«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1980, ТОМ 11, ВЫП. 1

УДК 519.4

ТОЧНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

А. Н. Лезнов, М. В. Савельев

Институт физики высоких энергий, Серпухов

В обзоре дано сжатое изложение основных результатов в области точных цилиндрически-симметричных решений классических уравнений калибровочных теорий для произвольных компактных групп Ли.

The main results in the field of exact cylindrically symmetric solutions of the classical equations in gauge theories with an arbitrary simple compact Lie group are expounded compactly.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы достигнут значительный прогресс в исследовании точных решений классических уравнений калибровочных теорий, затрагивающий как общие рассмотрения и теоремы существования, так и явное построение частных решений в рамках тех или иных подстановок. Эти решения представляют собой большой интерес в связи с неоднократно высказываемыми надеждами на то, что они могут послужить основой для построения реалистической квантовой теории, они также представляют самостоятельную важную математическую проблему, в особенности для нелинейных уравнений ввиду отсутствия регулярных методов их интегрирования. Точные решения (тем более для полностью интегрируемых уравнений), безусловно, сохранят свое значение даже в том случае, если будет показана несправедливость каких-либо физических идей, лежащих в основе данной теории. Наиболее актуальной, по-видимому, в настоящее время сферой приложения этой многогранной проблемы является теория калибровочных полей Янга — Миллса. Именно на этой почве переплелись многие, на первый взгляд, не очевидно связанные проблемы и области физики и математики (теория групп и их представлений, алгебраическая и дифференциальная геометрия, топология, обратная задача рассеяния, преобразования Бэклунда и т. д.; теория поля, статистическая физика, физика твердого тела и др.). Здесь совместными усилиями физиков и математиков получены такие важные результаты, как описание общих самодуальных решений классических уравнений Янга — Миллса [1] на четырехмерной сфере для компактных классических групп Ли [2], новое понимание аномалий аксиально-векторного тока на основе теоремы об индексах Атья — Сингера [3] и др. В настоящее время опубликовано огромное количество работ, исследующих отдельные стороны задачи о точных решениях классических уравнений калибровочных теорий на основе различных математических методов. Помимо общего описания решений уравнений дуальности получен целый ряд точных решений, использующих те или иные ограничения и дополнительные симметрии (см., например, обзоры [4]). При этом чаще всего рассматривались цилиндрически-симметричные конфигурации, физическое содержание которых связывается с задачей о монополях [4—6], с меронами [4, 7] и с псевдочастичными системами, отражающими ряд основных свойств полной теории (бесконечный набор топологически неэквивалентных классических вакуумов, эффект туннелирования и другие характерные проявления топологического заряда, см., например, [4, 8]).

Обзор представляет собой компактное изложение единого метода построения точных цилиндрически-симметричных решений классических уравнений калибровочных теорий на основе теоретико-группового подхода и калибровочно-инвариантной формулировки основных объектов теории. В рамках его удается в явном виде полностью проинтегрировать систему уравнений дуальности для цилиндрически-симметричных полей и описать инстантонные и монопольные конфигурации для произвольной компактной калибровочной группы. Нам представляется разумным разделить введение на две части. В первой из них кратко опишем роль точных классических решений в калибровочных теориях и приведем некоторые основные результаты в этой области. Эти вопросы достаточно детально отражены в обзорах [9, 10] последних лет. Во второй части введения остановимся более подробно на основных определениях и результатах, непосредственно касающихся темы обзора — точных решений для цилиндрически-симметричных конфигураций.

О роли точных решений классических уравнений калибровочных теорий; некоторые основные результаты в этой области. Вопрос о роли точных решений классических уравнений Янга — Миллса в значительной степени связан с проблемами квантования калибровочных теорий. В настоящее время, по-видимому, общепринятой является точка зрения, согласно которой неабелевы калибровочные теории имеют непосредственное отношение к правильному описанию взаимодействий элементарных частиц. Несмотря на перенормируемость таких теорий со спонтанно нарушенной симметрией использование методов теории возмущений в физике сильновзаимодействующих частиц представляется вряд ли оправданным, поскольку при этом предполагается аналитичность матричных элементов при нулевом значении постоянной связи. Была выдвинута альтернативная точка зрения (см., например, [11, 12]), заключающаяся в предположении о неаналитическом характере зависимости этих теорий от постоянной взаимодействия. Реализация этой программы основывается на предположении, что основные черты квантовой теории достаточно полно описываются путем учета квантовых флуктуаций вблизи определенных классических траекторий, возникающих из точных решений нелинейных дифференциальных уравнений для классических полей. При этом необходимость использования точных решений обычно связывается с тем, что основные физические эффекты (например, туннелирование), заложенные в самой природе нелинейности, как правило, не воспроизводятся приближенными методами. К точным решениям классических уравнений калибровочных теорий в присутствии полей Хиггса приводит также задача описания монопольных конфигураций, т. е. статических решений с конечной энергией (см., например, [5]). Эти решения на больших расстояниях реализуют модель монополя Дирака, тогда как на малых расстояниях решения модифицируются таким образом, что обеспечивают конечность энергии. Кроме того, в той же связи следует упомянуть и многомеронные системы (см., например, [7]).

Перечислим некоторые основные достижения и подходы в исследовании точных решений классических уравнений Янга — Миллса. Начнем с тех из них, которые не связаны с упрощениями (или ограничениями), обусловленными наличием дополнительной инвариантности относительно какой-либо подгруппы группы симметрии системы.

Все известные к настоящему времени нетривиальные решения классических уравнений калибровочных теорий в евклидовом пространстве R_4, отвечающие конечному действию, являются самодуальными (или антисамодуальными) и называются согласно принятой терминологии инстантонами (антиинстантонами). Эти решения обеспечивают минимум евклидова действия поля Янга — Миллса при фиксированном значении топологического заряда. (Более точные определения этих величин будут даны в дальнейшем.) Первый простейший пример одноинстантонного решения для группы SU (2) получен в работе [13]. Затем были построены самодуальные решения с произвольным целым значением (k) топологического заряда, описываемые $5k + 4$ независимыми параметрами, в рамках градиентной подстановки [14, 15] для SU (2)-

калибровочных полей [16, 17]. Отметим, что этой подстановкой классические уравнения Янга — Миллса сводятся к уравнению для скалярной φ^4-теории [17, 18] (с точностью до множества сингулярных точек поля φ) и для дуального подкласса — к уравнению Лапласа. Для изучения таких решений использовались различные формулировки, в том числе спинорная, пятимерный формализм и др. (см., например, [19]).

На основе теоремы об индексах и в рамках метода инфинитезимальных деформаций [20, 21] доказано, что наиболее общее самодуальное решение для группы SU (2) в R_4 характеризуется $8k - 3$ независимыми параметрами (или степенями свободы). Этот результат обобщен для произвольной компактной простой группы в [22].

Последующие исследования были направлены на поиски подстановки, описывающей общие ($8k - 3$)-параметрические самодуальные решения в R_4 на основе подходов Янга, Ву — Янга, Атьи — Уорда, Белавина — Захарова и др. [23—27], использующих те или иные математические схемы. В частности, в [25] методами алгебраической геометрии эта задача сведена к иерархии A_l, $l = 1, 2, \ldots$, подстановок, каждая из которых связана с компонентами безмассовых самодуальных линейных полей спина $l - 1$, а в [26] уравнения дуальности рассматривались как условия совместности двух линейных уравнений в рамках обратной задачи рассеяния. Окончательное математическое решение проблема описания всех инстантонов для произвольной компактной классической группы Ли получила в работах Атьи — Дринфельда — Манина — Хитчина [2] (см. также последующие ссылки [28—30]). Их конструкция заключается в сведении нелинейных дифференциальных уравнений дуальности в частных производных к нелинейному уравнению для конечномерной матрицы и приводит к изящной компактной подстановке для всех инстантонов. Следует, однако, отметить, что для многих конкретных физических приложений инстантонов соответствующие решения было бы желательно иметь в такой форме, которая допускала бы наглядную физическую интерпретацию параметров как степеней свободы системы псевдочастиц. До настоящего времени решения в такой форме для полного числа параметров известны лишь для группы SU (2) при $k \leqslant 3$.

Вопрос о том, исчерпывается ли инстантонами полный набор решений (без ограничения условием дуальности) уравнений Янга — Миллса в R_4, отвечающих конечному действию, остается открытым. Отметим в этой связи работу [31], в которой дается новая формулировка (в твисторном пространстве) уравнений поля в пространствах Минковского и R_4 на основе результатов [26].

С использованием результатов [2] получены компактные выражения для пропагатора бесспинового поля, принадлежащего фундаментальному векторному представлению калибровочной группы, и решений безмассового уравнения Дирака [32]. Вычислены тензорное произведение инстантонов и их функций Грина в рамках матричного формализма [33] и на основе описания инстантонов как полей над одноточечным суперпространством [34].

Исследование уравнений Янга — Миллса без ограничения дуальности представляет значительный интерес, даже если отвлечься от вопроса о роли решений с бесконечным действием (меронов и других нерегулярных решений) в квантовой теории калибровочных полей, в том числе в проблеме запирания кварков (см., например, [35]), и принять предположение об отсутствии регулярных (всюду в R_4) решений помимо самодуальных. Изучение групповой структуры этих уравнений в R_4 позволило бы прояснить симметрийную основу самих самодуальных решений и природу условия дуальности. Дело в том, что, исходя из них, можно обнаружить скачкообразное повышение симметрии в «точке» дуальности (см. разд. 2) и попытаться сформулировать условие дуальности как критическую «точку» такого скачка в симметрии решений.

Цилиндрически-симметричные конфигурации калибровочных полей. Введем вначале основные определения и обозначения из теории калибровочных полей, необходимые для дальнейшего.

Поле Янга — Миллса над евклидовым пространством R_4 с компактной простой калибровочной группой Ли G ранга r задается потенциалами $A_\mu(x)$, $1 \leqslant \mu \leqslant 4$, принимающими значения в алгебре $\mathfrak{g}$ группы $G\,[A_\mu(x) = e\sum_a A_\mu^a(x)\,\tau^a,\ \tau^a \in \mathfrak{g}]$ и являющимися дифференцируемыми функциями $x \in R_4$; e — постоянная связи. Поле $A'_\mu(x)$ называется калибровочно-эквивалентным полю $A_\mu(x)$, если существует такая дифференцируемая функция $g(x)$ со значениями в G, что $A'_\mu = g^{-1}(\partial_\mu + A_\mu)g$. Тензор поля $F_{\mu\nu}(\equiv e\sum_a F_{\mu\nu}^a\tau^a)$ определяется формулой $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} + [A_\mu, A_\nu]$, $A_{\mu,\nu} \equiv \partial A_\mu/\partial x_\nu$. Из требования стационарности евклидова действия $\mathscr{S} = -\frac{1}{2e^2}\int d^4x \mathrm{Sp} F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}$ вытекают уравнения движения $F_{\mu\nu,\mu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0$. Нетрудно убедиться, используя тождество Бьянки, что эти уравнения выполняются, если поле самодуально или антисамодуально, т. е. $\pm F_{\mu\nu} = {}^*F_{\mu\nu}\,(\equiv(^1/_2)\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}F_{\rho\tau})$. Здесь $\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}$ — полностью антисимметричный по всем индексам тензор, $\varepsilon_{1234} \equiv 1$. Инстантонным является самодуальное поле $A_\mu(x)$, регулярное во всех точках $x \in R_4$ (включая бесконечность). Оно отвечает конечным значениям действия $\mathscr{S}$, которое пропорционально в этом случае топологической характеристике — заряду $Q = \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x \mathrm{Sp}\, {}^*F_{\mu\nu}\cdot F_{\mu\nu}$, принимающему целые значения. (Подробное обсуждение вопроса целочисленности дано в обзорах [8].)

Антиинстантоны получаются из инстантонов заменой ориентации пространства.

Теория Янга — Миллса обладает важным свойством инвариантности относительно конформной группы координатных преобразований, содержащих, помимо трансляций $x_\mu \xrightarrow[P]{} x_\mu + a_\mu$ и 4-мерных вращений $x_\mu \xrightarrow[M]{} O_\mu^\nu \cdot x_\nu$, также масштабные $x_\mu \xrightarrow[D]{} \lambda^\varepsilon x_\mu$ и специальные конформные преобразования $x_\mu \xrightarrow[K]{} \frac{x_\mu + c_\mu x^2}{1 + 2(cx) + c^2 x^2}$. Совокупность пятнадцати генераторов $\{P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu\}$ образует алгебру конформной группы, изоморфную $O(5, 1)$ в R_4. При инфинитезимальных преобразованиях $\delta x_\mu = X_\mu (x)$ $(\equiv a_\mu + \omega_\mu^\nu x_\nu + \varepsilon x_\mu - c_\mu x^2, \omega^{\mu\nu} \equiv -\omega^{\nu\mu})$ калибровочное поле преобразуется по формуле $\delta A_\mu = X^\nu A_{\mu, \nu} + (X^\nu A_\nu)_{,\mu}$. Полная группа симметрии теории определяется прямым произведением конформной и калибровочной групп. При этом, однако, группа Лоренца [или $O(4)$ в R_4] может содержаться в прямом произведении несколькими, вообще говоря, неизоморфными способами. С физической точки зрения последнее означает неоднозначность характера трансформационных свойств величин, входящих в теорию, по отношению к преобразованиям из группы Лоренца, чем, в частности, обусловлена возможность существования различных типов решений, полностью симметричных относительно этой группы.

Наличие группы симметрии классических уравнений Янга — Миллса позволяет классифицировать их решения по неприводимым представлениям соответствующей группы. Естественно, при этом наиболее простыми свойствами обладают решения, симметричные по отношению к преобразованиям из некоторой подгруппы. Как уже отмечалось, многочисленные исследования, связанные с анализом квантовой теории калибровочных полей, основываются на редукции полного числа степеней свободы физической системы к инвариантным относительно некоторой подгруппы конформной группы. При этом возникают квантовые системы, существенно более простые, чем полная теория Янга — Миллса, и в то же время сохраняющие ряд ее существенных свойств. Даже очень упрощенная схема, в которой присутствуют только $O(4)$-инвариантные степени свободы, приводит к квантовой модели, содержащей такие черты полной теории, как классическое вырождение, вакуумное туннелирование и спектр связанных состояний ангармонического осциллятора [4]. Значительно более богаты по своему физическому содержанию подходы, основанные на цилиндрической симметрии в R_4 и сферической симметрии в пространстве Минковского. Однако прежде чем перейти к их описанию, введем необходимые для дальнейшего определения диагональной группы $\mathscr{L}$ и группы калибровочных преобразований двумерного пространства S (или подгруппы инвариантности).

Выделим в алгебре $\mathfrak{g}$ калибровочной группы G совокупность операторов T_i, удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры su (2) и построим операторы $L_i \equiv T_i + M_i$, где M_i — генераторы пространственных вращений (включая, если надо, спин); $M_i = -i\varepsilon_{ijk}x_j\partial/\partial x_k +$ (спин. часть); $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{x} = (\mathbf{x}/r)\,\partial/\partial r + (1/r^2)\,\mathbf{x} \times \mathbf{x} \times \nabla$. Операторы M_i образуют алгебру su (2) и перестановочны с T_j. Тогда операторы L_i перепутывают внутренние и пространственные индексы и являются генераторами так называемой диагональной ($\mathcal{L}$) групповой алгебры su (2). Решения уравнений будем называть цилиндрически-симметричными, если они аннигилируются операторами L_i, т. е. являются синглетами относительно группы $\mathcal{L}$ (т. е. соответствующие калибровочные поля преобразуются как скаляры A_0 или векторы $\mathbf{A}$ относительно преобразований из $\mathcal{L}$, а структурные функции, параметризующие поля A_μ, зависят лишь от $r \equiv \sqrt{\mathbf{x}^2}$ и t). При этом сферически-симметричные решения не зависят от времени. (Более общие определения таких систем см., например, в [36, 37].) Рассмотрим теперь векторное пространство алгебры $\mathfrak{g}$, натянутое на инвариантные относительно $\mathcal{L}$ элементы (т. е. перестановочные с L_i), зависящие от точки $\mathbf{x}$ 3-мерного подпространства пространства R_4 и преобразующие цилиндрически-симметричные конфигурации снова в цилиндрически-симметричные. Эти элементы образуют подалгебру алгебры калибровочной группы G, генерирующую группу S калибровочных преобразований 2-мерного пространства $(r,\ t)$ в цилиндрически-симметричном случае. Основное упрощение, возникающее при рассмотрении цилиндрически-симметричных систем, заключается в том, что структура калибровочной группы 2-мерного пространства значительно проще, чем у исходной группы G. Помимо этого, в 2-мерном пространстве каждому индексу калибровочной группы отвечает лишь один компонент тензора поля.

Естественно, что в тех случаях, когда трансформационные свойства системы жестко фиксированы по отношению к преобразованиям (M_i) 3-мерной группы вращений, цилиндрически-симметричные решения единственные. В калибровочных теориях трансформационные свойства по отношению к пространственным вращениям благодаря наличию дополнительных к SU (2) преобразований из G можно задать различными способами. При этом количество различных возможностей в точности равно числу неэквивалентных вложений подгруппы SU (2), генерируемой операторами T_i, в калибровочную группу G, и каждому такому вложению отвечает своя подгруппа инвариантности S. Наиболее простым является случай, когда группа S распадается в прямое произведение U (1)-подгрупп, количество которых в точности равно рангу исходной калибровочной группы G. Этот случай будет подробно нами исследован.

Следует отметить, что задача разложения алгебр $\mathfrak{g}$ простых групп Ли G по неприводимым представлениям некоторой подалгебры $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ часто встречается в физических приложениях. В частности, в физике ядра, физике элементарных частиц, калибровочных теориях поля и т. п. роль такой подалгебры $\mathfrak{g}_0$ играет su (2) (угловой момент, изотопический спин и т. п.) и возникает необходимость классификации генераторов $\mathfrak{g}$ по неприводимым представлениям su (2). В математическом плане проблема вложения полупростой подалгебры $\mathfrak{g}_0$ в простую алгебру $\mathfrak{g}$ решена в работах [38] (см. также [39]). Более подробно мы вернемся к этому вопросу в разд. 1.

После того как было установлено существование несингулярных магнитных монополей в SO (3)-калибровочной теории [40, 41], были проведены многочисленные исследования, касающиеся обобщения этого результата на более широкие калибровочные группы и нахождения специальных частных решений, описывающих сферически-симметричные монопольные конфигурации для некоторых унитарных групп. Изложение основных результатов в этой области вплоть до конца 1977 г. содержится в обзорах [5, 6].

