

# СИСТЕМА ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ЭЛЛИПСОИДА ИНЕРЦИИ И ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ АТОМНЫХ ЯДЕР

*Г. Ф. Филиппов*

Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Излагаются основные результаты исследования структуры легких атомных ядер, полученные на основе метода обобщенных гиперсферических функций. Значительное внимание уделяется тем преимуществам, которые дает этот метод по сравнению с традиционными подходами при решении вопросов о форме атомных ядер.

The main results of a study of the structure of atomic nuclei, obtained on the basis of the generalized hyperspheric functions method, are discussed. Special emphasis is on the advantages of this method as compared to conventional approaches to the shape of atomic nuclei.

## ВВЕДЕНИЕ

Начиная с работ Бора и Моттельсона [1], при исследовании взаимодействия коллективных и внутренних движений в несферических атомных ядрах волновую функцию стационарного состояния системы нуклонов обычно принято записывать в виде

$$\Psi_M = \sum_{\Omega, K} \varphi_{\Omega K}^{I\tau}(\beta, \gamma) \chi_{\Omega} D_{MK}^I(\theta_i), \quad (1)$$

где  $\varphi_{\Omega K}^{I\tau}$  — компоненты коллективной волновой функции;  $\chi_{\Omega}$  — внутренняя функция;  $I$  — момент количества движения системы;  $M$  — проекция момента на внешнюю ось;  $K$  — проекция момента на внутреннюю ось;  $\tau$  — дополнительное квантовое число;  $\Omega$  — проекция момента внутреннего движения на внутреннюю ось. Коллективные степени свободы  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_i$  в выражении (1) передают колебания и вращение эллипсоидальной поверхности ядра. Выражение (1) появилось как результат попыток распространить коллективную модель на нечетные ядра, а также учесть наряду с коллективными и другие степени свободы.

В самых первых, наиболее простых вариантах обобщенной модели Бора—Моттельсона внутреннюю функцию  $\chi_{\Omega}$  относили только к состояниям отдельного нуклона, но затем вслед за Нильсоном [2] под  $\chi_{\Omega}$

стали понимать слетеровский детерминант, построенный из одночастичных орбиталей нуклонов ядра в среднем несферическом поле. Эквипотенциали среднего поля имеют вид эллипсоидальных поверхностей, главные оси котор  $x$  направлены вдоль главных осей эллипсоидальной поверхности ядра. Можно поэтому сказать, что внутренние оси ядра определяются в такой модели как оси внутреннего среднего несферического поля. Как правило, предполагается, что внутреннее поле имеет ось симметрии, а  $\Omega$  и  $K$  — интегралы движения.

Слетеровский детерминант внутренней функции тяжелых несферических ядер строят из одночастичных орбиталей в таком среднем поле, потенциал которого (потенциал Нильссона или деформированный потенциал Вудса — Саксона) подбирается из требования, чтобы заполнение его состояний приводило к наблюдаемой последовательности спинов нечетных ядер, а также чтобы согласовывались с экспериментом все другие результаты, которые получаются в расчетах с таким одночастичным потенциалом. Для ядер  $p$ -оболочки и ядер  $s$  —  $d$ -оболочки параметры потенциала среднего поля, или, что то же самое, параметры одночастичных орбиталей слетеровского детерминанта, находят минимизацией энергии системы взаимодействующих между собой нуклонов ядра [3].

В любой модели с внутренней функцией возникают проблемы из того, что во внутренней системе отсчета координаты отдельных нуклонов не являются независимыми и связаны дополнительными условиями, появляющимися в результате того, что при внутреннем движении должен покоиться центр инерции системы, должна сохраняться ориентация внутренних осей системы и не должны изменяться параметры  $\beta$ ,  $\gamma$  квадрупольной формы поверхности ядра, а также объем ядра. Чтобы учесть все эти связи, необходимо придать микроскопический смысл коллективным степеням свободы  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_i$  и параметру, определяющему объем ядра, выразив их через одночастичные координаты нуклонов. Кроме того, необходимо указать явную зависимость коллективных переменных от нуклонных координат, иначе нельзя однозначно и последовательно определить многие операторы, привлекаемые для расчета спектра ядер, моментов в различных состояниях и вероятностей перехода.

Указанная выше трудность остается и в том случае, когда все коллективные степени свободы связывают только с параметрами несферического внутреннего поля и не обращаются к представлению о форме ядерной поверхности, как, например, при исследовании легких ядер, у которых нет четко выраженной поверхности.

Ни в одной из распространенных сейчас моделей внутренних функций связи между нуклонными координатами во внутренней системе отсчета не учитывается и не вводится зависимость коллек-

тивных переменных от одночастичных. Во всех случаях аргументами слетеровского детерминанта являются независимо изменяющиеся в своей области определения одночастичные координаты нуклонов. Это существенно используется при интегрировании квадрата слетеровского детерминанта, например тогда, когда вычисляется внутренний квадрупольный момент или когда вычисляется функция распределения одночастичной плотности нуклонов во внутренней системе координат [4, 5], или, наконец, когда реализуется алгоритм проектировки. Поэтому внутренние функции таковыми не являются и не дают непосредственной информации, относящейся к внутренним осям ядра. Оси координат, в которых они определены, представляют собой внешние оси, а орбитали слетеровского детерминанта принадлежат в действительности не внутреннему, а внешнему полю. Сами же функции содержат пакеты состояний с разными значениями полного орбитального момента ядра и его проекции на внешнюю ось, хотя эти пакеты и конструируются так, чтобы обеспечить ориентацию осей внутренней системы вдоль осей внешней системы. Этот вывод находится в полном соответствии с алгоритмом проектировки Пайрлса — Йокосы [6], в основу которого положена инвариантность пакета состояний относительно вращения осей внешней системы отсчета. Заметим, что внутренняя функция в выражении (1) должна зависеть только от внутренних переменных и, следовательно, должна быть инвариантной относительно поворотов внешней системы отсчета.

Поэтому остается лишь предполагать, что возможность пренебречь теми связями, которым должны подчиняться во внутренней системе отсчета координаты нуклонов, и отождествить внутреннюю систему отсчета с внешней, определяемой осями внешнего среднего поля, появляется при выполнении некоторых условий. Как ни правдоподобным представляется это предположение, оно требует обоснования, и вопрос состоит только в том, как построить теоретическую схему, на основе которой это обоснование можно получить и найти условия, оправдывающие отождествление внутренней и внешней систем отсчета.

## 1. ВЫБОР СОБСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Наиболее простая возможность ввести собственную систему координат для построения внутренней функции состоит в том, чтобы ее начало совместить с центром инерции ядра, а оси направить вдоль главных осей эллипсоида инерции. Сама по себе идея выбора такой собственной системы координат была высказана давно, вскоре после появления коллективной модели Бора — Моттельсона [1, 7, 8], в связи с необходимостью ее обоснования [8—10]. Однако реализовать ее возможно лишь после того, как

будут найдены все независимые конфигурационные переменные волновой функции  $A$  нуклонов, приспособленные для работы с системой координат, оси которой направлены вдоль главных осей эллипсоида инерции [11—13].

Чтобы учесть связь между одночастичными координатами  $A$  нуклонов в системе главных осей эллипсоида инерции, целесообразно ввести такие внутренние переменные, при изменении которых сохраняются положение центра инерции, ориентация осей эллипсоида инерции и значения его полуосей. Внутренними переменными, обладающими этим свойством, являются  $3A - 9$  обобщенных углов Эйлера  $\alpha_i$  в  $(A - 1)$ -мерном пространстве [11]. Они вместе со спиновыми и изоспиновыми переменными должны быть аргументами компонент  $\chi_\nu$  внутренней функции. Если в качестве аргументов компонент  $u_\nu^{I\tau}$  коллективной функции выбрать полуоси эллипсоида инерции  $a, b, c$  или связанные с ними переменные  $\rho, \beta, \gamma$  ( $\beta$  и  $\gamma$  аналогичны соответствующим коллективным переменным Бора — Моттельсона):

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= a^2 + b^2 + c^2; \quad \rho^2 \beta \cos \gamma = c^2 - (a^2 + b^2)/2; \\ \rho^2 \beta \sin \gamma &= (\sqrt{3}/2)(a^2 - b^2), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а в качестве углов Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$  — углы ориентации осей эллипсоида инерции, то разложение для волновой функции ядра примет следующий вид:

$$\Psi_M^{I\tau} = \sum_{\nu, K} u_{\nu K}^{I\tau}(abc) D_{MK}^I(\varphi\theta\psi) \chi_\nu(\{\alpha_i\}, \{\tau_j\}, \{\sigma_i\}), \quad (3)$$

где  $\sigma_i$  — спиновые переменные  $A$  нуклонов;  $\tau_j$  — изоспиновые переменные;  $\alpha_i$  —  $(3A - 9)$  обобщенных углов Эйлера в  $(A - 1)$ -мерном пространстве, выбираемых по определенному правилу [11—13].

Разложение (3) можно использовать вне зависимости от того, является ли ядро сферическим или нет. Индекс  $\nu$  связан с индексами представлений и базисными индексами группы вращений в  $(A - 1)$ -мерном пространстве, а компоненты  $\chi_\nu$  внутренней функции — суперпозиции обобщенных гиперсферических функций в этом пространстве [13, 14]. Ряд по индексу  $\nu$  бесконечен, поэтому точная внутренняя функция и точная коллективная функция содержат бесконечное число компонент. Однако в приближенных выражениях для  $\Psi_M^{I\tau}$  ряд по  $\nu$  можно оборвать, что соответствует определенному виду модели. Соотношения между векторами Якоби  $A$ -системы нуклонов и переменными  $a, b, c$ ;  $\varphi, \theta, \psi$ ;  $\alpha_i$  установлены в [11]. Уяснить смысл коллективных переменных  $a, b, c$ ;  $\varphi, \theta, \psi$  и показать целесообразность их использования для изучения квадрупольных деформаций атомных ядер можно сопоставлением этих переменных с переменными коллективной модели Бора — Моттельсона.

Согласно представлениям, используемым в коллективной модели Бора — Моттельсона, ядро можно уподобить капле несжимаемого ядерного вещества. В процессе малых квадрупольных колебаний этой капли сохраняется ее эллипсоидальная форма, но изменяется соотношение между полуосями эллипсоида. Кроме того, капля-эллипсоид вращается в пространстве. Коллективная волновая функция модели Бора — Моттельсона зависит от углов Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , которые задают ориентацию эллипсоидальной капли в пространстве, и от переменных  $\beta$ ,  $\gamma^*$ , которые характеризуют соотношение между полуосями капли-эллипсоида фиксированного объема и определяют форму ядра в собственной системе координат, связанной с главными осями капли-эллипсоида. Если эллипсоидальным деформациям несжимаемой капли и ее вращению в пространстве сопоставить движение эллипсоида инерции капли, то соотношение между полуосями эллипсоида инерции будет тождественно соотношению между полуосями капли-эллипсоида, а эйлеровы углы ориентации осей эллипсоида инерции тождественны углам Эйлера ориентации капли-эллипсоида, т. е. коллективные переменные, связанные с эллипсоидом инерции системы, в этом случае не дают ничего нового и буквально воспроизводят движение эллипсоидальной капли.

Однако если для описания системы частиц привлекаются все ее степени свободы и аргументами волновой функции являются одночастичные переменные, то выбор в качестве коллективных переменных трех полуосей эллипсоида инерции и трех углов Эйлера ориентации эллипсоида инерции позволяет отделить квадрупольные движения системы (движения эллипсоида инерции) от внутренних, при которых эллипсоид инерции остается неизменным, найти компоненты коллективной волновой функции, отвечающей той или иной микроскопической модели атомного ядра или какому-либо приближенному решению многоуклонного уравнения Шредингера, и получить сведения о квадрупольных деформациях ядра в собственной системе координат, связанной, как и в модели Бора — Моттельсона, с главными осями эллипсоида инерции. До сих пор эти сведения извлекались из модельных или приближенных многочастичных волновых функций с помощью таких методов, которые дают параметры квадрупольных деформаций (формы ядра), относящиеся к системе координат, не связанной к внутренним осям ядра.

Перечисленные выше конфигурационные переменные  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\alpha_i$  были привлечены для формулировки метода обобщенных гиперсферических функций [13, 15].

---

\* Чтобы отличать введенные выше переменные  $\beta$ ,  $\gamma$  [см. (2)] от переменных Бора — Моттельсона, последние будем снабжать тильдой.

## 2. МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Метод обобщенных гиперсферических функций — это метод решения многочастичного уравнения Шредингера для системы нуклонов с заданным потенциалом взаимодействия. Этот метод предполагает представление волновой функции ядра в виде ряда (3) по базису обобщенных гиперсферических функций  $\chi_\nu$ . Разложение (3), построенное для известных модельных и приближенных функций, позволяет выявить характер коллективных и внутренних движений, дать ответы на вопрос о собственной форме ядер в различных состояниях, получить распределение нуклонной плотности в собственной системе координат.

Функции  $\chi_\nu$ , подобно волновым функциям модели оболочек, антисимметричны относительно перестановки нуклонов, однако, в отличие от последних функций, они инварианты относительно трансляций центра инерции системы и поворотов координатных осей. Более того, функции  $\chi_\nu$  инвариантны относительно деформаций эллипсоида инерции  $A$ -системы нуклонов, т. е. таких перераспределений масс нуклонов в пространстве, при которых — изменяются лишь значения полуосей эллипсоида инерции и их ориентация в пространстве, что и делает функции  $\chi_\nu$  удобными для отделения внутреннего движения от коллективных движений монополярного и квадрупольного типов.

Базис функций  $\chi_\nu$  — полный, и не имеющую особенностей функцию от обобщенных углов Эйлера всегда можно представить в виде ряда по  $\chi_\nu$ . Однако в тех областях конфигурационного пространства одночастичных переменных, где зависимость волновой функции от обобщенных углов Эйлера имеет  $\delta$ -образный характер, сходимость разложения (3), как и сходимость аналогичного разложения волновой функции по гиперсферическому базису [16], может быть плохой.  $\delta$ -образная зависимость от обобщенных углов Эйлера свойственна волновым функциям некомпактных конфигураций, когда в системе выделяются те или иные изолированные подсистемы. Она может наблюдаться и у компактных конфигураций, если между частицами системы действуют короткодействующие силы отталкивания. Тогда при сближении каждой пары частиц волновая функция быстро стремится к нулю начиная с расстояний, равных радиусу сил отталкивания. Поэтому первые члены разложения (3) хорошо аппроксимируют волновую функцию лишь при условии, что области конфигурационного пространства, где оно плохо сходится, вносят небольшой вклад в полный нормировочный интеграл.

Отдельные слагаемые в разложении (3) можно интерпретировать с точки зрения той роли, которую они играют при воспроизведении различных деталей распределения плотности нуклонов в системе координат эллипсоида инерции ядра, а также при описа-

нии тех или иных коллективных возбуждений. Эта интерпретация может иметь эвристическое значение, если в разложении (3) необходимо учитывать большое число слагаемых и поэтому необходим принцип отбора главных среди них.

Подобно минимальному приближению метода гиперсферических функций [17, 18] минимальное приближение метода обобщенных гиперсферических функций требует учета в разложении (3) лишь тех функций  $\chi_\nu$ , которые содержатся в волновой функции осцилляторной модели оболочек для основного состояния рассматриваемого ядра с  $A$  нуклонами. Разумеется, даже в минимальном приближении метода обобщенных гиперсферических функций описание свойств основного состояния ядра и некоторых его коллективных возбуждений более точно, чем в осцилляторной модели оболочек или в минимальном приближении метода  $K$ -гармоник. Это достигается за счет оптимального выбора функций  $u_{\nu K}^I$ , для которых можно найти систему уравнений, или использованием вариационного принципа, или непосредственно подстановкой выражения (3) в уравнение Шредингера для  $A$ -системы нуклонов.

