«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1978, том 9, вып. 5

УДК 539.182

ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко
Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обзор посвящен классической и квантовой динамике релятивистской струны, как свободной, так и с зарядами и массами на концах. Обсуждается общее решение задачи Коши для уравнений движения струны, а также ряд частных решений. Кроме стандартных методов квантования излагается подход, позволяющий построить релятивистски-инвариантную квантовую теорию струны без ограничений на размерность пространства — времени и без тахионных состояний. Исследован нерелятивистский предел струны с массами на концах. Рассматриваются струноподобные решения в полевых моделях и связь релятивистской струны с проблемой удержания кварков в адронах. Прослежена связь между нелинейными моделями Борна — Инфельда и струной.

The survey is devoted to the classical and quantum dinamics of the free relativistic string and the string with charges and masses at the ends. The general solution to the Cauchy problem of the equations of the string motion and a number of particular solutions are discussed. In addition to the standard quantum theory of the relativistic string the approach which enables the construction of the Lorentz invariant quantum theory without restriction on the space—time dimension and tachyon states is considered in detail. The nonrelativistic limit of the string with massive ends is investigated. The string-like solution in the field models and the connection of the relativistic string with the quark confinement are discussed. The relation of the string to the nonlinear Born—Infeld-type field theories is analysed.

ВВЕДЕНИЕ

Современные представления о строении адронов и механизме их взаимодействия привели к изучению одномерного протяженного объекта — релятивистской струны.

Впервые релятивистская струна была введена в рассмотрение как динамическая основа дуально-резонансных моделей [1—4]. В дуальном подходе предполагается, что адронный спектр эквидистантный и состоит из бесконечного числа резонансов с нулевой шириной. Этот спектр генерируется бесконечным счетным набором осцилляторных операторов рождения и уничтожения $a^+_{n\mu}$, $a_{n\mu}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, каждый из которых является лоренцевым вектором (см. Приложение 1). Такой набор операторов можно получить при квантовании одномерно-протяженного релятивистского объекта конечного размера (струны, нити). Прямое обобщение на релятивистский случай обычной линейной струны с точки зрения дуальных моделей не годится, так как из ее квадратичного лагранжиана не следуют ограничения на физические векторы состояний, которые можно было бы отождествить с условиями Вирасоро в дуальных моделях. Поэтому для релятивистской струны был предложен нелинейный лагранжиан [5, 6].

Помимо дуально-резонансного подхода релятивистская струна представляет интерес как модель удержания кварков в адронах, которая является упрощением соответствующей квантовополевой теории. В настоящее время на роль такой теории, описывающей взаимодействие кварков в адронах, претендует квантовая хромодинамика [7—10]. В рамках хромодинамики удается объяснить основные особенности поведения кварков, а именно то, что на малых расстояниях они практически не взаимодействуют друг с другом и вместе с тем не могут существовать в свободном состоянии вне адронов.

В хромодинамике взаимодействие между кварками переносится векторными мезонными полями Янга—Миллса. Оказывается, что энергетически выгоднее, когда поля не заполняют все пространство, а концентрируются вдоль линий, соединяющих кварки [10, 11]. Энергия двух кварков, связанных такой трубкой глюонного поля, пропорциональна расстоянию между ними. Следовательно, силы притяжения между кварками не убывают с расстоянием, а остаются постоянными. Поэтому никакое внешнее воздействие не может разорвать эту связь и привести к рождению свободного кварка.

Примером таких конфигураций полей, которые уже ранее встречались в физике, являются магнитные вихри Абрикосова в теории сверхпроводимости Ландау — Гинзбурга [12, 13]. При напряженности, большей некоторого критического значения, внешнее магнитное поле в виде тонких сгустков магнитосиловых линий начинает проникать в сверхпроводник второго рода. Следует отметить, что непосредственно в хромодинамике струноподобные решения не были получены, однако в ряде более простых полевых моделей такие решения найдены [14—19].

Конфигурации глюонных полей, локализованные вдоль линий, соединяющих кварки, моделирует релятивистская струна с точечными массами на концах. Релятивистская струна значительно проще, чем такая чрезвычайно сложная квантовополевая модель, как хромодинамика, вместе с тем струнная модель воспроизводит основные предсказания, полученные в полевом подходе [20, 21]. Поэтому релятивистскую струну можно использовать как сравнительно простую модель составного адрона, которая согласуется с хромодинамикой. В частности, релятивистская струна, связывающая две массивные частицы, приводит к потенциалу между ними, линейно растущему с расстоянием.

Следует отметить, что релятивистская струна представляет интерес и вне связи с физикой элементарных частиц — как пример простейшего протяженного релятивистского объекта [22].

Данный обзор не претендует на исчерпывающее изложеэие теории релятивистской струны во всех ее аспектах. По этой теме уже опубликован ряд обзоров [23—26]. Поэтому основное внимание здесь уделяется тем вопросам, которые не получили ранее достаточного освещения.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Д. И. Блохинцева и Н. А. Черникова за плодотворные дискуссии по данной теме.

1. ЛАГРАНЖИАН РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЕ

Вариационный принцип. Действие релятивистской струны строится по аналогии с действием точечной частицы, которое пропорционально длине мировой линии частицы в пространстве Минковского:

$$S_m = -mc \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\dot{x}^2(\tau)}\, d\tau. \tag{1}$$

Обобщением этого принципа на одномерный протяженный объект (струну) является предположение, что действие струны пропорционально площади мировой поверхности, которую она заметает в процессе своего движения. Если x_μ (σ, τ) есть параметрическое задание этой поверхности в пространстве Минковского, то действие струны имеет вид

$$S = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \mathscr{L}_0 = -\gamma \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \tag{2}$$

где

$$\dot{x}_\mu = \partial x_\mu (\sigma, \tau)/\partial\tau, \quad x'_\mu = \partial x_\mu (\sigma, r)/\partial\sigma.$$

Параметр σ нумерует точки струны, а τ играет роль параметра эволюции, что выражается в условиях $\dot{x}^2 \geqslant 0$, $x'^2 < 0$ *. Требование $\dot{x}^2 \geqslant 0$ означает, что скорость точек струны не может превосходить скорость света. Действительно,

$$\dot{x}^2 = (\partial t/\partial\tau)^2 - (\partial \mathbf{x}/\partial\tau)^2 = (\partial t/\partial\tau)^2 [1 - (\partial \mathbf{x}/\partial t)^2] \geqslant 0,$$

* Используется метрика, в которой $x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2$.

откуда следует, что $(\partial \mathbf{x}(\sigma, \tau)/\partial t)^2 \leqslant 1$. Константа γ имеет размерность массы, деленной на время; функции $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, описывают движение концов струны в координатах σ, τ.

Можно показать (см. Приложение 2), что действие струны (2) переходит в действие точечной частицы (1) в том случае, когда длина струны стремится к нулю.

Принцип наименьшего действия для струны $\delta S = 0$ означает с геометрической точки зрения решение задачи Плато [27, 28], т. е. нахождение экстремальной поверхности в пространстве — времени $(t, \mathbf{x})$ с фиксированным начальным $x_\mu(\sigma, \tau_1)$ и конечным $x_\mu(\sigma, \tau_2)$ положением струны. Задача Плато в пространстве Минковского сводится к уравнениям гиперболического типа, а не эллиптического, как в евклидовом пространстве.

Варьирование действия (2) с требованием, чтобы $\delta x_\mu(\sigma, \tau_1) = \delta x_\mu(\sigma, \tau_2) = 0$, приводит к уравнениям движения

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{x}_\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x'_\mu}\right) = 0 \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\partial \mathcal{L}_0/\partial x'_\mu - (\partial \mathcal{L}_0/\partial \dot{x}_\mu)\,\dot{\sigma} = 0, \quad \sigma = \sigma_i(\tau), \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Если проварьировать S относительно функций $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, то получим

$$\mathcal{L}_0(\sigma_1(\tau), \tau) = \mathcal{L}_0(\sigma_2(\tau), \tau) = 0. \tag{5}$$

Действие струны (2) является инвариантным при произвольных заменах параметров σ и τ новыми $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{\sigma} = f_1(\sigma, \tau); \quad \tilde{\tau} = f_2(\sigma, \tau); \quad \partial(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})/\partial(\sigma, \tau) \neq 0. \tag{6}$$

Так как в эти преобразования входят две функции f_i, то согласно второй теореме Нетер [30] левые части уравнений движения (3) должны удовлетворять двум тождествам, а именно: их проекции на векторы $\dot{x}_\mu$ и x'_μ равны нулю (см. Приложение 3). Поэтому функции $x_\mu(\sigma, \tau)$ уравнениями (3) полностью не определяются. На искомые решения можно наложить два дополнительных условия, в качестве которых удобно взять следующие:

$$\dot{x}^2 + x'^2 = 0; \quad \dot{x}x' = 0, \tag{7}$$

или, что эквивалентно,

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0. \tag{7'}$$

Эти требования можно рассматривать как условия на выбор параметров σ, τ на мировой поверхности струны (условия ортогональной калибровки).

С учетом (7) уравнения движения переходят в уравнения Даламбера для вектора $x_\mu(\sigma, \tau)$:

$$\ddot{x}_\mu(\sigma, \tau) - x''_\mu(\sigma, \tau) = 0, \tag{8}$$

а граничные условия (4) принимают вид

$$x'_\mu + \dot{x}_\mu \dot{\sigma}(\tau) = 0; \ \sigma = \sigma_i(\tau); \ i = 1, 2. \tag{9}$$

Требование (5) оказывается теперь просто следствием граничных условий (9) и дополнительных условий (7).

Вариационный принцип не дает никаких уравнений для функций $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, описывающих движение концов струны на плоскости σ, τ. Поэтому, не теряя общности, можно положить, что $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$ и $\sigma_1(\tau) = 0$, $\sigma_2(\tau) = l$. Граничные условия теперь принимают вид

$$x'_\mu(0, \tau) = x'_\mu(l, \tau) = 0. \tag{10}$$

Казалось бы, что с самого начала функции $\sigma_i(\tau)$ можно считать константами. Однако в ряде случаев, как это будет показано ниже на примере струны в электромагнитном поле, оказываются полезными граничные условия (4) с нефиксированными функциями $\sigma_i(\tau)$.

Ковариантный формализм. Решение уравнений движения (8), удовлетворяющее граничным условиям (10), можно получить в виде ряда Фурье

$$x_\mu(\sigma, \tau) = \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \exp\left(-i\frac{n\pi}{l}\tau\right) \frac{\alpha_{n\mu}}{n} \times$$
$$\times \cos\left(\frac{n\pi}{l}\sigma\right) + Q_\mu + P_\mu \frac{\tau}{l\gamma},$$
$$\alpha_{-n\mu} = \alpha^+_{n\mu}. \tag{11}$$

Подстановка (11) в дополнительные условия (7′) дает

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}\alpha_m = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где $\alpha_{0\mu} = P_\mu/\sqrt{\pi\gamma}$. Эти условия фактически сводятся к ограничениям на начальные данные $x_\mu(\sigma, 0)$ и $\dot{x}_\mu(\sigma, 0)$, которые определяют фурье-амплитуды α_n и константы P_μ и Q_μ в разложении (11):

$$\alpha_{n\mu}=2\sqrt{\frac{\gamma}{\pi}}\int\limits_0^l d\sigma\cos\left(\frac{n\pi}{l}\sigma\right)\left\{\dot{x}_\mu(\sigma,0)-i\frac{n\pi}{l}x_\mu(\sigma,0)\right\},$$

$$\alpha_{-n\mu}=\alpha^+_{n\mu},\quad n>0;$$

$$Q_\mu=\frac{1}{l}\int\limits_0^l x_\mu(\sigma,0)\,d\sigma;\quad P_\mu=\gamma\int\limits_0^l \dot{x}_\mu(\sigma,0)\,d\sigma.$$

Такой способ решения получил название ковариантного метода.

Нековариантный метод. Возможен и другой подход к данной задаче, а именно: можно выразить две компоненты вектора $x_\mu(\sigma,\tau)$ через остальные, используя дополнительные условия (7) и так называемые условия калибровки. Дело в том, что, потребовав выполнения (7), мы еще не полностью зафиксировали параметры σ, τ. Уравнения (7), (8) и (9) допускают преобразования $\tilde{\sigma}\pm\tilde{\tau}=f_\pm(\sigma\pm\tau)$ с произвольными функциями $f_\pm$. Определенным выбором функций $f_\pm$ можно добиться того, что будут выполняться условия

$$n\dot{x}=nP/\gamma l,\quad nx'=0,\tag{13}$$

где n_μ — произвольный постоянный вектор, а P_μ — полный импульс струны $P_\mu=\int\limits_0^l d\sigma\,\partial\mathscr{L}_0/\partial\dot{x}^\mu$. С учетом дополнительных условий (7) он равен $P_\mu=\gamma\int\limits_0^l\dot{x}_\mu(\sigma,\tau)\,d\sigma$. Уравнения (13) можно проинтегрировать и свести к одному:

$$nx=nP\tau/\gamma l+nQ.\tag{14}$$

Условия калибровки (14) окончательно фиксируют параметры σ и τ.

Здесь имеет место аналогия с произволом в выборе потенциала $A_\mu(x)$ в электродинамике, который можно заменить на $A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda(x)$ с произвольной функцией $\lambda(x)$. Если же на $A_\mu(x)$ наложить условие Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu(x)=0,\tag{15}$$

то будут допустимы только такие преобразования, когда $\partial_\mu\partial^\mu\lambda(x)=0$. Окончательно зафиксировать выбор $A_\mu(x)$ можно, потребовав, например, дополнительно к (15) $A_0=0$ (кулоновская калибровка).

Используя (14) и дополнительные условия (7′), можно найти частные производные по σ и τ двух компонент вектора x_μ как функции остальных компонент $\mathbf{x}_\perp$. Для этой цели удобно взять в качестве вектора n_μ изотропный вектор $n^2 = 0$ с отличными от нуля двумя компонентами: временной $n^0 = 1$ и пространственной $n^1 = 1$. В переменных светового конуса $x^\pm = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$, $x^\mu = (x^\pm, \mathbf{x}_\perp)$ получаем

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^+ &= l\gamma(\dot{\mathbf{x}}_\perp^2 + \mathbf{x}_\perp'^2)/2P^-; \quad x'^+ = l\gamma\dot{\mathbf{x}}_\perp \mathbf{x}_\perp'/P^-; \\ \dot{x}^- &= P^-/l\gamma; \quad x'^- = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

На этом этапе, очевидно, теряется явная релятивистская инвариантность теории. В терминах фурье-амплитуд равенства (16) принимают вид

$$\alpha_n^{(+)} = (\pi\gamma/P^-)\, L_{n\perp}, \quad n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots; \quad \alpha_k^{(-)} = 0; \quad k \neq 0, \tag{17}$$

где

$$L_{n\perp} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\alpha}_{n-m} \boldsymbol{\alpha}_{m\perp}; \quad \boldsymbol{\alpha}_{0\perp} = \frac{\mathbf{P}_\perp}{\sqrt{\pi\gamma}}; \quad \alpha_0^{(\pm)} = \frac{P^\pm}{\sqrt{\pi\gamma}}. \tag{18}$$

В частности, для массы струны как целого получаем из формул (17) при $n = 0$ следующее выражение:

$$M^2 = P^2 = -\mathbf{P}_\perp^2 + 2P^+P^- = \pi\gamma \sum_{m \neq 0} \boldsymbol{\alpha}_{-m\perp} \boldsymbol{\alpha}_{m\perp}. \tag{19}$$

Отсюда сразу следует положительная определенность величины M^2.

Если в уравнении (14), фиксирующем калибровку, взять другой вектор n_μ, то при разрешении дополнительных условий (7) относительно независимых компонент вектора x_μ появляются квадратные корни, что значительно усложняет переход к квантовой теории.

Начальные данные для поперечных компонент вектора x_μ могут быть заданы произвольно, но они однозначно определяют начальные условия для зависимых компонент $x^\pm$ согласно формулам (16).

2. ЗАДАЧА КОШИ

Задача Коши для релятивистской струны может быть решена и без использования рядов Фурье, причем получается формула, аналогичная формуле Даламбера в теории обычной струны [31].

Остановимся вначале на самой постановке задачи Коши для релятивистской струны. Здесь удобно использовать геометрическую интерпретацию [29]. Вначале рассмотрим бесконечную струну $-\infty < \sigma < +\infty$. Пусть задана в параметрическом виде произвольная пространственно-подобная кривая, описывающая начальное положение струны: $x_\mu(\sigma, 0) = \rho_\mu(\sigma)$, $\rho_\mu'^2(\sigma) < 0$. Далее, пусть в каждой точке этой кривой задан вектор $v_\mu(\sigma)$, не параллельный $\rho'_\mu(\sigma)$, причем плоскость, проходящая через векторы $\rho'_\mu(\sigma)$ и $v_\mu(\sigma)$, пересекает световой конус по двум прямым, что выражается условием гиперболичности

$$(\rho' v)^2 - \rho'^2 v^2 > 0. \tag{20}$$

Как будет показано в дальнейшем, перпендикулярная к $\rho'_\mu(\sigma)$ составляющая вектора $v_\mu(\sigma)$ определяет скорость струны в начальный момент $\dot{x}_\mu(\sigma, 0)$.

