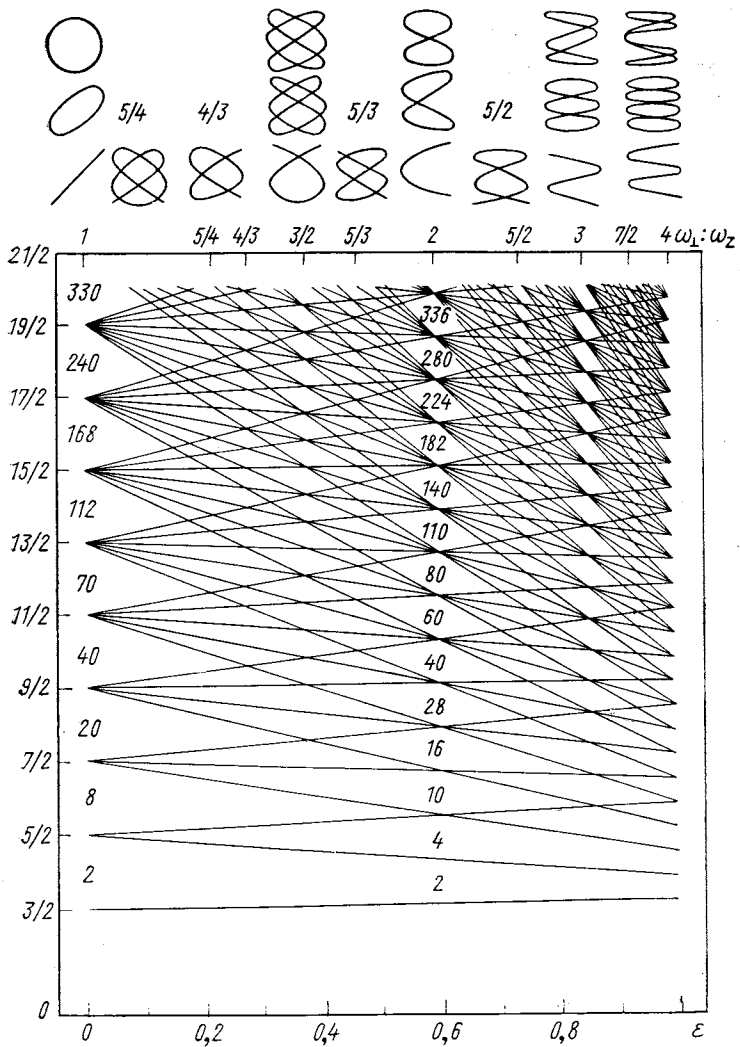


Рис. 6. Уровни аксиально-симметричного деформированного гармонического осциллятора, единица энергии —  $\hbar\omega_0(\varepsilon)$ . В верхней части приведены примеры классических орбит [фигуры Лиссажу в плоскости  $(xz)$ ] и указаны значения  $\omega_1:\omega_2$

Расстояния между максимумами плотности уровней, большими оболочками, связанными с орбитами этих двух типов, согласно (27а) и (54), совпадают с величинами (57) и (58). Расстояния между оболочками, обусловленными прямолинейными орбитами, равняются  $\hbar\omega_i$ , где  $i = x, y, z$ , но такие орбиты составляют отдельный вклад в  $g_{osc}$  только в том случае, если они являются изолированными.

На основе изложенных выше общих соображений амплитуда осциллирующих компонент плотности уровней, связанных с трехмерными орбитами, должна быть усилена множителем порядка  $(\hbar^{-1/2})^4 \approx A^{2/3}$  и является величиной того же порядка, что и компонента Томаса — Ферми. Фактор усиления для плоских орбит порядка  $(\hbar^{-1/2})^2 \sim A^{1/3}$ , а для прямолинейных орбит амплитуда  $g_{osc}(e)$  минимального порядка, т. е. в  $A^{2/3}$  раз меньше компоненты Томаса — Ферми. В полностью вырожденном осцилляторе присутствует вклад орбит всех трех типов. В осцилляторе, частично вырожденном, могут интерферировать плоские и прямолинейные орбиты.

Приведем без доказательства выражения для осциллирующих компонент плотности уровней деформированного гармонического осциллятора. Для трехмерных орбит в произвольном осцилляторном потенциале, параметры которого удовлетворяют соотношению (53),  $\mathcal{D} = 2$ ,  $\mathcal{R} = 3$ , и для этого случая находим

$$g_{osc}^{(IV)} = 2e^2/(\hbar\omega_0)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(meT_{xyz}/\hbar + mv(n_x, n_y, n_z) - \pi/2), \quad (59)$$

где  $\omega_0$  определено в (56). Амплитуда  $g_{osc}$  согласно (59) только численным множителем отличается от гладкой компоненты плотности для гармонического осциллятора:

$$g_{TF}(e) = [(e/\hbar\omega_0)^2 - 1/4]/2\hbar\omega_0, \quad (60)$$

как это следует из общей оценки.

Для плоских орбит ( $\mathcal{D} = 1$ ,  $\mathcal{R} = 2$ )

$$g_{osc}^{(II)} = \sqrt{2} \hbar\omega_z e / (\hbar\omega_0)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(meT_{xy}/\hbar + v_m). \quad (61)$$

Здесь  $\omega_x$  и  $\omega_y$  — любые парциальные частоты, удовлетворяющие соотношению (54);  $v_m$  — фаза. Для прямолинейных траекторий ( $\mathcal{D} = 0$ ,  $\mathcal{R} = 1$ )

$$g_{osc}^{(0)} = \sum_{i=1}^3 (\hbar\omega_i)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} |1 + \cos(m\omega_j T_i) \cos(m\omega_l T_i)|^{-1/2} \times \\ \times \sin(meT_i/\hbar + v_m). \quad (62)$$

Здесь  $i = x, y, z$ ;  $\omega_j$  и  $\omega_l$  — парциальные частоты для двух направлений, перпендикулярных к оси  $i$ . В случае полного вырожде-



ния (53)

$$g_{osc} = g_{osc}^{(IV)} + g_{osc}^{(II)} + g_{osc}^{(0)}. \quad (63)$$

При частичном вырождении осциллятора ( $\mathcal{Z} = 1$ ,  $\mathcal{R} = 2$ ) необходимо учитывать сумму только последних двух слагаемых.

Члены суммы (63) убывают пропорционально возрастающей степени малого параметра  $\hbar\omega_0/e \approx A^{-1/3}$ . В этом заключается одна из специфических особенностей гармонического осциллятора и существенное отличие от общего случая. Так, в сферическом потенциале относительный порядок вклада орбит с меньшим вырождением определяется как  $A^{-1/6}$ . Главный член квазиклассического выражения (63) для плотности уровней осциллятора в  $A^{1/6}$  раз больше, а следующий — в  $A^{1/6}$  меньше главной компоненты  $g_{osc}$  в сферическом случае.

Качественные выводы изложенной квазиклассической теории можно проверить, сравнивая их с результатами численной обработки спектра. На рис. 7 показано несколько примеров осциллирующей компоненты плотности уровней аксиально-симметричного осциллятора ( $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ ), полученной численным усреднением распределения уровней на интервале  $\gamma$  и вычитанием из такого распределения гладкой величины  $\tilde{g}(e)$ . Таким образом,  $g_{osc}^\gamma = g_\gamma(e) - \tilde{g}(e)$ . Интервал  $\gamma$  брали равным  $\hbar\omega_0/3$  для орбит с максимальным для данного отношения частот вырождением для того, чтобы сохранить примерно одинаковый фактор ослабления, связанный с усреднением на конечном интервале [см. разд. 8, уравнение (90)]. Значения  $\hbar\Omega_{IV}$  определяли из формулы (57). Они указаны на рисунке горизонтальными сплошными линиями. Видно, что амплитуда  $g_{osc}$  действительно пропорциональна квадрату энергии при полном вырождении и пропорциональна энергии при частичном вырождении ( $\omega_\perp : \omega_z = \sqrt{2}$ ). Амплитуда осцилляций приблизительно одинакова во всех случаях полного вырождения. При  $n_\perp > 1$  отчетливо видна модуляция спектра с периодом большим, чем основной, равный  $\hbar\Omega_{IV}$ , что является результатом вклада орбит с меньшим вырождением. В данном случае это орбиты в плоскости  $z = 0$ , для которых период  $\hbar\Omega_{II} = \hbar\Omega_\perp$  в  $n_\perp$  раз больше, чем  $\hbar\Omega_{IV}$  [см. уравнения (57) и (58)]. На рис. 7 и 8 величина  $\hbar\Omega_\perp$  показана пунктирными отрезками. Модуляция плоскими орбитами незаметна в тех случаях, когда  $n_\perp = 1$ , так как тогда обе частоты одинаковы. На рис. 7 и 8 это имеет место для  $\omega_\perp : \omega_z = 1 : 2$ .

Кроме того, вклад плоских орбит в  $g_{osc}$  не следует учитывать как отдельное слагаемое в сферически-симметричном случае. Связано это с тем, что при выводе выражения (61) для  $g_{osc}^{(II)}$  предполагалось в непосредственной близости от плоскости  $z = 0$  отсутствие трехмерных орбит с таким же периодом. Поэтому

формула (61) не представляет вклада плоских орбит в сферическом случае, когда эти орбиты — частные траектории семейства трехмерных орбит с тем же периодом и таким же интегралом действия. По этой же причине не является отдельным членом

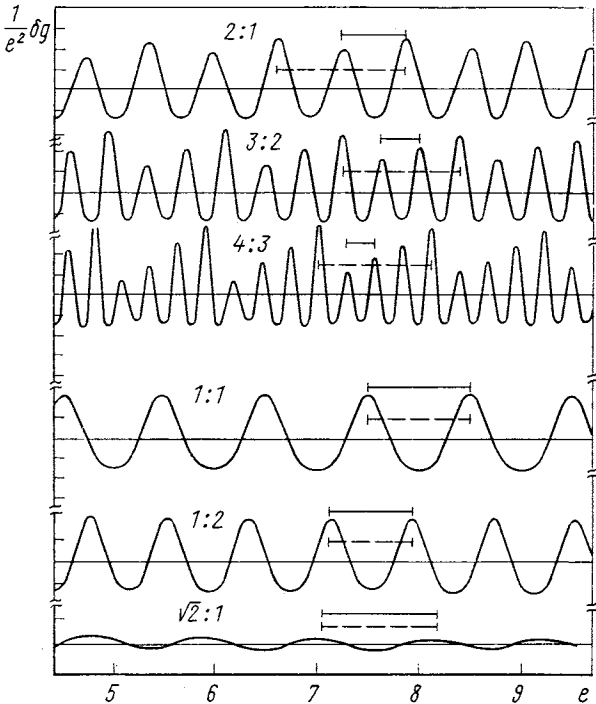


Рис. 7. Осциллирующая компонента  $\delta g = g_\gamma - \tilde{g}$  плотности уровней аксиально-симметричного гармонического осциллятора для некоторых значений отношения частот  $\omega_\perp : \omega_z$ , указанных на рисунке. Единица энергии —  $\hbar\omega_0$  [см. (56)]. Горизонтальные линии показывают расстояние между оболочками  $\hbar\Omega_{IV}$ , рассчитанное по (57). Параметры усреднения  $\gamma = \hbar\omega_0/3$ ,  $\tilde{\gamma} = 2\hbar\omega_0$ . Горизонтальные пунктирные отрезки соответствуют  $\hbar\Omega_{II}$  для плоских орбит с меньшим вырождением ( $\mathcal{N} = 1$ ,  $\mathcal{R} = 2$ )

суммы (63) вклад плоских орбит, проходящих через ось симметрии, если  $\omega_x = \omega_y$ . Период таких орбит совпадает с периодом близких трехмерных орбит и их вклад учтен в соответствующих интегралах для орбит с большим вырождением.

Нижние кривые на рис. 7 и 8 показывают оболочечную структуру спектра частично вырожденного осциллятора. Отношение

амплитуды  $g_{osc}$  к амплитуде при полном вырождении примерно соответствует формальной оценке, т. е. величине порядка  $\hbar\omega_0/e \approx \approx A^{-1/3}$ . Вклад изолированных прямолинейных орбит во всех случаях мал и не проявляется в численных расчетах.

Все эти особенности практически невозможно увидеть в спектре уровней осциллятора, приведенном на рис. 6. Там заметны толь-

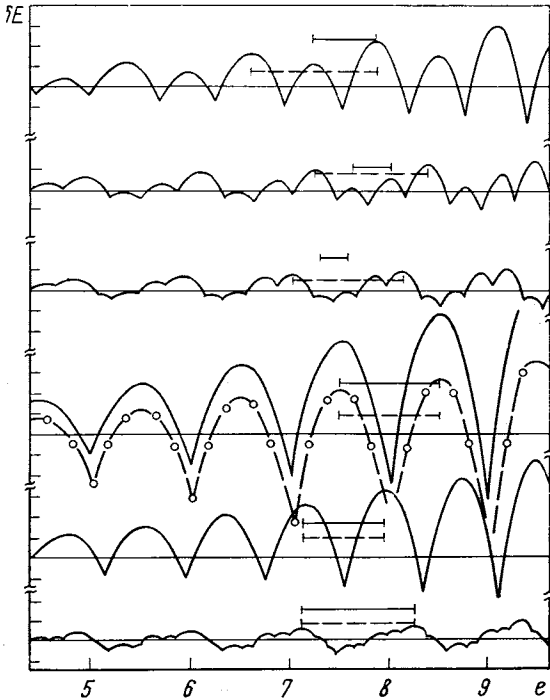


Рис. 8. Оболочечные поправки  $\Delta E$ , рассчитанные при помощи численного метода оболочечных поправок для тех же значений параметров деформации, что и на рис. 7:

— — — — численный расчет с уточненным определением  $\tilde{E}i.p.$ ;  $\circ\circ\circ\circ$  — значения  $\Delta E$  согласно квазиклассической теории

ко тривиальные оболочки, обусловленные точным квантовым вырождением уровней, которые в квазиклассической картине соответствуют орбитам с максимальным вырождением. Все остальные проявления оболочечной структуры спектра ранее не отмечались. Между тем их роль не ограничивается качественной теорией. Оказывается, например, что при не слишком большом значении отношения  $e/\hbar\omega_0 \approx A^{1/3}$  и  $n_{\perp} > 2$  вклад  $g_{osc}^{(II)}$  в оболоч-

точные осцилляции полной одночастичной энергии превосходит вклад орбит с максимальным вырождением.