Минимальное приближение соответствует выбору самых простых функций  $\chi_\nu$  внутреннего движения. Можно предполагать, что спектр монопольных и квадрупольных возбуждений, определяемый лишь усредненными характеристиками внутреннего движения, удовлетворительно передается даже в том случае, когда выбранные функции внутреннего движения нуждаются в уточнении.

Волновая функция осцилляторной модели оболочек для основного состояния магических ядер содержит лишь одну функцию  $\chi_\nu = \chi_0$ , что существенно упрощает задачу. Спектр монопольных и квадрупольных колебаний магических ядер в минимальном приближении был рассчитан в [19—21]. Для ядер с незаполненными осцилляторными оболочками даже минимальное приближение требует привлечения нескольких функций  $\chi_\nu$ .

### 3. БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ

Структура базисных функций  $\chi_\nu$  исследовалась в [22—24, 14]. Эти функции можно представить в виде суперпозиции обобщенных гиперсферических функций  $D_{[\nu][\mu]}^{[f]}$  пространства размерности  $(A - 1)$ :

$$\chi_{[\nu]}^{[f_1 f_2 f_3]} = \sum_{[\mu]} D_{[\nu][\mu]}^{[f_1 f_2 f_3]}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3A-9}) F_{[\mu]}(\sigma_1 \tau_1; \sigma_2 \tau_2; \dots; \sigma_A \tau_A). \quad (4)$$

Зависимость коэффициентов суперпозиции  $F_{[\mu]}$  от спин-изоспиновых переменных выбирается так, чтобы функция  $\chi_{[\nu]}^{[f_1 f_2 f_3]}$  была антисимметрична относительно перестановки пространственных и спин-изоспиновых координат любой пары нуклонов.

Обобщенные гиперсферические функции  $D_{[\mu][\nu]}^{[j]}$  являются матричными элементами матриц неприводимых представлений группы вращений в  $(A - 1)$ -мерном пространстве. Верхний индекс  $D$ -функций  $[f_1 f_2 f_3]$  определяет представление, которому они принадлежат, а нижние индексы  $[\nu]$  и  $[\mu]$  нумеруют строки и столбцы матрицы неприводимого представления.

В качестве аргументов функций  $D$  в (4) выбраны обобщенные углы Эйлера, задающие ориентацию трех взаимно ортогональных векторов в  $(A - 1)$ -мерном пространстве относительно некоторой исходной системы координат, которую назовем *внешней*  $(A - 1)$ -мерной координатной системой. Кроме того, будем рассматривать репер, называемый далее *привилегированным*, который свяжем с тремя выделенными векторами (остальные  $(A - 4)$ -орта привилегированного репера можно задать произвольно).

Нижние правые индексы  $[\mu]$  функции  $D$  характеризуют ее трансформационные свойства относительно поворотов, совершаемых в координатных плоскостях внешней системы, а нижние левые индексы характеризуют трансформационные свойства функции  $D$  относительно поворотов в плоскостях привилегированного репера.

Если  $A > 7$ , то нижний индекс  $[\mu]$  функции  $D$  представления  $[f_1 f_2 f_3]$  содержит  $3A - 15$  чисел, определяемых канонической редукцией Гельфанда — Цейтлина. Эти числа удобно распределить по трем наборам из  $A - 3$ ,  $A - 5$ , и  $A - 7$  элементов, соответственно. Элементы первого набора обозначим  $\mu_{i1}$ , где  $i = 1, 2, \dots, A - 3$ ; элементы второго набора —  $\mu_{j2}$ , где  $j = 1, 2, \dots, A - 5$ ; элементы третьего набора —  $\mu_{k3}$ , где  $k = 1, 2, \dots, A - 7$ . В строке  $[\mu]$  эти наборы перечисляются последовательно один за другим, начиная с первого.

Каждой перестановке нуклонов соответствует определенный поворот в  $(A - 1)$ -мерном пространстве внешней системы координат и, следовательно, задающая этот поворот определенная совокупность обобщенных углов Эйлера  $\beta_i$ . Преобразование обобщенных гиперсферических функций при перестановке нуклонов выражается следующим соотношением:

$$D_{[\nu][\mu]}^{[f_1 f_2 f_3]}(\{\alpha_i\}) = \sum_{[\mu']} D_{[\mu'] [\mu]}^{[f_1 f_2 f_3]}(\{\beta_k\}) D_{[\nu][\mu']}^{[f_1 f_2 f_3]}(\{\alpha'_i\}), \quad (5)$$

где  $\alpha_i$  — обобщенные углы Эйлера в исходной системе координат;  $\alpha'_i$  — обобщенные углы Эйлера в системе, повернутой относительно исходной.

Редукция группы  $O(A - 1)$  на группу перестановок координат  $A$  нуклонов позволяет из функций представления  $[f_1 f_2 f_3]$   $D_{[\nu][\mu]}^{[f_1 f_2 f_3]}$  с фиксированным индексом  $[\nu]$  построить базисные векторы, отвечающие тем или иным неприводимым представлениям симметрической группы.



Группой инвариантности гамильтониана систем  $A$  нуклонов является группа  $24$  различных преобразований привилегированного репера. Кроме четырех преобразований группы  $D_2$  (тождественного преобразования и поворотов на угол  $\pi$  в тех трех плоскостях привилегированного репера, каждая из которых проходит через два главных орта) эта группа содержит шесть элементов группы перестановок трех осей привилегированного репера. Векторы Якоби инвариантны относительно преобразований указанной группы. Инвариантом группы должна быть поэтому и волновая функция системы  $A$  нуклонов.

Базисные функции неприводимых представлений группы симметрии привилегированного репера можно построить из линейных комбинаций обобщенных гиперсферических функций  $D_{[\nu][\mu]}^{[f_1 f_2 f_3]}$  с фиксированными индексами  $[f_1 f_2 f_3]$  и  $[\mu]$ .

Функции  $F_{[\mu]}$  в (4) принадлежат состоянию с определенным значением полного спина  $S$  и полного изотопического спина  $T$  системы  $A$  нуклонов. Кроме того, они являются базисными векторами определенного неприводимого представления группы перестановок  $A$  нуклонов. Суммирование по индексу  $[\mu]$  обеспечивает антисимметрию функции  $\chi_{[\nu]}^{[f_1 f_2 f_3]}$  относительно перестановки нуклонных координат.

Представления  $[f_1 f_2 f_3]$  составляют лишь часть полного числа представлений  $SO(A-1)$ -группы. Базисные функции всех остальных представлений  $[f_1 f_2 f_3, \dots, f_{[(A-1)/2]}]$  имеют больше трех отличных от нуля индексов  $f_i$  и зависят не только от обобщенных углов Эйлера  $\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_{3A-9}$ , но и от других эйлеровских углов (всего их в  $(A-1)$ -мерном пространстве  $(A-1)(A-2)/2$ ), от которых волновая функция системы частиц не может зависеть в силу ее инвариантности относительно всевозможных поворотов в плоскостях привилегированной системы координат. Плоскости проходят через орты, перпендикулярные трем главным ортам системы. Поэтому все такие представления должны быть отброшены. По той же причине среди всех базисных функций  $D_{[\nu][\mu]}^{[f_1 f_2 f_3]}$  должны быть оставлены только те, у которых в первом столбце индексов  $[\nu]$  редукции Гельфанда — Цейтлина отличны от нуля только два квантовых числа, а во втором — одно, т. е.  $[\nu] \rightarrow [\nu_{11}, \nu_{21}; \nu_{12}]$ . Вместо квантовых чисел  $\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{12}$  для классификации базисных функций представления  $[f_1 f_2 f_3]$  можно использовать квазимомент  $j$ , его проекцию  $j_z$  и дополнительное квантовое число  $s$ :  $[\nu] \rightarrow \{j j_z s\}$ . Квазимомент и его проекция — это полный орбитальный момент внутренней подсистемы, определяемой обобщенными углами Эйлера, и его проекция на одну из главных осей эллипсоида инерции.

Уже отмечалось выше, что движение нуклонов в системе главных осей эллипсоида инерции нельзя описать независимо изменяющимися одночастичными координатами, поскольку должно

быть учтено девять дополнительных связей, которым удовлетворяют нуклонные координаты в этой системе. Наличие связей отражает тот факт, что в системе уже выделено девять степеней свободы или выделена подсистема — эллипсоид инерции. К тому же вторая подсистема (внутренняя), степени свободы которой — обобщенные углы Эйлера, совершают свое движение относительно главных осей эллипсоида инерции. Поэтому в гамильтониане кинетической энергии системы  $\hat{T}$  (см. [13]) появляются два оператора момента количества движения: один из них — оператор полного момента количества движения  $\hat{I}$ , а второй — оператор квазимомента  $\hat{J}$ . Оба они записываются через проекции на главные оси эллипсоида инерции:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \{\hat{I}_\xi, \hat{I}_\eta, \hat{I}_\zeta\}; \quad \hat{J} = \{\hat{J}_\xi, \hat{J}_\eta, \hat{J}_\zeta\}; \\ \hat{T} &= \hat{T}_{abc} + \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{b^2 + c^2}{(b^2 - c^2)^2} (\hat{I}_\xi^2 + \hat{J}_\xi^2) + \frac{c^2 + a^2}{(c^2 - a^2)^2} (\hat{I}_\eta^2 + \hat{J}_\eta^2) + \right. \\ &+ \frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2} (\hat{I}_\zeta^2 + \hat{J}_\zeta^2) + \frac{4bc}{(b^2 - c^2)^2} \hat{I}_\xi \hat{J}_\xi + \frac{4ca}{(c^2 - a^2)^2} \hat{I}_\eta \hat{J}_\eta + \\ &+ \frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2} \hat{I}_\zeta \hat{J}_\zeta + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \hat{L}_0 + \\ &\left. + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2} \right) \hat{L}_{20} + \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \hat{L}_{22+} \right\}. \end{aligned}$$

В слагаемое  $\hat{T}_{abc}$  включены все первые и вторые производные по  $a, b, c$ , а операторы  $\hat{L}_0, \hat{L}_{20}, \hat{L}_{22+}$  составлены из трех квадратичных по генераторам  $\hat{J}_{ik}$   $SO(A-1)$ -группы выражений  $\hat{L}_\xi, \hat{L}_\eta, \hat{L}_\zeta$ :

$$\hat{L}_0 = \hat{L}_\xi + \hat{L}_\eta + \hat{L}_\zeta; \quad \hat{L}_{20} = \hat{L}_\zeta - (\hat{L}_\xi + \hat{L}_\eta)/2; \quad \hat{L}_{22+} = (\sqrt{3}/2) (\hat{L}_\xi - \hat{L}_\eta),$$

где

$$\hat{L}_\xi = \sum_{i=1}^{A-4} J_{i\xi}^2; \quad \hat{L}_\eta = \sum_{i=1}^{A-4} J_{i\eta}^2; \quad \hat{L}_\zeta = \sum_{i=1}^{A-4} J_{i\zeta}^2.$$

Обобщенная гиперсферическая функция  $D_{\{j_j^i s\}[\mu]}$  является собственной функцией оператора  $\hat{L}_0$ :

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 D_{\{j_j^i s\}[\mu]} &= [f_1 (f_1 + A - 3) + f_2 (f_2 + A - 5) + \\ &+ f_3 (f_3 + A - 7) - j(j+1)] D_{\{j_j^i s\}[\mu]}. \end{aligned}$$

Операторы  $\hat{L}_{20}$  и  $\hat{L}_{22+}$ , действуя на функции  $D$ , не изменяют их верхние индексы  $[j]$  и правые нижние индексы  $[\mu]$ , но могут изменить левые нижние индексы. В частности, оператор  $\hat{L}_{20}$  сохраняет проекцию квазимомента, а оператор  $\hat{L}_{22+}$  увеличивает или

уменьшает ее на два. Оба последних оператора могут увеличить или уменьшить (не более чем на два) значение квазимомента.

Действие операторов квазимомента  $\hat{J}_\xi$ ,  $\hat{J}_\eta$ ,  $\hat{J}_\zeta$  на обобщенную гиперсферическую функцию  $D_{(j_1 j_2 j_3) [\mu]}^{[f_1 f_2 f_3]}$  подчиняется тем же правилам, что и действие операторов проекций углового момента на состояние с определенным угловым моментом и его проекцией.

Картановы проекции векторов Якоби системы  $A$  нуклонов можно выразить через обобщенные углы Эйлера с помощью обобщенных гиперсферических функций, принадлежащих представлению [1]:

$$\left. \begin{aligned} q_{ml} &= -\frac{ia}{\sqrt{2}} (D_{1m}^1 + D_{-1m}^1) D_{[11][11 \dots 1]}^{[11]} + \\ &+ \frac{b}{\sqrt{2}} (D_{1m}^1 - D_{-1m}^1) D_{[11][11 \dots 1]}^{[11]} + c D_{0m}^1 D_{[01][11 \dots 1]}^{[11]}, \\ &m = 0, \pm 1; \\ D_{km}^1 &= D_{km}^1(\varphi\theta\psi); \quad D_{[v][\mu]}^{[1]} = D_{[v][\mu]}^{[1]}(\{\alpha_i\}), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $D_{km}^1$  — сферические функции Вигнера;  $a, b, c, \varphi, \theta, \psi$  — коллективные переменные;  $m$  — индекс картановых координат;  $l$  — номер вектора Якоби. Правый нижний индекс функции  $D_{[v][11 \dots 1]}^{[11]}$  содержит  $(l - 1)$  единицу.