Задача Коши состоит в нахождении такого решения уравнений движения струны (8), удовлетворяющего дополнительным условиям (7), которое описывало бы мировую поверхность, проходящую при $\tau = 0$ через кривую $\rho_\mu(\sigma)$ и касающуюся в каждой точке этой кривой плоскости, построенной на векторах $\rho'_\mu(\sigma)$ и $v_\mu(\sigma)$. Из такой постановки задачи видно, что для начальных данных важен не весь вектор $v_\mu(\sigma)$, а только та его составляющая, которая перпендикулярна к $\rho'_\mu(\sigma)$:

$$v(\sigma) = v_{||}(\sigma) + v_\perp(\sigma), \quad v_\perp(\sigma)\,\rho'(\sigma) = 0. \tag{21}$$

Действительно, в задании касательной плоскости участвует только $v_\perp(\sigma)$, и только эта величина входит в условие гиперболичности (20), которое с учетом (21) принимает вид

$$(\rho' v_{||})^2 - \rho'^2 v_{||}^2 - \rho'^2 v_\perp^2 = -\rho'^2 v_\perp^2 > 0 \quad \text{или} \quad v_\perp^2 > 0.$$

Таким образом, различные векторы $v_\mu(\sigma)$, имеющие равные перпендикулярные составляющие $v_\perp(\sigma)$, будут приводить к одним и тем же движениям струны. Следовательно, составляющая v_μ, параллельная ρ'_μ, не имеет физического смысла.

Решение задачи Коши для бесконечной струны было получено в работе [31]:

$$x_\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\left[\rho_\mu(\sigma+\tau) + \rho_\mu(\sigma-\tau)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{\sigma-\tau}^{\sigma+\tau} \frac{(\rho' v)\,\rho'_\mu - \rho'^2 v_\mu}{\sqrt{(\rho' v)^2 - \rho'^2 v^2}}\, d\lambda. \tag{22}$$

Как и следовало ожидать, в формулу (22) входит только перпендикулярная составляющая вектора v_μ. Если использовать разложение (21), то интеграл в (22) записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma-\tau}^{\sigma+\tau} v_\perp(\lambda)\sqrt{-\frac{\rho'^2(\lambda)}{v_\perp^2(\lambda)}}\, d\lambda.$$

Можно показать, что под интегралом в формуле (22) стоит с точностью до постоянного множителя γ плотность канонического импульса струны в начальный момент $\pi_\mu(\sigma, \tau=0)$, где

$$\pi_\mu(\sigma, \tau) = -\partial\mathscr{L}_0/\partial\dot{x}^\mu = \gamma\,[(\dot{x}x')\,x'_\mu - x'^2\dot{x}_\mu]/\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2x'^2}. \quad (23)$$

Подставляя в (23) $x'_\mu(\sigma, 0)$ и $\dot{x}_\mu(\sigma, 0)$ из формулы (22):

$$x'_\mu(\sigma, 0) = \rho'_\mu(\sigma), \quad \dot{x}_\mu(\sigma, 0) = [(\rho'v)\,\rho'_\mu - \rho'^2v_\mu]/\sqrt{(\rho'v)^2 - \rho'^2v^2}, \quad (24)$$

получаем

$$\pi_\mu(\sigma, 0) = \gamma\,[(\rho'v)\,\rho'_\mu - \rho'^2v_\mu]/\sqrt{(\rho'v)^2 - \rho'^2v^2}. \quad (25)$$

Отметим, что скорость точек струны в начальный момент $\dot{x}_\mu(\sigma, 0)$, найденная по формуле (22), совпадает с $v_\mu(\sigma)$ только в том случае, когда начальные данные $\rho'_\mu(\sigma)$ и $v_\mu(\sigma)$ удовлетворяют дополнительным условиям (7):

$$\rho'^2(\sigma) + v^2(\sigma) = 0, \quad \rho'(\sigma)\,v(\sigma) = 0. \quad (26)$$

Если эти условия выполнены, то подынтегральное выражение в формуле (22) есть просто скорость струны в начальный момент:

$$x_\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\Big[\rho_\mu(\sigma+\tau) + \rho_\mu(\sigma-\tau) + \int\limits_{\sigma-\tau}^{\sigma+\tau} v_\mu(\lambda)\,d\lambda\Big], \quad \dot{x}_\mu(\sigma, 0) = v_\mu(\sigma). \quad (27)$$

В общем же случае согласно (24)

$$\dot{x}_\mu(\sigma, 0) = v_{\perp\mu}(\sigma)\,(-\rho'^2(\sigma)/v_\perp^2(\sigma))^{1/2},$$

несмотря на то что в формулы (23) и (25) $\dot{x}_\mu(\sigma, 0)$ и $v_\mu(\sigma)$ входят одинаково. Здесь нет противоречия, так как формулу (23) нельзя обратить, т. е. выразить скорости $\dot{x}_\mu(\sigma, \tau)$ через импульсы $\pi_\mu(\sigma, \tau)$. Это является следствием сингулярности лагранжиана струны [32—34]:

$$\det(\partial\pi_\mu/\partial\dot{x}_\nu) \equiv \det(-\partial^2\mathscr{L}_0/\partial\dot{x}^\mu\,\partial\dot{x}_\nu) = 0.$$

Формула (22) позволяет получить решение задачи Коши и для конечной струны. Чтобы удовлетворить граничным условиям (10), достаточно продолжить за интервал $0 < \lambda < l$ начальные данные $\rho_\mu(\lambda)$ и $\pi_\mu(\lambda)$ [формула (25)] четно относительно точек 0, l.

В физических задачах в качестве начальных данных обычно выбираются положение системы и ее скорость в начальный момент. Если таким же путем рассматривать и движение релятивистской струны, то $\rho_\mu(\sigma) = x_\mu(\sigma, 0)$ и $v_\mu(\sigma) = \dot{x}_\mu(\sigma, 0)$ необходимо подбирать так, чтобы выполнялись условия (26), и строить решение по формуле Даламбера (27).

3. ПРИМЕРЫ КЛАССИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Решение задачи Коши для релятивистской струны позволяет изучать ее конкретные движения из заданных начальных положений [31, 35]. Нелинейный характер этого объекта приводит к ряду особенностей в его движении. Прежде всего, длина струны может меняться в процессе движения, причем струна может даже стягиваться в точку. Скорость свободных концов струны всегда равна скорости света, что является следствием граничных условий (10) и условий ортогональной калибровки (7), согласно которым $\dot{x}^2(\sigma_i, \tau) = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = l$. Полагая $t = \tau$, получаем $d\mathbf{x}(\sigma_i, t)/(dt)^2 = 1$. Если струна в начальный момент покоилась: $x_\mu(\sigma, 0) = 0$, то ее свободные концы в процессе движения остаются на первоначальной конфигурации струны.

Рассмотрим несколько простейших примеров движений струны.

Пусть в начальный момент струна имеет форму окружности радиуса R и покоится в плоскости x, y [31]:

$$x_0(\lambda) = R\cos(\lambda/R);\ \ y_0(\lambda) = R\sin(\lambda/R);$$
$$z_0(\lambda) = 0;\ \ t_0(\lambda) = 0;\ \ \mathbf{v}(\lambda) = 0;\ \ v_t(\lambda) = 1.$$

Из формулы (27) получаем

$$t = \tau;\ \ x(\sigma, t) = R\cos(t/R)\cos(\sigma/R);$$
$$y(\sigma, t) = R\cos(t/R)\sin(\sigma/R);\ \ z = 0.$$

Таким образом, кольцо остается в плоскости x, y и пульсирует с периодом πR. Отметим, что в данном случае безразлично, считать ли струну бесконечной и свернутой в кольцо или же рассматривать ее как конечную, но замкнутую.

Струна, имевшая в начальный момент форму прямолинейного отрезка и покоившаяся, начинает осциллировать, то сжимаясь в точку, то принимая исходные размеры. При этом ее концы периодически меняются местами.

Рассмотрим вращение струны в плоскости. Возьмем начальные данные в следующем виде:

$$x^\mu(\sigma, 0) = \left(0,\ (1\,\sqrt{\gamma}\,\omega)\sin(\omega, \sigma),\ 0,\ 0\right);$$
$$\dot{x}^\mu(\sigma, 0) = \left(1/\sqrt{\gamma},\ 0,\ (1/\sqrt{\gamma})\sin(\omega, \sigma),\ 0\right),\quad -L < \sigma < L.$$

Форма струны в последующие моменты времени показана на рис. 1. Струна вращается, оставаясь в плоскости x, y, но не все ее точки имеют одну и ту же угловую скорость. Поэтому в профиле струны появляются изломы и ее длина меняется во времени. Если же $2\omega L = \pi$, то струна вращается с угловой скоростью ω, как жесткий стержень. Квадрат массы струны определяется следующим выражением:

$$M^2 = P_0^2 = 4\gamma L^2.$$

Угловой момент струны равен

$$J = \gamma \int_{-L}^{+L} d\sigma\,(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{\omega^2}\,[\omega L - \sin(2\omega L)].$$

Если $2\omega L = \pi$, то струна имеет максимальный угловой момент, причем

$$J = (1/2\pi\gamma)\,M^2 = \alpha' M^2.$$

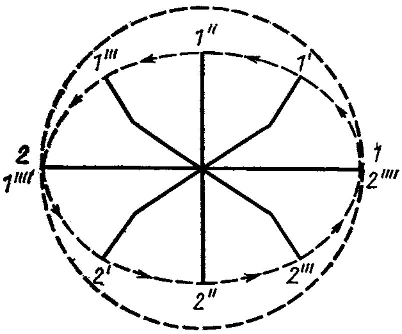

Рис. 1.

Таким образом, имеем линейно растущую реджевскую траекторию с параметром наклона $\alpha' = (2\pi\gamma)^{-1}$.

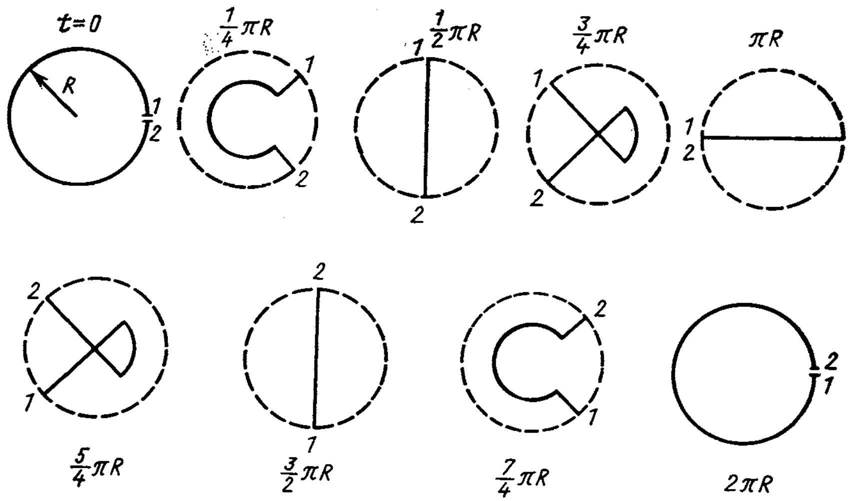

Рис. 2.

На рис. 2 приведены профили струны, имевшей в начальный момент форму круга, разрезанного в одной точке. Концы струны остаются в процессе движения свободными, при этом их траектории совпадают с исходным профилем струны. Движение той же

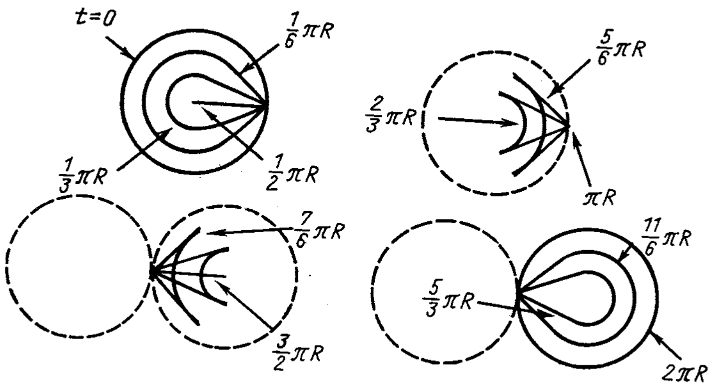

Рис. 3.

струны, но с закрепленными концами показано на рис. 3. В этих примерах размерная константа γ считается равной 1.

4. РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ КВАНТОВАНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Чтобы перейти к квантовой теории, необходимо вначале построить гамильтонов формализм для классической динамики струны. Лагранжиан струны (2), как уже отмечалось, является сингулярным [32—34], так как

$$\det\left(\partial^2 \mathcal{L}_0 / \partial \dot{x}_\mu \, \partial \dot{x}^\nu\right) = 0.$$

Это проявляется в связях между каноническими переменными $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $\pi_\nu(\sigma, \tau) = -\partial \mathcal{L}_0 / \partial \dot{x}^\nu(\sigma, \tau)$:

$$\varphi_1 = \gamma^{-2}\pi^2 + x'^2 = 0, \quad \varphi_2 = \gamma^{-1}\pi_\mu x'^\mu = 0. \tag{28}$$

Далее, $\mathcal{L}_0$ — однородная функция скоростей $\dot{x}_\nu$ первой степени, поэтому согласно теореме Эйлера

$$\dot{x}_\nu \, \partial \mathcal{L}_0 / \partial \dot{x}_\nu = -\dot{x}_\nu \pi^\nu = \mathcal{L}_0. \tag{29}$$

Следовательно, гамильтониан тождественно равен нулю:

$$\mathcal{H}_0 = -\dot{x}_\nu \pi^\nu - \mathcal{L}_0 \equiv 0. \tag{30}$$

Возможны различные подходы к проблеме построения квантовой теории системы со связями [32—34].

Нековариантный метод. Наиболее простой путь учесть связи в теории — это исключить с их помощью зависимые переменные. Для этого, как и в лагранжевом методе, уравнения (28) необходимо дополнить двумя условиями, окончательно фиксирующими калибровку. Чтобы была прямая связь с лагранжевым подходом, в качестве таких условий можно взять следующие:

$$n\pi = nP/l, \quad nx' = 0,$$

где n — постоянный изотропный вектор с двумя отличными от нуля компонентами $n^0 = n^1 = 1$. Тогда, учитывая (16), получаем

$$\pi^+ = l\,[(\gamma^{-1}\boldsymbol{\pi}_\perp)^2 + \mathbf{x}'^2_\perp]/2P^-; \quad x^{+\prime} = l\boldsymbol{\pi}_\perp \mathbf{x}'_\perp/P^-; \quad \pi^- = P^-/l; \quad x^{-\prime} = 0.$$

Гамильтониан, который ответствен за динамику независимых канонических переменных $\mathbf{x}_\perp$ и $\boldsymbol{\pi}_\perp$, можно взять в виде

$$H = \int_0^l d\sigma \mathscr{H} = \frac{P^-}{l} \int_0^l d\sigma \pi^+(\sigma, \tau) = \frac{\gamma}{2} \int_0^l d\sigma \{(\gamma^{-1}\boldsymbol{\pi}'_\perp)^2 + \mathbf{x}'^2_\perp\}. \tag{31}$$

Действительно, из вариационного принципа в гамильтоновом формализме

$$\delta S = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma\, (\boldsymbol{\pi}_\perp \dot{\mathbf{x}}_\perp - \mathscr{H}) = 0$$

следуют канонические уравнения движения

$$\dot{\mathbf{x}}_\perp = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \boldsymbol{\pi}_\perp} = \gamma^{-1}\boldsymbol{\pi}_\perp, \quad \dot{\boldsymbol{\pi}}_\perp = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{x}'_\perp}\right) = \gamma \mathbf{x}''_\perp \tag{32}$$

и граничные условия

$$\partial \mathscr{H}/\partial \mathbf{x}'_\perp = \gamma \mathbf{x}'_\perp = 0, \quad \sigma = 0,\ l,$$

которые эквивалентны соответствующим уравнениям в лагранжевом методе.

Учитывая это, в качестве решений для $\mathbf{x}_\perp(\sigma, \tau)$ и $\boldsymbol{\pi}_\perp(\sigma, \tau)$ можно взять разложения, следующие из (11) и (32):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_\perp(\sigma, \tau) &= \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n \neq 0} \frac{\exp(-i\omega_n \tau)}{n} \boldsymbol{\alpha}_{n\perp} \cos(\omega_n \sigma) + \mathbf{Q}_\perp + \frac{\mathbf{P}_\perp}{l\gamma}\tau; \\ \boldsymbol{\pi}_\perp(\sigma, \tau) &= \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{l} \sum_{n \neq 0} \exp(-i\omega_n \tau) \boldsymbol{\alpha}_{n\perp} \cos(\omega_n \sigma) + \frac{\mathbf{P}_\perp}{l}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где $\omega_n = n\pi / l$; $\boldsymbol{\alpha}_{-n} = \boldsymbol{\alpha}_n^+$.

Фурье-амплитуды зависимых переменных $\alpha_n^{(\pm)}$ будут, очевидно, определяться формулами (17) и (18).

