

КВАЗИЧАСТИЧНО-ФОНОННАЯ МОДЕЛЬ ЯДРА

I. Основные положения

В. Г. Соловьев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Изложены основные положения квазичастично-фоновой модели сложных ядер. Обсужден выбор модельного гамильтониана в виде среднего поля и остаточных сил. Представлены фоновое описание и взаимодействие квазичастиц с фонами. Получены системы основных уравнений и их приближенные решения. Приближение выбрано так, чтобы получить наиболее точное описание не всей волновой функции, а только ее малоквазичастичных компонент. Изложен метод силовых функций, имеющий решающее значение в практической реализации квазичастично-фоновой модели для описания ряда свойств сложных ядер. Определена область применения квазичастично-фоновой модели ядра: малоквазичастичные компоненты волновых функций при низких, промежуточных и высоких энергиях возбуждения, усредненные в некоторых энергетических интервалах.

The general assumptions of the quasiparticle-phonon model of complex nuclei are given. The choice of the model Hamiltonian as an average field and residual forces is discussed. The phonon description and quasiparticle-phonon interaction are presented. The system of basic equations and their approximate solutions are obtained. The approximation is chosen so as to obtain the most correct description of few-quasiparticle components rather than of the whole wave function. The method of strength functions is presented, which plays a decisive role in practical realization of the quasiparticle-phonon model for the description of some properties of complex nuclei. The range of applicability of the quasiparticle-phonon nuclear model is determined as few-quasiparticle components of the wave functions at low, intermediate and high excitation energies averaged in a certain energy interval.!

ВВЕДЕНИЕ

В рамках полумикроскопической теории атомного ядра построена квазичастично-фоновая модель, на основе которой получено описание малоквазичастичных компонент волновых функций сложных ядер при низких, промежуточных и высоких энергиях возбуждения. Квазичастично-фоновая модель ядра сформулирована в результате описания низколежащих состояний ядер как

квазичастичных [1] и однофононных [2], обобщения фононов и взаимодействия квазичастиц с фононами [3]. Взаимодействия квазичастиц с фононами играют важную роль при вычислении энергий и волновых функций неротационных состояний нечетных ядер [4—6]. Методы описания низколежащих состояний атомных ядер были обобщены и применены к изучению усложнения структуры состояний с ростом энергии возбуждения [7] и к изучению структуры состояний при промежуточных и высоких энергиях возбуждения. Проведенный в работе [8] анализ показал, что имеется возможность единого описания возбужденных состояний атомных ядер.

Квазичастично-фононная модель основывается на следующих положениях [7, 9—11]:

- 1) двухквазичастичные и вибрационные состояния рассматриваются как однофононные;
- 2) связь одночастичного и коллективного движений описывается в форме взаимодействия квазичастиц с фононами;
- 3) основное приближение выбрано так, чтобы получить наиболее точное описание не всей волновой функции, а только ее малоквазичастичных компонент.

Волновые функции высоковозбужденных состояний сложных ядер состоят из нескольких миллионов компонент. Найти каждую такую волновую функцию — задача очень сложная. Это продемонстрировано, например, в работе [12] для легких ядер, где при вычислении энергий и волновых функций проведена диагонализация матриц очень высокого порядка. Исследования в рамках подхода, основанного на операторной форме волновой функции [13—15], продемонстрировали, что такие характеристики высоковозбужденных состояний, как полные сечения фотовозбуждения, спектроскопические факторы реакций одноуклонных передач, нейтронные силовые функции, парциальные радиационные силовые функции для прямых переходов на низколежащие состояния и ряд других, определяются малоквазичастичными компонентами их волновых функций. Задача существенно упрощается, если необходимо получить хорошее описание только малоквазичастичных частей волновых функций состояний в некотором энергетическом интервале. В этом случае нужно воспользоваться формализмом разного типа силовых функций.

На данной стадии разработки квазичастично-фононной модели ядра имеется возможность вычислять фрагментацию (распределение силы) одноквазичастичных, однофононных состояний и состояния квазичастица плюс фонон по многим ядерным уровням. Это позволяет изучать широкий круг ядерных процессов и свойств сложных ядер в широком интервале энергий возбуждения.

В этом обзоре изложены основные положения квазичастично-фононной модели сложных (средних и тяжелых) ядер. Для опреде-

ленности формулы приведены для деформированных ядер, хотя смысл приведенного материала относится также к сферическим ядрам. Основные результаты расчетов свойств сферических и деформированных ядер будут даны в следующих статьях.

1. МЕТОД ХАРТРИ — ФОКА — БОГОЛЮБОВА И ПОЛУМИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

1. Метод Хартри — Фока — Боголюбова является наиболее фундаментальным и широко распространенным методом решения ядерной задачи многих тел. Большинство уравнений, решаемых в теории ядра, — частные случаи основных уравнений, полученных в рамках этого метода. Метод Хартри — Фока — Боголюбова позволяет определенным образом выразить высшие корреляционные функции через низшие. В результате уравнения движения удается записать в замкнутом виде. Сформулированные выше основные этапы позволяют представить логическую нить решения ядерной задачи многих тел.

Гамильтониан системы запишем в общей форме

$$H = \sum_{f, f'} T'(f, f') a_f^+ a_{f'} - \\ - \frac{1}{4} \sum_{f_1, f_2, f'_2, f'_1} G(f_1, f_2, f'_2, f'_1) a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f'_2} a_{f'_1}, \quad (1)$$

где f — совокупность квантовых чисел, характеризующих состояние нуклона. Операторы поглощения и рождения нуклона a_f , a_f^+ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$a_{f_1}^+ a_{f_2} + a_{f_2} a_{f_1}^+ = \delta_{f_1, f_2}; \\ a_{f_1} a_{f_2} + a_{f_2} a_{f_1} = 0,$$

и, далее,

$$T'(f, f') = T(f, f') - \lambda \delta_{f, f'},$$

где λ — химический потенциал.

Введем корреляционную функцию

$$\Phi(f_1, f_2) = \langle | a_{f_1} a_{f_2} | \rangle \quad (2)$$

и функцию плотности

$$\rho(f_1, f_2) = \langle | a_{f_1}^+ a_{f_2} | \rangle, \quad (3)$$

причем

$$\Phi(f_1, f_2) = -\Phi(f_2, f_1); \quad \rho^*(f_2, f_1) = \rho(f_1, f_2);$$

здесь среднее взято по произвольному состоянию $| \rangle$.

Рассмотрим амплитуды a_f в представлении Гейзенберга, где $a_f(t)$ явно зависят от времени. Введем зависящие от времени функции $\rho_t(f_1, f_2)$, $\Phi_t(f_1, f_2)$. Из уравнений движения вытекают следующие точные соотношения:

$$i \frac{\partial \rho_t(f_1, f_2)}{\partial t} = \langle | [a_{f_1}^+(t) a_{f_2}(t), H] | \rangle; \tag{4}$$

$$i \frac{\partial \Phi_t(f_1, f_2)}{\partial t} = \langle | [a_{f_1}(t) a_{f_2}(t), H] | \rangle. \tag{5}$$

Далее следует написать уравнения для $\langle | a_{f_1}^+(t) a_{f_2}^+(t) a_{f_2}'(t) a_{f_1}'(t) | \rangle$ и $\langle | a_{f_1}^+(t) a_{f_2}(t) a_{f_2}'(t) a_{f_1}'(t) | \rangle$ и выразить их через функции распределения более высокого порядка и т. д. Переход к замкнутой системе приближенных уравнений можно осуществить с помощью какой-либо аппроксимации, выражающей высшие корреляционные функции через низшие.

В теории ядра используется метод Хартри — Фока — Боголюбова для получения приближенных уравнений представлением высших корреляционных функций через низшие. Например, функция $\langle | a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_1} a_{f_2} | \rangle$ следующим образом выражается через функции ρ и Φ :

$$\begin{aligned} \langle | a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_1} a_{f_2} | \rangle &= \rho(f_1', f_2) \rho(f_2', f_1) - \\ &- \rho(f_1', f_1) \rho(f_2', f_2) + \Phi^*(f_2', f_1) \Phi(f_1, f_2), \end{aligned} \tag{6}$$

причем в приближении Хартри правая часть содержит только первый член. В. А. Фок добавил второе слагаемое, которое учитывает антисимметризацию, а Н. Н. Боголюбов ввел третий член, который позволил описать парные корреляции сверхпроводящего типа. Если воспользоваться приближением типа (6), то уравнения (4), (5) становятся замкнутыми. Символически эти уравнения запишем так:

$$i \frac{\partial \rho_t(f_1, f_2)}{\partial t} = \mathfrak{B}(f_1, f_2); \tag{7}$$

$$i \frac{\partial \Phi_t(f_1, f_2)}{\partial t} = \mathfrak{A}(f_1, f_2). \tag{8}$$

В стационарном случае они следующие:

$$\mathfrak{B}(f_1, f_2) = 0; \tag{7'}$$

$$\mathfrak{A}(f_1, f_2) = 0. \tag{8'}$$

Явный вид этих функций дан в работе [16]. Развитие метода Хартри — Фока — Боголюбова оказалось возможным благодаря введению Н. Н. Боголюбовым квазисредних в строгой математической формулировке [17].

2. Чтобы перейти к следующему этапу преобразований, из набора квантовых чисел f выделим число $\sigma = \pm 1$ таким образом, что состояния $f = q\sigma$, отличающиеся знаком σ , будут сопряженными относительно операции отражения времени. Например, σ может быть знаком проекции момента на ось симметрии ядра.

Практически для любого вида взаимодействия между нуклонами можно найти такое линейное унитарное преобразование, которое одновременно приводит функцию $\rho(f, f')$ к диагональному, а функцию $\Phi(f, f')$ — к каноническому виду, т. е.

$$\begin{aligned}\Phi(f, f') &= \Phi(f) \delta_{f, -f'} = \Phi(\sigma q) \delta_{q, q'} \delta_{\sigma, -\sigma'}; \\ \rho(f, f') &= \rho(f) \delta_{f, f'} = \rho(q) \delta_{q, q'} \delta_{\sigma, \sigma'}.\end{aligned}\quad (9)$$

Тогда функции $\Phi(q)$ и $\rho(q)$ связаны условием

$$\rho(q) = \rho^2(q) + \Phi^*(q) \Phi(q).\quad (10)$$

В этом представлении среднее значение оператора энергии имеет вид

$$\begin{aligned}\langle |H| \rangle &= \sum_f \left\{ T'(f) - \frac{1}{2} \sum_{f'} G(f, f'; f', f) \rho(f') \right\} \rho(f) - \\ &- \sum_{q, q'} G(q^+, q^-; q'^-, q'^+) \Phi^*(q) \Phi(q').\end{aligned}\quad (11)$$

Основные уравнения записываются так:

$$2[E(q) - \lambda] \Phi(q) - [1 - 2\rho(q)] \sum_{q'} G(q^+, q^-; q'^-, q'^+) \Phi(q') = 0;\quad (12)$$

$$N = 2 \sum_q \rho(q).\quad (13)$$

Здесь N — число нейтронов или протонов. В (12) содержатся энергии одночастичных уровней среднего поля, которые имеют вид

$$E(q) = T(q) - \sum_{q'\sigma'} G(q^+, q'\sigma'; q'\sigma', q^+) \rho(q').\quad (14)$$

В рамках микроскопического подхода выражения вида (14) вычисляются на основе экспериментальных данных по нуклон-нуклонному рассеянию.

Таким образом, из общего вида потенциала, описывающего взаимодействия между нуклонами, выделены среднее поле ядра и взаимодействия, приводящие к парным корреляциям сверхпроводящего типа. В теории ядра используется постулат: среднее поле ядра соответствует такому представлению, когда матрица плотности $\rho(f, f')$ является диагональной для основных состояний четно-четных ядер, лежащих в зоне β -стабильности. В этом пред-

ставлении остаточные силы сводятся целиком к взаимодействиям, приводящим к парным корреляциям сверхпроводящего типа. Поэтому не нужно учитывать никаких других остаточных взаимодействий.

Возможность выделения среднего поля ядра — это не математический прием, а отражение фундаментальных свойств атомного ядра. Выделение среднего поля ядра обусловлено, во-первых, действием принципа Паули и, во-вторых, соотношением импульса поверхности Ферми с импульсом отталкивающей сердцевинны нуклон-нуклонного потенциала. Наличие среднего поля ядра или ядерных оболочек ответственно за разнообразие свойств атомных ядер. Поэтому ядра нельзя рассматривать как разной величины осколки ядерной материи, а нужно изучать структуру каждого ядра. Здесь проявляется фундаментальное отличие, например, от кристалла, где не имеет смысла изучать строение кристаллов одного типа, но разных размеров.

Следует отметить, что для гипотетического сверхплотного состояния атомного ядра, возможно, не будут выполняться условия выделения среднего поля и вместо громадного разнообразия ядерных свойств в этом состоянии, вероятно, имеются близкие ядра как разного размера куски ядерного вещества.

Из формул (9) — (14) получим основные уравнения теории парных корреляций сверхпроводящего типа. Предполагается, что функция $G(q^+, q^-; q'^-, q'^+)$ не зависит от q и q' и меняется от ядра к ядру как A^{-1} . Эти предположения хорошо выполняются, и в теории используются две константы G_N и G_Z , определяемые из экспериментальных данных по парным энергиям. Введем функции u_q и v_q :

$$\rho(q) = v_q^2; \quad \Phi(q) = \Phi^*(q) = u_q v_q, \quad (15)$$

тогда условие (10) примет вид

$$1 = v_q^2 + u_q^2, \quad (16)$$

а уравнения (12), (13):

$$2[E(q) - \lambda] u_q v_q - (u_q^2 - v_q^2) G \sum_{q'} u_{q'} v_{q'} = 0;$$

$$N = 2 \sum_q v_q^2.$$

Введем корреляционную функцию

$$C = G \sum_{q'} u_{q'} v_{q'} \quad (17)$$

и после простых преобразований получим:

$$1 = \frac{G}{2} \sum_q \frac{1}{\sqrt{C^2 + \{E(q) - \lambda\}^2}}; \quad (18)$$

$$N = \sum_q \left\{ 1 - \frac{E(q) - \lambda}{\varepsilon(q)} \right\}; \quad (19)$$

$$v_q^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{E(q) - \lambda}{\varepsilon(q)} \right\}; \quad \varepsilon(q) = \sqrt{C^2 + \{E(q) - \lambda\}^2}. \quad (20)$$

3. Существует два типа возбужденных состояний (кроме ротационных). Для одного из них выполняются условия (9) — это квазичастичные возбуждения, для другого не выполняются — это вибрационные состояния. В работе [18] показано, что вибрационные состояния связаны с недиагональными частями матрицы плотности, введены недиагональные приращения $\delta\rho(q\sigma, q'\sigma')$, $\delta\Phi(q\sigma, q'\sigma')$ и для них получены уравнения. В [19] явно выделено среднее поле и уравнения сведены к следующему виду:

$$\begin{aligned} & [\varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2)] Z^{(\pm)}(q_1, q_2) - \omega Z^{(\mp)}(q_1, q_2) - \\ & - \sum_{q'_1, q'_2} G^{\xi}(q_1, q_2; q'_2, q'_1) v_{q_1 q_2}^{(\mp)} v_{q'_1 q'_2}^{(\mp)} Z^{(\pm)}(q'_1, q'_2) - \\ & - 2 \sum_{q'_1, q'_2} G^{\omega}(q_1, q_2; q'_2, q'_1) u_{q_1 q_2}^{(\pm)} u_{q'_1 q'_2}^{(\pm)} Z^{(\pm)}(q'_1, q'_2) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$u_{q_1, q_2}^{(\pm)} = u_{q_1} v_{q_2} \pm u_{q_2} v_{q_1}; \quad v_{q_1, q_2}^{(\pm)} = u_{q_1} u_{q_2} \pm v_{q_1} v_{q_2}. \quad (22)$$

При изучении возбужденных состояний сложных ядер следует иметь в виду, что взаимодействие G проявляется в двух каналах. Коллективные эффекты, связанные с квадрупольными, октупольными и другими колебаниями и с гигантскими мультипольными резонансами, генерируются взаимодействиями в канале частица — дырка, которые обозначены $G^{\omega}(q_1 q_2; q'_2 q'_1)$. Взаимодействия в канале частица — частица обозначены $G^{\xi}(q_1 q_2; q'_2 q'_1)$. Взаимодействия такого типа с суммарным моментом, равным нулю, генерируют парные корреляции сверхпроводящего типа. В ряде случаев учитываются взаимодействия в канале частица — частица с суммарным моментом, отличным от нуля. Слагаемые уравнений (21), содержащие $u_{q_1 q_2}^{\pm}$, описывают взаимодействия в канале частица — дырка, а члены, содержащие $v_{q_1 q_2}^{\pm}$, — взаимодействия в канале частица — частица.