Справедливы следующие равенства, иллюстрирующие связь базиса, классифицированного по квазиоменту и его проекции, с базисом, классифицированным по квантовым числам  $\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{12}$ :

$$D_{[10][\mu]}^{[11]} = D_{[01][\mu]}^{[11]}; \quad D_{[1\pm][\mu]}^{[11]} = (\pm 1/\sqrt{2}) (D_{[11][\mu]}^{[11]} \pm D_{[11][\mu]}^{[11]}). \quad (7)$$

К числу самых простых среди обобщенных гиперсферических функций

$$D_{[\nu_{11} \nu_{21} \nu_{12}][\mu_{11} \mu_{21} \dots \mu_{A-3,1}; \mu_{12} \mu_{22} \dots \mu_{A-5,2}; \mu_{13} \mu_{23} \dots \mu_{A-7,3}]}^{[f_1 f_2 f_3]}$$

относятся функции нулевой строки представления  $[f00]$ . Если для обобщенных углов Эйлера  $\alpha_i$  использовать обозначения, принятые в монографии [26], то функции этой строки можно представить в виде:

$$\begin{aligned} D_{[0][0]}^{[11]} &= \cos \theta_{n-1}^{n-1}; \quad D_{[11][0]}^{[11]} = \sin \theta_{n-1}^{n-1} \cos \theta_{n-2}^{n-2}; \\ D_{[11][0]}^{[11]} &= \sin \theta_{n-1}^{n-1} \sin \theta_{n-2}^{n-2} \cos \theta_{n-3}^{n-3}. \end{aligned}$$

Элемент объема для углов  $\theta_{n-1}^{n-1}, \theta_{n-2}^{n-2}, \theta_{n-3}^{n-3}$ :

$$\sin^{n-2} \theta_{n-1}^{n-1} d\theta_{n-1}^{n-1} \sin^{n-3} \theta_{n-2}^{n-2} d\theta_{n-2}^{n-2} \sin^{n-4} \theta_{n-3}^{n-3} d\theta_{n-3}^{n-3},$$

$$0 \leq \theta_{n-1}^{n-1}, \theta_{n-2}^{n-2}, \theta_{n-3}^{n-3} \leq \pi, \quad n = A - 1 > 5.$$

Имеет место следующая формула:

$$D_{[k_1 k_2][0]}^{[f]} \sim 2^{(3n-9)/2+k_1+k_2} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}+k_1\right) \Gamma\left(\frac{n-3}{2}+k_2\right) \Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right) \times \\ \times \left[ \frac{(f-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!}{(2\pi)^3} \frac{[(n-2)/2+f] [(n-3)/2+k_1] [(n-4)/2+k_2]}{\Gamma(n-2+f+k_1)\Gamma(n-3+k_1)\Gamma(n-4+k_2)} \right]^{1/2} \times \\ \times C_{f-k_1}^{(n-2)/2+k_1} (\cos \theta_{n-1}^{n-1}) C_{k_1-k_2}^{(n-3)/2+k_2} (\cos \theta_{n-2}^{n-2}) C_{k_2}^{(n-4)/2} (\cos \theta_{n-3}^{n-3}) \times \\ \times \sin^{k_1} \theta_{n-1}^{n-1} \sin^{k_2} \theta_{n-2}^{n-2}.$$

Последнее соотношение устанавливает связь между обобщенными гиперсферическими функциями нулевой строки и полиномами Гегенбауэра  $C_m^r(t)$ .

Обобщенные гиперсферические функции представления [1] с максимальным значением правого нижнего индекса имеют следующий вид:

$$D_{[0][11 \dots 1]}^{[1]} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta_{n-1}^{n-1} \sin \theta_{n-2}^{n-2} \dots \sin \theta_2^{n-1} \exp(i\theta_1^{n-1}); \\ D_{[1][11 \dots 1]}^{[1]} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \theta_{n-1}^{n-1} \sin \theta_{n-2}^{n-2} \dots \sin \theta_2^{n-1} \cos \theta_{n-2}^{n-2} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{n-3} \cos \theta_{n-1-s}^{n-1} \sin \theta_{n-2-s}^{n-2} \dots \sin \theta_2^{n-1} \sin \theta_{n-2}^{n-2} \dots \cos \theta_{n-2-s}^{n-2} + \right. \\ \left. + i \sin \theta_{n-2}^{n-2} \sin \theta_{n-3}^{n-2} \dots \sin \theta_1^{n-2} \right\} \exp(i\theta_1^{n-1}).$$

Предельная формула имеет вид

$$D_{[k_1 k_2][0]}^{[f]} \sim \text{const} \left(\frac{n}{2}\right)^{3/2} \frac{H_{f-k_1}(z) H_{k_1-k_2}(y) H_{k_2}(x)}{\sqrt{2^f (f-k_1)! (k_1-k_2)! k_2!}}$$

при

$$n \rightarrow \infty; f/n, k_1/n, k_2/n \ll 1,$$

где  $\sqrt{2/n} z = \cos \theta_{n-1}^{n-1}$ ;  $\sqrt{2/n} y = \cos \theta_{n-2}^{n-2}$ ;  $\sqrt{2/n} x = \cos \theta_{n-3}^{n-3}$ ;  $(1-2x^2/n)^{n/2} (1-2y^2/n)^{n/2} (1-2z^2/n)^{n/2} dx dy dz \rightarrow \exp(-x^2 - y^2 - z^2) dx dy dz$ .

#### 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ОБОБЩЕННЫМ ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

##### ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ ОБОЛОЧЕК

Осуществив переход от одночастичных векторов  $\mathbf{r}_i$  системы А нуклонов к координатам центра инерции  $R_x, R_y, R_z$ , коллективными переменными  $a, b, c$ ;  $\varphi, \theta, \psi$  и обобщенным углам Эйлера  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{3A-9}$ , волновые функции осцилляторной модели

оболочек можно представить в виде суперпозиции функций  $\chi_{[v]}^{[f]}$ . Пусть  $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}_1\sigma_1\tau_1; \mathbf{r}_2, \sigma_2\tau_2 \dots; \mathbf{r}_A\sigma_A\tau_A)$  — одна из таких оболочечных функций, принадлежащая состоянию, орбитальный момент количества движения которого  $L$ , а проекция момента на внешнюю ось  $M$ . Пусть, кроме того, при переходе к системе центра инерции она факторизуется и принимает следующий вид:

$$\tilde{\Psi} = \Psi F(R), \quad (8)$$

где  $R$  — вектор центра инерции системы;  $F(R)$  — волновая функция нулевых колебаний центра инерции. Тогда для  $\Psi$  — волновой функции осцилляторной модели оболочек с выделенным движением центра инерции (волновой функции трансляционно-инвариантной модели оболочек [27]) — справедливо следующее разложение:

$$\Psi = \Psi_{LM} = \sum_{[f][v]k} \Phi_{[v]k}^{[f]L}(abc) D_{KM}^L(\varphi\theta\psi) \chi_{[v]}^{[f]}. \quad (9)$$

Соответствующим подбором линейной комбинации слетеровских детерминантов можно построить такие  $\Psi_{LM}$ , которые содержат  $\chi_{[v]}^{[f]}$  лишь с определенным значением индексов представления  $[f]$ .

Известно, что функции  $\Psi_{LM}$  являются собственными функциями гамильтониана системы  $A$  частиц с парным потенциалом

$$\text{const}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2.$$

Индексы представления  $[f]$  — интегралы движения такой системы. Таковыми являются вместе с правыми индексами  $[\mu]$  обобщенных гиперсферических функций

$$D_{[v][\mu]}^{[f]}(\{\alpha_i\}).$$

Однако волновые функции определенной симметрии относительно перестановки пространственных координат, т. е. базисные функции неприводимых представлений группы перестановок, являются линейной комбинацией функций с различными значениями  $[\mu]$ .

При редукции группы  $(A - 1)$ -мерных вращений на группу перестановок  $A$  частиц появляется дополнительное вырождение, если только больше единицы кратность, с которой в приводимом представлении группы перестановок, определяемом базисными функциями  $D_{[v][\mu]}^{[f]}$  с фиксированными индексами  $[f]$  и  $[v]$ , содержится какое-либо из неприводимых представлений группы перестановок, сопряженное по симметрии изоспиновой функции.

Таким образом, индексы представления  $[f]$ , схема Юнга группы перестановок и индексы повторения, возникающие при редукции группы  $(A - 1)$ -мерных вращений на группу перестановок, вместе с орбитальным моментом  $L$ , спином и изоспином дают набор кван-

товых чисел, необходимый для идентификации таких состояний системы нуклонов, которые представимы в виде суперпозиции детерминантов осцилляторной модели оболочек. Для того чтобы набор квантовых чисел сделать полным, требуется найти еще семь интегралов движения. Эти интегралы можно установить в результате решения системы уравнений для коллективных функций.

Представления  $[f]$   $SO(A-1)$ -группы имеют в методе обобщенных гиперсферических функций то значение, которое в модели оболочек принимают конфигурации одночастичных состояний. Но, в отличие от последних, каждое представление  $[f]$  вместе с принадлежащим ему базисом можно сопоставить не одному состоянию атомного ядра, а целому спектру состояний с несколькими ветвями коллективных возбуждений.

В разложении (9) коэффициенты  $\Phi_{[f]K}^{[f]}$  фиксированы в соответствии с тем, что  $\Psi$  является одной из функций трансляционно-инвариантной модели оболочек и, следовательно, одной из собственных функций гамильтониана  $A$  нуклонов с осцилляторным парным взаимодействием. В том случае, когда решается задача о движении нуклонов с произвольным взаимодействием, коэффициенты  $u_{[v]K}^{[f]L}$  должны быть найдены из системы уравнений метода обобщенных гиперсферических функций.

Для того чтобы составить уравнения для коэффициентов  $u_{[v]K}^{[f]}$ , необходимо прежде всего перечислить квантовые числа тех базисных функций  $\chi_{[v]}^{[f]}$ , которые привлекаются для построения разложения волновой функции системы  $A$  нуклонов. Это нетрудно сделать, если ограничиться минимальным приближением и строить разложение лишь на базисных функциях  $\chi_{[v]}^{[f]}$ , входящих в состав основных конфигураций осцилляторной модели оболочек. Нетрудно найти и коэффициенты  $\Phi_{[v]K}^{[f]}$  основных конфигураций модели оболочек. Последние полезны как при исследовании той формы распределения плотности нуклонов, которую дает модель оболочек, так и в качестве структурных элементов пробных функций для прямых вариационных расчетов.

Ниже приведены простые примеры, иллюстрирующие квантовые числа минимального базиса и осцилляторные коэффициенты для системы шести и восьми нуклонов.

Соответствующая основному состоянию ядра  ${}^6\text{He}$  и нулевому значению полного орбитального момента системы волновая функция осцилляторной модели оболочек (без учета множителя, содержащего зависимость от координат центра инерции системы) имеет вид

$$\Psi_0^{[2]} = \Phi_{\{0\}0}^{[2]0} \chi_{\{0\}}^{[2]} + \Phi_{\{20\}0}^{[2]0} \chi_{\{20\}}^{[2]} + \Phi_{\{22+10\}}^{[2]} \chi_{\{22+\}}^{[2]}, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } \Phi_{\{v\}0}^{[2]0} &= N_n \tilde{\Phi}_{\{v\}}^{[2]} \exp[-(a^2 + b^2 + c^2)/2]; \\ \tilde{\Phi}_{\{0\}}^{[2]} &= 1(a^2 + b^2 + c^2)/\sqrt{5}; \quad \tilde{\Phi}_{\{20\}}^{[2]} = c^2 - (a^2 + b^2)/2; \\ \tilde{\Phi}_{\{22+}\}^{[2]} &= (\sqrt{3}/2)(a^2 - b^2); \\ \chi_{\{22+}\}^{[2]} &= [\chi_{\{22\}}^{[2]} + \chi_{\{2-2\}}^{[2]}]/\sqrt{2}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$N_n$  — нормировочная постоянная.

Принадлежащая той же оболочке ядра  ${}^6\text{He}$ , но состоянию с моментом  $L=2$  функция  $\Psi_{2M}^{[2]1}$  определяется коэффициентами

$$\begin{aligned} \Phi_{\{v\}K}^{[2]2} &= N_n \tilde{\Phi}_{\{v\}K}^{[2]2} \exp[-(a^2 + b^2 + c^2)/2]; \\ \tilde{\Phi}_{\{0\}0}^{[2]2} &= [c^2 - (a^2 + b^2)/2]/\sqrt{5}; \quad \tilde{\Phi}_{\{0\}2+}^{[2]2} = \sqrt{3/5}(a^2 - b^2)/2; \\ \tilde{\Phi}_{\{20\}0}^{[2]2} &= c^2 + (a^2 + b^2)/4; \quad \tilde{\Phi}_{\{20\}2+}^{[2]2} = (-\sqrt{3}/4)(a^2 - b^2); \\ \tilde{\Phi}_{\{22+}0}^{[2]2} &= (-\sqrt{3}/4)(a^2 - b^2); \quad \Phi_{\{22+}2+}^{[2]2} = (3/4)(a^2 + b^2); \\ \tilde{\Phi}_{\{22-}2-}^{[2]2} &= (-3/2)ab; \quad \tilde{\Phi}_{\{21+}1+}^{[2]2} = (-3/2)bc; \\ \Phi_{\{21-}1-}^{[2]2} &= (3/2)ca, \end{aligned}$$

причем по определению  $\tilde{\Phi}_{\{v\}K}^{[f]L}$  — это коэффициент при  $(D_{KM}^L + D_{-KM}^L) \chi_{\{v\}}^{[f]}/\sqrt{2}$ ;  $\tilde{\Phi}_{\{v\}K}^{[f]L}$  — коэффициент при  $(D_{KM}^L - D_{-KM}^L) \chi_{\{v\}}^{[f]}/\sqrt{2}$ .

Осцилляторная функция основного состояния ядра  ${}^8\text{Be}$  имеет вид [28]

$$\begin{aligned} \Psi_0^{[4]} &= \Phi_{\{0\}0}^{[4]0} \chi_{\{0\}}^{[4]} + \Phi_{\{20\}0}^{[4]0} \chi_{\{20\}}^{[4]} + \Phi_{\{22+}0}^{[4]0} \chi_{\{22+}\}^{[4]} + \Phi_{\{40\}0}^{[4]0} \chi_{\{40\}}^{[4]} + \\ &+ \Phi_{\{42+}0}^{[4]0} \chi_{\{42+}\}^{[4]} + \Phi_{\{44+}0}^{[4]0} \chi_{\{44+}\}^{[4]}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\{v\}0}^{[4]0} &= N_n \tilde{\Phi}_{\{v\}}^{[4]} \exp[-(a^2 + b^2 + c^2)/2]; \\ \tilde{\Phi}_{\{0\}}^{[4]} &= \sqrt{21/10} [a^4 + b^4 + c^4 + (2/3)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)]; \\ \tilde{\Phi}_{\{20\}}^{[4]} &= 3 \{c^4 - (a^4 + b^4)/2 - [a^2b^2 - (b^2c^2 + c^2a^2)/2]/3\}; \\ \tilde{\Phi}_{\{22+}\}^{[4]} &= 3 [(\sqrt{3}/2)(a^4 - b^4) - (b^2c^2 - c^2a^2)/2\sqrt{3}]; \\ \tilde{\Phi}_{\{40\}}^{[4]} &= (3/8) \sqrt{11/10} \{8[c^2 - (a^2 + b^2)/2]^2 + (a^2 - b^2)^2\}; \\ \tilde{\Phi}_{\{42+}\}^{[4]} &= (3/8) \sqrt{11/10} 4\sqrt{5}(a^2 - b^2) \left[ c^2 - \frac{(a^2 + b^2)}{2} \right]; \\ \tilde{\Phi}_{\{44+}\}^{[4]} &= (3/8) \sqrt{11/10} \sqrt{35}(a^2 - b^2)^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В пределах  $p$ -оболочки основные осцилляторные конфигурации в каждом случае содержат базисные функции только одного представления [f]. Но же для  $s-d$ -оболочки имеет место вырожде-

ние и основным конфигурациям соответствуют несколько представлений  $SO(A-1)$ -группы. Так, основному состоянию  $^{20}\text{Ne}$  соответствуют, например, представления  $[12, 4, 4]$  и  $[8, 8, 4]$ , а основному состоянию  $^{24}\text{Mg}$  —  $[16, 8, 4]$ ,  $[12, 12, 4]$  и  $[12, 8, 8]$ . Поэтому согласно данному выше определению минимальный базис для ядер  $s-d$ -оболочки должен включать функции  $\chi_{[v]}^{[f]}$  различных представлений  $[f]$   $SO(A-1)$ -группы. Однако если в разложении волновой функции основного состояния заданного ядра одно из этих представлений является доминирующим, то минимальное приближение можно определить иначе, включив в минимальный базис лишь обобщенные гиперсферические функции доминирующего представления.