Гамильтониан (31) с учетом разложений (33) принимает вид

$$H=\frac{\pi}{l}L_0=\frac{\pi}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\alpha}_{-n\perp}\boldsymbol{\alpha}_{n\perp}=\frac{\mathbf{P}_\perp^2}{2l\gamma}+\frac{\pi}{2l}\sum_{n\neq 0}\boldsymbol{\alpha}_{-n\perp}\boldsymbol{\alpha}_n. \qquad (34)$$

При переходе к квантовой теории амплитуды $\boldsymbol{\alpha}_{n\perp}$ считаются операторами с коммутационными соотношениями:

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha_n^i,\ \alpha_m^j]=n\delta_{ij}\delta_{n+m,\,0};\ \ [Q^i,\ P^j]=\delta_{ij};\\ n,\ m=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;\ i,\ j=2,\ 3,\ \ldots;\ D-1,\end{array}\right\} \qquad (35)$$

где D — размерность пространства — времени, в котором движется струна. Обычные операторы рождения и уничтожения $\mathbf{a}_{n\perp}^+$ и $\mathbf{a}_{n\perp}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, с коммутаторами

$$[a_n^i,\ a_m^{+j}]=\delta_{n,\,m}\delta_{ij},$$

$$[\mathbf{a}_n^+,\ \mathbf{a}_m^+]=[\mathbf{a}_n,\ \mathbf{a}_m]=0$$

связаны с $\boldsymbol{\alpha}_n$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\alpha}_{n\perp}=\sqrt{n}\,\mathbf{a}_{n\perp};\ \ \boldsymbol{\alpha}_{-n\perp}\equiv\boldsymbol{\alpha}_n^+=\sqrt{n}\,\mathbf{a}_n^+,\ n=1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

Формулы (35) эквивалентны «одновременным» коммутаторам

$$[x^i(\sigma,\ \tau),\ \pi^j(\sigma',\ \tau)]=\mathrm{i}\delta_{ij}\delta(\sigma-\sigma'),$$

$$[x^i(\sigma,\ \tau),\ x^j(\sigma',\ \tau)]=[\pi^i(\sigma,\ \tau),\ \pi^j(\sigma',\ \tau)]=0.$$

Чтобы не иметь дело с бесконечностями, в квантовой теории в формулах (17) и (18) необходимо перейти к нормальному произведению операторов $\boldsymbol{\alpha}_{n\perp}\boldsymbol{\alpha}_{m\perp}$. При этом к классическим выражениям можно добавить некоторую константу, обычно обозначаемую $-\alpha(0)$:

$$\alpha_n^{(+)}=\frac{\sqrt{\pi\gamma}}{P^-}[L_{n\perp}-\delta_{n,\,0}\alpha(0)],$$

где $L_{n\perp}=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}:\boldsymbol{\alpha}_{n-m\perp}\boldsymbol{\alpha}_{m\perp}:$. Эта же константа должна быть введена в формулу для квадрата массы струны (19)

$$M^2=\pi\gamma\sum_{m\neq 0}:\boldsymbol{\alpha}_{-m\perp}\boldsymbol{\alpha}_{m\perp}:-2\pi\gamma\alpha(0) \qquad (36)$$

и в гамильтониан (34)

$$H=\frac{\pi}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}:\boldsymbol{\alpha}_{-n\perp}\boldsymbol{\alpha}_{n\perp}:-\frac{\pi}{l}\alpha(0).$$

Легко получить квантовые уравнения движения. Например, для $\alpha_n(\tau)$ имеем

$$d\alpha_{n\perp}(\tau)/d\tau = \mathrm{i}\,[H,\ \alpha_{n\perp}(\tau)] = \\ = -\mathrm{i}\,(n\pi/l)\,\alpha_{n\perp}(\tau) = -\mathrm{i}\omega_n\alpha_{n\perp}(\tau),$$

т. е. $\alpha_{n\perp}(\tau) = \alpha_{n\perp}\exp(-\mathrm{i}\omega_n\tau)$, что соответствует разложениям (33).

В рассматриваемом случае норма векторов состояний, очевидно, положительна, так как они получаются при действии на вакуум только операторов $\mathrm{a}^{+}_{n\perp}$. Эти векторы в точности совпадают с так называемыми поперечными состояниями в дуально-резонансной модели Венециано [1—4].

Основная проблема в нековариантном подходе — это доказательство релятивистской инвариантности теории в квантовом случае. Для этого необходимо убедиться в том, что генераторы группы Пуанкаре P_μ и $M_{\mu\nu}$, построенные с помощью динамических переменных струны, удовлетворяют известным коммутационным соотношениям. Генератором трансляций является полный импульс струны P_μ, а тензор углового момента струны

$$M_{\mu\nu} = \int_0^l (x_\mu\pi_\nu - x_\nu\pi_\mu)\,d\sigma = Q_\mu P_\nu - Q_\nu P_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\times \\ \times(\alpha_{-n\mu}\alpha_{n\nu} - \alpha_{-n\nu}\alpha_{n\mu}) \qquad (37)$$

есть генератор лоренцевых поворотов. Оказывается, что все коммутационные соотношения имеют правильное значение, кроме коммутатора

$$[M^{+i},\ M^{+j}] = \frac{2\pi\gamma}{P^{-2}}\sum_{m=1}^{\infty}\left[m\left(1-\frac{1}{24}(D-2)\right)+\right. \\ \left.+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{24}(D-2)-\alpha(0)\right)\right](\alpha^i_{-m}\alpha^j_m - \alpha^j_{-m}\alpha^i_m),$$

где $i,\ j = 2,\ 3,\ \ldots,\ D-1$; D — размерность пространства — времени. Алгебра группы Пуанкаре требует, чтобы $[M^{+i},\ M^{+j}] = 0$. Поэтому единственная возможность согласовать данную теорию с релятивистской инвариантностью — это потребовать, чтобы $\alpha(0) = 1$ и $D = 26$. Отсюда следует, в частности, что основное состояние струны, согласно формуле (36), имеет мнимую массу (тахион).

Ковариантный формализм. Можно сохранить явную релятивистскую инвариантность теории, рассматривая все компоненты векторов $x_\mu(\sigma,\ \tau)$ и $\pi_\nu(\sigma,\ \tau)$ равноправными и накладывая дополнительные условия (28) на физические векторы состояний.

Для систем со связями гамильтонов формализм и переход к квантовой теории без исключения зависимых переменных были разработаны в основном Дираком [33]. Следуя этому методу, в качестве гамильтониана релятивистской струны следует взять линейную комбинацию связей (28):

$$H=\int\limits_0^l d\sigma\,[f_1(\sigma,\ \tau)\,\varphi_1(\sigma,\ \tau)+f_2(\sigma,\ \tau)\,\varphi_2(\sigma,\ \tau)],$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции *. Если положить $f_1=0$ и $f_2=-\gamma/2$, то

$$H=-\frac{\gamma}{2}\int\limits_0^l d\sigma\,[(\gamma^{-1}\pi)^2+x'^2].$$

В этом случае гамильтоновы уравнения (32) прямо переходят в уравнения движения в ковариантном лагранжевом методе:

$$\dot{x}_\mu=\gamma^{-1}\pi_\mu;\quad \ddot{x}_\mu-x''_\mu=0;\quad x'_\mu=0,\quad \sigma=0,\ l.$$

Решением для $x_\mu(\sigma,\ \tau)$ является разложение (11), а для $\pi_\mu(\sigma,\ \tau)$, согласно (11), имеем следующий ряд Фурье:

$$\pi_\mu(\sigma,\ \tau)=\gamma\dot{x}_\mu=\frac{\sqrt{\pi\gamma}}{l}\sum_{n\neq0}\exp(-i\omega_n\tau)\,\alpha_{n\mu}\cos(\omega_n\sigma)+\frac{P_\mu}{l},$$

где $\omega_n=n\pi/l$.

В квантовой теории постулируются следующие коммутаторы:

$$[\alpha_{m\mu},\ \alpha_{n\nu}]=-mg_{\mu\nu}\delta_{n+m,\,0},\quad [Q_\mu,\ P_\nu]=-ig_{\mu\nu}, \tag{38}$$

где $g_{00}=-g_{ii}=1$.

Временные компоненты α_{n0}^+, $n>0$, действуя на вакуум, будут приводить к векторам состояний с отрицательной нормой. Физическими состояниями являются только такие, которые удовлетворяют условиям

$$\varphi_i\,|\Phi\rangle=0,\qquad i=1,\ 2,$$

что эквивалентно требованиям

$$[L_n-\delta_{n,\,0}\alpha(0)]\,|\Phi\rangle=0,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{39}$$

где $L_n=-\frac{1}{2}\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}:\alpha_{n-m}\alpha_m:$; $L_n^+=L_{-n}$. Эти условия полностью совпадают с условиями Вирасоро в дуально-резонансной модели Венециано (см. Приложение 1).

---

* Связи (28) по классификации Дирака являются первичными связями, так как они следуют непосредственно из лагранжиана, и одновременно являются связями первого рода, так как их скобка Пуассона выражается через φ_i.

Из формулы (39) при $n=0$ определяется масса струны

$$M^2 = P^2 = -\pi\gamma \sum_{m\neq 0} \alpha_{-m}\alpha_m - 2\pi\gamma\alpha(0). \tag{40}$$

Операторы L_n удовлетворяют следующей алгебре:

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{D}{12} n (n^2-1) \delta_{n+m,0}. \tag{41}$$

Важным моментом является появление c — числового члена в коммутаторе (41). В классической теории, где роль коммутаторов играют скобки Пуассона, этого члена нет:

$$\{L_n, L_m\}_{СП} = \mathrm{i}\,(n-m) L_{n+m}. \tag{42}$$

Алгебра (42) изоморфна алгебре Ли конформной группы на плоскости [23].

Появление швингеровского члена в коммутаторе (41) связано с переходом к нормальному произведению операторов α_n в L_n. Проще всего получить этот член, вычисляя с помощью теоремы Вика [36] среднее по вакууму от коммутатора (41) и учитывая, что спаривание операторов $\alpha_k^\rho \alpha_j^\sigma$ равно $-g^{\rho\sigma}\,\theta(k)\,k\delta_{k+j,0}$.

Физическое пространство векторов состояний с положительной нормой удается построить только в пространстве — времени с размерностью $D=26$ и если $\alpha(0)=1$ [25]. Основное состояние струны, согласно формуле (40), имеет мнимую массу (тахион).

Следует отметить, что светоподобная калибровка (14) здесь явно, казалось бы, не используется, однако так называемые поперечные состояния, необходимые для доказательства теоремы об отсутствии духов, базируются именно на этой калибровке.

Математический аппарат квантовой теории релятивистской струны, рассмотренный здесь, полностью совпадает с операторным формализмом в дуально-резонансной модели Венециано (см. Приложение 1). Это позволяет рассматривать релятивистскую струну как динамическую основу дуально-резонансного подхода.

Нековариантный метод в теории струны аналогичен квантованию электромагнитного поля в кулоновской калибровке, ковариантный подход является аналогом метода Ферми в квантовой электродинамике. Следует, однако, отметить, что здесь есть и существенное различие: дополнительные условия на вектор-потенциал в теории Максвелла линейны, а в теории струны условия (28) квадратичны по x_μ и π_ν.

Необычные результаты в квантовой теории релятивистской струны, такие, как ограничение на размерность пространства — времени, тахионные состояния, с точки зрения дуальных моделей вполне приемлемы. Более того, они даже необходимы, чтобы релятивистскую струну можно было рассматривать как динамическую основу дуальных моделей. Фактически фоковское пространство.

которое было построено в операторном формализме для дуально-резонансных амплитуд, было перенесено без изменений в квантовую теорию релятивистской струны [37].

Однако с физической точки зрения такую ситуацию, конечно, нельзя признать удовлетворительной. Трудно понять, что такой хорошо изученный в классической теории и в нерелятивистской квантовой механике объект, как струна, не может быть последовательно рассмотрен на квантовом уровне в реальном 4-мерном пространстве — времени. Были предприняты попытки найти другие квантовые решения в задаче релятивистской струны, которые бы не сталкивались с указанными выше трудностями. В этом направлении интересные результаты получил Рорлих [38—40].

Квантовая теория релятивистской струны, предложенная Рорлихом. В подходе Рорлиха основными являются следующие два момента:

1) выбор калибровочного условия, фиксирующего параметр τ;

2) использование именно этого условия для исключения состояний с отрицательной нормой, причем физические векторы состояний строятся в системе центра масс струны. Эта система отсчета — единственно выделенная для релятивистского составного объекта, каким является струна. Во всех предыдущих попытках квантования струны этот факт совершенно не учитывался.

Калибровка «светового конуса» (14) с $n^2 = 0$ явно или неявно использовалась во всех предыдущих методах квантования струны. Ее существенный недостаток [35, 41] состоит в том, что она не позволяет описать такие движения струны, когда

$$n(\dot{x} \pm x') = 0. \tag{43}$$

Поэтому Рорлих [40] предложил вместо произвольного вектора n_μ в условиях (13) взять полный импульс струны P_μ:

$$P\dot{x} = P^2/\gamma l, \quad Px' = 0, \tag{44}$$

что эквивалентно требованию

$$Px = P^2\tau/\gamma l + PQ. \tag{45}$$

Можно считать, что $P^2 \neq 0$ и тогда

$$P(\dot{x} \pm x') \neq 0;$$

таким образом, новая калибровка не приводит к каким-либо ограничениям на движение струны.

Подставляя в (45) разложение (11), получаем

$$\alpha_{n\mu}P^\mu = 0, \qquad n \neq 0. \tag{46}$$

Это означает, что в системе центра масс струны, где $\mathbf{P} = 0$, временные фурье-компоненты α_{n0} равны нулю, а именно при квантовании они приводят к состояниям с отрицательной нормой. Поэтому в квантовой теории удобно строить физическое пространство векторов состояний в этой системе отсчета.

Уравнения (46) теперь рассматриваются как условия на векторы состояний $|\mathcal{F}\rangle_{CM}$:

$$G_n|\mathcal{F}\rangle_{CM}=\alpha_{n\mu}P^{\mu}|\mathcal{F}\rangle_{CM}=\alpha_{n0}P^{0}|\mathcal{F}\rangle_{CM}=0, \tag{47}$$

причем достаточно потребовать выполнения этого равенства для $n>0$. Иными словами, на векторы состояний накладываются только отрицательно-частотные компоненты условия (46) аналогично тому, как это делается с условием Лоренца в квантовой электродинамике.

Если предположить, что $P^0|\mathcal{F}\rangle_{CM}\neq 0$, то из (47) получаем

$$\alpha_{n0}|\mathcal{F}\rangle_{CM}=0, \qquad n>0,$$

т. е. и в квантовом случае временные компоненты операторов $\alpha_{n\mu}$, $n>0$, фактически равны нулю *. Таким образом, векторы состояний в системе центра масс струны строятся путем действия на вакуум только пространственных компонент операторов:

$$a^{+}_{m\mu}=\alpha^{+}_{m\mu}/\sqrt{m}, \qquad m>0;$$

$$|\mathcal{F}\rangle_{CM}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(a^{+}_{nx})^{\lambda_{nx}}}{\sqrt{\lambda_{nx}!}}\frac{(a^{+}_{ny})^{\lambda_{ny}}}{\sqrt{\lambda_{ny}!}}\frac{(a^{+}_{nz})^{\lambda_{nz}}}{\sqrt{\lambda_{nz}!}}|0\rangle\equiv|\lambda_1, \lambda_2, \ldots\rangle,$$

где векторы $\lambda_n=(\lambda_{nx}, \lambda_{ny}\ \lambda_{nz},)$ имеют неотрицательные целочисленные компоненты.

В произвольной системе отсчета векторы состояний получаются из $|\mathcal{F}\rangle_{CM}$ действием унитарного оператора

$$U=\exp\{\mathrm{i}a_{\mu}P^{\mu}+(\mathrm{i}/2)\,\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\}, \tag{48}$$

где a_μ — вектор сдвига; $\omega_{\mu\nu}$ — параметры лоренцева поворота; P_μ — полный импульс струны; $M_{\mu\nu}$ — тензор углового момента струны (37). Положительная определенность векторов состояний при этом, очевидно, сохранится, так как $[U, G_n]=0$.

Физические состояния, которые обозначим $|\Phi\rangle$, должны быть подчинены еще дополнительным условиям (12):

$$L_n|\Phi\rangle=\Lambda_n|\Phi\rangle-\frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}}G_n|\Phi\rangle=\Lambda_n|\Phi\rangle=0,\ n>0; \tag{49}$$

$$L_0|\Phi\rangle=\Lambda_0|\Phi\rangle-(P^2/2\pi\gamma)|\Phi\rangle=(-m_0^2/2\pi\gamma)|\Phi\rangle, \tag{50}$$

где $\Lambda_n=-\frac{1}{2}\sum\limits_{m\neq 0,\,n}:\alpha_{n-m}\alpha_m:$.

* Следует отметить, что условие (47) использовалось, например, для исключения состояний с отрицательной нормой в кварковой модели адронов с потенциалом релятивистского осциллятора [42].

