

## О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЛАСТИ ОТТАЛКИВАНИЯ НУКЛОН-НУКЛОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

*В. В. Кожаров, А. М. Попова, Ю. В. Попов*

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

В работе обсуждаются свойства нуклон-нуклонных сил и вид двухчастичного  $NN$ -потенциала на малых расстояниях между нуклонами, информацию о которых можно извлечь из экспериментов по двух- и многочастичному рассеянию при нерелятивистских энергиях. Рассматриваются фазы нуклон-нуклонного рассеяния в области энергий до  $450 \text{ Мэв}$  в л. с. к. и внеэнергетические характеристики двухчастичного рассеяния: внеэнергетическая амплитуда рассеяния и волновая функция дейтона. Получены новые данные о поведении потенциала на малых расстояниях, а также выделены некоторые модели потенциалов, сконструированные в рамках мезонной теории, которые позволяют описывать эксперименты по рассеянию двух и трех нуклонов.

Nucleon-nucleon forces properties and  $NN$ -potentials which is possible to obtain from two and many particle scattering experiments are discussed in the present work for small nucleon-nucleon distances. Nucleon-nucleon scattering phase for  $450 \text{ MeV}$  in the laboratory system, off energy shell two particles scattering amplitude and deuteron wave function are under consideration. New results are obtained on the potentials behaviour for small distances. Some potentials constructed in the mesonic theory frames are found to be more preferable for the two and three nucleon scattering.

### ВВЕДЕНИЕ

Проблема исследования двухчастичного нуклон-нуклонного взаимодействия и связанного с ним потенциала в области небольших (до нескольких сот мегаэлектронвольт) начальных энергий частиц является одной из основных в ядерной физике. Несмотря на то что к настоящему времени накоплен определенный экспериментальный материал, позволяющий изучать характеристики рассеяния двух и нескольких частиц при малых и средних энергиях, еще нет единого теоретического описания нуклон-нуклонного взаимодействия и нет общего метода анализа экспериментальных данных. Более того, постоянно наблюдается рост числа теоретических работ, в которых результаты опытов обсуждаются и с точки зрения модельных, феноменологических представлений об  $NN$ -потенциале, и в рамках мезонной теории ядерных сил.

При теоретико-полевом описании  $NN$ -взаимодействия в диапазоне нерелятивистских энергий квантовомеханический потенциал обычно рассматривается как фурье-образ по переданному импульсу от суммы всевозможных неприводимых диаграмм Фейнмана в предположении, что взаимодействие нуклонов осуществляется посредством некоторого набора бозонных полей. В настоящее время благодаря работам ряда авторов [1—15] стало достаточно ясно, что периферическую и центральную области  $NN$ -потенциала ( $r \gtrsim 0,5$  ферми), который носит здесь притягивающий характер, формируют в основном одно- и двухпионные обмены, а также вклады от резонансных частей трехпионных обменов ( $\omega$ -мезон,  $\eta$ -мезон и т. п.). Для изучения внутренней области потенциала ( $r < 0,5$  ферми) требуется учитывать вклады высших неприводимых диаграмм теории возмущений, что ведет при их аккуратном учете к значительным вычислительным трудностям.

Таким образом, в существующих мезонных моделях  $NN$ -сил возникает проблема доопределения потенциала при малых расстояниях между нуклонами.

Как известно, фазовый анализ амплитуды упругого  $NN$ -рассеяния, проведенный на основе имеющихся экспериментальных данных по сечениям  $np$ - и  $pp$ -взаимодействия [16—18], в особенности ход  $S$ -фаз в зависимости от энергий сталкивающихся частиц, позволяет сделать предположение о поведении нуклон-нуклонного потенциала при малых  $r$ , заключающееся в том, что потенциал во внутренней области имеет отталкивательный характер.

В теоретико-полевоом описании  $NN$ -взаимодействия все мезонные модели нуклон-нуклонных потенциалов можно условно разделить на три группы по способу введения отталкивающего кора. К первой группе следует отнести те модели, где локальный кор определяется феноменологическим путем, например, в виде «бесконечной стенки» ( $V_c = \infty$  при  $0 \leq r \leq r_c$ ) или каким-либо иным эквивалентным по смыслу образом [19]. Авторы второй группы моделей вводят нелокальный отталкивающий кор, задавая его некоторым сепарабельным представлением в импульсном пространстве [10, 20]. Наконец, третью группу составляют потенциалы, в которых осуществлена процедура регуляризации на основе физических предположений. Например, в работах Грина и др. [2—4] вместо «голой» вершины взаимодействия нуклона с мезоном в неприводимых диаграммах рассматривается мезонный форм-фактор, убывающий с ростом переданного импульса. В этом случае в результате вычисления фурье-образа по переданному импульсу от диаграмм, содержащих однобозонные обмены, в потенциале не возникнет каких-либо особенностей при  $r = 0$ . Заметим, что мезонный форм-фактор в указанных работах вводится феноменологически. Более интересной, с нашей точки зрения, является работа Джексона и Волошина [13], в которой обсуждаются возможности подсчета

диаграмм с мезонными обменами в рамках эйконального приближения. Данная процедура регуляризации  $NN$ -потенциала более физична, чем введение феноменологического форм-фактора, хотя правомочность ее нуждается в экспериментальной проверке. Такое разнообразие подходов и моделей описания  $NN$ -взаимодействия показывает с определенностью на недостаточность экспериментальных сведений об этом явлении и, следовательно, ставит задачу выяснения новых возможностей извлечения из опыта данных о свойствах нуклон-нуклонных сил.

Настоящий обзор посвящен исследованию новой информации об области отталкивающего кора  $NN$ -потенциала, которую удается извлечь из экспериментов по двух- и трехнуклонному рассеянию. С этой целью будут рассмотрены некоторые характеристики рассеяния небольшого числа нуклонов, в частности немассовая двухчастичная амплитуда рассеяния и волновая функция дейтона, которые более чувствительны к форме потенциала, чем упругие фазы рассеяния двух нуклонов.

Методы анализа немассового поведения амплитуды двухчастичного рассеяния и волновой функции дейтона в целях уточнения видов нуклон-нуклонных потенциалов были предложены в работах [20].

## 1. ЯДЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ И ФАЗЫ НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ

Ограничения на характерные значения высот и радиусов отталкивающей сердцевин. Основное требование, предъявляемое в настоящее время к моделям  $NN$ -потенциалов, заключается в описании хода фаз упругого рассеяния двух нуклонов в некотором диапазоне энергий. Если бы фаза парциальной волны  $\delta_l(E)$  была известна в области энергий сталкивающихся частиц  $0 < E < \infty$ , то потенциал  $V_l(r)$ , воспроизводящий эту фазу, можно было бы определить методами обратной задачи теории рассеяния [21]. Однако из-за трудностей выделения фаз из экспериментальных сечений  $NN$ -рассеяния, а также в связи с возникновением релятивистских неупругих эффектов с известной точностью фазы определены лишь в области энергий  $0 \leq E_{\text{лаб}} \leq 450 \text{ Мэв}$  [16], что и приводит к возможности использования широкого круга моделей ядерных потенциалов, так называемых фазово-эквивалентных потенциалов, даже в рамках мезонных моделей. Сам факт существования сильно различающихся между собой моделей потенциалов, которые могут в пределах ошибок воспроизводить не только отдельную фазу, но и совокупность нескольких фаз в данной области энергий, указывает на трудности определения каких-либо абсолютных значений параметров потенциальной функции путем исследования фазовых кривых. Однако, как будет показано далее, на основе специаль-

ного анализа этих кривых можно установить связь параметров потенциалов  $NN$ -сил.

Для исследования параметров, характеризующих внутреннюю область нуклон-нуклонного потенциала, наиболее пригодна синглетная  ${}^1S_0$ -фаза, поскольку в данном случае отсутствует центральный барьер, сильно экранирующий поведение потенциальной функции в указанной области.

На рис. 1 для сравнения изображены расчетные теоретические синглетные фазы  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -рассеяния протонов в

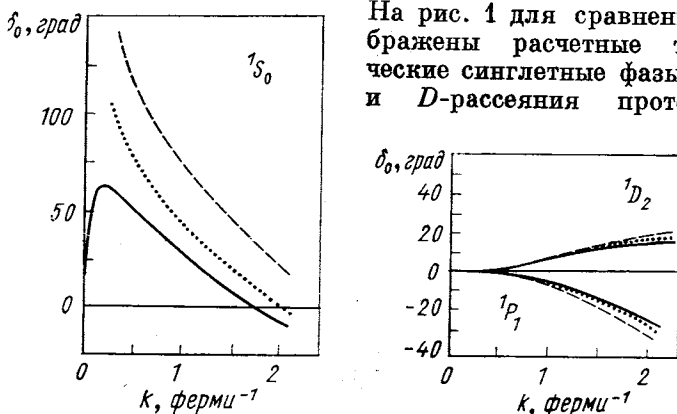


Рис. 1. Сравнительное изменение синглетных  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -фаз  $NN$ -рассеяния в области энергий  $0 < E_{\text{лаб}} < 320 \text{ Мэв}$  в том случае, когда один из регуляризирующих параметров ОВЕ-потенциала Грина и др. принимает последовательно растущие значения

случае, когда регуляризирующий параметр, который характеризует внутреннюю область в одном из ОВЕ-потенциалов Грина и др. [3], принимает последовательно растущие значения. Видно, что изменение указанного параметра существенно сказывается только на поведении  $S$ -фазы.

В качестве инструмента исследования  $S$ -фазовой кривой мы используем метод фазовых функций [22]. Оказывается, что с помощью этого метода можно найти целый ряд полезных ограничений на характерные параметры отталкивающего кора (высоту, радиус), зная поведение потенциала в его периферической и средней областях.