### 5. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

После того как определены квантовые числа базисных функций  $\chi_v$ , чтобы составить систему уравнений для коэффициентных функций  $u_{vK}^L(abc)$ , необходимо найти матричные элементы гамильтониана  $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$  на функциях  $\chi_v$ . Матричные элементы оператора кинетической энергии  $\langle v | \hat{T} | v' \rangle$  сводятся к известным матричным элементам генераторов  $SO(A-1)$ -групп. Поэтому основная трудность состоит в вычислении матричных элементов оператора потенциальной энергии системы нуклонов

$$\hat{V} = \sum_{i < j}^A v(r_{ij}, \sigma_i \sigma_j, \tau_i \tau_j).$$

Для анализа оператора кинетической энергии удобно привлечь волновые функции трансляционно-инвариантной модели оболочек. Пусть  $\Psi$  и  $\bar{\Psi}$  — две такие функции:

$$\Psi = \Psi_{LM} = \sum_{vK} \Phi_{vK}^L(abc) D_{KM}^L(\varphi\theta\psi) \chi_v;$$

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{LM} = \sum_{v'K'} \bar{\Phi}_{v'K'}^L(abc) D_{K'M}^L(\varphi\theta\psi) \chi_{v'}.$$

В частном случае функция  $\bar{\Psi}_{LM}$  может быть тождественно равна функции  $\Psi_{LM}$ . Если  $\bar{\Psi}_{LM} \neq \Psi_{LM}$ , то она будет представлять интерес лишь при условии, что в ее состав входят такие функции  $\chi_v$ , которых нет в составе  $\Psi_{LM}$ .

Если матричный элемент

$$U = \sum_{M=-L}^L \langle \bar{\Psi}_{LM}^* | \hat{V} | \Psi_{LM} \rangle$$



определить без интегрирования по коллективным переменным  $a, b, c; \varphi, \theta, \psi$ , то  $U$  окажется функцией переменных  $a, b, c$  и ее можно представить в виде следующей суммы:

$$U_{\nu}^{\nu}(abc) = \sum_{\nu\nu'K} \overline{\Phi}_{\nu'K}^{*L}(abc) \Phi_{\nu K}^{L_1}(abc) \langle \chi_{\nu'}^* | \hat{V} | \chi_{\nu} \rangle,$$

вывод которой основывается на тождестве

$$\sum_{M=-L_1}^{L_1} D_{K'M}^{*L_1}(\varphi\theta\psi) D_{KM}^L(\varphi\theta\psi) \equiv \delta_{KK'}^{L_1 L_1}.$$

Интересующие нас матричные элементы

$$U_{\nu\nu'}(abc) = \langle \chi_{\nu'}^* | \hat{V} | \chi_{\nu} \rangle$$

заклучены в  $U(abc)$ , и для их извлечения требуется вычислить не только функцию  $U(abc)$ , но и  $\Phi_{\nu K}^L(abc)$ .

Итак, рассмотрим интеграл

$$U_{\nu}^{\nu}(abc) = \sum_{M=-L_1}^L \int d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{3A-9} \overline{\Psi}_{LM}^* \hat{V} \Psi_{LM},$$

в котором спин-изоспиновые матрицы Паули оператора потенциальной энергии  $\hat{V}$  усреднены по спин-изоспиновым функциям, входящим в состав  $\Psi_{LM}$  и  $\overline{\Psi}_{LM}^*$ . Интегрирование ведется по  $3A - 9$  обобщенным углам Эйлера, специально выбранным среди  $(A - 1) \times (A - 2)/2$  обобщенных углов Эйлера  $(A - 1)$ -мерного пространства.

Пусть  $q_{kx}, q_{ky}, q_{kz}$  — декартовы компоненты  $(A - 1)$ -векторов Якоби в произвольной системе координат;  $q_{k\xi}, q_{k\eta}, q_{k\zeta}$  — декартовы компоненты тех же векторов, но в системе координат, оси которой направлены вдоль главных осей эллипсоида инерции, причем  $k = 1, 2, \dots, A - 1$ . Пусть, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{A-1} q_{k\xi}^2 = a_0^2; \quad \sum_{k=1}^{A-1} q_{k\eta}^2 = b_0^2; \quad \sum_{k=1}^{A-1} q_{k\zeta}^2 = c_0^2. \quad \text{Используя два тождества [13]:}$$

$$\int \delta(a^2 - a_0^2) \delta(b^2 - b_0^2) \delta(c^2 - c_0^2) da_0^2 db_0^2 dc_0^2 \equiv 1;$$

$$\begin{aligned} & \| a_0^2 - b_0^2 \| b_0^2 - c_0^2 \| c_0^2 - a_0^2 \| \int \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{lx} q_{ly} \right) \times \\ & \times \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{ly} q_{lz} \right) \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{lz} q_{lx} \right) d\varphi \sin \theta d\theta d\psi \equiv 1, \end{aligned}$$

где  $\varphi, \theta, \psi$  — углы Эйлера, задающие ориентацию в пространстве главных осей эллипсоида инерции, преобразуем  $U(abc)$  к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 U(abc) = & \frac{8}{(abc)^{A-5}} \int \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{lx} q_{ly} \right) \times \\
 & \times \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{ly} q_{lz} \right) \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{lz} q_{lx} \right) \times \\
 & \times \delta \left( a^2 - \sum_{l=1}^{A-1} q_{lx}^2 \right) \delta \left( b^2 - \sum_{l=1}^{A-1} q_{ly}^2 \right) \delta \left( c^2 - \sum_{l=1}^{A-1} q_{lz}^2 \right) \times \\
 & \times \sum_{M=-L}^L \bar{\Psi}_{LM}^* \hat{V}_{LM} \Psi_{LM} d\tau_{3A-3}; \\
 d\tau_{3A-3} \equiv & dq_1 dq_2 \dots dq_{A-1} = (a_0 b_0 c_0)^{A-4} \times \\
 & \times |a_0^2 - b_0^2| |b_0^2 - c_0^2| |c_0^2 - a_0^2| da_0 db_0 dc_0 \times \\
 & \times d\varphi \sin \theta d\theta d\psi d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{3A-9}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Введем теперь интегральные представления для  $\delta$ -функций:

$$\begin{aligned}
 & \delta(a^2 - a_0^2) \delta(b^2 - b_0^2) \delta(c^2 - c_0^2) = \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 dk_2 dk_3 \exp [ik_1(a^2 - a_0^2) + ik_2(b^2 - b_0^2) + ik_3(c^2 - c_0^2)].
 \end{aligned}$$

Первые три  $\delta$ -функции под интегралом (14) отличны от нуля только тогда, когда декартовы оси координат направлены вдоль главных осей эллипсоида инерции. Как раз в этом случае суммы

$$\sum_{l=1}^{A-1} q_{lx}^2, \quad \sum_{l=1}^{A-1} q_{ly}^2, \quad \sum_{l=1}^{A-1} q_{lz}^2$$

в аргументах трех последующих  $\delta$ -функций совпадают с  $a_0^2, b_0^2, c_0^2$  соответственно, что и позволяет последние заменить суммами:

$$\begin{aligned}
 & \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{lx} q_{ly} \right) \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{ly} q_{lz} \right) \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} q_{lz} q_{lx} \right) = \\
 & = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 dp_3 \exp \left[ -i \sum_{l=1}^{A-1} (p_1 q_{ly} q_{lz} + p_2 q_{lz} q_{lx} + p_3 q_{lx} q_{ly}) \right].
 \end{aligned}$$

Квадратичную относительно декартовых компонент векторов Якоби форму, появившуюся в экспоненте интегральных представ-

лений всех  $\delta$ -функций, поворотом координатных осей трехмерного пространства, в котором определены векторы Якоби, можно привести к диагональному виду [13]. Чтобы осуществить это приведение, положим

$$\begin{aligned} t &= (k_1 + k_2 + k_3)/2 \sqrt{3}; \\ \tilde{\alpha}_{\pm 2} &= (k_1 - k_2 \mp ip_3); \quad \tilde{\alpha}_{\pm 1} = (p_2 \mp ip_1); \\ \tilde{\alpha}_0 &= (2/\sqrt{3}) [(k_3 - (k_1 + k_2)/2)] \end{aligned}$$

и введем затем новые переменные для интегральных представлений  $\delta$ -функций:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} \cos \tilde{\delta} &= \sum_{\mu} \alpha_{\mu} D_{0\mu}^2(\tilde{\varphi}\tilde{\theta}\tilde{\psi}); \\ \tilde{\lambda} \sin \tilde{\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu} \alpha_{\mu} [D_{2\mu}^2(\tilde{\varphi}\tilde{\theta}\tilde{\psi}) + D_{-2\mu}^2(\tilde{\varphi}\tilde{\theta}\tilde{\psi})]. \end{aligned}$$

Ориентация новой системы относительно исходной определяется углами Эйлера  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\psi}$ , которые, в свою очередь, удовлетворяют следующим трем требованиям:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \alpha_{\mu} D_{1\mu}^2(\tilde{\varphi}\tilde{\theta}\tilde{\psi}) &= 0; \quad \sum_{\mu} \alpha_{\mu} D_{-1\mu}^2(\tilde{\varphi}\tilde{\theta}\tilde{\psi}) = 0; \\ \sum_{\mu} \alpha_{\mu} D_{2\mu}^2(\tilde{\varphi}\tilde{\theta}\tilde{\psi}) &= \sum_{\mu} \alpha_{\mu} D_{-2\mu}^2(\tilde{\varphi}\tilde{\theta}\tilde{\psi}). \end{aligned}$$

Теперь подобно тому, как это было сделано в работе [13], выражение для  $U(abc)$  можно представить в виде интеграла по всему конфигурационному пространству  $A$  одночастичных векторов  $\mathbf{r}_l$  с элементом объема  $d\tau_{3A}$

$$\begin{aligned} U(abc) &= \frac{1}{2} \int \dots \int dt \tilde{\lambda}^4 d\tilde{\lambda} \sin 3\tilde{\delta} d\tilde{\delta} d\tilde{\varphi} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{\psi} \times \\ &\quad \times D(t, \tilde{\lambda}, \tilde{\delta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}; a, b, c) \int d\tau_{3A} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{l=1}^A i(-s_1 r_{lx'}^2 - s_2 r_{ly'}^2 - s_3 r_{lz'}^2) \right\} \sum_{M=-L}^L \bar{\Psi}_{LM}^* \hat{V} \Psi_{LM}, \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= (2/\sqrt{3}) [t + (\tilde{\lambda}/2) \cos(\tilde{\delta} - 2\pi/3)]; \\ s_2 &= (2/\sqrt{3}) [t + (\tilde{\lambda}/2) \cos(\tilde{\delta} + 2\pi/3)]; \\ s_3 &= (2/\sqrt{3}) [t + (\tilde{\lambda}/2) \cos \tilde{\delta}]; \\ D(t, \tilde{\lambda}, \tilde{\delta}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}; a, b, c) &= \\ &= \frac{V(1+is_1)(1+is_2)(1+is_3)}{8\pi^{1s/2}(abc)^{A-5}} \exp(ik_1 a^2 + ik_2 b^2 + ik_3 c^2); \end{aligned}$$

$$d\tau_{3A} = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_A.$$

Предполагаем векторы Якоби  $q_l$  нормированными таким образом, что выполняется равенство

$$\sum_{l=1}^{A-1} q_l^2 + \frac{1}{V^A} \left( \sum_{l=1}^A r_l \right)^2 = \sum_{l=1}^A r_l^2.$$

Волновые функции модели оболочек  $\tilde{\Psi}$  и  $\tilde{\tilde{\Psi}}$ , выбранные в виде комбинаций однородных относительно нуклонных координат слетеровских детерминантов, запишем в декартовой системе координат. Тогда экспоненту с суммой в показателе можно включить в слетеровские детерминанты, если перестроить одночастичные состояния, заменив трехмерный изотропный осциллятор анизотропным, частоты колебаний которого вдоль осей  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  отличаются от соответствующих частот изотропного осциллятора множителями  $1 + is_1$ ,  $1 + is_2$ ,  $1 + is_3$ . При этом перед слетеровскими детерминантами необходимо поставить компенсирующий множитель, чтобы сохранить правильную нормировку детерминантов.

Таким образом, показано, что для вычисления  $U(abc)$  достаточно проинтегрировать выражения, содержащие слетеровские детерминанты. Отсюда следует, что матричные элементы оператора потенциальной энергии на функциях  $\chi_\nu$  можно найти, не строя в явном виде удовлетворяющие принципу Паули функции  $\chi_\nu$  (неявно эти функции содержатся в детерминантах Слетера), и что операцию усреднения спин-изоспиновых матриц оператора потенциальной энергии системы можно также выполнить с помощью слетеровских детерминантов.

Комбинация простейших слетеровских детерминантов осцилляторной модели оболочек для основного состояния ядра  ${}^6\text{He}$  (полный орбитальный момент  $L = 0$ , полный спин  $S = 0$ , полный изотопический спин  $T = 1$ ) имеет вид

$$(\tilde{\Psi}_{xx} + \tilde{\Psi}_{yy} + \tilde{\Psi}_{zz}) / \sqrt{3}. \quad (16)$$

Каждое из слагаемых этой комбинации соответствует определенному заполнению двумя нейтронами  $p$ -оболочки возбужденных состояний трехмерного осциллятора. Индексы внизу указывают квантовые числа заполненных возбужденных состояний трехмерного осциллятора (так,  $x$  отвечает однократному возбуждению осциллятора, совершающего колебания вдоль оси  $x$ , и нулевым колебаниям двух других осцилляторов) и число заполненных состояний (оно равно количеству индексов). Порядковый номер индекса означает определенное сочетание одночастичных спин-изоспиновых квантовых чисел.

Для основного состояния ядра  ${}^8\text{Be}$  отвечающая  $L = 0$ ,  $S = 0$ ,  $T = 0$  комбинация простейших слетеровских детерминантов имеет

несколько иной вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{45}} \sum_{i,j=1}^3 (\tilde{\Psi}_{x_i x_i x_j x_j} + \tilde{\Psi}_{x_i x_j x_i x_j} + \tilde{\Psi}_{x_i x_j x_j x_i}) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{\sqrt{45}} [\tilde{\Psi}_{(r_1 r_2)(r_3 r_4)} + \tilde{\Psi}_{(r_1 r_3)(r_2 r_4)} + \tilde{\Psi}_{(r_1 r_4)(r_2 r_3)}], \end{aligned} \quad (17)$$

где  $x_1 = x$ ;  $x_2 = y$ ;  $x_3 = z$ .

Во втором способе записи знак суммы заменен символами скалярных произведений, которыми объединены нижние индексы (суммы их попарных произведений). Определенному сочетанию спин-изоспиновых квантовых чисел соответствует уже не положение нижнего индекса, а только его порядковый номер, поскольку теперь не во всех случаях положение и порядковый номер совпадают.

Наконец, приведем комбинацию слетеровских детерминантов для ядра  $^{12}\text{C}$ , используя при этом не только символ скалярного, но и векторного произведения:

$$\tilde{\Psi}_{(r_1 r_2)[r_3 r_4](r_5 r_6)[r_7 r_8]} + \tilde{\Psi}_{(r_1 r_3)[r_2 r_4](r_5 r_6)[r_7 r_8]} + \tilde{\Psi}_{(r_1 r_5)[r_2 r_4](r_3 r_6)[r_7 r_8]}.$$

Заметим, что состояния 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 имеют одинаковые спин-изоспиновые квантовые числа.