При выводе уравнений (21) взаимодействие между квазичастицами взято в самом общем виде. В работе [19] показано, что все уравнения в нефеноменологических теориях, с помощью которых описываются вибрации ядра, являются частными случаями уравнений (21).

Отметим, что аналогичные (21) уравнения получены в работе [20]. В [19] уравнения (21) обобщены на случай внешнего поля и из них получены уравнения теории конечных ферми-систем [21].

В работе [22] из уравнений теории конечных ферми-систем выведены уравнения (21).

Квазичастично-фононная модель построена в рамках полумикроскопической теории ядра. В полумикроскопических теориях среднее поле и остаточные или эффективные взаимодействия не вычисляются, а задаются в определенном виде, исходя из совокупности наших знаний о строении атомного ядра. Поэтому в полумикроскопических теориях вычисляются не абсолютные, а относительные значения. Например, вычисляются энергии возбуждения, а не полные энергии ядра в основном и возбужденном состояниях, рассчитывается изменение энергии ядра с ростом параметра деформации и т. д.

Имеется много разных вариантов полумикроскопического описания. Мы используем один из них. Основные положения полумикроскопического описания ядерной структуры сформулируем следующим образом [23]:

1) используется для получения замкнутой системы уравнений для функций плотности и корреляционных функций метод Хартри — Фока — Боголюбова. Это главное приближение в ядерной задаче многих тел;

2) выбирается представление, где матрица плотности диагональна, а корреляционная функция имеет канонический вид. В этом представлении все взаимодействия между нуклонами в ядре сводятся к среднему полю и к взаимодействиям, приводящим к спариванию;

3) выделяется среднее поле, которое описывается потенциалом Саксона — Вудса, и постулируется, что выбор среднего поля соответствует упомянутому выше представлению для четно-четных ядер, лежащих в зоне β -стабильности. Среднее поле определяет многие свойства ядра непосредственно и позволяет проявиться действию остаточных сил;

4) определяются возбужденные состояния как одно-, двух-, трех- и т. д. квазичастичные состояния;

5) низколежащие вибрационные состояния связаны с недиагональными элементами матрицы плотности, для их описания вводятся мультиполь-мультипольные и спин-мультиполь-спин-мультипольные силы. Математическая трактовка основывается на разных вариантах метода приближенного вторичного квантования, разработанного Н. Н. Боголюбовым [24];

6) ротационные, квазичастичные и фононные возбужденные состояния связаны между собой кориолисовым взаимодействием и взаимодействием квазичастиц с фононами.

2. ГАМИЛЬТОНИАН МОДЕЛИ

1. В полумикроскопической теории ядра гамильтониан, описывающий различные типы ядерных движений, имеет следующий вид:

$$H = H_{av} + H_{pair} + T_{rot} + H_{cor} + H_Q + H_{\sigma Q} + H', \quad (23)$$

где H_{av} — среднее поле нейтронной и протонной систем; H_{pair} — взаимодействия, приводящие к парным корреляциям сверхпроводящего типа; T_{rot} — кинетическая энергия вращения; H_{cor} — кориолисово взаимодействие, описывающее связь внутреннего движения и вращения; H_Q — мультиполь-мультипольное взаимодействие; $H_{\sigma Q}$ — спин-мультиполь-спин-мультипольное взаимодействие; H' — другие взаимодействия, включающие, например, взаимодействие гамов-теллеровского типа.

Для описания состояний, структура которых связана с недиагональными частями матрицы плотности, вводятся остаточные взаимодействия. Центральное остаточное взаимодействие запишем в виде

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + V_\sigma(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)(\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}) + \{V_\tau(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + V_{\tau\sigma}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)(\sigma^{(1)}\sigma^{(2)})\}(\tau^{(1)}\tau^{(2)}) \quad (24)$$

и разложим его в ряд по сферическим функциям. В результате получим

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda} R_\lambda(r_1, r_2) \frac{4\pi}{2\lambda+1} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} (-1)^\mu \times \\ \times Y_{\lambda\mu}(\theta_1, \varphi_1) Y_{\lambda-\mu}(\theta_2, \varphi_2); \quad (25)$$

$$V_\sigma(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)(\sigma^{(1)}\sigma^{(2)}) = \sum_{s=0}^{\infty} R_s^\sigma(r_1, r_2) \frac{4\pi}{2s+1} \sum_{\lambda=s, s\pm 1}^{\lambda} (-1)^{s+1-\lambda} \times \\ \times \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} (-1)^\mu \{\sigma^{(1)}Y_s(\theta_1, \varphi_1)\}_{\lambda\mu} \{\sigma^{(2)}Y_s(\theta_2, \varphi_2)\}_{\lambda, -\mu}. \quad (26)$$

Сходный вид имеют разложения функций V_τ и $V_{\tau\sigma}$. Здесь

$$\{\sigma Y_s(\theta_1, \varphi_1)\}_{\lambda\mu} = \sum_{\rho=0, \pm 1}^s \sum_{p=-s}^s (1\rho s p | \lambda\mu) \sigma_\rho Y_{sp}(\theta_1, \varphi_1), \quad (27)$$

где $r_i, \theta_i, \varphi_i, \sigma^{(i)}$ определяют положение и спин частицы; функции $R_\lambda(r_1, r_2), R_s^\sigma(r_1, r_2)$ описывают радиальную зависимость. Таким образом, наиболее общий вид центрального потенциала дан рядами по мультиполям и спин-мультиполям.

Существование статической квадрупольной деформации ядер в области редкоземельных элементов и в области актиноидов приводит к выводу о важной роли квадруполь-квадрупольного взаимодействия. Та часть этого взаимодействия, которая не сводится к среднему полю, должна описывать взаимодействие между квази-частицами. Таким образом, часть остаточного взаимодействия H'' можно аппроксимировать членами мультиполь-мультипольного и спин-мультиполь-спин-мультипольного взаимодействий.

Радиальная часть взаимодействия выбирается по-разному. Для того чтобы вместо диагонализации матрицы высокого порядка иметь простое секулярное уравнение, необходимо взять функции $R_\lambda(r_1, r_2)$ и $R_s^\sigma(r_1, r_2)$ в факторизованном виде:

$$R_\lambda(r_1, r_2) = \kappa_0^{(\lambda)} R(r_1) R(r_2); \quad R_s^\sigma(r_1, r_2) = \kappa_{\sigma 0}^{(s)} R(r_1) R(r_2).$$

Весьма распространенным является выбор $R_\lambda(r_1, r_2)$ и $R_s^\sigma(r_1, r_2)$ в виде

$$\begin{aligned} R_\lambda(r_1, r_2) &= \kappa_0^{(\lambda)} r_1^\lambda r_2^\lambda; \\ R_s^\sigma(r_1, r_2) &= \kappa_{\sigma 0}^{(s)} r_1^s r_2^s. \end{aligned} \quad (28)$$

В соответствующие разложения функций $V_\tau(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ и $V_{\tau\sigma}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ входят константы $\kappa_1^{(\lambda)}$ и $\kappa_{\sigma 1}^{(s)}$. Нейтрон-нейтронная κ_{nn} , протон-протонная κ_{pp} и нейтрон-протонная κ_{np} константы связаны с изоскалярной κ_0 и изовекторной κ_1 константами следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_{nn} &= \kappa_{pp} = \kappa_0 + \kappa_1; \\ \kappa_{np} &= \kappa_0 - \kappa_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Взаимодействие (28) оказывается наиболее сильным, когда обе частицы находятся вблизи поверхности ядра, при $r > R_0$ соответствующие одночастичные матричные элементы очень быстро уменьшаются с ростом r и сила взаимодействия резко спадает. Внутри ядра сила взаимодействия постепенно спадает. При изучении когерентных эффектов часто $r_1 = r_2$ и радиальная часть принимает вид $R_\lambda = \kappa^{(\lambda)} r^{2\lambda}$.

Таким образом, взаимодействие (28) имеет наибольшую силу вблизи поверхности ядра. Поэтому результаты расчетов с взаимодействием (28) низколежащих вибрационных состояний близки к результатам вычислений с поверхностным δ -взаимодействием [25], а мультипольных гигантских резонансов — с результатами расчетов с новым взаимодействием Скирма [26].

Расчеты ядерных характеристик, проведенные с различными остаточными силами, дают сходные результаты. Это указывает на то, что при вычислении матричных элементов детальная радиальная зависимость не проявляется сильно из-за действия одночастич-

ных волновых функций. В работе [27] показано, что двухчастичная переходная плотность действует как фильтр, оставляя определенные фурье-компоненты эффективных сил. В этой работе продемонстрировано, что остаточные взаимодействия, используемые в некотором ограниченном конфигурационном пространстве, проявляются одинаково, если близки их фурье-компоненты в сравнительно узкой области переданных импульсов. Можно сделать вывод, что использование радиальной зависимости остаточных сил в виде (28) оправданно. Нет убедительных аргументов в пользу использования какой-либо другой, но вполне определенной радиальной зависимости.

2. Перейдем к построению гамильтониана квазичастично-фононной модели ядра, предназначенной для вычисления малоквазичастичных компонент волновых функций сферических и деформированных сложных ядер при низких, промежуточных и высоких энергиях возбуждения. Для определенности приведем формулы для деформированных ядер, однако их однозначно можно переписать и для сферических ядер.

Как известно, ротационное движение и его связь с квазичастичными и фононными возбуждениями играют важную роль в атомных ядрах. Описание вращения, особенно с большими угловыми моментами, детально изложено, например, в работах [28—30]. В квазичастично-фононной модели в большинстве случаев пренебрегается связью с вращением, а само вращение описывается грубо. Это связано с тем, что не рассматриваются высокие состояния с очень большими угловыми моментами. При изучении низколежащих состояний связь с вращением можно учесть в каждом конкретном случае. В состояниях с небольшими моментами при промежуточной и высокой энергиях возбуждения связь с вращением не приводит к значительному перераспределению силы малоквазичастичных компонент волновых функций. Поэтому в модельный гамильтониан явно не вводим кинетическую энергию вращения и кориолисово взаимодействие, их можно добавлять в необходимых случаях.

Для построения общего вида гамильтониана модели воспользуемся формулами, данными в работе [16]. Из гамильтониана (23) выберем нужные нам члены и запишем их в виде

$$H_M = H_p + H_Q + H_{\sigma Q}, \quad (30)$$

где

$$H_p = H_0 + H_{pp} \quad (31)$$

включает взаимодействия, приводящие к парным корреляциям сверхпроводящего типа, и взаимодействия в канале частица —

частица с моментом, отличным от нуля;

$$H_0 = H_0(n) + H_0(p); \quad (32)$$

$$H_0(n) = \sum_s \varepsilon(s) B(s, s) + H_0^B(n) + H_0^r(n); \quad (33)$$

здесь (см. [16, с. 207])

$$H_0^B(n) = -\frac{G_N}{2} \sum_{s, s'} [u_s^2 A^+(s, s) - v_s^2 A(s, s)] \times \\ \times [u_{s'}^2 A(s', s') - v_{s'}^2 A^+(s', s')]; \quad (34)$$

$$H_0^r(n) = -\frac{G_N}{\sqrt{2}} \sum_{s, s'} (u_s^2 - v_s^2) u_{s'} v_{s'} [A^+(s, s) B(s', s') + \\ + B(s', s') A(s, s)]. \quad (35)$$

Мы используем обозначения

$$A(q, q') = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \sigma \alpha_{q'\sigma} \alpha_{q\sigma} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \alpha_{q\sigma} \alpha_{q'\sigma}; \quad (36)$$

$$B(q, q') = \sum_{\sigma} \alpha_{q\sigma}^+ \alpha_{q'\sigma} \quad \text{или} \quad \sum_{\sigma} \sigma \alpha_{q'\sigma}^+ \alpha_{q\sigma}, \quad (37)$$

где $\alpha_{q\sigma}^+$ — оператор рождения квазичастицы; одночастичное состояние характеризуем квантовыми числами $s\sigma$ для нейтронной, $r\sigma$ для протонной и $q\sigma$ для обеих систем ($\sigma = \pm 1$).

Взаимодействие в канале частица — частица с моментом, отличным от нуля, запишем в виде

$$H_{pp} = - \sum_{\lambda} \frac{G_{\lambda}}{2} \sum_{\mu} P_{\lambda\mu}^+ P_{\lambda\mu}; \quad (38)$$

$$P_{\lambda\mu} = \sum_{\substack{qq' \\ \sigma\sigma'}} \langle q\sigma | \tilde{f}^{\lambda\mu} | q'\sigma' \rangle a_{q'\sigma'}^+ a_{q\sigma}^+ = \\ = \sum_{qq'} \tilde{f}^{\lambda\mu}(q, q') \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (A^+(qq') + A(qq')) v_{qq'}^{(-)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (A^+(qq') - A(qq')) v_{qq'}^{(+)} - B(qq') (u_{qq'}^{(+)} + u_{qq'}^{(-)}) \right\}. \quad (39)$$

Мультиполь-мультипольное взаимодействие имеет вид

$$H_Q = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu \geq 0} \{ (\kappa_0^{(\lambda)} + \kappa_1^{(\lambda)}) [Q_{\lambda\mu}^+(n) Q_{\lambda\mu}(n) + Q_{\lambda\mu}^+(p) Q_{\lambda\mu}(p)] + \\ + (\kappa_0^{(\lambda)} - \kappa_1^{(\lambda)}) [Q_{\lambda\mu}^+(n) Q_{\lambda\mu}(p) + Q_{\lambda\mu}^+(p) Q_{\lambda\mu}(n)] \}, \quad (40)$$

где

$$Q_{\lambda\mu}(n) = \sum_{\substack{ss' \\ \sigma\sigma'}} \langle s\sigma | f^{\lambda\mu} | s'\sigma' \rangle a_{s\sigma}^+ a_{s'\sigma'} \approx \\ \approx \sum_{ss'} f^{\lambda\mu}(ss') \left\{ u_{ss'}^{(+)} (A(ss') + A^+(ss')) \frac{1}{\sqrt{2}} + v_{ss'}^{(-)} B(ss') \right\}. \quad (41)$$

Здесь

$$f^{\lambda\mu} = \frac{r^\lambda}{\sqrt{2(1+\delta_{\mu 0})}} (Y_{\lambda\mu} + (-1)^\mu Y_{\lambda,-\mu})$$

и в отличие от работы [16] не делается различия между матричными элементами $f^{\lambda\mu}(q, q')$ и $\bar{f}^{\lambda\mu}(qq')$.