Связи G_n, $n>0$, и L_m, $m\geqslant 0$, в совокупности являются связями первого рода по классификации Дирака [33], так как образуют замкнутую алгебру:

$$[G_n, G_m]=0, \ n>0, \ m>0;$$
$$[L_n, L_m]=(n-m)L_{n+m}, \ n, m\geqslant 0;$$
$$[G_k, L_n]=kG_{n+k}, \ k>0, \ n\geqslant 0.$$

Поэтому условия (47), исключающие состояния с отрицательной нормой, и условия (49), (50), определяющие физические векторы состояний, непротиворечивы. Отметим, что в коммутаторе $[L_n, L_m]$ нет c — числового члена, так как $n\geqslant 0$ и $m\geqslant 0$.

Условия (49) и (50), выбирающие из фоковского пространства векторов с положительной нормой $\mathscr{F}^+$ подпространство Φ физических векторов $|\Phi\rangle$, не нарушают релятивистской инвариантности теории, так как $[L_n, U]=0$, $n\geqslant 0$, где U — оператор (48), осуществляющий преобразования из неоднородной группы Лоренца.

В заключение отметим, что вопрос о том, можно ли построить дуальную модель на основе квантовой теории релятивистской струны, предложенной Рорлихом, остается открытым.

5. СТРУНА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Лагранжиан взаимодействия. Основным принципом при выборе лагранжиана взаимодействия является сохранение репараметризационной инвариантности, которой обладает действие свободной струны [43]. В случае электромагнитного поля этому условию удовлетворяет следующий лагранжиан:

$$\mathscr{L}_{\text{int}}=gx'_\mu\dot{x}_\nu F^{\mu\nu}(x). \tag{51}$$

Соответствующее действие имеет вид

$$S_{\text{int}}=g\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)}d\sigma\, x'_\mu\dot{x}_\nu F^{\mu\nu}(x)=-g\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\frac{dx_\nu}{d\tau}A^\nu(x)\Big|_{\sigma=\sigma_1(\tau)}+$$
$$+g\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\frac{dx_\nu}{d\tau}A^\nu(x)\Big|_{\sigma=\sigma_2(\tau)}, \tag{52}$$

где $\partial x_\nu/\partial\tau=\dot{x}_\nu+x'_\nu\dot{\sigma}(\tau)$. Таким образом, S_{int} описывает взаимодействие с электромагнитным полем двух точечных зарядов, расположенных на концах струны. Эти заряды равны по величине и противоположны по знаку: $g_1=-g_2=g$.

Из равенства (52) следует, что электромагнитное поле не изменяет ни уравнений движения (8), ни дополнительных условий (7), которые остаются такими же, как и в свободном случае. Граничные условия получаются из уравнений (4) заменой $\mathscr{L}_0$ на $\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\text{int}}$ и имеют вид

$$\gamma x'_\nu + gF_{\nu\mu}\dot{x}^\mu + (\dot{x}_\nu + gF_{\nu\mu}x'^\mu)\dot{\sigma} = 0, \quad \sigma = \sigma_i(\tau), \qquad i = 1, 2. \tag{53}$$

Вариационный принцип и в этом случае не определяет явный вид функций $\sigma_i(\tau)$, $i = 1, 2$, поэтому можно вновь положить $\sigma_1(\tau) = 0$, $\sigma_2(\tau) = l$. Это существенно упрощает граничные условия (53):

$$\gamma x'_\mu + gF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = 0, \qquad \sigma = 0, l. \tag{54}$$

Найти решение уравнений движения (8), удовлетворяющее граничным условиям (54), удается в двух случаях: когда $F_{\mu\nu} = \text{const}$ [44—46] (постоянное однородное электромагнитное поле) и в поле плоской монохроматической электромагнитной волны [47].

Эти примеры показывают, что взаимодействие с электромагнитным полем не меняет эквидистантного характера спектра масс струны. Следует отметить некоторые особенности в постановке данной задачи. В действии (52) внешнее электромагнитное поле считается заданным, а излучение зарядов струны, их воздействие друг на друга через электромагнитное поле и массы зарядов не учитываются. Это приводит, в частности, к тому, что заряженные концы струны могут двигаться со скоростью света.

Постоянное однородное электромагнитное поле. Ковариантный формализм. Если $F_{\mu\nu} = \text{const}$, то решение представляется рядом Фурье [45]

$$\begin{aligned} x^\mu(\sigma, \tau) = \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{2n} \Big\{ &\alpha_n^\mu \exp[-i\omega_n(\sigma+\tau)] + \\ &+ [(1-f)^{-1}]^\mu_\rho (1+f)^{\rho\beta} \alpha_{n\beta} \exp[i\omega_n(\sigma-\tau)] + \\ &+ [(1-f^2)^{-1}]^\mu_\rho Q^\rho + \frac{1}{l\gamma} P^\mu \tau - f^{\mu\rho} \frac{P_\rho}{l\gamma}\left(\sigma - \frac{l}{2}\right) \Big\}, \end{aligned} \tag{55}$$

где $\omega_n = n\pi/l$; $f_{\mu\nu} = gF_{\mu\nu}/\gamma$; $\alpha_{-n\mu} = \alpha^*_{n\mu}$. Это разложение описывает движение релятивистской струны в таких полях, для которых

$$\begin{aligned} &\det \| (1-f)^\mu_\nu \| = \det \| (1+f)^\mu_\nu \| = \\ &= 1 + (g/\gamma)^2 (H^2 - E^2) - (g/\gamma)^4 (\mathbf{EH})^2 \neq 0. \end{aligned}$$

В частности, формула (55) теряет смысл, когда $(g/\gamma)^2 E^2 = 1$ и $\mathbf{H} = 0$ [44]. Явный вид обратных матриц $(1 - f)^{-1}$ и $(1 - f^2)^{-1}$, входящих в разложение (55), в дальнейшем не потребуется *.

* Здесь принято следующее определение обратной матрицы A^{-1}: $(A^{-1})^\mu_\rho A^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu$, где δ^μ_ν — символ Кронекера. Вверх всегда подымается первый индекс у лоренцева тензора $A_{\mu\nu}$: $A^\mu_\nu = g^{\mu\rho}A_{\rho\nu}$. Матрицы $(1 + f)^{-1}$ и $(1 - f^2)^{-1}$ были найдены в работе [48].

Подстановка решения (55) в дополнительные условия (7′) приводит к тем же ограничениям на амплитуды Фурье $\alpha_{n\mu}$, что в свободном случае

$$L_n = -\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m\mu}\alpha_m^{\mu} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad L_{-n} = L_n^*. \tag{56}$$

Только в нулевую моду $\alpha_{0\mu}$ теперь входит тензор $f_{\mu\nu}$:

$$\alpha_{0\mu} = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}}(1-f)_{\mu\rho}P^{\rho}.$$

Тот факт, что дополнительные условия (56) совпали с условиями Вирасоро, не удивителен, так как S_{int} (52)′ обладает такой же репараметризационной инвариантностью, как и действие свободной струны (2).

Для плотности канонического импульса имеем следующее выражение:

$$\pi_{\mu} = -\partial\mathscr{L}/\partial\dot{x}^{\mu} = \gamma(\dot{x}_{\mu} + f_{\mu\nu}x'^{\nu}) =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi\gamma}}{l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(1+f)_{\mu\rho}\,\alpha_n^{\rho}\exp(-i\omega_n\tau)\cos(\omega_n\sigma). \tag{57}$$

Полный канонический импульс струны

$$\Pi_{\mu} = \int_0^l d\sigma\,\pi_{\mu}(\sigma, \tau) \tag{58}$$

сохраняется. Действительно,

$$\frac{d\Pi_{\mu}}{d\tau} = -\int_0^l d\sigma\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}^{\mu}}\right) = \int_0^l d\sigma\,\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x'^{\mu}}\right) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x'^{\mu}}\bigg|_{\sigma=0}^{\sigma=l} = 0.$$

При получении этого равенства были использованы уравнения движения (3) и граничные условия (4) с заменой $\mathscr{L}_0$ на $\mathscr{L}$.

Подставляя разложение (57) в (58), получаем

$$\Pi_{\mu} = (1-f^2)_{\mu\rho}P^{\rho}. \tag{59}$$

Если для свободной струны можно было считать, что механический и канонический импульсы совпадают (по аналогии с теорией свободной точечной частицы), то для струны с зарядами во внешнем поле это не так. Возникает вопрос, как определить массу струны в данном случае. Можно считать, например, что $M^2 = \Pi^2$. Но такое определение, как было показано в работе [49], приводит к тахионным состояниям уже в классической теории.

Эту трудность можно обойти, если положить, что

$$M^2 = P^2,$$

где P_μ — константа, стоящая в линейном по τ члене в разложении (55). Используя условие (56) при $n = 0$, получаем

$$M^2 = P^2 = P_\mu (f^2)^{\mu\nu} P_\nu - \gamma\pi \sum_{n\neq 0} \alpha_{-n}\alpha_n. \tag{60}$$

Далее будет показано, что эта величина действительно оказывается положительно определенной.

Изложенный выше метод является ковариантным формализмом для релятивистской струны во внешнем поле. Можно получить и нековариантное решение этой задачи, подобно тому, как это было сделано в теории свободной струны.

Нековариантный формализм [44]. Прежде всего необходимо найти условия калибровки, аналогичные (13), причем они не должны противоречить требованию $\dot{\sigma}_i(\tau) = 0$, $i = 1, 2$. При выборе калибровки удобно использовать граничные условия (53), в которых функции $\sigma_i(\tau)$ еще не зафиксированы. Спроектируем уравнения (53) на постоянный вектор n:

$$nx' + nf\dot{x} + (n\dot{x} + nfx')\dot{\sigma} = 0, \quad \sigma = \sigma_i(\sigma), \quad i = 1, 2. \tag{61}$$

Теперь выберем калибровку, задав следующие условия:

$$nx' + nf\dot{x} = 0; \quad n\dot{x} + nfx' = n\Pi/\gamma l, \tag{62}$$

где Π_μ — полный канонический импульс струны (58), (59). Из (61) и (62) следует, что $\dot{\sigma}_i = 0$, т. е. калибровка (62) однозначно фиксирует функции $\sigma_i(\tau)$.

Можно показать [44], что условия (62) фактически означают переход к новым параметрам $\tilde{\sigma} \pm \tilde{\tau} = f_\pm(\sigma \pm \tau)$ с функциями $f_\pm$, определяемыми конкретным движением струны.

Уравнения (62) и (7) позволяют выразить две компоненты вектора $x_\mu(\sigma, \tau)$ через остальные. Для этого необходимо рассмотреть определенную конфигурацию внешнего электромагнитного поля и подобрать постоянный вектор n_μ.

Произвольное электромагнитное поле соответствующим преобразованием Лоренца может быть сведено к следующим четырем случаям [50]:

1) $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$ ($E^2 - H^2 > 0$, $\mathbf{EH} = 0$);

2) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} \neq 0$ ($E^2 - H^2 < 0$, $\mathbf{EH} = 0$);

3) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ отличны от нуля и параллельны (инвариант $E^2 - H^2$ принимает произвольные значения, $\mathbf{EH} = 0$);

4) электрическое и магнитное поля во всех системах отсчета равны по величине и перпендикулярны друг другу ($E^2 - H^2 = 0$, $\mathbf{EH} = 0$).

Если отлично от нуля только электрическое или только магнитное поле, то матрица $(F^2)^\mu_\nu$ кратна единичной и из граничных условий (54) с учетом (7) следует, что скорость концов струны в этом случае равна скорости света. Для других конфигураций электромагнитного поля граничные условия не определяют однозначно скорость концов струны.

Во всех четырех случаях, указанных выше, удается получить решение в виде рядов Фурье и определить оператор квадрата массы струны [44]. Оказывается, что электрическое поле приводит к увеличению расстояния между эквидистантными уровнями этого оператора. Из решений видно, что существуют предельные значения электрического поля, при которых решения меняют свой характер. Эти значения равны $E = \pm E_{\text{кр}}$, где $E_{\text{кр}} = (2\pi\hbar c\alpha' g)^{-1}$. Если принять, что заряды на концах струны по абсолютной величине равны заряду электрона, а $\alpha' \approx 0{,}9$ *Гэв*$^{-2}$ (как это делается при сопоставлении свободной релятивистской струны с дуальными моделями), то $E_{\text{кр}} \approx 10^{22}$ *в/см*. Для сравнения отметим, что это значение превышает в 10^{12} раз напряженность электрического поля, действующего в атоме водорода на электрон. При значении внешних полей $|\,\mathbf{E}\,| \ll E_{\text{кр}}$, $|\,\mathbf{H}\,| \ll E_{\text{кр}}$ все решения для струны во внешнем поле переходят в свободные.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ отличны от нуля и параллельны. Решение задачи в остальных случаях проводится аналогично.

Направим поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по оси x:

$$f_{01} = gE/\gamma = e, \quad f_{32} = gH/\gamma = h.$$

Постоянный вектор n, входящий в условия калибровки (62), удобно взять в следующем виде:

$$n^\mu = (1,\ 1,\ 0,\ 0). \tag{63}$$

Подставляя (63) в (62), получаем

$$x'^- = e\dot{x}^-; \quad \dot{x}^- = ex'^- + \sqrt{2}\,\Pi^-/\gamma l. \tag{64}$$

Граничные условия (54) в покомпонентной записи имеют вид

$$x'^\pm \pm e\dot{x}^\pm = 0; \quad y' + h\dot{z} = 0; \quad z' - h\dot{y} = 0 \tag{65}$$

при $\sigma = 0$ и $\sigma = l$.

Независимыми переменными будем считать y и z. Уравнениям движения (8) и граничным условиям (65) удовлетворяют следующие разложения y и z в ряды Фурье:

$$y(\sigma, \tau) = [Q_y + P_y\tau/\gamma l - hP_z(\sigma - l/2)/\gamma l](1+h^2)^{-1/2} +$$
$$+ \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma(1+h^2)}} \sum_{m\neq 0} \frac{\exp(-i\omega_m\tau)}{m} [\alpha_{my}\cos(\omega_m\sigma) + ih\beta_{mz}\sin(\omega_m\sigma)];$$
$$z(\sigma, \tau) = [Q_z + P_z\tau/\gamma l + hP_y(\sigma - l/2)/\gamma l](1+h^2)^{-1/2} +$$
$$+ \frac{i}{\sqrt{\pi\gamma(1+h^2)}} \sum_{m\neq 0} \frac{\exp(-i\omega_m\tau)}{m} [\alpha_{mz}\cos(\omega_m\sigma) - ih\alpha_{my}\sin(\omega_m\sigma)], \tag{66}$$

где $\omega_m = m\pi/l$.

Зависимые компоненты $x^{\pm}$ определяются из уравнений (64) и (7):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^+ &= \frac{\gamma l}{2\Pi^-}(\dot{\mathbf{x}}_\perp^2 + \mathbf{x}_\perp'^2 - 2e\dot{\mathbf{x}}_\perp\mathbf{x}_\perp'); \quad \dot{\mathbf{x}}^- = \frac{\Pi^-}{\gamma l}\frac{1}{1-e^2}; \\ x'^+ &= -\frac{\gamma l}{2\Pi^-}[e(\dot{\mathbf{x}}_\perp^2 + \mathbf{x}_\perp'^2) - 2\dot{\mathbf{x}}_\perp\mathbf{x}_\perp']; \quad \mathbf{x}'^- = \frac{\Pi^-}{\gamma l}\frac{e}{1-e^2}, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

где $\mathbf{x}_\perp$ — двумерный вектор с компонентами y и z. Зависимые компоненты также можно представить рядами Фурье, удовлетворяющими граничным условиям (65):

$$x^{\pm}(\sigma, \tau) = \frac{i}{2\sqrt{\pi\gamma}} \sum_{n\neq 0} \frac{\exp(-i\omega_n\sigma)}{n} [(1 \pm e)\alpha_n^{(\pm)}\exp(-i\omega_n\tau) -$$
$$- (1 \mp e)\alpha_{-n}^{(\pm)}\exp(i\omega_n\tau)] + \frac{P^{\pm}}{l\gamma}(\tau \mp e\sigma). \tag{68}$$

Подставляя (66) и (68) в (67), получаем

$$\alpha_n^{(+)} = (\sqrt{\pi\gamma}/\Pi^-)L_{n\perp}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \alpha_k^{(-)} = 0; \ k \neq 0;$$
$$\Pi^- = P^-(1-e^2), \tag{69}$$

где

$$L_{n\perp} = \frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m\perp}\alpha_{m\perp}; \ \alpha_0^\mu = \frac{P^\mu}{\sqrt{\pi\gamma}}; \quad \mu = \pm, y, z.$$

Плотность канонического импульса (57) имеет следующие компоненты:

$$\pi_y = \gamma(\dot{y} + hz'); \ \pi_z = \gamma(\dot{z} - hy'); \ \pi^{\pm} = \gamma(\dot{x}^{\pm} \pm ex^{\pm\prime}).$$

Разложения (66) и (68) позволяют представить π_μ в виде

$$\pi_\perp=\frac{\sqrt{1+h^2}}{l}\left[\mathbf{P}_\perp+\sqrt{\pi\gamma}\sum_{m\neq 0}\exp(-i\omega_m\tau)\,\boldsymbol{\alpha}_\perp\cos(\omega_m\sigma)\right].$$

$$\pi^+=\frac{1-e^2}{l}\left[P^++\sqrt{\pi\gamma}\sum_{m\neq 0}\exp(-i\omega_m\tau)\,\alpha_m^{(+)}\cos(\omega_m\sigma)\right];$$

$$\pi^-=\frac{1-e^2}{l}P^-.$$

Динамика независимых канонических переменных $\mathbf{x}_\perp$ и $\pi_\perp$ определяется функцией Гамильтона

$$H=\frac{\gamma}{2}\int_0^l d\sigma\{(\gamma^{-1}\pi_y-hz')^2+(\gamma^{-1}\pi_z+hy')^2+\mathbf{x}_\perp'^2\}=$$

$$=\frac{\pi}{l}(1-e^2)L_{0\perp}.$$

Для квадрата массы струны $M^2=P^2$ из (69) получаем

$$M^2=(1-e^2)^{-1}\,[\pi\gamma\sum_{m\neq 0}\boldsymbol{\alpha}_{-m\perp}\boldsymbol{\alpha}_{m\perp}+e^2\mathbf{P}_\perp^2]\,. \tag{70}$$

Таким образом, M^2 положительно определенная величина, так как считается, что $e^2<1$. При $e\to 0$ формула (70) переходит в выражение для квадрата массы свободной струны (19).