К сожалению, нельзя провести более точное количественное сравнение квазиклассических выражений  $g_{osc}$  с численно рассчитанными значениями. Последние зависят от выбора интервала усреднения  $\gamma$ , и в случае интерференции компонент со значительно отличающимися частотами при усреднении изменяется соотношение их вкладов: амплитуда компонент  $g_{osc}$  с меньшим  $\hbar\Omega$  уменьшается сильнее (см. разд. 7). Более детальное сравнение возможно для оболочечных поправок к энергии, свободных от произвола, связанного с выбором  $\gamma$  (см. рис. 7 и 8 и разд. 6).

В заключение отметим следующую важную особенность выражений (59) и (61). Согласно этим уравнениям  $g_{osc}$  обращается в бесконечность при энергиях, отвечающих точным квантовым уровням, соответствующим возбуждению квантов колебаний в направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  [или только в плоскости  $(x, y)$ ] при условии, что соответствующие частоты соизмеримы. Величины  $\hbar\Omega_{IV}$  и  $\hbar\Omega_{II}$  в этих случаях совпадают с точными расстояниями между соответствующими уровнями энергии.

#### 4. БОЛЬШИЕ НУКЛОННЫЕ ОБОЛОЧКИ КАК КВАНТОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Движение частицы в одномерной потенциальной яме всегда является периодическим. Правило квантования Бора — Зоммерфельда определяет последовательность значений энергии, которые приближенно представляют собой спектр энергий в квантовой задаче. Приближенные энергии уровней находят из условия, чтобы интеграл действия для одного периода

$$S^{(1)}(e_N) = \oint p dl = 2\pi N\hbar - \nu\hbar. \quad (64)$$

Здесь  $N$  — целое число;  $\nu = -\pi/2$ . Классическое движение в трехмерной потенциальной яме, вообще говоря, не является периодическим: отправляясь из некоторой точки, частица не возвращается туда с импульсом, равным исходному. В таком случае отсутствует какая-либо простая аналогия с одномерной задачей. Однако если в многомерном движении имеется периодическая траектория, то правило Бора — Зоммерфельда опять применимо, хотя и приобретает новое, более общее содержание. Для каждой из возможных периодических орбит условие (64) определяет положения сгущений энергетических уровней, но не энергии отдельных уровней. Таким образом, смысл условия квантования (64) в многомерном случае радикально изменяется, хотя форма остается прежней. Контур интегрирования совпадает теперь с многомерной периодической орбитой  $\beta$ , и каждая из таких

орбит приводит к появлению осциллирующей компоненты плотности уровней с расстоянием между сгущениями (большими оболочками)  $\hbar\Omega_\beta = 2\pi\hbar/T_\beta$ . Здесь  $T_\beta$  — период обращения по  $\beta$ -й орбите;  $\Omega_\beta$  — соответствующая частота (см. разд. 2). Число  $N$  в (64) представляет теперь порядковый номер максимума плотности уровней (оболочки) в последовательности сгущений и разреживаний уровней, связанной с  $\beta$ -й орбитой.

Отличие от одномерного случая связано также и с тем, что квантовомеханический принцип неопределенности не допускает движения вдоль классической орбиты. Неизбежно возникает пакет распределения вероятности в направлениях, перпендикулярных к орбите, явление, не имеющее аналогии в одномерной задаче. Классические свойства можно увидеть только в усредненных квантовых распределениях. Свойства классических орбит, ответственных за определенную последовательность «оболочек» в спектре квантовых состояний, не связаны с конкретными свойствами и квантовыми характеристиками одночастичных уровней, даже принадлежащих к одной и той же большой оболочке. Классические свойства распределены по многим квантовым состояниям, и, в свою очередь, сила каждого состояния распределена по всем классическим орбитам. Поэтому неправильно использовать термин «орбита» для обозначения отдельных квантовых состояний частицы, как это часто делается в ядерной физике. Качественные соотношения хорошо иллюстрирует простой пример квантовой задачи о движении частицы в бесконечно высокой сферической потенциальной яме (см. работу [5g] и рис. 4 и 5). Точное решение такой задачи хорошо известно. Радиальные волновые функции являются функциями Бесселя с полуцелыми индексами, а уровни энергии

$$\epsilon_\lambda = \hbar^2 k_\lambda^2 / 2M, \quad (65)$$

где  $k_\lambda R$  —  $\lambda$ -й корень функции Бесселя  $J_{l+1/2}(kR)$ ;  $R$  — радиус ямы. Распределение собственных значений данной задачи, а также значения квантового числа  $l$  для каждого уровня показаны в нижней части рис. 5. Величина  $l$  характеризует также квантовое вырождение уровней, каждый из которых соответствует подоболочке в теории ядра. С учетом вырождения уровни образуют отчетливо видные группы — большие оболочки. Минимумы плотности уровней отвечают «заполненным большим оболочкам». Каждая оболочка включает много одночастичных уровней с различными значениями орбитального момента и четностями, которые, очевидно, не связаны со свойствами простейших орбит в виде треугольника и квадрата, ответственных за наблюдаемую оболочечную структуру собственных значений\*.

\* В ядерной модели оболочек часто используют название «оболочка» для определения отдельных уровней, вырожденных по проекции момента» Во избежание путаницы с «большими оболочками» не будем использовать здесь такой термин.

Поучителен также пример оболочечной структуры, связанной с частично вырожденными классическими орбитами в деформированном гармоническом осцилляторе. Для  $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ , и при иррациональном значении  $\omega_\perp/\omega_z$  классические периодические орбиты расположены только в плоскости, перпендикулярной к  $z$ -оси. Они приводят к относительно более слабой, но все же отчетливо проявляющейся оболочечной структуре спектра. Несмотря на то, что в данном случае большие оболочки обусловлены только плоскими орбитами, которые отвечают нулевой компоненте классического импульса в направлении оси  $z$ , они включают квантовые уровни, связанные с возбуждением квантов колебаний в  $z$ -направлении. Центры оболочек, определяемые соотношением (64), в данном случае совпадают с вырожденными уровнями возбужденных квантов колебаний в направлениях осей  $x$  и  $y$ .

Более известные оболочки деформированного гармонического осциллятора соответствуют сильно вырожденным квантовым состояниям. Они возникают в том случае, когда все три частоты относятся как целые числа. Известно также, что такие оболочки составлены из состояний одной и той же четности. Сказанное относится также и к классическому примеру оболочек водородоподобного атома. Оба примера представляют исключительные случаи полного вырождения в классической механике, когда любая траектория периодическая независимо от начальных условий. В этом отношении имеется аналогия с одномерным случаем, и можно предположить, что однозначное соответствие между значениями энергии, определенными из условия квантования (64), и квантовыми уровнями энергии, сильно вырожденными в многомерном случае, имеет место только тогда, когда гамильтониан соответствует полностью вырожденной классической задаче. Знакомый пример одномерного движения можно рассматривать как частный случай этого общего правила (см. также разд. 8). Можно предположить, что при полном вырождении классического движения амплитуда  $g_{osc}$  обращается в бесконечность при тех же энергиях, которые соответствуют положению вырожденных уровней — больших оболочек (см. пример гармонического осциллятора в разд. 3). Если же классическое движение вырождено не полностью, то условие (64) определяет лишь положения максимумов плотности уровней. Полное вырождение классического движения не является общим свойством, но оно не является также и необходимым условием возникновения значительной оболочечной структуры. К сожалению, весьма специальные свойства оболочек полностью вырожденного гармонического осциллятора принимают иногда как объяснение и как необходимое условие структуры больших оболочек в реалистических ядерных потенциалах.

Что же касается правомерности употребления названия «оболочки» для обозначения явления группировки квантовых уровней,

то здесь следовало бы отметить, что оболочки атома водорода с их «случайным» вырождением по  $l$  представляют частный случай рассматриваемой здесь структуры типа больших оболочек в условиях полного вырождения классического движения. Поскольку понятие оболочки было внесено в ядерную физику именно на основании аналогии с атомом, то употребление этого названия для обозначения больших оболочек вполне естественно.

Рассматриваемое здесь квазиклассическое описание интегральных характеристик распределения одночастичных уровней можно сравнить с существующим квазиклассическим приближением для уравнения Шредингера (см. работы [18, 19], а также обзор [20]). В последнем случае условие типа (64) следует из требования однозначности волновой функции и определяет приближенные собственные значения. Сходство условий квантования только внешнее. Различие состоит в определении путей интегрирования в (64), которые не всегда совпадают с классическими траекториями. Возможное в некоторых случаях точное или приближенное описание энергий одночастичного спектра не решает вопроса об общих свойствах распределения уровней и структуре типа больших оболочек. В равной мере это относится также к соотношению отдельных волновых функций и оболочечных осцилляций суммарной плотности частиц [15, 16].

Таким образом, в упомянутых работах по квазиклассической теории ставится совершенно иная задача. Квазиклассическое приближение для функции Грина обладает тем преимуществом, что функция Грина непосредственно связана с распределением уровней и с пространственным распределением частиц. Квазиклассическое приближение для интегральных распределений формально значительно проще, а связь со свойствами классического движения более определенная. Причина этого вполне очевидна: классические свойства проявляются при рассмотрении пакетов квантовых состояний. Отметим также, что квазиклассическое квантование спектра в форме больших оболочек не связано с возможностью разделения переменных в уравнении Шредингера и с квазиклассическим квантованием для каждой из парциальных задач.

## 5. ЭНТРОПИЯ И ПЛОТНОСТЬ УРОВНЕЙ НАГРЕТОГО ЯДРА

Энтропия ядра, «нагретого» до температуры  $\tau$ , выражается через одночастичную плотность  $g(e)$  и функцию распределения Ферми  $n = n_\tau(e)$  следующим образом:

$$\mathcal{S}(\mu\tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(e) [n \ln n + (1-n) \ln (1-n)] de = \tau \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu + \tau x) F(x) dx, \quad (66)$$

где  $x = (e - \mu)/\tau$ , химический потенциал  $\mu \gg \tau$ . Функция

$$F(x) = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^x y \operatorname{ch}^{-2}(y/2) dy, \quad F(x) = F(-x) \quad (67)$$

имеет максимум при  $x = 0$ . В (66) подставляем плотность уровней  $g(e)$  в виде суммы компоненты Томаса — Ферми и осциллирующих членов. Первая компонента приводит к известному выражению статистической модели для энтропии, которое для  $\tau \ll \mu$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{S}_{TF} = \pi^2 \tau g_{TF}(\mu)/3. \quad (68)$$

Вторая дает осциллирующую оболочечную компоненту энтропии как сумму отдельных слагаемых  $\mathcal{S}_\beta$ , каждое из которых отвечает определенной классической орбите и содержит сумму гармоник, отвечающих различному числу оборотов  $m$  по орбите. Подставляя выражения (25) и (29) в интеграл (66), замечаем, что интеграл действия  $S_\beta(e)$  — гладкая функция энергии и для  $\tau \ll \mu$  можно записать  $S_\beta(e) = S_\beta(\mu) + t_\beta(e - \mu) + \dots$ , (69)

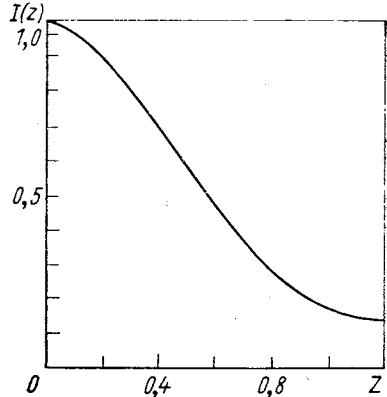


Рис. 9. Функция  $I(z)$ , которая возникает в квазиклассических выражениях для энтропии

где  $t_\beta$  — время классического движения вдоль периодической орбиты  $\beta$  [см. (10)]. Интегрирование в (66) сводится к вычислению следующего интеграла:

$$I(z) = -\frac{3}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \exp(izx) dx, \quad (70)$$

где  $z = z_\beta^{(m)} = t_\beta \tau / \hbar = m T_\beta \hbar \tau /$ ;  $T_\beta$  — период обращения по орбите. Другие функции в подынтегральном выражении слабо зависят от энергии, и их можно вынести из-под знака интеграла при  $x = 0$ . Таким образом, получаем

$$\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} + \mathcal{S}_{osc} = \frac{\pi^2}{3} \tau \left[ g_{TF} + \sum_{\beta, m} I(z_\beta^{(m)}) g_{osc}^{(\beta m)}(\mu) \right], \quad (71)$$

где  $g_{osc}^{(\beta m)}$  —  $(\beta, m)$  — компонента в разложении (25) или (29);  $I(z) = (3/\pi) |-\operatorname{sh}(\pi z) + \pi z \operatorname{ch}(\pi z)| / z \operatorname{sh}^2(\pi z)$  (рис. 9). В пределе



малых температур  $\mu z \ll 1$ ,  $I(z) \approx 1$ , а

$$\mathcal{S}(\mu_0\tau) = \pi^2\tau [g_{TE}(\mu_0) + g_{osc}(\mu_0)]/3, \quad (72)$$

где  $\mu_0$  — химический потенциал, вычисленный из сохранения числа частиц. При больших температурах  $I(z)$  стремится к нулю как  $6 \exp(-\mu z)$ ,  $\mu z > 1$ , и  $\mathcal{S}$  приближается к гладкой величине. Критическая температура  $\tau_{SH}$ , при которой исчезают оболочечные эффекты в энтропии, соответствует  $z \approx 2$  и

$$\tau_{SH} \approx 2\hbar/T_\beta = \hbar\Omega_\beta/\pi, \quad (73)$$

где  $\Omega_\beta$  — частота, соответствующая периодической траектории. Оценка (73) находится в хорошем согласии с численными расчетами плотности уровней по статистической модели с помощью реалистических ядерных потенциалов. Согласно (71) при больших температурах вклады различных классических орбит экспоненциально убывают с увеличением времени движения вдоль периодической траектории. Это относится также и к путям — кратным пробегам, вклад которых учитывается в сумме (71), но быстро убывает с увеличением  $m$ .