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, получим одно важное соотношение, которым неоднократно будем пользоваться в дальнейшем, а именно рассмотрим связь малого изменения формы потенциала  $dV(r)$  с соответствующим изменением  $S$ -фазовой функции  $d\delta_0(r, k)$ . Уравнение для  $S$ -фазовой функции,

как известно, имеет вид \*

$$\partial\delta_0(r, k)/\partial r = -(V(r)/k) \sin^2[kr + \delta_0(r, k)], \quad \delta_0(0, k) = 0. \quad (1)$$

Тогда из уравнения (1) в предположении, что оператор изменения формы потенциальной функции  $d$  и оператор дифференцирования  $\partial/\partial r$  коммутируют между собой, можно получить уравнение для приращения фазовой функции:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [d\delta_0(r, k)] &= -\frac{dV(r)}{k} \sin^2[kr + \delta_0(r, k)] - \\ &- \frac{V(r)}{k} \sin 2[kr + \delta_0(r, k)] d\delta_0(r, k); \\ d\delta_0(0, k) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{aligned} d\delta_0(r, k) &= -\frac{1}{k} \int_0^r \sin^2 \gamma(\xi, k) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{k} \int_{\xi}^r V(\eta) \sin 2\gamma(\eta, k) d\eta \right\} [dV(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь для удобства записи введено обозначение  $\gamma(r, k) = kr + \delta_0(r, k)$ . Приращение  $d\delta_0(k)$  наблюдаемой фазы следует из (3) в пределе  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом, если рассматривать монотонную последовательность потенциальных функций  $V_1(r) \geq V_2(r) \geq V_3(r) \geq \dots$ , где каждый потенциал отличается от другого хотя бы в малой области  $\Delta r$ , то соответствующая этим потенциалам последовательность фазовых кривых будет подчиняться системе неравенств

$$\delta_0^{(1)}(k) < \delta_0^{(2)}(k) < \delta_0^{(3)}(k) < \dots, \quad (4)$$

что непосредственно следует из (3).

Вернемся к изучению  ${}^1S_0$ -фазы  $NN$ -рассеяния и попытаемся определить границы области отталкивания  $NN$ -взаимодействия. С этой целью рассмотрим фазовое уравнение (1) при том значении энергии сталкивающихся частиц  $k_0^2 > 0$ , при котором  ${}^1S_0$ -фаза переходит через нуль ( $k_0^2 = 3,4$  ферми $^{-2}$ ), поскольку именно наличие отталкивающего кора у ядерного потенциала приводит к изменению знака фазовой кривой, что следует, в частности, из формул (3) и (4). Однако прежде нам потребуется определить, что нужно понимать под радиусом кора  $r_c$ .

\* В качестве энергетических единиц используем ферми $^{-2}$ . Переход от  $M\varepsilon$  к ферми $^{-2}$  осуществляется с помощью преобразования:  $(k^2)_{\text{ферми}^{-2}} = (M_N/\hbar^2) (E_{\text{с.п.м.}})_{M\varepsilon}$ , где  $M_N/\hbar^2 = 41,47$  ферми $^{-2}/M\varepsilon$ .

Потенциал рассеяния, получаемый из мезонной теории ядерных сил, можно условно рассматривать в виде суммы, где каждое слагаемое соответствует обмену между нуклонами одним или несколькими мезонами разных видов и, следовательно, характеризуется своим радиусом короткодействия.

Установлено, что взаимодействие нуклонов в области от 0,5 ферми и выше обусловлено в основном обменами одним и двумя  $\pi$ -мезонами, а также вкладами от обменов векторными мезонами  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\eta$  и т. п., которые можно рассматривать как резонансные части двух- и трехпионных обменов. Кроме того, необходимо учитывать некоторые дополнительные механизмы, например включение нуклонных резонансов в промежуточные состояния в диаграммах двухпионного обмена. В целом все потенциалы, в которых используется идея двухпионного обмена [10—15], построены по этому принципу и различаются способом и степенью учета тех или иных короткодействующих эффектов, а также выбором констант связи векторных мезонов, которые определены с большими погрешностями.

Таким образом, «истинный» нуклон-нуклонный потенциал  $V(r)$  можно представить в виде суммы двух частей:

$$V(r) = -V_p(r) + V_c(r),$$

где  $V_p(r)$  — внешняя часть потенциала, которую в рамках некоторой модели можно определить наиболее аккуратно и с минимальным произволом, а  $V_c(r)$  — внутренняя его часть, включающая в себя целый ряд феноменологических параметров. При этом потенциал  $-V_p(r)$  носит в основном притягивающий характер, т. е.  $V_p(r) > 0$  [12—15]. Тогда под радиусом кора  $r_c$  мы будем понимать то взаимное расстояние между нуклонами, на котором поведение  $V(r)$  начнет отличаться от поведения функции  $-V_p(r)$ , допустим, более чем на 10%. Очевидно, что величина радиуса кора, определенного подобным образом, будем зависеть от того, насколько точно мы смогли учесть все периферические механизмы в  $NN$ -взаимодействии. Заметим, кстати, что в настоящее время на роль  $V_p(r)$  может претендовать, пожалуй, лишь потенциал однопионного обмена (ОПЕР).

Итак, пусть потенциал  $V(r)$  нуклон-нуклонного рассеяния в  $S$ -состоянии при  $r > r_c$  является чисто притягивающим и определяется функцией  $V_p(r)$ , а при  $r < r_c$  имеет структуру, вид которой нам пока не важен и о которой известно только, что она в основном определяется конечными силами отталкивания нуклонов. Построим потенциал  $\tilde{V}(r)$ , имеющий бесконечно большой отталкивающий кор с радиусом  $r_c$ , а при  $r > r_c$  описываемый все той же функцией  $V_p(r)$ . Обозначим  $S$ -фазовую функцию рассеяния на таком потенциале  $\tilde{\delta}_0(r, k)$ , так что  $\tilde{\delta}_0(k) \equiv \tilde{\delta}_0(\infty, k)$ , где  $\tilde{\delta}_0(k)$  —  $S$ -фаза.

Допустим, что при  $k = k_0$  фаза  $\tilde{\delta}_0(k)$  обращается в нуль. Очевидно, что в силу неравенств (4) фаза рассеяния двух нуклонов  $\delta_0(k)$  на потенциале  $V(r)$  будет больше нуля в точке  $k_0$ . Чтобы добиться выполнения условия  $\delta_0(k_0) = 0$ , было бы необходимо уменьшить область отталкивания за счет увеличения  $r_c$ . В этом смысле потенциал с бесконечно большим кором имеет минимальный радиус кора  $r_{c0}$  среди всех потенциалов, у которых внешняя часть задается функцией  $V_p(r)$  и которые обращают фазу рассеяния  $\delta_0(k)$  в нуль в точке  $k_0$ . Радиус  $r_{c0}$  можно определить из уравнения

$$r_{c0} = \frac{1}{k_0^2} \int_{r_{c0}}^{\infty} V_p(r) \sin^2 [k_0 r + \tilde{\delta}_0(r, k_0; r_{c0})] dr. \quad (5)$$

Для «реалистических» потенциалов, имеющих произвольную структуру внутри области  $r_s < r_c$ , будет иметь место неравенство

$$r_c \gg r_{c0}, \quad (6)$$

которое примечательно тем, что значение  $r_{c0}$  определяется исключительно видом известной нам функции  $V_p(r)$ .

Сложное трансцендентное уравнение (5) можно несколько упростить, если учесть, что фазовая функция  $\tilde{\delta}_0(r, k_0) < 0$  при  $r > r_{c0}$ , т. е.  $k_0 r + \tilde{\delta}_0(r, k_0) < k_0 r$ . Тогда в тех областях изменения  $r$ , где выполняются неравенства

$$\pi/2 + \pi n \leq k_0 r + \tilde{\delta}_0(r, k_0) < k_0 r \leq \pi(n + 1), \quad (7)$$

имеет место соотношение

$$\sin^2 [k_0 r + \tilde{\delta}_0(r, k_0)] > \sin^2 k_0 r.$$

Так как обычно радиус действия  $NN$ -потенциала не превышает 3—4 ферми, то неравенства (7) достаточно рассматривать при  $n = 0$ . В этом случае из (5) следует

$$r_{c0} > \frac{1}{k_0^2} \int_{r_1}^{r_2} V_p(r) \sin^2 k_0 r dr, \quad (8)$$

где  $r_2 = \pi/k_0$ , а  $k_0 r_1 + \tilde{\delta}_0(r_1, k_0) = \pi/2$ . Поскольку  $\tilde{\delta}_0(r_1, k_0) > -k_0 r_{c0}$ , то  $r_1 < r_{c0} + \pi/2k_0$ . Подставляя найденные оценки для  $r_1$  и  $r_2$  в формулу (8), получаем окончательно

$$r_{c0} > \frac{1}{k_0^2} \int_{r_{c0} + \pi/2k_0}^{\pi/k_0} V_p(r) \sin^2 k_0 r dr. \quad (9)$$

Аналогично можно найти нижнюю границу для характерной высоты отталкивающего кора, определив ее как  $V_c = \max V(r)$ . Для этого рассмотрим множество потенциалов, описываемых функ-

цией  $-V_p(r)$  при  $r > r_c$  и обращающих в нуль фазу рассеяния при  $k = k_0$ . Очевидно, в силу все тех же неравенств (4) минимальную высоту  $V_{c0}$  среди этих потенциалов будет иметь отталкивающий потенциал прямоугольной формы при  $0 < r < r_c$ . Значение  $V_{c0}$  в этом случае определяется из уравнения

$$-k_0 r_c + \arctg\left(\frac{k_0}{x_0} \operatorname{tg} x_0 r_c\right) + \frac{1}{k_0} \int_{r_c}^{\infty} V_p(r) \sin^2[k_0 r + \tilde{\delta}_0(r, k_0; r_c, V_{c0})] dr = 0, \quad (10)$$

где  $x_0 = \sqrt{k_0^2 - V_{c0}}$ , а фазовая функция  $\tilde{\delta}_0(r, k_0; r_c, V_{c0})$  — решение уравнения (1) с потенциалом

$$\tilde{V}(r) = \begin{cases} +V_{c0} & \text{при } 0 \leq r \leq r_c; \\ -V_p(r) & \text{при } r > r_c. \end{cases}$$

Формально  $V_{c0}$  можно рассматривать согласно уравнению (10) как функцию параметра  $r_c$ ; тогда  $V_{c0}(r_c)$  будет неубывающей функцией  $r_c$ . Примерный график зависимости  $V_{c0}(r_c)$  для некоторого потенциала  $V_p(r)$  представлен на рис. 2. Значения возможных высот  $V_c$  «реальных» потенциалов будут расположены выше кривой  $V_{c0}(r_c)$ , которая является как бы универсальной для данной конкретной модели периферического взаимодействия нуклонов.