Общие вопросы описания сферически-симметричных конфигураций и установления условий существования экстремалей, отвечающих решениям с конечной энергией, для произвольных типов вложений SU (2) в G подробно рассмотрены в [42, 43]. Ввиду того что темой настоящего обзора является конструктивная часть обсуждаемой проблемы, мы на этом не будем останавливаться и перечислим кратко основные результаты, касающиеся явных решений для цилиндрически (сферически)-симметричных конфигураций.

В случае группы SU (2) в рамках цилиндрически-симметричной подстановки для полей Янга — Миллса в R_4, сводящей систему уравнений самодуальности к уравнению Лиувилля для калибровочно-инвариантной относительно $S \equiv U$ (1) функции, получены общие решения для произвольного числа (k) инстантонов, описываемые $2k$ параметрами [44] (см. также [45]). В [46] на основе той же подстановки в явном виде построена система классических уравнений Янга — Миллса и проведено исследование ее симметрийных свойств, что позволило существенно упростить эти уравнения (и выражения для плотностей топологического заряда и действия), сформулировав их через две калибровочно-инвариантные величины. Возникающие при этом уравнения в качестве частного случая содержат самодуальный [44] и меронный [47] подклассы. Показано также, что при наличии дополнительной O (2)-симметрии решения Виттена суть матричные элементы $t^{4,k}/_{00}$ представления класса 1 группы Лоренца, и в явном виде построены повышающий и понижающий топологический заряд операторы [46].

Дальнейшие исследования конструктивного характера в этом направлении связаны с построением точных цилиндрически (сферически)-симметричных решений классических уравнений для компактных калибровочных групп. В [48] в явном виде построены уравнения, описывающие цилиндрически-симметричные конфигурации калибровочных полей Янга — Миллса для вложения SU (2) в произвольную компактную полупростую группу G ранга r, при котором подгруппа инвариантности $S = \prod_{1}^{r} \otimes U(1)$. При этом окончательные уравнения и выражения для плотностей действия и топологического заряда удается записать *только* через $2r$ калибровочно-инвариантные относительно S величины, причем вся зависимость уравнений от групповой структуры *полностью* сосредоточена в матрице Картана соответствующей алгебры. Для подкласса самодуальных полей возникает система r уравнений, естественным образом обобщающая уравнение Лиувилля, описывающее в частном случае группы SU (2) самодуальные конфигурации, на произвольную компактную калибровочную группу. Развитая схема допускает также включение поля Хиггса, преобразующегося по присоединенному представлению G. Далее после весьма специальных, но очень полезных и поучительных для дальнейшего теоретических экспериментов с группами SU (3) и O (5) [49] удалось найти в явном виде общие решения уравнений дуальности для групп второго ранга (SU (3), Sp (4) $\cong$ O (5) и G_2) [50], зависящие от одной переменной $z + \bar{z}$ (или $z\bar{z}$), $2z \equiv r + it$, выделить инстантонные конфигурации, отвечающие конечным значениям действия, и вычислить топологические заряды для этих групп. Это послужило основой обобщения перечисленных результатов на случай произвольных компактных простых групп Ли, для которых в рамках корневой техники построены [51] *общие* $2r$-параметрические решения системы уравнений самодуальности типа Лиувилля, зависящие от одной переменной. Реализация граничных условий на бесконечности и при малых расстояниях, обеспечивающих конечность действия полей Янга — Миллса, позволила описать инстантонные конфигурации и вычислить топологический заряд, зависящий от r дополнительных «квантовых» чисел, по которым его значения вырождаются. Это приводит к существованию дискретных серий решений с фиксированным значением заряда. Аналогичные рассмотрения проведены и для монопольных сферически-симметричных систем [52], для которых также удалось выделить подкласс решений, отвечающих конечной энергии, параметризующихся r квантовыми числами, и в явном виде найти матрицы магнитного заряда и масс монополей. При этом существенным образом использовалась симметрия определенного рода между цилиндрически-симметричными самодуальными статическими конфигурациями полей Янга — Миллса в R_4 и сферически-симметричными монополями в пространстве Минковского (с полем Хиггса в присоединенном представлении соответствующей калибровочной группы) в пределе Богомольного, Прасада, Зоммерфельда (БПЗ) [53, 54].

Отметим, что аналогичные исследования проведены в цикле работ Байса, Велдона и Вилкинсона [55, 56]. В них на основе чисто расчетных методов, не прибегая к корневой технике, для унитарной группы $SU(n+1)$ получены частные цилиндрически-симметричные инстантонные решения [55], отвечающие выбору $m_1 = 2$, $m_\alpha = 1$, $2 \leqslant \alpha \leqslant n$, в общих решениях (см. разд. 4) и общие r-параметрические сферически-симметричные монопольные решения [56], совпадающие с (68) (см. разд. 3) для унитарной группы.

Все полученные ранее точные решения для цилиндрически-симметричных инстантонов и сферически-симметричных монополей возникают естественным образом как частные случаи нашей общей схемы. Единственное исключение составляют некоторые точечно-подобные решения для унитарных групп, отвечающие другим типам вложений $SU(2)$ в G (см., например, [57]). Проблема построения явного вида общих решений для всех типов вложений этой части обзора не рассматривается.

Наконец, в [58] построены общие решения системы r уравнений в частных производных второго порядка для цилиндрически-симметричных самодуальных систем, зависящие от $2r$ произвольных функций. Тем самым доказано, что система уравнений самодуальности типа Лиувилля является полностью интегрируемой для произвольной компактной калибровочной группы G ранга r.

Приведем план содержания настоящего обзора, посвященного изложению основных результатов работ [48, 50—52, 58, 59].

В разд. 1 дано построение математического базиса для параметризации цилиндрически-симметричных калибровочных полей на основе явной реализации алгебры $\mathfrak{g}$ калибровочной группы G. При этом операторы $F_m^{l s}$ алгебры $\mathfrak{g}$ классифицируются по неприводимым представлениям ее $su(2)$-подалгебры и нумеруются индексами углового момента l, его проекции m и кратности вхождения s. Подробно рассмотрено некоторое универсальное для всех простых алгебр Ли вложение, называемое минимальным, при котором число мультиплетов F_m^l по $su(2)$ равно рангу $\mathfrak{g}$. Именно на этом вложении, отвечающем абелевой подгруппе инвариантности $S = \prod_1^r \otimes U(1)$, базируются все наши дальнейшие построения. Основные характеристики минимального вложения приведены в табл. 2.

Разд. 2 посвящен явному построению классических уравнений для цилиндрически-симметричных конфигураций калибровочных полей в евклидовом пространстве в рамках минимального вложения $SU(2)$ в произвольную компактную группу G. Дана *общая* параметризация полей Янга — Миллса с помощью генераторов калибровочной группы S двумерного пространства и исследуются трансформационные свойства структурных функций относительно преобразований из ее группы симметрии, которая изоморфна прямому произведению группы S и подгруппы $O\,(1,\,2)$ конформной группы. Для выделения несмешанных комбинаций вкладов различных l-мультиплетов в параметризации калибровочного поля проводится переход к диагональному представлению генераторов группы S. На основе свойств структурных функций, параметризующих поля в диагональном представлении, относительно действия генераторов группы S, построены $2r$ калибровочно-инвариантных (по S) величин.

В явном виде получены общие уравнения движения и выражения для действия калибровочных полей и топологического заряда. Эти основные объекты теории сформулированы как в неинвариантном виде через $4r$ структурных функций, так и через $2r$ калибровочно-инвариантные величины с использованием уравнений движения. При этом *вся* информация о свойствах калибровочной группы G сосредоточена полностью в соответствующей матрице Картана. Уравнения поля допускают очевидный переход к гиперболическому типу путем замены вещественных (в случае R_4) временных компонент на мнимые. На основе полученных уравнений вычислен спектр точечноподобных решений. Выделен самодуальный (антисамодуальный) подкласс общих уравнений, который представляет собой условия аналитичности Коши — Римана для r комплексных скалярных полей l_α и r алгебраических уравнений взаимосвязи $2r$ калибровочно-инвариантных (относительно S) величин. При этом последние уравнения сводятся к системе r зацепленных уравнений типа Лиувилля

$$\partial^2\rho_\alpha/\partial z\,\partial\bar{z}=\sum_{\beta=1}^{r}\delta_\beta\cdot k_{\alpha\beta}\exp\rho_\beta,\qquad \delta_\alpha\equiv 2\sum_{\gamma}k^{-1}_{\alpha\gamma},$$

где k — матрица Картана группы G; $2z=r+it$, естественным образом обобщая известный результат Виттена [44] для группы $SU\,(2)$. Получено удобное для конкретных вычислений выражение для топологического заряда инстантонных конфигураций в виде суммы вкладов топологических зарядов r двумерных абелевых калибровочных полей. Приведен подкласс общих уравнений, описывающий многомеронные системы. Показано, как включить в рассматриваемую схему поле Хиггса, преобразующееся по присоединенному представлению калибровочной группы, и описать сферически-симметричные монопольные конфигурации в пространстве Минковского. В общепринятых обозначениях для $2r$ структурных функций, параметризующих векторную часть потенциала поля Янга — Миллса W ($W_0=0$) и поля Хиггса φ, построен энергетический функционал и уравнения движения. Обсуждается также взаимосвязь условия дуальности в R_4 и предела БПЗ [53, 54] в пространстве Минковского.

В разд. 3 построены общие решения системы уравнений

$$\partial^2\rho_\alpha/\partial z\,\partial\bar{z} = \sum_\beta \delta_\beta \cdot k_{\alpha\beta} \exp \rho_\beta.$$

Исследованы симметрийные свойства этой системы и предложена редукционная схема, позволяющая свести задачу построения решений к дифференциальному уравнению в частных производных порядка $2r$ для одной неизвестной функции. На основе инвариантной корневой техники построены общие решения рассматриваемой системы, зависящие от $2r$ произвольных функций. Приведен $2r$-параметрический подкласс общих решений системы, зависящих от одной переменной $z\bar{z}$ (или $z+\bar{z}$) и используемых в дальнейшем при описании инстантонных и монопольных конфигураций.

Разд. 4 содержит классификацию инстантонных и монопольных решений и вычисление соответствующих значений топологического заряда инстантонов и матриц магнитного заряда и масс монополей.

Авторы выражают благодарность Б. А. Арбузову, П. Годдарду, Р. Джекиву, А. А. Кириллову, Р. Крютеру, Ю. И. Манину, В. И. Манько, М. А. Мествиришвили, С. П. Новикову, Д. И. Оливу, И. А. Федосееву, А. Т. Филиппову и О. А. Хрусталеву за полезные обсуждения математических и физических вопросов, затронутых в обзоре.

1. ВЛОЖЕНИЯ ТРЕХЧЛЕННОЙ ПОДАЛГЕБРЫ В ПРОИЗВОЛЬНУЮ ПРОСТУЮ АЛГЕБРУ ЛИ; МИНИМАЛЬНОЕ ВЛОЖЕНИЕ

В случае цилиндрической симметрии задача полной классификации генераторов алгебры простой группы Ли G по неприводимым представлениям группы $SU(2)$ решается на основе описания всех неэквивалентных вложений $SU(2)$ в G. Каждое вложение в свою очередь определяется заданием вектора вложения, компоненты которого очевидным образом выражаются через коэффициенты разложения картановского элемента соответствующей $su(2)$ подалгебры (диагональной группы) по образующим подалгебры Картана группы G [38, 60]. Среди всех возможных вложений $SU(2)$ в G существует такое универсальное для всех простых групп вложение, при котором число возникающих мультиплетов по $SU(2)$ в точности равно рангу G, что автоматически приводит к $S = \underbrace{U(1) \otimes U(1) \otimes \ldots \otimes U(1)}_{r}$ — калибровочной группе 2-мерного пространства. Это вложение было впервые описано в работе [38] (см. также [39]) и реализовано в явном виде в [59]. Его мы будем называть минимальным, имея в виду, что число мультиплетов при других способах вложения SU (2) в G всегда больше ранга G. (Имеются и другие названия этого вложения, как-то: максимальное, главное и т. п. в зависимости от тех или иных его характеристик, принятых за основу. Нам представляется предпочтительным термин «минимальное».) Помимо этого, данное вложение выделено еще и тем, что оно наиболее близко к SU, (2)-случаю. Уравнение Лиувилля, реализующее условие дуальности для группы $SU(2)$ [44], при этом обобщается для произвольной компактной группы G на систему уравнений типа Лиувилля, являющуюся полностью интегрируемой (см. разд. 3). В рамках минимального вложения генераторы F^l_m алгебры $\mathfrak{g}$ нумеруются парой индексов l и m углового момента, где l — значения момента [индекс неприводимого представления SU (2)], спектр которого фиксирован для каждой простой алгебры Ли, а $m \in [-l, l]$ — проекция углового момента (индекс базисного вектора) внутри данного мультиплета. Полное число генераторов $\mathfrak{g}$, таким образом, равно $\sum\limits_{\alpha=1}^{r} c_\alpha$ $(2l_\alpha + 1)$, где c_α — кратность мультиплета l_α в алгебре $\mathfrak{g}$, причем $c_\alpha >$ > 1 $(=2)$ лишь для алгебр D_n при четных n.

Проиллюстрируем вышесказанное на примере групп второго ранга: $SU(3)$, $O(5) \cong$ $\cong \mathrm{Sp}$ (4) и G_2 в виде табл. 1.

Таблица 1

G	$SU(3)$	$O(5) \cong \mathrm{Sp}(4)$	G_2
Размерность $\Sigma\,(2l_\alpha + 1)$	$8=3+5$	$10=3+7$	$14=$ $=3+11$
l_1, l_2	1, 2	1, 3	1, 5

Обычно для параметризации генераторов $\mathfrak{g}$ используют либо корневую технику, применимую для всех простых алгебр Ли, однако довольно громоздкую при конкретных расчетах и недостаточно распространенную в физической литературе, либо тензорные обозначения, применимость которых ограничена классическими алгебрами. Рассматриваемая нами классификация генераторов простой алгебры $\mathfrak{g}$ занимает в некотором смысле промежуточное положение, так как в ее рамках общность методов корневой техники дополняется наглядностью мультиплетной структуры, привычной и удобной для физиков.

Прежде чем перейти к явной реализации алгебр для минимального вложения, приведем необходимые для дальнейшего обозначения и определения (все дополнительные сведения из теории простых алгебр и групп Ли содержатся, например, в монографиях [61]; мы будем следовать обозначениям, принятым у Бурбаки): G — произвольная простая группа Ли ранга r размерности ζ; $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G; $\mathfrak{h}$ — картановская подалгебра $\mathfrak{g}$; R —

система корней $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{q}$, число которых равно $\zeta - r$; $X_{\pm i}$ — элементы корневого пространства i-го корня, $i \in R$; h_α — образующие $\mathfrak{q}$, отвечающие простым корням π_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$; k — матрица Картана $\mathfrak{g}$ с элементами $k_{\alpha\beta}$, осуществляющая полную идентификацию $\mathfrak{g}$ (с точностью до изоморфизма); ω_ν — фундаментальные веса $\mathfrak{g}$, $\omega_\nu \equiv (k^{-1}\pi)_\nu$.

Приведем явный вид матриц Картана для групп второго ранга:

$$k_{SU(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad k_{O(5)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$k_{\mathrm{Sp}(4)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \quad k_{G_2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

В базисе Картана — Вейля элементы $X_{\pm i}$ и h_α удовлетворяют соотношениям:

$$[X_i, X_j]_- = \begin{cases} N_{ij}X_{i+j}, & i+j \in R, \quad [h_\alpha, h_\beta]_- = 0; \\ 0, \ i+j \neq 0, \ i+j \notin R, & \\ h_i, \ i+j = 0, & \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} [h_\alpha, X_{\pm j}]_- = \pm j(h_\alpha) X_{\pm j},$$

причем для компактных корней $X_i^\dagger = X_{-i}$, $h_\alpha^\dagger = h_\alpha$, где $\dagger$ (*) — символ эрмитова (комплексного) сопряжения (T — транспонирование). Элементы $X_{\pm i}$ и h_α, образующие полный набор, можно нормировать соотношениями $\mathrm{Sp}\, X_i X_j = \delta_{i+j,\,0}$, $\mathrm{Sp}\, h_\alpha h_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, $\mathrm{Sp}\, X_i h_\alpha = 0$.

Каждый положительный (или отрицательный) корень α_i представим в виде линейной комбинации простых корней; $\alpha_i = \sum_{\nu=1}^{r} t_i^\nu \pi_\nu$ с целочисленными коэффициентами t_i^γ. Величина $\sum_\gamma t_i^\gamma$ называется высотой корня α_i; каждый простой корень π_ν встречается в системе R_+ положительных корней $2\sum_\alpha k_{\alpha\gamma}^{-1}$ раз. Высота фундаментального веса ω_ν равна $\sum_\alpha k_{\nu\alpha}^{-1} \equiv (1/2)\, \delta_\nu$. Каждому простому корню π_ν (или фундаментальному весу ω_ν) алгебры $\mathfrak{g}$ можно сопоставить переменную y_ν и определить $\alpha_i(y)$ выражением $\alpha_i(y) = \sum t_i^\nu y_\nu$, где набор t_i^ν отвечает разложению корня α_i.

Перейдем теперь к явной реализации алгебры $\mathfrak{g}$ для определенного выше минимального вложения. Для этого рассмотрим элемент $H^{(1)} = \sum_\alpha H_\alpha^1 h_\alpha$ из $\mathfrak{q}$ (смысл верхнего индекса будет ясен из дальнейшего), принимающий единичное значение на всех простых корнях $\mathfrak{g}$, т. е.

$$[H^{(1)}, X_{\pm\alpha}]_- = \pm X_{\pm\alpha}, \quad \sum_\beta k_{\alpha\beta} H_\beta^1 = 1 \forall 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{1}$$

откуда ввиду невырожденности матрицы Картана получаем $H^1_\alpha = \sum\limits_\alpha k^{-1}_{\beta\alpha}$. Для всех простых алгебр $H^1_\alpha > 0$, что позволяет ввести элементы $Z_\pm = \sum\limits_\alpha (H^1_\alpha)^{1/2} X_{\pm\alpha}$ трехчленной алгебры $su(2)$, в которой $H^{(1)}$ играет роль картановской образующей. (Операторы $Z_\pm$ и $H^{(1)}$ в дальнейшем будут использованы в качестве генераторов T_i, входящих в диагональную группу, определенную во введении.) Отсюда с учетом соотношения $[X_\alpha, X_{-\beta}]_- = 2\delta_{\alpha\beta}h_\alpha$ имеем $[H^{(1)}, Z_\pm]_- = \pm Z_\pm$, $[Z_+, Z_-]_- = 2H^{(1)}$. По отношению к алгебре $su(2)$, $\{Z_\pm, H^{(1)}\}$, генераторы $\mathfrak{g}$ разбиваются в систему мультиплетов, строение которой можно изучить с учетом очевидного в силу (1) соотношения

$$[H^{(1)}, X_{\pm i}]_- = \pm m(i) X_{\pm i}, \tag{2}$$

где $m(i)$ — порядок i-го корня, т. е. число простых корней (с учетом кратности), из которых данный корень составлен. Таким образом, всем корням $\mathfrak{g}$ одного порядка отвечает одно и то же квантовое число m (базисный индекс), а их определенные линейные комбинации принадлежат различным мультиплетам. Индекс максимального мультиплета совпадает с порядком максимального корня алгебры.