При  $\tau < \tau_{SH}$  каждая компонента энтропии, соответствующая определенной периодической траектории, приводит к множителю в статистическом выражении для плотности уровней ядра, который осциллирует в зависимости от числа нуклонов. Плотность уровней ядра имеет следующий вид:

$$\rho(e) = \tilde{\rho}(e) \prod_\beta \exp(\mathcal{S}_\beta), \quad (74)$$

где  $\tilde{\rho}$  — обычное выражение статистической модели;  $\mathcal{S}_\beta$  — компонента энтропии, соответствующая замкнутому пути  $\beta$ :

$$\mathcal{S}_\beta = \pi^2 \sum_\beta \sum_m I(z_\beta^{(m)}) g_{osc}^{(\beta m)}(\mu)/3. \quad (75)$$

Для иллюстрации приведем явные выражения для двух наиболее важных орбит в сферическом потенциале с бесконечно высокими стенками, а именно треугольника и квадрата. Сумма осциллирующих компонент энтропии в формуле (71)

$$\mathcal{S}_\beta(e) = \frac{\pi^2}{3} \frac{2MR^2\tau}{\hbar^2} \left( \frac{\sqrt{3}kR}{2\pi} \right)^{1/2} I \left( \frac{3\sqrt{3}\tau kR}{2\mu} \right) \cos \left( k\Delta L + \frac{\pi}{4} \right) \cos(k\bar{L}). \quad (76)$$

Для  $\tau = 1 \text{ Мэв}$ ,  $kR = 10$  и  $\mu = E_F = 50 \text{ Мэв}$  находим коэффициент  $I \approx 0,7$  (см. рис. 9). Две указанные орбиты приводят к значительной модуляции статистической плотности уровней, рассматриваемой в зависимости от числа нуклонов. Численно амплитуда вариации плотности в данном случае определяется множителем порядка  $\exp(\pm 3)$  (без учета спинового вырождения).

Согласно (71) при  $\tau > \tau_{SH}$  все осциллирующие компоненты обращаются в нуль. Однако это не означает, что предельные значения энтропии и плотности уровней при большом  $\tau$  совпадают с выражениями Томаса — Ферми. Дело в том, что при столь большой температуре вклад периодических путей не является доминирующим в квазиклассическом разложении для энтропии. При  $\tau > \tau_{SH}$  теряет смысл условие стационарности (23), приводящее к отбору периодических орбит. Подробнее этот вопрос рассматривается в разд. 7 в связи со свойствами усредненной плотности уровней. Чтобы получить правильный результат, необходимо использовать разложение (7) для функции Грина и исходное выражение (22) для плотности уровней. Кроме основного члена в выражении Томаса — Ферми при  $\tau > \tau_{SH}$  энтропия содержит также гладкие компоненты, пропорциональные поверхности системы, ее кривизне и т. д. В общем случае такие слагаемые являются величинами более высокого порядка малости в квазиклассическом разложении, чем основной член в выражении Томаса — Ферми.

## 6. ОБОЛОЧЕЧНЫЕ ПОПРАВКИ К ЭНЕРГИЯМ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЙ

Оболочечные эффекты в энергиях ядер связаны с неоднородностью одночастичного спектра вблизи границы Ферми, обусловленной оболочечной структурой. Оболочечные эффекты в энергиях связи удобно представить в виде так называемой оболочечной поправки к усредненному «капельному» значению. В первом порядке по отклонению истинного распределения нуклонов от статистически усредненного «капельного» оболочечную поправку к энергии  $\delta E$  можно выразить непосредственно через осциллирующую компоненту одночастичной плотности уровней [1, 2]. Оболочечные вариации энергии второго порядка явно зависят от парного взаимодействия частиц и определяются условием самосогласования одночастичного потенциала [2, 16, 24—23]. Поправка первого порядка не зависит от природы общего одночастичного потенциала. Ее изменение в зависимости от числа нуклонов или от формы ядра представляет эффект перераспределения нуклонов, вызванного оболочечными явлениями.

Выражение для  $\delta E$  через  $g_{osc}(e)$  можно получить разными, но по существу эквивалентными способами [1, 2, 7, 16, 24, 25]. Для аналитических вычислений удобно определение оболочечной поправки к энергии как разницы между истинной энергией системы при нулевой температуре и значением энергии, полученным экстраполяцией к  $\tau = 0$  асимптотического выражения для энергии, характерного для температуры  $\tau \gg \tau_{SH}$ , где оболочечная структура одночастичного спектра не имеет значения. Оболочечная

поправка первого порядка к энергии  $\delta E$  выражается разницей точной энтропии  $\mathcal{S}(\tau)$  и экстраполированного к меньшим температурам асимптотического выражения  $\mathcal{S}(\tau) \approx \tilde{\mathcal{S}}(\tau)$  для  $\tau > \tau_{SH}$ :

$$\delta E = \int_0^{\infty} [\mathcal{S}(\tau) - \tilde{\mathcal{S}}(\tau)] d\tau. \quad (77)$$

Разность в подынтегральном выражении как раз является осциллирующей компонентой энтропии, которая рассматривалась в предыдущем разделе. Интегрирование по температуре в (77) сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^{\infty} \tau I(\tau t_{\beta}/\hbar) d\tau = 3(\hbar/t_{\beta})^2/\pi^2.$$

В результате получаем оболочечную поправку к энергии

$$\delta E = \sum_{\beta m} (\hbar/t_{\beta}(\mu))^2 g_{osc}^{(\beta m)}(\mu). \quad (78)$$

Это выражение получается также из обычного представления энергии оболочечной поправки в виде [1]  $\delta E = \int_{\mu}^{\mu} (e - \mu) g_{osc}(e) de$  при подстановке в него квазиклассического разложения для  $g_{osc}(e)$  по периодическим орбитам. Так, в квазиклассическом пределе получается самое простое и прямое доказательство эквивалентности двух определений оболочечной поправки к энергии. Более формальное доказательство дано в работах [26, 27].

Видно, что если другие условия одинаковы, то больший вклад в оболочечную поправку дают те орбиты, которым отвечают более короткие периоды. В частности, резко убывают с увеличением  $m$  вклады повторяющихся путей ( $m > 1$ ). С учетом  $t_{\beta} = mT_{\beta}$  и (78) каждая из компонент содержит множитель, пропорциональный  $1/m^2$ . Существенный вклад в  $\delta E$  дают только самые низкие гармоники ( $m = 1$ ) квазиклассического ряда для плотности уровней и самые простые орбиты, для которых период  $T_{\beta}$  минимален.

Оболочечная поправка к энергии пропорциональна осциллирующей компоненте плотности уровней вблизи энергии Ферми, что неоднократно отмечалось в численных расчетах [1, 2]. Наиболее глубокие минимумы  $\delta E$  (максимумы энергии связи) соответствуют минимальной плотности уровней около энергии Ферми. Качественная интерпретация этого результата дана в работе [2]. Специальные значения числа нуклонов, отвечающие такому заполнению потенциальной ямы, когда  $g(\mu)$  минимально, соответствуют так называемым магическим числам для потенциала дан-

ной формы. Из уравнения (78) видно, впрочем, что пропорциональность оболочечных энергий и  $g_{osc}(\mu)$  имеет место только при условии, что оболочечная структура в конкретной задаче обусловлена преимущественно одной орбитой или периоды основных орбит мало отличаются друг от друга.

Для сферической потенциальной ямы можно получить явное выражение, используя для этого формулы разд. 2 и 3. Запишем сначала (78) в более удобной форме:

$$\delta E = 8\mu \sum_{\beta m} (R/mL_{\beta})^2 [g_{osc}^{(\beta m)} / (\hbar^2/2MR^2)]. \quad (79)$$

Так же, как в разд. 3, безразмерная величина в квадратных скобках — осциллирующая компонента плотности уровней, выраженная в единицах  $(\hbar^2/2MR^2)^{-1}$ ;  $L_{\beta}$  — длина  $\beta$ -го периодического пути;  $m$  — число оборотов. Для удобства сравнения с численными расчетами в (79) включен множитель 2, учитывающий вырождение по спину. Выражение (79) пригодно для потенциала произвольной формы, не изменяющегося существенно в объеме системы, так как при его выводе дополнительно использовано только соотношение (40) между временем и длиной пути.

В бесконечной сферической яме основной вклад в оболочечные поправки к энергии дают орбиты в виде треугольника (3) и квадрата (4) (см. разд. 3). Вклад в  $\delta E$  этих орбит

$$\delta E_{(3+4)} = 8\mu (\sqrt{3} kR/2\pi)^{1/2} (R/L_3)^2 \{ \cos(k\Delta L + \pi/4) \cos(k\bar{L}) - \\ - [1 - (2/3)^{1/4}] (L_3/L_4)^2 \cos(kL_4 + \pi/4)/2 \}. \quad (80)$$

Здесь можно пренебречь вторым слагаемым, относительное значение которого не превышает 12%; тогда получаем приближенное выражение

$$\delta E_{(3+4)} = (8/27) \mu (g_{osc}(\mu))_{3+4} [\hbar^2/(2MR^2)]. \quad (81)$$

В верхней части рис. 5 сравниваются результаты расчета оболочечной поправки  $\delta E$  для сферического потенциала с бесконечными стенками, полученные обычным численным методом приближения оболочечных поправок [1] и при помощи квазиклассической формулы (80). Согласие достаточно близкое. Как видно из данных, приведенных на рис. 5 для значений  $\mu = E_F = 50 \text{ Мэв}$  и  $k_F R = 10$ , что приблизительно соответствует условиям атомного ядра, амплитуда  $\delta E$  порядка  $20 \text{ Мэв}$ . Примерно такая же амплитуда осцилляций оболочечных энергий получается для реалистического потенциала Вудса — Саксона сферической формы.

Анализ бесконечно глубокой потенциальной ямы эллипсоидальной формы будет опубликован отдельно. Основное отличие задачи с несферическим потенциалом от случая потенциала

сферической формы связано с иной степенью вырождения орбит, а также с тем, что в деформированном потенциале сильно вырожденные периодические орбиты сложнее, а период  $T_\beta$  больше, чем в сферическом случае. Последнее обстоятельство приводит к значительному уменьшению амплитуды оболочечных поправок, амплитуда которых согласно (78) обратно пропорциональна квадрату  $T_\beta$ .

Качественные оценки оболочечной поправки к энергии можно получить, используя приведенные выше выражения и оценки для амплитуды осциллирующей компоненты плотности уровней. Таким образом, находим, что в сферической потенциальной яме амплитуда  $\delta E$  порядка  $[4/(2\pi)^2] E_F A^{1/6}$ . Оценка согласуется с результатами численных расчетов [1—4]. Отметим, что все другие известные попытки теоретической оценки масштаба оболочечных эффектов в энергиях ядер не опираются на последовательную теорию и по существу являются произвольными [1, 28].

Оболочечные поправки для гармонического осциллятора получаем, используя приведенные выше аналитические выражения для  $g_{osc}$  и периодов  $T$ . Согласно (78) и (59) обусловленная периодическими орбитами максимального вырождения компонента  $\delta E$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta E_{IV} &= \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{\mu^2 \Omega_{IV}^2}{\hbar \omega_0^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \left[ \frac{2\pi m \mu}{\hbar \Omega_{IV}} + \nu m (n_x, n_y, n_z) - \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= (\mu^2 \Omega_{IV}^2 / 12 \hbar \omega_0^3) [-1 + 6x(1-x)], \end{aligned} \quad (82)$$

где

$$\begin{aligned} x &= (\mu - e_0 - \bar{\mu}), \quad 0 \leq x \leq 1; \\ e_0 &= \hbar \Omega_{IV} (n_x + n_y + n_z) / 2 \end{aligned} \quad (83)$$

— энергия нулевых колебаний;  $n_x$ ,  $n_y$  и  $n_z$  — взаимно простые целые числа, которые входят в (53);  $\bar{\mu}$  — ближайшее к  $\mu - e_0$  целое, кратное  $\hbar \Omega_{IV}$ , меньше чем  $\mu - e_0$ . Как и в разд. 3, римским четыре отмечена степень вырождения орбит, ответственных за оболочечную структуру. Величина  $x$  представляет степень заполнения оболочки; оболочка заполнена, если  $x = 0$  или 1. В (82) указаны параметры, от которых зависит фаза  $\nu$ , и использовано представление полинома Бернулли в виде ряда Фурье. Для аксиально-симметричного осциллятора из (82) и (57) получаем

$$\delta E_{IV} = \frac{1}{12} \frac{\mu^2}{\hbar \omega_0} n_\perp^{-4/3} n_z^{-2/3} [-1 + 6x(1-x)]. \quad (84)$$

При условии «постоянной плотности»  $\mu/\hbar \omega_0 \approx (3A)^{1/3}$ , а  $\mu \approx E_F$  приближенно постоянно. В этих условиях амплитуда  $\delta E_{IV} \approx \approx E_F A^{1/3}/8$ , т. е. приблизительно в  $A^{1/6}$  раз больше, чем в произ-

вольном сферическом потенциале, где степень вырождения орбит на единицу меньше.

В частном случае сферического осциллятора ( $n_x = n_y = n_z = 1$ ) формулу (82) можно сравнить с аналитическим выражением для оболочечной поправки в сферическом осцилляторе, полученным в работе [7], где  $\delta E$  определялось как разница между полной одночастичной энергией осциллятора в пределе  $A^{1/3} \gg 1$  и некоторой «гладкой» величины. Различие состоит только в постоянном слагаемом в квадратных скобках в (82), равном  $-1/2$  в работе [7] вместо  $-1$  в формуле (82), что связано с другим определением гладкой одночастичной энергии  $\tilde{E}_{i,p}$ .

Согласно работе [7] определение  $\tilde{E}_{i,p}$  следует из условия «исчезновения» оболочек в деформированном ядре, что, на наш взгляд, ничем не оправдано. С другой стороны, нормировка  $\delta E$  в (82) соответствует определению  $\tilde{E}_{i,p}$  согласно сформулированному выше требованию отсутствия в  $\delta E$  гладких компонент энергии, подобных уже включенным в феноменологическую капельную часть полной энергии. Действительно, среднее значение  $\delta E$  по большой оболочке согласно (82) обращается в нуль, тогда как в работе [7] остается конечным значением, пропорциональным  $E_F A^{1/3}$ , плавно зависящим от числа нуклонов. Такая компонента имеется в капельной части энергии. С другой стороны, величина  $\delta E_{IV}$  для сферического гармонического осциллятора, рассчитанная по формуле Бора — Моттельсона, хорошо согласуется с численным значением, определенным в рамках обычного метода оболочечных поправок, а также со значением, которое получается, если использовать для определения сглаженной одночастичной энергии точное квазиклассическое выражение (60) для плотности уровней гармонического осциллятора и формулу (103) в разд. 7.