Спин-мультиполь-спин-мультипольное взаимодействие имеет вид

$$H_{\sigma Q} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \sum_{s=\lambda, \lambda\pm 1} \{ (\kappa_{\sigma 0}^{(s)} + \kappa_{\sigma 1}^{(s)}) [T_{\lambda\mu s}^+(n) T_{\lambda\mu s}(n) + \\ + T_{\lambda\mu s}^+(p) T_{\lambda\mu s}(p)] + (\kappa_{\sigma 0}^{(s)} - \kappa_{\sigma 1}^{(s)}) [T_{\lambda\mu s}^+(n) T_{\lambda\mu s}(p) + T_{\lambda\mu s}^+(p) T_{\lambda\mu s}(n)] \}, \quad (42)$$

где

$$T_{\lambda\mu s}(n) = \sum_{s_2 s_2'} \langle s_2\sigma | r^s [\{ \sigma \mathbf{Y}_s \}_{\lambda\mu} + (-1)^\mu \{ \sigma \mathbf{Y}_s \}_{\lambda, -\mu}] | s_2'\sigma' \rangle a_{s_2\sigma}^+ a_{s_2'\sigma'} \approx \\ \approx \sum_{s_2 s_2'} f_s^{\lambda\mu}(s_2 s_2') \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} u_{s_2 s_2'}^{(-)} [\mathfrak{A}(s_2 s_2') + \mathfrak{A}^+(s_2 s_2')] + v_{s_2 s_2'}^{(+)} \mathfrak{B}(s_2, s_2') \right\}. \quad (43)$$

Здесь

$$\mathfrak{A}(ss') = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \alpha_{s'\sigma} \alpha_{s-\sigma} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \sigma \alpha_{s\sigma} \alpha_{s'\sigma}; \quad (44)$$

$$\mathfrak{B}(ss') = \sum_{\sigma} \sigma \alpha_{s+\sigma}^+ \alpha_{s'-\sigma} \text{ или } \sum_{\sigma} \alpha_{s-\sigma}^+ \alpha_{s'\sigma}. \quad (45)$$

3. ОДНОФОНОННЫЕ СОСТОЯНИЯ

1. Рассмотрим однофоновые состояния, генерируемые мультиполь-мультипольными силами в канале частица — дырка. Возьмем следующую часть модельного гамильтониана:

$$H_v = \sum_q \varepsilon(q) B(q, q) + H_0^{\beta} + H_Q^v, \quad (46)$$

где H_Q^v — часть H_Q (40), в которой отсутствуют члены, описывающие взаимодействия квазичастиц с фононами.

Введем оператор рождения фонана

$$Q_i^+ = \frac{1}{2} \sum_{qq'} \{ \Psi_{qq'}^t A^+ (qq') - \varphi_{qq'}^t A (qq') \}; \quad (47)$$

здесь $t = \lambda\mu i$, причем i — номер состояния с данным $\lambda\mu$. После простых преобразований [16] получим

$$\begin{aligned} H_v = \sum_q \varepsilon(q) B(qq) - \frac{1}{4} \delta_{\lambda\mu, 20} \sum_{ii'} \left\{ G_N \sum_{ss'} [(u_s^2 - v_s^2)(u_{s'}^2 - v_{s'}^2) g_{ss}^{20i} \times \right. \\ \times g_{s's'}^{20i} + w_{ss}^{20i} w_{s's'}^{20i}] + G_z \sum_{rr'} [(u_r^2 - v_r^2)(u_{r'}^2 - v_{r'}^2) g_{rr}^{20i} g_{r'r'}^{20i} + \\ \left. + w_{rr}^{20i} w_{r'r'}^{20i}] \right\} Q_{20i}^+ Q_{20i} - \frac{1}{2} \sum_{it'} \left\{ (\kappa_0^{(\lambda)} + \kappa_1^{(\lambda)}) \times \right. \\ \times \left[\sum_{\substack{ss' \\ s_2 s_2'}} u_{ss'}^{(+)} u_{s_2 s_2'}^{(+)} f^t(ss') g_{ss'}^t f^{t'}(s_2 s_2') g_{s_2 s_2'}^{t'} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{rr' \\ r_2 r_2'}} u_{rr'}^{(+)} u_{r_2 r_2'}^{(+)} f^t(rr') g_{rr'}^t f^{t'}(r_2 r_2') g_{r_2 r_2'}^{t'} \right] + (\kappa_0^{(\lambda)} - \kappa_1^{(\lambda)}) \sum_{\substack{ss' \\ rr'}} u_{ss'}^{(+)} u_{rr'}^{(+)} \times \\ \left. \times [f_{ss'}^t g_{ss'}^t f_{rr'}^{t'} g_{rr'}^{t'} + f_{(ss')}^{t'} g_{ss'}^{t'} f_{(rr')}^t g_{rr'}^t] \right\} Q_i^+ Q_{t'} \quad (48) \end{aligned}$$

где $g_{qq'}^t = \Psi_{qq'}^t + \varphi_{qq'}^t$; $w_{qq'}^t = \Psi_{qq'}^t - \varphi_{qq'}^t$; матричный элемент $f^t(qq') \equiv f^{\lambda\mu}(qq')$ не зависит от i .

Волновая функция однофононного состояния имеет вид

$$Q_i^+ \Psi_0; \quad (49)$$

здесь волновая функция основного состояния Ψ_0 четно-четного ядра является фононным вакуумом

$$Q_t \Psi_0 = 0. \quad (50)$$

Условие нормировки (49) записывается так:

$$\sum_{qq'} g_{qq'}^t w_{qq'}^{t'} = 2\delta_{tt'}. \quad (51)$$

Следуя [16], энергии ω_t однофононных состояний с фиксированными значениями $\lambda\mu$ или K^π найдем с помощью вариационного принципа

$$\delta \{ \langle Q_t H_v Q_t^+ \rangle - \omega_t [\sum_{qq'} g_{qq'}^t w_{qq'}^{t'} - 2] / 2 \} = 0. \quad (52)$$

В результате преобразований получим секулярное уравнение в виде

$$\begin{vmatrix} (\kappa_0^{(\lambda)} + \kappa_1^{(\lambda)}) X^t(n) - 1 & (\kappa_0^{(\lambda)} - \kappa_1^{(\lambda)}) X^t(n) \\ (\kappa_0^{(\lambda)} - \kappa_1^{(\lambda)}) X^t(p) & (\kappa_0^{(\lambda)} + \kappa_1^{(\lambda)}) X^t(p) - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (53)$$

совпадающем с (8.134) в работе [16]. Здесь

$$X^t(n) = 2 \sum_{ss'} \frac{f^t(ss') \tilde{f}^t(ss') u_{ss'}^2 \varepsilon(ss')}{\varepsilon^2(ss') - \omega_g^2}, \quad (54)$$

где

$$\tilde{f}^t(ss') = f^t(ss') - \frac{\Gamma_n^t(s)}{\gamma_n^g} \delta_{s,s'}; \quad \varepsilon(ss') = \varepsilon(s) + \varepsilon(s'); \quad (55)$$

$$\gamma_n^t = \sum_{ss'} \frac{4C_n^2 - \omega_t^2 + 4\varepsilon(s)\varepsilon(s')}{\varepsilon(s)(4\varepsilon^2(s) - \omega_t^2)\varepsilon(s')(4\varepsilon^2(s') - \omega_t^2)}; \quad (56)$$

$$\Gamma_n^t(s) = \sum_{s_2 s_2'} \frac{f^t(s_2 s_2') [4C_n^2 - \omega_t^2 + 4\varepsilon(s_2)\varepsilon(s_2') - 4\varepsilon(s)\varepsilon(s_2) + 4\varepsilon(s)\varepsilon(s_2')]}{\varepsilon(s_2)[4\varepsilon^2(s_2) - \omega_t^2]\varepsilon(s_2')[4\varepsilon^2(s_2') - \omega_t^2]}; \quad (57)$$

$\varepsilon(s) = E(s) - \lambda_n$. Из (55) видно, что для $\lambda_n \neq 20$ величина $f^t(ss')$ совпадает с $f^t(ss')$.

Уравнение (53) можно записать в виде

$$\mathcal{F}(\omega) = \kappa_0^{(\lambda)} \kappa_1^{(\lambda)} (X^t(n) - X^t(p))^2 - (1 - \kappa_0^{(\lambda)} X^t)(1 - \kappa_1^{(\lambda)} X^t) = 0, \quad (58)$$

где $X^t = X^t(n) + X^t(p)$.

Заметим, что влияние константы $\kappa_1^{(\lambda)}$ на первые однофононные состояния было исследовано в работе [31], где было показано, что введение $\kappa_1^{(\lambda)}$ приводит к перенормировке константы $\kappa_0^{(\lambda)}$ без существенного изменения структуры состояния.

При нахождении функций g_{qq}^t и w_{qq}^t воспользуемся условием нормировки (51) и после громоздких выкладок получим [32]

$$g_{rr'}^t = \sqrt{\frac{2}{Y_t}} y_p^t \frac{\tilde{f}^t(rr') u_{rr'}^t \varepsilon(rr')}{\varepsilon^2(rr') - \omega_t^2}; \quad (59)$$

$$w_{rr'}^t = \sqrt{\frac{2}{Y_t}} y_p^t \left\{ \frac{\tilde{f}^t(rr') u_{rr'}^t \omega_t}{\varepsilon^2(rr') - \omega_t^2} - \delta_{r,r'} \frac{C_p \Xi_p^t}{\varepsilon(r) \omega_t \gamma_p^t} \right\}, \quad (60)$$

где

$$y_p^t = \frac{(\kappa_0^{(\lambda)} - \kappa_1^{(\lambda)}) X^t(n)}{1 - (\kappa_0^{(\lambda)} + \kappa_1^{(\lambda)}) X^t(p)}; \quad (61)$$

$$\Xi_p^t = \sum_{rr'} \frac{f^t(rr')}{\varepsilon(r)(4\varepsilon^2(r) - \omega_t^2)} \frac{4C_p^2 - \omega_t^2 + 4\varepsilon(r)\varepsilon(r')}{\varepsilon(r')(4\varepsilon^2(r') - \omega_t^2)}. \quad (62)$$

Выражения для $g_{ss'}^t$, $w_{ss'}^t$ имеют аналогичный вид с заменой C_p , Ξ_p^t , γ_p^t , y_p^t на соответствующие величины для нейтронов C_p , Ξ_n^t , γ_n^t , $y_n^t \equiv 1$. Здесь

$$Y_t = Y_t(n) + (y_p^t)^2 Y_t(p) = \frac{1}{4} \frac{y_p^t}{\kappa_0^{(\lambda)} - \kappa_1^{(\lambda)}} \frac{\partial \mathcal{F}(\omega)}{\partial \omega}; \quad (63)$$

$$Y_t(n) = \sum_{ss'} \frac{(\tilde{f}^t(ss') u_{ss'}^{(+)})^2 \varepsilon(ss') \omega_t}{[\varepsilon^2(ss') - \omega_t^2]^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial X^t(n)}{\partial \omega}; \quad (64)$$

выражение для $Y_t(p)$ аналогично (64). Если изовекторная компонента сил отсутствует ($\kappa_1^{(\lambda)} = 0$), то $y_p^t \equiv 1$ и все выражения (59) — (64) принимают вид, приведенный в гл. 8 работы [16], а секулярное уравнение таково:

$$1 - \kappa_0^{(\lambda)} X^t(\omega_i) = 0. \quad (65)$$

2. При рассмотрении спин-мультипольных фотонов степени s гамильтониан системы возьмем в виде

$$\begin{aligned} H_v^s = \sum_q \varepsilon(q) B(qq) = & -\frac{1}{2} \sum_{it'} \left\{ (\kappa_{\sigma 0}^{(s)} + \kappa_{\sigma 1}^{(s)}) \left[\sum_{\substack{s_1 s_1' \\ s_2 s_2'}} u_{s_1 s_1'}^{(-)} u_{s_2 s_2'}^{(-)} \times \right. \right. \\ & \times f_s^t(s_1 s_1') f_s^{t'}(s_2 s_2') g_{ss'}^t g_{s_2 s_2'}^{t'} + \sum_{\substack{rr' \\ r_2 r_2'}} u_{rr'}^{(-)} u_{r_2 r_2'}^{(-)} f_s^t(rr') f_s^{t'}(r_2 r_2') g_{rr'}^t g_{r_2 r_2'}^{t'} \left. \right] + \\ & + (\kappa_{\sigma 0}^{(s)} - \kappa_{\sigma 1}^{(s)}) \sum_{\substack{s_1 s_1' \\ rr'}} u_{s_1 s_1'}^{(-)} u_{rr'}^{(-)} [f_s^t(s_1 s_1') g_{s_1 s_1'}^t f_s^{t'}(rr') g_{rr'}^{t'} + \\ & \left. + f_s^{t'}(s_1 s_1') g_{s_1 s_1'}^{t'} f_s^t(rr') g_{rr'}^t \right] \} Q_i^t Q_{it'}. \end{aligned} \quad (66)$$

В этом случае секулярное уравнение имеет вид

$$\kappa_{\sigma 0}^{(s)} \kappa_{\sigma 1}^{(s)} [S^t(n) - S^t(p)]^2 - (1 - \kappa_{\sigma 0}^{(s)} S^t)(1 - \kappa_{\sigma 1}^{(s)} S^t) = 0, \quad (67)$$

где

$$S^t = S^t(n) + S^t(p); \quad (68)$$

$$S^t(n) = 2 \sum_{ss'} \{ (f^t(ss') u_{ss'}^{(-)})^2 \varepsilon(ss') / [\varepsilon^2(ss') - \omega_t^2] \}. \quad (69)$$

Выражения для $g_{qq'}^t$, $w_{qq'}^t$ и Y_t^s получаются из (59), (60), (63) заменой $u_{qq'}^{(+)}$ и $f^t(qq')$ на $u_{qq'}^{(-)}$ и $f_s^t(qq')$, а y_p^{ts} — заменой в (61) $X^t(n)$ на $S^t(n)$ и $X^t(p)$ на $S^t(p)$.

При одновременном учете мультиполь-мультипольных и спин-мультиполь-спин-мультипольных сил в канале частица — дырка в случае $\lambda = s$ для $\kappa_1^{(\lambda)} = \kappa_{\sigma 1}^{(s)} = 0$ имеем

$$(1 - \kappa_0^{(\lambda)} X^t) (1 - \kappa_{\sigma 0}^{(s)} S^t) = \kappa_0^{(\lambda)} \kappa_{\sigma 0}^{(s)} (W^t)^2, \tag{70}$$

где

$$W^t = 2 \sum_{q, q'} [f_s^t(qq') f^t(qq') u_{qq'}^{(+)} u_{qq'}^{(-)} \omega_t / (\varepsilon^2(qq') - \omega_i^2)]. \tag{71}$$

3. Рассмотрим однофононные состояния для одновременного учета мультиполь-мультипольных сил в каналах частица — частица и частица — дырка. Введем операторы фононов и соответствующую часть гамильтониана (34) для $G_\lambda \equiv G_\lambda(n) = G_\lambda(p) = = G_\lambda(pn)$ запишем в виде

$$H_v^{pp} = -\frac{G_\lambda}{2} \sum_i \left\{ \left(\sum_{qq'} \tilde{f}^{\lambda\mu}(qq') g_{qq'}^{\lambda\mu i} v_{qq'}^{(-)} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sum_{qq'} \tilde{f}^{\lambda\mu}(qq') w_{qq'}^{\lambda\mu i} v_{qq'}^{(+)} \right)^2 \right\} Q_i^+ Q_i. \tag{72}$$

При одновременном учете мультиполь-мультипольных сил в каналах частица — частица и частица — дырка секулярное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} X^{\lambda\mu i} - \frac{1}{\kappa^{(\lambda)}} & \mathcal{L}_1^{\lambda\mu i} & \mathcal{L}_2^{\lambda\mu i} \\ \mathcal{L}_1^{\lambda\mu i} & M_{\lambda\mu i}^{(-)} - \frac{1}{G_\lambda} & M_{\lambda\mu i} \\ \mathcal{L}_2^{\lambda\mu i} & M_{\lambda\mu i} & M_{\lambda\mu i}^{(+)} - \frac{1}{G_\lambda} \end{vmatrix} = 0, \tag{73}$$

где

$$M_{\lambda\mu i}^{(-)} = 2 \sum_{q_1 q_2} \{ (\tilde{f}^{\lambda\mu}(q_1 q_2) v_{q_1 q_2}^{(-)})^2 \varepsilon(q_1 q_2) / [\varepsilon^2(q_1 q_2) - \omega_i^2] \}; \tag{74}$$

$$M_{\lambda\mu i}^{(+)} = 2 \sum_{q_1 q_2} \{ (\tilde{f}^{\lambda\mu}(q_1 q_2) v_{q_1 q_2}^{(+)})^2 \varepsilon(q_1 q_2) / [\varepsilon^2(q_1 q_2) - \omega_i^2] \}; \tag{75}$$

$$M_{\lambda\mu i} = 2 \sum_{q_1 q_2} \{ (\tilde{f}^{\lambda\mu}(q_1 q_2) v_{q_1 q_2}^{(-)} v_{q_1 q_2}^{(+)})^2 \omega_i / [\varepsilon^2(q_1 q_2) - \omega_i^2] \}; \tag{76}$$

$$\mathcal{L}_1^{\lambda\mu i} = 2 \sum_{q_1 q_2} \{ f^{\lambda\mu}(q_1 q_2) u_{q_1 q_2}^{(+)} \tilde{f}^{\lambda\mu}(q_1 q_2) v_{q_1 q_2}^{(-)} \varepsilon(q_1 q_2) / [\varepsilon^2(q_1 q_2) - \omega_i^2] \}; \tag{77}$$

$$\mathcal{L}_2^{\lambda\mu i} = 2 \sum_{q_1 q_2} \{ f^{\lambda\mu}(q_1 q_2) u_{q_1 q_2}^{(+)} \tilde{f}^{\lambda\mu} v_{q_1 q_2}^{(+)} \omega_i / [\varepsilon^2(q_1 q_2) - \omega_i^2] \}. \tag{78}$$

Формулу (73) нетрудно получить из уравнений (21) заменой G^ω и G^ξ на выражения для H_ν из (48) и H_{pp}^ν из (72). Аналогичные уравнения для сферических ядер получены в работе [33].