Для полного восстановления мультиплета достаточно знания хотя бы одного его члена, все остальные можно найти с помощью повышающих и понижающих операторов $Z_\pm$. Обозначим элемент l-го мультиплета с нулевым базисным индексом через $H^{(l)} = \sum\limits_\alpha H^{(l)}_\alpha h_\alpha$. Оператор Казимира $su(2)$ должен принимать на этом элементе значение $l(l+1)$, т. е.

$$[Z_+[Z_-, H^{(l)}]_-]_- = l(l+1) H^{(l)} \quad \text{или} \quad 2\sum_\alpha k_{\beta\alpha} H^1_\beta H^l_\alpha = l(l+1) H^l_\beta. \tag{3}$$

Таким образом, мультиплетная структура вложения полностью определяется собственными значениями $l(l+1)$ матрицы P, $P_{\alpha\beta} \equiv \delta_\alpha k_{\alpha\beta}$, $\delta_\alpha \equiv 2H^1_\alpha$, входящей в формулу (3), причем l совпадают с показателями соответствующей алгебры [61]. Матрица P является, вообще говоря, несимметричной, и ее собственные векторы можно нормировать с помощью матрицы W такой, что $WP = P^T W$. Матрица W для всех простых алгебр диагональна. Для алгебр $\mathfrak{g}$ с симметричной матрицей Картана (A_n, D_n, $E_{6,7,8}$) диагональные элементы $\varkappa_\alpha$ матрицы W равны $c\delta^{-1}_\alpha$, где c — произвольная постоянная. Отметим, что среди решений системы (3) кратные собственные значения появляются лишь при четных n для алгебр D_n. Собственные векторы H^l_α матрицы P удобно нормировать соотношением $\sum\limits_\alpha H^l_\alpha \varkappa_\alpha H^{l'}_\alpha = [l(l+1)]^{-2}\delta_{ll'}$. Векторы ортонормированного базиса определяются выражением $\widetilde{H}^l_\alpha = \varkappa^{1/2}_\alpha \times$

$\times l(l+1)H^l_\alpha$, причем имеет место соотношение $k_{\alpha\beta} = \delta^{-1}_\alpha \times \times\left(\frac{\varkappa_\alpha}{\varkappa_\beta}\right)^{-1/2}\sum_l l\,(l+1)\,\widetilde{H}^l_\alpha\widetilde{H}^l_\beta$. Остальные генераторы l-го мультиплета получаются из $H^{(l)}$ применением повышающих и понижающих операторов:

$$F^l_{\pm m} = \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}[Z_\pm\,[Z_\pm\,\ldots\,[Z_\pm,\,H^{(l)}]\,\ldots]],\quad F^l_0 \equiv H^{(l)}. \tag{4}$$

Коммутационные соотношения в базисе (4) имеют вид

$$[F^{l_1}_m,\,F^{l_2}_n] = \sum_L a\,(l_1,\,l_2,\,L)\,c\,(l_1,\,l_2,\,L;\;m,\,n)\,F^L_{m+n}, \tag{5}$$

где $c\,(l_1,\,l_2,\,L;\,m,\,n)$ — коэффициенты Клебша — Гордона группы $SU\,(2)$; $a\,(l_1,\,l_2,\,L)$ — набор структурных постоянных, независящих от индексов m базисных векторов; суммирование в формуле (5) распространяется на весь мультиплетный спектр $\mathfrak{g}$.

Для нахождения явных выражений $a\,(l_1,\,l_2,\,L)$ примем в (5) $m=1$ и $n=0$:

$$[F^{l_1}_1,\,F^{l_2}_0]_- = \frac{1}{\sqrt{l_1(l_1+1)}}\,[[Z_+,\,H^{(l_1)}]\,H^{(l_2)}] =$$

$$= \sum_L a\,(l_1,\,l_2,\,L)\,c\,(l_1,\,l_2,\,L;\;1,\,0)\,\frac{[Z_+,\,H^{(L)}]}{\sqrt{L\,(L+1)}},$$

откуда

$$\sqrt{l_1(l_1+1)}\,l_2\,(l_2+1)\,H^{l_1}_m H^{l_2}_m \delta^{-1}_m =$$

$$= \sum_L \sqrt{L\,(L+1)}\,a\,(l_1,\,l_2,\,L)\,c\,(l_1,\,l_2,\,L;\;1,\,0)\,H^L_m.$$

Используя нормировочное соотношение для H^l_m, находим

$$a\,(l_1,\,l_2,\,L) =$$

$$= \sqrt{L\,(L+1)/l_1\,(l_1+1)}\,c^{-1}\,(l_1,\,l_2,\,L;\;1,\,0)\sum_m \varkappa_m^{-1/2}\delta_m^{-1}\widetilde{H}^{l_1}_m\widetilde{H}^{l_2}_m\widetilde{H}^L_m. \tag{6}$$

Таким образом, формулы (5) со структурными функциями (6) решают задачу явной реализации простой алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе (4). Величины H^l_m, δ_m, $\varkappa_m H^1_m$ и спектр значений l (непосредственно определяемые матрицей Картана соответствующей алгебры), необходимые для конкретных расчетов в рамках минимального вложения, приведены для всех типов простых алгебр Ли (A_n, B_n, C_n, D_n, $E_{6,7,8}$, F_4, G_2) в табл. 2.

Таблица

$\mathfrak{g}$	Спектр l	δ_α	$\varkappa_\alpha H_\alpha^1$	$H_\alpha^l,\ l \neq 1$
A_n $[su\,(n+1)]$	$m,$ $1 \leqslant m \leqslant n$	$\delta_\alpha = \alpha\,(n-\alpha+1)$	1	$H_\alpha^l = \Delta_{\alpha-1} / \prod_1^{\alpha-1} \delta_\beta,\ 2 \leqslant \alpha \leqslant \mathbf{n};\ H_1^l = 1$
C_n $[\mathrm{Sp}\,(2n)]$	$2m-1,$ $1 \leqslant m \leqslant n$	$\delta_\alpha = \alpha\,(2n-\alpha)$	$1, 1, \ldots, 1, 1/2$	$H_\alpha^l = \Delta_{\alpha-1} / \prod_1^{\alpha-1} \delta_\beta$
B_n $[O\,(2n+1)]$	$2m-1,$ $1 \leqslant m \leqslant n$	$\delta_\alpha = \alpha\,(2n-\alpha+1),$ $1 \leqslant \alpha \leqslant n-1,$ $\delta_n = n\,(n+1)/2$	$1, 1, \ldots, 1, 2$	$H_\alpha^l = \Delta_{\alpha-1} / \prod_1^{\alpha-1} \delta_\beta,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n-1;$ $H_n^l = (1/2)\,\Delta_{n-1} / \prod_1^{n-1} \delta_\beta$
D_n $[O\,(2n)]$	$2m-1,$ $1 \leqslant m \leqslant n-1;$ $n-1$	$\delta_\alpha = \alpha\,(2n-\alpha-1),$ $1 \leqslant \alpha \leqslant n-2;$ $\delta_{n-1} = \delta_n = n\,(n-1)/2$	1	$l \neq n-1\ (2\delta_n - l\,(l+1) \equiv n\,(n-1) - l\,(l+1) \neq 0)$ $H_\alpha^l = \Delta_{\alpha-1} / \prod_1^{\alpha-1} \delta_\beta,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n-2;$ $H_\alpha^l = \Delta_{n-3} / [2\delta_n + y_l] \prod_1^{n-3} \delta_\beta,\ \alpha = n-1,\ n$ $l = n-1,\ n$ — нечетно $H_\alpha^{n-1} = 0,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n-2;\ H_n^{n-1} = -H_{n-1}^{n-1} = 1$ $l = n-1,\ n$ — четно. Момент $(n-1)$ двукратно вырожден и второй вектор с $l = n-1$ есть $\overline{H}_\alpha^{n-1} = \Delta_{\alpha-1} / \prod_1^{\alpha-1} \delta_\beta,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n-2;$

				$\overline{H}^{n-1}_{n-1} = -\Delta_{n-4} / \prod\limits_{1}^{n-4} \delta_\beta; \quad \overline{H}^{n-1}_{n} = 0$
E_6	1, 4, 5, 7, 8, 11	16, 22, 30, 42, 30, 16	1	$H^l_1 = 1,\ H^l_2 = \dfrac{\delta_2}{2\delta_2 + y_l} \dfrac{y_l^2 + 2(\delta_1 + \delta_3) y_l + 3\delta_1\delta_3}{\delta_1\delta_3};$ $H^l_3 = \dfrac{2\delta_1 + y_l}{\delta_1},\ H^l_4 = \dfrac{y_l^2 + 2(\delta_1 + \delta_3) y_l + 3\delta_1\delta_3}{\delta_1\delta_3};$ $H^l_5 = \Delta_4/\delta_5;\ H^l_6 = \Delta_5/\delta_6$
E_7	1, 5, 7, 9, 11, 13, 17	34, 49, 66, 96, 75, 52, 27	1	H^l_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant 4$, определяются соответствующими формулами для E_6: $H^l_5 = \dfrac{\Delta_4}{\delta_4};\ H^l_6 = \dfrac{\Delta_5}{\delta_4\delta_5};\ H^l_7 = \dfrac{\Delta_6}{\delta_4\delta_5\delta_6}$
E_8	1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	2·(46, 68, 91, 135, 110, 84, 57, 29)	1	H^l_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant 4$, определяются соответствующими формулами для E_6; $H^l_5 = \dfrac{\Delta_4}{\delta_4};\ H^l_6 = \dfrac{\Delta_5}{\delta_4\delta_5};\ H^l_7 = \dfrac{\Delta_6}{\delta_4\delta_5\delta_6};$ $H^l_8 = \dfrac{\Delta_7}{\delta_4\delta_5\delta_6\delta_7}$
F_4	1, 5, 7, 11	2·(11, 21, 15, 8)	1/2, 1/2, 1, 1	$H^l_\alpha = \Delta_{\alpha-1} / \prod\limits_{1}^{\alpha-1} \delta_\beta$
G_2	1, 5	2·(3,5)	3, 1	$H^l_1 = 1;\ H^l_2 = \dfrac{2\delta_1 + y_l}{3\delta_1}$

Примечание. Δ_α – главные миноры α-го порядка матрицы $R \equiv P + y_l I$, где $y_l \equiv -l\,(l+1)$, $(I)_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}$.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Параметризация калибровочных полей и их симметрийные свойства. В соответствии с приведенным во введении определением цилиндрически-симметричных конфигураций поля Янга — Миллса в этом случае параметризуются с помощью генераторов группы S, которые перестановочны с элементами диагональной группы $\mathscr{L}$ изоморфной $SU(2)$, т. е. инвариантны относительно полного момента $\mathbf{L} = \mathbf{T} + \mathbf{M}$ системы. Здесь $\mathbf{M}$ — генераторы трехмерной группы пространственных вращений, а $\mathbf{T}$ — образующие группы $SU(2)$ при определенном способе ее вложения в калибровочную группу G. (В частности, для минимального вложения эту подгруппу $SU(2)$ генерируют введенные в разд. 1 операторы $\{Z_{\pm}, H^{(1)}\}$.) Поэтому возникает задача явной реализации групповой алгебры S. При произвольном способе вложения разбиение генераторов $\mathfrak{g}$ по мультиплетам F_m^l неприводимых представлений $SU(2)$, вообще говоря, таково, что кратность l-го мультиплета может быть больше единицы, а спектр значений l содержит полуцелые значения. (Например, для группы $SU(4)$ имеют место вложения со следующими спектрами значений l: $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 1, 1, 2\}$, $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$, $\{0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1\}$, отвечающие группам S: $U(1) \otimes U(1) \otimes U(1)$, $SU(2) \otimes U(1) \otimes U(1)$, $U(1) \otimes \otimes SU(2) \otimes SU(2)$, $U(1) \otimes U(1) \otimes SU(2)$.) В рамках используемого нами способа построения генераторами S являются, очевидно, инвариантные относительно группы $\mathscr{L}$ операторы $W^{ls} = \sum_m F_m^{ls} \overline{Y}_m^l(\mathbf{n})$, где $Y_m^l(\mathbf{n})$ — сферические функции аргумента $\mathbf{n} \equiv \mathbf{x}/r$ (индекс s, учитывающий возможность наличия кратных значений момента l, в дальнейшем будет опускаться). При этом только для минимального вложения операторы W^l образуют абелеву группу $S\ (\equiv \underbrace{U(1) \otimes \ldots \otimes U(1)}_{r})$ ранга r исходной калибровочной группы. (В матричном базисе данному способу построения инвариантных операторов отвечают комбинации $\hat{F}$: $\hat{F}_i n_i$, $\hat{F}_{ij} n_i n_j$, $\hat{F}_{ij} = \hat{F}_{ji}$, $\mathrm{Sp}\hat{F}_{ii} = 0, \ldots$ при $l = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$ соответственно.)

Из компонент каждого неприводимого мультиплета W^l и единичного вектора $\mathbf{n}$, преобразующегося по векторному представлению ($l = 1$) группы $SU(2)$, согласно правилу сложения моментов можно построить три типа операторных векторных структур, именно $\mathbf{W}_{1,2,3}^l = \{\mathbf{n}W^l,\ \mathbf{M}W^l,\ \mathbf{n} \times \mathbf{M}W^l\}$, параметризующих векторную часть потенциала. (Для $SU(2)$ роль $Y_m^l(\mathbf{n})$, W^l, $\mathbf{n}W^l$, $\mathbf{M}W^l$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{M}W^l$ играют величины $\mathbf{n}$, $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})$, $\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})$, $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \boldsymbol{\sigma}$ соответственно, где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули.) С помощью введенных выше операторных структур компоненты скалярной и векторной частей потенциала (или поля) Янга—Миллса параметризуются следующим образом:

$$A_0 = \sum_{\{l\}} \varphi_0^l W^l; \quad \mathbf{A} = \sum_{\{l\}} \sum_{i=1}^{3} \varphi_i^l \mathbf{W}_i^l, \quad \varphi^l \equiv \varphi^l(r, t), \tag{7}$$

где суммирование распространяется по всему спектру собственных значений оператора момента для соответствующего вложения $SU(2)$ в G. Отметим, что выражения (7) являются непосредственным обобщением $SU(2)$-подстановки Виттена [44] на случай произвольной компактной калибровочной группы G.

Обратимся теперь к симметрийным свойствам подстановки (7), группой симметрии которой является прямое произведение трехмерной подгруппы $O(2, 1)$ конформной группы и подгруппы S калибровочной группы с генераторами W^l [45]. Имеют место также дискретные преобразования пространственно-временного отражения (замены ориентации пространства R_4), обеспечивающие, в частности, возможность перехода от инстантонов к антиинстантонам для дуального подкласса полей. По отношению к преобразованиям из группы $O(2, 1)$ структуры $\varphi^l(r, t)$ преобразуются как скалярные функции. Ввиду того что группа S является, вообще говоря, прямым произведением подгрупп S_M, $S = \prod_{M=1}^{k} \otimes S_M$, $k \leqslant r$ [одна из которых, генерируемая операторами $T_i n_i$, есть $U(1)$], то совокупность операторов W^l разбивается в соответствии со структурой S в поднаборы W_M^l, образующие алгебры S_M. При этом функции $\varphi(M)_0^l$ и $\varphi(M)_1^l$ играют роль потенциалов полей калибровочной группы S_M в двумерном пространстве (для подгруппы $U(1) \subset S$ соответствующие структурные функции суть электромагнитные потенциалы), а φ_2^l и φ_3^l преобразуются под действием операторов W_M^l алгебры s_M по ее некоторому приводимому представлению.

Дальнейшее рассмотрение будем проводить для специального случая вложения — минимального, в котором структура калибровочной группы двумерного пространства наиболее проста, $S = \prod_{1}^{r} \otimes U(1)$, что позволяет довести все построения в явном виде до окончательных выражений для решений классических уравнений Янга — Миллса.

При калибровочных преобразованиях с генераторами W^L вклады различных l-мультиплетов (по $U(1) \subset S = \prod_{1}^{r} \otimes U(1)$) в разложении (7), равно как и в выражениях для напряженностей полей, перемешиваются, и для выделения «чистых» (несмешанных) калибровочно-инвариантных комбинаций требуется диагонализовать r взаимокоммутирующих генераторов W^L. При калибровочном преобразовании, генерируемом операторами W^L из S, векторные структуры ведут себя следующим образом:

$$[W^L, \mathbf{M}W^l]_- = -\mathrm{i}\sum_{l'} c^L_{ll'}\mathbf{n}\times\mathbf{M}W^{l'}; \quad [W^L, \mathbf{n}\times\mathbf{M}W^l]_- = \\ = \mathrm{i}\sum_{l'} c^L_{ll'}\mathbf{M}W^{l'}. \tag{8}$$

Таким образом, речь идет о диагонализации матрицы c с элементами $c^L_{ll'}$, соответствующей калибровочному преобразованию с генераторами W^L. Полагая $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ в (7) и (8) и учитывая, что $W^l = H^{(l)}$ при таком выборе вектора $\mathbf{n}$, из (8) получаем

$$[H^{(L)}, [Z_\pm, H^{(l)}]] = \pm\sum_{l'} c^L_{ll'}[Z_\pm, H^{(l')}]$$

или

$$l(l+1)L(L+1)H^l_\alpha H^L_\alpha = \sum_{l'} l'(l'+1)c^L_{ll'}\delta_\alpha H^{l'}_\alpha. \tag{9}$$

Переходя в (9) к ортонормированному базису $\widetilde{H}^l_\alpha$, находим

$$c^L_{ll'} = \sum_\alpha \delta_\alpha^{-1}\varkappa_\alpha^{-\frac{1}{2}}\widetilde{H}^l_\alpha\widetilde{H}^L_\alpha\widetilde{H}^{l'}_\alpha; \quad \sum_{L,l,l'} c^L_{ll'}\widetilde{H}^L_\alpha\widetilde{H}^l_\beta\widetilde{H}^{l'}_\gamma = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_\alpha^{-1}\varkappa_\alpha^{-1/2}, \tag{10}$$

откуда вытекает, что матрица $\widetilde{H}^l_\alpha$ диагонализует генераторы калибровочных преобразований. Диагонализованные операторы *

$$T_\alpha = \sum_l \widetilde{h}^l_\alpha W^l, \quad \mathbf{T}^i_\alpha = \sum_l \widetilde{h}^l_\alpha \mathbf{W}^l_i,$$

$$\widetilde{h}^l_\alpha \equiv \widetilde{H}^l_\alpha(\delta_\alpha v_\alpha)^{1/2}, \quad v_\alpha \equiv \varkappa_\alpha\delta_\alpha$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&[T_\alpha, T_\beta]_- = 0; \quad [T_\alpha, \mathbf{M}T_\beta]_- = -\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\mathbf{n}\times\mathbf{M}T_\alpha;\\
&[T_\alpha, \mathbf{n}\times\mathbf{M}T_\beta]_- = \mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\mathbf{M}T_\beta;\\
&\varepsilon_{kij}[M_iT_\alpha, M_jT_\beta]_- = \varepsilon_{kij}[(\mathbf{n}\times\mathbf{M})_i T_\alpha, (\mathbf{n}\times\mathbf{M})_j T_\beta]_- =\\
&= \mathrm{i}n_k\delta_{\alpha\beta}T_\gamma\delta_\alpha k_{\gamma\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

С этими операторами и новыми структурными функциями $f^\alpha = \sum_l \widetilde{\widetilde{h}}{}^l_\alpha\varphi^l$, $\widetilde{\widetilde{h}}{}^l_\alpha = \widetilde{H}^l_\alpha(\delta_\alpha v_\alpha)^{-1/2}$, разложение (7) можно переписать в виде

$$A_0 = \sum_\alpha T_\alpha f^\alpha_0; \quad \mathbf{A} = \sum_\alpha\sum_{i=1}^{3} T^i_\alpha f^\alpha_i. \tag{12}$$

---

* Отметим, что диагональная матрица V с элементами v_α удовлетворяет соотношению $Vk = k^TV$.