Причиной этих расхождений является сильное вырождение осцилляторных уровней (порядка полного числа частиц  $A^{2/3}$  в оболочке), что приводит к заметному отличию определения гладкой энергии как среднего по числу нуклонов от принятого в методе оболочечной поправки определения как среднего по положению уровня Ферми\*. Численные процедуры метода оболочечных поправок можно модифицировать таким образом, чтобы учесть возможность сильного вырождения. На рис. 8 приведены результаты численного расчета, в котором  $\tilde{E}_{i,p}$  определялось как среднее по числу частиц (пунктирная кривая для  $\omega_\perp : \omega_z = 1$ ). В этом случае получается хорошее согласие с квазиклассической

\* Приведенное в работе [24] доказательство тождественности двух определений предполагало, что уровень Ферми — однозначная функция числа частиц, что не имеет места при вырождении уровней.

формулой. Так же обстоит дело и в других случаях полного вырождения осцилляторных уровней.

Для плоских орбит в вырожденном осцилляторе, а также в случае частичного вырождения, когда только частоты  $\omega_x$  и  $\omega_y$  соизмеримы ( $\omega_x : \omega_y = n_x : n_y$ ), оболочечная поправка к энергии

$$\delta E_{II} = \frac{V\sqrt{2}}{(2\pi)^2} \mu (\Omega_{II}^2 \omega_z / \omega_0^3) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin \left[ \frac{1}{\hbar} m \mu T_{xy} + \nu_m (n_x n_y) \right], \quad (85)$$

где  $T_{xy} = 2\pi/\Omega_{II}$  — период обращения для плоских орбит (см. разд. 3).

За исключением некоторых случаев, о которых будет сказано ниже, вклад таких орбит с вырождением два ( $\mathcal{D} = 1$ ,  $\mathcal{R} = 2$ ) присутствует наряду с  $\delta E_{IV}$ . Его относительная величина порядка  $A^{-1/3}$ , но при не очень большом  $A$  необходимо учитывать также возможную численно большую разницу периодов обращения  $T_{xyz}$  и  $T_{xy}$ . Для вытянутого аксиально-симметричного осциллятора отношение  $\delta E_{II}$  и  $\delta E_{IV}$  порядка  $(\hbar\omega_0/\mu) n_{\perp}^2$ . При обычном для атомного ядра значении  $\mu/\hbar\omega_0 \approx 6 \div 8$  две компоненты  $\delta E$  сравниваются при  $n_{\perp} = 3$ , а при большем значении  $n_{\perp}$  основной вклад в оболочечные поправки дают плоские орбиты, несмотря на меньшую степень вырождения и соответственно меньшую амплитуду осцилляций плотности. Это имеет место, например, при деформациях осциллятора  $\omega_{\perp} : \omega_z = 3 : 2$ ,  $4 : 3$  или  $3 : 1$ , тогда как при деформации  $\omega_{\perp} : \omega_z = 2 : 1$  значение  $\delta E_{II}$  составляет не более 30% основного слагаемого (см. рис. 8). Относительно увеличение вклада  $\delta E_{II}$  в оболочечные поправки обусловлено значительно большим значением расстояния между оболочками ( $\hbar\Omega_{II}$ ), которое входит в квадрате в (78). По сравнению с распределением  $\delta g$  увеличивается также эффект модуляции  $\delta E$  в результате сложения вкладов орбит с разными периодами. Это отчетливо видно при сравнении рис. 7 и 8. Легко убедиться в том, что амплитуда модулирующей компоненты ( $\delta E_{II}$ ) на рис. 8 действительно пропорциональна первой степени энергии  $\epsilon$ , а компонента ( $\delta E_{IV}$ ) пропорциональна  $\epsilon^2$ .

В аксиально-симметричном осцилляторе вклад плоских орбит с  $z = 0$  присутствует при всех деформациях и слабо зависит от нее, в отличие от оболочек, связанных с полностью вырожденными орбитами. Последние возникают только при определенных деформациях, когда выполняется условие соизмеримости частот-параметров потенциала (53). Так как при деформациях  $1 < \omega_{\perp} : \omega_z < 2 : 1$  и не слишком большом отношении  $\mu/\hbar\omega_0$  основной вклад в оболочечную структуру дают плоские орбиты, то оболочечные поправки к энергии в гармоническом осцилляторе при таких деформациях являются сравнительно плавной функцией дефор-

магии и числа заполненных уровней. Это хорошо видно на контурной карте распределения  $\delta E$  в зависимости от числа нуклонов и деформации, приведенной на рис. 10, где оболочки, связанные с плоскими орбитами, показаны в виде непрерывных полос минимумов и максимумов  $\delta E$ , идущих в северо-восточном направлении. Оболочки полного вырождения проявляются в виде локальных увеличений амплитуды  $\delta E$ . В деформированном осцилляторе особенно заметна такая оболочка при  $\omega_{\perp} : \omega_z = 2 : 1$ . При других

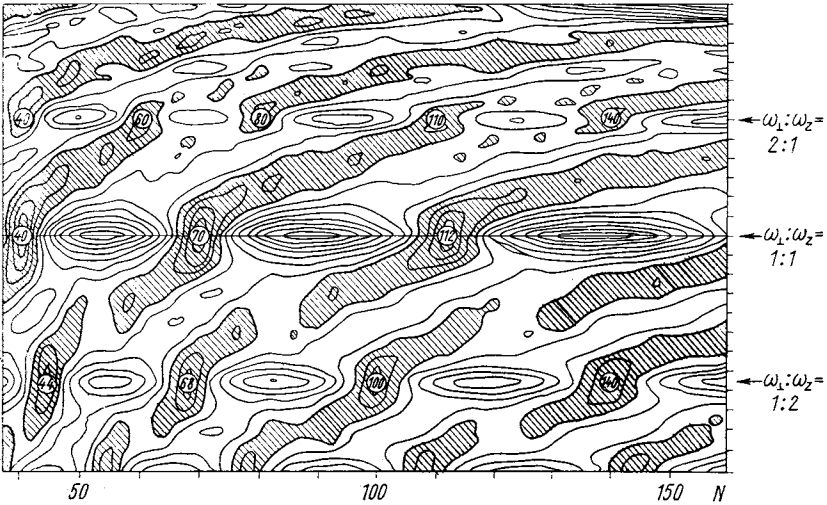


Рис. 10. Контурная диаграмма распределения оболочечной поправки для осцилляторного потенциала в зависимости от числа нуклонов и параметра деформации. Заштрихованы области минимумов  $\delta E$ . Они приблизительно соответствуют минимумам плотности уровней на рис. 7,8. Линия уровня отвечает приращению  $\delta E$  на  $0,01 \mu A^{1/3}$  ([7], см. также [1]). Наклонные полосы минимумов обусловлены преимущественно семейством плоских орбит.

значениях параметра деформации вклад таких оболочек в обычных для ядерной физики условиях не только не является преобладающим, но, как правило, меньше вклада орбит с меньшей степенью вырождения, но с большей величиной  $\hbar\Omega$ . Этот результат будет обсуждаться в разд. 9.

### 7. УСРЕДНЕННАЯ ПЛОТНОСТЬ УРОВНЕЙ

В численных расчетах оболочечных поправок важное значение приобретает сглаженная плотность уровней  $\tilde{g}(e)$ , которая используется в определениях вариаций одночастичных распределений. Распределение  $\tilde{g}(e)$  находится численным усреднением одночастич-



ного спектра по достаточно широкому интервалу энергии. Качественные свойства усредненной плотности уровней и, в частности, ее поведение в зависимости от интервала усреднения можно объяснить с помощью квазиклассических разложений. Распределение одночастичных энергий, усредненное на интервале  $\gamma$  вблизи энергии  $e$ :

$$g_{\gamma}(e) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} g(e') \xi\left(\frac{e'-e}{\gamma}\right) de', \quad (86)$$

где  $\xi(x)$  — нормированная на единицу весовая функция, имеющая максимум при  $x = 0$  с шириной порядка единицы. Подставляя (22) в (86), как и при выводе (71), разлагаем действие  $S(\mathbf{r}''\mathbf{r}'e)$  в ряд по разности  $(e' - e) \approx \gamma$  и замечаем, что в усредненной плотности уровней слагаемые, отвечающие сложным путям, появляются с коэффициентом

$$\begin{aligned} J(y) &= \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} de' \xi\left(\frac{e'-e}{\gamma}\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar} t_{\alpha}(e' - e)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \xi(x) \exp[i(xy)], \end{aligned} \quad (87)$$

где  $y = \gamma t_{\alpha}/\hbar$ ;  $t_{\alpha} = [t_{\alpha}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', e)]_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}}$  — время движения вдоль замкнутого, но не обязательно периодического  $\alpha$ -го классического пути. Функция  $J = J(y)$  вещественная и экспоненциально убывает при  $y \gg 1$ , если  $\xi(x)$  — четная и непрерывно дифференцируемая функция. Частный вид интеграла (87) уже встречался в выражениях для термодинамических характеристик. При увеличении параметра усреднения вклады более длинных путей в усредненной плотности уровней экспоненциально выключаются, и при  $\gamma$ , приближающемся к критическому значению:

$$\gamma_{SH} = 2\pi\hbar/T = \hbar\Omega, \quad (88)$$

где  $T$  — кратчайший период вращения по замкнутой периодической орбите, остаются только компоненты, отвечающие самым коротким периодическим орбитам и неперiodическим путям, длина которых меньше размеров системы. При  $y > 1$  включаются все осциллирующие компоненты плотности уровней, а члены разложения (22), соответствующие периодическим орбитам, дают гладкие квазиклассические поправки к сглаженной плотности уровней. Получить такие поправки невозможно, если при усреднении использовать разложения для  $g(e)$  по периодическим орбитам, поскольку при выводе используется условие стационарности (23), которое не имеет смысла при  $\gamma > \gamma_{SH}$ . Действительно, легко

убедиться в том, что после подстановки (22) в определение (86) усредненной плотности  $g_\gamma(e)$  условие стационарности в интеграле по пространственным переменным приводит к комплексному значению импульса с мнимой частью  $p_i$  порядка  $\gamma/v$ , где  $v$  — скорость. Это соответствует длине затухания  $L_i$  порядка  $\hbar/p_i$ . Поэтому условие стационарности (23), приводящее к отбору периодических орбит, применимо только при условии  $L_i \ll L_\beta$ , что эквивалентно неравенству  $\gamma \ll \hbar\Omega$ .

Если это условие выполнено, то можно получить явное выражение для  $g_\gamma(e)$ , подставив в (86) квазиклассическое разложение для  $g(e)$  по замкнутым периодическим орбитам. Рассмотрим важный случай весовой функции  $\xi(x)$  гауссова типа, содержащей корректировочный полином  $n$ -го порядка ( $n$  — четное):

$$\xi(x) = \xi_n(x) = P_n(x) \exp(-x^2)/\sqrt{\pi}, \tag{89}$$

где  $P_n(x) = \sum_{k=0,2,\dots}^n \alpha_k H_k(x)$ ;  $H_k$  — полином Эрмита;  $\alpha_k = -\alpha_{k-2}/2k$ ;  $\alpha_0 = 1$ .

Корректировочный полином необходим при усреднении на конечном интервале  $\gamma$ . Его выбирают обычно из условия, чтобы функция (89) обладала свойствами  $\delta$ -функции по отношению к любой гладкой функции: полиному степени  $n$ .

Возможны также и другие определения, например из условия подгонки наилучшего гладкого распределения по методу наименьших квадратов (см., например, работы [1—4, 16, 23, 29]). Интеграл (87) вычисляется явно, и в результате получаем

$$g_\gamma(e) = \tilde{g}(e) + \sum_\beta g_{osc}^{(\beta m)}(e) Q_{n/2}(y_{\beta m}^2) \exp(-y_{\beta m}^2), \tag{90}$$

где  $Q_{n/2}(z)$  — сумма первых  $n/2$  слагаемых степенного ряда для  $\exp(-z)$ ;  $y_{\beta m} = mT_\beta\gamma/2\hbar$ ;  $T_\beta$  — период обращения для  $\beta$ -й орбиты. Предполагается, что в области  $\gamma \ll e$  около энергии  $e$  функцию  $\tilde{g}(e)$  можно аппроксимировать полиномом  $n$ -го порядка.

Как функция  $\gamma$ , усредненная плотность  $g_\gamma(e)$  остается приближенно постоянной и совпадает с исходным выражением для  $g(e)$  при  $y \ll 1$ , а при  $y > 1$  приближается к  $\tilde{g}$  (выходит на плато):

$$\exp(-y_{\beta m}^2) = \exp[-\pi^2(\gamma/\hbar\Omega_\beta)], \tag{91}$$

где  $\hbar\Omega_\beta$  определено в (88) и разд. 4.