4. ФОНОННОЕ ОПИСАНИЕ

1. Секулярное уравнение, определяющее энергии однофононных состояний с фиксированным значением K^π ($K^\pi \neq 0^+$), для мультиполь-мультипольных сил принимает следующий простой вид:

$$2\kappa_0^{(\lambda)} \sum_{qq'} \frac{(f^{\lambda\mu}(qq') u_{qq'}^{(\pm)})^2 \varepsilon(qq')}{\varepsilon^2(qq') - \omega_i^2} = 1. \quad (79)$$

Для каждого решения ω_i уравнения (79) волновая функция имеет вид (49). Число корней ω_i этого уравнения равно числу двухквaziчастичных состояний с этими же значениями K^π в нейтронной и протонной системах. Энергии двухквaziчастичных состояний суть полюса уравнения (79). Если корень ω_i удален от соответствующего полюса, то состояние является коллективным. По мере приближения корня к полюсу состояние становится двухквaziчастичным. В большинстве случаев корни ω_i довольно близки к полюсам $\varepsilon(qq')$, а состояния слабоколлективизированы.

В секулярном уравнении (79) учтено взаимодействие между квазичастицами в канале частица — дырка. Если q — частичное состояние, q' — дырочное состояние, то $(u_{qq'}^{(\pm)})^2 \gtrsim 0,5$, в большинстве случаев $(u_{qq'}^{(\pm)})^2$ близко к единице. Если оба одночастичных состояния q и q' являются или частичными, или дырочными, то $(u_{qq'}^{(\pm)})^2$ очень малы и такие состояния проявляются как чистые двухквaziчастичные состояния. Эти состояния фактически не оказывают влияния на коллективные свойства ядер. Чтобы учесть роль таких состояний, необходимо ввести взаимодействия в канале частица — частица.

Таким образом, корни секулярного уравнения (79) и соответствующие однофононные волновые функции описывают полную систему состояний с данным значением K^π . Среди них имеются коллективные, слабоколлективные и двухквaziчастичные состояния.

Секулярные уравнения типа (79) широко используются для вычисления энергии первых квадрупольных и октупольных коллективных состояний. Изоскалярные константы $\kappa_0^{(\lambda)}$ фиксируются требованием близости рассчитанных и экспериментальных значений энергий первых состояний с соответствующими значениями K^π или I^π . В деформированных ядрах одна и та же константа $\kappa_0^{(\lambda)}$ используется для описания однофононных состояний всех ядер

в каждой зоне по A [34]. Изучение низколежащих состояний позволяет фиксировать параметры потенциала Саксона — Вудса, константы спаривания, изоскалярные константы квадруполь-квадрупольного $\kappa_0^{(2)}$ и октуполь-октупольного $\kappa_0^{(3)}$ взаимодействий. Изовекторные константы $\kappa_1^{(\lambda)}$ определяются из энергий изовекторных резонансов. Одно и то же отношение $\kappa_0^{(\lambda)}/\kappa_1^{(\lambda)}$ используется для больших групп деформированных и сферических ядер.

2. В квазичастично-фононной модели ядра проводится обобщение определения фононов. На языке фононов описываются как коллективные или слабоколлективные однофононные, так и двухквазичастичные состояния. Это обобщение проводится по двум линиям: 1) вычисляются все (а не только первые) корни секулярных уравнений типа (79) и их волновые функции трактуются как однофононные; 2) для описания однофононных состояний с любыми значениями K^π в деформированных ядрах и любыми I^π в сферических ядрах вводятся мультиполь-мультипольные и спин-мультиполь-спин-мультипольные силы с любыми λ и s , в том числе с большими мультипольностями. Трактовка всех состояний с фиксированными значениями K^π или I^π как однофононных не вносит никаких трудностей, если фиксированы константы $\kappa_0^{(\lambda)}$, $\kappa_1^{(\lambda)}$ в уравнении (53) или константы $\kappa_{\sigma_0}^{(s)}$, $\kappa_{\sigma_1}^{(s)}$ в уравнении (67). В деформированных ядрах нет видимой необходимости для учета взаимодействий в канале частица — частица, кроме описания состояний с $K^\pi = 0^+$. В сферических ядрах для описания 0^+ -и ряда 2^+ -состояний следует учитывать взаимодействия в канале частица — частица и поэтому решать секулярное уравнение типа (73) (см. [33]).

Применение уравнений типа (53), (67) и волновых функций (49) для описания состояний в деформированных ядрах с $K^\pi = 1^+$, 3^+ , 4^+ , 5^+ и 4^- , 5^- , 6^- , ... в сферических ядрах с соответствующими значениями I^π требует введения новых констант $\kappa_0^{(\lambda)}$, $\kappa_1^{(\lambda)}$, $\kappa_{\sigma_0}^{(s)}$, $\kappa_{\sigma_1}^{(s)}$. При фиксировании этих констант имеется значительный произвол [35]. Он связан с тем, что экспериментально очень слабо изучены неротационные состояния высокой мультипольности. Нет ответа на вопрос: имеются ли сильноколлективизированные состояния высокой мультипольности? Если имеются, то где они расположены? Следует отметить, что если существуют такие состояния, то их трудно обнаружить экспериментально. Несомненно, для констант $\kappa_0^{(\lambda)}$, $\kappa_{\sigma_0}^{(s)}$ имеется верхний предел. В четно-четных ядрах имеется много низколежащих состояний с K^π или I^π , равными 1^+ , 3^+ , 4^- , ..., и выбор $\kappa_0^{(\lambda)}$, $\kappa_{\sigma_0}^{(s)}$ ограничен тем, что такие состояния не должны сильно опускаться.

При изучении состояний с высокой мультипольностью нужно иметь в виду, что наряду с максимумом при энергии, где преоб-

ладают полюса, соответствующие матричным элементам с $\lambda = \Delta N$, должны быть максимумы при более низких энергиях, где преобладают полюса, соответствующие матричным элементам с $\Delta N < \lambda$. Например, в [36] экспериментально обнаружены низкоэнергетические октупольные резонансы с энергией 5—10 *Мэв* в ряде сферических и деформированных ядер, в волновых функциях которых преобладают матричные элементы с $\Delta N = 1$. Интересно, что расчеты, проведенные в [37, 38], без какой-либо подгонки подтвердили существование низкоэнергетических октупольных резонансов в сферических и деформированных ядрах.

Для деформированных ядер необходимо учитывать следующие обстоятельства: мультиполь-мультипольные взаимодействия с большими λ описывают фононы не только с $\lambda = K$, но и с $K < \lambda$. Поэтому фононы с фиксированным K определяются мультиполь-мультипольными силами с $\lambda = K, K + 2, K + 4, \dots$. Константы $\kappa_0^{(\lambda)}$ для больших λ должны быть выбраны так, чтобы не было сильного изменения состояний с $K < \lambda$, которые определяются взаимодействием с меньшей мультипольностью λ . Например, изучая $K^\pi = 2^+$ -состояния, можно дополнительно учитывать мультиполь-мультипольные силы с $\lambda = 4, 6, \dots$. Константы $\kappa_0^{(4)}, \kappa_0^{(6)}$ должны быть взяты такими, чтобы они сильно не изменяли энергию и структуру нижайших $K^\pi = 2^+$ -состояний, определенных силами с $\lambda = 2$. Не имеется экспериментальных указаний на одновременное влияние на однофононные состояния сил с разными значениями λ . Можно условиться, что ввиду произвола, связанного с введением взаимодействий в ядрах, при изучении состояний с определенным K^π используются мультиполь-мультипольные (или спин-мультиполь-спин-мультипольные) силы только с одним значением λ . Чтобы вычислить величины типа $B(E\lambda)$, необходимо учесть такие переходы на ротационные состояния с $I = \lambda$ и $K < \lambda$, так как они дают когерентный вклад.

Если учитывать одновременно мультипольные и спин-мультипольные силы, то секулярное уравнение будет иметь более сложный вид (70). Исследования показали, что влияние спин-мультипольных сил на первые квадрупольные и октупольные состояния в деформированных и особенно в сферических ядрах невелико. Нет экспериментальных указаний на проявление спин-мультипольных сил в этих состояниях. Ввиду произвола в выборе взаимодействия можно считать, что нет необходимости одновременного учета мультипольных и спин-мультипольных сил при вычислении характеристик однофононных состояний.

Можно утверждать, что при нахождении энергий однофононных состояний нет необходимости решать секулярные уравнения (21), а следует ограничиться решением уравнений типа (53), (67) и в отдельных случаях уравнения (73).

3. При построении модельного гамильтониана имеется значи-

тельный произвол. Он связан как с формой потенциала среднего поля, так и с видом остаточных сил. Поэтому можно ввести некоторые ограничения на описание однофононных состояний. В дальнейшем, если появятся соответствующие экспериментальные данные или веские теоретические соображения, то часть этих ограничений можно будет снять.

Сформулируем следующие правила описания однофононных состояний с фиксированными значениями K^π в деформированных ядрах и I^π в сферических ядрах.

1. Для нахождения энергий решаются: а) секулярные уравнения (53) с мультиполь-мультипольными силами с минимальным значением λ и б) секулярные уравнения (67) со спин-мультиполь-спин-мультипольными силами с минимальными значениями s , если или нет соответствующих мультипольных сил, или они более высокой мультипольности.

2. Не учитываются одновременно силы разной мультипольности или мультипольные и спин-мультипольные силы.

3. В деформированных ядрах при вычислении $B(E, \lambda)$, спектроскопических факторов и других функций рассчитываются переходы на ротационные состояния, т. е. на все состояния с $I = \lambda$ и различными значениями K .

4. Учитывается взаимодействие в канале частица — дырка. Взаимодействие в канале частица — частица принимается во внимание при вычислении: а) 0^+ -состояний во всех ядрах и б) 2^+ -состояний в отдельных сферических ядрах [уравнение типа (73)].

5. Изоскалярные константы $\kappa_0^{(\lambda)}$ для $\lambda < 4$ определяются из энергии первого соответствующего состояния, для $\lambda \geq 4$ берутся настолько малыми, чтобы соответствующие первые состояния не опускались слишком низко и не были сильно коллективизированными.

6. Соотношение $\kappa_1^{(\lambda)}/\kappa_0^{(\lambda)}$ определяется: а) из положения соответствующего изовекторного резонанса и б) из феноменологических оценок.

В отдельных случаях секулярные уравнения можно усложнить для исключения возникающих духовых состояний. Полнота фононного пространства подтверждается хорошим согласием рассчитанной плотности ядерных состояний [39] с экспериментальными данными при энергии связи нейтрона B_n .

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КВАЗИЧАСТИЦ С ФОНОНАМИ

1. В квазичастично-фононной модели ядра все двухквазичастичные и вибрационные состояния представлены через операторы фононов. При отсутствии взаимодействия между фононами вся совокупность неротационных состояний четно-четного ядра записывается как ряд одно-двух- и n -фононных состояний. Совокуп-

ность неротационных состояний нечетного ядра представляется как ряд одноквазичастичных состояний, состояний квазичастица плюс фонов, состояний квазичастица плюс два фонов и т. п.

Неротационные состояния нечетно-нечетных ядер состоят из нескольких состояний с протонной и нейтронной квазичастицами, к ним далее добавляются по одному, двум и более фононам. Такая картина возбужденных состояний использована в [39] для вычисления плотности возбужденных состояний при разных энергиях вплоть до энергии связи нейтрона B_n , и получено хорошее согласие с экспериментом.

Совокупность невзаимодействующих квазичастиц и фононов не дает правильную картину возбужденных состояний атомных ядер. Правильные волновые функции возбужденных состояний атомных ядер записываются в виде суперпозиции компонент с различным числом фононов. Связь компонент волновой функции, различающихся на один фонов, осуществляется взаимодействием квазичастиц с фононами. Если фононы фиксированы, то соответствующие части мультиполь-мультипольных и спин-мультиполь-спин-мультипольных сил, описывающие взаимодействия квазичастиц с фононами, однозначно определены. Если решены секулярные уравнения для фононов, то все параметры модели оказываются фиксированными. Взаимодействие квазичастиц с фононами, связывающее, например, одноквазичастичное и квазичастица плюс фонов состояния, оказывается тем больше, чем сильнее коллективизирован фонов.

Взаимодействие квазичастиц с фононами имеет следующие преимущества по сравнению с другими типами эффективных взаимодействий:

- 1) совместное и согласованное описание квазичастичных и фоновных состояний и их связи;
- 2) однозначный выбор вида и констант взаимодействия;
- 3) применимость для описания при низких, промежуточных и высоких энергиях возбуждения.

2. Гамильтониан мультиполь-мультипольного взаимодействия H_Q (40) содержит наряду с частью, входящей в (48) и используемой для вычисления однофононных состояний, также члены, содержащие операторы вида $\alpha_{q\sigma}^+ \alpha_{q\sigma}$ ($Q_i^+ + Q_i$), ответственные за описание взаимодействия квазичастиц с фононами. Соответствующую часть гамильтониана (40) обозначим H'_{vq} и запишем в виде

$$H'_{vq} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_t \left\{ (\kappa_0^{(\lambda)} + \kappa_1^{(\lambda)}) \left[\sum_{ss'} f^t(ss') u_{ss'}^{(+)} g_{ss'}^t, \sum_{s_2 s_2'} v_{s_2 s_2'}^{(-)} f^t(s_2 s_2') \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [(Q_i^+ + Q_i) B(s_2 s_2') + B(s_2 s_2') (Q_i^+ + Q_i)] + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{rr'} f^t(rr') u_{rr'}^{(+)} g_{rr'}^t \sum_{r_2 r_2'} f^t(r_2 r_2') v_{r_2 r_2'}^{(-)} ([Q_i^+ + Q_t] B(r_2 r_2') + \\
& + B(r_2 r_2') [Q_i^+ + Q_t]) + (\kappa_0^{(\lambda)} - \kappa_1^{(\lambda)}) \left[\sum_{ss'} f^t(ss') u_{ss'}^{(+)} g_{ss'}^t \times \right. \\
& \times \sum_{rr'} f^t(rr') v_{rr'}^{(-)} ([Q_i^+ + Q_t] B(rr') + B(rr') [Q_i^+ + Q_t]) + \\
& \left. + \sum_{rr'} f^t(rr') u_{rr'}^{(+)} g_{rr'}^t \sum_{ss'} f^t(ss') v_{ss'}^{(-)} ([Q_i^+ + Q_t] B(ss') + \right. \\
& \left. + B(ss') [Q_i^+ + Q_t]) \right] \}. \quad (80)
\end{aligned}$$

Преобразуем H'_{vq} с учетом того, что энергии однофононных состояний определяются из решений секулярных уравнений (53), а их волновые функции выражены через $g_{qq'}^t$ и $w_{qq'}^t$ в виде (59) — (64). В результате получим

$$\begin{aligned}
H_{vq} = & -\frac{1}{2} \sum_t \left\{ \sum_{ss'} \Gamma_{ss'}^t(n) [B(ss') (Q_i^+ + Q_t) + (Q_i^+ + Q_t) B(ss')] + \right. \\
& \left. + \sum_{rr'} \Gamma_{rr'}^t(p) [B(rr') (Q_i^+ + Q_t) + (Q_i^+ + Q_t) B(rr')] \right\}, \quad (81)
\end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{ss'}^t(n) = \frac{v_{ss'}^{(-)}}{2 \sqrt{Y_t}} f^t(ss'); \quad \Gamma_{rr'}^t(p) = \frac{v_{rr'}^{(-)}}{2 \sqrt{Y_t}} y_p^t f^t(rr'), \quad (82)$$

причем Y_t и y_p^t определены формулами (63) и (61).