Квантовая теория. Квантование релятивистской струны в постоянном однородном электромагнитном поле во многом аналогично квантованию свободной струны. Полный лагранжиан с учетом взаимодействия (51) сингулярен, поэтому канонические переменные $x_\mu(\sigma,\tau)$ и $\pi_\mu(\sigma,\tau)$ подчиняются условиям

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=(\gamma^{-1}\pi_\mu-f_{\mu\nu}x'^\nu)^2+x_\mu'^2=0;\\ \varphi_2&=(\gamma^{-1}\pi_\mu-f_{\mu\nu}x'^\nu)\,x'^\mu=0.\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Гамильтониан, построенный по обычным правилам (30), тождественно равен нулю. Поэтому функцией Гамильтона служит линейная комбинация связей (71)

$$H=-\frac{\gamma}{2}\int_0^l d\sigma\,[(\gamma^{-1}\pi_\mu-f_{\mu\nu}x'^\nu)^2+x_\mu'^2]. \tag{72}$$

Первое уравнение Гамильтона

$$\dot{x}_\mu=-\partial\mathscr{H}/\partial\pi^\mu=\gamma^{-1}\pi_\mu-f_{\mu\nu}x'^\nu \tag{73}$$

устанавливает связь между каноническим импульсом π_μ и координатой x_μ. Второе уравнение Гамильтона имеет вид

$$\dot{\pi}_\mu = \gamma x''_\mu - (\pi'_\sigma - \gamma f_{\sigma\nu} x''^\nu) \overline{f^\sigma_\mu}. \tag{74}$$

Из (72) и (73) следует, что

$$\ddot{x}_\mu - x''_\mu = 0.$$

Граничные условия

$$\partial\mathcal{H}/\partial x'_\mu = 0, \ \sigma = 0, \ l$$

с учетом (73) записываются так:

$$x'_\mu + f_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = 0, \quad \sigma = 0, \ l.$$

Следовательно, выбор функции Гамильтона в форме (72) сводит гамильтонов формализм к лагранжевой динамике в ортогональной калибровке. Поэтому в качестве решений для $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $\pi_\mu(\sigma, \tau)$ можно взять разложения (55) и (57). Учитывая это, получаем следующее выражение для функции Гамильтона (72):

$$H = \frac{\pi}{l} L_0 = -\frac{\pi}{2l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-m}\alpha_m.$$

Связи (71) после подстановки в них решений (55) и (57) сводятся к условиям (56) на фурье-амплитуды α_n.

При переходе к квантовой теории, как и в свободном случае, постулируются коммутационные соотношения (38), а коммутаторы между Q_μ, P_ν и $\alpha_{n\rho}$ считаются равными нулю. Это эквивалентно обычным «одновременным» коммутаторам

$$[x_\mu(\sigma, \tau), \pi_\nu(\sigma', \tau)] = -ig_{\mu\nu}\delta(\sigma - \sigma');$$

$$[x_\mu(\sigma, \tau), x_\nu(\sigma', \tau)] = [\pi_\mu(\sigma, \tau), \pi_\nu(\sigma', \tau)] = 0.$$

Теперь проблема сводится к исключению состояний с отрицательной нормой. Будем следовать методу Рорлиха и наложим на решение (55) условия, аналогичные (44). Для этого в уравнениях светоподобной калибровки для струны во внешнем поле (62) заменим постоянный вектор n_μ вектором K_μ, связанным с полным механическим импульсом струны P_μ: $K_\mu = (1 + f)^{-1}_{\mu\rho}P^\rho$. Калибровку теперь зададим следующим образом:

$$K_\mu x'^\mu + K_\mu f^{\mu\nu}\dot{x}_\nu = 0; \ K_\mu \dot{x}^\mu + K_\mu f^{\mu\nu} x'_\nu = K_\mu \Pi^\mu / l\gamma. \tag{75}$$

Подставляя (55) и (59) в (75), получаем требование

$$\alpha_{n\mu}P^\mu = 0, \quad n \neq 0, \tag{76}$$

означающее, что в системе центра масс струны, где $\mathbf{P} = 0$, временные фурье-компоненты α_{n0} отсутствуют: $\alpha_{n0} = 0, \ n \neq 0$.

Поэтому пространство векторов состояний с положительной нормой в системе центра масс струны строится так же, как и для свободной струны. Далее, эти векторы должны быть подчинены еще условиям ортогональной калибровки (56), которые с учетом (76) принимают вид

$$L_n\,|\,\Phi\rangle=\left(\Lambda_n+\frac{1}{\sqrt{\pi\gamma}}\,\alpha_{n\mu}f^{\mu\nu}P_\nu\right)|\,\Phi\rangle=0,\quad n>0; \tag{77}$$

$$L_0\,|\,\Phi\rangle=\left(\Lambda_0-\frac{1}{2\pi\gamma}\,[P^2-P^\mu\,(f^2)_{\mu\nu}P^\nu]\right)|\,\Phi\rangle=\alpha\,(0)\,|\,\Phi\rangle, \tag{78}$$

где $\Lambda_n=(-1/2)\sum\limits_{m\neq 0,\,n}:\alpha_{n-m}\alpha_m:$. Операторы, входящие в уравнения (76) — (78), образуют замкнутую алгебру, т. е. их коммутаторы в слабом смысле [33] равны нулю. Таким образом, эта система связей непротиворечива.

С помощью условия (78), записанного в системе, где $\mathbf{P}=0$, формулу для квадрата массы струны во внешнем электромагнитном поле можно представить в виде

$$M^2=P_0^2=\frac{2\pi\gamma}{1-(gE/\gamma)^2}\sum_{n=1}^{\infty}n{:}\mathbf{a}_n^+\mathbf{a}_n{:}+m_0^2, \tag{79}$$

где

$$m_0^2=-2\pi\gamma\alpha\,(0)/[1-(gE/\gamma)^2].$$

Знак m_0^2 определяется из следующих рассуждений. Оператор P_0^2 в системе центра масс струны имеет, очевидно, положительный спектр, а собственные значения N оператора $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n{:}\ \mathbf{a}_n^+\mathbf{a}_n{:}$ могут быть равны любому целому положительному числу $N=0, 1, 2, \ldots$ Если $(gE/\gamma)^2<1$, то, действуя соответственно левой и правой частью равенства (79) на $|\,\Phi\rangle_{CM}$, получаем условие $m_0^2>0$ или $\alpha\,(0)<1$, т. е. струна не имеет тахионных состояний. Если же $(gE/\gamma)^2>1$, то это ведет к требованию

$$m_0^2>2\pi\gamma N/\left|1-\left(\frac{g}{\gamma}\,E\right)^2\right|,$$

которому нельзя удовлетворить никаким конечным значением m_0^2, так как N может быть сколь угодно велико. Таким образом, приходим к выводу, полученному ранее в нековариантном формализме, о том, что релятивистскую струну во внешнем электромагнитном поле можно рассматривать в ортогональной калибровке только в том случае, если $(gE/\gamma)^2<1$.

Из формулы (79) следует, что оператор M^2 имеет эквидистантный спектр, но расстояние между его уровнями увеличивается в $[1-(gE/\gamma)^2]^{-1}$ раз по сравнению со свободным случаем.

Таким образом, метод Рорлиха позволяет построить квантовую теорию релятивистской струны, взаимодействующей с постоянным однородным электромагнитным полем, которая релятивистски-инвариантна и не имеет тахионных состояний. На квантовании этой модели нековариантным методом [44] мы останавливаться не будем, так как оно проводится в полной аналогии с теорией свободной струны.

Плоская монохроматическая волна. Точное решение уравнений движения было получено для релятивистской струны в поле плоской монохроматической электромагнитной волны [47]. Не приводя решение явно, отметим лишь его характерные особенности. Концы струны, как и в свободном случае, движутся со скоростью света. Решение имеет резонансный характер. Условие возникновения резонанса следующее:

$$2kP = n,$$

где k — волновой вектор электромагнитного поля; P — полный импульс струны; n — любое целое число. Массовый спектр струны остается таким же, как и в свободном случае.

6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА С МАССАМИ НА КОНЦАХ

Помимо струны с зарядами, были рассмотрены различные модели массивной релятивистской струны [51—57]. Требование репараметризационной инвариантности не позволяет распределить массу, так же как и заряд, вдоль струны. Остается единственная возможность — поместить массы на концах струны. Если же отказаться от репараметризационной инвариантности, то в этом случае нельзя будет последовательно ввести в теорию ограничения на динамические переменные (калибровочные условия), с помощью которых можно было бы исключить состояния с отрицательно определенной нормой [53].

Действие струны с массами на концах имеет вид

$$S = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} - m \sum_{i=1}^{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}^2(\sigma_i, \tau)}, \quad (80)$$

где $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = l$.

Уравнения движения (8) и дополнительные условия (7) остаются такими же, как и в свободном случае. Граничные же условия теперь существенно нелинейные:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) &= \gamma x'_\nu, \quad \sigma = 0; \\ m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_\nu}{\sqrt{\dot{x}^2}}\right) &= -\gamma x'_\nu, \quad \sigma = l. \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Было получено частное решение для струны с массами на концах, вращающейся с угловой скоростью ω, как жесткий стержень [52]. Можно ожидать по аналогии со случаем свободной струны, что именно это движение дает главную реджевскую траекторию, т. е. струна при заданной массе имеет максимальный угловой момент.

Полагая $\tau = t$, решение можно представить так:

$$\mathrm{x}(\sigma, t) = \rho(\sigma)(\cos\omega t, \sin\omega t, 0),$$

причем явный вид функции $\rho(\sigma)$ несуществен из-за инвариантности теории относительно σ, τ-репараметризации. Единственное условие на функцию $\rho(\sigma)$ следующее:

$$\omega\rho(0) = -\omega\rho(l) = \omega R,$$

где $\omega R = \sqrt{1 + (M\omega/2\gamma)^2} - m\omega/2\gamma$.

Формулы для энергии E и углового момента J имеют довольно сложный вид:

$$E = (2\gamma/\omega)\left[\arcsin(\omega R) + m\omega/\gamma \sqrt{1 - R^2\omega^2}\right];$$

$$J = (\gamma/\omega^2)\left[\arcsin(\omega R) + \omega R\sqrt{1 - \omega^2 R^2}\right] + 2m\omega R^2/\sqrt{1 - R^2\omega^2}.$$

Связь между J и E^2 теперь нелинейная.

Получить общее решение уравнений движения (8), удовлетворяющее нелинейным граничным условиям (81), не удается. Если же ограничиться такими движениями струны, для которых параметр τ является собственным временем массивных точек на концах струны [54], т. е.

$$\dot{x}^2(0, \tau) = x^2(l, \tau) = m^{-2}, \tag{82}$$

то граничные условия (81) станут линейными:

$$\ddot{x}_\nu(0, \tau) = qx'_\nu(0, \tau); \quad \ddot{x}_\nu(l, \tau) = -qx'_\nu(l, \tau), \quad q = \gamma/m^2. \tag{83}$$

С помощью замены переменных $\sigma \pm \tau \to f_\pm(\sigma \pm \tau)$, относительно которой инвариантны уравнения движения (8), дополнительные условия (7) и граничные условия (81), можно показать, что равенства (82) будут выполнены, если

$$\dot{x}^2(0, \tau + l) = \dot{x}^2(l, \tau); \quad \dot{x}^2(\sigma_i, \tau) = \dot{x}^2(\sigma_i, \tau + 2l), \ i = 1, 2.$$

Отметим, что фиксирование калибровки одним условием (82) не привело бы к ограничению движений струны, если бы точечной массой была нагружена бесконечная струна или же масса была помещена на конец полубесконечной струны [57].

Полагая $x(\sigma, \tau) = \exp(-i\omega\tau)\, u(\sigma)$, приходим к следующей краевой задаче для функции $u(\sigma)$:

$$u''(\sigma) + \omega^2 u(\sigma) = 0;$$
$$\omega^2 u(0) = -qu'(0); \quad \omega^2 u(l) = qu'(l).$$

Решение имеет вид

$$u_n(\sigma) = N_n [\cos(\omega_n \sigma) - (\omega_n/q) \sin(\omega_n \sigma)], \tag{84}$$

где N_n — нормировочные множители, а ω_n — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}(\omega_n l) = 2\omega_n q/(\omega_n^2 - q^2),$$

которое эквивалентно следующим двум:

$$\operatorname{tg}(\omega_n l/2) = -\omega_n/q \quad (n \text{ — четные});$$
$$\operatorname{ctg}(\omega_n l/2) = \omega_n/q \quad (n \text{ — нечетные}).$$

Такие же уравнения, только отличающиеся знаком, были получены в работе [53] при рассмотрении релятивистской струны с массами в рамках другого подхода.

Собственные функции (84) удовлетворяют условиям ортогональности [58]

$$\int_0^l d\sigma u_n(\sigma)\, \xi(\sigma)\, u_m(\sigma) = \delta_{n,m}$$

и полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\sigma)\, u_n(\sigma')\, \xi(\sigma') = \delta(\sigma, \sigma'), \tag{85}$$

где $\xi(\sigma) = 1 + (1/q)[\delta(\sigma) + \delta(\sigma - l)]$, а функция $\delta(\sigma, \sigma')$ определяется требованием, чтобы

$$\int_0^l d\sigma' \delta(\sigma, \sigma') f(\sigma') = f(\sigma)$$

для любой достаточно гладкой функции $f(\sigma)$, заданной на отрезке $0 \leqslant \sigma \leqslant l$.

Нормировочные множители

$$N_n^{-2} = (l/2)(1 + \omega_n^2/q^2) + 1/q, \quad n > 0; \quad N_0^{-2} = l + 2/q.$$

Теперь для $x_\mu(\sigma, \tau)$ получаем следующее разложение:

$$x_\mu(\sigma, \tau) = Q_\mu + \frac{q}{2+ql} \frac{P_\mu \tau}{\gamma} + \frac{i}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega_n \tau)}{\omega_n} \alpha_n u_n(\sigma). \tag{86}$$

Таким образом, $x_\mu(\sigma, \tau)$ является почти периодической функцией по σ и τ [59].