Рассмотрим теперь поведение  $g_\gamma(e)$  при  $\gamma > \gamma_{SH}$ , предполагая, однако, что условие  $\gamma \ll e$  выполняется. Поправка к члену выражения Томаса — Ферми по-прежнему обусловлена сложными путями, содержащими хотя бы одну точку поворота, но при  $\gamma > \gamma_{SH}$  основной вклад в интеграл для плотности уровней дают короткие замкнутые неперіодические пути с одним отражением,

для которых  $t_\alpha$  достаточно мало. Область интегрирования по  $\mathbf{r}$  фактически ограничена узким слоем, примыкающим к поверхности  $\Sigma$ , которая ограничивает область классического движения при заданной энергии. Толщина  $d$  поверхностного слоя, дающего основной вклад, определяется условием

$$\gamma t_\alpha / \hbar \ll 1, \quad (92)$$

где  $t_\alpha$  — время, затраченное частицей, движущейся по кратчайшему пути от  $\mathbf{r}$  к точке поворота и обратно в точку  $\mathbf{r}$ . Из (92) следуют неравенства  $d \approx e\lambda/\gamma < R$  и  $d \gg \lambda$ , эквивалентные условиям  $\gamma > \gamma_{SH}$  и  $\gamma \ll e$ . Здесь  $R$  — размер системы;  $\lambda$  — длина волны частицы. Из уравнений (21), (22) и (86) следует, что усредненная плотность уровней содержит член Томаса — Ферми, значение которого не изменяется при корректном определении процедуры усреднения [1—3, 16, 22, 23, 29] и гладких квазиклассических поправок. Последние пропорциональны площади поверхности  $\Sigma$ , определяемой условием  $e = V(\mathbf{r})$ , в отличие от компоненты Томаса — Ферми, которая зависит от локальной плотности и поэтому может рассматриваться как объемный член. Для  $e \gg \gamma > \hbar\Omega$  квазиклассическая поправка

$$\tilde{g}_\gamma(e) = + \frac{1}{4\pi^2 \hbar e} \text{Im} \int |\mathcal{Y}_\Sigma(p'_y p'_z; y'' z'')|^{1/2} Y d\Sigma, \quad (93)$$

где интегрирование выполняется по поверхности  $\Sigma$ ; величина

$$Y(\Sigma) = \frac{2e}{\hbar} \int dx |\mathcal{Y}_x(p'_x t_\alpha; x'' e)|^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_\alpha(x'', x', e) - [\gamma t_\alpha(x'', x', e)/2\hbar]^2 - i\nu \right\} \Big|_{x'' \rightarrow x' = x}; \quad (94)$$

$t_\alpha(x, x', e)$  — время движения;  $\mathcal{Y}_\Sigma$  —  $2 \times 2$ -детерминант матрицы, составленной из вторых производных действия  $S$  по координатам вдоль поверхности, и

$$\mathcal{Y}_x(p'_x t_\alpha; x'' e) = \det \left\| \begin{array}{cc} \partial^2 S / \partial x' \partial x'' & \partial^2 S / \partial x' \partial e \\ \partial^2 S / \partial x'' \partial e & \partial^2 S / \partial e^2 \end{array} \right\| = \frac{\partial p'_x}{\partial e} \frac{\partial p''_x}{\partial e}. \quad (95)$$

При получении (94) была использована гауссова форма весовой функции  $\xi(x)$ . Вблизи поверхности отражения потенциал

$$V(x) = V(0) + V'(0)x = e + V'(0)x; \quad V'(0) \equiv dV(0)/dx, \quad (96)$$

а нормальная компонента импульса частицы

$$p(x, e + i\delta) = \sqrt{2M(i\delta - V'(0)x)}. \quad (97)$$

Здесь  $i\delta$  — малая мнимая добавка к переменной энергии, которая будет положена равной нулю в конечном результате. Используя

(96) и (97), вычисляем детерминант (95),  $S$  и  $t_\alpha$  в подынтегральном выражении (94) и представляем интеграл (94) в виде

$$Y = \frac{e}{a} \int_{i\frac{\delta}{e}-\infty}^{i\frac{\delta}{e}+\infty} dw w^{-1/2} \times \exp \left[ \frac{4i}{3} \left( \frac{e}{a} \right) w^{3/2} - \left( \frac{\gamma}{a} \right)^2 w + 2 \left( \frac{\gamma}{a} \right)^2 \left( \frac{i\delta}{e} \right)^{1/2} w^{1/2} \right], \quad (98)$$

где

$$w = (i\delta - V'(0) x)/e; \quad a = -V'(0) \lambda > 1.$$

Введем новую переменную  $u$  по формуле

$$w^{1/2} = (ia/4e)^{1/3} u - i(\gamma/e)^{1/2} (e/4a)$$

и выразим интеграл (98) через функцию Эйри  $Ai(x)$ :

$$Y = 2^{4/3} \pi^{1/3} i^{1/3} (e/\gamma) |z|^{1/6} \exp(-2z/3) Ai(z^{2/3}), \quad (99)$$

где

$$z = -(\gamma/e)^6 (e/2a)^4. \quad (100)$$

Поправка к плотности уровней Томаса — Ферми

$$\tilde{g}'_V(e) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{\gamma \hbar} \text{Im} i^{1/3} \int d\Sigma | \mathcal{Y}_\Sigma(p'_y p'_z; y'' z'') |^{1/2} |z|^{1/6} \times \exp(-2z/3) Ai(z^{3/2}). \quad (101)$$

Для значений  $\gamma$  порядка  $\gamma_{SH}$  или бóльших (но много меньших, чем энергия  $e$ ) параметр  $z \ll 1$ . Действительно,  $a \approx \lambda/d_V$ , где  $d_V$  — характерная длина изменения потенциала  $V$ . Для «мягкого» потенциала при  $d_V \approx R$ , а  $\lambda/R \approx A^{-1/3}$  находим, что  $z < 1$  вплоть до  $\gamma \approx 1,6A^{-2/9} E_F$ , т. е. при  $\gamma \lesssim 2,0 - 2,5 \hbar\Omega$ . В других случаях отношение  $a/e = d\lambda/dx$  больше и область значений  $\gamma$ , где  $z \ll 1$ , увеличивается. Таким образом, при не слишком больших  $\gamma$  можно положить  $z = 0$  в формуле (101), что приводит к выражению для гладкой квазиклассической поправки к плотности Томаса — Ферми в виде

$$\tilde{g}' = (3^{-1/6} 2^{-4/3} / \Gamma(2/3) \hbar e) (e/a)^{2/3} \times \text{Im} \int d\Sigma | \mathcal{Y}_\Sigma(p'_y p'_z; y'' z'') |^{1/2} \exp(iv), \quad (102)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Формально отношение  $a/e$  пропорционально  $\hbar$ , и в этом случае поправка (102) — порядка  $\hbar^{-5/3}$ , а ее отношение к слагаемому Томаса — Ферми пропорционально  $\hbar^{4/3}$  и является величиной порядка  $A^{-4/9}$ . В потенциале с резким краем

$a/e \approx 1$  ( $d_V \approx \lambda$ ) и амплитуда  $\tilde{g}$  меньше. В любом случае поправка приближенно пропорциональна площади поверхности, ограничивающей область классического движения.

Другое выражение для квазиклассической поправки получается для таких больших  $\gamma$ , что эффективная классическая длина свободного пробега  $l_i$  порядка  $\lambda$  или меньше, т. е. для  $\gamma \approx e$ . Этот случай рассмотрен Бальяном и Блоком [56] в рамках итерационного разложения. Для таких больших  $\gamma$  приближение классических траекторий неприменимо. Вычисленная в работе [56] поправка содержит объемное интегрирование величин, пропорциональных градиенту потенциала, что также приводит к пропорциональности площади поверхности системы. Однако формальная структура поправки, а также ее порядок по  $\hbar$  отличаются от рассмотренных выше. Заметим, что именно последний случай имеется в виду при обычном выводе квазиклассических поправок в статистической теории Томаса — Ферми в приближении локальной плотности [30]. Еще одно разложение получается для бесконечно высокого отражающего потенциала [5a].

Суммируя, можно следующим образом описать поведение усредненного распределения уровней  $g_\gamma(e)$  в зависимости от интервала усреднения  $\gamma$ . При увеличении  $\gamma$  от величины порядка расстояния между отдельными уровнями до значения порядка  $\gamma_{SH} = \hbar\Omega$  экспоненциально убывают осциллирующие компоненты плотности, а  $g_\gamma(e)$  приближается к плавной функции  $\tilde{g}(e)$ . При дальнейшем росте  $\gamma$  величина  $\tilde{g}$  остается приближенно постоянной вплоть до значений  $\gamma$ , в несколько раз превышающих  $\gamma_{SH}$ . Величина  $\tilde{g}$  соответствует сумме объемного члена Томаса — Ферми и гладких квазиклассических поправок, пропорциональных поверхности, ее кривизне и т. д., рассчитанных в приближении, которое можно определить как приближение кратчайшей отраженной траектории. При дальнейшем увеличении  $\gamma$  с приближением  $\gamma$  к энергии  $e$  значение поправок и их физический смысл изменяются. Имеет место переход к приближению локальной плотности.

За исключением области плато, при  $\gamma \approx \hbar\Omega$  не существует однозначного, не зависящего от интервала усреднения значения сглаженной плотности уровней  $g_\gamma$ . Это следует иметь в виду, например, в том случае, когда квазиклассические выражения сравниваются с эмпирическими величинами, которые находят из плотности уровней сильно возбужденного ядра с температурой  $\tau \ll \tau_{SH}$ . В термодинамическом описании температура  $\tau$  приобретает значение, в некотором отношении подобное интервалу усреднения  $\gamma$ . Из сказанного ясно, что  $\tilde{g}$  в сильно нагретом ядре может заметно отличаться от сглаженного значения одночастичной плотности уровней при нулевой температуре.

Сглаженную плотность  $\tilde{g}(e)$  иногда используют для получения гладкой полной одночастичной энергии

$$\tilde{E}_{i.p} = \int_{\mu}^{\mu} \tilde{e} \tilde{g}(e) de. \quad (103)$$

В соответствии со свойствами  $\tilde{g}(e)$  энергию  $\tilde{E}_{i.p}$  также можно разбить на сумму объемной компоненты и квазиклассических поправок, пропорциональных поверхности и ее гауссовой кривизне, и таким образом определить так называемое одночастичное поверхностное натяжение или другие подобные характеристики. В связи с этим необходимо подчеркнуть, что для самосогласованной системы взаимодействующих частиц такая энергия не имеет самостоятельного значения и ни в какой мере не представляет качественного поведения или физических свойств отдельных компонент энергии системы.

Относительная величина гладких компонент плотности уровней по сравнению с осциллирующими компонентами зависит от конкретного гамильтониана одночастичного движения. Однако это обстоятельство не влияет на принципиальную возможность однозначного выделения  $g_{osc}$  даже в тех случаях, когда имеются неучтенные гладкие компоненты, превосходящие  $g_{osc}$  в общем квазиклассическом разложении. Ввиду того, что осцилляции плотности можно связать только со стационарными классическими путями, дальнейшее уточнение квазиклассического приближения по сравнению с рассмотренным в разд. 2 приближением стационарной фазы привело бы к некоторому уточнению  $g_{osc}$  без существенного изменения его формы. Между тем только осциллирующая компонента одночастичного спектра представляет интерес для анализа энергий связи: как можно показать при достаточно общих предположениях, вариации полной энергии не зависят явно от взаимодействия частиц и приближенно совпадают с вариациями одночастичной энергии

$$\delta E \approx E_{i.p} - \tilde{E}_{i.p} \approx \int_{\mu}^{\mu} (e - \mu) \delta g(e) de, \quad (104)$$

где

$$\delta g(e) = g - \tilde{g}; \quad (105)$$

$g(e)$  — точная одночастичная плотность уровней:

$$g(e) = \sum_{\lambda} \delta(\epsilon_{\lambda} - e); \quad (106)$$

$\tilde{g}(e)$  — гладкое асимптотическое значение. Более строгое определение  $\tilde{E}_{i.p}$  в (104) должно соответствовать требованию, чтобы  $\delta E$  не содержала гладких компонент, которые должны быть отнесены к феноменологической капельной компоненте энергии связи.

Отдавая должное большому значению аналитической теории для качественного понимания природы и формальной структуры осциллирующих компонент одночастичных распределений, нужно отметить, что такая теория мало пригодна для практических расчетов. Все величины, необходимые для количественного описания оболочечных эффектов в ядрах, проще найти при помощи численных приемов, разработанных в методе оболочечных поправок. Так, осциллирующую часть одночастичной плотности уровней можно определить непосредственно из (105) для любого спектра уровней  $\varepsilon_\lambda$ , численно заданного в достаточно широком интервале.

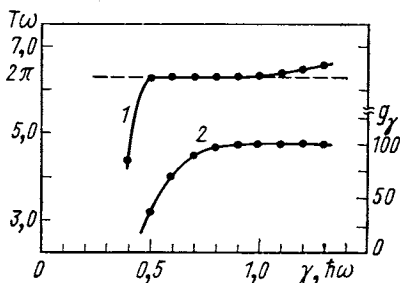


Рис. 11. Период обращения  $T = 2\pi/\omega_0(I)$  и усредненная плотность уровней  $g_\gamma$  (2):

1 проведена через точки, найденные численным усреднением (107) для некоторых значений параметра усреднения. Расчет с корректировочным полиномом четвертой степени для сферического осциллятора; плотность  $\tilde{g}$  получена с  $\tilde{\gamma} = 2h\omega$ , энергия  $\varepsilon = 10h\omega$ ; — — — теоретическое значение  $T\omega = 2\pi$ .

Для этого в качестве  $\tilde{g}$  берем сглаженную величину, определенную при помощи усреднения в (86), с точным  $g(e)$  согласно (106)  $\gamma \gg \gamma_{SH}$  и весовой функцией, включающей поправку на кривизну сглаженного распределения уровней (89). Разработанные недавно численные методы [31, 32] позволяют найти собственные значения для ядерных потенциалов любого вида и произвольной формы, а численное исследование распределения уровней энергии не является сложной задачей. Известные результаты численных расчетов находят объяснение в рамках изложенной качественной теории.

Весьма важный вывод квазиклассической теории заключается в том, что установлен закон приближения усредненной плотности  $g_\gamma(e)$ , рассматриваемой в зависимости от параметра усреднения  $\gamma$ , к асимптотическому гладкому значению  $\tilde{g}(e)$  при  $\gamma \approx \gamma_{SH}$  (90). Результат этот интересен в двух отношениях. Во-первых, зная закон выхода усредненной плотности уровней на плато, можно более точно определить значение  $\tilde{g}$  экстраполяцией, основанной на формуле (90) с использованием меньшего интервала  $\gamma$ . Возможно, что таким образом удалось бы преодолеть некоторые трудности определения величины  $\tilde{g}$  для потенциалов конечной глубины при помощи численных методов [29]. Во-вторых, из (90) следует, что период  $T$  классической орбиты, ответственный за оболочечную структуру, также можно найти из численных расчетов, изучая закон выхода на плато плотности уровней  $g_\gamma(e)$ , полученной численным усреднением точной величины (106).

(Интервал  $\gamma$  при этом не должен быть слишком малым.) Период классической орбиты — один из самых важных факторов, определяющих интенсивность оболочечной структуры, но, за исключением ряда тривиальных примеров, величину  $T$  невозможно определить при помощи аналитической теории.