Для спин-мультипольного взаимодействия к гамильтониану H_v^s (66) следует добавить часть, соответствующую взаимодействию квазичастиц с фононами в виде

$$\begin{aligned}
H_{vq}^s = & \frac{1}{2} \sum_g \left\{ \sum_{ss'} \Gamma_{ss'}^{tn}(n) [\mathfrak{B}(ss') (Q_i^+ + Q_t) + (Q_i^+ + Q_t) \mathfrak{B}(ss')] + \right. \\
& \left. + \sum_{rr'} \Gamma_{rr'}^{tn}(p) [\mathfrak{B}(rr') (Q_i^+ + Q_t) + (Q_i^+ + Q_t) \mathfrak{B}(rr')] \right\}, \quad (83)
\end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{ss'}^{ts}(n) = \frac{1}{2} \frac{v_{ss'}^{(+)}}{\sqrt{Y_t^s}} f_s^t(ss); \quad \Gamma_{rr'}^{ts}(p) = \frac{1}{2} \frac{v_{rr'}^{(+)}}{\sqrt{Y_t^s}} y_p^t f_s^t(rr'). \quad (84)$$

Для учета мультиполь-мультипольных сил с моментом, отличным от нуля, в канале частица — частица для изоскалярного взаимодействия соответствующая часть гамильтониана имеет вид

$$\begin{aligned}
 H_{vq}^{pp'} = & \frac{G_\lambda}{2\sqrt{2}} \sum_i \left\{ \sum_{qq'} \tilde{f}^{\lambda\mu}(qq') [g_{qq}^t v_{qq'}^{(-)} + w_{qq}^t v_{qq'}^{(+)}] Q_i^+ + \right. \\
 & \left. + \sum_{qq'} \tilde{f}^{\lambda\mu}(qq') [g_{qq}^t v_{qq'}^{(-)} - w_{qq}^t v_{qq'}^{(+)}] Q_i \right\} \times \\
 & \times \sum_{q_2 q_2'} \tilde{f}^{\lambda\mu}(q_2 q_2') (u_{q_2 q_2'}^{(+)} + u_{q_2 q_2'}^{(-)}) B(qq') + \text{e. c.} \quad (85)
 \end{aligned}$$

Гамильтониан модели с учетом секулярных уравнений для фононов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 H_M = & \sum_q \varepsilon(q) B(qq') - \frac{1}{2} \sum_t \frac{1}{Y_t} \times \\
 & \times \left\{ \sum_{ss'} \frac{(f^t(ss') u_{ss'}^{(+)} \varepsilon(ss'))}{\varepsilon^2(ss') - \omega_t^2} + y_p^t \sum_{rr'} \frac{(f^t(rr') u_{rr'}^{(+)} \varepsilon(rr'))}{\varepsilon^2(rr') - \omega_t^2} \right\} Q_t^+ Q_t - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_t \sum_{qq'} \Gamma_{qq'}^t \{B(qq') (Q_t^+ + Q_t) + (Q_t^+ + Q_t) B(qq')\} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_t \frac{1}{Y_t^s} \left\{ \sum_{ss'} \frac{(f^t_s(ss') u_{ss'}^{(-)} \varepsilon(ss'))}{\varepsilon^2(ss') - \omega_t^2} + y_p^{ts} \sum_{rr'} \frac{(f^t_s(rr') u_{rr'}^{(+)} \varepsilon(rr'))}{\varepsilon^2(rr') - \omega_t^2} \right\} Q_t^+ Q_t + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_t \sum_{qq'} \Gamma_{qq'}^{ts} \{\mathfrak{B}(qq') (Q_t^+ + Q_t) + (Q_t^+ + Q_t) \mathfrak{B}(qq')\}. \quad (86)
 \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma_{qq'}^t$ равно $\Gamma_{ss'}^t(n)$ и $\Gamma_{rr'}^t(p)$; $\Gamma_{qq'}^{ts}$ равно $\Gamma_{ss'}^{ts}(n)$ и $\Gamma_{rr'}^{ts}(p)$.

При дополнительном учете взаимодействий в канале частица — частица с моментом, отличным от нуля, к гамильтониану (86) нужно добавить члены (72), (85), преобразованные с учетом секулярного уравнения (73).

6. СИСТЕМЫ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ И РЕШЕНИЯ

1. Для получения основных уравнений модели с гамильтонианом (86) воспользуемся вариационным принципом. Рассмотрим сначала случай нечетного деформированного ядра. Волновую функцию ядра с нечетным числом нейтронов представим в виде разложения

$$\begin{aligned}
 \Psi_n(K^\pi) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\sigma \left\{ \sum_s C_s^n \alpha_{s\sigma}^+ + \sum_g D_g^n (\alpha^+ Q^+)_g + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_g F_g^n (\alpha^+ Q^+ Q^+)_g + \dots \right\} \Psi_0, \quad (87)
 \end{aligned}$$

где Ψ_0 — волновая функция основного состояния четно-четного ядра, у которого на один нейтрон меньше, она определена формулой (50); n — номер возбужденного состояния с данным значением K^π ; $g = qt$; $G = qt_1t_2$; $t = \lambda\mu i$.

Следуя принятой процедуре, найдем среднее значение H_M по состоянию (87) и на основе вариационного принципа получим цепочку зацепляющихся уравнений. В работе [40] показано, что эта цепочка уравнений эквивалентна цепочке зацепляющихся уравнений для соответствующих функций Грина. Обрыв ряда на каком-то члене в волновой функции (87) соответствует определенному обрыву цепочки уравнений функций Грина.

Система уравнений с волновой функцией (87), содержащей все члены вплоть до членов квазичастица плюс три фонона, дана в работах [9, 10] и исследована в [41—43]. Соответствующие уравнения для сферических ядер получены в работе [44].

Проведем единое описание мультипольных и спин-мультипольных взаимодействий; для этого введем обозначения [45]:

$$\Gamma_{qg} = \begin{cases} \Gamma_{qq'}^i & \text{для мультипольных взаимодействий;} \\ -\Gamma_{qq'}^{ts} & \text{для спин-мультипольных взаимодействий;} \end{cases} \quad (88)$$

$$\Gamma_{gG} = \begin{cases} \frac{1}{2} \{ \Gamma_{qq_2}^{t_2} \delta_{t_1, t_1} + \Gamma_{qq_2}^{t_1} \delta_{t_1, t_2} \} & \text{для мультипольных} \\ & \text{взаимодействий;} \\ -\frac{1}{2} \{ \Gamma_{qq_2}^{t_2s} \delta_{t_1, t_1} + \Gamma_{qq_2}^{t_1s} \delta_{t_1, t_2} \} & \text{для спин-мультипольных} \\ & \text{взаимодействий.} \end{cases} \quad (89)$$

Волновую функцию нечетного N ядра возьмем в виде

$$\Psi_n(K^\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \left\{ \sum_s C_s^n \alpha_{s\sigma}^+ + \sum_g D_g^n (\alpha^+ Q^+)_g + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_G F_G^n (\alpha^+ Q^+ Q^+)_G \right\} \Psi_0 \quad (90)$$

с условием нормировки

$$\sum_s (C_s^n)^2 + \sum_g (D_g^n)^2 + \sum_G (F_G^n)^2 = 1. \quad (91)$$

Среднее значение H_M (86) по состоянию (90) имеет вид

$$(\Psi_n^*(K^\pi) H_M \Psi_n(K^\pi)) = \sum_s \varepsilon(s) (C_s^n)^2 + \sum_g p(g) (D_g^n)^2 + \\ + \sum_G p(G) (F_G^n)^2 - 2 \sum_{s,g} \Gamma_{sg} C_s^n D_g^n - 2 \sum_{g,G} \Gamma_{gG} D_g^n F_G^n, \quad (92)$$

где фундаментальные полюса $p(g) = \varepsilon(g) + \omega_t$; $p(G) = \varepsilon(g) + \omega_{t_1} + \omega_{t_2}$.

С помощью вариационного принципа

$$\delta \{ (\Psi_n^* (K^\pi) H_M \Psi_n (K^\pi)) - \eta_n [(\Psi_n^* (K^\pi) \Psi_n (K^\pi)) - 1] \} = 0 \quad (93)$$

получим следующую систему уравнений:

$$(p(g) - \eta_n) D_g^n - \sum_s \Gamma_{sg} C_s^n - \sum_G \Gamma_{gG} F_G^n = 0; \quad (94)$$

$$(\varepsilon(s) - \eta_n) C_s^n - \sum_g \Gamma_{sg} D_g^n = 0; \quad (95)$$

$$(p(G) - \eta_n) F_G^n - \sum_g \Gamma_{gG} D_g^n = 0. \quad (96)$$

Введем обозначение

$$K(g, g') = \sum_s \frac{\Gamma_{sg} \Gamma_{sg'}}{\varepsilon(s) - \eta_n} + \sum_G \frac{\Gamma_{gG} \Gamma_{g'G}}{p(G) - \eta_n} \quad (97)$$

и уравнение (94) перепишем так:

$$(p(g) - \eta_n) D_g^n - \sum_{g'} K(g, g') D_{g'}^n = 0. \quad (98)$$

Секулярное уравнение имеет вид

$$\theta(\eta_n) = \det \| \delta_{gg'} (p(g) - \eta_n) - K(g, g') \| = 0. \quad (99)$$

Ранг детерминанта равен числу компонент квазичастица плюс фонон в волновой функции (90). Если взять достаточно большое пространство одночастичных состояний, то ранг этого детерминанта будет порядка $10^4 - 10^5$. В работе [41] показано, что детерминант системы уравнений (98) можно представить в виде

$$\prod_g (p(g) - \eta)^{-1} \theta(\eta) = 1 - \sum_s \frac{A_s}{\varepsilon(s) - \eta} - \sum_g \frac{A_g}{p(g) - \eta} - \sum_G \frac{A_G}{p(G) - \eta}, \quad (100)$$

где коэффициенты A_s , A_g , A_G , являющиеся суммами детерминантов различного ранга, не зависят от η . Поэтому секулярное уравнение $\theta(\eta_n) = 0$ содержит полюса только первого порядка.

Приведенная выше система уравнений используется для изучения фрагментации одночастичных состояний (см. [46, 47]). Для изучения фрагментации определенного одночастичного состояния s_0 преобразуем ее введением следующих функций:

$$\tilde{C}_s^n = C_s^n / C_{s_0}^n; \quad \tilde{D}_g^n = D_g^n / C_{s_0}^n; \quad \tilde{F}_G^n = F_G^n / C_{s_0}^n,$$

где $\bar{s} \neq s_0$. Систему уравнений (94)–(96) перепишем в виде (см. [46]):

$$\mathcal{F}_{s_0}(\eta_n) = \varepsilon(s_0) - \eta_n - \sum_g \Gamma_{s_0g} \tilde{D}_g^n = 0; \tag{101}$$

$$(\varepsilon(\bar{s}) - \eta_n) \tilde{C}_s^n - \sum_g \Gamma_{sg} \tilde{D}_g^n = 0; \tag{102}$$

$$(p(g) - \eta_n) \tilde{D}_g^n - \sum_s \Gamma_{sg} \tilde{C}_s^n - \sum_G \Gamma_{gG} \tilde{F}_G^n = \Gamma_{s_0g}; \tag{103}$$

$$(p(G) - \eta_n) F_G^n - \sum_g \Gamma_{gG} \tilde{D}_g^n = 0. \tag{104}$$

Условие нормировки волновой функции (90) перепишем так:

$$(C_{s_0}^n)^{-2} = 1 + \sum_s (\tilde{C}_s^n)^2 + \sum_g (\tilde{D}_g^n)^2 + \sum_G (\tilde{F}_G^n)^2.$$

Уравнению (98) соответствует уравнение

$$(p(g) - \eta_n) \tilde{D}_g^n - \sum_{g'} K_{s_0}(g, g') \tilde{D}_{g'}^n = \Gamma_{s_0g}, \tag{105}$$

где

$$K_{s_0}(g, g') = \sum_s \{ \Gamma_{sg} \Gamma_{sg'} / [\varepsilon(\bar{s}) - \eta_n] \} + \sum_G \{ \Gamma_{gG} \Gamma_{g'G} / [p(G) - \eta_n] \}. \tag{106}$$

Детерминант системы (105) обозначается $\theta(s_0; \eta)$. Строго выполняется соотношение

$$(C_{s_0}^n)^{-2} = -\partial \mathcal{F}_{s_0}(\eta) / \partial \eta |_{\eta=\eta_n}. \tag{107}$$

Решение уравнения (105) имеет вид

$$\tilde{D}_g^n = \theta_g(s_0; \eta) / \theta(s_0; \eta), \tag{108}$$

где $\theta_g(s_0; \eta)$ получается из $\theta(s_0; \eta)$ заменой столбца g на свободные члены (105). Подставим (108) в (101) и после преобразований получим

$$\mathcal{F}_{s_0}(\eta) = \frac{1}{\theta(s_0\eta)} \times \begin{vmatrix} \varepsilon(s_0) - \eta & \Gamma_{s_0g_1} & \dots & \dots & \Gamma_{s_0g_N} \\ \Gamma_{s_0g_1} & p(g_1) - \eta - K_{s_0}(g_1g_1) & \dots & \dots & -K_{s_0}(g_1g_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{s_0g_N} - K_{s_0}(g_Ng_1) & \dots & \dots & p(g_N) - \eta - K_{s_0}(g_Ng_N) & \dots \end{vmatrix}, \tag{109}$$

где N — число состояний g . Раскроем детерминант, проведем перегруппировку членов и получим

$$\mathcal{F}_{s_0}(\eta) = (\varepsilon(s_0) - \eta) \theta(\eta) / \theta(s_0; \eta). \tag{110}$$

Подставим (108) в уравнение (102) и найдем

$$\tilde{C}_s^n = \frac{1}{\varepsilon(\bar{s}) - \eta_n} \sum_g \Gamma_{sg}^- \tilde{D}_g^n = \frac{1}{(\varepsilon(\bar{s}) - \eta_n) \theta(s_0; \eta_n)} \sum_g \Gamma_{sg}^- \theta_g(s_0; \eta_n).$$

Раскроем детерминант, проведем перегруппировку членов и получим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_s^n &= - \frac{1}{(\varepsilon(\bar{s}) - \eta_n) \theta(s_0; \eta_n)} \times \\ &\times \begin{vmatrix} 0 & \Gamma_{sg_1}^- & \dots & \dots & \Gamma_{s g_N}^- \\ \Gamma_{s_0 g_1} & p(g_1) - \eta_n - K_{s_0}(g_1 g_1) & \dots & \dots & -K_{s_0}(g_1 g_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Gamma_{s_0 g_N} - K_{s_0}(g_N, g_1) & \dots & \dots & \dots & p(g_N) - \eta_n - K_{s_0}(g_N g_N) \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \frac{\Delta(s_0, \bar{s}; \eta_n)}{\theta(s_0, \eta_n)}. \end{aligned} \quad (111)$$

Приведем формулы для упрощенного случая, когда волновая функция имеет вид

$$\Psi_n(K^n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \left\{ \sum_s C_s^n \alpha_{s\sigma}^+ + \sum_g D_g^n (\alpha^+ Q^+)_g \right\} \Psi_0, \quad (112)$$

а ее нормировка

$$1 = \sum_s (C_s^n)^2 + \sum_g (D_g^n)^2.$$

Тогда

$$(\varepsilon(s) - \eta_n) C_s^n - \sum_g \Gamma_{sg} D_g^n = 0; \quad (113)$$

$$(p(g) - \eta_n) D_g^n - \sum_s \Gamma_{sg} C_s^n = 0. \quad (114)$$

Их можно переписать в виде

$$(\varepsilon(s) - \eta_n) C_s^n - \sum_{s'} K(ss') C_{s'}^n = 0, \quad (115)$$

где

$$K(ss') = \sum_g \{\Gamma_{sg} \Gamma_{s'g} / [p(g) - \eta_n]\}. \quad (116)$$

Секулярное уравнение имеет вид

$$\theta(\eta_n) = \det \|\delta_{ss'} (\varepsilon(s) - \eta_n) - K(ss')\| = 0. \quad (117)$$

Ранг этого детерминанта равен числу одноквазичастичных компонент в первой сумме в (112). В деформированных ядрах можно ограничиться 10—15 членами, в сферических ядрах 1—3 членами.