Когда массы на концах струны стремятся к нулю, то $q \to \infty$,

$$\omega_n \to n\pi/l, \quad u_n(\sigma) \to \sqrt{2/l}\cos(n\pi\sigma/l)$$

и разложение (86) переходит в решение для свободной струны (11). Подставляя (86) в дополнительные условия (7), получаем

$$\sum_{n,\, m=-\infty}^{+\infty} \exp[-\mathrm{i}(\omega_n+\omega_m)(\tau \pm \sigma)]\, \alpha_n \alpha_m N_n N_m \times \\ \times \left(1 \mp \mathrm{i}\frac{\omega_n}{q}\right)\left(1 \mp \mathrm{i}\frac{\omega_m}{q}\right), \tag{87}$$

где опять $\alpha_{0\mu} = \sqrt{2/\gamma} P_\mu$. Так как частоты ω_n, в отличие от свободной струны, не кратны $\overset{0}{\omega} = \pi/l$, то из (87) следуют ограничения на амплитуды α_n:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_n\alpha_m = 0 \text{ при } n \neq -m;\ n, m = \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ \alpha_n P = 0, \ n \neq 0; \\ P^2 = -\frac{\gamma}{2} \sum\limits_{n\neq 0} \left(\frac{N_n}{N_0}\right)^2 \left(1 + \frac{\omega_n^2}{q^2}\right) \alpha_{-n}\alpha_n. \end{array}\right\} \tag{88}$$

Ограничения (88) более сильные, чем условия Вирасоро (12) в теории безмассовой струны. Этот результат не противоречит тому факту, что исходное действие (80) имеет ту же репараметризационную инвариантность, что и действие Намбу (2) для свободной струны. Дело в том, что здесь рассмотрены не все движения струны с массами на концах, а только такие, которые удовлетворяют условиям (82). В случае безмассовой струны $\overset{0}{\omega}_n = n\overset{0}{\omega}$ и из (87) следуют условия Вирасоро

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}\alpha_m = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Кроме ограничений (88) необходимо, чтобы на концах струны выполнялись соотношения (82), которые приводят к равенству

$$\frac{1}{2\gamma} \sum_{n\neq 0} N_n^2 \frac{\omega_n^2}{q^2} \alpha_{-n}\alpha_n = -\frac{\mu}{m^2}. \tag{89}$$

Сохраняющийся полный импульс струны с массами на концах имеет вид

$$\Pi_\mu = \int_0^l \pi_\mu(\sigma, \tau)\, d\sigma = \gamma \int_0^l \xi(\sigma)\, \dot{x}_\mu(\sigma, \tau)\, d\sigma = P_\mu.$$

Для тензора углового момента $M_{\mu\nu}$ получаем выражение

$$M_{\mu\nu}=(Q_\mu P_\nu-P_\mu Q_\nu)-\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{\omega_n}(\alpha_{-n\mu}\alpha_{n\nu}-\alpha_{-n\nu}\alpha_{n\mu}). \quad (90)$$

Квадрат массы струны, очевидно, равен

$$M^2=P^2=-\frac{\gamma}{2}\left[\sum_{n\neq 0}\left(\frac{N_n}{N_0}\right)^2\alpha_{-n}\alpha_n+4m^2\left(1+\frac{ql}{2}\right)^2\right]. \quad (91)$$

Если даже струна не совершает никаких колебательных движений ($\alpha_n=0,\ n\neq 0$), то квадрат ее массы, тем не менее, отличен от $4m^2$ и равен

$$M_0^2=4m^2(1+lq/2)^2. \quad (92)$$

При переходе к квантовой теории постулируются следующие коммутационные соотношения:

$$[\alpha_{m\mu},\ \alpha_{n\nu}]=\omega_m\delta_{m+n,\,0}g_{\mu\nu};\quad [Q_\mu,\ P_\nu]=ig_{\mu\nu}.$$

С учетом условия полноты (85) это приводит к обычным «одновременным» коммутаторам для $x_\mu(\sigma,\tau)$ и $\pi_\nu(\sigma,\tau)$:

$$[x_\mu(\sigma,\tau),\ \pi_\nu(\sigma',\tau)]=[x_\mu(\sigma,\tau),\ \gamma\xi(\sigma')\dot{x}_\nu(\sigma'\ \tau)]=ig_{\mu\nu}\delta(\sigma,\sigma').$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Используя решение (86), можно найти коммутаторы и для различных τ и τ', например:

$$[x_\mu(\sigma,\tau),\ x_\nu(\sigma',\tau')]=i\frac{g_{\mu\nu}q}{\gamma(2+ql)}(\tau'-\tau)+$$
$$+\frac{g_{\mu\nu}}{2\gamma}\sum_{m\neq 0}\frac{\exp(-i\omega_m(\tau-\tau'))}{\omega_m}u_m(\sigma)\,u_m(\sigma').$$

В качестве гамильтониана системы, который дает правильные уравнения движения для $\alpha_n(\tau)$, можно взять величину

$$H=\frac{P^2}{2}\frac{q}{\gamma(2+ql)}+\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\alpha_{-n}\alpha_n. \quad (93)$$

Соотношения (88) и (89) для амплитуды α_n в квантовой теории накладываются как условия на физические векторы состояний:

$$L_{nm}|\Phi\rangle\equiv\alpha_n\alpha_m|\Phi\rangle=0,\ n>0,\ m\neq -n,\ 0; \quad (94)$$

$$G_n|\Phi\rangle\equiv\alpha_n P|\Phi\rangle=0,\quad n>0; \quad (95)$$

$$\left.\begin{aligned}&P^2|\Phi\rangle=\left\{-\frac{\gamma}{2}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{N_n}{N_0}\right)^2\left(1+\frac{\omega_n^2}{q^2}\right):\alpha_{-n}\alpha_n:+\beta_1\right\}|\Phi\rangle;\\&\left\{\frac{1}{2\gamma}\sum_{n\neq 0}N_n^2\frac{\omega_n^2}{q^2}:\alpha_{-n}\alpha_n:+\beta_n\right\}|\Phi\rangle=-m^{-2}|\Phi\rangle,\end{aligned}\right\} \quad (96)$$

где константы β_1 и β_2 возникли при переходе к нормальному произведению операторов $:\alpha_{-n}\alpha_n:$. Выполнения условий (94) и (95) достаточно потребовать только для указанных в этих формулах значений n и m. В этом случае операторы в (94) — (96) и гамильтониан (93) образуют замкнутую алгебру. Следовательно, условия (94) — (96) на векторы состояний непротиворечивы и изменение системы во времени не приведет к выходу за рамки этого набора условий.

Условие (94) можно использовать, как это было сделано Рорлихом [40] в случае свободной струны, для построения физического пространства векторов состояний с положительно определенной нормой в системе центра масс струны, где $\mathbf{P} = 0$. Так как G_n и L_{nm} коммутируют с оператором U [см. формулу (48)], осуществляющим преобразования из неоднородной группы Лоренца, то построенное таким путем физическое пространство векторов будет релятивистски-инвариантным.

В частности, для оператора M^2 в системе центра масс струны имеем следующее выражение:

$$M^2 = \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N_n}{N_0}\right)^2 \omega_n \mathbf{a}_n^+ \mathbf{a}_n + m_0^2,$$

$$\mathbf{a}_n^+ = \boldsymbol{\alpha}_{-n} / \sqrt{\omega_n}; \quad n > 0,$$

где $m_0^2 = \beta_1 + \beta_2 + M^2$; m_0^2 определено в формуле (92).

Полученные формулы для квадрата массы струны (91) и тензора углового момента (90) точно такие же, как и в теории безмассовой струны. Однако частоты ω_n теперь не кратны $\overset{0}{\omega}$, поэтому массовый спектр в рассматриваемом случае более богат. Большая часть его вырождения, характерная для свободной струны, снимается. Существенно отличаются от условий Вирасоро (39) ограничения на векторы состояний (94). Удовлетворить им, вероятно, можно только конечным набором амплитуд α_n, причем число отличных от нуля α_n не должно превышать размерность пространства — времени, в котором движется струна.

Аналогичная задача была рассмотрена в работе [55]. Однако авторы не использовали репараметризационно-инвариантный лагранжиан (80), а исходили из линеаризованного действия для струны с массами на концах

$$S = -\frac{\gamma}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^l d\sigma\, (\dot{x}^2 - x'^2) - \frac{m^2}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \ddot{x}^2 (\sigma_i, \tau),$$

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = l. \tag{97}$$

Это действие сразу приводит к линейным граничным условиям (83). Однако здесь возникают следующие трудности. Во-первых, не ясно, какое отношение имеют полученные решения к струне с массами на концах, описываемой обычной функцией действия (80), и, во-вторых, из действия (97) непосредственно не следуют калибровочные условия, с помощью которых можно было бы исключить состояния с отрицательно определенной нормой. Использование для этой цели условий Вирасоро из теории безмассовой струны [55] довольно искусственно.

Нерелятивистский предел в теории струны с массивными концами. Этот вопрос был детально исследован Н. А. Черниковым и Н. С. Шавохиной в работе [22]. Было показано, что две массивные точечные частицы, связанные струной, в нерелятивистском пределе движутся так, как если бы между ними действовал потенциал притяжения, линейно растущий с расстоянием:

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \gamma c \,|\, \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t) \,|, \tag{98}$$

где γ — константа, входящая в действие релятивистской струны (2).

Потенциал (98), порождаемый струной, не зависит от свойств частиц, расположенных на концах струны (например, от их масс). Таким же свойством универсальности обладает и линейный потенциал, следующий из квантовой хромодинамики в пренебрежении фермионными петлями.

Линейный потенциал (по крайней мере, на больших расстояниях между кварками) широко используется в феноменологических составных кварковых моделях адронов [60—64]. В рамках этого подхода удается описать, например, спектр масс ψ/J-мезонов [62—64], подбирая соответствующим образом параметры теории и, в частности, константу γ в формуле (98), определяющую силу потенциала.

Интересно сравнить значения константы γ, которые получаются в феноменологических кварковых моделях и в дуально-резонансном подходе. Для этой цели следует рассматривать такие кварковые модели, в которых сила потенциала выбирается универсальной для взаимодействия всех кварков: легких p-, n-кварков, странных λ-кварков и кварков с шармом. Именно такая модель была предложена в работе [61]. Для константы γ было получено следующее значение:

$$\gamma = 0{,}3 \ (\textit{Гэв})^2. \tag{99}$$

С другой стороны, константу γ можно связать с универсальным наклоном реджевских траекторий α', если рассматривать релятивистскую струну как динамическую основу дуальных моделей (см. Приложение 1). В этом подходе $\gamma = (2\pi\alpha')^{-1}$. Беря экспериментальное значение для наклона реджевских траекторий $\alpha' =$

$= 0{,}9$ *Гэв*$^{-2}$, получаем

$$\gamma = 0{,}2 \ (Гэв)^2. \tag{100}$$

Такое согласие между значениями константы γ, найденными в рамках составной кварковой модели (99) и в дуально-резонансном подходе (100), вряд ли может быть случайным. Скорее всего, это следует рассматривать как указание на то, что эти два подхода имеют одну и ту же динамическую основу.

7. СТРУНОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

Релятивистская струна, определяемая действием (2), выступает не как реальный физический объект, а, скорее, как некоторая математическая абстракция. На самом деле существуют физические ситуации в квантовополевых системах, для которых релятивистская струна может служить приближенной моделью. Речь идет о так называемых вихревых решениях классических уравнений в некоторых теоретико-полевых моделях. В этом случае струну можно рассматривать как поле, сконцентрированное вдоль линии.

Струноподобные решения в теории сверхпроводимости. Вихревые решения хорошо известны в теории сверхпроводимости [12, 13] и сверхтекучести [65, 66]. Наглядно локализацию магнитного поля в одном измерении можно представить себе так. Возьмем длинную полость внутри сверхпроводника и поместим в нее два магнитных заряда противоположных знаков. Так как магнитное поле не проникает внутрь сверхпроводника, то оно будет полностью локализовано внутри полости.

Более реалистический пример, не использующий гипотетические магнитные заряды,— это проникновение магнитного поля в сверхпроводник второго рода (вихри Абрикосова). Известно, что при определенном значении напряженности внешнее магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника второго рода, но только в виде тонких сгустков магнитосиловых линий. Центральная часть этого сгустка находится в несверхпроводящем состоянии, остальная масса проводника — в сверхпроводящем.

Такие вихревые решения были найдены Абрикосовым в уравнениях сверхпроводимости Ландау — Гинзбурга [12, 13]. Эта феноменологическая теория базируется на постулировании следующего выражения для свободной энергии f сверхпроводника:

$$f = f_0 + \alpha(T)\,|\Psi|^2 + \frac{\beta(T)}{2}\,|\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\right)\Psi\right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}, \tag{101}$$

где f_0 — свободная энергия основного состояния; функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ имеет смысл волновой функции куперовской пары электронов;

$e^* = 2e$ — заряд этой пары; m^* — эффективная масса пары; $\mathbf{B}$ — внешнее магнитное поле; T — температура.

Варьируя $\int d\mathbf{r}\, dt\, f(\mathbf{r}, t)$ по Ψ^*, получаем уравнение Ландау — Гинзбурга:

$$\alpha(T)\Psi + \beta(T)|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\right)\Psi = 0,$$

которое необходимо дополнить связью между магнитным полем и током в теории Максвелла:

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mathbf{J} = \frac{e^*\hbar}{2m^*i}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*c}|\Psi|^2\mathbf{A}.$$

Исследование этих уравнений для сверхпроводника второго рода [параметры такого сверхпроводника удовлетворяют условию $\varkappa^2 = (1/2\pi)(m^*c/e^*\hbar)\beta > 1/2$], заполняющего все пространство и помещенного во внешнее магнитное поле, параллельное оси z, показывает, что в этом случае существует приближенное решение, согласно которому магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника в виде тонких линий [12]. Такое решение в цилиндрической системе координат (z, r, θ) имеет вид

$$B(z, r, \theta) = B(\rho) = \mathrm{const}\, K_0(\rho),$$

где $\rho = r/\lambda$; λ — характерная длина; $K_0(\rho)$ — функция Кельвина; $K_0(\rho) \sim \exp(-\rho)$ при $\rho \to \infty$. Таким образом, напряженность магнитного поля убывает от центра вихря экспоненциально.

Вихревые решения в модели Хигса. Релятивистским обобщением полевой модели (101), лежащей в основе теории сверхпроводимости Гинзбурга — Ландау, является хигсовский лагранжиан

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - |(\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi|^2 + a|\Phi|^2 - b(|\Phi|^2)^2, \quad (102)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; a и b — положительные константы. Поэтому естественно, что локализованные в одном измерении струноподобные решения были найдены и в уравнениях Эйлера, соответствующих лагранжиану Хигса [14—18]. Обозначим статическое вихревое решение A^0_μ и Φ^0. Оно соответствует цилиндрически-симметричной вихревой линии, расположенной вдоль оси z:

$$A^0_\mu(x_1, x_2) = \varepsilon_{03\mu\nu}(x^\nu/r)A_n(r); \quad \Phi^0(x_1, x_2) = \exp(in\theta)R_n(r),$$

где $A_n(r)$ и $R_n(r)$ — действительные функции. При полном обороте вокруг оси z фаза Φ^0 меняется на $2\pi n$, где n — целое число. Если предположить, что при $r \to \infty$ $|\Phi| \to \mathrm{const}$, то вихревое решение в модели (102) имеет вид

$$R_n(r) \approx \lambda + c_S \exp(-m_S r);$$

$$A_\mu(r) \approx n/er + \left(c_V/\sqrt{er}\right)\exp(-m_V r),$$

где $m_S = \sqrt{2a}$; $m_V = \sqrt{2}e\lambda$; $\lambda = \sqrt{a/2b}$; c_S и c_V — константы. Магнитное поле параллельно вихревой линии и равно

$$H_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_r) \sim \left(c_V/\sqrt{er}\right)\exp\left(-m_V r\right).$$

Поперечные размеры вихревой линии определяются массовыми параметрами m_S^{-1} и m_V^{-1}.

Если в полевой модели есть струноподобное решение, то можно показать, что лагранжиан, соответствующий этому решению, есть лагранжиан Намбу для релятивистской струны (2). Действительно, полевые функции в этом случае отличны от нуля только вдоль струны, поэтому

$$S_{\text{струны}} \sim \int dt \int ds \sqrt{1 - \mathbf{v}_\perp^2}, \tag{103}$$

где t — время; s — параметр, совпадающий с длиной струны $(\partial \mathbf{x}(t, s)/\partial s)^2 = 1$; множитель $\sqrt{1 - \mathbf{v}_\perp^2}$ введен для учета лоренцева сокращения за счет движения струны с поперечной скоростью

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right). \tag{104}$$

Подставляя (104) в (103), получаем

$$S_{\text{струны}} \sim \int dt \int ds \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)^2\right]\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right)^2}.$$

Если в этой формуле перейти от t и s к произвольным параметрам τ, σ на мировой поверхности струны, то получим, очевидно, действие Намбу (2).

В модели Хигса (102) струноподобные решения могут быть или бесконечными в пространстве, или замкнутыми, причем в последнем случае радиус кривизны струны должен быть значительно больше ее поперечных размеров. Чтобы получить в этом подходе конечную струну или вихрь, необходимо ввести источники магнитного поля — магнитные заряды, или монополи, на которых могли бы заканчиваться магнитные силовые линии струны.

Магнитные заряды впервые были введены в электродинамику Дираком [67]. С точки зрения теории релятивистской струны монополи Дирака представляют интерес еще и потому, что в электродинамике с магнитными зарядами рассматриваются одномерные протяженные объекты — нити или струны Дирака.

Струны в теории магнитных зарядов Дирака. В теории Дирака струны являются чисто вспомогательным математическим понятием, они не несут энергию и все наблюдаемые величины не зависят от их движения. Ситуация, однако, существенно изменится, если электромагнитное поле в теории Дирака заменить векторным полем с массой. В этой полевой модели стру́ны являются уже физическими объектами, так как несут энергию. Лагранжиан, описывающий их движение, практически совпадает с лагранжианом Намбу (2). Рассмотрим кратко эту модель.

В электродинамике Дирака с магнитными зарядами уравнения Максвелла обобщаются следующим образом:

$$\partial F_{\mu\nu}/\partial x_\nu = -j_\mu^e; \tag{105}$$

$$\partial \widetilde{F}_{\mu\nu}/\partial x_\nu = -j_\mu^m, \tag{106}$$

где $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}/2$ — тензор, дуальный к $F_{\mu\nu}$; j_μ^e и j_μ^m — токи, порождаемые электрическими и магнитными зарядами соответственно:

$$j_\mu^e(z) = \sum_e e \int \frac{dx_\mu}{ds} \delta^{(4)}[z - x(s)]\, ds;$$

$$j_\mu^m(z) = \sum_g |g| \int \frac{dx_\mu}{ds} \delta^{(4)}[z - x(s)]\, ds.$$

Отличие от обычной теории заключается в том, что в уравнении (106) в правой части стоит не нуль, а $-j_\mu^m$. Если есть магнитные заряды, то нельзя использовать обычное определение тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ через векторный потенциал A_μ:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{107}$$

так как из (107) следует, что

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,$$

в то время как необходимо, чтобы

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \rho^m,$$

где ρ^m — плотность магнитных зарядов.