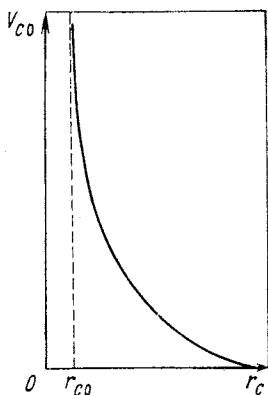


Рис. 2. Примерная зависимость  $V_{c0}(r_c)$ . Параметры и вид притягивающей части потенциала фиксированы

Таким образом, связь параметров притягивающей части нуклон-нуклонного потенциала с возможными высотами и радиусами отталкивающего кора определяет тот объем информации о коре, который можно извлечь, изучая ход  $^1S_0$ -фазы двухнуклонного рассеяния в области энергий до  $450 \text{ Мэв}$  в л. с.к. Столь малый объем информации в первую очередь объясняется относительно небольшим диапазоном доступных для определения фаз энергий. Конечно, если бы можно было распространить фазовый анализ, например, до энергии  $1 \text{ Гэв}$ , то можно было бы по крайней мере качественно определить «мощность» кора (рис. 3). С другой стороны, как показано в работе [27], для описания хода  $^1S_0$ -фазы в диапазоне энергий взаимодействующих частиц до  $450 \text{ Мэв}$  достаточно иметь потенциальную функцию с пятью параметрами, подобравными соответствующим образом. Отсюда следует, что, если



даже мы зададимся потенциалом притяжения вполне определенного вида, то можем построить множество моделей отталкиваю-

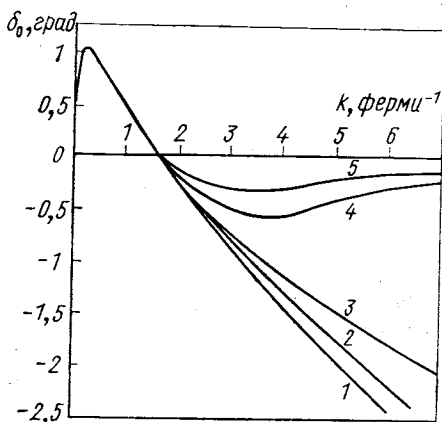


Рис. 3. S-фазовые кривые для различных потенциалов в области энергий  $E_{\text{лаб}}$  до 4 Гэв:

- 1 — потенциал Хамады — Джонстона;
- 2 — потенциал Рейда с твердым кором;
- 3 — потенциал Рейда с мягким кором;
- 4 — один из потенциалов Спрагга — Сривастави;
- 5 — потенциал Гюньи — Пире — Турея

щих коров, которые в совокупности с притягивающей частью воспроизведут экспериментально наблюдаемую энергетическую зависимость  $^1S_0$ -фазы.

**Сравнительный анализ фаз нуклон-нуклонного рассеяния.** Как правило, при восстановлении вида  $NN$ -потенциала объектом изучения является одна отдельно взятая фазовая кривая рассеяния двух нуклонов. Однако определенный интерес представляет сравнение фазовых кривых, например  $^1S_0$ -фаз  $np$ - и  $pp$ -рассеяния или  $^1S_0$ - и  $^3S_0$ -фаз  $pp$ -рассеяния и т. п. Поскольку различие в поведении первой группы указанных кривых тесным образом связано с проблемой изотопической инвариантности нуклон-нуклонных сил, то следует ожидать, что их сравнительное исследование позволит получить дополнительную информацию о нуклон-нуклонном потенциале и, в частности, о его отталкивающем коре.

Как известно, гипотеза изотопической инвариантности  $NN$ -взаимодействия предусматривает равенство потенциалов  $^1S_0$ -рассеяния в  $np$ - и  $pp$ -системах без учета кулоновских сил. Из упомянутых выше работ Мак-Грегора и других следует, что разность синглетных  $^1S_0$ -фаз  $np$ - и  $pp$ -рассеяния, по крайней мере, неотрицательна вплоть до энергий сталкивающихся частиц  $E_{\text{лаб}} \approx 450 \text{ Мэв}$  и при данной энергии составляет

$$\Delta\delta_0 \equiv \delta_{np} - \delta_{pp} \approx 0,22 \pm 0,07. \quad (11)$$

Эта разность фаз обусловлена интерференцией ядерного и кулоновского взаимодействий, так что фазу рассеяния двух заряженных ядерных частиц можно представить в виде

$$\delta_0(k) = \delta_0^{\text{кул}}(k) + \delta_0^{\text{яд}}(k) - \Delta\delta_0(k), \quad (12)$$

где  $\delta_0^{\text{кул}}(k)$  — фаза рассеяния на кулоновском потенциале, а  $\delta_0^{\text{яд}}(k)$  — на «чисто» ядерном потенциале. Для вычисления поправки  $\Delta\delta_0(k)$  при больших импульсах относительного движения  $k$  удобно пользоваться разложением фазы  $\delta_0(k)$  в ряд по параметру  $\nu = \alpha/k$ , где  $\alpha = M_N e^2 / 2\hbar^2 = 1,74 \cdot 10^{-2}$  ферми<sup>-1</sup> — кулоновская постоянная нуклона.

Итак, фазовое уравнение (1) в случае рассеяния заряженных нуклонов на изотопически-инвариантном потенциале примет вид

$$\begin{aligned} \partial\delta_0(r, k; \alpha)/\partial r &= -(1/k) [V(r) + 2\alpha/r] \sin^2[kr + \delta_0(r, k; \alpha)], \\ \delta_0(0, k; \alpha) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Для удобства записи введем также функцию  $\gamma(r, k; \alpha)$ , которая связана с фазовой функцией  $\delta_0(r, k; \alpha)$  соотношением  $\gamma(r, k; \alpha) = kr + \delta_0(r, k; \alpha)$ . Проведем формальное разложение функции  $\gamma(r, k; \alpha)$  в ряд по параметру  $\nu$  при условии  $|\nu| \ll 1$ :

$$\gamma(r, k; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \gamma_n(r, k). \tag{14}$$

Тогда уравнение (13), переписанное для функции  $\gamma(r, k; \alpha)$ , распадается на систему дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов  $\gamma_n(r, k)$  в формуле (14):

$$\left. \begin{aligned} \partial\gamma_0(r, k)/\partial r &= k - (V(r)/k) \sin^2 \gamma_0(r, k), \quad \gamma_0(0, k) = 0; \\ \partial\gamma_1(r, k)/\partial r &= -(2/r) \sin^2 \gamma_0(r, k) - \\ &\quad - (V(r)/k) \gamma_1(r, k) \sin 2\gamma_0(r, k), \quad \gamma_1(0, k) = 0; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Уравнения, содержащие  $\gamma_i(r, k)$  с  $i = 1, 2, \dots$ , легко интегрируются и выражаются через функцию  $\gamma_0(r, k)$  рассеяния на «чисто» ядерном потенциале  $V(r)$ . Производя указанное интегрирование, легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \delta_0(r, k; \alpha) &= \delta_0(r, k; 0) - \\ &- \int_0^r d\xi F(\xi, k; \nu) \exp \left[ -\frac{1}{k} \int_{\xi}^r \sin 2\gamma_0(\eta, k) V(\eta) d\eta \right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь  $F(\xi, k; \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu^n g_n(\xi, k)$ , а функции  $g_n(\xi, k)$  выражаются через  $\gamma_n(\xi, k)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} g_1(\xi, k) &= (2/\xi) \sin^2 \gamma_0(\xi, k); \\ g_2(\xi, k) &= \gamma_1(\xi, k) [(2/\xi) \sin 2\gamma_0(\xi, k) + (V(\xi)/k) \gamma_1(\xi, k) \cos 2\gamma_0(\xi, k)]; \\ g_3(\xi, k) &= [(2/\xi) \gamma_2(\xi, k) - (2/3) \gamma_1^3(\xi, k) (V(\xi)/k)] \sin 2\gamma_0(\xi, k) + \\ &+ 2\gamma_1(\xi, k) [(1/\xi) \gamma_1(\xi, k) + (V(\xi)/k) \gamma_2(\xi, k)] \cos 2\gamma_0(\xi, k) \quad \text{и т. д.}; \\ \gamma_n(r, k) &= - \int_0^r g_n(\xi, k) \exp \left[ -\frac{1}{k} \int_{\xi}^r \sin 2\gamma_0(\eta, k) V(\eta) d\eta \right]. \end{aligned}$$

Чтобы из (16) получить наблюдаемую фазу рассеяния заряженных частиц, надо устремить  $r$  к бесконечности. При этом интеграл будет логарифмически расходиться. Определим фазовую функцию  $S$ -рассеяния на потенциале  $V(r, \alpha) = V(r) + 2\alpha/r$  и при  $r \rightarrow \infty$  таким образом:

$$\delta_0(r, k; \alpha)_{r \rightarrow \infty} \approx \delta_0(k, \alpha) - \nu \ln 2kr + (1/2i) \ln [\Gamma(1 + i\nu)/\Gamma(1 - i\nu)]. \tag{17}$$

Прежде чем подставить (17) в формулу (16), заметим, что

$$\ln 2kr = 2 \int_0^r \frac{d\xi}{\xi} \sin^2 k\xi + \text{Ci}(2kr) - C,$$

где  $C$  — постоянная Эйлера, равная 0,577..., а интегральный косинус  $\text{Ci}(2kr) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Если теперь учесть (12), а также разложить кулоновскую фазу  $(1/2i) \ln [\Gamma(1 + i\nu)/\Gamma(1 - i\nu)]$  в ряд по параметру  $\nu$ , то для интерференционной поправки из (16) мы получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta \delta_0(k) = & \int_0^\infty d\xi \left[ F(\xi, k; \nu) \exp \left( -\frac{1}{k} \int_0^\infty \sin 2\gamma_0(\eta, k) V(\eta) d\eta \right) - 2\nu \frac{\sin^2 k\xi}{\xi} \right] - \\ & - \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \nu^{2m} \zeta(2m + 1). \end{aligned} \tag{18}$$

Все интегралы в выражении (18) существуют, поэтому для оценки  $\Delta \delta_0(k)$  при условии  $|\nu| \ll 1$  есть смысл ограничиться первым членом разложения по  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \Delta \delta_0(k) \approx & 2\nu \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \left[ \sin^2 \gamma_0(\xi, k) \times \right. \\ & \left. \times \exp \left( -\frac{1}{k} \int_0^\infty \sin 2\gamma_0(\eta, k) V(\eta) d\eta \right) - \sin^2 k\xi \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Отметим, что условие  $|\nu| \ll 1$  в случае рассеяния протонов хорошо выполняется уже при энергии взаимодействия  $E_{\text{лаб}} \gtrsim 2 \text{ Мэв}$ .