Выделим состояние s_0 и уравнения запишем в виде

$$\mathcal{F}_{s_0}(\eta_n) = \varepsilon(s_0) - \eta_n - \sum_g \Gamma_{s_0g} \tilde{D}_g^n = 0; \quad (118)$$

$$(\varepsilon(\bar{s}) - \eta_n) \tilde{C}_s^n - \sum_g \Gamma_{sg} \tilde{D}_g^n = 0; \quad (119)$$

$$(p(g) - \eta_n) \tilde{D}_g^n - \sum_s \Gamma_{sg} \tilde{C}_s^n = \Gamma_{s_0g}; \quad (120)$$

$$(C_{s_0}^n)^{-2} = 1 + \sum_s (C_s^n)^2 + \sum_g (\tilde{D}_g^n)^2. \quad (121)$$

Уравнения (119), (120) перепишем так:

$$\sum_{s'} \{(\varepsilon(\bar{s}) - \eta_n) \delta_{\bar{s}\bar{s}'} - K(\bar{s}, \bar{s}')\} \tilde{C}_{s'}^n = K(s_0, \bar{s}). \quad (122)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$\tilde{C}_s^n = \Theta_{s_0}(\bar{s}) / \Theta_{s_0}, \quad (123)$$

где Θ_{s_0} — детерминант системы (122), а $\Theta_{s_0}(\bar{s})$ получается из него заменой столбца \bar{s} на правую часть уравнения (122):

$$\mathcal{F}_{s_0}(\eta) = \Theta / \Theta_{s_0}. \quad (124)$$

В случае, когда учитывается только одно одночастичное состояние s_0 с данным K^π , волновая функция представляется как

$$\Psi_n(K^\pi) = C_{s_0}^n \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_\sigma \left\{ \alpha_{s_0\sigma}^+ + \sum_g \tilde{D}_g^n (\alpha^+ Q^+)_g \right\} \Psi_0, \quad (125)$$

а секулярное уравнение и выражение для $(C_{s_0}^n)^2$ имеют вид

$$\mathcal{F}_{p_0}(\eta_n) = \varepsilon(s_0) - \eta_n - \sum_g \{\Gamma_{s_0g}^2 / [p(g) - \eta_n]\} = 0; \quad (126)$$

$$(C_{s_0}^n)^{-2} = 1 + \sum_g \{\Gamma_{s_0g}^2 / [p(g) - \eta_n]\}. \quad (127)$$

Для того чтобы найти энергии состояний, описываемых волновой функцией (90), необходимо диагонализировать матрицу очень высокого ранга (99). Математически эта задача весьма сложна. В работах [41—43] изучались приближенные методы решения уравнений типа (99). Были найдены приближения, которые дают хорошее описание наибольших компонент волновых функций (90). Для промежуточных и высоких энергий возбуждения малоквазичастичные компоненты, которые нас интересуют, составляют малую часть в нормировке (91) и описываются плохо. Поэтому разработанные в работах [41—43] методы приближенных решений уравнений типа (99) не пригодны для изучения фрагментации одночастичных состояний.

Для изучения фрагментации одночастичных состояний и вычисления нейтронных силовых функций и спектроскопических факторов реакций однонуклонных передач предлагается следующий приближенный подход, состоящий из четырех этапов.

Первый этап. Возьмем волновую функцию в виде (112) и найдем решения секулярного уравнения (117). Эта задача довольно проста, она решена в [46, 48]. Из всей совокупности состояний g в (99) правила отбора для Γ_{sg} выберут совокупность состояний g' , число которых на два порядка меньше полного числа состояний g .

Второй этап. Отберем совокупность состояний g' , число которых равно полному числу решений уравнений (117) минус число одноквазичастичных компонент в первом члене (112). Для каждого решения η_n , соответствующего полюсу $p(g')$, найдем $(C_{s_0}^n)^2$.

Третий этап. Отберем из совокупности состояний g' такую совокупность g'' , для которых соответствующие $(C_{s_0}^n)^2$ больше определенного значения C_0^2 . Если взять $C_0^2 = 0,002$, то число состояний g'' равно 15—20.

Четвертый этап. Ограничимся в детерминанте (99) системой состояний g'' и проведем диагонализацию. Тем самым найдем энергии состояний и $(C_{s_0}^n)^2$. Решение этой задачи можно провести на ЭВМ на многих ядрах, так как нужно диагонализировать матрицы ранга в интервале от 10 до 100.

2. Рассмотрим случай четно-четного деформированного ядра. Гамильтониан модели (86) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 H_M = & \sum_t \omega_t Q_t^\dagger Q_t - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_t \sum_{qq'} \Gamma_{qq'}^t \{B(qq') (Q_t^\dagger + Q_t) + (Q_t^\dagger + Q_t) B(qq')\} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_t \sum_{qq'} \Gamma_{qq'}^{ts} \{\mathfrak{B}(q, q') (Q_t^\dagger + Q_t) + (Q_t^\dagger + Q_t) \mathfrak{B}(qq')\}. \quad (128)
 \end{aligned}$$

Волновую функцию представим в виде разложения

$$\begin{aligned}
 \Psi_n(K^\pi) = & \left\{ \sum_t R_t^n(\lambda_\mu) Q_t^\dagger + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{t_1 t_2} P_{t_1 t_2}^n(\lambda_\mu) Q_{t_1}^\dagger Q_{t_2}^\dagger + \right. \\
 & \left. + \mathcal{L}_{t_1 t_2 t_3}^n(\lambda_\mu) Q_{t_1}^\dagger Q_{t_2}^\dagger Q_{t_3}^\dagger + \dots \right\} \Psi_0. \quad (129)
 \end{aligned}$$

Найдем среднее значение H_M по состоянию (129) и на основе вариационного принципа получим цепочку зацепляющихся уравнений. Случай, где в волновой функции учитываются члены, содержащие один, два, три и четыре фонона, и не учитываются члены, содержащие более четырех фононов, исследован в [49], в которой получена система основных уравнений и предложен

приближенный метод их решения. Формулы для сферических ядер найдены в [50].

Детально изучим задачу с простой волновой функцией, которую возьмем в виде

$$\Psi_n(K^\pi) = \left\{ \sum_i R_i^n(\lambda\mu) Q_i^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{t_1 t_2} P_{t_1 t_2}^n(\lambda\mu) Q_{t_1}^+ Q_{t_2}^+ \right\} \Psi_0. \quad (130)$$

Условие ее нормировки таково:

$$\sum_i (R_i^n(\lambda\mu))^2 + \sum_{t_1 t_2} (P_{t_1 t_2}^n(\lambda\mu))^2 = 1. \quad (131)$$

Найдем среднее значение H_M (128) по состоянию (130):

$$\begin{aligned} (\Psi_n^*(K^\pi) H_M \Psi_n(K^\pi)) &= \sum_i \omega_i (R_i^n(\lambda\mu))^2 + \\ &+ \sum_{t_1 t_2} \omega_{t_1 t_2} [P_{t_1 t_2}^n(\lambda\mu)]^2 - 2 \sum_{i t_1 t_2} U_{t_1 t_2}(\lambda\mu i) R_i^n(\lambda\mu) P_{t_1 t_2}^n(\lambda\mu), \end{aligned} \quad (132)$$

где $\omega_{t_1 t_2} = \omega_{t_1} + \omega_{t_2}$;

$$U_{t_1 t_2}(\lambda\mu i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle Q_{\lambda\mu i} H_M Q_{t_1}^+ Q_{t_2}^+ \rangle \equiv U_{t_1 t_2}(t); \quad (133)$$

для мультиполь-мультипольного взаимодействия явный вид $U_{t_1 t_2}(\lambda\mu i)$ дан в работе [16] формулой (9.75).

Воспользуемся вариационным принципом

$$\delta \{ (\Psi_n^*(K^\pi) H_M \Psi_n(K^\pi)) - \eta_n [(\Psi_n^*(K^\pi) \Psi_n(K^\pi)) - 1] \} = 0 \quad (134)$$

и получим систему основных уравнений:

$$(\omega_i - \eta_n) R_i^n - \sum_{t_1 t_2} U_{t_1 t_2}(t) P_{t_1 t_2}^n = 0; \quad (135)$$

$$(\omega_{t_1 t_2} - \eta_n) P_{t_1 t_2}^n - \sum_i U_{t_1 t_2}(t) R_i^n = 0 \quad (136)$$

или

$$(\omega_i - \eta_n) R_i^n - \sum_{i'} K_{ii'} R_{i'}^n = 0, \quad (137)$$

где

$$K_{ii'} = \sum_{t_1 t_2} [U_{t_1 t_2}(\lambda\mu i) U_{t_1 t_2}(\lambda\mu i') / (\omega_{t_1 t_2} - \eta_n)]. \quad (138)$$

Поэтому секулярное уравнение имеет вид

$$\theta(\eta_n) = \det \| (\omega_i - \eta_n) \delta_{ii'} - K_{ii'} \| = 0, \quad (139)$$

причем ранг детерминанта равен числу учитываемых однофоновых состояний в первой сумме (130).

Воспользуемся условием нормировки волновой функции и получим следующие выражения для ее коэффициентов:

$$R_i^n = M_{ii}/N; \tag{140}$$

$$P_{t_1 t_2}^n = \frac{1}{N} \sum_i [U_{t_1 t_2}(\lambda \mu i) M_{ii}/\omega_{t_1 t_2} - \eta_n], \tag{141}$$

где M_{ii} — минор определителя (139);

$$N = \left(\sum_i (M_{ii})^2 + \sum_{t_1 t_2} \left\{ \sum_i [U_{t_1 t_2}(\lambda \mu i) M_{ii}/(\omega_{t_1 t_2} - \eta_n)] \right\}^2 \right)^{1/2}. \tag{142}$$

Уравнение (137) перепишем в виде

$$\mathcal{F}_{i_0}(\eta_n) = \omega_{i_0} - \eta_n - K_{i_0 i_0} - \sum_{i'} K_{i_0 i'} \tilde{R}_{i'}^n = 0; \tag{143}$$

$$(\omega_i - \eta_n) \tilde{R}_i^n - \sum_{i'} K_{ii'} \tilde{R}_{i'}^n = K_{i_0 i'}. \tag{144}$$

Нетрудно показать, что

$$\mathcal{F}_{i_0}(\eta) = \Theta(\eta)/M_{i_0 i_0}; \tag{145}$$

$$\tilde{R}_i^n = R_i^n/R_{i_0}^n = (-1)^{i_0+i} M_{i i_0}/M_{i_0 i_0}; \tag{146}$$

$$(R_{i_0}^n)^{-2} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \{ \mathcal{F}_{i_0}(\eta) \} |_{\eta=\eta_n}, \tag{147}$$

где определитель $M_{i i_0}$ получается из минора $M_{i_0 i_0}$ заменой i -го столбца на столбец свободных членов в (144).

Решение системы (139) и нахождение функций R_i^n и $P_{t_1 t_2}^n$ не представляют большого труда. Для ограниченного числа состояний i и $t_1 t_2$ в деформированных ядрах задача решена в [51]. Для сферических ядер эта задача решена в [37], где рассчитаны также приведенные вероятности $B(E\lambda)$ возбуждения гигантских мультипольных резонансов. В работе [52] проведено вычисление $E1$ -радиационных силовых функций в полумагических ядрах.

В случае, когда в (130) учитывается только одно однофононное состояние, т. е.

$$\Psi_n(K^n) = R^n(\lambda \mu) \left\{ Q_{i_0}^+ + \sum_{t_1 t_2} P_{t_1 t_2}^n(\lambda \mu) Q_{t_1}^+ Q_{t_2}^+ \right\} \Psi_0, \tag{148}$$

секулярное уравнение и выражение для $(R^n(\lambda \mu))^2$ имеют вид

$$\omega_{t_0} - \eta_n = \frac{1}{2} \sum_{t_1 t_2} \{ [U_{t_1 t_2}(\lambda \mu n)]^2 / (\omega_{t_1 t_2} - \eta_n) \}, \tag{149}$$

$$[R^n(\lambda \mu)]^{-2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{t_1 t_2} \{ [U_{t_1 t_2}(\lambda \mu n)]^2 / (\omega_{t_1 t_2} - \eta_n)^2 \}. \tag{150}$$

3. В волновых функциях (90), (130) имеются члены, содержащие произведения двух операторов рождения фононов. Ввиду

того что операторы фононов построены из произведения операторов квазичастиц, удовлетворяющих фермионным перестановочным соотношениям, в произведениях двух операторов фононов имеет место некоторое нарушение принципа Паули. Задача исключения членов, нарушающих принцип Паули, исследована во многих работах, например [53—55]. Покажем, что в рамках квазичастично-фононной модели ядра задачу можно сформулировать без нарушения принципа Паули.

Математический метод продемонстрируем для случаев, когда в волновых функциях имеется не более двух фононов. Введем операторы «истинных» бозонов $b^+(q, q')$, $b(q, q')$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[b(q, q'), b^+(q_2 q'_2)] = \delta_{qq_2} \delta_{q'q'_2} + \delta_{qq'_2} \delta_{q'q_2}; \quad (151)$$

$$[b(q, q'), b(q_2, q'_2)] = 0$$

и условию

$$b(q, q') = b(q', q). \quad (152)$$

Пользуясь точными коммутационными соотношениями, операторы $A^+(q, q')$ и $B(q, q')$ выразим через операторы бозонов следующим образом:

$$B(q, q') = \sum_{q_2} b^+(q, q_2) b(q', q_2); \quad (153)$$

$$\begin{aligned} A^+(q, q') = & b^+(q, q') + x b^+(q, q') \sum_{q_2 q'_2} b^+(q_2 q'_2) b(q_2, q'_2) + \\ & + y \sum_{q_2 q'_2} b^+(q, q_2) b^+(q', q'_2) b(q_2, q'_2), \end{aligned} \quad (154)$$

где $x = -(3 - \sqrt{6})/6$; $y = -1/\sqrt{6}$.