Численно период обращения  $T$  можно найти, решив уравнение

$$\frac{d}{d\gamma^2} \ln(g_\gamma - \tilde{g}) = \frac{T^2}{4\hbar^2} / R \left( \frac{1}{4} T^2 \gamma^2 / \hbar^2 \right), \quad (107)$$

которое следует из (90), если предположить, что в (90) период  $T_\beta$  одинаков для представленных в сумме этого выражения компонент. Здесь функция

$$R(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(n/2)!}{k!} x^{-(n/2-k)};$$

$n$  — степень корректировочного полинома в (89). Значение функции в левой части (107) находим для  $\gamma \ll \hbar\Omega$  при помощи численного усреднения точного спектра уровней. Величина  $T$  не должна зависеть от  $\gamma$  в достаточно широком интервале значений  $\gamma$ . Результаты расчета для сферического осциллятора приведены на рис. 11. Отложенный по оси ординат период обращения  $T$  найден численным решением уравнения (107) для значений  $\gamma$ , отмеченных точками. Отклонение при меньших  $\gamma$  связано с дискретностью спектра, а при больших вызвано потерей численной точности из-за малой разности  $g_\gamma - \tilde{g}$ . На рисунке показаны результаты, полученные в обычном для таких расчетов режиме точности.

## 8. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БОЛЬШИХ ОБОЛОЧЕК

**Вырождение классических орбит.** По крайней мере одну периодическую траекторию можно найти в любом потенциале и при любой энергии [7]. Однако оболочечные эффекты, связанные с изолированной орбитой, незначительны: сила таких оболочек самая низкая и далее будем принимать ее за единицу характеристики интенсивности оболочечной структуры. Согласно оценке, приведенной в разд. 2, амплитуда осциллирующей компоненты плотности уровней для изолированной орбиты порядка  $\hbar^2$  по сравнению с основным членом Томаса — Ферми, что соответствует

$$g_{osc} \approx A^{-2/3} g_{TF} \approx A^{1/3} / E_F. \quad (108)$$

Полагая, что период обращения  $T$  по орбите соответствует длине орбиты порядка длины периметра ядра, находим из (78) масштаб вариации энергии, связанной с изолированной траекто-



рией:

$$\delta E \approx (\hbar\Omega/2\pi)^2 g_{osc} \approx E_F A^{-1/3}/4\pi^2 \approx 0,2 \text{ Мэв.} \quad (109)$$

Приведенное численное значение относится к типичным для ядерной физики параметрам  $A = 200$  и  $E_F = 50 \text{ Мэв}$ .

Из примеров, рассмотренных в разд. 1 и 2, можно сделать вывод, что амплитуда осциллирующей компоненты плотности уровней  $g_{osc}$  и ее порядок в квазиклассическом разложении определяются инвариантностью классического действия для периодических орбит, если существуют другие близкие орбиты, заполняющие некоторую конечную область пространства. Это свойство вырождения периодического движения обусловлено присутствием определенных интегралов движения (законов сохранения), дополнительных к интегралу энергии, причем степень вырождения ограничена общим числом таких законов сохранения. Степень вырождения семейства орбит находится здесь как число  $k$  непрерывных параметров  $u_1, \dots, u_k$ , необходимых для однозначного определения стационарной орбиты с данной энергией.

Для произвольного потенциала  $k = 0$ , т. е. существуют только изолированные орбиты. Действительно, периодические орбиты характеризуются условиями равенства начальных и конечных импульсов в некоторой точке пространства ( $\mathbf{p}'' = \mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}'$ ), которые в развернутой форме соответствуют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t-t_0, a_1 \dots a_5) &= \mathbf{r}(t-t_0+T, a_1 \dots a_5); \\ \mathbf{p}(t-t_0, a_1 \dots a_5) &= \mathbf{p}(t-t_0+T, a_1 \dots a_5) \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

для пяти произвольных констант  $a_1 \dots a_5$  и периода  $T$ . Только пять уравнений (110) независимы, так как из-за консервативности системы тождественно выполняется условие  $(p')^2 = (p'')^2$ . Потребовав, чтобы условие периодичности выполнялось в некоторый момент времени  $t = t_0$ , а энергия равнялась заданной величине  $e = e(a_1 \dots a_5)$ , из шести уравнений находим параметры  $a_1 \dots a_5$  и период обращения  $T$  как функции энергии  $e$ . Отметим, что из-за наличия на орбите особых точек орбита определяется неоднозначно и существует дискретный набор стационарных путей, отличающихся числом и характером особых точек (точек поворота и каустических точек).

Если кроме энергии существует дополнительный однозначный интеграл движения — функция  $F(\mathbf{r}\mathbf{p})$ , которая сохраняет свое значение для любого классического пути, определяемого гамильтонианом  $H$ , то число независимых условий в (110) становится еще на одну единицу меньше, потому что одно равенство автоматически следует из тождества  $F(\mathbf{r}'\mathbf{p}') = F(\mathbf{r}''\mathbf{p}'')$ . В этом случае условия (110) допускают непрерывное однопараметрическое семейство периодических траекторий с заданной энергией. При еще

большем числе дополнительных однозначных интегралов соответственно увеличивается число  $k$  параметров  $u_i$ , которое, однако, не может превышать  $2n - 2$ , где  $n$  — размерность пространства. Последнее связано с тем, что общее число независимых интегралов движения [произвольных констант  $a_i$  в (110)] равняется  $2n - 1$ , включая интеграл энергии [17]. Таким образом, для трехмерной задачи наибольшая степень вырождения равняется четырем.

Покажем теперь, что интеграл действия, вычисленный для каждой из периодических орбит  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{u_1 \dots u_k}(t)$  семейства стационарных орбит с данной энергией, сохраняет одно и то же значение. Для этого рассмотрим две близкие точки на орбите с параметрами  $(u_1 \dots u_k)$ , которые определим как

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{u_1 \dots u_k}(t_1), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{u_1 \dots u_k}(t_2).$$

При  $t_2 \rightarrow t_1$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_{u_1 \dots u_k}(t_1)(t_2 - t_1),$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость в точке  $\mathbf{r}_1$  при движении по орбите  $(u_1 \dots u_k)$ . Задание двух точек при фиксированной энергии вполне определяет орбиту и интеграл действия  $S(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, e) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} p dl$ . Для периодической орбиты  $(u_1 \dots u_k)$  действие  $S_{u_1 \dots u_k}(e) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} S(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, e)$ .

При переходе на близкую орбиту  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  изменяются на  $\delta \mathbf{r}_1 = \sum_{i=1}^k (\partial \mathbf{r}_1 / \partial u_i) \delta u_i$ ,  $\delta \mathbf{r}_2 = \sum_{i=1}^k (\partial \mathbf{r}_2 / \partial u_i) \delta u_i$ , а приращение действия

$$\begin{aligned} \delta S &= \{(\partial S / \partial \mathbf{r}_1) \delta \mathbf{r}_1 + (\partial S / \partial \mathbf{r}_2) \delta \mathbf{r}_2\}_{t_2 \rightarrow t_1} = \\ &= \{-\mathbf{P}(\mathbf{r}_1) \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}(\mathbf{r}_2) \delta \mathbf{r}_2\}_{t_2 \rightarrow t_1}. \end{aligned} \tag{111}$$

Так как  $\delta S = 0$  при любых значениях параметров  $u_1 \dots u_k$ , то из равенства (111) следует, что действие от  $u_1 \dots u_k$  не зависит, т. е. постоянно для данного семейства стационарных орбит. Отметим, что этот результат тесно связан с известной теоремой Нетера классической механики [33, 34]. При  $k \geq 2$  число произвольных параметров орбит достаточно для того, чтобы можно было определить орбиту, проходящую через любую заданную точку, классически достижимой области. При  $k = 3$  и 4 такие орбиты образовали бы одно- и двухпараметрические семейства. При вычислении плотности уровней было удобно уточнить понятие вырождения орбит, определив отдельно параметр  $\mathcal{D}$  как число произвольных степеней свободы орбит, проходящих через заданную точку  $\mathbf{r}$  пространства, и  $\mathcal{R}$  как размерность пространства, заполняемого орбитами данного типа. Величина  $\mathcal{D}$  определяет

усиление амплитуды осциллирующих компонент функции Грина при близких значениях аргументов, а  $\mathcal{R}$  определяет масштаб интеграла по  $\mathbf{r}$  в выражении  $g_{osc}$  через функцию Грина. Сумма  $\mathcal{D} + \mathcal{R} = k + 1$  не превосходит числа однозначных интегралов для заданной задачи, а максимально возможное значение  $\mathcal{D} + \mathcal{R}$  равняется пяти для трехмерного движения, причем  $\mathcal{R} \leq 3$ . Случай  $\mathcal{D} + \mathcal{R} = 5$  соответствует полному вырождению классического движения. В одномерной задаче  $2n - 1 = 1$ , и полное вырождение обеспечивается существованием одного лишь интеграла энергии.

Некоторые из однозначных интегралов обусловлены очевидными свойствами симметрии потенциала, и в таких случаях степень вырождения определяется без труда. Так, для произвольного сферического потенциала  $\mathcal{D} + \mathcal{R} = 4$  (интеграл энергии и три компоненты углового момента), а степень вырождения  $\mathcal{D} + \mathcal{R} - 1 = 3$ . В произвольном аксиально-симметричном потенциале  $\mathcal{D} + \mathcal{R} - 1 = 1$  (интеграл энергии и проекция момента на ось симметрии). С другими интегралами дело обстоит сложнее. Общие методы разработаны только для системы с разделяющимися переменными. Известно [17], что в любой трехмерной задаче с разделяющимися переменными существуют, по крайней мере, три независимых однозначных интеграла движения, включая энергию ( $\mathcal{D} + \mathcal{R} = 3$ ). Удобно выбрать три парциальных интеграла действия  $S_i$ . Число однозначных интегралов увеличивается до четырех или до пяти, если одно или оба отношения парциальных частот  $\omega_i/\omega_j$  не зависят от интегралов движения  $S_i$  и равняются отношению целых чисел («случайное» вырождение). Здесь  $\omega_i = 2\pi\partial e/\partial S_i$ ;  $e$  — энергия, выраженная как функция  $S_i$ .

Некоторые из дополнительных законов сохранения могут представлять довольно неожиданные соотношения между координатами, импульсами и потенциалом. Как пример можно привести дополнительный интеграл движения в кулоновском потенциале или в поле сил тяготения — так называемый вектор Рунге — Ленца:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{M} + \alpha \mathbf{r}/r = \text{const}, \quad (112)$$

который определяет положения главных осей траектории. Здесь  $V(r) = \alpha/r$  — потенциал;  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  — момент импульса. Производная по времени от (112) равна нулю.

При рассмотрении примеров гармонического осциллятора и сферического потенциала отмечалось, что наряду с семейством с максимальным для данного потенциала вырождением существуют особые семейства орбит с меньшим вырождением (прямолинейные орбиты-диаметры, изолированные плоские орбиты и т. п.). Такие семейства появляются в тех случаях, когда орбиты характеризуются меньшим числом степеней свободы или когда при некото-

ром значении одного из параметров  $u_1 \dots u_k$  исчезает зависимость от одного или большего числа остальных параметров. Последнее имеет место в случае деформированного осциллятора.

Стационарность действия по отношению к вариациям параметров орбит в некоторой конечной области приводит к соответствующему уменьшению числа пропорциональных  $\hbar^{1/2}$  френелевских интегралов в последовательности интегралов, приводящих к квазиклассическому выражению для плотности уровней. Общее усиление амплитуды осциллирующей компоненты плотности уровней — порядка  $\hbar^{-(\mathcal{D}+\mathcal{R}-1)/2}$  частично за счет усиления компонент функции Грина ( $\hbar^{-\mathcal{D}/2}$ ), частично за счет увеличения размерности пространства, заполняемого орбитами  $\hbar^{-(\mathcal{R}-1)/2}$ . Общие оценки характеристик  $g_{osc}$  в некоторых простых примерах приведены в таблице. Там указаны, в частности, факторы усиления амплитуды  $g_{osc}$

$$\mathcal{N}^* = A^{(\mathcal{D}+\mathcal{R}-1)/6}.$$

Число  $\mathcal{N}^*$  можно рассматривать также как число частиц в большой оболочке, если оценить последнее как

$$\mathcal{N}^* = \int_0^{\Delta e} |g_{osc}| de, \quad (113)$$

где  $\Delta e$  — характерный интервал изменения соответствующей компоненты плотности уровней в зависимости от энергии. Для компоненты Томаса — Ферми интервал  $\Delta e$  порядка энергии Ферми  $E_F$ , а  $\mathcal{N}^*$  — порядка полного числа частиц  $A$ . Для осциллирующих компонент плотности уровней

$$\Delta e = \hbar\Omega = 2\pi\hbar/T,$$

где  $T$  — период обращения. Для сферического потенциала  $T_0 = \overline{Lv}^{-1}$ ,

где  $\overline{v} = \sqrt{(2E_F/M)^{1/2}}$  — средняя скорость;  $L \approx 2\pi R$  — длина орбиты, ответственной за оболочечную структуру. Отсюда получаем оценку

$$\hbar\Omega_0 \approx E_F A^{-1/3}, \quad (114)$$

где использовано соотношение  $k_F R \approx (9\pi A/8)^{1/3}$ ;  $k_F$  — волновое число для энергии Ферми  $E_F$ . В третьем и четвертом столбцах приведены значения параметров вырождения  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{R}$ , за исключением двух последних примеров, где  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{R}$  порознь не известны. Там приведено общее число однозначных интегралов движения  $\mathcal{D} + \mathcal{R}$ .