Прежде чем применить формулу (19) к исследованию разности фаз (11), необходимо обсудить правомочность такого сопоставления. В самом деле, при энергии порядка 200 Мэв в с. п. м. приходится учитывать релятивистские поправки к фазе рассеяния частиц, влияние электромагнитного форм-фактора нуклонов, изме-

няющего закон Кулона на малых взаимных расстояниях, эффект вакуумной поляризации и т. п. Однако при оценке разности фаз  $np$ - и  $pp$ -рассеяния релятивистские поправки будут пропорциональны величине  $v(\lambda k)^2$ , где  $\lambda = \hbar/M_N c = 0,2$  ферми—комптоновская длина волны нуклона, и ими можно пренебречь по сравнению с  $\Delta\delta_0$  в (11). Далее, в этом анализе можно пренебречь влиянием вакуумной поляризации на разность фаз при указанной энергии, так как этот эффект, согласно работам [28], играет заметную роль при энергиях  $E_{\text{лаб}} \lesssim 20$  Мэв. Что же касается учета прямых и непрямых электромагнитных эффектов, то мы рассмотрим их несколько позднее.

Вернемся к исследованию выражения (19). Предполагая, что в левой части формулы (19) стоит значение  $\Delta\delta_0$  (11), эту формулу можно упростить, если ввести в рассмотрение радиус действия ядерного потенциала  $R$ , вне которого можно практически считать  $V(r) = 0$  (обычно радиус  $R$  не превышает 3–4 ферми). В этом случае

$$\Delta\delta_0(k) = 2v \int_0^R \frac{d\xi}{\xi} \sin^2 \gamma_0(\xi, k) \exp\left(-\frac{1}{k} \int_{\xi}^R \sin 2\gamma_0(\eta, k) V(\eta) d\eta\right) + H, \quad (20)$$

где

$$H = 2v \left\{ - \int_0^R \frac{d\xi}{\xi} \sin^2 k\xi + \int_R^{\infty} \frac{d\xi}{\xi} [\sin^2(k\xi + \delta_{np}^{\text{эксп}}(k)) - \sin^2 k\xi] \right\} = \\ = v [\cos 2\delta_{np}^{\text{эксп}}(k) \text{Ci}(2kR) - \sin 2\delta_{np}^{\text{эксп}}(k) \text{Si}(2kR) - C - \ln(2kR)].$$

При энергии  $E_{\text{лаб}} \approx 450$  Мэв ( $k = 2,35$  ферми $^{-1}$ )  $H$  отрицательна и модуль ее имеет значение порядка 0,01–0,03 при  $0,5 < R < 5$  ферми, так что вторым слагаемым в (20) можно пренебречь. Таким образом,

$$\Delta\delta_0(k) \approx 2v \int_0^R \frac{d\xi}{\xi} \sin^2 \gamma_0(\xi, k) \exp\left(-\frac{1}{k} \int_{\xi}^R \sin 2\gamma_0(\eta, k) V(\eta) d\eta\right). \quad (21)$$

С помощью выражения (21) покажем, что значение исследуемой разности фаз  $\Delta\delta_0(k)$ , заданное формулой (11), определяет в основном поведение потенциала в области кора, т. е. покажем, что так называемый мезонный хвост  $NN$ -потенциала не вносит существенного вклада в разность фаз  $np$ - и  $pp$ -рассеяния. Под мезонным хвостом мы будем понимать периферическую притягивающую часть потенциала, где функция  $V(r)$  монотонно возрастает до нуля.

Пусть начиная с точки  $r_p$  функция  $V(r) < 0$  и  $V'(r) > 0$  при  $r > r_p$ . Заметим, что

$$J_0^2(r, k) = \sin^2 \gamma_0(r, k) \exp \left[ -\frac{1}{k} \int_r^\infty \sin 2\gamma_0(\eta, k) V(\eta) d\eta \right]$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$J_0^2(r, k) = \sin^2 \gamma_0(r, k) \left[ 1 + \frac{1}{k^2} \int_r^\infty V'(\xi) J_0^2(\xi, k) d\xi \right] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{V(r)}{k^2} \sin^2 \gamma_0(r, k) \right]^{-1}. \quad (22)$$

Допустим, что при  $r = r_m > r_p$  функция  $J_0^2(r, k)$  достигает наибольшего значения  $M$  в данной области изменения  $r$ . Тогда из (22) следует

$$M \leq \sin^2 \gamma_0(r_m, k) \left[ 1 + (M/k^2) |V(r_m)| \right] \left[ 1 + \frac{|V(r_m)|}{k^2} \sin^2 \gamma_0(r_m, k) \right]^{-1}.$$

откуда

$$M \leq \sin^2 \gamma_0(r_m, k) \leq 1. \quad (23)$$

Подставляя оценку (23) в формулу (21), получаем

$$\Delta \delta_0(k) \leq 2\nu \int_0^{r_p} \frac{d\xi}{\xi} J_0^2(\xi, k) + 2\nu \ln \frac{R}{r_p}. \quad (24)$$

В обычно используемых моделях фазово-эквивалентных потенциалов отношение  $R/r_p$  не превышает 10, т. е. значение  $2\nu \ln R/r_p \leq 0,04$  и им можно пренебречь по сравнению с  $\Delta \delta_0$  согласно (11). По этой же причине некоторые модели потенциалов с твердым бесконечным кором, где  $r_p \equiv r_c$  — радиус кора, не могут описать наблюдаемую разность фаз, поскольку в этом случае первое слагаемое в (24) равно нулю.

Обратимся теперь к первому слагаемому в формуле (24). Прямой расчет значения этого слагаемого с использованием широко известных фазово-эквивалентных феноменологических потенциалов типа Рейда [24] и Бресселя — Кермана — Рубена [29] показал, что левая часть формулы (24) примерно на порядок больше правой. По всей видимости, если область сильного отталкивания потенциала распространяется вплоть до  $r = 0$ , то интегральный член в (24) порядка единицы. Малость волновой функции  $J_0(r, k)$  в области кора дает возможность сделать такой вывод. Действи-

тельно, рассмотрим тождество

$$2 \int_0^R J_0^2(\xi, k) d\xi = \left[ R + \frac{\partial \delta_{np}(k)}{\partial k} - \frac{\sin 2(kR + \delta_{np}(k))}{2k} \right].$$

Подставляя сюда значения  $\delta_{np}(k)$  и  $\partial \delta_{np}(k)/\partial k$ , взятые из эксперимента при  $k \approx 2,4$  ферми<sup>-2</sup>, находим, что

$$\frac{2}{R} \int_0^R J_0^2(\xi, k) d\xi \approx 1. \quad (25)$$

Используя известную теорему о среднем, с учетом (25) получаем из (21)

$$\Delta \delta_0(k) \approx 2\nu \int_0^R \frac{d\xi}{\xi} J_0^2(\xi, k) = \frac{2\nu}{\xi} \int_0^R J_0^2(\xi, k) d\xi \approx \nu R / \xi. \quad (26)$$

Подставляя в (26) числовые значения входящих в равенство величин при  $R \approx 3 \div 4$  ферми, можно найти следующее ограничение на  $\xi$ :  $\xi \lesssim 0,2$  ферми, т. е.  $\xi \ll R$ . Наряду с этим из (26) следует равенство

$$\int_0^{\xi} J_0^2(\xi, k) \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi = \int_{\xi}^R J_0^2(\xi, k) \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi} \right). \quad (27)$$

В левой части равенства (27) стоит величина, близкая к нулю, поскольку волновая функция экспоненциально мала в области сильного отталкивания, но в этом случае должно быть  $\xi \sim R$ , чтобы и правая часть (27) была близка к нулю. Полученное противоречие дает возможность сделать вывод, что модели потенциалов, построенные по типу: притяжение, а затем сильное отталкивание (высокий кор), не описывают наблюдаемую разность фаз в указанном диапазоне энергий.

До сих пор мы рассматривали кулоновский потенциал вида  $V_{\text{кул}}(\xi) = 2\alpha/\xi$  вплоть до малых расстояний. Однако сделанные выше оценки существенно не изменятся, если ввести в рассмотрение электромагнитные форм-факторы протона и нейтрона [30]. Более того, в этом случае кулоновский потенциал станет регулярным при  $\xi \sim 0$ , а порядок его значения будет определяться все той же константой  $\alpha$ .

Таким образом, проведенное исследование разности фаз  $nr$ - и  $pr$ -расстояния в области  $E_{\text{лаб}} \approx 450$  Мэв показывает, что нуклон-нуклонный потенциал должен иметь сложную форму на малых расстояниях между частицами или мы имеем дело с нарушением изотопической инвариантности ядерных сил. При этом вполне вероятно, что непрямые электромагнитные эффекты, связанные

с разностью масс мезонов, которыми обмениваются нуклоны в процессе взаимодействия, также не дают существенного вклада в исследуемую разность фаз. В самом деле, как показывают оценки [31], не прямые электромагнитные эффекты составляют 2—3% от ОВЕ-потенциала. Подставляя значение  $\Delta V(\xi) \sim 0,03V(\xi)$  в формулу (2) вместо  $2\alpha/r$  и учитывая, что при  $E_{\text{лаб}} \approx 450 \text{ Мэв}$

$$\exp \left[ -\frac{1}{k} \int_{\xi}^{\infty} V_{\text{ОВЕ}}(\eta) \sin 2\gamma_0(\eta, k) d\eta \right] \sim 1,$$

получаем, что разность фаз, обусловленная непрямыми электромагнитными эффектами, также на порядок меньше экспериментального значения, хотя с помощью этих эффектов в принципе можно объяснить разность длин  $np$ - и  $nn$ -рассеяния [32].

Заметим, что, вообще говоря, экспериментальное значение разности  ${}^1S_0$ -фаз  $np$ - и  $pp$ -рассеяния можно объяснить, если предположить существование в системе двух нуклонов квазистационарного состояния, пусть даже с очень коротким временем жизни. Это возможно, если ядерный потенциал имеет вид: притяжение, затем сильное отталкивание и вблизи нуля слабое отталкивание или притяжение. Увеличение, рассчитанного значения  $\Delta\delta_0(k)$  в этом случае вызвано возрастанием волновой функции  $J_0(r, k)$  при приближении энергии взаимодействующих частиц к энергии квазистационарного состояния, точнее к действительной ее части [33]. К сожалению, из имеющихся экспериментов по фазам не удается однозначно определить параметры возможного квазистационарного состояния, а также сделать выбор в пользу той или иной альтернативы  $NN$ -взаимодействия при малых  $g$ .