Введем операторы фононов

$$\tilde{Q}_i = \frac{1}{2} \sum_{q, q'} \{ \psi_{qq'}^{\dagger} b(q, q') - \varphi_{qq'}^{\dagger} b^+(q, q') \} \quad (155)$$

и выразим через них операторы мультипольных моментов (41). Для того чтобы не загромождать изложение, гамильтониан возьмем в виде

$$\begin{aligned} H'_M = & \sum_q \varepsilon(q) B(q, q) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu \geq 0} \kappa_0^{(\lambda)} \{ Q_{\lambda\mu}^{\dagger}(n) Q_{\lambda\mu}(n) + \\ & + Q_{\lambda\mu}^{\dagger}(p) Q_{\lambda\mu}(p) + 2Q_{\lambda\mu}^{\dagger}(n) Q_{\lambda\mu}(p) \}, \end{aligned} \quad (156)$$

где $Q_{\lambda\mu}(n)$ определен формулой (41). Учтем секулярное уравнение (65), и тогда гамильтониан, выраженный через новые фононы \tilde{Q}_i^+ , \tilde{Q}_i , получим в виде

$$\begin{aligned}
 H'_M = & \sum_t \omega_t \tilde{Q}_t^+ \tilde{Q}_t - \frac{1}{2} \sum_{t_2} \frac{1}{\sqrt{Y_{t_2}}} \sum_{q_2 q'_2 q_3} f^{t_2} (q_2 q'_2) v_{q_2 q'_2}^- \times \\
 & \times \sum_{t, t'} [\Psi_{q_2 q_3}^t \Phi_{q'_2 q_3}^{t'} \tilde{Q}_t^+ \tilde{Q}_t \tilde{Q}_{t_2} + \Phi_{q_2 q_3}^t \Psi_{q'_2 q_3} \tilde{Q}_t^+ \tilde{Q}_t \tilde{Q}_{t'} + \\
 & + (\Psi_{q_2 q_3}^t \Psi_{q'_2 q_3}^{t'} + \Phi_{q'_2 q_3}^t \Phi_{q_2 q_3}^{t'}) (\tilde{Q}_{t_2}^+ \tilde{Q}_t^+ \tilde{Q}_{t'} + \tilde{Q}_t^+ \tilde{Q}_t \tilde{Q}_{t'})] - \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{\substack{t t' \\ t_2 t'_2}} \{V_{t_2 t'_2}^{t t'} \tilde{Q}_{t_2}^+ \tilde{Q}_t^+ \tilde{Q}_{t'} \tilde{Q}_{t_2} + V_{t_2 t'_2}^{t t'} \tilde{Q}_t^+ \tilde{Q}_t \tilde{Q}_{t_2} \tilde{Q}_{t'_2}\}, \quad (157)
 \end{aligned}$$

где функции $V_{t_2 t'_2}^{t t'}$, $\tilde{V}_{t_2 t'_2}^{t t'}$ состоят из сумм произведений матричных элементов и функций $\Psi_{qq'}$ и $\Phi_{qq'}$.

Волновую функцию возьмем в виде (148) и среднее значение H'_M по этому состоянию найдем таким:

$$\begin{aligned}
 (\Psi_n^* (K^\pi) H'_M \Psi_n (K^\pi)) = & (R^n)^2 \{ \omega_{t_0} + 2 \sum_{t, t'} \omega_{t t'} (P_{t t'}^n)^2 - \\
 & - 2 \sum_{t, t'} U_{t t'}(t_0) P_{t t'}^n - \\
 & - \sum_{\substack{t t' \\ t_2 t'_2}} [V_{t_2 t'_2}^{t t'} P_{t t_2}^n P_{t' t_2}^n + \tilde{V}_{t_2 t'_2}^{t t'} P_{t t_2}^n P_{t_2 t'_2}^n] \}. \quad (158)
 \end{aligned}$$

Воспользуемся вариационным принципом и получим следующую систему уравнений:

$$\omega_{t_0} - \eta_n - \sum_{t, t'} U_{t t'}(t_0) P_{t t'}^n = 0; \quad (159)$$

$$P_{t t'}^n = \frac{1}{2} \frac{U_{t t'}(t_0)}{\omega_{t t'} - \eta_n} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{t t'} - \eta_n} \sum_{\substack{t_2 t'_2 \\ t_2 t'_2}} (V_{t' t_2}^{t t_2} + \tilde{V}_{t_2 t'_2}^{t t'}) P_{t_2 t'_2}^n. \quad (160)$$

Переход от квазибозонов к бозонам привел к появлению второго члена в (160). Если его отбросить и подставить (160) в (159), то получим секулярное уравнение (149).

Выделим в (160) когерентные члены и перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \omega_{t t'} - \eta_n - \frac{1}{2} (V_{t' t'}^{t t} + \tilde{V}_{t t'}^{t t'}) \right\} P_{t t'}^n = \\
 & = \frac{1}{2} U_{t t'}(t_0) - \frac{1}{2} \sum_{t_2 t'_2 \neq t t'} (V_{t' t_2}^{t t_2} + \tilde{V}_{t_2 t'_2}^{t t'}) P_{t_2 t'_2}^n. \quad (161)
 \end{aligned}$$

В первом приближении, когда отброшены некогерентные члены в уравнении (161), переход от квазибозонов к бозонам сводится к некоторому смещению энергий двухфононных состояний. С помощью теории возмущений можно учесть роль некогерентных членов, представляющих перерасеяние фононов на фононах.

Таким образом, в рамках квазичастично-фононной модели ядра можно работать с истинными бозонами, исключив все нарушения принципа Паули. В рамках каждого приближения, т. е. при вполне определенном обрыве разложений в волновых функциях (87) и (129) выбирается соответствующее выражение для операторов $A(qq')$, $A^+(qq')$, т. е., например, берутся следующие члены в разложении (154) и находится система основных уравнений.

7. МЕТОД СИЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

1. Волновые функции типа (90), (130) при промежуточных и высоких энергиях возбуждения сложных ядер не дают правильного описания структуры состояний из-за отсутствия в них многофононных компонент. Так, для описания возбужденных состояний с энергией около 4 Мэв в ^{239}U волновая функция (87) должна иметь компоненты квазичастица плюс четыре фонона. При формулировке квазичастично-фононной модели не ставилась задача нахождения правильных волновых функций высоковозбужденных состояний. Квазичастично-фононная модель ядра сформулирована так, чтобы получить наиболее точное описание малоквазичастичных компонент волновых функций, усредненных по некоторому энергетическому интервалу.

Для промежуточных и высоких энергий возбуждения результаты вычисления характеристик каждого состояния трудно представить достаточно наглядно. Например, в ^{239}U при энергиях возбуждения $3\text{--}5 \text{ Мэв}$ в интервале 100 кэв находится $10\text{--}20$ полюсов (и соответствующих решений) типа квазичастица плюс фонон. Поэтому при изучении фрагментации одноквазичастичных состояний в работах [48, 56] подсчитывались суммы типа $\sum_n (C_{s_0}^n)^2$ для состояний, лежащих в интервалах 200 и 400 кэв , и результаты представлялись в виде гистограмм. В таких расчетах находилась энергия каждого состояния, вычислялись компоненты (а их много тысяч) волновых функций и использовалось значение только одной из компонент для вычисления величин типа $\sum_n (C_{s_0}^n)^2$.

Из большой полученной информации использовалась только очень малая ее часть. Поэтому возникла необходимость в таком математическом аппарате, с помощью которого можно было бы сразу вычислять распределение нужных величин в выбранном интервале энергий возбуждения. Таким аппаратом явился метод силовых

функций, т. е. метод непосредственного вычисления усредненных характеристик без детального расчета каждого состояния, который был применен в работах [46, 57].

Для изложения сути метода рассмотрим фрагментацию одночастичного состояния, описываемого волновой функцией (125), с секулярным уравнением (126) и выражением $(C_{s_0}^n)^2$ в виде (127). Построим функцию

$$\Phi_{s_0}(\eta) = \sum_n (C_{s_0}^n)^2 \rho(\eta_n - \eta), \quad (162)$$

где

$$\rho(\eta_n - \eta) = (2\pi)^{-1} \Delta / [(\eta - \eta_n)^2 + (\Delta/2)^2]. \quad (163)$$

От величины энергетического интервала усреднения Δ зависит способ представления результатов расчетов. Силовые функции с использованием функции $\rho(\eta_n - \eta)$ вычислены в работе [58]. Эти функции нашли широкое применение в квазичастично-фононной модели ядра при изучении фрагментации одноквазичастичных состояний, при вычислении нейтронных силовых функций и при изучении гигантских мультипольных резонансов [23, 32, 37, 38, 46, 47, 52, 59, 60]. При введении функций $\rho(\eta_n - \eta)$ получаются результаты, близкие к тем, которые используются в методе функций Грина [61]. При вычислении вероятностей возбуждения гигантских мультипольных резонансов в работах [26, 61] употреблялись выражения, которые можно получить введением функции $\rho(\eta_n - \eta)$.

Принимая во внимание формулу (108), запишем функцию $\Phi_{s_0}(\eta)$ в виде

$$\Phi_{s_0}(\eta) = - \sum_n (\partial \mathcal{F}_{s_0}(\eta) / \partial \eta)_{\eta=\eta_n}^{-1} \rho(\eta_n - \eta). \quad (164)$$

Воспользуемся теоремой вычетов и выразим функцию (164) через контурный интеграл, охватывающий полюса, которые являются решениями уравнения (126). В результате получим

$$\Phi_{s_0}(\eta) = \frac{-1}{2\pi i} \frac{\Delta}{2\pi} \oint_{l_p} \frac{dz}{\mathcal{F}_{s_0}(z)} \frac{1}{(\eta - z)^2 + (\Delta/2)^2}; \quad (165)$$

контур l_p представлен на рисунке. Учитывая, что контурный интеграл по окружности бесконечного радиуса в комплексной плоскости z равен нулю, перейдем от интеграла по контуру l_p к двум контурным интегралам l_1 , l_2 , охватывающим полюса $z_1 = \eta + i\Delta/2$, $z_2 = \eta - i\Delta/2$:

$$\Phi_{s_0}(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Delta}{2\pi} \oint_{l_1+l_2} \frac{dz}{\mathcal{F}_{s_0}(z)} \frac{1}{(\eta - z)^2 + (\Delta/2)^2}. \quad (166)$$

Проведем простые вычисления

$$\Phi_{s_0}(\eta) = -\frac{\Delta}{2\pi} \frac{1}{2(\eta-z)} \frac{1}{\mathcal{F}_{s_0}(z)} \Big|_{z=\eta \pm i\Delta/2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\mathcal{F}_{s_0}(\eta + i\Delta/2)} \right) \quad (167)$$

и, используя $\mathcal{F}_{s_0}(\eta + i\Delta/2)$ в виде (126), получим

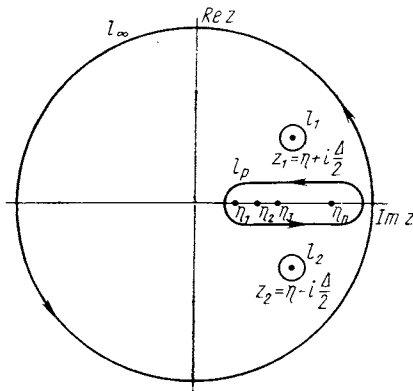
$$\Phi_{s_0}(\eta) = (\Delta/2\pi) \{ \Gamma(\eta) / [(\varepsilon(s_0) - \gamma(\eta) - \eta)^2 + (\Delta/2)^2 \Gamma^2(\eta)] \}, \quad (168)$$

где

$$\Gamma(\eta) = 1 + \sum_g \{ \Gamma_{s_0 g}^2 / [(p(g) - \eta)^2 + (\Delta/2)^2] \}; \quad (169)$$

$$\gamma(\eta) = \sum_g \{ \Gamma_{s_0 g}^2 (p(g) - \eta) / [(p(g) - \eta)^2 + (\Delta/2)^2] \}. \quad (170)$$

Функция $\Phi_{s_0}(\eta)$ представлена в брейт-вигнеровской форме, однако зависимость $\Gamma(\eta)$ и $\gamma(\eta)$ от энергии η является очень важной, она ведет к сильному отклонению $\Phi_{s_0}(\eta)$ от брейт-вигнеровской формы [47]. Обычно [62] используются функции вида (168) с постоянными величинами Γ и γ , что не может быть оправдано.



Контурь интегрирования в комплексной плоскости z

2. Метод силовых функций является составной и важной частью квазичастично-фононной модели ядра. Метод силовых функций использован в работах [46, 47] для изучения основных закономерностей фрагментации одночастичных состояний в нечетных деформированных ядрах. Если взять волновую функцию в виде (90), функцию

$\mathcal{F}_{s_0}(\eta)$ в виде (102) и провести такие же выкладки, как в формулах (162), (165) и (166), то можно получить

$$\Phi_{s_0}(\eta) = \pi^{-1} \operatorname{Im} \{ 1/\mathcal{F}_{s_0}(\eta + i\Delta/2) \}, \quad (171)$$

т. е. такой же вид, как (167). При вычислении $\Phi_{s_0}(\eta)$ нужно не диагонализировать матрицу высокого порядка g' или g'' , а вычислять ее, что математически значительно легче.

Знание фрагментации одноквазичастичных состояний позволяет находить силовые функции нейтронных резонансов и реак-

ций однонуклонных передач, в формулы для которых входят выражения вида

$$\left(\sum_s a_{II}^{sK} u_s C_s^n\right)^2; \tag{172}$$

$$\left(\sum_s a_{II}^{sK} v_s C_s^n\right)^2. \tag{173}$$

Одночастичные волновые функции φ_s^K представляются в виде разложения по сферическому базису

$$\varphi_s^K = \sum_{NII} a_{NII}^{sK} \varphi_{NII}; \quad a_{II}^{sK} = \sum_N a_{NII}^{sK}. \tag{174}$$

В работе [46] введены силовые функции

$$S_{II}^{pK}(\eta) = \sum_n \rho(\eta_n - \eta) \left| \sum_s a_{II}^{sK} u_s C_s^n \right|^2; \tag{175}$$

$$s_{II}^{hK}(\eta) = \sum_n \rho(\eta_n - \eta) \left| \sum_s a_{II}^{sK} v_s C_s^n \right|^2 \tag{176}$$

и выполнены следующие преобразования:

$$\begin{aligned} S_{II}^{pK}(\eta) &= \sum_n \rho(\eta_n - \eta) \sum_s (a_{II}^{sK} u_s)^2 (C_s^n)^2 + \\ &+ \sum_n \rho(\eta_n - \eta) \sum_{\substack{s, s' \\ s \neq s'}} a_{II}^{sK} a_{II}^{s'K} u_s u_{s'} (C_s^n)^2 (C_{s'}^n / C_s^n) = \\ &= - \sum_n \rho(\eta_n - \eta) \sum_s (a_{II}^{sK} u_s)^2 (\partial \mathcal{F}_s(\eta_n) / \partial \eta)^{-1} - \sum_n \rho(\eta_n - \eta) \times \\ &\times \sum_{\substack{s, s' \\ s \neq s'}} a_{II}^{sK} a_{II}^{s'K} u_s u_{s'} (\partial \mathcal{F}_s(\eta_n) / \partial \eta)^{-1} [\Delta(s, s'; \eta) / \theta(s, \eta)]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами (107) и (111). Выполним такую же процедуру, как при переходе от формулы (162) к выражению (167), и в результате получим

$$\begin{aligned} S_{II}^{pK}(\eta) &= \frac{1}{\pi} \sum (a_{II}^{sK} u_s)^2 \operatorname{Im} \{1 / \mathcal{F}_s(\eta + i\Delta/2)\} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{s > s'} a_{II}^{sK} a_{II}^{s'K} u_s u_{s'} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\Delta(s', \eta + i\Delta/2)}{\theta(s, \eta + i\Delta/2)} \right\}. \tag{177} \end{aligned}$$

Выражение для $S_{II}^{hK}(\eta)$ отличается от (177) тем, что функции $u_s, u_{s'}$ заменены на $v_s, v_{s'}$. В работе [46] при использовании условия полноты получено следующее выражение типа правила сумм:

$$\sum_n \left(\sum_s a_{II}^{sK} U_s C_s^n\right)^2 = \sum_s U_s^2 (a_{II}^{sK})^2. \tag{178}$$

Правая часть (178) является верхним пределом силовой функции (177). Вычисляя (177) в определенном энергетическом интервале и сравнивая с правой частью (178), можно сказать, какая часть силовой функции исчерпана в этом энергетическом интервале.

При вычислении силовых функций вместо диагонализации матрицы высокого порядка g' или g'' для каждого состояния вычисляются мнимые части детерминантов порядка g' или g'' при различных значениях энергии η с шагом порядка Δ . Переход к вычислению силовых функций вместо расчетов этих величин для каждого состояния приводит к уменьшению времени на ЭВМ в 10^2 — 10^3 раз.

3. При изучении гигантских мультипольных резонансов, а также нейтронных резонансов в расчетах в рамках квазичастично-фононной модели ядра широко используются силовые функции для приведенных вероятностей $E\lambda$ -переходов.