(Использование $\tilde{h}$ и $\tilde{\tilde{h}}$ вместо ортогональной матрицы $\tilde{H}$ упрощает окончательные формулы.) При калибровочных преобразованиях с генераторами T_α подгруппы $U(1) \subset S$ и фазами $\phi^\alpha(r, t)$, являющимися произвольными функциями r и t, структурные функции f^α ведут себя следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &-\mathrm{i}\hat{\delta}_\alpha f_0^\beta = \delta_{\alpha\beta}\phi^\alpha_{,t}; \quad \mathrm{i}\hat{\delta}_\alpha f_1^\beta = \delta_{\alpha\beta}\phi^\alpha_{,r};\\ &-\mathrm{i}\hat{\delta}_\alpha f_2^\beta = \delta_{\alpha\beta}\phi^\alpha f_3^\alpha; \quad -\mathrm{i}\hat{\delta}_\alpha f_3^\beta = -\delta_{\alpha\beta}\phi^\alpha(f_2^\alpha + r^{-1}).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Здесь символом $\phi^\alpha_{,x}$ обозначена производная функции ϕ^α по аргументу x. Из соотношений (13) вытекает, что α-компоненты тензора поля 2-мерного пространства, $f^\alpha_{1,t} - f^\alpha_{0,r}$, и величины $J_\alpha = |W_\alpha|^2$, $W_\alpha \equiv (rf_2^\alpha + 1) + \mathrm{i}rf_3^\alpha$, инвариантны по отношению к калибровочным преобразованиям из группы S. Именно для этих $2r$ величин удается получить систему $2r$ уравнений, описывающих цилиндрически-симметричные решения калибровочной теории в рамках минимального вложения $SU(2)$ в G.

Общие уравнения движения; действие и топологический заряд (неинвариантная и инвариантная формулировки); точечноподобные решения. Исходя из параметризации (12) и пользуясь коммутационными соотношениями (11), находим выражения для напряженностей $E_i \equiv F_{i0}$ и $B_k \equiv (1/2)\,\varepsilon_{ijk}F_{ij}$ полей Янга —Миллса:

$$\left.\begin{aligned} &-\mathbf{E} = \mathbf{n}T_\alpha(f^\alpha_{1,t} - f^\alpha_{0,r}) + \mathbf{M}T_\alpha(f^\alpha_{2,t} - f_0^\alpha f_3^\alpha) +\\ &+\mathbf{n}\times\mathbf{M}T_\alpha(f^\alpha_{3,t} + r^{-1}f_0^\alpha + f_0^\alpha f_2^\alpha);\\ &\mathbf{B} = (1/2r^2)\,\mathbf{n}\delta_\alpha k_{\beta\alpha}G_\alpha T_\beta + \mathbf{M}T_\alpha(f^\alpha_{3,r} + r^{-1}f_1^\alpha + r^{-1}f_3^\alpha + f_1^\alpha f_2^\alpha) +\\ &+\mathbf{n}\times\mathbf{M}T_\alpha(-f^\alpha_{2,r} - r^{-1}f_2^\alpha + f_1^\alpha f_3^\alpha), \quad G_\alpha \equiv J_\alpha - 1.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Для вычисления плотностей евклидова действия и топологического заряда, именно $r^2\,\mathrm{Sp}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ и $r^2\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$, нам потребуются следы взаимных произведений операторов T_α, $\mathbf{M}T_\beta$, $\mathbf{n}\times\mathbf{M}T_\gamma$, ненулевые значения которых даются формулами:

$$\mathrm{Sp}\,T_\alpha\cdot T_\beta = k^{-1}_{\beta\alpha}v_\beta; \quad \mathrm{Sp}\,(\mathbf{M}T_\alpha)^2 = \mathrm{Sp}\,(\mathbf{n}\times\mathbf{M}T_\alpha)^2 = \delta_\alpha v_\alpha \equiv \mathscr{B}_\alpha. \tag{15}$$

С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} r^2\,\mathrm{Sp}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \mathscr{B}_\alpha\{&(1/4r^2)(S_\alpha\delta_\alpha k_{\beta\alpha}S_\beta + G_\alpha\delta_\alpha k_{\beta\alpha}G_\beta) +\\ &+ |D_t^\alpha W_\alpha|^2 + |D_r^\alpha W_\alpha|^2\},\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} r^2\,\mathrm{Sp}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = (-1/2)\,\mathscr{B}_\alpha\{&(1/2r^2)\,G_\alpha\delta_\alpha k_{\beta\alpha}S_\beta +\\ &+ \mathrm{i}\,[(D_t^\alpha W_\alpha)(D_r^\alpha W_\alpha)^* - (D_t^\alpha W_\alpha)^*(D_r^\alpha W_\alpha)]\},\end{aligned} \tag{17}$$

где $S_\alpha \equiv 2r^2 k^{-1}_{\beta\alpha}\delta_\beta^{-1}(f^\beta_{1,t} - f^\beta_{0,r})$; $D_t^\alpha = \partial/\partial t + \mathrm{i}f_0^\alpha$; $D_r^\alpha = \partial/\partial r + \mathrm{i}f_1^\alpha$ — ковариантные производные в двумерном пространстве.

Плотность топологического заряда можно переписать в несколько ином виде, более удобном для конкретных расчетов, если ввести обозначения:

$$V_0^\alpha \equiv \operatorname{Re} W_\alpha = r f_2^\alpha + 1; \quad V_1^\alpha \equiv \operatorname{Im} W_\alpha = r f_3^\alpha; \quad \hat{D}_\mu^\alpha V_\lambda^\alpha = V_{\lambda,\,\mu}^\alpha - \varepsilon_{\lambda\,\tau} f_\mu^\alpha V_\tau^\alpha;$$

$$f_{\mu\nu}^\alpha \equiv f_{\nu,\,\mu}^\alpha - f_{\mu,\,\nu}^\alpha; \quad \varepsilon_{\mu\nu} = (-1)^\mu \, \delta_{\mu+\nu,\,1}, \quad \partial_0 \equiv \partial/\partial t, \quad \partial_1 \equiv \partial/\partial r; \quad (18)$$

индексы μ, ν, λ, τ принимают значения 0 и 1. Тогда имеем

$$r^2 \operatorname{Sp} \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = (-1/2)\, \mathscr{B}_\alpha \{\partial_\mu [\varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\tau} V_\lambda^\alpha \hat{D}_\nu^\alpha V_\tau^\alpha] - (1/2)\, \varepsilon_{\mu\nu} f_{\mu\nu}^\alpha\}. \quad (19)$$

Варьируя плотность действия (16) по структурным функциям f^α, приходим к следующей системе $4r$ уравнений движения:

$$2f_0^\alpha = -J_\alpha^{-1} S_{\alpha,\,r} + \mathrm{i}\Psi_{\alpha,\,t}; \quad 2f_1^\alpha = J_\alpha^{-1} S_{\alpha,\,t} + \mathrm{i}\Psi_{\alpha,\,r}; \quad (20)$$

$$[(D_t^\alpha)^2 + (D_r^\alpha)^2]\, W_\alpha = W_\alpha \, [(1/2)\, \delta_\beta k_\beta k_{\alpha\beta} J_\beta - 1], \quad (21)$$

где $\Psi_\alpha = \ln W_\alpha / W_\alpha^*$. Эта система в точности совпадает с уравнениями, получаемыми непосредственной подстановкой (12) в исходные уравнения Янга — Миллса $F_{\mu\nu,\,\mu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0$ с последующим взятием следов с использованием формул (15). Выражая в формулах (20) и (21) функции f^α через инварианты J_α и S_α, получаем систему $2r$ уравнений:

$$\Delta J_\alpha = \frac{1}{2} J_\alpha^{-1} [(\nabla J_\alpha)^2 + (\nabla S_\alpha)^2] + 2r^{-2} J_\alpha \left(\frac{1}{2} \sum_\beta \delta_\beta k_{\alpha\beta} J_\beta - 1\right);$$

$$\Delta S_\alpha = J_\alpha^{-1} (\nabla J_\alpha)(\nabla S_\alpha) + r^{-2} J_\alpha \delta_\alpha \sum_\beta k_{\beta\alpha} S_\beta, \quad (22)$$

где $\Delta \equiv \partial^2/\partial r^2 + \partial^2/\partial t^2$, $\nabla \equiv (\partial/\partial t, \; \partial/\partial r)$.

Заметим, что переход к пространству Минковского осуществляется, как обычно, с помощью замены вещественных (в случае R_4) временных компонент на мнимые, т. е. $t \to \mathrm{i}t$, $S_\alpha \to \mathrm{i}S_\alpha$.

Систему (22) можно переписать в более симметричной форме через инвариантные величины $R_\alpha^{(\mu)} = (1/2)\,[G_\alpha + (-1)^{\mu-1} S_\alpha]$, $\mu = 1, 2$:

$$\Delta R_\alpha^{(\mu)} = (R_\alpha^{(1)} + R_\alpha^{(2)} + 1)^{-1} (\nabla R_\alpha^{(\mu)})^2 +$$

$$+ r^{-2} \sum_\beta \delta_\beta k_{\alpha\beta} R_\beta^{(\mu)} (R_\alpha^{(1)} + R_\alpha^{(2)} + 1). \quad (23)$$

Выражения для плотностей действия и топологического заряда, записанные через структуры $R_\alpha^{(\mu)}$, удовлетворяющие системе (23), имеют вид:

$$\frac{r^2}{2}\,\mathrm{Sp}\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\sum_{\alpha,\,\mu}\mathscr{B}_\alpha\Big[\big(R_\alpha^{(1)}+R_\alpha^{(2)}+1\big)^{-1}\big(\nabla R_\alpha^{(\mu)}\big)^2+$$

$$+r^{-2}\delta_\alpha\sum_\beta k_{\beta\alpha}R_\alpha^{(\mu)}R_\beta^{(\mu)}\Big]; \qquad (24)$$

$$\frac{r^2}{2}\,\mathrm{Sp}^*\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\sum_{\alpha,\,\mu}\mathscr{B}_\alpha(-1)^\mu\Big[-\Delta R_\alpha^{(\mu)}+r^{-2}\sum_\beta\delta_\beta k_{\alpha\beta}R_\beta^{(\mu)}\Big]. \qquad (25)$$

Уравнения (23) обобщают естественным образом на произвольную компактную калибровочную группу уравнения, полученные в [46] для случая группы $SU(2)$, а лагранжиан (24) — соответствующее выражение работы [44]. При этом уравнения (22) и (23) не могут быть получены варьированием (24).

Подчеркнем еще раз, что все основные величины теории (23) — (25) удалось сформулировать в полностью калибровочно-инвариантном виде, исключив все неинвариантные величины.

Из (23) — (25) видно, что вся информация о свойствах калибровочной группы G сосредоточена в матрице $(1/2)\ \delta_\beta k_{\alpha\beta}\equiv\equiv k_{\alpha\beta}\sum\limits_\gamma k_{\beta\gamma}^{-1}$. Приведем в качестве иллюстрации явные выражения для матриц $(1/2)\ \delta_\beta k_{\alpha\beta}$ в случае групп второго ранга:

$$\begin{array}{cccc} SU(3) & O(5) & \mathrm{Sp}(4) & G_2 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -9 & 10 \end{vmatrix}. \end{array}$$

На основе уравнений (22) [или (23)] можно сразу же сделать ряд общих заключений, в частности получить спектр точечноподобных решений, описываемых согласно (22) алгебраической системой вида: $J_\alpha\delta_\alpha k_{\beta\alpha}S_\beta=0$; $J_\alpha\,[(1/2)\ \delta_\beta k_{\alpha\beta}J_\beta-1]=0$. Отсюда вытекает, что либо $J_\alpha=0$ и S_α произвольны $\forall 1\leqslant\alpha\leqslant r$, либо $S_\alpha=0$ и $J_\alpha=1$ $\forall 1\leqslant\alpha\leqslant r$.

Уравнения (23) допускают естественную классификацию подклассов инстантонного, антиинстантонного и меронного типа в зависимости от выбора инвариантных структур $R_\alpha^{(\mu)}$ ($R_\alpha^{(2)}=0$, $R_\alpha^{(1)}==0$ и $R_\alpha^{(1)}=R_\alpha^{(2)}$ соответственно). При этом (23) — (25) очевидным образом инвариантны относительно замены $R_\alpha^{(1)}\rightleftarrows R_\alpha^{(2)}$ с точностью до знака в (25).

Реализация условия дуальности: уравнения и контурное представление топологического заряда. Исходя из выражений (14) для напряженностей **E** и **B** калибровочного поля, можно получить уравнения самодуальности (антисамодуальности), полагая **E** = **B** (**E** = —**B**). Для обеспечения наибольшей наглядности вывода, будем использовать обозначения (18), в которых уравнения самодуальности имеют вид:

$$f^{\alpha}_{0,1} = r^{-2}\,[1 - (1/2)\,\delta_{\beta} k_{\alpha\beta} V^{\beta}_{\mu} V^{\beta}_{\mu}]; \tag{26}$$

$$V^{\alpha}_{0,0} - f^{\alpha}_{0} V^{\alpha}_{1} = -V^{\alpha}_{1,1} - f^{\alpha}_{1} V^{\alpha}_{0}; \quad V^{\alpha}_{1,0} + f^{\alpha}_{0} V^{\alpha}_{0} = V^{\alpha}_{0,1} - f^{\alpha}_{1} V^{\alpha}_{1}. \tag{27}$$

Эти уравнения являются прямым обобщением системы Виттена [44] на случай произвольной простой компактной группы. В лоренцевой калибровке, $\partial_{\mu} f^{\alpha}_{\mu} = 0$, имеем $f^{\alpha}_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu} \psi^{\alpha}_{,\nu}$. Для новых функций $\chi^{\alpha}_{\mu} = \exp\,(-\psi^{\alpha}) V^{\alpha}_{\mu}$, уравнения (27) можно переписать в виде:

$$\chi^{\alpha}_{0,0} = -\chi^{\alpha}_{1,1}; \quad \chi^{\alpha}_{1,0} = \chi^{\alpha}_{0,1},$$

представляющем собой условия Коши — Римана, из которых вытекает, что $l^{\alpha} = \chi^{\alpha}_{1} - \mathrm{i}\chi^{\alpha}_{0} = -\mathrm{i}\exp\,(-\psi^{\alpha})\,W_{\alpha}$ являются аналитическими функциями $z = (r + \mathrm{i}t)/2$. Уравнения (26) для тензора поля f^{α}_{01} в 2-мерном пространстве в новых обозначениях

$$\Delta\psi^{\alpha} = -r^{-2}\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{\beta} \delta_{\beta} k_{\alpha\beta} \exp\,(2\psi^{\beta})\,|\,l^{\beta}\,|^{2}\right)$$

удобно записать через функции ρ_{α}, определяемые выражением $\psi^{\alpha} = \ln r - (1/2)\ln\,|\,l^{\alpha}\,|^{2} + \rho_{\alpha}/2$, именно

$$\Delta\rho_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{r} \delta_{\beta} k_{\alpha\beta} \exp \rho_{\beta}, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{28}$$

Отметим, что при $\rho_{\alpha} \equiv \rho \; \forall 1 \leqslant \alpha \leqslant r$, система (28) переходит в известное уравнение Лиувилля, реализующее условие дуальности для группы SU (2) [44], которое вытекает естественным образом из (28) при $r \equiv 1$ ($k_{\alpha\beta} \equiv k_{11} \equiv 2$).

Уравнения самодуальности (антисамодуальности) (28), записанные для калибровочно-инвариантных величин ρ_{α}, непосредственно вытекают из общей системы (22) [или (23)] при специальном выборе $S_{\alpha} = \pm(J_{\alpha} - 1)$ или $R^{(\frac{1}{2})}_{\alpha} = 0$. Эти алгебраические соотношения представляют собой фактически первое из уравнений самодуальности (26) и приводят автоматически к системе r уравнений для функций $\rho_{\alpha} \equiv \ln\,(J_{\alpha}/r^{2})$ в форме (28). Вид системы (28) свидетельствует о скачкообразном повышении симметрии исходной общей системы (23) в «точке» дуальности. Она удовлетворяет условиям конформной ковариантности [в отличие от (23)], что позволяет получить ряд ее нетривиальных решений, исходя из каких-либо специальных $\rho^{0}_{\alpha}\,(z)$ (в частности, точечноподобных), $\rho_{\alpha}\,(z) = \rho^{0}_{\alpha}\,(g\,(z)) + \ln\,|\,dg/dz\,|^{2}$, где $g\,(z)$ — произвольная аналитическая функция, и полностью ее проинтегрировать, выразив общие решения через $2r$ произвольных функций (см. разд. 3).

Наличие скачкообразного повышения симметрии ставит интересную проблему построения расширенной группы симметрии цилиндрически-симметричных классических уравнений калибровочных теорий в «точке» дуальности и возможной формулировки самого условия дуальности как критической точки скачкообразного роста симметрии.