Дирак предположил, что уравнение (107) в каждый момент времени нарушается в одной точке на замкнутой поверхности, окружающей магнитный заряд. Так как такая поверхность может быть выбрана произвольно, то связь (107) не выполняется фактически вдоль нити или струны, соединяющей магнитные заряды противоположных знаков или уходящей одним концом в бесконечность. Каждый магнитный полюс должен находиться на конце такой струны.

В пространстве Минковского дираковская струна покрывает двумерную поверхность $x_\mu(\sigma, \tau)$, на которой не выполняется уравнение (3). Дирак добавил в правую часть этого уравнения тензорное поле $G_{\mu\nu}(z)$, локализованное на мировой поверхности струн:

$$F_{\mu\nu}(z) = \partial_\mu A_\nu(z) - \partial_\nu A_\mu(z) + \widetilde{G}_{\mu\nu}(z). \tag{108}$$

Подстановка (108) в (106) приводит к уравнению для $G_{\mu\nu}(z)$:

$$\partial_\nu G_{\mu\nu}(z) = j_\mu^m(z) = \sum_g g \int \frac{dx_\mu}{ds} \delta^{(4)}(z - x(s))\, ds.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$G_{\mu\nu}(z) = \int\int d^2v \delta^{(4)}(z - x(\sigma, \tau))\, \sigma_{\mu\nu}(\sigma, \tau), \tag{109}$$

где $\sigma_{\mu\nu} = \partial(x_\mu, x_\nu)/\partial(\tau, \sigma)$; $d^2v = d\tau\, d\sigma$. Движение электрических зарядов описывается таким же уравнением, как и в электродинамике Максвелла:

$$m(d^2z_\nu/ds^2) = e(dx^\mu/ds) F_{\nu\mu}(z). \tag{110}$$

Для магнитных зарядов постулируется аналогичное уравнение:

$$md^2z_\nu/ds^2 = g(dx^\mu/ds) F_{\nu\mu}(z). \tag{111}$$

Действие в теории Дирака определяется следующим выражением:

$$S = -\sum_{e,\, g} m \int ds - \frac{1}{4} \int d^4z F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e \int A^\mu(z) \frac{dz_\mu(s)}{ds}\, ds. \tag{112}$$

При варьировании этого действия $F_{\mu\nu}$ необходимо рассматривать как функцию векторного потенциала A_μ и переменных струны согласно формулам (108) и (109). Варьирование S приводит к уравнениям (105), (110) и (111), в то время как уравнение (106) является следствием (108) и (109) в полной аналогии с теорией Максвелла. Существенно, что никаких уравнений для переменных струны $x_\mu(\sigma, \tau)$ не возникает, что является отражением нефизического характера этих переменных.

Связь дираковской струны с дуальной струной. В работе Намбу [19] было рассмотрено действие (112) для двух магнитных зарядов противоположного знака $\pm g$, но в отличие от теории Дирака считалось, что масса векторного поля $A_\mu(x)$ отлична от нуля и равна m_V *. Можно предположить, например, что эта масса возникла за счет хигсовского механизма при взаимодействии поля A_μ со скалярным полем Ф согласно лагранжиану (102). Уравнение (105) заменяется теперь уравнением Клейна—Гордона с правой частью

$$(\Box - m_V^2) A^\nu = -\partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu}, \tag{113}$$

* Название «магнитные заряды» в этом случае чисто условное и основывается только на аналогии рассматриваемой здесь модели с теорией монополя Дирака.

причем на поле A_μ наложено условие Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$. Из (113) следует, что

$$A^\nu(z) = -\int \Delta(z-y)\,\partial_\mu \widetilde{G}^{\mu\nu}(y)\,d^4y, \tag{114}$$

где $\Delta(z)$ — функция Грина уравнения (113). Исключая из формулы (112) поле A_μ с помощью (114), получаем следующее выражение для эффективного действия, зависящее только от переменных струны $x_\mu(\sigma, \tau)$:

$$\int d^2v\,\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \frac{1}{4} g^2 m_V^2 \int\int d^2v\,d^2v'\sigma_{\mu\nu}\Delta(x-x')\,\sigma'^{\mu\nu} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{2}\int\int g^{(i)}g^{(j)}\dot{x}^{(i)\mu}\Delta(x^{(i)}-x^{(j)\prime})\,\dot{x}_\mu^{(j)\prime}\,d\tau\,d\tau' - \\ - \sum_{i=1}^{2}\int m^{(i)}\sqrt{\dot{x}_\mu^{(i)}\dot{x}^{(i)\mu}}\,d\tau. \tag{115}$$

Первое слагаемое в этой формуле представляет собой юкавское взаимодействие двух мировых поверхностей $x_\mu(\sigma, \tau)$ и $x'_\mu(\sigma', \tau')$, которое переносится векторным полем $A_\mu(x)$. Второе слагаемое обусловлено взаимодействием магнитных токов друг с другом и их самодействием. Наконец, третье слагаемое есть кинетический член магнитных монополий с массами $m^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Переменные струны $x_\mu(\sigma, \tau)$ исчезают из эффективного действия (115), если векторное поле безмассовое $m_V = 0$, и струна в этом случае, как уже отмечалось выше, становится нефизическим объектом.

Первый член в формуле (115) с учетом δ-образного характера функции Грина $\Delta(z)$ пропорционален площади мировой поверхности струны $x_\mu(\sigma, \tau)$, соединяющей монополи. Более детальный расчет [19] показывает, что этот член действительно сводится к лагранжиану струны

$$\mathcal{L}_{\text{струны}} = -\gamma\sqrt{|\det|\sigma_{\mu\nu}||}, \tag{116}$$

причем константа γ оказывается равной

$$\gamma = 1/2\pi\alpha' = (g^2/8\pi)\,m_V^2 \ln(1/r_\perp m_V^2 + 1),$$

где величина $r_\perp$ характеризует поперечные размеры струны. Как было показано выше при рассмотрении хигсовского лагранжиана (102), поперечные размеры струны характеризуются величиной m_S^{-1}, где m_S — масса скалярного поля Хигса, поэтому можно положить $r_\perp \sim m_S^{-1}$ (см. также работы [14—18]).

Если расстояние между магнитными зарядами велико по сравнению с m_V^{-1}, то в формуле (115) будет доминировать лагранжиан струны (116). В этом случае первое и третье слагаемые в (115) дают действие релятивистской струны с массами на концах (80). На малых расстояниях главную роль начинает играть юкавское взаимодействие между монополями, описываемое вторым членом в формуле (115). В статическом случае между монополями действует потенциал притяжения Юкавы $(-g^2/4\pi)\exp(-m_V r)/r$. Это взаимодействие, очевидно, будет сдвигать низколежащие уровни в спектре масс струны.

Указанием на возможность существования струноподобных решений в более реалистических моделях квантовой теории поля, и в частности в хромодинамике, являются локализованные решения в моделях Янга — Миллса, несущие магнитный заряд [68, 69]. Тесная связь с моделью струны была прослежена в двумерных моделях с цветной калибровочной группой $U(N)$ при $N\to\infty$ [70] в скалярной электродинамике и в модели Швингера [71].

Важным вопросом, который еще полностью не исследован, остается устойчивость струноподобных решений как в классическом случае [72, 73], так и при квантовании [74].

8. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ БОРНА — ИНФЕЛЬДА И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА

Релятивистская струна тесно связана с нелинейными моделями Борна — Инфельда в двумерном пространстве времени [31]. Простейшая модель такого типа для скалярного безмассового поля $\varphi(x, t)$ задается лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\varkappa^2\sqrt{1+\varkappa^{-2}(\varphi_x^2-\varphi_t^2)}, \tag{117}$$

где $\varphi_x=\partial\varphi(x, t)/\partial x$; $\varphi_t=\partial\varphi(x, t)/\partial t$, а $\varkappa$—константа, имеющая размерность обратной длины. Лагранжиан (117) рассматривался, в частности, Гейзенбергом [75] в мезодинамике при исследовании мезонных ливней.

Варьирование этого лагранжиана приводит к нелинейному уравнению для поля $\varphi(x, t)$:

$$(\varkappa^2-\varphi_t^2)\varphi_{xx}+2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt}-(\varkappa^2+\varphi_x^2)\varphi_{tt}=0. \tag{118}$$

При $\varkappa\to\infty$ лагранжиан (117) переходит в лагранжиан свободного поля $\varphi(x, t)$, а уравнение (118) — в уравнение Даламбера.

Задача может быть сформулирована по-иному, в параметрическом виде. Функция $\varphi(x, t)$ описывает поверхность в 3-мерном пространстве — времени t, x, $y=\varkappa^{-1}\varphi(x, t)$. Эту поверхность можно задать параметрически, введя в рассмотрение лоренцев вектор x_μ, $\mu=0, 1, 2$, зависящий от двух параметров σ, τ и имеющий компоненты

$$x^\mu(\sigma, \tau)=(t(\sigma, \tau),\ x(\sigma, \tau),\ y(\sigma, \tau)=\varkappa^{-1}\varphi(x(\sigma, \tau),\ t(\sigma, \tau))).$$

Учитывая, что

$$\varphi_x = \varkappa^2 \frac{\begin{vmatrix} y' & t' \\ \dot{y} & \dot{t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & t' \\ \dot{x} & \dot{t} \end{vmatrix}}; \quad \varphi_t = \varkappa^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & t' \\ \dot{x} & \dot{t} \end{vmatrix}}$$

и что при переходе к интегрированию по переменным σ, τ произведение $dx\,dt$ следует заменить на $(x'\dot{t} - \dot{x}t')\,d\sigma\,d\tau$, для функции действия, соответствующей лагранжиану (117), получаем следующее выражение:

$$S = -\varkappa^2 \int dt \int dx \sqrt{1 + \varkappa^{-2}(\varphi_x^2 - \varphi_t^2)} =$$
$$= -\varkappa^2 \int d\tau \int d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}. \qquad (119)$$

А это и есть действие бесконечной релятивистской струны (2) в 3-мерном пространстве — времени t, x, $y = \varkappa^{-1}\varphi(x, t)$.

Если в электродинамике Борна — Инфельда

$$\mathscr{L} = -\varkappa^2 \sqrt{1 + \varkappa^{-2}F - \varkappa^{-4}G^2},$$

где

$$F = (1/2)\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad G = (1/4)\, \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

рассматривать только плоские волны, то задача сведется к исследованию лагранжиана релятивистской струны. Пусть волна распространяется вдоль оси x. Потенциал $A_\mu(x)$ в этом случае зависит только от t и x. Если исключить из рассмотрения электрическое поле, направленное по оси x, $F_{01} = 0$, то в лагранжиан Борна — Инфельда войдут только две компоненты потенциала $A_\mu(x)$ $[A_y(x, t)$ и $A_z(x, t)]$:

$$\mathscr{L} = -\varkappa^2 \sqrt{\left(1 + \varkappa^2 \sum_{i=y,z} A_{i,x}^2\right)\left(1 - \varkappa^2 \sum_{i=y,z} A_{i,t}^2\right) + \left(\varkappa^2 \sum_{i=y,z} A_{i,t}A_{i,x}\right)^2}.$$

Переход от переменных (x, t) к (σ, τ) опять приводит к действию для релятивистской струны (119) в 4-мерном пространстве $(t, x, \varkappa^{-1}A_y, \varkappa^{-1}A_z)$. Самый общий вид лагранжиана n полей типа Борна — Инфельда в 2-мерном пространстве (x, t), сводящийся к лагранжиану струны в пространстве $n + 2$ измерений путем введения параметров σ и τ, дается следующим выражением:

$$\mathscr{L} = -\varkappa^2 \sqrt{\left(1 + \varkappa^{-2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,x}^2\right)\left(1 - \varkappa^{-2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,t}^2\right) + \left(\varkappa^{-2} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{i,t}\varphi_{i,x}\right)^2}. \qquad (120)$$

Действие (120), описывающее одновременно и систему нелинейных скалярных полей Борна — Инфельда и бесконечную релятивистскую струну, детально исследовалось в работах [76, 77]. Была решена задача Коши для уравнений движения и исследовано рассеяние двух плоских волн в классическом случае. В этих же работах был предложен метод квантования, в котором нелинейные дополнительные условия накладываются на векторы состояний. Здесь же была получена алгебра связей, которая включает в себя как частный случай алгебру Вирасоро (41) в теории конечной струны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные здесь некоторые вопросы динамики релятивистской струны показывают, что этот объект обладает целым рядом свойств, представляющих несомненный интерес с точки зрения физики элементарных частиц. Прежде всего, струна — пример сравнительно простой и достаточно реалистической модели удержания кварков в адронах. Развитием струнной модели в этом направлении являются введение внутренних квантовых чисел кварков, помещенных на концах струны [20, 21], а также попытки построить струнную модель барионов [78—80].

Исходя из теории струны, можно попытаться расширить геометрический подход, лежащий в ее основе. На мировой поверхности струны можно рассматривать помимо ее площади и другие инварианты, например взять добавку к действию Намбу (2), пропорциональную интегральной гауссовой кривизне поверхности струны [54]. Интересно, что в этом случае изменяются только граничные условия, а уравнением движения струны остается по-прежнему уравнение Даламбера. Однако нелинейный характер граничных условий не позволяет получить точное решение этой задачи.

Можно рассматривать релятивистские объекты большей размерности, например мембраны [81] или трехмерные объекты. Координатами таких объектов в пространстве Минковского является лоренцев вектор $x_\mu\,(\xi^0,\ \xi^1,\ \ldots,\ \xi^n)$, который при $n = 1$ описывает струну, при $n = 2$ — мембрану и т. д. Действие по аналогии с теорией релятивистской струны можно взять пропорциональным площади гиперповерхности, которую покрывает этот объект в пространстве Минковского:

$$S = -\varkappa \int \ldots \int d\xi^0 \ldots d\xi^n\,(|\det g_{ij}\,(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^n)|)^{1/2}, \tag{121}$$

где $g_{ij} = (\partial x_\mu/\partial\xi^i)(\partial x^\mu/\partial\xi^j)$ — метрический тензор на гиперповерхности; $\varkappa$ — константа, имеющая размерность l^{-n-1}. На переменные $x_\mu\,(\xi^0,\ \xi^1,\ \ldots,\ \xi^n)$ можно наложить $(n + 1)$ условий по числу параметров ξ^i. Однако для линеаризации уравнений движения, следующих из действия (121), требуется $(n^2+3n)/2$ условий. Поэтому для релятивистских объектов большей размерности, чем струна, линеаризовать уравнения движения не удается.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ДУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Для построения дуальных амплитуд был разработан специальный математический аппарат — операторный формализм, близкий к фейнмановской диаграммной технике в квантовой теории поля [1—4]. Именно в этом подходе

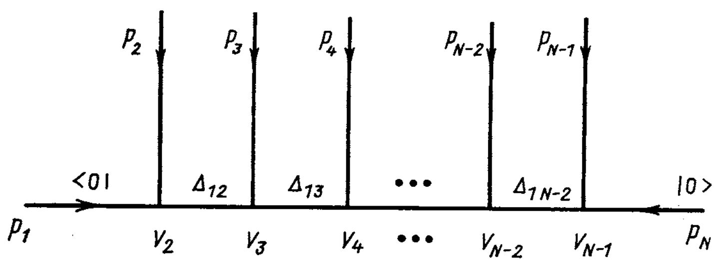

Рис. 4.

наиболее просто проследить связь между дуальными моделями и релятивистской струной.

В операторном формализме вводится бесконечный набор операторов рождения $a^+_{n\nu}$ и уничтожения $a_{m\mu}$, удовлетворяющих следующим правилам коммутаций:

$$[a_{m\mu},\ a^+_{n\nu}] = -g_{\mu\nu}\delta_{m,\,n}, \qquad (\text{П}.1)$$

где $g^{00} = -g^{11} = \ldots = -g^{D-1,\,D-1}$; D — размерность псевдоевклидова пространства, в котором действуют операторы $a_{m\mu}$. Амплитуде Венециано B_N, имеющей N внешних линий, сопоставляется древесная диаграмма, представленная на рис. 4. Амплитуда B_N строится согласно следующим правилам соответствия. Внешним концам с импульсами p_1 и p_N сопоставляются вакуумные состояния $\langle 0 \mid$ и $\mid 0\rangle$, которые определяются, как обычно, требованием

$$a_{m\mu} \mid 0\rangle = \langle 0 \mid a^+_{m\mu} = 0.$$

Каждой вершине соответствует вершинный оператор $V(p_i)$, $i = 2, 3, \ldots, N-1$:

$$V(p_i) = \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_i a^+_n}{\sqrt{n}}\right)\exp\left(\mathrm{i}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_i a_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где α' — наклон траекторий Редже. Внутренним линиям на диаграмме сопоставляется пропагатор

$$\Delta_{ij} = [s_{ij} + \alpha' M^2 + \alpha(0)]^{-1},$$

где $s_{ij} = (p_i + p_{i+1} + \ldots + p_j)^2$; $\alpha(0)$ — значение реджевской траектории в нуле; $\alpha(s_{ij}) = \alpha(0) + \alpha' s_{ij}$; $\alpha' M^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n^+ a_n$ — массовый оператор.