Теперь вновь рассмотрим выражение (15). Прежде чем проводить интегрирование по  $d\tau_A$ , раскроем слетеровские детерминанты и интегрируемую функцию представим в виде суммы произведений одночастичных функций. Многие слагаемые этой суммы после интегрирования по  $d\tau_A$  в силу ортогональности одночастичных функций обратятся в нуль. Каждое из оставшихся слагаемых проинтегрируем по трем компонентам вектора той частицы, координаты которой в данном слагаемом суммы представлены лишь в показателе экспоненты. Интегрирование по остальным одночастичным переменным, даже если и они представлены только в экспоненте, целесообразно выполнить после интегрирования по параметрам интегральных представлений  $\delta$ -функций. Но предварительно в трехмерном пространстве, в котором определены одночастичные векторы, необходимо сделать поворот, обеспечивающий возвращение к параметрам  $p_i$ ,  $k_i$  и затем к  $\delta$ -функциям. В отличие от аргументов  $\delta$ -функций исходных выражений (14), аргументы новых  $\delta$ -функций содержат не координаты Якоби  $q_l$ , а координаты

(A — 1) частиц  $\mathbf{r}_i$ :

$$\begin{aligned}
 U(a, b, c) = & \frac{8}{(abc)^{A-5}} \int \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} r_{lx} r_{ly} \right) \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} r_{ly} r_{lz} \right) \times \\
 & \times \delta \left( \sum_{l=1}^{A-1} r_{lz} r_{lx} \right) \delta \left( a^2 - \sum_{l=1}^{A-1} r_{lx}^2 \right) \delta \left( b^2 - \sum_{l=1}^{A-1} r_{ly}^2 \right) \delta \left( c^2 - \sum_{l=1}^{A-1} r_{lz}^2 \right) \times \\
 & \times \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{A-1}) \exp \left( - \sum_{l=1}^{A-1} r_l^2 \right) d\mathbf{r}'_{3A-3}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

где  $\mathcal{G}$  — сумма произведений потенциала взаимодействия двух нуклонов  $v_{st}$  в тех или иных спин-изоспиновых состояниях на полиномы, однородные по одночастичным координатам и инвариантные относительно вращений в трехмерном пространстве. Так, для  ${}^6\text{He}$  для функции (17)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_5) = & (4/3) \pi^{-15/2} \{ 3 [v_{31}(r) + v_{13}(r)] (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)^2 + \\
 & + v_{13}(r) (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)^2 + [9v_{33}(r) + 3v_{31}(r) + 3v_{13}(r) + v_{11}(r)] (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3)^2 / 2 - \\
 & - [9v_{33}(r) - 3v_{31}(r) - 3v_{13}(r) + v_{11}(r)] (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3) (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) / 2 \}, \quad r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|.
 \end{aligned}$$

Для  ${}^8\text{Be}$  для функции (18)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(r_1, r_2, \dots, r_7) = & \frac{16}{15} \pi^{-15/2} \left\{ \frac{9v_{33}(r) + 3v_{31}(r) + 3v_{13}(r) + v_{11}(r)}{2} \times \right. \\
 & \times [(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_5 \mathbf{r}_6) + (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_5) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_6) + (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_6) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5)]^2 + [(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4) + \\
 & + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3) (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_4) + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)]^2 + [(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5) + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_5) + \\
 & + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_5) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)]^2 + [(\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5) + (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_5) + (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_5) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)]^2 - \\
 & - \frac{9v_{33}(r) - 3v_{31}(r) - 3v_{13}(r) + v_{11}(r)}{2} \{ [(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_5 \mathbf{r}_6) + (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_5) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_6) + \\
 & + (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_6) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5)]^2 + [(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4) + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3) (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_4) + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_2)]^2 + \\
 & + 2 [(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5) + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_5) + (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_5) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)] [(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_2) (\mathbf{r}_4 \mathbf{r}_5) + \\
 & \left. + (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_4) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_5) + (\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_5) (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Если направить координатные оси вдоль главной оси эллипсоида инерции системы (A — 1) частиц, а в инвариантной относительно поворотов координатных осей функции  $\mathcal{G}$  сделать переход от одночастичных векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{A-1}$  к полуосям эллипсоида инерции  $a'_0, b'_0, c'_0$  и обобщенным углам Эйлера  $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3A-9}$ , то в (18) можно выполнить интегрирование по  $a'_0, b'_0, c'_0$  и углам Эйлера ориентации эллипсоида инерции  $\varphi', \theta', \psi'$ . При этом следует иметь в виду, что в системе эллипсоида инерции одночастичные векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{A-1}$  связаны с коллективными

переменными  $a'_0, b'_0, c'_0$  и обобщенными углами Эйлера теми же самыми соотношениями, какими связаны векторы Якоби  $q_1, q_2, \dots, q_{A-1}$  с полуосями эллипсоида инерции системы  $A$  частиц (при выделенном движении центра инерции)  $a_0, b_0, c_0$  и обобщенными углами Эйлера  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{3A-9}$ . В результате для  $U$  оказывается справедливым следующее выражение:

$$U(a, b, c) = \int \mathcal{F}(a, b, c, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{3A-9}) \times \\ \times \exp(-a^2 - b^2 - c^2) d\alpha'_1 d\alpha'_2, \dots, d\alpha'_{3A-9},$$

из которого уже несложно извлечь интересующие нас матричные элементы  $U_{vv'}$  ( $a, b, c$ ).

Выполнив все необходимые операции, матричные элементы для  ${}^6\text{He}$  можно представить в виде [29]:

$$U_{vv'} = \sum_{i=1}^4 U_{vv'}^{(i)};$$

$$U_{vv'}^{(1)} = \int d\tau [v_{31}(p) + v_{13}(p)] \langle \hat{A}_1 | v' \rangle;$$

$$U_{vv'}^{(2)} = \int d\tau v_{13}(p) \langle v | \hat{A}_2 | v' \rangle;$$

$$U_{vv'}^{(3)} = \int d\tau \frac{1}{3} [9v_{33}(p) + 3v_{31}(p) + 3v_{13}(p) + v_{11}(p)] \langle v | \hat{A}_3 | v' \rangle;$$

$$U_{vv'}^{(4)} = \int d\tau \frac{1}{3} [9v_{33}(p) - 3v_{33}(p) + v_{11}(p)] \langle v | \hat{A}_4 | v' \rangle,$$

где

$$p = \sqrt{2} \sqrt{a^2 r^2 \sin^2 \theta_2 \cos^2 \varphi_2 + b^2 r^2 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \varphi_2 + c^2 r^2 \cos^2 \theta_2}; \\ d\tau = r^2 dr \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2; \quad 1 \geq r \geq 0; \quad \pi \geq \theta_2 \geq 0; \quad 2\pi \geq \varphi_2 \geq 0;$$

$v_{31}, v_{33}, v_{13}, v_{11}$  — обычным образом определенные компоненты обменного потенциала;  $v$  — определенный набор квантовых чисел. Для  ${}^6\text{He}$ , если ограничиться теми  $v$ , которые содержатся в волновой функции (16), удобно при классификации базисных функций использовать квазиимомент  $j$ , его проекцию  $k$ , а также квантовое число  $n$ , однозначно связанное с квазиимоментом  $j$  соотношением  $2n + j = 2, j = 0, 2$ . Тогда

$$\langle njk | A_i | n' j' k' \rangle = A_{i1} R_{nj}(r) Y_{jk}(\theta_2, \varphi_2) R_{n' j'}(r) Y_{j' k'}(\theta_2, \varphi_2) + \\ + \sum_{n_1, j_1, k_1} A_{i2} C_{n_1 j_1 k_1}^{nj, n' j' k'} R_{n_1 j_1}(r) Y_{j_1 k_1}(\theta_2, \varphi_2) + A_{i3} \delta_{jj'} \delta_{kk'}; \\ A_{11} = 1/5; \quad A_{21} = 13/20; \quad A_{31} = -1/4; \quad A_{41} = -7/20; \\ A_{12} = (2/15) \sqrt{7/\pi}; \quad A_{22} = (1/60) \sqrt{7/\pi}; \quad A_{32} = (-1/24) \sqrt{7/\pi}; \\ A_{42} = (13/120) \sqrt{7/\pi}; \quad A_{13} = 21/10\pi; \quad A_{23} = 21/80\pi;$$

$$A_{33} = 21/16\pi; \quad A_{43} = 21/80\pi;$$

$$C_{100}^{100; 100} = 1; \quad C_{0,2k}^{100; 0,2k} = -2(20k0 | 2k);$$

$$C_{100}^{0,2k; 0,2k'} = -2\sqrt{5}(22kk' | 00); \quad C_{0,2R_1}^{0,2k; 0,2k'} = \sqrt{35/2}(22kk' | 2k_1),$$

где  $(jj'kk' | j_1k_1)$  — коэффициенты Клебша — Гордана.

## 6. О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОЧАСТИЧНОЙ ПЛОТНОСТИ АТОМНЫХ ЯДЕР В СОБСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ [30, 31]

При изучении формы легких ядер часто обращаются к форме поверхностей постоянной плотности нуклонов в собственной системе координат ядра. Однако, поскольку собственная система координат не определяется, форму распределения плотности нуклонов в собственной системе отождествляют с формой распределения плотности во внешней системе, оправдывая это отождествление справедливостью адиабатического приближения [32, 33]. Ограниченность такого подхода очевидна. Форму распределения плотности находят для суперпозиции состояний с разными моментами количества движения (эту суперпозицию условно называют *внутренней функцией*), но не для состояния с определенным значением момента. Задача вычисления формы поверхностей постоянной плотности в состояниях с определенным значением момента даже не ставится. Вызывает сомнение и применимость адиабатического приближения, так как у ядер  $p$ - и  $(s - d)$ -оболочек даже в самой благоприятной ситуации для условий применимости адиабатического приближения нет надежных запасов.

Связав собственную систему координат ядра с главными осями эллипсоида инерции, можно построить функцию распределения одночастичной плотности нуклонов в этой системе, а вместе с ней и поверхности постоянной плотности. Последние позволяют составить самое непосредственное представление о собственной форме атомных ядер.

Функция распределения одночастичной плотности ядра  $f_M^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta)$  в собственной системе выражается через интеграл по всему пространству изменения коллективных и внутренних переменных от произведения квадрата модуля волновой функции и трех  $\delta$ -функций [34]:

$$f^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta) = \int |\Psi_M^{I\tau}|^2 \delta\left(\xi - \sqrt{\frac{A-1}{A}} ar \sin \theta' \sin \varphi'\right) \times$$

$$\times \delta\left(\eta - \sqrt{\frac{A-1}{A}} br \sin \theta' \cos \varphi'\right) \delta\left(\zeta - \sqrt{\frac{A-1}{A}} cr \cos \theta'\right) \times$$

$$\times d\tau_{abc} d\tau_{\Omega} d\tau_{\alpha_i};$$

$$q = \mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_A)/A = \{\xi, \eta, \zeta\}, \quad (19)$$



где  $d\tau_{abc}$ ,  $d\tau_{\Omega}$ ,  $d\tau_{\alpha_i}$  — элементы объема в пространстве переменных  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  и  $\alpha_i$  соответственно;  $r$ ,  $\theta'$ ,  $\varphi'$  — внутренние переменные, связанные простыми соотношениями с тремя из 3А—9 обобщенных углов Эйлера:

$$r \cos \theta' = \cos \theta_{n-1}^{n-1}; \quad r \sin \theta' \cos \varphi' = \sin \theta_{n-1}^{n-1} \cos \theta_{n-2}^{n-2};$$

$$r \sin \theta' \sin \varphi' = \sin \theta_{n-1}^{n-1} \sin \theta_{n-2}^{n-2} \cos \theta_{n-3}^{n-3},$$

причем  $1 \geq r \geq 0$ ,  $\pi \geq \theta' \geq 0$ ,  $2\pi > \varphi' \geq 0$ , а элемент объема в пространстве этих трех независимых внутренних переменных имеет следующий вид:

$$d\tau_{r, \theta', \varphi'} = (1 - r^2)^{A-6/2} r^2 dr \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

Если в правой части формулы (19) ограничиться интегрированием по  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $\alpha_i$ , то появится функция  $F_M^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta; \varphi, \theta, \psi)$ , связанная с  $f^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta)$  соотношением

$$f^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta) = \int F_M^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta; \varphi, \theta, \psi) d\Omega.$$

Эта новая функция может представлять интерес при исследовании формы ядер в состояниях с отличным от нуля моментом количества движения. В состоянии с нулевым моментом количества движения ( $I = 0$ ) функция  $F_0^{I\tau}$  не зависит от углов Эйлера и только постоянным множителем отличается от момента  $f^{0\tau}$ .

Пусть  $a_{ij}(\varphi, \theta, \psi)$  — матричные элементы матрицы поворота в трехмерном пространстве, а  $\varphi, \theta, \psi$  — как и выше, углы Эйлера, определяющие ориентацию главных осей эллипсоида инерции относительно внешней системы отсчета, тогда нетрудно установить соответствие между координатами  $\xi, \eta, \zeta$  точки, неподвижной относительно собственной системы отсчета ядра, и координатами  $x, y, z$  точки, неподвижной относительно внешней системы отсчета:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \eta &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \zeta &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подстановка соотношений (20) в выражение для функции  $F_M^{I\tau}$  и последующее ее интегрирование по углам Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$  приводят к функции одночастичной плотности нуклонов  $\tilde{f}_M^{I\tau}(x, y, z)$  во внешней системе отсчета. Разумеется, плотность  $\tilde{f}_M^{I\tau}$  можно получить и непосредственным интегрированием квадрата модуля волновой функции  $\Psi_M^{I\tau}$  по всем переменным при фиксированном значении координат одного из нуклонов в такой системе центра инерции, оси которой не привязаны к собственным осям ядра.