Отметим, что для самодуального (антисамодуального) случая плотность действия (24) можно переписать в виде

$$(r^2/2)\,\mathrm{Sp}\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=\sum_\alpha \mathscr{B}_\alpha\Delta\,(\exp\varphi_\alpha-\varphi_\alpha),\quad \varphi_\alpha\equiv\rho_\alpha+2\ln r$$

[ср. с соответствующим выражением работы [45] для группы $SU(2)$].

Для конкретных вычислений значений топологического заряда самодуальных конфигураций (инстантонов) удобно использовать выражение (19). Ввиду того что функции V_τ^α, отвечающие построенным в разд. 4 инстантонным решениям, удовлетворяют на бесконечности соотношениям $\hat{D}_\mu^\alpha V_\tau^\alpha\,|_\infty=0$, первый член в интегранте заряда $Q=\frac{1}{\pi}\int d^2xr^2\mathrm{Sp}\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ с плотностью в форме (19) отсутствует. Это позволяет переписать формулу для заряда по теореме Стокса в виде линейного интеграла по бесконечному контуру:

$$Q=\frac{1}{\pi}\sum_\alpha \mathscr{B}_\alpha\oint dx_\mu f_\mu^\alpha.$$

Далее, благодаря соотношению $f_\mu^\alpha=-\mathrm{i}\,(\ln W_\alpha),_\mu$, вытекающему из уравнений (27) при учете равенства $\hat{D}_\mu^\alpha W_\alpha\,|_\infty=0$, последняя формула принимает вид

$$Q=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\sum_\alpha \mathscr{B}_\alpha\oint dx_\mu\partial_\mu\ln W_\alpha. \tag{29}$$

Таким образом, топологический заряд Q по форме представим в виде суммы вкладов топологических зарядов r двумерных полевых конфигураций абелевых $\underbrace{U(1)\otimes\ldots\otimes U(1)}_{r}$ теорий, каждый из которых определяется изменением в фазе комплексных скалярных полей W_α вокруг контура на бесконечности.

Уравнения для многомеронных конфигураций. Система (23) допускает в силу своей симметрии также другой очевидный подкласс, отвечающий выбору $R_\alpha^{(1)}=R_\alpha^{(2)}\equiv R_\alpha$, в котором содержатся, в частности, меронные конфигурации. В этом случае систему (23) для функций $f_\alpha\equiv(2R_\alpha+1)^{1/2}$ можно записать в виде

$$\Delta f_\alpha=\frac{1}{2r^2}\sum_\beta \delta_\beta k_{\alpha\beta}f_\alpha\,(f_\beta^2-1); \tag{30}$$

она в точности совпадает для группы $SU(2)$ с основным уравнением, описывающим многомеронные конфигурации [47]. Соответствующие решения приводят к бесконечным значениям действия [см. (24)] и дают правильное значение для топологического заряда, если учесть, что $R_\alpha^{(\mu)}$ пропорциональны r^2 по их определению и метрика в двумерном пространстве также содержит r^2. Следует, однако, отметить, что используемые при этом свойства обобщенных функций требуют известных соглашений о правилах работы с ними.

Включение поля Хиггса; уравнения для сферически-симметричных монополей; функционал энергии. В развитую схему можно естественным образом включить поле Хиггса $\varphi = \sum_\alpha \varphi^\alpha T_\alpha$, преобразующееся по присоединенному представлению калибровочной группы G. Не останавливаясь на обсуждении вопросов, связанных с наличием дополнительной (по сравнению с полями Янга — Миллса) калибровочной инвариантности полей Хиггса и с потенциальным членом в полном лагранжиане [5], рассмотрим лишь его кинетическую часть

$$L_H = (\check{D}_\mu \varphi^\alpha)^2 \equiv \mathrm{Sp}\,(\check{D}_\mu \varphi \check{D}_\mu \varphi); \quad \check{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \mathrm{i}^{-1}[A_\mu, \varphi], \tag{31}$$

записанную уже в диагональном представлении. Используя коммутационные соотношения (11), получаем

$$r^2 L_H = r^2 k_{\beta\alpha}^{-1} v_\beta (\nabla \varphi^\alpha)(\nabla \varphi^\beta) + \mathscr{R}_\alpha (\varphi^\alpha)^2 J_\alpha, \tag{32}$$

откуда вытекает, что при наличии поля Хиггса модифицируется лишь подсистема (21) добавлением в правой части члена $-W_\alpha(\varphi^\alpha)^2$ и возникает новая подсистема уравнений для структур $\hat{\varphi}^\alpha \equiv \equiv \mathscr{R}_\alpha \varphi^\alpha$:

$$\Delta \hat{\varphi}^\alpha = r^{-2} \delta_\alpha k_{\beta\alpha} \hat{\varphi}^\beta J_\beta + (\text{потенциальный член}). \tag{33}$$

Таким образом, возникает модифицированная система $3r$ уравнений для $3r$ величин $\hat{\varphi}^\alpha$ и $R_\alpha^{(\mu)}$.

В рамках развитого подхода описание сферически-симметричных монопольных конфигураций для произвольной компактной калибровочной группы с полем Хиггса φ в присоединенном представлении полностью аналогично приведенному выше. Плотность гамильтониана $\mathscr{H}$ в пространстве Минковского для чисто магнитных не зависящих от времени решений задается обычным (с точностью до нормировки следа образующих алгебры $\mathfrak{g}$ группы G) выражением

$$\mathscr{H} = -L = (1/4)\,\mathrm{Sp}\,F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (1/2)\,\mathrm{Sp}\,(\check{D}_\mu \varphi)^2 + \eta V(\varphi) =$$
$$= (1/2)\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{B} \mp \check{\mathbf{D}}\varphi)^2 \pm \mathrm{Sp}\,(\mathbf{B} \cdot \check{\mathbf{D}}\varphi) + \eta V(\varphi). \tag{34}$$

В пределе БПЗ любое решение дифференциальных уравнений $\mathbf{B} = \check{\mathbf{D}}\varphi$ ($\mathbf{B} = -\check{\mathbf{D}}\varphi$) реализует минимум энергии

$$E = \int d^3x\mathscr{H} \geqslant \int d^3x \mathrm{Sp}\,(\mathbf{B}\cdot\check{\mathbf{D}}\varphi), \tag{35}$$

непосредственно связанный с топологическим зарядом и поэтому фактически не зависящий от детальной структуры решений. (Отметим, что в этом пределе параметры потенциала Хиггса $V(\varphi)$ стремятся к нулю при фиксированном их отношении.) С учетом соотношения $\check{\mathbf{D}}\mathbf{B} = 0$ интеграл (35) в результате интегрирования по частям можно записать в виде

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \int d\Omega\, \mathrm{Sp}\,(B_r\varphi). \tag{36}$$

При этом матрицу магнитного заряда g определяют, как обычно, асимптотикой магнитного поля $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} \Rightarrow g/4\pi r^2. \tag{37}$$

Следуя общепринятым обозначениям [5] для структурных функций, параметризующих векторную часть потенциала $\mathbf{W}$ поля Янга — Миллса ($W_0 = 0$) и поля Хиггса φ, в статическом пределе запишем диагональное представление (12) в виде

$$\varphi(r) = \sum_\alpha r^{-1} H_\alpha(r)\, T_\alpha; \quad \mathbf{W}(r) = \sum_\alpha r^{-1}\,[K_\alpha(r) - 1]\, \mathbf{M}T_\alpha. \tag{38}$$

Тогда энергетический функционал в этих структурах

$$\begin{aligned} E = -4\pi \int_0^\infty dr \sum_\alpha \mathscr{B}_\alpha r^{-2} \Big[r^2\dot{K}_\alpha^2 + K_\alpha^2 H_\alpha^2 + \\ + \frac{1}{4}\sum_\beta \delta_\beta k_{\alpha\beta}(K_\alpha^2 - 1)(K_\beta^2 - 1) + \\ + \delta_\alpha^{-1} \sum_\beta k_{\alpha\beta}^{-1} (r\dot{H}_\alpha - H_\alpha)(r\dot{H}_\beta - H_\beta) \Big], \end{aligned} \tag{39}$$

вариация которого по функциям K_α и H_α приводит к следующей системе $2r$ уравнений:

$$\begin{aligned} r^2\ddot{K}_\alpha &= K_\alpha \Big(1/2 \sum_\beta \delta_\beta k_{\alpha\beta} K_\beta^2 + H_\alpha^2 - 1\Big); \\ r^2\ddot{H}_\alpha &= \sum_\beta \delta_\beta k_{\alpha\beta} K_\beta^2 H_\beta. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь точка над функциями означает дифференцирование по r. Эта же система, естественно, возникает из непосредственной подстановки (38) в уравнения $\mathbf{B} = \check{\mathbf{D}}\varphi$. Следует отметить, что, если бы мы рассмотрели чистые статические самодуальные поля Янга — Миллса A_0, $\mathbf{A}$ в евклидовом пространстве (без поля Хиггса) и использовали для них подстановку

$$A_0 = \sum_{\alpha} r^{-1} \tilde{H}_{\alpha}(r)\, T_{\alpha};$$

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha} r^{-1} [K_{\alpha}(r) - 1]\, \mathbf{M} T_{\alpha},$$

аналогичную (38), мы бы пришли к системе, единственным отличием которой от (40) является знак при члене H_{α}^2. Это обстоятельство свидетельствует о симметрии между условием самодуальности в R_4 и пределом БПЗ в пространстве Минковского. Именно, прообразы $\mathbf{W} = \mathbf{A}$ и $\varphi = \pm A_0$ статических самодуальных полей A_0, $\mathbf{A}$ в R_4 являются, как отмечено в работе [54] для группы $SU(2)$, монопольными решениями в $R_{3,1}$.

Система (40) является естественным обобщением известных уравнений (описывающих монопольные конфигурации для унитарных калибровочных групп малого ранга, см., например, [5]) для произвольной калибровочной группы G. Очевидно, что дионные решения можно получить из $\mathbf{W}$ и φ тривиальной заменой

$$\mathbf{W}' = \mathbf{W}; \quad W_0' = \operatorname{sh} \theta\varphi; \quad \varphi' = \operatorname{ch} \theta\varphi,$$

где θ — произвольная постоянная. Более подробно монопольные конфигурации мы рассмотрим в разд. 4, где дано явное построение соответствующих решений (40) и выделен их подкласс, удовлетворяющий необходимым для обеспечения конечности энергии (39) граничным условиям.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ САМОДУАЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Прежде чем перейти к непосредственному построению решений нелинейной системы (28), описывающей цилиндрически-симметричные самодуальные конфигурации, рассмотрим симметрийные свойства этих уравнений, обусловленные, в свою очередь, симметрией соответствующих корневых систем. К сожалению, до настоящего времени нам не удалось найти единообразную формулировку для всех простых групп Ли, поэтому приходится проводить построение решений для каждого типа групп A_n; B_n; C_n; D_n; E_r, $r = 6, 7, 8$; F_4, G_2 в отдельности в терминах их собственных корневых пространств. Впрочем, для ряда групп имеет место симметрия определенного рода, которая дает возможность получать решения для группы одного типа приравниванием соответствующих функций x_{α}, являющихся решениями для группы другого типа. (В частности, $A_{2k} \rightrightarrows B_k$, $A_{2k-1} \rightrightarrows C_k$, $E_6 \rightrightarrows F_4$, $B_3 \rightrightarrows G_2$, где $\rightrightarrows$ — символ такого «сужения».) Для того чтобы продемонстрировать различие структуры уравнений для разных простых групп Ли, реализуем для всех них в явном виде общую редукционную конструкцию, приводящую в случае серии A_n к полному решению системы (28). Для остальных типов рассматриваемых групп эта процедура скорее полезна как наводящее соображение при поиске и проверке соответствующих решений.

Симметрийные свойства уравнений дуальности и редукционная процедура. В уравнениях (28) удобно перейти к формально комплексным переменным $2z = r + it$, $2\bar{z} = r - it$ и ввести новые функции x_α, связанные с ρ_β соотношениями $\rho_\alpha = \sum\limits_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} x_\beta - \ln \delta_\alpha$. Тогда (28) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial z\, \partial \bar{z}} \equiv x_{\alpha,\, z\bar{z}} = \exp\left(\sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} x_\beta\right). \tag{41}$$

Сразу же отметим, что предлагаемый метод решения системы (41) в равной степени применим и к уравнениям гиперболического типа ($2z = r + t$, $2\bar{z} = r - t$, $\partial^2/\partial z\, \partial \bar{z} = \partial^2/\partial r^2 - \partial^2/\partial t^2$), реализуя тем самым упомянутую ранее возможность перехода в уравнениях (23) от R_4 к пространству Минковского.

Начнем с рассмотрения классических серий A_n, B_n, C_n, D_n, матрицы Картана для которых имеют единообразную структуру с матрицей Картана A_n, $k_{\alpha\beta} = 2\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta+1} - \delta_{\alpha+1\beta}$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n$, за исключением элементов правого нижнего 3×3 блока $\hat{k}$, имеющего соответственно вид (см., например, [61]):

$$\hat{k}_{A_n} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \hat{k}_{B_n} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\hat{k}_{C_n} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \quad \hat{k}_{D_n} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Подставляя в (41) матрицы Картана этих серий в явном виде, получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} & x_{1,\, z\bar{z}} = \exp(2x_1 - x_2); \\ & x_{2,\, z\bar{z}} = \exp(-x_1 + 2x_2 - x_3); \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_{\alpha,\, z\bar{z}} = \exp(-x_{\alpha-1} + 2x_\alpha - x_{\alpha+1}); \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_{n-3,\, z\bar{z}} = \exp(-x_{n-4} + 2x_{n-3} - x_{n-2}); \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$x_{n-2,\, z\bar z}=\begin{cases}\exp(-x_{n-3}+2x_{n-2}-x_{n-1}) & \text{для } A_n,\ B_n,\ C_n;\\ \exp(-x_{n-3}+2x_{n-2}-x_{n-1}-x_n) & \text{для } D_n;\end{cases}\tag{43}$$

$$x_{n-1,\, z\bar z}=\left\{\begin{array}{ll}\exp(-x_{n-2}+2x_{n-1}-x_n) & \text{для } A_n,\ C_n;\\ \exp(-x_{n-2}+2x_{n-1}-2x_n) & \text{для } B_n;\\ \exp(-x_{n-2}+2x_{n-1}) & \text{для } D_n;\end{array}\right\}\tag{44}$$

$$x_{n,\, z\bar z}=\left\{\begin{array}{ll}\exp(-x_{n-1}+2x_n) & \text{для } A_n,\ B_n;\\ \exp(-2x_{n-1}+2x_n) & \text{для } C_n;\\ \exp(-x_{n-2}+2x_n) & \text{для } D_n,\end{array}\right\}\tag{45}$$

позволяющие выразить неизвестные функции $\exp(-x_\alpha)$, $2\leqslant\alpha\leqslant n$, через одну неизвестную функцию $X\equiv\exp(-x_1)$. Действительно, первое уравнение в (42) дает

$$\exp(-x_2)=X_{,z}X_{,\bar z}-XX_{,z\bar z}=-\det\begin{pmatrix}X & X_{,z}\\ X_{,\bar z} & X_{,z\bar z}\end{pmatrix}\equiv-\Delta_2(X).$$

Из второго уравнения имеем

$$\exp(-x_3)=-\det\begin{pmatrix}X & X_{,z} & X_{,zz}\\ X_{,\bar z} & X_{,\bar z z} & X_{,\bar z zz}\\ X_{,\bar z\bar z} & X_{,\bar z\bar z z} & X_{,\bar z\bar z zz}\end{pmatrix}\equiv-\Delta_3(X).$$

Продолжая процесс редукции вплоть до $(n-3)$-го шага, получаем для всех серий

$$\exp(-x_\alpha)=(-1)^{\alpha(\alpha-1)/2}\Delta_\alpha(X),\quad 2\leqslant\alpha\leqslant n-2,\tag{46}$$

где $\Delta_\alpha(X)$ суть главные миноры порядка α матрицы $(\partial^{i-1}/\partial z^{i-1})\times\times(\partial^{j-1}/\partial\bar z^{j-1})X$*. Последующие этапы для классических серий A_n, B_n, C_n, D_n различны в силу (43) — (45). Из (43) и (44) имеем:

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\Delta_{n-1}(X)=$$
$$=\begin{cases}\exp(-x_{n-1}) & \text{для } A_n,\ B_n,\ C_n;\\ \exp(-x_{n-1}-x_n) & \text{для } D_n,\end{cases}\tag{47}$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta_n(X)=\begin{cases}\exp(-x_n) & \text{для } A_n,\ C_n;\\ \exp(-2x_n) & \text{для } B_n;\\ \exp(-2x_n)+\exp(-2x_{n-1}) & \text{для } D_n.\end{cases}\tag{48}$$

Последний n-й шаг для серии A_n дает соотношение

$$\Delta_{n+1}(X)=(-1)^{n(n+1)/2},\tag{49}$$

---

* Отметим, что миноры $\Delta_\alpha(X)$ удовлетворяют соотношению $\Delta_{\alpha-1}\Delta_{\alpha+1}/\Delta_\alpha=(\ln\Delta_\alpha)_{,z\bar z}$.

представляющее собой нелинейное уравнение $2n$-го порядка для определения одной неизвестной функции X, через которую остальные неизвестные функции $\exp(-x_\alpha)$, $2 \leqslant \alpha \leqslant n$, выражаются посредством формул (46) — (48). Для классических серий B_n и C_n выражения для определителя $\Delta_{n+1}(X)$ имеют вид

$$\underline{B_n}:\ \Delta_{n+1} = 2(-1)^n \Delta_n; \quad \underline{C_n}:\ \Delta_{n+1} = -\Delta_{n-1}.$$

Аналогичная ситуация имеет место и для особых картановских групп E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, на основных этапах редукции для которых мы кратко остановимся.

Из системы (41), подставляя явный вид матриц Картана особых групп, получаем следующие редукционные формулы:

$\underline{E_r\,(r=6,\,7,\,8)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&\exp(-x_2) = (-1)^{(r-4)(r-5)/2}\,\Delta_4(X)/\Delta_{r-4}(Y);\\
&\exp(-x_3) = -\Delta_2(X);\\
&\exp(-x_\alpha) = (-1)^{(r-\alpha)(r-\alpha+1)/2}\,\Delta_{r-\alpha+1}(Y);\\
&\Delta_3(X) = (-1)^{(r-3)(r-4)/2}\,\Delta_{r-3}(Y),\\
&4 \leqslant \alpha \leqslant r.
\end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

При этом неиспользованным осталось уравнение

$$x_{2,z\bar z} = \exp(2x_2 - x_4),$$

приводящее к сложным соотношениям между минорами $\Delta(X)$ и $\Delta(Y)$.