В шестом столбце таблицы даны оценки масштаба различных компонент плотности уровней. Для оценки амплитуды  $g_{osc}$  в слу-

Таблица характеристик оболочечных величин

Характеристика	$\Delta e$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{N}$	Amp (g)	$\delta E$
Компонента Томаса — Ферми	$E_F$	—	—	A	$A/E_F$	$AE_F$
Осциллирующие компоненты						$\delta E (2\pi T/T_0)^2$
Изолированная орбита	$2\pi\hbar/T$	0	1	1	$A^{1/3}/E_F$	$A^{-1/3}E_F$
Аксиальная симметрия	$2\pi\hbar/T$	0	2	$A^{1/6}$	$A^{1/2}/E_F$	$A^{-1/6}E_F$
Сферическая симметрия: неособенные орбиты	$2\pi\hbar/T_0$	1	3	$A^{1/2}$	$A^{5/6}/E_F$	$A^{1/6}E_F$
особенные орбиты (диаметры)	$2\pi\hbar/T_0$	0	3	$A^{1/3}$	$A^{2/3}/E_F$	$E_F$
Гармонический осциллятор: полное вырождение	$2\pi\hbar/T$	2	3	$A^{2/3}$	$A/E_F$	$A^{1/3}E_F$
плоские орбиты	$2\pi\hbar/T$	1	2	$A^{1/3}$	$A^{2/3}/E_F$	$E_F$
прямолинейные орбиты	$\hbar\omega_i$	0	1	1	$A^{1/3}/E_F$	$A^{-1/3}E_F$
Разделяющиеся перемешанные	$2\pi\hbar/T$	3		$A^{1/3}$	$A^{2/3}/E_F$	$E_F$
Кулоновский потенциал	$2\pi\hbar/T (e)$	5	—	—	—	—

чае изолированной орбиты использовано выражение (108). Оценки оболочечных поправок к энергии связи  $\delta E$  (седьмой столбец) получены согласно формулам (78) и (109). Для несферического потенциала отношение  $T/T_0$  может сильно отличаться от единицы. Для кулоновского потенциала характеристики оболочек не указаны, так как величина  $\hbar\Omega$  сильно зависит от энергии и усредненные значения не имеют большого смысла.

Для теории оболочечных явлений в ядрах весьма важен вопрос о зависимости интенсивности оболочечной структуры одночастичного спектра от формы потенциала. Для сферического случая

ответ весьма прост. В результате весьма высокой степени вырождения и слабой зависимости амплитуды  $g_{osc}$  и периода  $T$  от конкретного вида потенциала достаточно интенсивная оболочечная структура возникает практически в любом сферическом потенциале (см. разд. 2 и 6). В несферическом потенциале дело обстоит иначе, так как вырождение меньше, чем в сферическом потенциале. Однако если гамильтониан системы содержит произвольные функции, например, описывающие форму ядра, то можно выбрать так, чтобы степень вырождения орбит увеличилась, а период  $T$  стал меньше. В самом деле, уравнение

$$dF(\mathbf{rp})/dt = 0 \quad (115)$$

для интеграла движения  $F$  или эквивалентное условие равенства нулю скобки Пуассона  $\{H, F\}$  можно рассматривать как дополнительное условие, которое определяет вид потенциала с более высоким вырождением. Сказанное особенно относится к выбору формы ядра, которая может рассматриваться как дополнительная непрерывная степень свободы, необходимая для того, чтобы удовлетворить условию (115). Хорошо известный пример такого «выбора» потенциала — сферический потенциал вида  $V(r) = ar^\beta$ , где дополнительные пятые интегралы возникают, если выбрать  $\beta$  равным  $-1$  (кулоновский потенциал и задача Кеплера) или  $+2$  (сферический гармонический осциллятор). Природа таких дополнительных интегралов движения обусловлена конкретными свойствами гамильтониана, и ее невозможно предвидеть заранее. В этом отношении незаменимы численные методы.

**Период орбиты.** В приложениях к теории ядра нужно помнить, что усиление оболочек, связанное с наличием однозначных интегралов движения, численно не очень большое: каждая новая степень вырождения увеличивает амплитуду  $g_{osc}$  в 2—2,5 раза. Поэтому вырождение орбит не всегда является решающим фактором. Это особенно относится к вычислению оболочечной поправки  $\delta E$ , которая, как показано в разд. 6, обратно пропорциональна квадрату периода обращения по орбите  $T_\beta$ . Период не связан со степенью вырождения орбит и потому должен рассматриваться как отдельный фактор. Величина  $\delta E$  усилена множителем порядка  $A^{(\mathcal{Z}+\mathcal{K}-1)/6}$  за счет возрастания амплитуды  $g_{osc}$ , связанного с симметрией и приближенно обратно пропорциональной квадрату длины орбиты. Согласно (78) орбиты с меньшим периодом вращения вносят больший вклад в оболочечные энергии. Нужно учитывать также уменьшение вклада в плотность уровней сложных орбит, приближающихся к периметру ямы, которые даже при большой степени вырождения занимают меньший объем. Примером являются почти циркулярные орбиты в бесконечно глубокой сферической яме, с большим числом точек отражения (см. выше).

Период обращения  $T$  не является монотонной функцией формы потенциала, вследствие чего при изменении формы потенциала оболочечная поправка  $\delta E$  к энергии изменяется нерегулярно как вследствие изменения степени вырождения орбит, так и в результате нерегулярной вариации  $T$ . При  $A$  порядка нескольких сот возможный эффект изменения  $T$  приблизительно такой же, как изменение  $\mathcal{D}$  или  $\mathcal{R}$  на одну или две единицы. Хорошей иллюстрацией этого положения является пример гармонического осциллятора (см. разд. 3 и 6 и рис. 7 и 8). На рис. 10 показана контурная карта распределения оболочечных поправок в аксиально-симметричном гармоническом осцилляторе как функции числа заполненных уровней и параметра деформации  $\omega_{\perp} : \omega_z$ .

Численные результаты, как и качественный анализ, показывают, что наблюдаемое некоторое уменьшение масштаба оболочечных осцилляций энергии в деформированных одночастичных потенциалах не связано с исчезновением оболочек при отклонении от сферической формы, как это часто предполагалось в литературе [см., например, работу [7] и другие цитируемые ниже]. Можно сказать, что уменьшение амплитуды  $\delta E$  связано с увеличением длины орбит с большим вырождением ( $\hbar\Omega$  уменьшается), а также с уменьшением степени вырождения простых орбит с большим  $\hbar\Omega$ . Но ни тот, ни другой фактор не определяется отклонением от сферической симметрии.

Важный качественный вывод, который можно сделать на основании изложенного, состоит в том, что масштаб оболочечных поправок нерегулярно зависит от формы ядра, возрастая в тех случаях, когда условия благоприятствуют появлению орбит с большим вырождением и меньшим периодом обращения  $T$ , т. е. более коротких, или, при прочих равных условиях, заполняющих больший объем. Теоретические результаты вполне объясняют, почему, вопреки распространенному мнению начала 60-х годов [35—37], резко выраженная оболочечная структура одночастичного спектра обнаруживается в расчетах с реалистическими потенциалами [1—4], которые имеют мало общего со сферической симметрией и со специальными свойствами гармонического осциллятора. При этом естественно объясняется характерная периодичность появления больших оболочек в деформированных ядрах.

## 9. РАВНОВЕСНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ЯДЕР И ДЕЛЕНИЕ

Обусловленная оболочками неоднородность верхней части одночастичного спектра имеет весьма большое значение для стабильности и особенно для формы ядра. Быстро изменяясь с деформацией, большие оболочки вносят значительный вклад в локальную жесткость изменения формы ядра и становятся опреде-

ляющим фактором, когда в определенных случаях уменьшаются гораздо большие эффекты классических сил поверхностного натяжения и кулоновского отталкивания. Последнее имеет место вблизи экстремумов той компоненты энергии деформации, которая соответствует классической капле, как, например, около сферической формы или вблизи так называемой долины капельной энергии в сильно деформированных тяжелых ядрах, когда две большие, но противодействующие классические силы почти компенсируют друг друга [2]. В этих условиях значительное разрежение одночастичной плотности уровней в окрестности энергии Ферми приводит к резко выраженным локальным минимумам в энергии деформации и, таким образом, определяет равновесные формы ядер, сферических или деформированных \*.

В сильно деформированных ядрах-актиноидах появление больших оболочек приводит к возникновению относительно стабильных стационарных состояний [1—4, 38, 39], ответственных за эффекты промежуточной структуры в делении и спонтанно делящиеся изомеры. Такие результаты противоречат пониманию природы больших оболочек как связанных со сферической симметрией ядерного потенциала. Они еще больше расходятся с традиционным объяснением несферичности формы ядра как обусловленной конкуренцией квадрупольных сил и сил спаривания или деформирующими эффектами некоторых определенных нуклонных состояний, сильно связанных со степенями свободы формы ядра. Оболочечная неоднородность спектра включает много квантовых состояний (см. таблицу) и не связана со свойствами отдельных уровней или так называемых подоболочек. Оболочечная структура является согласованным эффектом многих частиц (см. работу [2], разд. IV.5).

Квазиклассическая качественная теория представляет проблему стабильности формы ядра в новом свете. Условия повышенной стабильности формы ядра можно сформулировать следующим образом [2]. Во-первых, одночастичный спектр должен иметь резко выраженную оболочечную структуру и, во-вторых, в области границы Ферми должно иметь место разрежение плотности уровней, как это видно, в частности, из выражения (78) для оболочечной поправки к энергии. В то время как второе условие можно удовлетворить выбором определенного числа нуклонов, которое является магическим числом нуклонов для данного ядерного потенциала, первое требует некоторой определенной формы

\* Сказанное не относится к более мелким минимумам энергии деформации, которые действительно можно связать со структурой отдельных одночастичных состояний. Такая «тонкая структура» особенно проявляется в переходной области между двумя соседними оболочками, например в области перехода от устойчивой сферической к несферической форме ядра, где эффект изменения больших оболочек ослаблен.



потенциала, обеспечивающей существование простых периодических или почти периодических орбит и максимальной степени вырождения. В этом отношении весьма существенно то, что ядерный потенциал содержит степени свободы типа параметров формы ядра, которые в равновесном состоянии ядра выбираются именно из условия, чтобы при данном числе нуклонов минимум  $\delta E$  был как можно глубже.

Карта, представленная на рис. 12, показывает распределение осцилляций одночастичной плотности уровней, рассматриваемой

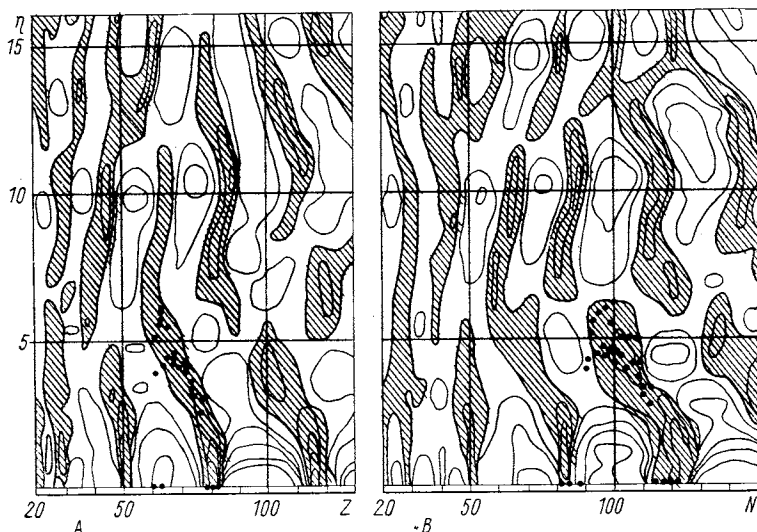


Рис. 12. Зависимость осциллирующей компоненты  $\delta g = g_\nu - \tilde{g}$  плотности уровней для нильссоновской модели от числа нейтронов  $N$ , протонов  $Z$  и параметра деформации  $\eta$ .  
 ..... — экспериментальные значения параметра квадрупольной деформации для основного состояния ядра с данным числом нуклонов

как функция числа нуклонов, равного удвоенному числу занятых состояний, и параметра деформации для одного из реалистических вариантов ядерного потенциала, а именно потенциала Нильссона. На рисунке показан рельеф осциллирующей компоненты плотности уровней вблизи энергии Ферми

$$\delta g = g_\nu(\mu) - \tilde{g}, \quad (116)$$

определенной при помощи численного усреднения, как описано в разд. 7. Сглаженная плотность уровней  $\tilde{g}$  вычислялась с  $\gamma \gg \gamma_{SH}$ . Для  $g_\nu$  параметр сглаживания  $\gamma$  был выбран равным 2–3 Мэв, что приблизительно составляет одну треть часть от

$\hbar\Omega_0$ . Таким образом, осцилляции представляют собой вклады периодических траекторий, длины которых не превышают двух или трех характерных размеров ядра. Численные результаты убедительно показывают, что в деформированных реальных ядерных потенциалах действительно существует значительная структура больших оболочек в одночастичном распределении уровней и что она особенно отчетливо проявляется при некоторых определенных формах ядра. Увеличение энергии связи довольно близко следует за распределением минимумов плотности уровней при энергии Ферми [1, 2].

То же самое наблюдается в расчетах с другими ядерными потенциалами и, в частности, с потенциалом Вудса — Саксона [2, 39]. Экспериментально известные равновесные деформации близко соответствуют минимумам плотности уровней при энергии Ферми (см. рис. 12). Этот результат [1], обнаруженный в рамках метода оболочечных поправок, естественно объясняется при помощи изложенной здесь квазиклассической теории. Наиболее резко выраженные минимумы плотности уровней образуют четко определенные области сферических и деформированных магических ядер.

Весьма существенно, что в реалистических ядерных потенциалах обнаруживается область сильной оболочечной структуры при относительно малой деформации — порядка 20—30% — по сравнению со сферической формой (магические числа  $N = 100, 150—152$ ). Именно поэтому при достижении некоторого определенного заполнения сферической потенциальной ямы, происходит резкое изменение деформации из-за того, что энергетически оказывается более выгодной форма, отвечающая близкой к заполнению оболочке в деформированном ядре. Если бы оболочки в деформированном ядре отсутствовали, то увеличение деформации происходило бы постепенно. Поскольку ранее предполагалась именно такая возможность, то для объяснения наблюдаемого резкого перехода от сферической к несферической форме делалось предположение, что переход обусловлен конкуренцией квадрупольных сил и спаривания [41]. Эта модель не подтверждается последовательной теорией и прямыми численными расчетами, из которых с необходимостью следует существование больших оболочек в деформированных ядрах и их важная роль в установлении равновесной формы ядра.