## 2. ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ О НУКЛОН-НУКЛОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО РАССЕЯНИЮ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Перейдем теперь к исследованию экспериментов с тремя нуклонами в целях выяснения характера  $NN$ -сил, предполагая, что при нерелятивистских энергиях существенны только парные взаимодействия между частицами. Как известно [34], амплитуда рассеяния трех нуклонов существенным образом зависит от внеэнергетических характеристик двухчастичного рассеяния: от амплитуды рассеяния двух частиц вне поверхности энергии и в случае рассеяния нуклонов на дейтонах от волновой функции дейтона. Поскольку указанные характеристики определяются видом  $NN$ -потенциала, то следует ожидать, что из исследования сечения рассеяния трех нуклонов в определенных кинематических областях можно получить более детальную информацию об области отталкивающего кора, чем из фазового анализа двухчастичных процес-

сов [35]. В самом деле, рассмотрим, например, асимптотики по переменной  $k$  функции  $\delta_0(k)$  и  $S$ -парциальной внеэнергетической амплитуды  $t_0(k, k'; k^2)$  при фиксированном  $k'$ . В первом случае асимптотический вид будет определяться формулой

$$\delta_0(k) \approx -\frac{1}{2k} \int_0^{\infty} V(r) dr, \quad (28)$$

а во втором случае — оценочной формулой [36]:

$$t_0(k, k'; k^2) \approx V_0(k, k')/[1 + ikV_0(k, k)] \approx -2V'(0)/k^4, \quad (29)$$

которая имеет смысл для потенциалов, достаточно гладких в области малых  $r$ . Сравнивая (28) и (29), легко убедиться, что асимптотический вид немассовой амплитуды прямо зависит от значения потенциала при  $r = 0$  [(28) и (29) получены в предположении ограниченности потенциальной функции], в то время как асимптотика фазы будет определяться видом потенциала во всей области его действия.

**Ядерный потенциал и дифференциальное сечение упругого  $pd$ -рассеяния.** Покажем, что структуру отталкивающего кора нуклон-нуклонного взаимодействия можно исследовать на основе анализа угловых распределений протонов, упругорассеянных дейтонами на большие углы при энергии протонов 150—200  $Mэв$  в л. с. к. Для этого определим необходимые для анализа некоторые функции, характеризующие рассеяние и связанное состояние двух нуклонов. Зададим волновую функцию дейтона  $G_d(\mathbf{p})$  в импульсном представлении:

$$G_d(\mathbf{p}) = (1/4\pi) [u_S(p) + (T_{12}(\mathbf{p})/\sqrt{8}) u_D(p)]. \quad (30)$$

Здесь  $u_S(p)$  и  $u_D(p)$  — скалярные волновые функции  $pn$ -системы в  $S$ - и  $D$ -состояниях, а  $T_{12}(\mathbf{p}) = \left[ \frac{3(\sigma_1\mathbf{p})(\sigma_2\mathbf{p})}{p^2} - (\sigma_1\sigma_2) \right]$  — тензорный оператор. Волновая функция  $G_d(\mathbf{p})$  нормирована условием

$$\int_0^{\infty} [u_S^2(p) + u_D^2(p)] dp = 1. \quad (31)$$

Кроме волновой функции дейтона рассмотрим также форм-фактор дейтона

$$\Phi(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G_d(\mathbf{p}) \frac{-iM}{p^2 + \kappa^2} \frac{-iM}{(\mathbf{p}-\mathbf{k})^2 + \kappa^2} G_d(\mathbf{p}-\mathbf{k}). \quad (32)$$

Здесь  $\kappa^2 = ME_d$  — энергия связи дейтона, равная  $(0,23)^2$  ферми<sup>-2</sup>.

Определим немассовую амплитуду рассеяния двух нуклонов  $t(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; ME)$ , которую можно найти из решения уравнения



Липпмана — Швингера (ЛШШ):

$$t(k, k'; ME) = V(k, k') + 4\pi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{V(k, p) t(p, k'; ME)}{ME - p^2 + i\tau}. \quad (33)$$

Здесь

$$V(k, k') = \frac{1}{4\pi} \int \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}] V(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^3, \quad (34)$$

причем  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ ;  $\mathbf{k}' = (\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2)/2$ ;  $E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2/4M$ , где  $\mathbf{k}_1$  ( $\mathbf{k}_2$ ) и  $\mathbf{k}'_1$  ( $\mathbf{k}'_2$ ) — импульс первого (второго) нуклона соответственно в начальном и конечном состояниях, а  $\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_2$ ) и  $\varepsilon'_1$  ( $\varepsilon'_2$ ) — его энергия в этих же состояниях.

Изучение угловых распределений протонов в реакции  $p + d \rightarrow p + d$  в целях выяснения поведения волновой функции дейтона можно проводить в интересующем нас диапазоне энергий первичных частиц (150—200 Мэв в л. с. к.) на основе интегральных уравнений нерелятивистской задачи о рассеянии трех тел [34]. Расчет дифференциального сечения  $Nd$ -рассеяния в этом случае основывается на представлении амплитуды  $N + d \rightarrow N + d$ -реакции в виде суммы бесконечного ряда диаграмм:

The diagram shows the expansion of the scattering amplitude  $T_{pd}$  into a series of diagrams. The first diagram is  $T_{pd}$ , which is equal to the sum of  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , and so on. Each diagram represents a different order of interaction between the nucleon and the deuteron. The diagrams are arranged in three rows, with the first row containing  $T_{pd}$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ , and  $B_1$ ; the second row containing  $A_3$ , an ellipsis, and  $B_1$ ; and the third row containing  $B_2$ ,  $B_3$ , and an ellipsis. The diagrams are connected by plus signs, indicating a summation.

который является рядом последовательных итераций интегрального уравнения для определения амплитуды  $Nd$ -упругого рассеяния. Здесь  $\mathbf{k}_0$  — импульс падающего нуклона, а  $\mathbf{k}$  — импульс рассеянного нуклона в с. ц. м. В работе [37] было показано, что при энергии первичных нуклонов, значительно превышающей энергию связи нуклонов в дейтоне, т. е. при  $k_0 \gg \kappa$ , можно получить условие сходимости бесконечного ряда вкладов от диаграмм (35) и выделить ведущие из них в определенной кинематической области. Пример такого анализа имеется в работе [38], где рассматривается амплитуда упругого  $Nd$ -рассеяния на нулевой угол.

Суть работы [37] заключается в том, что параметром сходимости ряда (35) оказывается отношение  $\kappa/k_0$ , причем вклады от диаграмм  $A_2, B_2, A_3$  и т. п. пропорциональны  $(\kappa/k_0)^2$  и более высоким

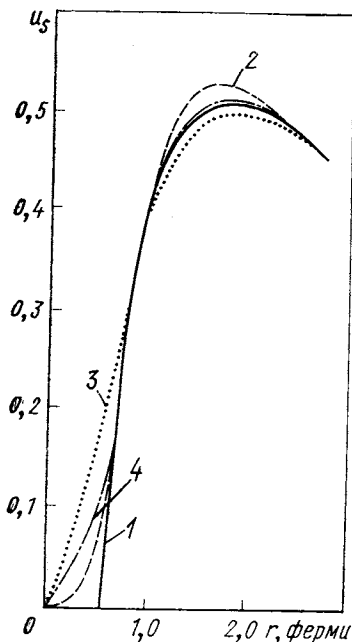


Рис. 4. Зависимость волновой функции дейтона в  $S$ -состоянии от межнуклонного расстояния: 1 — потенциал Хамады — Джонстона; 2 — потенциал Бресселя — Кермана — Рубена; 3 — мезонный потенциал Джексона; 4 — потенциал Рейда с мягким кором

степеням этого параметра во всем диапазоне углов  $\theta$  между векторами  $k_0$  и  $k$ . Таким образом, если  $(\kappa/k_0)^2 \ll 1$ , то в разложении (35) «выживают» лишь диаграммы  $A_1$  и  $B_1$ , а вклады от остальных диаграмм дадут малые поправки к ним. В частности, при рассеянии частиц на угол  $0^\circ$  такая картина в целом согласуется с моделью Глаубера рассеяния нуклонов на дейтонах при высоких энергиях [39].

Мы рассмотрим здесь случай упругого рассеяния протонов назад, на углы  $\sim 180^\circ$  в с. ц. м. Для этого вычислим вклады от диаграмм (35) с целью выделить важнейшие из них в рассматриваемой кинематической области, причем учтем также диаграммы, пропорциональные второму порядку малости по параметру сходимости ряда, поскольку начальные энергии сталкивающихся частиц все же не слишком велики. Вычисление вкладов от диаграмм  $A_2, A_3, B_1$  и т. п. проведем при следующих предположениях:

- а) нуклоны с большим импульсом в промежуточном состоянии рассеиваются, как свободные, преимущественно на углы  $\sim 0^\circ$ ;
- б) нуклоны с малым относительным импульсом в промежуточном состоянии могут образовывать виртуальный дейтон;
- в) изменение импульса нуклона в процессе перерассеяния возможно лишь за счет сложения с относительным импульсом  $\beta$  нуклонов в дейтоне \*.

Чтобы оценить значение  $\beta = |\beta|$ , вычислим средний квадрат импульса нуклона в дейтоне  $\beta_0^2$ , причем в вычислениях из-за малости вклада  $D$ -состояния достаточно ограничиться волновой функцией дейтона в  $S$ -состоянии. На рис. 4 представлены  $S$ -вол-

Выбранная модель структуры промежуточных состояний основана на оценке интегралов [37], соответствующих вкладам от диаграмм, учитывающих различные промежуточные состояния в данной реакции.