$\underline{F_4}$:

$$\exp(-x_\alpha) = (-1)^{\alpha(\alpha-1)/2}\,\Delta_{5-\alpha}(Y), \quad 2 \leqslant \alpha \leqslant 4;$$
$$\Delta_2(X) = \Delta_3(Y). \qquad (51)$$

Оставшееся уравнение $x_{2,z\bar z} = \exp(-x_1 + 2x_2 - 2x_3)$ дает $\Delta_3(X) = -\Delta_2^2(Y)$:

$\underline{G_2}$:

$$\exp(-x_2) = -\Delta_2(X), \qquad (52)$$

при этом из второго уравнения системы (41) вытекает, что $\Delta_3(X) = -X^2$.

Таким образом, приведенная выше редукционная схема дает алгоритм вычисления решений системы (41) в виде явных формул для $\exp(-x_\alpha)$, $2 \leqslant \alpha \leqslant r$ ($2 \leqslant \alpha \leqslant r-1$ для групп E_r и F_4), выражающихся через одну (две) неизвестную функцию X (X и Y). Последний этап редукции, определяющий функцию X (X и Y), является конструктивным лишь для серии A_n, тогда как для остальных простых групп Ли явное построение оставшихся неизвестных функций требует более детального анализа структуры корневых систем соответствующих групп. В выделенном положении при этом находятся серии B_n, C_n (а также группы F_4 и G_2), для которых получить системы уравнений можно некоторым предельным переходом из соответствующих уравнений других групп.

Система (41) для серии A_n симметрична относительно перестановки $x_\alpha \rightleftarrows x_{n-\alpha+1}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$. При этом для четных $n = 2k$ система в результате приравнивания $x_\alpha = x_{n-\alpha+1}$ для A_{2k} $(SU(2k+1))$ переходит в соответствующую систему серии B_k $(SO(2k+1))$ при необходимой дополнительной замене x_k на $2x_k$ (обусловленной удвоением недиагонального элемента предпоследней строки матрицы Картана группы B_k по сравнению с A_k). Для нечетных $n = 2k - 1$ $(SU(2k))$ приходим, таким образом, к системе (41) для серий C_k $(\mathrm{Sp}(2k))$. Аналогичная ситуация имеет место и для групп F_4 и G_2. Именно, приравнивая в уравнениях (41) для группы E_6 функции $x_1 = x_6$, $x_3 = x_5$ и делая замену $x_1 \to x_4$, $x_2 \to x_1$, $x_3 \to x_3$, $x_4 \to x_2$, получаем систему, отвечающую группе F_4; равенство $x_1 = x_3$ для группы B_3 приводит к системе для группы G_2.

Полная интегрируемость системы уравнений и построение их общих решений. Обратимся теперь к построению общих решений системы (41), под которыми мы будем понимать решения, зависящие от $2r$ произвольных функций. Вопрос о том, насколько такие решения являются самыми общими, остается открытым ввиду отсутствия законченной теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Начнем с унитарной серии A_n, где редукционная схема позволяет свести рассматриваемую задачу к нахождению решений нелинейного уравнения $2n$-го порядка (49) для единственной неизвестной функции X $(\equiv \exp(-x_1))$, через посредство которой остальные функции x_α, $2 \leqslant \alpha \leqslant n$, выражаются по формулам (46) — (48). Решение нелинейного уравнения (49) будем искать в виде

$$X = \sum_{a=0}^{n} P^a(z)\, Q^a(\bar{z}). \qquad (53)$$

Такой выбор подстановки для X подсказан, с одной стороны, известным общим решением уравнения Лиувилля [62]

$$x_{z\bar{z}} = \exp(2x), \qquad (54)$$

являющегося однокомпонентным частным случаем нашей системы, отвечающим алгебре A_1 $(k \equiv k_{11} = 2)$, и, с другой стороны, полиномиальным видом специальных решений системы (41), зависящих от $z + \bar{z}$ (или $z\bar{z}$) [51]. Подстановка (53) в (48) приводит к факторизации зависимости от z и $\bar{z}$, именно, к произведению двух определителей $(n+1)$-го порядка от матриц P и Q с элементами

$P^a_b \equiv P^a_{\underbrace{z\ldots z}_{b}}$, $Q^a_b \equiv Q^a_{\underbrace{\bar{z}\bar{z}\ldots\bar{z}}_{b}}$, т. е.

$$\det P \det Q = (-1)^{n(n+1)/2}. \tag{55}$$

Таким образом, система n уравнений (41) в частных производных второго порядка в конечном счете сводится благодаря независимости P (Q) от $\bar{z}$ (z) к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям n-го порядка, определяющим неизвестные функции $P^n(z)$ и $Q^n(\bar{z})$ по известным функциям $P^a(z)$ и $Q^a(\bar{z})$, $0 \leqslant a \leqslant n-1$, соответственно. При этом, без потери общности, уравнение (55) можно переписать в виде

$$\det P = 1, \quad \det Q = (-1)^{n(n+1)/2}. \tag{56}$$

Для группы $SU(2)$ ($n = 1$) система (41) сводится к уравнению Лиувилля (54), и уравнения (56)

$$\left.\begin{aligned} &P^0 P^1_{,z} - P^0_{,z} P^1 = 1; \\ &Q^0 Q^1_{,\bar{z}} - Q^0_{,\bar{z}} Q^1 = -1 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

имеют частные решения:

$$P^0 = z; \quad P^1 = -1; \quad Q^0 = \bar{z}; \quad Q^1 = 1.$$

Из конформной ковариантности (54) вытекает, что функция X с образующими

$$\left.\begin{aligned} &P^0 = u(z)\, u_{,z}^{-1/2}; \quad P^1 = -u_{,z}^{-1/2}; \\ &Q^0 = \bar{u}(\bar{z})\, \bar{u}_{\bar{z}}^{-1/2}; \quad Q^1 = \bar{u}_{,\bar{z}}^{-1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

где $u(z)$ и $\bar{u}(z)$ — произвольные функции своих аргументов, удовлетворяет этому уравнению, в чем, впрочем, нетрудно убедиться прямой подстановкой выражений (58) в (57). Возникающее при этом решение

$$\exp x = u_{,z}^{1/2} \bar{u}_{,\bar{z}}^{1/2} / u(z)\, \bar{u}(\bar{z}) - 1$$

совпадает с известным общим решением уравнения Лиувилля.

Отметим, что уравнения (57) очевидным образом решаются непосредственно [без использования конформной ковариантности (54)] путем преобразования их к виду $(P^1/P^0)_{,z} = (P^0)^{-2}$, откуда

$$P^1 = \varphi_{-1/2}(z) \int^z \varphi(z')\, dz', \quad P^0 = \varphi^{-1/2}(z).$$

Обратимся теперь к рассмотрению общего случая серии A_n, следуя индукционной схеме. Предположим, что нам известны функции $P^a_{(n-1)}$ и $Q^a_{(n-1)}$, $0 \leqslant a \leqslant n-1$, удовлетворяющие уравнениям (55) для алгебры A_{n-1}. Тогда имеет место следующее очевидное частное решение (56) для A_n:

$$P^a_{(n)} = \int^z dv P^a_{(n-1)}(v), \quad P^n_{(n)} = 1;$$

$$Q^a_{(n)} = \int^{\bar z} d\bar v Q^a_{(n-1)}(\bar v), \quad Q^n_{(n)} = -1,$$

$$0 \leqslant a \leqslant n-1.$$

Функции $P^a_{(n-1)}$ посредством квадратур функционально зависят от $n-1$ произвольных функций. (Аналогичное утверждение справедливо и для $Q^a_{(n-1)}$). Из конформной ковариантности системы (41) следует, что функции

$$\left.\begin{aligned} P^a_{(n)} &= \int^{u(z)} dv P^a_{(n-1)}(v)\, u_{,z}^{-n/2};\\ Q^a_{(n)} &= \int^{\bar u(\bar z)} d\bar v Q^a_{(n-1)}(\bar v)\, \bar u_{,\bar z}^{-n/2};\\ P^n_{(n)} &= u_{,z}^{-n/2}; \quad Q^n_{(n)} = -\bar u_{,\bar z}^{-n/2}, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

удовлетворяют равенствам (55) и зависят от $2n$ произвольных функций, обеспечивая тем самым общее решение системы (41) для серии A_n. Явные выражения для функций P^a ($\equiv P^a_{(n)}$) и Q^a ($\equiv Q^a_{(n)}$), как следует из редукционной процедуры, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} P^a &= \varphi_0(z_0) \prod_{s=1}^{n-a} \int^{z_{s-1}} \varphi_s(z_s)\, dz_s;\\ Q^a &= (-1)^a \bar\varphi_0(\bar z_0) \prod_{s=1}^{n-a} \int^{\bar z_{s-1}} \varphi_s(\bar z_s)\, d\bar z_s, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

где $z_0 \equiv z$; $\bar z_0 \equiv \bar z$; произведение интегралов при $a = n$ отсутствует, $\prod\limits_1^0 \equiv 1$. Множитель $(-1)^a$ в формуле для Q^a обеспечивает правильный знак в правой части равенства (55). Между $n+1$ произвольными функциями $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ имеется единственное соотношение $\varphi_0^{-1} = \prod\limits_{s=1}^{n} \varphi_s^{\frac{n-s+1}{n+1}}$, являющееся следствием равенства (56). (Аналогичному соотношению удовлетворяют функции $\bar\varphi_s$.)

Полученные решения можно связать со свойствами групповой алгебры, если сопоставить функциям φ_s, $1 \leqslant s \leqslant n$, простые корни серии A_n. Тогда кратному интегралу от произведения функций $\varphi_s(z_s)$ в (60) сопоставляется сложный корень этой серии, в который входит простой корень π_1. При этом функции φ^{-1}_0 отвечает первый фундаментальный вес алгебры A_n, а отсутствие интегрирования в выражении для P^n означает, что систему положительных корней, содержащих π_1, следует дополнить нулевым элементом. Таким образом, выражение для X в случае серии A_n полностью определяется заданием следующей последовательности «корней»:

$$0,\ \pi_1,\ \pi_1+\pi_2,\ \ldots,\ \pi_1+\ldots+\pi_n, \tag{61}$$

В соответствии с формулой (46) выражение для $\exp(-x_\alpha)$ равно сумме взаимных произведений миноров порядка α, построенных из элементов первых α строк матриц P и Q. Функция $\exp(-x_n)$ определяется формулой

$$\exp(-x_n)=\sum_{a=0}^{n}\boldsymbol{P}^{(a)}(z)\,\boldsymbol{Q}^{a}(\bar{z}), \tag{62}$$

где $\boldsymbol{P}^a$ и $\boldsymbol{Q}^a$ — миноры n-го порядка; их получают из P^a, Q^a вида (60) заменой φ_{n+1-a} на φ_a. (Аналогичная взаимосвязь имеет место для функций $\exp(-x_s)$ и $\exp(-x_{n-s+1})$. Отметим, что любая перестановка функций P^a с одновременной перестановкой Q^a, при которой сохраняется знак в правой части равенства (55), также приводит к полному решению системы (41) и отражает инвариантность алгебры $SU(n+1)$ относительно преобразований группы Вейля [точнее, группы Вейля $GL(n+1, C)$, если не накладывать условия вещественности решений системы (41)].

Отмеченная в предыдущем разделе инвариантность системы (41) для A_n относительно замены $x_\alpha \rightleftarrows x_{n+1-\alpha}$ дает возможность получить решения в случае серии B_n и C_n непосредственно из вида решений (60) приравниванием $\varphi_{n+1-\alpha}=\varphi_\alpha$. При четных $n=2k$ система (41) для A_n переходит в соответствующую систему (41) серии B_k, тогда как для нечетных $n=2k-1$ мы приходим к решениям серии C_n. Для серии C_n групповой смысл функций P^a и Q^a как системы сложных корней, содержащих простой корень π_1, остается без изменения. В случае серии B_n к системе ее сложных корней следует помимо нулевого элемента добавить удвоенный первый фундаментальный вес $2\omega_1 = 2(\pi_1+\ldots\pi_n)$. Окончательно дополненные системы корней, определяющие функцию X для серий B_n и C_n, имеют вид:

$$\begin{aligned}\underline{B_n}\colon\ & 0,\ \pi_1,\ \pi_1+\pi_2,\ \ldots,\ \pi_1+\ldots+\pi_n,\\ & \pi_1+\ldots+\pi_{n-1}+2\pi_n,\\ & \pi_1+\ldots+\pi_{n-2}+2(\pi_{n-1}+\pi_n),\ \ldots,\ \pi_1+\\ & +2(\pi_2+\ldots+\pi_n),\ 2(\pi_1+\ldots+\pi_n);\end{aligned} \tag{63}$$

$$\underline{C_n}:\quad 0,\ \pi_1,\ \pi_1+\pi_2,\ \ldots,\ \pi_1+\ldots+\pi_n,$$
$$\pi_1+\ldots+\pi_{n-2}+2\pi_{n-1}+\pi_n,\ \ldots,\ \pi_1+2(\pi_2+\ldots$$
$$\ldots+\pi_{n-1})+\pi_n,\ 2(\pi_1+\ldots+\pi_{n-1})+\pi_n. \tag{64}$$

Для ортогональных групп $O(2n)$ дополненная система корней D_n, определяющая функцию X:

$$0,\ \pi_1,\ \pi_1+\pi_2,\ \ldots,\ \pi_1+\ldots+\pi_{n-2},\ \pi_1+\ldots+\pi_{n-2}+\pi_{n-1},$$
$$\pi_1+\ldots+\pi_{n-2}+\pi_n,\ \pi_1+\ldots+\pi_n,\ \pi_1+\ldots+\pi_{n-3}+2\pi_{n-2}+$$
$$+\pi_{n-1}+\pi_n,\ \pi_1+\ldots+\pi_{n-4}+2(\pi_{n-3}+\pi_{n-2})+\pi_{n-1}+\pi_n,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \pi_1+2(\pi_2+\ldots+\pi_{n-2})+\pi_{n-1}+\pi_n,$$
$$2(\pi_1+\ldots+\pi_{n-2})+\pi_{n-1}+\pi_n, \tag{65}$$

как и в случае серии B_n, содержит удвоенный первый фундаментальный вес $2\omega_1=2\ (\pi_1+\ldots+\pi_{n-2})+\pi_{n-1}+\pi_n$. При этом в выражениях, отвечающих сложным корням, где одновременно встречаются простые корни π_{n-1}и π_n, следует провести по ним симметризацию, т. е. к соответствующему кратному интегралу добавить такой же, но с переставленными вкладами от π_{n-1} и π_n.

Корневые системы, отвечающие решениям $\exp(-x_{n-1})$ и $\exp(-x_n)$, связанные с простыми корнями π_{n-1} и π_n, должны быть дополнены (помимо нуля) $\omega_{n-1}+\omega_n$ при нечетных n и $2\omega_{n-1}$ и $2\omega_n$ соответственно для четных n. После этого исходные выражения для $\exp(-x_{n-1})$ и $\exp(-x_n)$ описываются в соответствии с приведенными выше правилами. Выражения для $\exp(-x_\alpha)$, $2\leqslant\alpha\leqslant n-2$, даются соответствующими формулами (46). Отметим, что выражения для решений серии B_{n-1} получаются из соответствующих формул серии D_n подстановкой $\varphi_{n-1}=\varphi_n$, отвечающей приравниванию соответствующих корней в системе (65).

Обратимся теперь к особым картановским сериям. Для алгебры E_6 дополненная система корней, определяющая функцию X, имеет вид:

$$0,\ \pi_1,\ \pi_1+\pi_3,\ \pi_1+\pi_3+\pi_4,\ \pi_1+\pi_3+\pi_4+\pi_5,\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4,$$
$$\pi_1+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6,\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5,\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+$$
$$+\pi_5+\pi_6,\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+2\pi_4+\pi_5,\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+2\pi_4+\pi_5+\pi_6,$$
$$\pi_1+\pi_2+2\pi_3+2\pi_4+\pi_5;\quad \pi_1+\pi_2+\pi_3+2\pi_4+2\pi_5+\pi_6,\ \pi_1+\pi_2+$$
$$+2\pi_3+2\pi_4+\pi_5+\pi_6,\quad 2\pi_1+\pi_2+2\pi_3+2\pi_4+\pi_5+\pi_6,\ 2\pi_1+\pi_2+$$

$$+2\pi_3+2\pi_4+2\pi_5+\pi_6;\ 2\pi_1+\pi_2+2\pi_3+3\pi_4+2\pi_5+\pi_6,\ 2\pi_1+\pi_2+$$
$$+3\pi_3+3\pi_4+2\pi_5+\pi_6,\ 2\pi_1+2\pi_2+2\pi_3+3\pi_4+2\pi_5+\pi_6,$$
$$2\pi_1+2\pi_2+3\pi_3+3\pi_4+2\pi_5+\pi_6,\ 2\pi_1+2\pi_2+3\pi_3+4\pi_4+2\pi_5+\pi_6,$$
$$2\pi_1+2\pi_2+3\pi_3+4\pi_4+3\pi_5+\pi_6;$$
$$2\pi_1+2\pi_2+3\pi_3+4\pi_4+3\pi_5+2\pi_6. \tag{66}$$

Эта система помимо нулевого элемента и положительных корней алгебры $R^+_{\pi_1}$ с высотой $\leqslant 8$, содержащих простой корень π_1, включает также сумму первого и шестого фундаментального веса $\widetilde{\omega} \equiv \equiv \omega_1 + \omega_6$ и всевозможные комбинации $\widetilde{\omega} - \alpha$:

$$\alpha \in R^+_{\left\{\begin{smallmatrix}\pi_1 \rightleftarrows \pi_6, \\ \pi_3 \rightleftarrows \pi_5\end{smallmatrix}\right.}, \quad \{\widetilde{\omega} - \alpha\} \cap R^+_{\pi_1} = \varnothing,$$

которые отсутствуют для классических серий. Функции $\exp(-x_6)$, $\exp(-x_5)$ получаются из $X \equiv \exp(-x_1)$ и $\exp(-x_3)$ соответственно заменой $\varphi_6 \rightleftarrows \varphi_1$, $\varphi_5 \rightleftarrows \varphi_3$ [остальные функции восстанавливаются по формулам (50)]. Так же как и в случае серии D_n в соответствующих выражениях для P^a и Q^a следует провести симметризацию.

Решения для алгебры F_4 получают из соответствующих решений E_6 приравниванием $\varphi_6 = \varphi_1$, $\varphi_5 = \varphi_3$, тогда как функции $\exp(-x_1)$ и $\exp(-x_2)$ для алгебры G_2 возникают из решений для B_3 (0 (7)) приравниванием φ_1 и $2\varphi_3$.