В состояниях с нулевым моментом количества движения плотность  $\bar{f}_0^{0\tau}$  во внешней системе координат зависит только от

$$q = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

причем если

$$\xi = q \sin \varepsilon \cos \delta, \quad \eta = q \sin \varepsilon \sin \delta, \quad \zeta = q \cos \varepsilon,$$

то в этом частном случае справедливо равенство

$$\bar{f}_0^{0\tau}(q) = \frac{1}{4\pi} \int f^{0\tau}(\xi, \eta, \zeta) \sin \varepsilon d\varepsilon d\delta. \quad (21)$$

Внутренняя переменная  $r$ , появляется в формуле (19) только тогда, когда  $A > 4$ . Для системы четырех нуклонов этой переменной нет (остаются только  $\theta'$  и  $\varphi'$ ), и выражение для плотности имеет поэтому более простой вид:

$$f^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta) = \int |\Psi_M^{I\tau}|^2 \delta\left(\xi - \sqrt{\frac{3}{4}} a \sin \theta' \cos \varphi'\right) \times \\ \times \delta\left(\eta - \sqrt{\frac{3}{4}} b \sin \theta' \sin \varphi'\right) \delta\left(\zeta - \sqrt{\frac{3}{4}} c \cos \theta'\right) d\tau_{abc} d\tau_{\alpha_i} d\Omega. \quad (22)$$

Из трех углов Эйлера  $\alpha_i$ , являющихся внутренними переменными, два — углы  $\theta'$  и  $\varphi'$ , а третий угол —  $\psi'$ , изменяющийся от нуля до  $2\pi$ . Внутренним переменным соответствует элемент объема  $d\alpha_i = \sin \theta' d\theta' d\varphi' d\psi'$ . Что же касается коллективных переменных  $a, b, c$ , то для последующих вычислений удобно согласно формулам (2) перейти от них к переменным  $\rho, \beta, \gamma$ , которым соответствует элемент объема

$$d\tau_{\rho\beta\gamma} = \rho^8 d\rho \beta^4 d\beta |\sin 3\gamma| d\gamma \sqrt{1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma}. \quad (23)$$

Пределы изменения новых переменных определяются неравенствами

$$\infty > \rho > 0; \quad \pi > \gamma > 2\pi/3; \quad -1/2 \cos \gamma > \beta > 0. \quad (24)$$

Интегрирование по области

$$2\pi/3 > \gamma > \pi/3; \quad -1/2 \cos(\gamma + 2\pi/3) > \beta > 0 \quad (25)$$

приводит к тому же результату, но с перестановкой  $\zeta$  и  $\xi$ , в то время как интегрирование по области

$$\pi/3 > \gamma > 0; \quad -1/2 \cos(\gamma + 2\pi/3) > \beta > 0 \quad (26)$$

соответствует заменам  $\zeta$  на  $\xi$ ,  $\xi$  на  $\eta$  и  $\eta$  на  $\zeta$ . Якобиан перехода от аргументов трех  $\delta$ -функций к переменным  $\rho, \varphi', \theta'$  (его необходимо знать при интегрировании  $\delta$ -функций) равен

$$(3/4)^{3/2} \rho^2 \sqrt{1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma} \sin \theta'. \quad (27)$$

Одной из самых простых волновых функций системы четырех нуклонов является функция трансляционно-инвариантной модели оболочек для основного состояния  ${}^4\text{He}$ . Обращение к этой функции позволяет понять, по крайней мере, качественный характер функции одночастичной плотности  ${}^4\text{He}$  в собственной системе координат. После перехода к коллективным и внутренним переменным она приобретает следующий вид:

$$\Psi_0^0({}^4\text{He}) = \Phi_0^0(\rho) \chi_{\{0\}}^{\{0\}}(\sigma_i, \tau_l); \quad \Phi_0^0 = \text{const} \exp(-\rho^2/2), \quad (28)$$

где внутренняя функция  $\chi_{\{0\}}^{\{0\}}$ , представленная единственной компонентой, зависит только от спин-изоспиновых переменных, а коллективная функция  $\Phi_0^0$  — только от глобального радиуса  $\rho$ . Подстановка (28) в (22) позволяет выполнить интегрирование по  $\rho$  и углам  $\varphi'$ ,  $\theta'$ ,  $\psi'$  и свести задачу вычисления одночастичной плотности к двумерному интегрированию:

$$f^0(\xi, \eta, \zeta) = \frac{64}{(3\pi)^{3/2}} \int \int D^3 \exp(-D) \frac{\beta^4 d\beta \sin 3\gamma d\gamma}{1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma};$$

$$D = 4 \left[ \frac{\xi^2}{1 + 2\beta \cos(\gamma + 2\pi/3)} + \frac{\eta^2}{1 + 2\beta \cos(\gamma - 2\pi/3)} + \frac{\zeta^2}{1 + 2\beta \cos \gamma} \right]. \quad (29)$$

Одночастичная плотность (29) нормирована таким образом, что

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} f^0(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 1.$$

Распределение одночастичной плотности во внешней системе координат для волновой функции трансляционно-инвариантной модели оболочек хорошо известно:

$$\bar{f}_0^0(q) = (4/3\pi)^{3/2} \exp(4q^2/3). \quad (30)$$

Связь между (28) и (30) определяется интегралом (21).

Исследование функции  $f^0(\xi, \eta, \zeta)$  начнем с установления предельного значения для  $f^0(0, 0, \zeta)$  при стремлении  $\zeta$  к нулю. Положим  $\beta \cos \gamma = s$ ,  $\beta \sin \gamma = t$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} |\sin 3\gamma| d\gamma \beta^4 d\beta &= |3s^2 - t^2| t dt ds; \\ 1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\lambda &= (1 + 2s) [(1 - s)^2 - 3t^2]; \\ -\sqrt{3} s > t > 0; \quad 0 > s > -1/2. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Поэтому

$$f^0(0, 0, \zeta) = \frac{64}{(3\pi)^{3/2}} \int_{-1/2}^0 ds \int_0^{-\sqrt{3}s} dt \left( \frac{4\zeta^2}{1 + 2s} \right) \times$$

$$\times \exp \left( -\frac{4\zeta}{1 + 2s} \right) \frac{3(3s^2 - t^2) t}{(1 + 2s) [(1 - s)^2 - 3t^2]}.$$

Интегрирование по  $t$  легко выполнить. Если затем положить  $u = 4\xi^2/(1 + 2s)$ , то плотность на оси  $\zeta$  примет следующий вид

$$f^0(0, 0, \zeta) = \frac{32}{(3\pi)^{3/2}} \int_{4\xi^2}^{\infty} u^3 \exp(-u) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{8} \left(1 - \frac{4\xi^2}{u}\right)^2 + \frac{2\xi^2}{9} \frac{3u - 8\xi^2}{u^2} \ln \left[ 16\xi^2 \frac{3u^2 - 8\xi^2}{(3u - 4\xi^2)^2} \right] \right\} \frac{du}{u}. \quad (32)$$

Из (32) сразу же следует, что  $\lim_{\zeta \rightarrow 0} f(0, 0, \zeta) = (4/3\pi)^{3/2}$  в соответствии с выражением (30).

Если же предельный переход к плоскости  $\zeta = 0$  осуществляется при значении  $\xi^2 + \eta \neq 0$ , то плотность растет как  $\ln(1/|\zeta|)$ , а предельное выражение для плотности можно представить в виде

$$f^0(\xi, \eta, \zeta \ll 1) \approx (\ln(1/4\xi^2) - C) \times \\ \times [16/(3\pi)^{3/2}] \int_0^1 [d(\xi, \eta, \lambda)]^3 \exp[-d(\xi, \eta, \lambda)] \lambda d\lambda, \quad (33)$$

где

$$d(\xi, \eta, \lambda) = (8/3) [\xi^2/(1 + \lambda)];$$

$C$  — постоянная Эйлера. Из (33) следует, что при движении от плоскости  $\zeta = 0$  по нормали к этой плоскости плотность быстро убывает, гораздо быстрее,

чем при движении в направлении, перпендикулярном оси  $\zeta$ . Поэтому можно сказать, что в собственной системе координат нуклоны локализованы вблизи плоскости  $\zeta = 0$ . Заметим, что больше половины массы  $^4\text{He}$  приходится на плоский слой, заключенный между плоскостями  $\zeta_0 = \pm 0,1$ . Заметим, что для  $\xi, \eta, \zeta$  выбраны такие единицы, в которых осцилляторный радиус  $r_0 = 1$ .

Зависящий от  $\xi, \eta$  множитель при  $\ln(1/4\xi^2) - C$

определяет структуру функции одночастичной плотности в направлении перпендикулярном оси  $\zeta$ . На рис. 1 изображены горизонталы в плоскости  $\xi, \eta$ , каждая из которых соответствует определенному значению этого множителя.

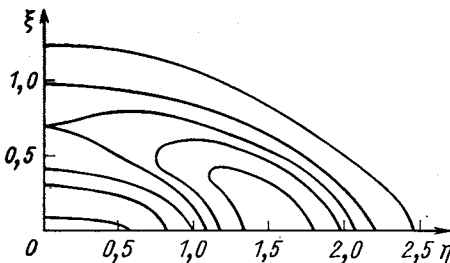


Рис. 1. Горизонталы постоянного значения функции

$$\frac{16}{(3\pi)^{3/2}} \int_0^1 [d(\xi, \eta; \lambda)]^3 \times \\ \times \exp[-d(\xi, \eta; \lambda)] \lambda d\lambda \text{ [см. (33)]}$$

Таким образом, если область изменения переменных  $\beta$ ,  $\gamma$  определяется условиями (24), то плоскость  $\zeta = 0$  является выделенной. Выделение одной из координатных плоскостей системы главных осей эллипсоида инерции (какой именно, зависит от выбора области изменения коллективных переменных  $\beta$ ,  $\gamma$ ) — это эффект кинематической природы, обусловленный тем, что элемент объема (23) в пространстве коллективных переменных системы четырех частиц содержит множитель  $(1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma)^{-1/2}$ , стремящийся к бесконечности, когда одна из трех коллективных переменных  $a$ ,  $b$  или  $c$  стремится к нулю. Равенство нулю  $a$ ,  $b$  или  $c$  означает, что все четыре частицы находятся в одной плоскости. Поэтому связанная с элементом фазового объема в пространстве коллективных переменных плотность вероятности плоских конфигураций системы четырех частиц равна бесконечности, что и приводит к выделению одной из плоскостей, на которой функция распределения одночастичной плотности имеет логарифмическую сингулярность.

Эффект выделения одной из собственных плоскостей имеет место не только для системы четырех частиц, но и в еще большей мере для системы трех частиц, одночастичная плотность которой

$$f^{I\tau}(\xi, \eta, \zeta) = \delta(\zeta) Q^{I\tau}(\xi, \eta) \quad (34)$$

содержит  $\delta$ -функцию от  $\zeta$ , поскольку в процессе своего движения три частицы всегда находятся в одной плоскости.

Из выражения (29) следует, что уравнение семейства поверхностей постоянной плотности ( $f^0 = \text{const}$ ) можно представить в виде

$$\zeta^2 = \mathcal{G}(f_0^0; \xi, \eta^2). \quad (35)$$

Ось  $\zeta$  является нормалью для поверхностей этого семейства. Поверхности (35) прижимаются к плоскости  $\zeta = 0$  с удалением их точек от оси  $\zeta$ :  $|\zeta| \rightarrow 0$ , если  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty$ . При фиксированном значении  $f^0$  формула (35) дает две поверхности, симметричные относительно плоскости  $\zeta = 0$ .

Пусть теперь  $\Phi_0^0(A)$  — волновая функция основного состояния дважды магического ядра с числом нуклонов  $A$  (число нейтронов равно числу протонов) в приближении трансляционно-инвариантной модели оболочек с изотропным осцилляторным базисом. Ее аргументами являются спин-изоспиновые переменные и векторы Якоби  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{A-1}$ , причем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \sqrt{\frac{A-1}{A}} \left( \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \dots + \mathbf{r}_A}{A-1} \right) = \sqrt{\frac{A}{A-1}} \mathbf{q} = \\ &= \sqrt{\frac{A}{A-1}} \left( \mathbf{r}_1 - \frac{1}{\sqrt{A}} \tilde{\mathbf{R}} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\tilde{\mathbf{R}}$  — специальным образом нормированная координата центра инерции:  $\tilde{\mathbf{R}} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}) \sqrt{A}$ .

Матричный элемент  $\langle \Psi_0^0 | f(q) | \Psi_0^0 \rangle$  оператора  $f(q)$ , действующего только на  $q$ , можно представить в виде

$$\langle \Psi_0^0 | f(q) | \Psi_0^0 \rangle = \int d\mathbf{k} C(\mathbf{k}) \langle \Psi_0^0 | \exp(i\mathbf{k}q) | \Psi_0^0 \rangle, \quad (37)$$

где

$$C(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} f(q) \exp(i\mathbf{k}q),$$

но

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0^0 | \exp(i\mathbf{k}q) | \Psi_0^0 \rangle &= \langle \Psi_0^0 | \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{R}}/\sqrt{A}) \times \\ &\times | \Psi_0^0 \rangle \int d\tilde{\mathbf{R}} \exp(-\tilde{\mathbf{R}}^2 + i\mathbf{k}\tilde{\mathbf{R}}/\sqrt{A}) \pi^{-3/2} \exp(k^2/4A) = \\ &= \exp(k^2/4A) \langle \tilde{\Psi} | \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) | \tilde{\Psi} \rangle, \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Psi} | \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) | \tilde{\Psi} \rangle &= \int d\tau_A | \tilde{\Psi} |^2 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_1); \\ \tilde{\Psi} &= \pi^{-3/4} (-\tilde{\mathbf{R}}^2/2) \end{aligned}$$

— волновая функция основного состояния дважды магического ядра в осцилляторной модели оболочек:  $d\tau_A = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_A$ .

Номер последней заполненной оболочки магического ядра обозначим  $m$ , тогда

$$\begin{aligned} A &= (2/3)(m+1)(m+2)(m+3), \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ \langle \tilde{\Psi} | \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_1) | \tilde{\Psi} \rangle &= (4/3) L_m^{(3)}(k^2/2) \exp(-k^2/4), \end{aligned} \quad (39)$$

где  $L_m^\alpha(x)$  — обобщение полинома Лагерра. Поэтому

$$\langle \Psi_0^0 | \exp(i\mathbf{k}q) | \Psi_0^0 \rangle = \frac{4}{A} L_m^{(3)}(k^2/2) \exp\left(-\frac{A-1}{A} \frac{k^2}{4}\right). \quad (40)$$

В результате одночастичную плотность магического ядра, у которого заполнено  $m$  оболочек, в системе центра инерции ядра можно выразить следующей формулой:

$$P_m(q^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{4}{A} L_m^{(3)}\left(\frac{k^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{A-1}{A} \frac{k^2}{4} - i\mathbf{k}q\right). \quad (41)$$

В частности, для кислорода  $^{16}\text{O}$  ( $m = 1$ ):

$$P_1(q^2) = \frac{1}{5\pi^{3/2}} \left(1 + \frac{128}{45} q^2\right) \exp\left(-\frac{16}{15} q^2\right). \quad (42)$$

В общем случае

$$P_m(q^2) = \bar{P}_m(q^2) \exp\left(-\frac{A}{A-1}q^2\right), \quad (43)$$

где  $\bar{P}_m(q^2)$  — полином  $m$ -й степени по  $q^2$ . Плотность  $P_m(q^2)$  нормирована так, что умноженный на  $[A/(A-1)]$  интеграл по всему пространству изменения вектора  $\mathbf{q}$  равен единице. Функция  $\Psi_0^o(A)$  в системе главных осей эллипсоида инерции можно представить в виде произведения двух множителей — коллективной функции и внутренней функции  $\chi_{\{0\}}^{[kkk]}$  ( $\alpha_i, \sigma_k, \tau_k$ ):

$$\Psi_0^o(A) = \Phi_0^o \chi_{\{0\}}^{[kkk]}; \Phi_0^o = \text{const} (abc)^k \exp[-(a^2 + b^2 + c^2)/2]; \quad (44)$$

$$k = mA/4.$$

Используя результаты работы [13], матричный элемент от  $f(\xi, \eta, \zeta)$  на внутренних функциях  $\chi_0$  основных состояний  $\Psi_0^o(A)$  магических ядер выразим через оператор  $\bar{P}_m(-\partial/\partial\lambda)$  и функцию  $I_m(A, \lambda; a, b, c)$ :

$$\langle \chi_{\{0\}}^{[kkk]} | f(\xi, \eta, \zeta) | \chi_{\{0\}}^{[kkk]} \rangle = \bar{P}_m\left(-\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) I_m(A, \lambda; a, b, c) |_{\lambda=1}; \quad (45)$$

$$I_m(A, \lambda; a, b, c) = \frac{1}{\lambda^{3/2}} \frac{\Gamma(m_1+2)}{\Gamma(m_1+1/2)} \int_0^1 (1-r^2)^{m_1-1/2} r^2 dr \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' f\left(\sqrt{\frac{A-1}{A}} \frac{r}{\sqrt{\lambda}} a \sin\theta' \cos\varphi', \sqrt{\frac{A-1}{A}} \times\right.$$

$$\left. \times \frac{r}{\sqrt{\lambda}} b \sin\theta' \sin\varphi', \sqrt{\frac{A-1}{A}} \frac{r}{\sqrt{\lambda}} c \cos\theta'\right);$$

$$m_1 = (A + 2k - 5)/2. \quad (46)$$

После введения дифференцирования  $\bar{P}_m(-\partial/\partial\lambda)$  под знак интеграла и выполнения несложных преобразований получим

$$\langle \chi_{\{0\}}^{[kkk]} | f(\xi, \eta, \zeta) | \chi_{\{0\}}^{[kkk]} \rangle =$$

$$= \frac{\Gamma(m_1+2)}{\Gamma(m_1+1/2)} \int_0^1 (1-r^2)^{m_1-m-1/2} Q_m(r^2) r^2 dr \times$$

$$\times \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' f\left(\sqrt{\frac{A-1}{A}} ra \sin\theta' \cos\varphi', \sqrt{\frac{A-1}{A}} rb \times\right.$$

$$\left. \times \sin\theta' \sin\varphi', \sqrt{\frac{A-1}{A}} rc \cos\theta'\right), \quad (47)$$

где  $Q_m(r^2)$  — полином  $m$ -й степени по  $r^2$ .