новые функции дейтона  $u_S(r)$  в конфигурационном пространстве для различных фазово-эквивалентных триплетных потенциалов. Как следует из рис. 4, эти функции мало различаются с точки зрения оценки средней величины  $\beta_0^2$ , поэтому мы будем использовать хьюлтеровскую волновую функцию дейтона

$$\psi(\mathbf{r}) = u_S(r)/r = (\sqrt{\chi\mu(\chi + \mu)} / \sqrt{2\pi(\mu - \chi)}) (1/r) [\exp(-\chi r) - \exp(-\mu r)], \quad (36)$$

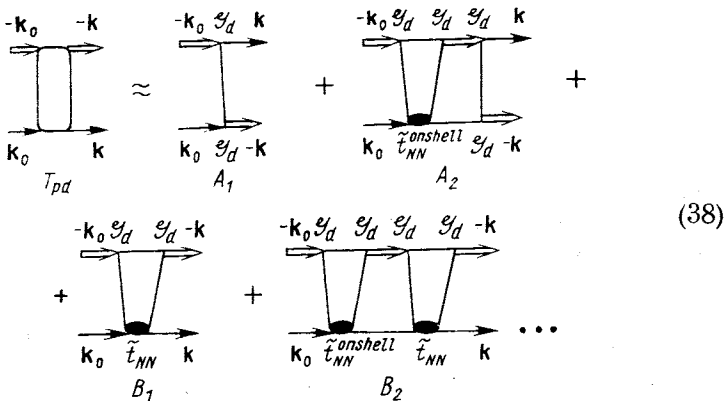
где  $\mu \approx 5\chi$ . Тогда

$$\beta_0^2 = \int d^3r \psi(\mathbf{r}) (-\nabla^2) \psi(\mathbf{r}) \approx \chi\mu \approx 5\chi^2, \quad (37)$$

т. е., как и следовало ожидать,  $\beta_0 \sim \chi$ .

Как уже отмечалось выше, отношение  $\beta_0/k_0$  оказывается при таком рассмотрении параметром сходимости бесконечного ряда (35). При энергии первичных протонов 150—200 Мэв в л. с. параметр  $\beta_0/k_0 \approx 0,25 \div 0,30$ . Следовательно, при вычислении амплитуды реакции с точностью 10% можно пренебречь теми диаграммами в (35), вклады от которых пропорциональны  $(\beta_0/k_0)^3$  и более высоким степеням этого параметра.

Оценка вкладов от диаграмм в соотношении (35) методом, данным в работе [37], показала, что при расчете амплитуды упругого  $pd$ -рассеяния на большие углы с указанной точностью следует ограничиться вкладом от диаграмм  $A_1, A_2, B_1, B_2$  при условии, что в  $A_2$  и  $B_2$  первое промежуточное взаимодействие есть рассеяние нуклонов с большой относительной энергией преимущественно на угол  $10^\circ$ , а второе промежуточное взаимодействие соответствует образованию виртуального дейтона. Учет иных промежуточных состояний даст более высокий порядок по параметру  $\beta_0/k_0$ , чем второй. Таким образом, амплитуду упругого рассеяния протонов на дейтонах на большие углы следует представить графически совокупностью четырех диаграмм:



Вклады от диаграмм в выражении (38) при сделанных выше предположениях могут быть записаны в виде:

$$A_1 = G_d \left( \frac{\mathbf{k}_0}{2} + \mathbf{k} \right) \frac{-iM}{(\mathbf{k}_0/2 + \mathbf{k})^2 + \kappa^2} G_d \left( \frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{k}_0 \right); \quad (39)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} G_d(\mathbf{p}) \frac{-iM}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} \times \\ &\times \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \frac{3}{4} \mathbf{k}_0; M\varepsilon \right) \frac{-iM}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} G_d(\mathbf{p}) \frac{iM}{\frac{3}{4}(\mathbf{k}_0^2 - \mathbf{q}^2) + i\varepsilon} \times \\ &\times G_d \left( \frac{\mathbf{k}_0}{2} + \mathbf{k} \right) \frac{-iM}{(\mathbf{k}_0/2 + \mathbf{k})^2 + \kappa^2} G_d \left( \mathbf{k}_0 + \frac{\mathbf{k}}{2} \right) = \\ &= \frac{M}{12\pi} \frac{\beta_0^2}{k_0} \Phi(0) \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \frac{3}{4} \mathbf{k}_0; M\varepsilon \right) A_1; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} G_d(\mathbf{p}) \frac{-iM}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \mathbf{k} + \frac{\mathbf{k}_0}{4}; M\varepsilon \right) \times \\ &\times \frac{-iM}{[(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})/2 - \mathbf{p}]^2 + \kappa^2} G_d \left( \frac{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}}{2} - \mathbf{p} \right) = \\ &= \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \mathbf{k} + \frac{\mathbf{k}_0}{4}; M\varepsilon \right) \Phi \left( \frac{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}}{2} \right); \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{(2\pi)^9} \int d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{q} G_d(\mathbf{p}_1) \frac{-iM}{\mathbf{p}_1^2 + \kappa^2} \times \\ &\times \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \frac{3}{4} \mathbf{k}_0; M\varepsilon \right) \frac{-iM}{\mathbf{p}_1^2 + \kappa^2} G_d(\mathbf{p}_1) \frac{iM}{\frac{3}{4}(\mathbf{k}_0^2 - \mathbf{q}^2) + i\varepsilon} \times \\ &\times G_d(\mathbf{p}_2) \frac{-iM}{\mathbf{p}_2^2 + \kappa^2} \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \mathbf{k} + \frac{\mathbf{k}_0}{4}; M\varepsilon \right) \frac{-iM}{[(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})/2 - \mathbf{p}_2]^2 + \kappa^2} \times \\ &\times G_d \left( \frac{\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}}{2} - \mathbf{p}_2 \right) = \frac{M}{12\pi} \frac{\beta_0^2}{k_0} \Phi(0) \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \frac{3}{4} \mathbf{k}_0; M\varepsilon \right) B_1. \end{aligned} \quad (42)$$

В равенствах (39) — (42)  $\tilde{t}_{NN} = t_{np} + t_{pp}$ ;  $M\varepsilon = (3\mathbf{k}_0/4)^2$ .

Отметим также, что интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \frac{iM}{\frac{3}{4}(\mathbf{k}_0^2 - \mathbf{q}^2) + i\varepsilon}$$

в формулах (40) и (42) равен  $(M/12\pi) \beta_0^2/k_0$ , поскольку, согласно допущениям, сделанным выше,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 + \beta$ . Складывая соотношения (39) — (42), получаем амплитуду упругого  $pd$ -рассеяния на большие углы:

$$T_{pd} \approx \left[ 1 + \frac{M}{12\pi} \frac{\beta_0^2}{k_0} \Phi(0) \tilde{t}_{NN} \left( \frac{3}{4} \mathbf{k}_0, \frac{3}{4} \mathbf{k}_0; M\varepsilon \right) \right] (A_1 + B_1). \quad (43)$$

Расчет амплитуды  $pd$ -упругого рассеяния был проведен также в [40, 41]. Выражение (43) для амплитуды упругого рассеяния

на большие углы отличается от приведенного в работе [40] тем, что здесь учтены процессы рассеяния нуклона на угол  $0^\circ$  в начальном состоянии, т. е. вклады от диаграмм  $A_2$  и  $B_2$  в формуле (38). Учет этих диаграмм в целом приводит к уменьшению сечения на 20—25%. В работе [41] при получении амплитуды упругого  $pd$ -рассеяния были учтены процессы взаимодействия в начальном состоянии, однако был опущен вклад от процесса прямого  $pd$ -рассеяния [диаграммы  $B_1$  и  $B_2$  в формуле (38)], который дает поправку к сечению  $\sim 10\%$ .

Таким образом, нами получена схема расчета сечения упругого рассеяния нуклонов на дейтонах на большие углы, которая позволяет с точностью порядка 10% учесть все процессы перерассеяния частиц в рассматриваемой реакции (здесь не учтены различного рода релятивистские поправки, например, процессы с образованием мезонов или резонансов в промежуточных состояниях [42], которые, однако, невелики в исследуемой области энергий налетающих нуклонов). Следовательно, согласие теоретических расчетов по полученным формулам с указанной точностью с экспериментальными данными зависит от выбора вида вершинной функции дейтона  $G_d(\mathbf{p})$  и амплитуды рассеяния  $t(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; M\epsilon)$  вне поверхности энергии  $\epsilon$ , значит, от вида потенциала  $NN$ -взаимодействия.

Нами были рассчитаны угловые распределения протонов, упруго рассеянных на дейтонах в интервале углов  $130$ — $180^\circ$  в с. ц. м. при начальной энергии протонов  $150$  и  $185$  Мэв в л. с. на основе формулы (43). Для вычисления вершинной функции дейтона и внеэнергетической амплитуды  $NN$ -рассеяния использовались феноменологические фазово-эквивалентные потенциалы Хамады — Джонстона [23], Рейда с мягким кором [24], Бресслея — Кермана — Рубена [29] и один из мезонных потенциалов Джексона [13]. На рис. 5 представлены результаты сравнения расчетов дифференциального сечения по формуле (43) с экспериментальными данными по упругому  $pd$ -рассеянию [43]. Как следует из рис. 5, мезонный потенциал [13] дает наиболее хорошее согласие с экспериментом.

Анализируя ход рассчитанных дифференциальных сечений упругого  $pd$ -рассеяния для различных видов двухчастичного  $NN$ -потенциала и поведение волновой функции дейтона в  $S$ -состоянии в конфигурационном пространстве (см. рис. 4), можно убедиться, что область кора  $NN$ -потенциала влияет на значение указанных сечений. Как следует из рис. 4, наибольшее различие в ходе волновых функций имеет место в области до  $r \sim 0,7$  ферми.

В связи с этим факт хорошего согласия дифференциального сечения, соответствующего мезонному потенциалу [13], с экспериментом указывает на плодотворность идеи Джексона и Волошина [13] описывать внутреннюю область  $NN$ -взаимодействия через

обмены нейтральными векторными мезонами. При таком подходе сумма неприводимых диаграмм, содержащих произвольное число мезонных обменов, подсчитывается в рамках эйконоальной модели.