Выведем выражение для силовой функции $E\lambda$ -возбуждения четно-четного деформированного ядра, возбуждение состояния которого описывается волновой функцией (130). Приведенная вероятность $E\lambda$ -перехода имеет вид

$$B(E\lambda; 0^+0 \rightarrow I_f^{Jf} K_f n) \equiv B(E\lambda; \eta_n) = (00\lambda\mu | I_f K_f)^2 \mathcal{M}_n^2; \quad (179)$$

$$\mathcal{M}_n = \frac{1}{2} \sum_i R_i^n(\lambda\mu) (2 - \delta_{\mu, 0/Y_i})^{1/2} \times$$

$$\times [e_{\text{eff}}^{(\lambda)}(p) X^t(p) y_p^t + e_{\text{eff}}^{(\lambda)}(n) X^t(n)] = \sum_i R_i^n(\lambda\mu, \eta) L_i(\lambda\mu), \quad (180)$$

где $e_{\text{eff}}^{(\lambda)}(p)$, $e_{\text{eff}}^{(\lambda)}(n)$ — эффективные электрические заряды; для $E1$ -переходов они равны $e_{\text{eff}}^{(\lambda)}(p) = Ne/A$, $e_{\text{eff}}^{(\lambda)}(n) = -ze/A$; функции Y_i , X^t и y_p^t определены формулами (63), (54), (61). Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^2 &= \sum_{i, i'} R_i^n(\lambda\mu) R_{i'}^n(\lambda\mu) L_i(\lambda\mu) L_{i'}(\lambda\mu) = \\ &= \sum_{i, i'} (R_i^n(\lambda\mu))^2 R_{i'}^n(\lambda\mu) L_i(\lambda\mu) L_{i'}(\lambda\mu). \end{aligned} \quad (181)$$

Введем силовую функцию

$$b(E\lambda, \eta) = \sum_n B(E, \lambda; \eta_n) \rho(\eta_n - \eta), \quad (182)$$

где $\rho(\eta_n - \eta)$ определена формулой (163). Нетрудно показать, что с достаточно хорошей точностью выполняется соотношение

$$\int_{\eta-\Delta/2}^{\eta+\Delta/2} b(E\lambda, \eta') d\eta' \approx \sum_n B(E\lambda; \eta_n), \quad (183)$$

где суммирование проводится по всем состояниям n с данным K^π в энергетическом интервале Δ . Подставим (179), (181) в (182), воспользуемся (146), (147) и получим

$$\begin{aligned}
 b(E\lambda, \eta) &= -(00\lambda\mu | I_f K_f)^2 \sum_n \sum_{ii'} \frac{L_i(\lambda\mu) L_{i'}(\lambda\mu)}{\partial \mathcal{F}_i(\eta_n)/\partial \eta_n} \times \\
 &\times \frac{(-1)^{i+i'} M_{ii'}}{M_{ii}} \frac{1}{(\eta_n - \eta)^2 + (\Delta/2)^2} = -\frac{\Delta}{2\pi} \frac{(00\lambda\mu | I_f K_f)^2}{2\pi i} \times \\
 &\times \oint_{\Gamma_p} \sum_{ii'} \frac{L_i(\lambda\mu) L_{i'}(\lambda\mu)}{\mathcal{F}_i(z)} \frac{(-1)^{i+i'} M_{ii'}(z)}{M_{ii}(z)} \frac{dz}{(\eta - z)^2 + (\Delta/2)^2}. \quad (184)
 \end{aligned}$$

Здесь интегрирование проводится по контуру, данному на рисунке. Выполним такую же процедуру, как при переходе от (165) к (167), воспользуемся (145) и в результате получим

$$\begin{aligned}
 b(E\lambda, \eta) &= \frac{1}{\pi} (00\lambda\mu | I_f K_f)^2 \sum_{i, i'} (-1)^{i+i'} \times \\
 &\times L_i(\lambda\mu) L_{i'}(\lambda\mu) \operatorname{Im} \left\{ \frac{M_{ii'}(\eta + i\Delta/2)}{\theta(\eta + i\Delta/2)} \right\}. \quad (185)
 \end{aligned}$$

При вычислении силовых функций $b(E\lambda, \eta)$ нужно не диагонализировать матрицы θ и M_{ii} , а вычислять их мнимые части при различных значениях η . Это приводит к уменьшению времени счета на ЭВМ в 10^2 — 10^3 раз. Ранг детерминантов θ можно брать в следующих пределах: 10—20 для сферических ядер и 20—100 для деформированных ядер. Из изложенного выше можно сделать заключение, что время счета на ЭВМ необходимо не слишком большое для того, чтобы оказалось возможным провести вычисления многих гигантских мультипольных резонансов для большого числа ядер.

При определении областей локализации гигантских мультипольных резонансов большую роль играет вычисление энергии взвешенных правил сумм (EWSR). Энергетически взвешенная сумма имеет вид

$$\begin{aligned}
 S_\lambda(\eta) &= \sum_{\mu n} \eta_n(\lambda\mu) B(E\lambda, \eta_n) \rho(\eta_n - \eta) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{\mu} (00\lambda\mu | I_f K_f)^2 \sum_{i, i'} (-1)^{i+i'} L_i(\lambda\mu) \times \\
 &\times L_{i'}(\lambda\mu) \operatorname{Im} \left\{ (\eta + i\Delta/2) M_{ii}(\eta + i\Delta/2) / \theta(\eta + i\Delta/2) \right\}. \quad (186)
 \end{aligned}$$

Для сферических ядер нет суммирования по μ или K .

Для выяснения полноты используемого одночастичного базиса оказываются полезными безмодельные энергетические взвешенные правила сумм. Модельно-независимое дипольное правило сумм имеет вид

$$\sum_n B(E1, \eta_n) \eta_n = 0,18 \frac{ZN}{A} e^2 \text{ барн} \cdot \text{Мэв}. \quad (187)$$

Для $\lambda > 1$

$$\sum_n B(E\lambda, \eta_n) \eta_n = 4,8\lambda (3 + \lambda)^2 \frac{Z}{A^{2/3}} B(E\lambda)_{s. p.} \text{ Мэв}. \quad (188)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В рамках квазичастично-фононной модели ядра возможно вычисление многих свойств сложных ядер при низких, промежуточных и высоких энергиях возбуждения. Часть таких расчетов уже выполнена. Несомненно, что при проведении расчетов в будущем будут использоваться все более и более сложные варианты модели путем включения новых членов в волновые функции (87) и (129), а также путем учета новых сил.

2. Следует отметить, что в волновые функции высоковозбужденных состояний основной вклад дают многокварзичастичные компоненты. Несомненно, что в будущем мы будем свидетелями проявления новых свойств высоковозбужденных состояний, определяемых многокварзичастичными компонентами. Сейчас нет информации о значениях и распределении многокварзичастичных компонент волновых функций высоковозбужденных состояний. Даже для более низких состояний, таких, как нейтронные резонансы, показано [14, 15, 63], что прямые экспериментальные данные о характеристиках многокварзичастичных компонент их волновых функций отсутствуют. Вклад же малокварзичастичных компонент в нормировку волновых функций нейтронных резонансов составляет только 10^{-4} — 10^{-6} часть.

3. С ростом энергии возбуждения структура состояний становится все более и более сложной. Можно ожидать значительно большего разнообразия свойств высоколежащих состояний по сравнению с низколежащими состояниями. Трудно представить себе структуру ядерных состояний при очень больших энергиях возбуждения. Будет ли это состояние безликого ядерного вещества или что-либо другое?

4. Нет оснований надеяться на то, что будет найдено простое и наглядное описание сложных ядер. Атомное ядро — очень сложная система, и эту сложность можно понять, известные свойства — описать, а новые — предсказать на основе теории

ядра, опирающейся на громадные возможности быстро прогрессирующей вычислительной техники.

В заключение приношу глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову, А. И. Вдовину, Р. В. Джолосу и Л. А. Малову за многочисленные обсуждения и помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьев В. Г. Влияние парных корреляций сверхпроводящего типа на свойства атомных ядер. М., Госатомиздат, 1963; Soloviev V. G. In: Selected Topics in Nuclear Theory. Vienna, IAEA, 1963, p. 233.
2. Soloviev V. G. «Atomic Energy Rev.», 1965, v. 3, N 2, p. 117.
3. Soloviev V. G. In: Nuclear Structure. Dubna Symposium, 1968. Vienna, IAEA, 1968, p. 101.
4. Kisslinger L. S., Sorensen R. A. «Revs Mod. Phys.», 1963, v. 35, p. 853.
5. Soloviev V. G. «Phys. Lett.», 1965, v. 16, p. 308; Soloviev V. G., Vogel P. «Nucl. Phys. A», 1967, v. 92, p. 449.
6. Soloviev V. G. «Progr. Nucl. Phys.», 1968, v. 10, p. 239.
7. Соловьев В. Г. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1971, т. 35, с. 666.
8. Соловьев В. Г. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1974, т. 38, с. 1580.
9. Soloviev V. G., Malov L. A. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 196, p. 443.
10. Соловьев В. Г. «ТМФ», 1973, т. 17, с. 90.
11. Соловьев В. Г. В кн.: Структура ядра. Д-6465 ОИЯИ, 1972, с. 77; В кн.: II Школа по нейтронной физике. ДЗ-7991 ОИЯИ, 1974, с. 233.
12. Zuker A. P. Nuclear Structure and Spectroscopy. Ed. by H. P. Blok, A. E. L. Dieperink. V. 2. Amsterdam, 1974, p. 115.
13. Соловьев В. Г. «Ядерная физика», 1971, т. 13, с. 48; 1972, т. 15, с. 733.
14. Соловьев В. Г. «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, с. 770.
15. Soloviev V. G. Nuclear Structure Study with Neutrons. Ed. by J. Eгő, J. Szűcs. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974, p. 85.
16. Соловьев В. Г. Теория сложных ядер. М., «Наука», 1971; Oxford, Pergamon Press, 1976.
17. Боголюбов Н. Н. Избранные труды. Т. 3. Киев, «Наукова думка», 1971, с. 174.
18. Боголюбов Н. Н. «УФН», 1959, т. 67, с. 549.
19. Джолос Р. В., Соловьев В. Г. В кн.: Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра. Т. 1. М., Атомиздат, 1970, с. 365.
20. Belyaev S. T. Selected Topics in Nuclear Theory. Vienna, IAEA, 1963, p. 291.
21. Мигдал А. Б. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., «Наука», 1965.
22. Бирбраир Б. Л. «Ядерная физика», 1967, т. 5, с. 746.
23. Соловьев В. Г. В кн.: Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра. (15—19 июня 1976, Дубна) Т. 2. Д-9920. ОИЯИ, 1976, с. 146.
24. Боголюбов Н. Н. В кн.: Лекции по квантовой статистике. Киев, «Сов. школа», 1949.
25. Vogel P. In: Nuclear Structure. Dubna Symposium, 1968. Vienna, IAEA, 1968, p. 59.
26. Liu K., Brown G. E. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 265, p. 385.
27. Knüpfner W., Huber M. G. «Phys. Rev. C», 1976, v. 14, p. 2254.
28. Bohr A., Mottelson V. Nuclear Structure. V. 2. London — Amsterdam — Don Mills — Ontario — Sydney — Tokyo, Benjamin Inc., 1975.
29. Беляев С. Т., Зелевинский В. Г. «Ядерная физика», 1973, т. 17, с. 525; Михайлов И. Н., Наджаков Е., Караджов Д. «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, с. 311.

30. Szymanski Z. В кн.: Труды Международной конференции по избранному вопросу структуры ядра. (15—19 июня 1976, Дубна). Т. 2. Д-9920. ОИЯИ, 1976, с. 66; Frauendorf S., Mikhailov I. N. Там же, с. 81; Neergard K., Pashkevich V. V., Frauendorf S. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 272, p. 61.
31. Soloviev V. G. «Nucl. Phys. A», 1965, v. 69, p. 1.
32. Малов Л. А., Нестеренко В. О., Соловьев В. Г. «ТМФ», 1977, т. 32, с. 134.
33. Вдовин А. И. и др. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1976, т. 40, с. 2183; Вдовин А. И., Дамбасурен Д., Стоянов Ч. Препринт ОИЯИ Р4-10546. Дубна, 1977.
34. Григорьев Е. П., Соловьев В. Г. Структура четных деформированных ядер. М., «Наука», 1974; Иванова С. П. и др. «ЭЧАЯ», 1976, т. 7, с. 450.
35. Малов Л. А. и др. Препринт ОИЯИ Е4-11121. Дубна, 1977.
36. Moss J. M. e.a. «Phys. Rev. Lett.», 1976, v. 37, p. 816.
37. Soloviev V. G., Stoyanov Ch., Vdovin A. I. «Nucl. Phys. A», 1977, v. 288, p. 376.
38. Malov L. A., Nesterenko V. O., Soloviev V. G. «J. Phys. G; Nucl. Phys.», 1977, v. 3, p. L219.
39. Вдовин А. И. и др. «ЭЧАЯ», 1976, т. 7, с. 952.
40. Очирбат Г. «ТМФ», 1976, т. 26, с. 358.
41. Малов Л. А., Соловьев В. Г. «Ядерная физика», 1975, т. 21, с. 502; «ТМФ», 1975, т. 25, с. 265.
42. Малов Л. А., Очирбат Г. Сообщения ОИЯИ Р4-8447, Р4-8492. Дубна, 1974.
43. Малов Л. А., Нестеренко В. О. Сообщение ОИЯИ Р4-8206. Дубна, 1974; Акулиничев С. В., Малов Л. А. Сообщение ОИЯИ Р4-8844. Дубна, 1974.
44. Вдовин А. И., Соловьев В. Г. «ТМФ», 1974, т. 19, с. 275.
45. Малов Л. А., Соловьев В. Г. Сообщение ОИЯИ Р4-7639. Дубна, 1973.
46. Malov L. A., Soloviev V. G. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 270, p. 87.
47. Малов Л. А., Соловьев В. Г. «Ядерная физика», 1977, т. 26, с. 729.
48. Малов Л. А., Соловьев В. Г. «Ядерная физика», 1976, т. 23, с. 53.
49. Кырчев Г., Соловьев В. Г. «ТМФ», 1975, т. 22, с. 244.
50. Вдовин А. И., Кырчев Г., Стоянов Ч. «ТМФ», 1974, т. 21, с. 137.
51. Кырчев Г., Соловьев В. Г., Стоянов Ч. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1975, т. 39, с. 2015; Иванова С. П. и др. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1976, т. 40, с. 750; Кырчев Г. и др. Сообщение ОИЯИ Р4-9697. Дубна, 1976.
52. Воронов В. В., Соловьев В. Г., Стоянов Ч. «Письма в ЖЭТФ», 1977, т. 25, с. 459.
53. Belyaev S. T., Zelevinsky V. G. «Nucl. Phys.», 1962, v. 39, p. 582.
54. Marumori T., Yamanura M., Tokunaga A. «Progr. Theor. Phys.», 1964, v. 31, p. 1009.
55. Dönauf F. e.a. «Nucl. Phys. A», 1971, v. 172, p. 145; Reinhardt H. «Nucl. Phys. A», 1976, v. 262, p. 231.
56. Soloviev V. G. Neutron capture gamma-ray spectroscopy. Petten, Reactor Centrum Nederland, 1975, p. 99.
57. Соловьев В. Г. Нейтронная физика (Материалы 3-й конференции по нейтронной физике). Ч. 3. Москва 1976, с. 53.
58. Bohr A., Mottelson B. Nuclear Structure. V. 1. N.Y., Benjamin, 1969. (Рус. пер. М., «Мир», 1971).
59. Dambasuren D. e.a. «J. Phys. G: Nucl. Phys.», 1976, v. 2, p. 25.
60. Malov L. A., Nesterenko V. O., Soloviev V. G. «Phys. Lett. B», 1976, v. 64, p. 247; Кырчев Г. и др. «Ядерная физика», 1977, т. 25, с. 951.
61. Bertsch G. F., Tsai S. F. «Phys. Repts C», 1975, v. 18, p. 125.
62. Lynn J. E. The theory of neutron resonance reactions. Oxford, Clarendon Press, 1968.
63. Soloviev V. G. Proc. Intern. Conf. on the Interactions of Neutrons with Nuclei. V. 1. Lowell, Mass., Univ. of Lowell, 1976, p. 421.