Последующие вычисления удобно проводить в коллективных переменных  $\rho, \beta, \gamma$ . Коллективная функция  $\Phi_0^0$  в этих переменных имеет следующий вид:

$$\Phi_0^0(\rho, \beta, \gamma) = \frac{18}{\sqrt{27}} \left(\frac{4}{27}\right)^{m/2} \frac{1}{\sqrt{\Gamma(m_1+1)\Gamma(2m_1+3)}} \times \\ \times \rho^{3h} \exp(-\rho^2/2) (1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma)^{h/2}. \quad (48)$$

Она нормирована так, что равен единице интеграл от  $[\Psi_0^0(\rho, \beta, \gamma)]$  с элементом объема:

$$d\tau_{\rho\beta\gamma} = \rho^{3A-4} d\rho (1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma)^{A-5/2} \beta^4 d\beta \sin 3\gamma d\gamma \quad (49)$$

по области

$$0 < \rho < \infty; 0 < \gamma < \pi/3; 0 < \beta < 1/[2 \cos(\gamma - 2\pi/3)].$$

Чтобы найти  $f_0^0(\xi, \eta, \zeta)$  — функцию распределения одночастичной плотности в системе главных осей эллипсоида инерции, положим

$$f_1(\xi, \eta, \zeta) = \delta\left(\xi - \sqrt{\frac{A-1}{A}} ar \sin \theta' \cos \varphi'\right) \times \\ \times \delta\left(\eta - \sqrt{\frac{A-1}{A}} br \sin \theta' \sin \varphi'\right) \delta\left(\zeta - \sqrt{\frac{A-1}{A}} cr \cos \theta'\right) \quad (50)$$

и проинтегрируем матричный элемент (47) по коллективным переменным  $\rho, \beta, \gamma$  с весом  $[\Phi_0^0(\rho, \beta, \gamma)]^2$ . Три  $\delta$ -функции под знаком интеграла позволяют шестикратный интеграл свести к трехкратному:

$$f_0^0(\xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{4}{27}\right)^{m_1+1/2} \frac{16}{\Gamma(2m_1+2)\Gamma(m_1+1/2)} \int_0^1 (1-r^2)^{m_1-m-1/2} \times \\ \times Q_m(r^2) r^2 dr \int_0^{\pi/3} \sin 3\gamma d\gamma \int_0^{1-[2\beta \cos(\gamma-2\pi/3)]} (1-3\beta^2 + \\ + 2\beta^3 \cos 3\gamma)^{m_1-1/2} \beta^4 d\beta [D_A]^{3m_1+9/2} \exp[-D_A], \quad (51)$$

где

$$D_A = \frac{3A}{A-1} \left[ \frac{\xi^2}{1+2\beta \cos(\gamma+2\pi/3)} + \frac{\eta^2}{1+2\beta \cos(\gamma-2\pi/3)} + \right. \\ \left. + \frac{\zeta^2}{1+2\beta \cos \gamma} \right] \frac{1}{r^2}. \quad (52)$$

В частном случае кислорода  $^{16}\text{O}$  ( $m = 1$ ) полином  $Q_m(r^2)$  имеет следующий вид:

$$Q_1(r^2) = (1 + 23r^2)/5\pi^{3/2}. \quad (53)$$



Интегрирование в (51) с этим полиномом при  $A = 16$  было выполнено в работе [31]. Оказалось, что поверхности постоянной плотности  $^{16}\text{O}$  в собственной системе координат этого ядра напоминают эллипсоидальные поверхности, причем полуоси эллипсоидов относятся как  $0,65 : 0,85 : 1,10$ .

## 7. ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ НЕСФЕРИЧНОСТИ И НЕАКСИАЛЬНОСТИ АТОМНЫХ ЯДЕР [34—37]

Количественные критерии, которые обычно используются для оценки несферичности атомных ядер: квадрупольный момент в том или ином состоянии и вероятность  $E2$ -перехода между различными состояниями одной ротационной полосы, — дают лишь косвенную информацию о ядерной несферичности. Непосредственно не связаны с формой ядра и параметры анизотропного осциляторного базиса, используемого для расчетов Хартри — Фока.

Наиболее естественный и прямой способ оценки степени несферичности ядер и значений их квадрупольных деформаций можно получить на основе исследования компонент  $u_{\nu K}^{I\pi}(\rho, \beta, \gamma)$  коллективной функции [см. (3)], поскольку через коллективные переменные  $\rho, \beta, \gamma$  определяются ненулевые компоненты тензора массового квадрупольного момента  $Q_{2k}$  в системе главных осей эллипсоида инерции, или, что то же самое, в системе главных осей тензора квадрупольного момента. С точностью до множителя равного массе нуклона.

$$\begin{aligned} Q_{20} &= 2\rho^2\beta \cos \gamma; & Q_{22+} &= 2\rho^2\beta^2 \sin \gamma = (Q_{22} + Q_{2-2})/\sqrt{2}; \\ Q_{21} &= Q_{2-1} = (Q_{22} - Q_{2-2})\sqrt{2} = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

Коллективные компоненты  $u_{\nu K}^{I\pi}$  дают самое полное представление о квадрупольных деформациях ядра. В частности, они определяют функцию

$$W^{I\pi}(\rho, \beta, \gamma) = \sum_{\nu K} |u_{\nu K}^{I\pi}(\rho, \beta, \gamma)|^2, \quad (55)$$

через которую выражается плотность вероятности различных значений  $\rho, \beta, \gamma$ . Для того чтобы оценить, в какой мере в среднем эллипсоид инерции данного состояния отличается от сферы, можно обратиться к среднему значению  $\bar{\beta}^2$ . Оно характеризует эффективную несферичность ядра. Что же касается эффективной неаксиальности эллипсоида инерции ядра, то ее можно охарактеризовать средним значением  $\bar{\beta}^3 \cos 3\gamma$ . И  $\bar{\beta}^2$ , и  $\bar{\beta}^3 \cos 3\gamma$  несложно

подсчитать, если известна функция  $W^{I\tau}$ . Например,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}^2 &= \int W^{I\tau} \beta^2 d\tau_\rho d\tau_{\beta\gamma}; \\ d\tau_\rho &= \rho^{3A-4} d\rho; \quad d\tau_{\beta\gamma} = (1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma)^{(A-5)/4} \times \\ &\quad \times \beta^4 d\beta \sin 3\gamma d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Интегрирование по  $\rho$  выполняется в пределах от нуля до бесконечности, а интегрирование по  $\beta$ ,  $\gamma$  — в пределах площади треугольника, который образован двумя лучами, выходящими из начала координат под углами  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi/3$ , и прямой, для которой  $1 + 2\beta \cos(\gamma + 2\pi/3) = 0$ .

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных ядер. Будем использовать для их описания волновые функции трансляционно-инвариантной осцилляторной модели оболочек, которые являются неплохим нулевым приближением для легких ядер. Начнем с анализа формы эллипсоида инерции легких магических ядер.

Единственная компонента коллективной волновой функции основного состояния  ${}^4\text{He}$  (28) не зависит от  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$u_{0,10}^0({}^4\text{He}) = \Phi_0^0({}^4\text{He}) \sim \exp(-\rho^2/2). \quad (57)$$

Поэтому плотность вероятности различных значений  $\beta$  и  $\gamma$  определяется только зависимостью от этих переменных элемента фазового объема:

$$d\tau_{\beta\gamma}({}^4\text{He}) = \beta^4 d\beta \sin 3\gamma d\gamma / \sqrt{1 - 3\beta^2 + 2\beta^3 \cos 3\gamma}. \quad (58)$$

При фиксированных значениях  $\gamma$  плотность вероятности растет с увеличением  $\beta$  и обращается в бесконечность при максимальных (среди допустимых) значениях  $\beta$ .

Среднее значение  $\beta^2$ , подсчитанное по функции (57) с учетом (58), составляет

$$\bar{\beta}^2({}^4\text{He}) = 0,455. \quad (59)$$

Чтобы сделать наглядным масштаб этого значения, необходимо несколько переопределить  $\beta$  и ввести новую переменную

$$\tilde{\beta} = \sqrt{4\pi/5} \beta, \quad (60)$$

значения которой можно непосредственно сравнить с теми значениями, которые принимает параметр деформации  $\tilde{\beta}$ , использованный в работах Бора и Моттельсона [1]. Появление множителя  $\sqrt{4\pi/5}$  есть результат следующего сопоставления.

Оператор квадрупольного момента распределения масс нуклонов ядра простым образом связан с коллективными переменными  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и обобщенными сферическими функциями  $D_{KM}^2$

от углов Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ :

$$Q_{2M} = 2\rho^2\beta [\cos \gamma D_{0M}^2 + \sin \gamma (D_{2M}^2 + D_{2-M}^2) \sqrt{2}]. \quad (61)$$

Если в ядре происходят колебания по переменной  $\rho$  относительно равновесного значения  $\rho_0$  и амплитуда этих колебаний мала по сравнению с  $\rho_0$ , то для среднего квадратического радиуса ядра  $\bar{r}^2$  справедливо приближенное соотношение  $\bar{A}r^2 \approx \rho_0^3$ . В том же приближении вместо  $\rho^2$  в (60) можно подставить  $A\bar{r}^2$ . Из сравнения полученного таким образом приближенного выражения для  $Q_{2M}$  и того же оператора, но в модели Бора — Моттельсона следует:

$$Q_{2M} = \sqrt{5/\pi} \bar{A} \bar{r}^2 \tilde{\beta} [\cos \tilde{\gamma} D_{0M}^2 + \sin \tilde{\gamma} (D_{2M}^2 + D_{2-M}^2) \sqrt{2}];$$

$$\bar{r}^2 = (3/5) R_0^2, \quad (62)$$

где  $R_0$  — радиус, равномерно заполненный ядерным веществом сферы, и вытекает (60), а также равенство  $\tilde{\gamma} = \gamma$ .

Из (59) и (60) следует, что для  ${}^4\text{He}$ ,  $\sqrt{\beta^2} = 1,07$ , между тем как статистическое значение  $\tilde{\beta}$  в модели Бора — Моттельсона для тяжелых несферических ядер (равновесное значение, относительно которого происходят  $\tilde{\beta}$ -колебания) приближенно равно 0,3—0,35.

Коллективная компонента (57) соответствует волновой функции такой системы, между частицами которой действуют осцилляторные силы вигнеровского типа. Если осцилляторные силы заменить слабыми силами притяжения, то среднее значение  $\beta^2$  еще больше возрастет. Если же затем на фоне дальнедействующих сил притяжения ввести короткодействующее отталкивание, то  $\beta^2$  несколько уменьшится. Значение  $\tilde{\beta}^2$  близко к нулю, если в системе действуют силы (комбинация короткодействующего отталкивания и дальнедействующего притяжения), жестко стабилизирующие движение четырех частиц вблизи вершин тетраэдра.

Среднее значение  $\beta^3 \cos 3\gamma$  для основного состояния  ${}^4\text{He}$  также несложно найти, используя (57) и (58):  $\beta^3 \cos 3\gamma = 0,245$ .

Если соотношениями

$$\beta_{\text{эфф}}^2 = \rho^4 \bar{\beta}^2 / \rho^4; \quad \beta_{\text{эфф}}^3 \cos 3\gamma_{\text{эфф}} = \overline{\rho^6 \beta^3 \cos 3\gamma} / \rho^6$$

определить  $\beta_{\text{эфф}}^2$  и  $\gamma_{\text{эфф}}$ , то для  ${}^4\text{He}$  \* получаем  $\beta_{\text{эфф}} = 0,672$ ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 12^\circ 25'$ .

Напомним, что в коллективной модели Бора — Моттельсона для всех состояний ядра, совершающего гармонические колебания относительно сферически-симметричной формы,  $\tilde{\beta}^3 \cos 3\gamma = 0$  и, следовательно,  $\tilde{\gamma}_{\text{эфф}} = 30^\circ$ .

В рассматриваемом приближении  $\overline{\rho^4 \beta^2} = \rho^4 \bar{\beta}^2$ ,  $\overline{\rho^6 \beta^3 \cos 3\gamma} = \rho^6 \bar{\beta}^3 \cos 3\gamma$ .

Таким образом, в среднем в собственной системе координат эллипсоид инерции  ${}^4\text{He}$  имеет вытянутую неаксиальную форму. Выразив через  $\beta_{\text{эфф}}$ ,  $\gamma_{\text{эфф}}$  эффективное значение трех полуосей эллипсоида инерции:

$$c_{\text{эфф}} \approx \sqrt{1 + 2\beta_{\text{эфф}} \cos \gamma_{\text{эфф}}}; \quad b_{\text{эфф}} \approx \sqrt{1 + 2\beta_{\text{эфф}} \cos (\gamma_{\text{эфф}} - 2\pi/3)};$$

$$a_{\text{эфф}} \approx \sqrt{1 + 2\beta_{\text{эфф}} \cos (\gamma_{\text{эфф}} + 2\pi/3)},$$

найдем отношение, которое также характеризует в среднем квадрупольный момент распределения масс нуклонов в собственной системе координат.

Значения  $\beta_{\text{эфф}}$  и  $\gamma_{\text{эфф}}$  и отношение  $c_{\text{эфф}} : b_{\text{эфф}} : a_{\text{эфф}}$  для основных состояний легких магических ядер приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры эффективной деформации легких магических ядер

Ядро	$\beta_{\text{эфф}}$	$\gamma_{\text{эфф}}$ , град	$c_{\text{эфф}} : b_{\text{эфф}} : a_{\text{эфф}}$
${}^4\text{He}$	0,67	12	1,52 : 0,77 : 0,31
${}^{16}\text{O}$	0,27	23	1,22 : 0,97 : 0,76
${}^{40}\text{Ca}$	0,144	27	1,12 : 0,99 : 0,87

С ростом массового числа  $A$  величина  $\beta_{\text{эфф}}$  магических ядер уменьшается (хотя даже для  ${}^{40}\text{Ca}$  сохраняет относительно большое значение), а  $\gamma_{\text{эфф}}$  стремится к  $\pi/6$ .