Несостоятельность модели квадрупольные силы + спаривание проверяется непосредственно в расчетах равновесных деформаций со спариванием, сила которого изменяется от нуля до непомерно больших значений (рис. 13). Согласно модели квадрупольных сил точка перехода от сферической равновесной формы к несферической должна быть чувствительной функцией спаривания [41]. Однако, как видно из рис. 13, за исключением ядер в непо-

средственной окрестности магических сферических ядер, деформация которых в отсутствие спаривания обусловлена относительно слабой структурой подоболочек ( $j$ -уровней сферического ядра), значение равновесной деформации и точка перехода от сферической к несферической форме нечувствительны к спариванию.

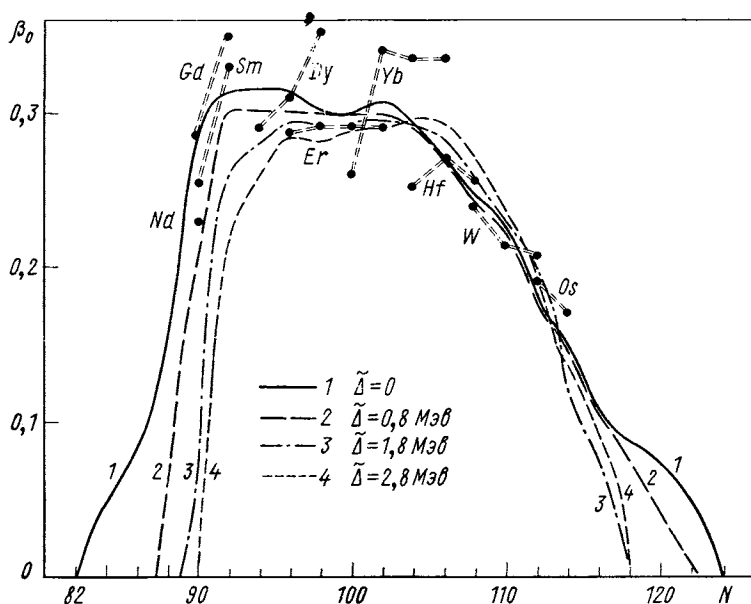


Рис. 13. Зависимость параметра  $\beta_0$  квадрупольной деформации для первого минимума оболочечной поправки  $\delta E$  для нейтронов от массового числа при различной интенсивности парных корреляций

Расчет с нильссоновским потенциалом, параметр  $\tilde{\Delta}$  — величина энергетической щели при однородном спектре; — — — — расчет без спаривания; показаны также некоторые значения параметров квадрупольной деформации ядер, известные из опытов по кулоновскому возбуждению [2]

Положения точек изменения равновесной формы можно проследить даже в расчетах с полностью выключенным спариванием (см. рис. 13, а также работу [2]). Ей соответствует отчетливый перегиб кривой, изображающей равновесную деформацию в зависимости от числа нуклонов при  $\Delta = 0$ .

Согласно новой интерпретации [1, 2] место перехода от сферической к деформированной форме ядра определяется границей между соседними оболочками в сферическом ядре и при деформации 20—30%. Эти границы отчетливо видны на картах, подобных тем, что изображены на рис. 10 и 12, и легко убедиться в том, что в расчетах с реалистическими потенциалами таким образом получаются правильные значения  $N$  и  $Z$  ядер в переходных обла-

стях. Упомянутые выше оболочки при деформации ядерного потенциала порядка 20—30% ответственны за деформации основных состояний ядер в области редкоземельных элементов и актиноидов.

К сожалению, связь равновесных деформаций и оболочек деформированных ядер не рассматривается в большинстве монографий, и даже в недавних обзорах [7, 42] большие оболочки в деформированных ядрах обсуждаются только в связи с квазистационарным состоянием (изомерами деления) во второй потенциальной яме. Оболочки при меньшей деформации, с которыми связано во многих отношениях более фундаментальное явление — существование деформированных ядер, даже не упоминаются. Большие оболочки, наблюдаемые в реалистических ядерных потенциалах при деформации порядка 20—30%, не имеют прямой аналогии в деформированном гармоническом потенциале, и возможно, что это обстоятельство является одной из причин «непризнания» таких оболочек.

Оболочечная структура, соответствующая второй потенциальной яме, в отличие от первой, соответствующей основному состоянию деформированного ядра, обнаруживается в сильно деформированных ядерных потенциалах при деформации, приближенно соответствующей отношению главных осей ядра  $c : a = 2 : 1$  (см. работы [1—4], а также [38, 39]). На рис. 12 это оболочечные минимумы при деформации  $\eta \approx 10 \div 12$ . Реально вторая оболочка проявляется только в самых тяжелых сильно деформированных ядрах в условиях, когда поверхностное натяжение компенсировано кулоновскими силами, вблизи области магического числа  $N = 144 \div 146$ . В деформированном гармоническом осцилляторе при  $\omega_{\perp} : \omega_z = 2 : 1$  также наблюдается отчетливая оболочечная структура. Поэтому после того как оболочечные явления в деформированных ядрах были обнаружены и проанализированы при помощи численных методов, было предположено в работах [7, 43, 44], что большие оболочки, наблюдаемые при  $c : a \approx 2$  в деформированных тяжелых ядрах, обусловлены близостью одночастичного спектра в реалистическом ядерном потенциале и спектра уровней деформированного осциллятора.

Делаются попытки связать также и другие случаи деформации ядер в основных и возбужденных состояниях с многочисленными оболочками слабо деформированного гармонического осциллятора [44]. Известно, что для такой интерпретации нет оснований. Различие между реалистическими потенциалами и несферическим осциллятором велико с точки зрения любых критериев квантовой теории и приводит к отнюдь не малому возмущению спектра. Относительное смещение уровней превосходит расстояние между большими оболочками осциллятора (см., например, работу [7], рис. 6.49), причем перемешивание уровней осцилляторных оболочек увеличивается с ростом числа нуклонов.

Однако следует иметь в виду, что структура больших оболочек обусловлена свойствами классического гамильтониана, в особенности характеристиками периодических орбит. Поэтому наблюдаемое в некоторых случаях подобие результатов можно объяснить при помощи следующей теоремы классической механики: если различие между реалистическим потенциалом и некоторым модельным потенциалом, допускающим разделение переменных, невелико, то характеристики периодического движения близки, причем степень близости намного больше, чем относительная амплитуда разности гамильтонианов [17].

Таким образом, можно понять, почему в реалистических потенциалах сильная оболочечная структура появляется при приблизительно такой же деформации  $c : a = 2 : 1$ , как и та, при которой наблюдаются самые значительные оболочки в деформированном осцилляторе. Такого согласия нет для меньших деформаций, где в гармоническом осцилляторе можно найти много классических замкнутых орбит с большими периодами, которые не приводят к резко выраженной оболочечной структуре и переходят друг в друга при небольшом изменении формы потенциала. Тот факт, что добавление к стационарному потенциалу негармонических членов в нильссоновской модели приводит к усилению оболочечной структуры одночастичного спектра по сравнению с деформированным гармоническим осциллятором, также можно рассматривать как один из доводов против особой роли осцилляторной симметрии: подходящее искажение осцилляторного потенциала может привести к существенному упрощению периодических орбит и усилению оболочечной структуры, возможно, ценой некоторого уменьшения степени их вырождения. Исключительной особенностью гармонического потенциала является также то, что парциальные частоты  $\omega_i$ , а также частота обращения  $\Omega$ , однозначно определяются формой потенциала и не зависят от констант движения. Поэтому орбиты с заданным отношением частот в осцилляторе появляются только при совершенно определенной «деформации». В более общем случае многомерные орбиты заданных семейств орбит постоянного действия появляются в определенных областях деформации в виде зон (вырождающихся в случае гармонического осциллятора в последовательность точек  $\omega_i/\omega_j = n_i/n_j$ ). Распределение оболочек в реалистических потенциалах обнаруживает гораздо больше сходства с деформированной бесконечно глубокой ямой эллипсоидальной формы, где сравнительно простые орбиты появляются при меньшей деформации, чем с гармоническим осциллятором. Такая интерпретация легко объясняет существование как «второй», так и «первой» ямы.

При большой деформации ядра в процессе деления происходит образование «шейки», разделяющей будущие осколки. При такой форме потенциала появляются орбиты, замкнутые внутри об-

разрушающихся сильно деформированных осколков, и обнаруживается оболочечная структура осколков. Условия, благоприятствующие появлению наиболее сильных оболочек в осколках, возникают, как правило, при асимметричной форме разделения: симметрия формы относительно плоскости, перпендикулярной к направлению разрыва, не обязательно является фактором, способствующим усилению оболочек в данных условиях. Так, можно качественно объяснить [45], почему оболочечная структура делящегося ядра после образования шейки приводит, как правило, к асимметричному делению [40]. Этот вывод квазиклассической теории не ограничен простой моделью, рассмотренной в работе [45].

Перестройка оболочек в процессе деления ядра существенно меняет не только энергию деформации, но и динамические характеристики, чувствительные к структуре одночастичной поверхности Ферми, такие, как, например, параметры инерции (массовые коэффициенты), и в результате оказывается определяющим фактором в делении ядер при не слишком большой энергии возбуждения [40].

Важный общий вывод квазиклассической теории ядерных оболочек состоит в том, что оболочечная структура ядер является общим свойством реалистических ядерных потенциалов безотносительно к возможности разделения переменных или конкретным свойствам гармонического осциллятора. Преувеличение роли осцилляторной модели также, как и сферической симметрии, послужило причиной некоторых ошибочных выводов [7]. Требуемой степени вырождения и экстремальных значений других параметров можно достичь в случае деформированных реалистических потенциалов, имеющих достаточное число степеней свободы, таких, как форма ядра. Такой вывод не только гораздо лучше согласуется с известными результатами численного анализа [1—4], но и весьма важен для адекватного описания равновесных деформаций и, в частности, для качественного понимания степени надежности численных результатов, экстраполированных к относительно не исследованным областям теории деления и физики тяжелых и сверхтяжелых ядер, стабильность которых существенно обусловлена оболочечной структурой.

Выражаем благодарность Ф. Иванюку и С. Оффенгендену, которые выполнили некоторые численные расчеты, и Н. Семенову за помощь, оказанную при подготовке рукописи. Нам хочется выразить благодарность проф. Я. Эсс за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Strutinsky V. M. а) «Nucl. Phys. A», 1967, v. 95, p. 972; б) «Nucl. Phys. A», 1968, v. 122, p. 1.
2. Brack M. e. a. «Rev. Mod.», 1972, v. 44, p. 320.
3. Nilsson S. G. e. a. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 131, p. 1.

4. Nix J. B. «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1972, v. 22, p. 65.
5. Ballian R., Bloch C. а) «Ann. Phys.», 1970, v. 60, p. 401; б) 1971, v. 63, p. 345; в) 1972, v. 63, p. 592; г) 1972, v. 56; д) Submitted to «Ann. Phys.», 1974.
6. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и волноводы. М., «Советское радио», 1966.
7. Bohr A., Mottelson B. Nuclear structure. Vol. 2, chap. 6, 1974, «Phys. Scripta A», 1974, v. 10, p. 13.
8. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., Изд-во МГУ, 1965.
9. Gutswiller M. а) «J. Math. Phys.», 1967, v. 8, 1979 (1967); б) 1971, v. 12, p. 34.
10. Маслов В. П. ТМФ, 1970, т. 2, с. 30.
11. Morette C. «Phys. Rev.», 1951, v. 81, p. 848.
12. Feynman R. «Rev. Mod. Phys.», 1948, v. 20, p. 371; В кн.: Вопросы причинности в квантовой механике. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
13. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.
14. Федорюк М. В. ЖВМФ, 1964, т. 4, с. 671.
15. Vonche P. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 191, p. 609.
16. Струтинский В. М., Коломиец В. М. В кн.: Тр. 7-й школы ЛИЯФ по ядерной физике. Л., ЛИЯФ; 1973, с. 483.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1958.
18. Keller J. B. «Ann. Phys.», 1958, v. 4, p. 180.
19. Keller J. B., Rubinow S. I. «Ann. Phys.», 1960, v. 9, p. 24.
20. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1971.
21. Bunatian G. G., Kolomietz V. M., Strutinsky V. M. «Nucl. Phys.», 1972, v. 488, p. 225.
22. Бере Г. Теория ядерной материи. Пер. с англ. М., «Мир», 1974.
23. Коломиец В. М. и др. ЭЧАЯ, 1972, т. 3, вып. 2, с. 393.
24. Ramamurthy V. S., Kapoor S. S. «Phys. Lett. B», 1972, v. 42, p. 389.
25. Dietrich K. Trieste lectures. 1971.
26. Bhaduri P. K., Das Gupta S. «Phys. Lett. B», 1973, v. 47, p. 129.
27. Jennings B. K., Bhaduri P. K. Preprint McMastre Univ., 1973.
28. Ходель В. М. «Ядерная физика», 1971, т. 14, с. 956.
29. Brack M., Pauli H. C. «Nucl. Phys. A», 1973, v. 207, p. 401.
30. Киржниц Д. А. Полевые методы теории частиц. М., Госатомиздат, 1963.
31. Damgaard J. e.a. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 135, p. 452.
32. Götz U., Pauli H. C., Alder K. «Nucl. Phys. A», 1971, v. 175, p. 481.
33. Айзерман М. А. Классическая механика. М., «Наука», 1974.
34. Д. Тер-Хаар. Основы гамильтоновой механики. Пер. с англ. М., «Наука», 1974.
35. Proceedings of the 1-st IAEA Symposium on physics and chemistry in fission. IAEA, Vienna. Vol. 1, 1965.
36. Myers M. D., Swiatecki M. J. «Nucl. Phys.», 1966, v. 81, p. 1.
37. Гейликман Б. Т., Хлебников Г. Н. «Ядерная физика», 1968, т. 7, с. 245.
38. Strutinsky V. M. «Ark. för Fysik», 1967, Bd 36, N 70, S. 629.
39. Björnholm S., Strutinsky V. M. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 136, p. 1.
40. Proceeding of the 3d IAEA Symposium on physics and chemistry in fission. IAEA, Vienna, 1974.
41. Beljaev S. T. «Dan. Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.», 1959, N 11.
42. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. М., «Наука», 1971.
43. Гейликман Б. Т. «Ядерная физика», 1969, т. 9, с. 894.
44. Sheline R. K., Ragnarsson I. Proc. of the 7th Masurian School in Nuclear Physics. Nucleonica, 1975, v. 20, no. 4/2, p. 389.
45. Grammaticos B. «Phys. Lett. B», 1973, v. 44, p. 343.