Согласно этим правилам для амплитуды B_N получаем следующее выражение:

$$B_N = \langle 0 \mid V[(p_2)\,\Delta_{12} V(p_3)\,\Delta_{13} \ldots V(p_{N-1}) \mid 0 \rangle.$$

Вычисляя вакуумное среднее в этой формуле, можно преобразовать B_N к обычному интегральному представлению для N-точечной амплитуды Венециано [1—4]:

$$B_N = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^{N-3} dx_i x_i^{-\alpha(s_{1i})-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (1 - x_{ij})^{-p_i p_j}, \qquad (\text{П}.2)$$

где $x_{ij} = x_{i-1} x_i \cdot \cdot \cdot x_{j-2}$.

Векторы состояний в рассматриваемом формализме строятся, как обычно, действием операторов рождения $a_{m\mu}^+$ на вакуум. Однако из-за метрического тензора $g_{\mu\nu}$ в коммутаторе (П.1) появляются векторы с отрицательно определенной нормой. Физические векторы состояний $|\,\Phi\rangle$ с положительно определенной нормой определяются условиями Вирасоро:

$$L_n \mid \Phi \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$
$$[L_0 - \alpha(0)] \mid \Phi \rangle = 0,$$

где

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m} \alpha_m :; \quad \alpha_{0\mu} = \sqrt{2\alpha'}\, p_\mu;$$
$$\alpha_{-k} = \alpha_k^+ = \sqrt{k}\, a_k^+, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для исключения состояний с отрицательно определенной нормой необходимо потребовать, чтобы $\alpha(0) = 1$ и размерность пространства D, в котором действуют операторы $a_{n\mu}$, равнялась 26.

Таким образом, операторный формализм в дуальном подходе полностью совпадает с квантовой теорией релятивистской струны, использующей светоподобную калибровку. Константа γ в действии Намбу (2) оказывается связанной с универсальным наклоном реджевских траекторий α': $\gamma = (2\pi\alpha')^{-1}$. Более того, было показано, что дуальная амплитуда (П.2) может быть получена как квантовомеханическая амплитуда вероятности в теории, рассматривающей слияние и разрывы струн [82].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ТОЧЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛ В ТЕОРИИ СТРУНЫ

Покажем, что действие релятивистской струны (2) переходит в действие точечной частицы (1), если длина струны стремится к нулю. Вначале представим размерную константу γ в формуле (2) в следующем виде:

$$\gamma = m_0 c / l_0,$$

где m_0 и l_0 — константы с размерностью массы и длины соответственно; c — скорость света. Далее, выделим в действии струны (2) интегрирование по σ

так, чтобы оно давало длину струны:

$$S=-m_0c\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\sqrt{\dot{x}^2(\sigma^*,\tau)}\;\frac{1}{l}\int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)}d\sigma\sqrt{\frac{(\dot{x}x')^2}{\dot{x}^2}-x'^2}=$$

$$=-m_0c\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\sqrt{\dot{x}^2(\sigma^*,\tau)}\;\frac{L(\tau)}{l_0},\tag{П.3}$$

где $L(\tau)=\int\limits_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)}d\sigma\,[(\dot{x}x')^2/\dot{x}^2-x'^2]^{1/2}$ — обычная 3-мерная длина струны, записанная в ковариантном виде [6, 50], а $\sigma^*(\tau)$ — некоторая точка на отрезке $[\sigma_1(\tau),\ \sigma_2(\tau)]$, $\tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_2$. Если теперь предположить, что $L(\tau)\to 0$ и соответственно $l_0\to 0$, причем $(L(\tau)/l_0)\to a<\infty$, то формула (П.3) перейдет в действие точечной релятивистской частицы с массой am_0.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ТОЖДЕСТВА НЁТЕР В ТЕОРИИ СТРУНЫ

Инвариантность действия релятивистской струны (2) относительно замены параметром σ и τ приводит к тождествам, которым должны удовлетворять левые части уравнений движений (вторая теорема Нётер [30]).

Будем рассматривать $x_\mu(\sigma,\tau)$ как поля, заданные в 2-мерном пространстве $\tau=\xi_1$, $\sigma=\xi_2$, и пусть лагранжиан системы $\mathscr{L}(x,\ x_{,i})$, где $x_{,i}=\partial x/\partial\xi_i$, выбран так, что действие $S=\int d^2\xi\mathscr{L}(x,\ x_{,i})$ инвариантно относительно преобразований координат $\xi_i\to\tilde{\xi}_i=f_i(\xi)$, $i=1,\ 2$. Эти преобразования определяются двумя произвольными функциями, поэтому согласно второй теореме Нётер левые части уравнений Эйлера должны удовлетворять двум тождествам.

Для конечной струны $0\leqslant\xi_2\leqslant l$, поэтому функции f_i подчинены в этом случае условиям $f_1(\xi_1,\ 0)=0$, $f_2(\xi_1,\ l)=l$, из которых следует, что бесконечно малые изменения координат $\varepsilon_i(\xi)$

$$\tilde{\xi}_i=\xi_i+\varepsilon_i(\xi)$$

должны обращаться в нуль при $\sigma=0$ и $\sigma=l$. Как будет видно из дальнейшего, эти требования не приведут ни к каким ограничениям в полученных результатах.

Вариация действия δS, равная нулю, имеет вид

$$\delta S=\int d^2\xi\,[\delta\mathscr{L}+\partial_i(\mathscr{L}\varepsilon_i)],\tag{П.4}$$

где $\delta\mathscr{L}$ — вариация формы лагранжиана

$$\delta\mathscr{L}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_{\mu,\,i}}\delta x_{\mu,\,i}.$$

Обозначая левые части уравнений Эйлера через

$$L^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}-\partial_i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_{\mu,\,i}}\right)$$

и учитывая, что $\delta x_\mu = -x_{\mu,\,j}\varepsilon_j$, формулу (П.4) преобразуем следующим образом:

$$\delta S = \int d^2\xi \left\{ \left[\left(\mathscr{L}\delta_{ij} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_{\mu,\,i}} x_{\mu,\,j} \right) \varepsilon_j \right]_{,i} - L^\mu x_{\mu,\,j}\varepsilon_j \right\} = 0. \qquad (\text{П.5})$$

Вначале рассмотрим такие вариации ε_j независимых переменных ξ_j, которые исчезают на границе области интегрирования. Тогда очевидно, что слагаемое в квадратных скобках в формуле (П.5) не дает вклада в δS, и, как следствие этого, получаем два тождества

$$L_\mu \dot{x}^\mu = L_\mu x'^\mu \equiv 0. \qquad (\text{П.6})$$

Таким образом, проекции левых частей уравнений Эйлера на $\dot{x}_\mu$ и x'_μ тождественно равны нулю.

В формуле (П.5) в круглых скобках стоит тензор энергии-импульса по отношению к сдвигам в пространстве ξ_i:

$$t_{ij} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_{\mu,\,i}} x_{\mu,\,j} - \delta_{ij}\mathscr{L}.$$

Если ε_j — константы и x_μ удовлетворяют уравнениям движения $L_\mu(x) = 0$, то из (П.5) следуют законы сохранения

$$\partial_i t_{ij} = 0, \quad j = 1,\ 2. \qquad (\text{П.7})$$

На самом деле эти равенства являются несобственными законами сохранения [30, 83], так как S инвариантно относительно произвольных преобразований координат, поэтому равенства (П.7) с учетом (П.6) выполняются тождественно, а не только на решениях уравнений движения. Более того, ниже будет показано, что и сам тензор $t_{ij} \equiv 0$.

Дело в том, что законы сохранения (П.7) и тождества Нётер (П.6) не исчерпывают всех следствий инвариантности действия S относительно произвольных преобразований координат ξ_i [84, 85]. Действительно, если в формуле (П.5) в качестве параметров функций ε_i взять вначале константы, а потом линейные по ξ_i функции, то получим, с учетом (П.6), новые тождества:

$$t_{ij,\,i} \equiv 0, \quad j = 1,\ 2; \quad t_{ij} \equiv 0, \quad i,\ j = 1,\ 2.$$

Эта процедура эквивалентна приравниванию нулю в формуле (П.5) коэффициентов при $\varepsilon_i(\xi)$ и при производных $\varepsilon_{i,\,j}(\xi)$.

Запишем тождества $t_{ij} \equiv 0$ в явном виде:

$$\mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\dot{x}^\mu = 0; \qquad \mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'^\mu} x'^\mu = 0;$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\mu} x'^\mu = 0; \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'^\mu}\dot{x}^\mu = 0.$$

Первое равенство означает, что гамильтониан, построенный по каноническим правилам, в данном случае равен нулю [ср. формулы (29) и (30)]. Третье тождество представляет собой связь между каноническими переменными x_μ и π_μ: $\pi_\mu = -\partial\mathscr{L}/\partial\dot{x}^\mu$; $x'_\mu \pi^\mu = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Veneziano G.** «Phys. Rep. C», 1974, v. 9, p. 201.
2. **Schwarz J. H.** Ibid., 1973, v. 8, p. 269.
3. **Шелест В. П., Зиновьев Г. М., Миранский В. А.** Модели сильновзаимодействующих частиц. Т. 2. М., Атомиздат, 1966.

4. **Frampton P. H.** Dual Resonance Models. L., Benjamin, 1974.
5. **Nambu Y.** Lectures for the Copenhagen Symposium, 1970.
6. **Goto T.** «Progr. Theor. Phys.», 1971, v. 46, p. 1560.
7. **Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H.** «Phys. Lett.», 1973, v. 47, p. 365.
8. **Weinberg S.** «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 31, p. 494.
9. **Gross D. J., Wilczek F.** «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 3633.
10. **Wilson K. C.** Ibid., 1974, v. 10, p. 2445.
11. **Kogut J., Susskind L.** Ibid., v. 9, p. 3501.
12. **Абрикосов А. А.** «ЖЭТФ», 1957, т. 32, 1442.
13. **Grassie A. D. C.** The superconducting state. L., Sussex University Press, 1975.
14. **Nielsen H. B., Olesen P.** «Nucl. Phys. B», 1973, v. 61, p. 45.
15. **Gervais J. L., Sakita B.** Ibid., 1975, v. 91, p. 301.
16. **Jevicki A., Senjanovic P.** «Phys. Rev. D», 1975, v. 11, p. 860.
17. **Förster D.** «Nucl. Phys. B», 1974, v. 81, p. 85.
18. **Creutz M.** «Phys. Rev. D», 1974, v. 10, p. 2696.
19. **Nambu Y.** Ibid., p. 4262.
20. **Bars I., Hanson A. J.** Ibid., 1976, v. 13, p. 1744.
21. **Bars I.** «Nucl. Phys. B», 1976, v. 111, p. 413.
22. **Черников Н. А., Шавохина Н. С.** Препринт ОИЯИ Р2-10375, Дубна, 1977.
23. **Маринов М. С.** «УФН», 1977, т. 121, с. 377.
24. **Rebbi C.** «Phys. Rep. C», 1974, v. 12, p. 3.
25. **Scherk J.** «Revs. Mod. Phys.», 1975, v. 47, p. 123.
26. **Mandelstam S.** «Phys. Rep. C», 1974, v. 13, p. 260.
27. **Оссерман Р.** «УМН», 1967, т. 22, вып. 4, с. 55.
28. **Бляшке В.** Введение в дифференциальную геометрию. М., Гостехиздат, 1957.
29. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 4. М., Физматгиз, 1958, с. 395.
30. **Нётер Э.** В сб.: Вариационные принципы механики. М., Физматгиз, 1959, с. 611.
31. **Барбашов Б. М., Черников Н. А.** Препринт ОИЯИ Р2-7852. Дубна, 1974.
32. **Фаддеев Л. Д.** «ТМФ», 1969, т. 1, № 1, с. 3.
33. **Дирак П. А. М.** Лекции по квантовой механике. Пер. с англ. М., «Мир», 1968.
34. **Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C.** Constrained Hamiltonian Systems. Preprint, Princeton, Institute for Advanced Study, 1975.
35. **Барбашов Б. М., Кошкаров А. Л., Федоренко О. М.** Препринт ОИЯИ Р2-10169. Дубна, 1976.
36. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М., «Наука», 1976.
37. **Goddard P. e. a.** «Nucl. Phys. B», 1973, v. 56, p. 109.
38. **Rohrlich F.** «Phys. Rev. Lett.», 1975, v. 34, p. 842.
39. **Rohrlich F.** «Nuovo cimento A», 1977, v. 37, p. 242.
40. **Rohrlich F.** «Nucl. Phys. B», 1976, v. 112, p. 177.
41. **Patrascioin A.** Ibid., 1974, v. 81, p. 525.
42. **Feynman R. P., Kislinger M., Ravndal F.** «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 2706.
43. **Kalb M., Ramond P.** Ibid., 1974, v. 9, p. 2273.
44. **Barbashov B. M., Koshkarov A. L., Nesterenko V. V.** Preprint JINR E2-9975, Dubna, 1976; «ТМФ», 1977, т. 32, № 2, с. 176.
45. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V., Cherjakov A. M.** Preprint JINR E2-10148, Dubna, 1976.
46. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В., Червяков А. М.** Препринт ОИЯИ Р2-10376. 1977; «ТМФ», 1977, т. 32, № 3, с. 336.
47. **Ademollo M. e. a.** «Nuovo cimento A», 1974, v. 21, p. 77.
48. **Черников Н. А.** Препринт ОИЯИ Р2-9714. Дубна, 1976.

49. **Barbashov B. M., Nesterenko V. V.** In: Proc. XVIII Intern. Conf. on High Energy Physics. Tbilisi, 1976, V. 2. Dubna, 1977, p. T45.
50. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория поля. М., «Наука», 1967.
51. **Chodos A., Thorn C. B.** «Nucl. Phys. B», 1974, v. 72, p. 509.
52. **Frampton P. H.** «Phys. Rev. D», 1975, v. 12, p. 538.
53. **Lanyi G.** Ibid., 1976, v. 14, p. 972.
54. **Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.** «ТМФ», 1977, т. 31, № 3, с. 291.
55. **Andreo R., Rohrlich F.** «Nucl. Phys. B», 1976, v. 115, p. 521.
56. **Bardeen W. A. e. a.** «Phys. Rev. D», 1976, v. 13, p. 2364.
57. **Barbashov B. M.** The Niels Bohr Institute Preprint NBI-HE-77-12. Copenhagen, 1977; «Nucl. Phys. B», 1977, v. 129, p. 175.
58. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966, с. 145.
59. **Левитан Б. М.** Почти периодические функции. М., Гостехиздат, 1953.
60. **Gunion J. F., Willey R. S.** «Phys. Rev. D» , 1975, v. 12, p. 174.
61. **Kang J. S., Schnitzer H. J.** Ibid., p. 841.
62. **Giles R. C., Tye S. H. H.** «Phys. Rev. Lett.», 1976, v. 37, p. 1175.
63. **Harrington B. J., Parks S. Y., Yildiz A.** Ibid., 1975, v. 34, p. 168.
64. **Eichten E. e. a.** Ibid., p. 369.
65. **Гинзбург В. Л., Питаевский Л. П.** «ЖЭТФ», 1958, т. 34, с. 1240.
66. **Hu B.** A superfluid field theory of the dual string. Preprint Centre de Physique Theorique de l'Ecole Polytechnique. Palaisean, 1976.
67. **Dirac P. A. M.** «Phys. Rev.», 1948, v. 74, p. 817.
68. **Поляков А. М.** «Письма в ЖЭТФ», 1974, т. 20, с. 430.
69. **'t Hooft G.** «Nucl. Phys. B», 1974, v. 79, p. 276.
70. **'t Hooft G.** Ibid., v. 72, p. 461.
71. **Halpern M. B., Senjanovic P.** «Phys. Rev. D», 1977, v. 15, p. 1655.
72. **Богомольный Е. Б., Вайнштейн А. И.** «Ядерная физика», 1976, т. 23, с. 1111.
73. **Прохватилов Е. В., Франке В. А.** «ТМФ», 1977, т. 31, № 3, с. 300.
74. **Pottinger D. E. L., Rivers R. J.** «Nuovo cimento A», 1975, v. 26, p. 16.
75. **Heisenberg W.** «Z. Phys.,» 1952, v. 133, p. 65.
76. **Барбашов Б. М., Черников Н. А.** «ЖЭТФ», 1966, т. 50, с. 1296.
77. **Barbashov B. M., Chernikov N. A.** «Commun. Math. Phys.», 1966, v. 3, p. 313.
78. **Artru H.** «Nucl. Phys. B», 1975, v. 85, p. 442.
79. **Collins P. A., Hopkinson J. F. L., Tucker R. W.** Ibid., v. 100, p. 157.
80. **Sundermeyer K., de la Tore A.** «Phys. Rev. D», 1977, v. 15, p. 1745.
81. **Collins P. A., Tucker R. W.** «Nucl. Phys. B», 1976, v. 112, p. 150.
82. **Mandelstam S.** Ibid., 1973, v. 64, p. 205.
83. **Коноплева Н. П., Попов В. Н.** Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.
84. **Полубаринов И. В.** «ТМФ», 1969, т. 1, № 1, с. 34.
85. **Klein F.** «Göttinger Nachrichten. Math.— Phys. Kl.», 1918, H. 2, S. 171.