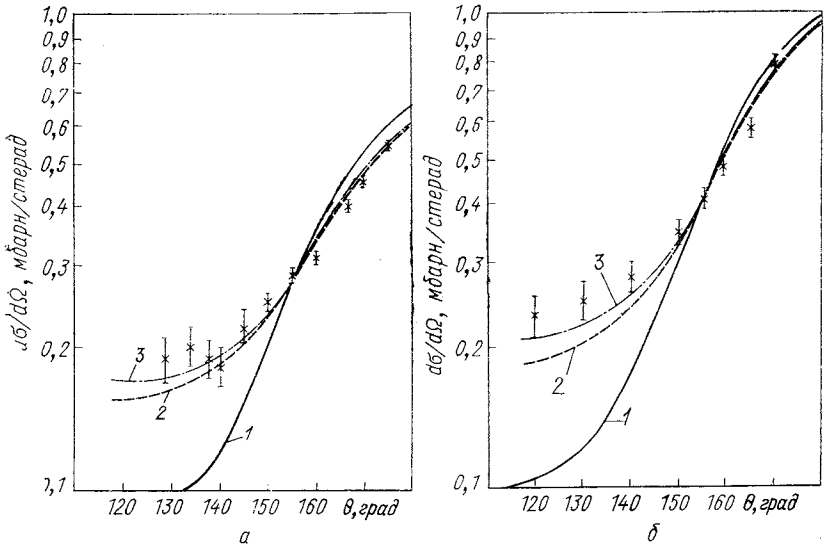


Рис. 5. Дифференциальные сечения  $pd$ -рассеяния назад при начальных энергиях протонов  $E_{\text{лаб}} = 185$  (а) и  $150$  Мэв (б):  
1 — потенциал Каматды — Джонстона; 2 — потенциал Бресселя — Кермана — Рубена;  
3 — мезонный потенциал Чемтоба, Джексона и др.

Таким образом, изучение угловых распределений быстрых протонов, упругорассеянных дейтонами на большие углы, может быть одним из возможных методов анализа внутренней области нуклон-нуклонных сил, причем даже при сравнительно небольших энергиях налетающих протонов, когда релятивистскими эффектами можно пренебречь.

**Ядерный потенциал и внеэнергетическая двухчастичная амплитуда рассеяния.** Другой возможный способ получения более детальной информации о нуклон-нуклонном взаимодействии по сравнению с фазовым анализом упругих сечений  $NN$ -рассеяния заключается в выделении внеэнергетической амплитуды из анализа экспериментов по рассеянию трех и более нуклонов. Известно, что амплитуда указанных реакций может быть определена на основе интегральных уравнений теории рассеяния. Ядра этих уравнений содержат амплитуду рассеяния двух частиц вне поверхности энергий. Следовательно, можно так поставить опыт по исследованию ядерных реакций с тремя и более нуклонами, чтобы поведение дифференциальных сечений в некоторой области изменения

энергий и импульсов вылетающих частиц определяло бы амплитуду рассеяния одной из пар частиц вне поверхности энергий.

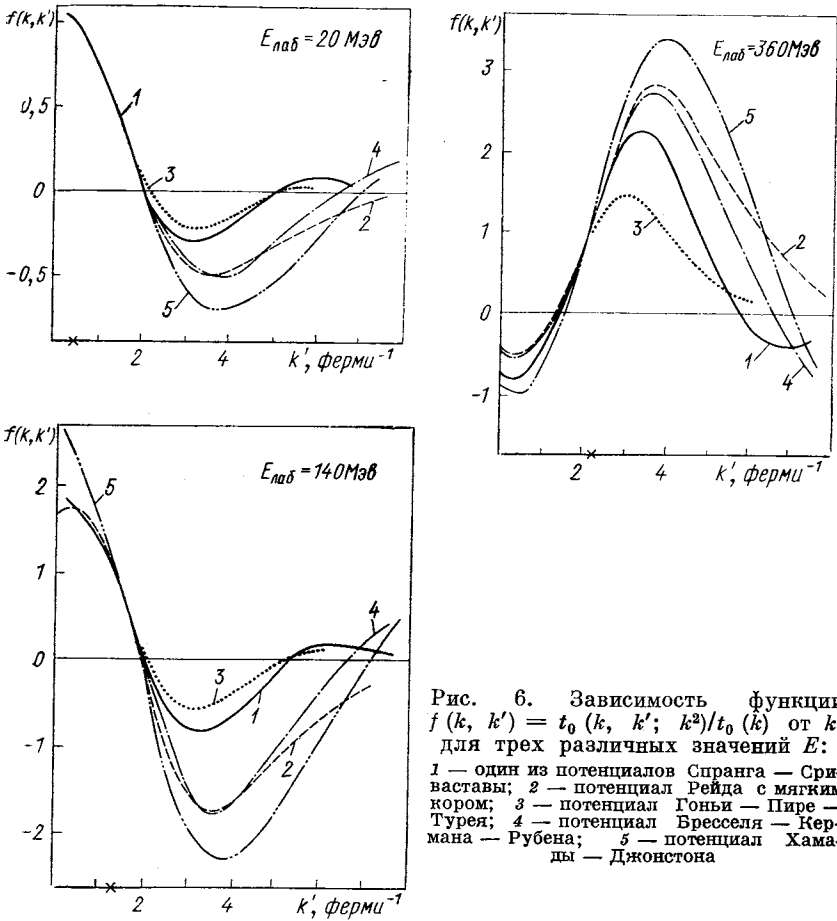


Рис. 6. Зависимость функции  $f(k, k') = t_0(k, k'; k^2)/t_0(k)$  от  $k'$  для трех различных значений  $E$ :  
 1 — один из потенциалов Спранга — Сри-  
 ваставы; 2 — потенциал Рейда с мягким  
 кором; 3 — потенциал Гоньи — Пире —  
 Туря; 4 — потенциал Бресселя — Кер-  
 мана — Рубена; 5 — потенциал Хама-  
 ды — Джонстона

Принципиальную возможность извлечения информации о ядерном потенциале из экспериментальных данных о поведении двухчастичной амплитуды вне поверхности энергии рассмотрим на примере  $S$ -парциальной амплитуды. Напомним, что  $S$ -парциальная амплитуда  $t_0(k, k'; ME)$  вычисляется по формуле

$$t_0(k, k'; ME) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t(k, k'; ME) d\xi,$$

где  $\xi = \cos(\widehat{\mathbf{k}\mathbf{k}'})$ , а для определения  $t(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; ME)$  используется уравнение ЛШ (33). Если один из относительных импульсов, например  $k$ , связан с относительной энергией  $E$  обычным законом дисперсии  $ME = k^2$ , то для так называемой полуэнергетической амплитуды  $t_0(k, k'; k^2)$  имеет место соотношение [44]

$$t_0(k, k'; k^2) = (g_0(k, k')/g_0(kk)) t_0(k), \tag{44}$$

где  $t_0(k) \equiv t_0(k, k; k^2)$  — амплитуда рассеяния на поверхности энергий, а

$$g_0(k, k') = \frac{1}{k'} \int_0^\infty \sin k'\xi J_0(\xi, k) V(\xi) d\xi.$$

Здесь  $J_0(\xi, k)$  — волновая функция системы двух нуклонов. Некоторые свойства функции  $J_0(\xi, k)$  были рассмотрены в разд. 1 настоящего обзора.

На основании расчетов значения  $t_0(k, k'; k^2)/t_0(k)$  для различных моделей потенциалов  $V(r)$  как функции относительного импульса  $k'$ , проведенных рядом авторов (рис. 6), было установлено, что в относительно большом интервале энергий  $10 < E_{\text{с.п.м.}} <$

Рис. 7. Зависимость величины первого экстремума функции  $f(k, k')$  по  $k'$  от высоты кора  $V_c$  для потенциала (45):  
 1 —  $r_c = 0,2$  ферми; 2 —  $r_c = 0,4$  ферми

$< 180$  Мэв ( $0,5 < k < 2,1$  ферми<sup>-1</sup>) фазово-эквивалентные потенциалы дают сильно различающиеся кривые  $t_0(k, k'; k^2)/t_0(k)$  при изменении  $k'$  в области  $3 < k' < 4$  ферми<sup>-1</sup>, где указанные кривые достигают экстремального значения. Любопытно, что положение этого экстремума для каждого потенциала практически не зависит от импульса  $k$ , в то же время величина экстремального значения  $t_0(k, k'; k^2)/t_0(k)$  зависит от вида и значения отталкивающего кора.

Для иллюстрации на рис. 7 представлены графики зависимости значения второго экстремума парциальной амплитуды  $t_0(k, k'; k^2)/t_0(k)$  от высоты кора  $V_c$  для двух значений радиуса кора  $r_c$  в случае потенциала, составленного из двух прямоугольников:

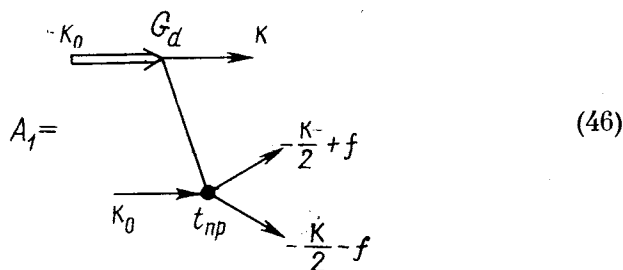
$$V(r) = \begin{cases} +V_c, & 0 \leq r \leq r_c; \\ -V_p, & r_c < r \leq R; \\ 0, & r > R. \end{cases} \tag{45}$$



При этом параметры  $r_c$  и  $R$  фиксировались, а  $V_p$  и  $V_c$  подбирались таким образом, чтобы потенциал (45) правильно описывал длину рассеяния в  $^1S_0$ -состоянии.

Как следует из рисунка, значение амплитуды в этом экстремуме может меняться в несколько раз в зависимости от высоты кора и, следовательно, будет заметно меняться дифференциальное сечение реакции в определенной области значений и направлений импульсов конечных частиц.

Представляется важным получить экспериментальные данные о характере изменения функции  $t(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; ME)$  в указанной области изменения переменной  $|\mathbf{k}|$ . Для этого целесообразно изучать дифференциальное сечение неупругого рассеяния протонов на дейтонах в области больших углов рассеяния при условии, что относительный импульс двух нуклонов (протона и нейтрона) в конечном состоянии мал. Как и в случае упругого  $pd$ -рассеяния, при описании неупругой реакции  $p + d \rightarrow p + p + n$  можно ограничиться вкладом от низших диаграмм, если выполняется соотношение  $\beta_0/k_0 \ll 1$  [37]. В данном случае лидирующим вкладом в амплитуду реакции будет вклад от диаграммы



который записывается в виде

$$A_1 = G_d \left( \frac{k_0}{2} + \mathbf{k} \right) \frac{-iM}{(k_0/2 + \mathbf{k})^2 + x^2} t_{pn} \left( \mathbf{k}_0 + \frac{\mathbf{k}}{2}, f; f^2 \right). \quad (47)$$

Кроме того, по аналогии с графическим равенством (38) и формулами (39) — (42) можно вычислить поправки к выражению (47) и т. д. При этом, как показано в работе [37], расчет поправок в данном случае полностью идентичен расчету аналогичных поправок в реакции упругого  $pd$ -рассеяния.