Мы не выписываем здесь весьма громоздких дополненных корневых систем для E_7 и E_8.

В заключение отметим, что хотя нам удалось построить явный вид решений для всех классических серий и особых картановских алгебр, но при этом каждый раз приходится пользоваться конкретным видом соответствующих матриц Картана, т. е. конкретизировать систему (41) для каждого типа простой алгебры. Было бы крайне интересно найти решения системы (41) в инвариантной форме единообразно для всех типов рассматриваемых алгебр, апеллируя только к общим свойствам матрицы Картана.

Одномерный $2r$-параметрический подкласс решений. В конкретных физических приложениях, связанных с инстантонными и монопольными конфигурациями, потребуются решения, зависящие от одной переменной $z + \bar{z}$ (или $z\bar{z}$), которые можно легко получить из наших решений системы (41) подстановкой $\varphi_s = c_s \exp(zm_s)$, $\bar{\varphi}_s = c_s^* \exp(\bar{z}m_s)$ ($\varphi_s = c_s z^{m_s}$, $\bar{\varphi}_s = c_s^* \bar{z}^{m_s}$), где c_s и m_s — произвольные параметры. В результате этой подстановки общие решения, зависящие от $2r$ произвольных функций, превращаются в 2 r-параметрические. Именно такого типа решения послужили отправным пунктом при построении решений общего вида. Забегая вперед, отметим, что описание инстантонов и монополей требует (для обеспечения конечности действия и энергии соответственно) дополнительного сужения класса решений, характеризующихся r «квантовыми» числами $m_1, \ldots, m_r$, по которым происходит вырождение.

Нам представляется полезным привести здесь ряд основных формул общего случая для решений, зависящих только от $z+\bar{z}=r$, что понадобится как в дальнейшем при проведении конкретных расчетов для инстантонов и монополей, так и в целях большей наглядности групповой интерпретации в рамках корневой техники. Для функций x_α, зависящих от $z+\bar{z}$, система (41) имеет вид *

$$\ddot{x}_\alpha=\exp\left(\sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta}x_\beta\right). \tag{67}$$

Как и ранее, рассмотрим вначале наиболее простой и симметричный случай серии A_n. Тогда, следуя введенным в разд. 1 обозначениям и полагая $\varphi_s=c_s\exp(zm_s)$ в (60), приходим к следующему выражению для решений системы (67):

$$\begin{gathered}\exp(-x_\nu)=(-1)^{\nu(\nu-1)/2}\exp[\omega_\nu(c-rm)]\times\\ \times\sum_{i>j>\ldots>s}\left\{\exp[\alpha_i^1(rm-c)+\alpha_j^2(rm-c)+\ldots+\alpha_s^\nu(rm-c)]\times\right.\\ \left.\times\prod_{p\neq i,\ \ldots,\ q\neq s} f^{-1}[\alpha_i^1(m)+\ldots+\alpha_s^\nu(m)-\alpha_p^1(m)-\ldots-\alpha_q^\nu(m)]\right\},\end{gathered} \tag{68}$$

где α_i^λ $(\equiv\sum_\mu t_i^\mu\pi_\mu)$ пробегает подмножество $R^+_{\pi_\lambda}\subset R^+$ всех положительных корней серии A_n, содержащих простой корень π_λ, дополненное нулевым элементом $\alpha_0^\lambda\equiv 0$ и упорядоченное по высоте, т. е. i принимает значения $0, \pi_\lambda, \pi_\lambda+\pi_{\lambda+1}, \ldots, \pi_\lambda+\ldots+\pi_n$. (При этом $\alpha_0^\lambda(m)=0$, $\alpha_{\pi_\lambda}^\lambda(m)=m_\lambda, \ldots, \alpha^\lambda_{\pi_\lambda+\ldots+\pi_n}=\sum_{\mu=\lambda}^{n}\pi_\mu$.) Множитель f равен квадрату своего аргумента, если последний совпадает с отрицательным корнем A_n и равен единице в противном случае.

* Система (67) [см. также (28)] для группы $SU(n+1)$ совпадает с цепочкой Тода [72] (с граничными условиями $\rho_0=\rho_{n+1}=0$) и, таким образом, приводимые ниже формулы решают задачу ее полного интегрирования. По-видимому, полное интегрирование уравнения Кортевега де Фриза [64] можно провести «предельным» переходом в выражении (68): $c_\alpha\to c(\alpha)$; $m_\alpha\to m(\alpha)$.

Очевидное наличие симметрийных соотношений $x_\alpha \rightleftarrows x_{n-\alpha+1}$ при замене произвольных параметров m_α, c_α на $m_{n+1-\alpha}$, $c_{n+1-\alpha}$ позволяет, как и ранее, сразу же на уровне решений реализовать отмеченную в предыдущих разделах возможность перехода от унитарной серии A_n к ортогональной B и симплектической C. Это автоматически достигается приравниванием в (68) параметров m_α, c_α и $m_{n-\alpha+1}$, $c_{n-\alpha+1}$ для четных ($n = 2k$) и нечетных ($n = 2k - 1$) значений n. Важным обстоятельством является то, что для серии C_n X сохраняет при этой процедуре свою корневую структуру, но уже в терминах собственного корневого пространства. Множители f для алгебр B и C, определяемые путем приравнивания $m_\alpha = m_{n+1-\alpha}$ и $c_\alpha = c_{n+1-\alpha}$ в соответствующих выражениях для унитарной серии, нам пока не удалось получить в терминах их собственных корневых пространств.

Не останавливаясь на случаях простых алгебр, рассмотренных ранее, приведем для иллюстрации выражения для функций $\exp(-x_1)$ и $\exp(-x_4)$ в алгебре D_4 и явный вид решений системы (67) для алгебр второго ранга $SU(3)$, $\mathrm{Sp}(4) \cong O(5)$ и G_2, преобразовав их из соображений краткости формы записи к виду, зависящему от $R = 2(z\bar{z})^{1/2}$.

$\underline{D_4}$:

$$\exp(-x_1) = \tilde{c}_1^{-1}\tilde{c}_2^{-1}\tilde{c}_3^{-1/2}\tilde{c}_4^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\{-r[m_1 + m_2 + (m_3 + m_4)/2]\}\Big\{\exp[(2m_1 + 2m_2 + m_3 + m_4)r] -$$
$$-(\tilde{c}_1/m_1^2)\exp[(m_1 + 2m_2 + m_3 + m_4)r] +$$
$$+\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2\exp[(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)r]}{(m_1 + m_2)^2 m_2^2} - \frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2\tilde{c}_4\exp[(m_1 + m_2 + m_3)r]}{(m_1 + m_2 + m_4)^2(m_2 + m_4)^2 m_4^2} -$$
$$-\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2\tilde{c}_3\exp[(m_1 + m_2 + m_4)r]}{(m_1 + m_2 + m_3)^2(m_2 + m_3)^2 m_3^2} +$$
$$+\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\exp[(m_1 + m_2)r]}{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^2(m_2 + m_3 + m_4)^2 m_3^2 m_4^2} -$$
$$-\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2^2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\exp(m_1 r)}{(m_1 + 2m_2 + m_3 + m_4)^2(m_2 + m_3 + m_4)^2(m_2 + m_3)^2(m_2 + m_4)^2 m_2^2} +$$
$$+\frac{\tilde{c}_1^2\tilde{c}_2^2\tilde{c}_3\tilde{c}_4}{\begin{array}{c}(m_1 + 2m_2 + m_3 + m_4)^2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^2(m_1 + m_2 + m_3)^2 \times \\ \times (m_1 + m_2 + m_4)^2(m_1 + m_2)^2 m_1^2\end{array}}\Big\}; \qquad (69)$$

$$[\tilde{c}_i \equiv \exp(-c_i)];$$

$$\exp(-x_4) = \tilde{c}_1^{-1/2}\tilde{c}_2^{-1}\tilde{c}_3^{-1/2}\tilde{c}_4^{-1}\exp\{-r[m_2+m_4+(m_1+m_3)/2]\}\times$$
$$\times\Big\{\exp[(m_1+2m_2+m_3+2m_4)r] -$$
$$-\frac{\tilde{c}_4\exp[(m_1+2m_2+m_3+m_4)r]}{m_4^2}+\frac{\tilde{c}_2\tilde{c}_4\exp[(m_1+m_2+m_3+m_4)r]}{(m_2+m_4)^2m_2^2}-$$
$$-\frac{\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\exp[(m_1+m_2+m_4)r]}{(m_2+m_3+m_4)^2(m_2+m_3)^2m_3^2}-\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2\tilde{c}_4\exp[(m_2+m_3+m_4)r]}{(m_1+m_2+m_4)^2(m_1+m_2)^2m_1^2}+$$
$$+\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\exp[(m_2+m_4)r]}{(m_1+m_2+m_3+m_4)^2(m_1+m_2+m_3)^2m_1^2m_3^2}-$$
$$-\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2^2\tilde{c}_3\tilde{c}_4\exp(m_4r)}{(m_1+2m_2+m_3+m_4)^2(m_1+m_2+m_3)^2(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2m_2^2}+$$
$$+\frac{\tilde{c}_1\tilde{c}_2^2\tilde{c}_3\tilde{c}_4^2}{\begin{array}{c}(m_1+2m_2+m_3+m_4)^2(m_1+m_2+m_3+m_4)^2(m_1+m_2+m_4)^2\times\\ \times(m_2+m_3+m_4)^2(m_2+m_4)^2m_4^2\end{array}}\Big\}; \quad (70)$$

$\underline{SU}(3)$:
$$\exp(-x_1) = \left(\frac{c_1}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{c_2}{2}\right)^{-2/3}R^{(-2m_1-m_2+6)/3}\times$$
$$\times\left(R^{m_1+m_2}-\frac{c_2}{m_2^2}R^{m_1}+\frac{c_1c_2}{m_1^2(m_1+m_2)^2}\right);$$
$$\exp(-x_2) = \left(\frac{c_1}{2}\right)^{-2/3}\left(\frac{c_2}{2}\right)^{-1/3}R^{(-m_1-2m_2+6)/3}\times$$
$$\times\left(R^{m_1+m_2}-\frac{c_1}{m_1^2}R^{m_2}+\frac{c_1c_2}{m_2^2(m_1+m_2)^2}\right); \quad (71)$$

$\underline{O}(5)$:
$$\left.\begin{array}{l}\exp(-x_1) = \left(\frac{c_1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{c_2}{4}\right)^{-1/2}R^{(-2m_1-m_2+6)/2}\times\\ \times\left(R^{2m_1+m_2}-\frac{c_1}{m_1^2}R^{m_1+m_2}+\frac{c_1c_2}{m_2^2(m_1+m_2)^2}R^{m_1}-\right.\\ \left.-\frac{c_1^2c_2}{m_1^2(m_1+m_2)^2(2m_1+m_2)^2}\right);\\ \exp(-x_2) = \left(\frac{c_1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{c_2}{4}\right)^{-1}R^{-m_1-m_2+4}\times\\ \times\left(R^{2m_1+2m_2}-\frac{c_2}{m_2^2}R^{2m_1+m_2}+\frac{2c_1c_2}{m_1^2(m_1+m_2)^2}R^{m_1+m_2}-\right.\\ \left.-\frac{c_1^2c_2}{m_1^4(2m_1+m_2)^2}R^{m_2}+\frac{c_1^2c_2^2}{m_2^2(m_1+m_2)^4(2m_1+m_2)^2}\right);\end{array}\right\} \quad (72)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underline{G_2}:\ \exp(-x_1)=\left(\frac{c_1}{6}\right)^{-2}\left(\frac{c_2}{10}\right)^{-1}R^{-2m_1-m_2+6}\times\\
&\times\Bigl(R^{4m_1+2m_2}-\frac{c_1}{m_1^2}R^{3m_1+2m_2}+\frac{c_1c_2}{m_2^2(m_1+m_2)^2}\times\\
&\times R^{3m_1+m_2}-\frac{2c_1^2c_2}{(2m_1+m_2)^2(m_1+m_2)^2m_1^2}R^{2m_1+m_2}+\\
&+\frac{c_1^3c_2}{(3m_1+m_2)^2(2m_1+m_2)^2m_1^4}R^{m_1+m_2}-\\
&-\frac{c_1^3c_2^2}{(3m_1+2m_2)^2(m_1+m_2)^4(2m_1+m_2)^2m_2^2}R^{m_1}+\\
&+\frac{c_1^4c_2^2}{(2m_1+m_2)^4(3m_1+2m_2)^2(3m_1+m_2)^2(m_1+m_2)^2m_1^2}\Bigr);\\
&\exp(-x_2)=\left(\frac{c_1}{6}\right)^{-3}\left(\frac{c_2}{10}\right)^{-2}R^{-3m_1-2m_2+10}\times\\
&\times\Bigl(R^{6m_1+4m_2}-\frac{c_2}{m_2^2}R^{6m_1+3m_2}+\frac{3c_1c_2}{m_1^2(m_1+m_2)^2}R^{5m_1+3m_2}-\\
&-\frac{3c_1^2c_2}{m_1^4(2m_1+m_2)^2}R^{4m_1+3m_2}+\frac{3c_1^2c_2^2}{m_2^2(m_1+m_2)^4(2m_1+m_2)^2}\times\\
&\times R^{4m_1+2m_2}+\frac{c_1^3c_2}{m_1^6(3m_1+m_2)^2}R^{3m_1+3m_2}-\\
&-\frac{24c_1^3c_2^2(3m_1^2+3m_1m_2+m_2^2)}{m_1^2m_2^2(m_1+m_2)^2(2m_1+m_2)^2(3m_1+m_2)^2(3m_1+2m_2)^2}\times\\
&\times R^{3m_1+2m_2}+\frac{c_1^3c_2^3}{m_2^4(m_1+m_2)^6(3m_1+2m_2)^2}R^{3m_1+m_2}+\\
&+\frac{3c_1^4c_2^2}{m_1^4(2m_1+m_2)^4(3m_1+m_2)^2(m_1+m_2)^2}R^{2m_1+2m_2}-\\
&-\frac{3c_1^4c_2^3}{m_2^2(m_1+m_2)^4(2m_1+m_2)^4m_1^2(3m_1+2m_2)^2}R^{2m_1+m_2}+\\
&+\frac{3c_1^5c_2^3}{m_1^4(m_1+m_2)^4(2m_1+m_2)^4(3m_1+m_2)^2(3m_1+2m_2)^2}R^{m_1+m_2}-\\
&-\frac{c_1^6c_2^3}{m_1^2(2m_1+m_2)^6(3m_1+m_2)^4(3m_1+2m_2)^2}R^{m_2}+\\
&+\frac{c_1^6c_2^4}{m_2^2(m_1+m_2)^6(2m_1+m_2)^6(3m_1+2m_2)^4(3m_1+m_2)^2}\Bigr).
\end{aligned}
\right\}\quad(73)
$$

Как видно из приведенных явных формул, показатели членов в полиномах в точности воспроизводят элементы дополненной системы корней соответствующих алгебр и обеспечивают наглядную групповую интерпретацию структуры решений.

4. ОПИСАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ИНСТАНТОННЫХ И СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ МОНОПОЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Инстантонные решения и значения топологического заряда. Цилиндрически-симметричные инстантоны образуют подкласс $2r$-параметрических решений, построенных в разд. 3, регулярных во всех точках пространства (включая бесконечность). При этом произвольные параметры c_α и m_α должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить несингулярность соответствующих решений и конечность значений действия или, что то же самое, топологического заряда. Как уже отмечалось в разд. 2, конформным преобразованием можно перейти от решений $\overset{0}{\rho}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} x_\beta$, зависящих от $z + \bar{z}$ (или $z\bar{z}$), к $\rho_\alpha(z) = \rho^0_\alpha(g(z)) + \ln |dg/dz|^2$, также являющихся решениями системы (41) для произвольной аналитической функции $g(z)$. Для того чтобы структурные функции $\psi^\alpha = (1/2)\ln[r^2 \exp(\rho_\alpha)/|l^\alpha|^2]$, входящие в выражение для плотности топологического заряда, были конечными при $r \equiv z + \bar{z} = 0$, необходимо скомпенсировать двойной нуль в этой точке полюсами соответствующего порядка у функции $\exp \overset{0}{\rho}_\alpha$, т. е. наложить граничные условия на поведение построенных нами функций $\exp(-x_\alpha)$ на малых «расстояниях». Нетрудно убедиться, что для обеспечения этих условий достаточно потребовать, чтобы функция X ($\equiv \exp(-x_1)$) имела корень порядка δ_1 при $r = 0$. Тогда система (41) автоматически гарантирует появление корней нужного порядка ($= \delta_\alpha$) при $r = 0$ у остальных функций $\exp(-x_\alpha)$, $2 \leqslant \alpha \leqslant r$. Реализация этого требования в виде набора равенств $\partial^\alpha X/\partial r^\alpha|_{r=0} = 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \delta_1 - 1$, приводит к полному определению параметров c_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$, через параметры m_β. Приведем для иллюстрации решения для групп ранга 2, обеспечивающие необходимые граничные условия при $r = 0$:

$$\underline{SU(3)}:\quad \left.\begin{aligned} &\exp(-x_1) = R^{(-2m_1-m_2+6)/3}(R-1)^2\pi^1_1;\\ &c_1 = m_1^2(m_1+m_2)/m_2;\\ &\exp(-x_2) = R^{(-m_1-2m_2+6)/3}(R-1)^2\pi^1_2;\\ &c_2 = m_2^2(m_1+m_2)/m_1; \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

$$\underline{O(5)}:\quad \left.\begin{aligned} &\exp(-x_1) = R^{(-2m_1-m_2+6)/2}(R-1)^3\pi^2_1;\\ &c_1 = m_1^2(2m_1+m_2)/m_2;\\ &\exp(-x_2) = R^{-m_1-m_2+4}(R-1)^4\pi^2_2;\\ &c_2 = m_2^2(m_1+m_2)^2/m_1^2; \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned} G_2:\quad & \exp(-x_1) = R^{-2m_1-m_2+6}(R-1)^6\pi_1^3; \\ & c_1 = m_1^2(2m_1+m_2)(3m_1+m_2)/(m_1+m_2)\,m_2; \\ & \qquad \exp(-x_2) = R^{-3m_1-2m_2+10}(R-1)^{10}\pi_2^3; \\ & c_2 = (m_1+m_2)^3(3m_1+2m_2)\,m_2^2/m_1^3(3m_1+m_2). \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Эти выражения получаются из решений (71) — (73) приравниванием нулю соответствующего количества производных. Здесь мы можем считать, что $R \equiv 2\,(g\,(z))^{1/2}\,(\overline{g\,(z)})^{1/2}$ обращается в единицу при подходящем выборе функций $g\,(z)$. Подчеркнем, что при положительных значениях R конечные полиномы π_α^p являются положительно определенными и нигде не обращаются в нуль. До сих пор значения параметров m_α ничем не фиксировались. Однако для обеспечения необходимых свойств аналитичности соответствующих решений следует, вообще говоря, потребовать их целочисленности.