Средние значения  $\rho^4\beta^2$  и  $\rho^6\beta^3 \cos 3\gamma$  можно вычислить в любой микроскопической модели без непосредственного использования функций  $W^{I\tau}$  или коллективных компонент  $\overline{u_{\nu K}^{I\tau}}$ , если только волновая функция модели выражается через координаты нуклонов. Так, в том же приближении трансляционно-инвариантной модели оболочек

$$\beta_{\text{эфф}}^2 = \frac{3}{2} \frac{1}{E_0(E_0+1)} \left[ g_2 - \frac{1}{2} L(L+1) \right] + \frac{5}{2} \frac{1}{E_0+1};$$

$$\beta_{\text{эфф}}^3 \cos 3\gamma_{\text{эфф}} = \frac{1}{8E_0(E_0+1)(E_0+2)} \left\{ 36g_3 + 27\omega + \right.$$

$$\left. + 63 \left[ g_2 - \frac{1}{2} L(L+1) \right] + 70E_0 \right\};$$

$$g_2 = (2/3)(\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + 3\lambda + 3\mu);$$

$$g_3 = (\lambda - \mu)[(\lambda + 2\mu)(2\lambda + \mu) + 9(\lambda + \mu + 1)]/9;$$

$$E_0 = N_{\text{мин}} + (3/2)(A - 1),$$

где  $L$  — полный орбитальный момент состояния;  $\lambda, \mu$  — индексы представления  $SU(3)$ -группы,  $\omega$  — собственное значение оператора Баргмана — Мошинского;  $N_{\text{мин}}$  — минимальное среди допустимых принципом Паули для представления  $(\lambda, \mu)$  схемы  $SU(3)$ -группы число осцилляторных квантов состояния.

Параметры эффективной деформации некоторых ядер  $p$ - и  $s$  —  $d$ -оболочек приведены в табл. 2.

Таблица 2

## Параметры эффективной деформации некоторых немагических ядер

Ядро	$L$	$(\lambda\mu)$	$\beta_{\text{эфф}}$	$\gamma_{\text{эфф}}$ , град	$c_{\text{эфф}} : b_{\text{эфф}} : a_{\text{эфф}}$
${}^6\text{He}$	0	(20)	0,58	14	1,46 : 0,82 : 0,44
	2		0,54	15	1,43 : 0,58 : 0,49
${}^8\text{Be}$	0	(40)	0,53	14	1,43 : 0,84 : 0,51
	2		0,52	15	1,41 : 0,85 : 0,52
	4		0,47	18	1,38 : 0,90 : 0,55
${}^{10}\text{B}$	0	(22)	0,43	21	1,34 : 0,93 : 0,58
${}^{12}\text{C}$	0	(04)	0,38	26	1,30 : 0,97 : 0,61
	2		0,37	25	1,29 : 0,97 : 0,63
	4		0,35	23	1,28 : 0,96 : 0,67
${}^{14}\text{C}$	0	(02)	0,31	23	1,25 : 0,96 : 0,71
	2		0,30	23	1,24 : 0,96 : 0,73
${}^{16}\text{O}$	0	(40)	0,27	22	1,23 : 0,96 : 0,76
	2		0,27	22	1,23 : 0,96 : 0,76
	4		0,26	23	1,21 : 0,97 : 0,77
${}^{20}\text{Ne}$	0	(80)	0,295	19	1,25 : 0,94 : 0,75
	2		0,29	19	1,25 : 0,94 : 0,75
	4		0,28	20	1,24 : 0,95 : 0,75
	6		0,27	21	1,23 : 0,96 : 0,75
	8		0,25	23	1,21 : 0,97 : 0,77
${}^{24}\text{Mg}$	0	(84)	0,28	22	1,23 : 0,96 : 0,75
${}^5\text{He}$	1	(10)	0,60	14	1,54 : 0,82 : 0,41
${}^7\text{Li}$	1	(30)	0,55	14	1,43 : 0,84 : 0,49
	3		0,50	17	1,40 : 0,88 : 0,52

В пределах первых осцилляторных оболочек и эффективная несферичность, и эффективная неаксиальность слабо изменяются при переходе от ядра к соседнему ядру, а значения  $\beta_{\text{эфф}}$  и  $\gamma_{\text{эфф}}$  для немагических ядер близки к соответствующим значениям для магических ядер. Несферичность основных состояний четно-четных ядер ( $L = 0$ )  $p$ -оболочки тем больше, чем больше число нуклонов, а среди ядер  $s$  —  $d$ -оболочки наибольшую несферичность в основном состоянии имеет  ${}^{20}\text{Ne}$ .

При изменении  $L$  от минимального до максимального значения в пределах представления  $(\lambda\mu)$   $SU(3)$ -группы значение  $\beta_{\text{эфф}}$  всегда только уменьшается, а  $\gamma_{\text{эфф}}$  растет, если волновые функ-

ции принадлежат представлению с  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu = 0$ , и уменьшается, если  $\lambda = 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Таким образом, ядро, вытянутое при  $L = 0$  ( $\lambda \neq 0$ ,  $\mu = 0$ ), сплющивается по мере увеличения  $L$ , а ядро, сплюснутое при  $L = 0$  ( $\lambda = 0$ ,  $\mu \neq 0$ ), вытягивается с ростом  $L$ , но одновременно и в первом, и во втором случаях уменьшается степень его несферичности.

Итак, трансляционно-инвариантная модель оболочек, использующая изотропный осцилляторный базис, предсказывает большую эффективную несферичность и эффективность неаксиальность эллипсоида инерции атомных ядер  $p$ - и  $s$ - $d$ -оболочек, причем в пределах  $SU(3)$ -группы ротационных полос степень несферичности эллипсоида инерции ядра почти не изменяется, пока орбитальный момент количества движения  $L$  мал, а при максимальных  $L$  для полосы  $(\lambda\mu)$  центробежное растяжение, которому подвергается вращающееся ядро, заметно меньше, чем при малых  $L$ , и соответственно меньше степень несферичности ядра. Этот несколько неожиданный эффект, отмеченный ранее в другой форме в работах [38—40] и названный там антирастяжением, имеет простое объяснение на основе представления о подсистеме, определяемой внутренними степенями свободы ядра — обобщенными углами Эйлера в  $(A - 1)$ -мерном пространстве.

Выше уже отмечалось, что квазимомент  $j$  — момент количества движения внутренней подсистемы относительно главных осей эллипсоида инерции — и его проекцию на одну из осей эллипсоида инерции удобно использовать для классификации компонент  $\chi_\nu$  внутренней функции, характеризующей движение подсистемы. Все состояния ядра, принадлежащие полосе  $(\lambda\mu)$ , имеют одну и ту же многокомпонентную внутреннюю функцию, а каждое из состояний представляет собой суперпозицию компонент внутренней функции, отвечающих разным значениям квазимомента и его проекции. Присутствие компонент с ненулевым квазимоментом означает, что во всех состояниях ротационной полосы имеет место внутреннее вращение. Внутреннее вращение является результатом того, что для немагических ядер построенные из одночастичных координат нуклонов однородные полиномы минимальной степени, удовлетворяющие требованиям принципа Паули, должны соответствовать отличным от нуля значениям квазимомента.

Вклад компонент с разными значениями квазимомента определяется компонентой коллективной функции. Возможные значения квазимомента зависят от индексов  $\lambda$  и  $\mu$ . Пусть, например, ротационная полоса  $(\lambda\mu)$  четно-четного ядра соответствует четному значению  $\lambda \neq 0$ , а  $\mu = 0$ . Тогда квазимомент принимает все возможные четные значения от нуля до  $\lambda$ , причем и в основном состоянии ротационной полосы ( $L = 0$ ) существенны компоненты внутренней функции с ненулевым квазимоментом. Более того, в этом

состоянии внутреннее вращение в большей мере, чем в других состояниях, способствует появлению эффективной несферичности. В самом деле, поскольку полный момент ядра равен нулю, чтобы полностью скомпенсировать угловой момент внутреннего вращения, эллипсоид инерции должен вращаться в направлении, противоположном направлению внутреннего вращения, в результате центробежные силы так вытягивают эллипсоид инерции, что его ось вытянутости оказывается в среднем перпендикулярной квазимоменту.

Гамильтониан ядра в том виде, как он записан в [13, 14], не содержит операторов углового момента собственного вращения эллипсоида инерции, но содержит операторы проекций квазимомента  $\hat{j}_\xi, \hat{j}_\eta, \hat{j}_\zeta$  и операторы проекций полного орбитального момента ядра  $L_\xi, L_\eta, L_\zeta$  на главные оси эллипсоида инерции. Операторы проекций углового момента собственного вращения эллипсоида инерции  $\hat{R}_\xi, \hat{R}_\eta, \hat{R}_\zeta$  связаны с операторами проекций квазимомента и полного углового момента простыми соотношениями:  $\hat{R}_\xi = \hat{I}_\xi - \hat{j}_\xi$ ;  $\hat{R}_\eta = \hat{I}_\eta - \hat{j}_\eta$ ;  $\hat{R}_\zeta = \hat{I}_\zeta - \hat{j}_\zeta$ . Поэтому та часть гамильтониана системы, которая в состоянии с нулевым полным угловым моментом является оператором кинетической энергии собственного вращения эллипсоида инерции, имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2m\rho^2\beta^2} \left[ \frac{1 - \beta \cos(\gamma - 2\pi/3)}{\sin^2(\gamma - 2\pi/3)} j_\xi^2 + \frac{1 - \beta \cos(\gamma + 2\pi/3)}{\sin^2(\gamma + 2\pi/3)} j_\eta^2 + \frac{1 - \beta \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} j_\zeta^2 \right].$$

В тех состояниях ротационной полосы, в которых полный угловой момент отличен от нуля, нет необходимости полностью компенсировать угловой момент внутреннего вращения и собственное вращение эллипсоида инерции замедляется. Чем больше полный угловой момент состояния ротационной полосы ( $\lambda_\mu$ ), тем медленнее вращается эллипсоид инерции. Замедление собственного вращения эллипсоида инерции несколько уменьшает эффект центробежного растяжения ядра и одновременно степень его несферичности. Однако пока полный угловой момент ядра много меньше максимального значения квазимомента внутренней функции ротационной полосы ( $\lambda_\mu$ ), это уменьшение практически не сказывается на эффективной несферичности и эффективной неаксиальности эллипсоида инерции, и только в тех состояниях, в которых полный угловой момент ядра имеет максимальное значение, оно может быть заметным. В этих состояниях в среднем полный угловой момент ядра оказывается направленным вдоль квазимомента.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод обобщенных гиперсферических функций прошел лишь первый этап своего развития. До сих пор он использовался только для исследования относительно простых систем. При этом стави-

лась задача выявить возможности метода и его преимущества перед традиционными подходами. Что же касается распространения метода на более широкий круг ядер, а также выхода за минимальное приближение, то это требует дальнейшей разработки техники расчета матричных элементов различных операторов на обобщенных гиперсферических функциях.

В заключение считаю необходимым выразить благодарность Ю. Ф. Смирнову за разъяснение ряда трудных вопросов теории представлений  $SO(A-1)$ -группы, В. С. Василевскому и В. И. Овчаренко за полезные дискуссии, а также Л. Л. Чоповскому за помощь в оформлении обзора.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bohr A., Mottelson B. «Kgl. danske vid. selskab. Math.-fys. medd.», 1953, Bd 27, N 16.
2. Nilsson S. G., «Kgl. danske vid. selskab. Math.-fys. medd.», 1955, Bd 29, N 16.
3. Abgrall Y. e.a. «Nucl. Phys. A», 1969, v. 131, p. 609; Abgrall Y., Morand V. «Nucl. Phys. A», 1972, v. 192, p. 372.
4. Harvey M. «Adv. Nucl. Phys.», 1968, v. 1, p. 67.
5. Ripka G. «Adv. Nucl. Phys.», 1968, v. 1, p. 183.
6. Peierls R. E., Yoecoz J. «Proc. Phys. Soc.», A70, 381, 1957.
7. Bohr A. «Kgl. danske vid. selskab. Math.-fys. medd.», 1952, Bd 26, N 14.
8. Bohr A. Rotational States of Atomic Nuclei. Copenhagen, 1954.
9. Tolhoek H. «Physica», 1955, v. 21, p. 1.
10. Coester F. «Phys. Rev.», 1955, v. 99, p. 170.
11. Дзюблик А. Я. и др. «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 869.
12. Filippov G., Ovcharenko V., Steshenko A. In: The Nuclear Many-Body Problem. Roma, 1972.
13. Филиппов Г. Ф. «ЭЧАЯ», 1973, т. 4, вып. 4.
14. Филиппов Г. Ф., Овчаренко В. И. В кн.: Вопросы атомной науки и техники. Сер. физика высоких энергий и атомного ядра. Вып. 4 (16). Харьков, 1975, с. 17.
15. Ашерова Р. М. и др. «Ядерная физика», 1975, т. 21, с. 1126.
16. Базь А. И. Препринт ИТФ-71-79Р. Киев, 1971.
17. Симонов Ю. А. «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 630; 1968, т. 7, с. 1210.
18. Базь А. И. и др. «ЭЧАЯ», 1972, т. 3, вып. 2.
19. Филиппов Г. Ф., Стешенко А. И. Препринт ИТФ-73-91Р. Киев, 1973.
20. Стешенко А. И. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1974, т. 38, № 8, с. 1648.
21. Филиппов Г. Ф., Стешенко А. И., Овчаренко В. И. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1973, т. 37, № 8, с. 1613.
22. Ванagas В. В., Калинаускас Р. К. «Ядерная физика», 1973, т. 18, с. 768.
23. Ванagas В. В. Лекции школы МИФИ. М., 1974.
24. Смирнов Ю. Ф. Препринт ИТФ-75-45Р. Киев, 1975.
25. Гельфанд И. М., Цейтлин М. Л. «Докл. АН СССР», 1950, т. 71, № 6, с. 1017.
26. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., «Наука», 1965.
27. Неудачин В. Г., Смирнов Ю. Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М., «Наука», 1969.
28. Филиппов Г. Ф. Препринт ИТФ-74-14Р. Киев, 1974.
29. Филиппов Г. Ф., Максименко В. Н. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1975,



- т. 39, № 3, с. 489; **Filipov G. F. e.a.** In: Problems of Vibrational Nuclei. Zagreb, 1974.
30. **Филиппов Г. Ф.** и др. Препринт ИТФ-77-50Р. Киев, 1977.
31. **Филиппов Г. Ф., Стещенко А. И., Охрименко И. П.** Препринт ИТФ-77-123Р. Киев, 1977.
32. **Harvey M.** In: Advances in Nuclear Physics. V. 1. N.Y., Plenum Press, 1968, p. 67.
33. **Ripka G.** In: Advances in Nuclear Physics. V. 1. N.Y., Plenum Press, 1968, p. 183.
34. **Смирнов Ю. Ф., Филиппов Г. Ф.** Препринт ИТФ-76-155Р. Киев, 1976.
35. **Смирнов Ю. Ф., Филиппов Г. Ф.** В кн.: Избранные вопросы структуры ядра. Т. 1, Дубна, 1976.
36. **Смирнов Ю. Ф., Филиппов Г. Ф.** «Ядерная физика», 1978, т. 27, вып. 1.
37. **Овчаренко В. И., Павленко О. П., Филиппов Г. Ф.** «Теор. и мат. физика», 1977, т. 33, с. 400.
38. **Lee H. C., Cusson R. Y.** «Phys. Rev. Lett.», 1972, v. 29, p. 1525.
39. **Morinaga H.** In: Rend. Scu. int. fis. Enrico Fermi. N.Y.—L., 1972, p. 172.
40. **Mosley C. A., Jr., Fortune H. T.** «Phys. Rev. C», 1974, v. 9, p. 775.