Однако, как легко видеть, для достижения интересующих нас значений относительных импульсов здесь требуются гораздо большие начальные энергии протонов. Так, если относительный импульс протона и нейтрона мал, точнее  $f^2/k_0^2 \ll 1$ , то для изучения хода

дифференциального сечения вылета протонов под углом  $120^\circ$  в с. п. м. при условии, что модуль внеэнергетического импульса  $|\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}/2| > 3 \text{ ферми}^{-1}$ , необходимы начальные энергии протонов, большие  $450 \text{ Мэв}$  в л. с. При таких энергиях необходимо учитывать вклад от релятивистских, неупругих процессов, в частности от мезонообразования [42].

Итак, в данном разделе мы показали возможность получения информации об области кора двухчастичного ядерного потенциала из анализа внеэнергетических характеристик  $NN$ -рассеяния, которые удастся получить в явном виде из дифференциальных сечений вылета протонов на большие углы. Следует подчеркнуть важность обратного рассеяния, поскольку в этом случае лидирующий вклад в амплитуду вносят полюсные диаграммы  $A_1$  в формулах (32) и (46), в отличие от рассеяния вперед на малые углы, где лидирующую роль играют треугольные диаграммы  $B_1$ , вклады от которых значительно менее чувствительны к видам моделей фазово-эквивалентных потенциалов.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитые в настоящей работе методы исследования  $NN$ -потенциала позволили установить на основе имеющихся экспериментальных данных по рассеянию двух и трех нуклонов в области нерелятивистских энергий ряд определенных закономерностей в поведении потенциала при малых относительных расстояниях между нуклонами, а также показать преимущество некоторых моделей потенциалов, сформулированных в рамках мезонной теории ядерных сил. Дальнейшее уточнение свойств  $NN$ -сил в области малых расстояний требует перехода к анализу экспериментальных данных при более высоких энергиях, где становятся существенными релятивистские эффекты [45] и где анализ необходимо проводить на основе уравнений релятивистской теории взаимодействий. Хотелось бы отметить, что предложенные методы допускают обобщение на случай релятивистских энергий. Так, например, анализ фазовых функций может быть аналогичным образом проведен на базе квазирелятивистских уравнений [46].

Переход к анализу данных опыта о рассеянии трех и более нуклонов при высокой энергии кроме релятивистского обобщения многочастичной теории рассеяния, развитой в квантовой механике, потребует, очевидно, и введения дополнительных предположений о характере рассеяния, а именно о существенной роли многочастичных сил [47]. Заметим, что переход к высоким энергиям при анализе экспериментальных данных в целях выяснения свойств  $NN$ -взаимодействия на малых расстояниях, безусловно, приведет к необходимости совместного изучения свойств  $\Lambda N$ -  $NN^*$ - и других взаимодействий [48, 49].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Breit G. «Rev. Mod. Phys.», 1962, v. 34, p. 766.
2. Green A. E. S., Sawada T. Ibid., 1967, v. 39, p. 594; «Nucl. Phys. B», 1967, v. 2, p. 267.
3. Ueda T., Green A. E. S. «Phys. Rev.», 1968, v. 174, p. 1304; Sawada T., Dainis A., Green A. E. S. Ibid., 1969, v. 177, p. 1541.
4. Stagat R. W., Riewe F., Green A. E. S. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, 631.
5. Bryan R. A., Scott B. K. «Phys. Rev.», 1964, v. 135, p. B434.
6. Bryan R. A., Scott B. L. Ibid., 1967, v. 164, p. 1215; 1969, v. 177, p. 1435.
7. Holinde K., Erkelenz K., Alzetta R. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 194, p. 161; 1971, v. 176, p. 413; Erkelenz K., Holinde K., Bleuler K. Ibid., 1969, v. 139, p. 308.
8. Gupta S. N., Haracz R. D., Kaskas J. «Phys. Rev. B», 1965, v. 138, p. 1500; Barker B. M., Gupta S. N., Haracz R. D. «Phys. Rev.», 1967, v. 161, p. 1411; Haracz R. D., Sharma R. D. Ibid., 1968, v. 176, p. 2013.
9. Wortman W. R. Ibid., p. 1762.
10. Lomon E. L., Feshbach H. «Rev. Mod. Phys.», 1967, v. 39, p. 611; «Ann. Phys.», 1968, v. 48, p. 94; Partovi H., Lomon E. L. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1999.
11. Binstock J., Bryan R. Ibid., 1971, v. 4, p. 1341; Bryan R., Binstock J. Ibid., 1974, v. 10, p. 72.
12. Riska D. O., Brown G. E. «Nucl. Phys. A», 1970, v. 153, p. 8; Chemtob M., Durso J. W., Riska D. O. «Nucl. Phys. B», v. 38, p. 141.
13. Woloshyn R. M., Jackson A. D. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 185, p. 134; Jackson A. D., Riska D. O., Verwest B. Ibid., 1975, v. 249, p. 397.
14. Epstein J. N., McKellar B. H. J. «Phys. Rev. D», 1974, v. 10, p. 1005.
15. Cottingham W. N. e.a. «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 800; Vinh Mau R. In: Proc. of Intern. Conf. on Few Body Dynamics. Amsterdam — N. Y.— Oxford, North-Holland, 1976, p. 472.
16. Breit G. e.a. «Phys. Rev.», 1968, v. 165, p. 1579.
17. MacGregor M. H., Arndt R. A., Wright R. M. Ibid., v. 169, p. 1122; 1969, v. 182, p. 1714.
18. Furuichi S., Matsuda M., Watari W. «Nuovo cimento A», 1976, v. 34, p. 467.
19. Nagels M. M., Rijken T. A., de Swart J. J. «Phys. Rev. D», 1975, v. 12, p. 744; de Tourreil R., Rouben B., Sprung D. W. L. «Nucl. Phys. A», 1975, v. 242, p. 445.
20. Rouben B. Theses Massachusetts Institute of Technology, USA, 1969; Zipse J. Ibid., 1970; Riihimäki E. Ibid., 1970.
20. Komarov V. V. In: Proc. of Intern. Conf. on Few Body Problems in Nuclear and Particle Physics. Quebec, Les Presses de l'Université Laval, 1975, p. 734; Proc. of Intern. Conf. on Few Body Dynamics. Amsterdam — N. Y.— Oxford, North-Holland, 1976, p. 170.
21. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1951, т. 77, с. 557; «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1951, т. 15, с. 309.
22. Марченко В. А. «Докл. АН СССР. Сер. физ.», 1955, т. 104, с. 695; Друкарев Г. Ф. «ЖЭТФ», 1949, т. 19, с. 247; Бабинов В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., «Наука», 1976; Калоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М., «Мир», 1976.
23. Hamada T., Johnston T. D. «Nucl. Phys.», 1962, v. 34, p. 382.
24. Reid R. V. «Ann. Phys.», 1968, v. 50, p. 411.
25. Sprung D. W. L., Srivastava M. K. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 139, p. 605.
26. Gogny D., Pires P., de Toureil R. «Phys. Lett. B», 1970, v. 32, p. 591.
27. Попова А. М., Попов Ю. В. «Проблемы ядерной физики и космических лучей», 1977, вып. 7, с. 59.

28. Meller L. «Phys. Rev.», 1960, v. 120, p. 627; Kermod M. W., Sprung D. W. L. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 124, p. 624.
29. Bressel C. N., Kerman A. K., Rouben B. Ibid., p. 624.
30. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М., «Наука», 1970.
31. Блин-Стойл Р. Фундаментальные взаимодействия и атомное ядро. М., «Мир», 1976, с. 252.
32. Кюн Б. «ЭЧАЯ», 1975, т. 6, с. 347.
33. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., «Наука», 1966.
34. Комаров В. В., Попова А. М. «ЭЧАЯ», 1974, т. 5, с. 1075.
35. Komarov V. V. Few Particle Problems in Nuclear and Particle Physics. North-Holland, American Elsevier, 1972.
36. Попова А. М., Попов Ю. В. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1975, т. 39, с. 578; 1976, т. 40, с. 216.
37. Гайворонская Т. В., Комаров В. В., Попова А. М. Там же, 1971, т. 35, с. 146.
38. Гайворонская Т. В., Попова А. М. Там же, 1976, т. 40, с. 853.
39. Glauber R. «Phys. Rev.», 1955, v. 99, p. 1515.
40. Kottler H., Kowalski K. L. «Phys. Rev.», 1965, v. 138, p. B619.
41. Levitas M., Noble J. V. «Nucl. Phys. A», 1975, v. 251, p. 385.
42. Kerman A. K., Kisslinger L. S. «Phys. Rev.», 1969, v. 180, p. 1483. Graigie N. S., Wilkin C. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 14, p. 477.
43. Gugelot P. C., Källue J., Renberg R. U. «Physica Scripta», 1974, v. 10, p. 252; Postma H., Wilson R. «Phys. Rev.», 1961, v. 121, p. 1229.
44. Kowalski K. L. «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 798.
45. Беляев В. Б., Иргазиев Б. Ф. «Ядерная физика», 1977, т. 25, с. 450; Амирханов И. В., Гречко В. Е., Дементьев Р. К. Препринт ОИЯИ Р4-7405, 1973.
46. Logunov A. A., Tavkheldze A. N. «Nuovo cimento», 1963, v. 29, p. 380; Blaukenbecler R., Sugar R. «Phys. Rev.», 1966, v. 142, p. 1051; Kadychevsky V. G. «Nucl. Phys. B», 1968, v. 6, p. 125; Gross F. «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 1448; «Phys. Rev. D», 1974, v. 10, p. 223.
47. Попова А. М., Попов Ю. В. В кн.: Тезисы Всесоюзного совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Л., «Наука», 1977.
48. Колесников Н. Н., Чернов С. М. «Ядерная физика», 1976, т. 23, с. 960; Agrawal V. B., Schick L. H. «Phys. Rev. D», 1973, v. 8, p. 875.
49. Dillig M. Ibid., 1976, v. 13, p. 174.