Перейдем теперь к выяснению условий, накладываемых на функцию $g\,(z)$, обеспечивающих несингулярность функций ψ^α и соответствующих решений уравнений самодуальности. Как уже говорилось, необходимо, чтобы модуль $|\,g\,(z)\,|$ обращался в единицу при $r = 0$. Далее, следует потребовать, чтобы оставшиеся после сокращения r^2 полюсными множителями из $\exp x_\alpha$ функции в $\exp 2\psi^\alpha$ не имели ни полюсов, ни нулей в правой полуплоскости переменной z. Как и в рассмотренном выше примере групп второго ранга, полиномиальная часть решений $\exp(-x_\alpha)$ после исключения корневых множителей в нуль нигде не обращается. Поэтому функции l^α достаточно выбрать таким образом, чтобы они компенсировали вклад $|\,dg/dz\,|$ и предполиномиального множителя в $\exp(-x_\alpha)$, т. е. с учетом равенства $k_{\alpha\beta}\omega_\beta\,(m) \equiv m_\alpha$ положить $|\,l^\alpha\,|^2 = |\,dg/dz\,|^2\,|\,g\,|^{m_\alpha-2}$. Теперь вспомним, что из-за условий Коши — Римана как подсистемы уравнений самодуальности (27) функции l^α должны быть аналитическими. Поэтому чтобы обеспечить целочисленность показателя $(m_\alpha - 2)/2$, следует потребовать, чтобы $g\,(z)$ была квадратом некоторой аналитической функции $G\,(z)$, $g\,(z) = G^2\,(z)$, откуда $l^\alpha = 2G^{m_\alpha-1}\,dG/dz$. Тогда очевидно, что решения ψ^α обладают необходимыми аналитическими свойствами, если $|\,G\,| = 1$ при $r = 0$ и $|\,G\,| < 1$ при $r > 0$. Наиболее общей аналитической функцией, удовлетворяющей этим условиям, является функция Бляшке: $G\,(z) = \prod_{i=1}^{l} \frac{a_i - z}{a_i^* + z}$, где a_i — произвольные комплексные числа с положительной вещественной частью. Эта функция имеет l нулей и ни одного полюса в правой полуплоскости переменной z.

Для вычисления топологического заряда удобно воспользоваться формулой (29), приняв в ней $W_\alpha = \mathrm{i}\exp(\psi^\alpha)\,l^\alpha$. Так как функции ψ^α однозначны, то они не дают вклада в контурный интеграл, поэтому

$$Q = \frac{1}{4\pi i} \sum_{\alpha=1}^{r} \mathscr{B}_\alpha \oint dx_\mu \, \partial_\mu \ln G^{m_\alpha - 1} \, dG/dz. \tag{77}$$

Учитывая, что $G^{m_\alpha - 1} \, dG/dz$ имеет $m_\alpha l - 1$ нулей в правой z-полуплоскости, каждый из которых дает вклад $2\pi i$ в интеграл (77), получаем для топологического заряда окончательное выражение

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{r} \mathscr{B}_\alpha (l m_\alpha - 1). \tag{78}$$

Таким образом, построенные нами инстантонные решения отвечают топологическому заряду (78) и характеризуются помимо l произвольных комплексных параметров a_i, $\operatorname{Re} a_i > 0$, функции Бляшке, также r дополнительными «квантовыми» числами m_α. Наличие последних соответствует существованию дискретных серий решений с фиксированным значением заряда и может интерпретироваться как внутренние степени свободы инстантонов.

Несингулярные монопольные решения; матрицы магнитного заряда и масс монополей. Развитый в предыдущих разделах метод интегрирования нелинейных систем в полной мере применим к построению точных несингулярных решений уравнений (40), описывающих сферически-симметричные монопольные конфигурации в пределе БПЗ для произвольной компактной калибровочной группы G с полем Хиггса в присоединенном представлении. Нетрудно показать, что в результате подстановки

$$K_\alpha = r \exp \rho_\alpha / 2; \quad H_\alpha = 1 + (1/2) r \dot{\rho}_\alpha, \tag{79}$$

уравнения (40) сводятся к системе

$$\ddot{\rho}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} \delta_\beta k_{\alpha\beta} \exp \rho_\beta, \tag{80}$$

описывающей согласно (67) цилиндрически-симметричные самодуальные конфигурации в статическом пределе. Поэтому соотношения (79) реализуют отмеченное в разд. 2 соответствие между цилиндрически-симметричными статическими самодуальными полями в R_4 и сферически-симметричными монополями в пространстве Минковского. Данное обстоятельство позволяет непосредственно реконструировать точные монопольные решения, исходя из построенных уже нами решений системы (80), которые параметризуются $2r$ произвольными постоянными. Для этого достаточно подставить выражения для решений $\rho_\alpha = \sum_\beta k_{\alpha\beta} x_\beta$ из разд. 3 в формулу (79).

Построенные решения не имеют сингулярностей в конечном интервале значений r. Для обеспечения конечности плотности гамильтониана системы необходимо удовлетворить соответствующим граничным условиям на бесконечности и при малых расстояниях. Процедура выделения подкласса решений, имеющих правильное поведение при $r \to 0$, аналогична проведенной в инстантонном случае, в результате чего монопольные решения параметризуются через структуры K_α и H_α набором r параметров m_α.

Для вычисления энергии монопольной конфигурации, задаваемой в пределе БПЗ выражением (36) и матрицы магнитного заряда (37), нам потребуется явный вид асимптотик при $r \to \infty$ магнитного поля $\mathbf{B}$, точнее $B_r \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}$, и поля Хиггса φ*, которые для наших решений имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} B_r &= -\frac{1}{2r^2}\sum_\alpha \delta_\alpha h_\alpha (K_\alpha^2 - 1);\\ \varphi &= \sum_{\alpha,\,\beta} k_{\beta\alpha}^{-1} h_\beta \frac{d}{dr}\ln K_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Напомним, что здесь h_α — генераторы картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ из $\mathfrak{g}$, отвечающие простым корням G. Формула (81) с очевидностью вытекает вследствие вышеупомянутого соответствия $(A_0, \mathbf{A})$ и $(\varphi, \mathbf{W})$ из выражений (36) и (37) с учетом соотношения $H_\alpha = r\,\dfrac{d}{dr}\ln K_\alpha$ [см. (79)]. При этом следует также воспользоваться заменой операторов T_α на $\sum\limits_\beta k_{\beta\alpha}^{-1} h_\beta$, справедливость которой нетрудно проверить, направив единичный вектор $\mathbf{n}$ по третьей оси, $\mathbf{n} = (0,0,1)$, тогда $W^l \Rightarrow H^{(l)}$ и имеет место следующая цепочка равенств:

$$T_\alpha = \sum_l \delta_\alpha \varkappa_\alpha^{1/2} W^l \widetilde{H}_\alpha^l \Rightarrow \sum_l \delta_\alpha \varkappa_\alpha^{1/2} H^{(l)} \widetilde{H}_\alpha^l = \sum_{l,\,\beta} \delta_\alpha \varkappa_\alpha^{1/2} \widetilde{H}_\alpha^l H_\beta^l h_\beta =$$

$$= \sum_{\beta,\,l} \delta_\alpha \varkappa_\alpha^{1/2} \widetilde{H}_\alpha^l h_\beta \varkappa_\beta^{-1/2} \frac{1}{l(l+1)} \widetilde{H}_\beta^l = \sum_\beta k_{\beta\alpha}^{-1} h_\beta.$$

Вследствие граничных условий на бесконечности вклад поля Хиггса полностью определяется показателями предполиномиальных экспонент соответствующих решений $\exp(-x_\alpha)$, т. е. $\omega_\alpha(-rm) = -r\sum\limits_\beta k_{\alpha\beta}^{-1} m_\beta$. Действительно, из граничных условий на бесконечности $K_\alpha \Rightarrow 0$ при $r \to \infty$, тогда как

$$\lim_{r\to\infty} \frac{d}{dr}\ln K_\alpha^2 = -k_{\alpha\beta}\lim_{r\to\infty}\frac{d}{dr}\ln\exp(-x_\beta) =$$

$$= k_{\alpha\beta}\omega_\beta(m) = \frac{1}{2}m_\alpha.$$

---

* Как и ранее, постоянная связи e калибровочного поля опускается.

Поэтому (36) и (37) приводят к следующим выражениям для матриц магнитного заряда g и масс M монополей:

$$g = 2\pi \sum_{\alpha} \delta_\alpha h_\alpha; \quad M = \pi \sum_{\alpha, \beta} \delta_\alpha k^{-1}_{\alpha\beta} m_\beta . \tag{82}$$

Отметим, что вывод (82) для матрицы g не зависит от явного вида решения и полностью определяется граничными условиями.

Не останавливаясь на выводе формулы для массовой матрицы M_W калибровочного поля, приведем лишь ее окончательное выражение в принятой нормировке

$$M_W = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} \delta_\alpha k^{-1}_{\alpha\beta} m_\beta,$$

которое можно получить, повторив соответствующие рассуждения работы [63].

Примечательным свойством наших решений и массовой формулы является существование дискретных серий монопольных решений, нумеруемых «квантовыми» числами $m_1, \ldots, m_r$ и вырождающихся по ним при фиксированных значениях элементов $(\delta k^{-1} m)_{\alpha\beta}$ матрицы масс монополей. Это обстоятельство может, по-видимому, рассматриваться как указание на возможность наличия структурных характеристик монопольных конфигураций.

Все известные ранее монопольные решения (см., например, [5, 54, 56, 57]), отвечающие низшим допустимым ненулевым значениям магнитных зарядов и масс несингулярных монополей, являются специальными случаями полученных выше выражений. В частности, решения [56] для унитарной группы получаются из наших решений, если в (68) принять $m_1 = 2$ и $m_\alpha = 1$, $2 \leqslant \alpha \leqslant n$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем кратко основные результаты, изложенные в обзоре, и обратим внимание на ряд перспективных проблем по обсуждаемой тематике.

Основной результат заключается в конструктивном доказательстве полной интегрируемости системы существенно нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$x_{\alpha, z\bar{z}} = \exp \sum_{\beta=1}^{r} k_{\alpha\beta} x_\beta, \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{83}$$

где k — матрица Картана простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга r, путем построения ее общих решений, зависящих от $2r$ произвольных функций. Система (83) является реализацией условия самодуальности цилиндрически-симметричных полей Янга — Миллса при минимальном вложении $SU\,(2)$ в произвольную компактную калибровочную группу G, при котором подгруппа инвариантности абелева, $S = \prod_{1}^{r} \otimes U\,(1)$. Это позволило описать цилиндрически-симметричные инстантонные и монопольные конфигурации в рамках единого метода как r-параметрические подклассы решений системы (83) и вычислить в явном виде значения топологического заряда инстантонов и матриц магнитного заряда и масс монополей.

Возможность полного интегрирования системы (83) в случае, когда k — матрица Картана $\mathfrak{g}$, ставит целый ряд интересных проблем как математического, так и физического характера, требующих дальнейших исследований. Перечислим кратко некоторые из них.

1. Взаимосвязь факта полной интегрируемости системы (83) со свойствами простых алгебр Ли и возможная формулировка критерия простоты конечномерных алгебр Ли как условия полиномиальности (конечной) соответствующих общих решений.

2. Построение единообразного метода интегрирования системы (83), аппелирующего к общим свойствам матриц Картана, а не к собственным корневым пространствам каждого типа алгебр Ли в отдельности.

3. Построение систем цилиндрически-симметричных уравнений дуальности калибровочных теорий для всех типов вложений $SU\,(2)$ в G и решение вопроса об их полной интегрируемости. Эта задача тесно связана с возможностью формулировки соответствующих уравнений сугубо через калибровочно-инвариантные относительно S величины.

4. Связь изложенного в обзоре подхода к интегрированию системы (83) с методом обратной задачи рассеяния [64].

5. Нахождение преобразований Бэклунда [65] для системы (83), связывающих ее решения как с решениями той же системы, так и с r свободными уравнениями Лапласа ($x_{\alpha,z\bar{z}} = 0$). Известно, что для группы $SU\,(2)$ такие преобразования существуют [66]. Далее, как известно, уравнение Лиувилля тесно связано с уравнением синус-Гордона. Если эта взаимосвязь имеет место и в многокомпонентном случае, то можно было бы на основе многокомпонентного уравнения синус-Гордона построить модели квантовой теории с точной S-матрицей, как и в однокомпонентном случае [67]. При этом квантовые числа солитонных состояний таких моделей образовывали бы многомерные многообразия.

6. Взаимосвязь преобразований Бэклунда уравнений калибровочных теорий с вейлевским автоморфизмом, выделяющим различные вещественные формы комплексных групп, и условием вещественности решений. Имеются определенные указания на

возможность существования таких соотношений, основанные на преобразованиях Бэклунда, связывающих решения уравнений Янга [23] для групп $SU(p, q)$ и $SU(p-1, q+1)$ [68].

7. Интегрируемость системы (83) при других, отличных от картановской, нетривиальных матрицах k. Положительное решение этого вопроса позволило бы, по-видимому, получить ряд важных физических следствий в других областях теоретической физики, где возникают уравнения типа Лиувилля, например возможные обобщения уравнений Гинзбурга — Ландау [69], Дебая — Хюккеля [70] и т. п. В частности, для вырожденных матриц $k = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$, отвечающих согласно [71] бесконечномерным группам, соответствующая система (83) приводит к уравнению синус-Гордона *.

8. Полная интегрируемость уравнений дуальности ($F_{\mu\nu} = {}^*F_{\mu\nu}$) без предположения о цилиндрической симметрии.

9. Построение решений общих уравнений Янга — Миллса ($\partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0$) без предположения дуальности, хотя бы в цилиндрически-симметричном случае [см. (23)].

10. Интерпретация «квантовых» чисел $m_1, \ldots, m_r$, определяющих построенные нами инстантонные и монопольные конфигурации как внутренних структурных характеристик этих объектов.

11. Формулировка условия дуальности как критической «точки» скачкообразного повышения симметрии решений соответствующей системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yang C. N., Mills R. L.**— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191.
2. **Atiyah M. F. e.a.**— Phys. Lett. A, 1978, v. 65, p. 185.
3. **Adler S.** Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory. V. 1. Cambridge, 1970; **Трейман С., Джекив Р., Гросс Д.** Лекции по алгебре токов. Пер. с англ. М., Атомиздат, 1977; **Brown L., Carlitz R., Lee C.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 417; **Jackiw R., Rebbi C.** Ibid., 1977, v. 16, p. 1052.
4. **Marciano W., Pagels H.**— Phys. Repts C, 1978, v. 36, p. 137; **Jackiw R.**— Rev. Mod. Phys., 1977, v. 49, p. 681; **Schroer B.** Preprint CERN TH-2377. Geneva, 1977; **de Alfaro V., Fubini S., Furlan G.** Preprint IC/78/69. Trieste, 1978.
5. **Goddard P., Olive D. I.**— Rep. Progr. Phys., 1978, v. 41, p. 1357.
6. **Olive D.** Lectures in Liblice Symposium on Mathematical Methods in the Theory of the Elementary Particles, 1978; Lectures in Les Houches Winter Workshop, 1978.
7. **De Alfaro V., Fubini S., Furlan G.**— Phys. Lett. B, 1978, v. 73, p. 463; 1977, v. 65, p. 163; **Callan C., Dashen R., Gross D.**— Ibid., 1977, v. 66,

* К другому интересному уравнению с правой частью $\exp(2x) - 2\exp(-x)$ приводит рассмотрение матрицы $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$.

375; Phys. Rev. D., 1978, v. 17, p. 2717; **Gross D. J.** Preprint IAS. Princeton, 1977; **Glimm J., Jaffe A.**— Phys. Lett. B, 1978, v. 73, p. 167.
8. **Crewther R. J.** Preprint CERN TH-2522. Geneva, 1978; **Lectures** notes in Mathematics, N 676, 1977; **Atiyah M. F., Jones J. D. S.**— Comm. Math. Phys., 1978, v. 61, p. 97; **Perelomov A. M.**— Ibid., 1978, v. 63, p. 237.
9. **Coleman S.** Plenum Press, N.Y., 1977; Erice Lectures, 1975; 1976; 1977; **Rajaraman S.**— Phys. Repts C, 1975, v. 21, p. 227; **Gervais J. L., Neveu A.** Ibid., 1976, v. 23, p. 237; **Jackiw R.**— Acta phys. polon. B, 1975, v. 6, p. 919; **Abers E. C., Lee B. W.**— Phys. Repts C, 1973, v. 9, p. 1.
10. **Jackiw R., Nohl C., Rebbi C.** Plenum Press, N.Y., 1978; **Sciuto S.**— Riv. Nuovo cimento, 1978; **Coleman S.** Preprint HUTP-78/1004, 1978.
11. **Polyakov A. M.**— Phys. Lett. B, 1975, v. 59, p. 82; **Nucl. Phys. B**, 1977, v. 120, p. 429; **Белавин А. А., Поляков А. М.**— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 245; **'t Hooft G.** — Phys. Rev., 1976, v. 14, p. 3432; **Phys. Rev. Lett**, 1976, v. 37, p. 8.
12. **Jackiw R., Rebbi C.**— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 172; **Callan C. G. (Jr), Dashen R., Gross D. J.**— Phys. Lett. B, 1976, v. 63.
13. **Belavin A. A. e.a.**— Phys. Lett. B, 1975, v. 59, p. 85.
14. **Corrigan E. F., Fairlie D.**— Phys. Lett. B, 1977, v. 67, p. 69.
15. **Wilczek F.** In: Quark confinement and Field Theory, N.Y., 1977.
16. **Jackiw R., Nohl C., Rebbi C.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 1642.
17. **Зиновьев Ю. М., Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— Теорет. и мат. физ., 1977, т. 32, с. 424.
18. **'t Hooft G.** (unpublished).
19. **Jackiw R., Rebbi C.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 1052; **Ore F. R.** Ibid., 1977, v. 15, p. 470; **Ansourian M. M., Ore F. R.** Ibid., 1977, v. 16, p. 2662; **Schechter B. M.** Ibid., 1977, v. 16, p. 3015.
20. **Schwarz A. S.**— Phys. Lett. B, 1977, v. 67, p. 172; **Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M.**— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1977, v. 74, p. 262.
21. **Jackiw R., Rebbi C.**— Phys. Lett. B, 1977, v. 67, p. 189; **Brown L. S., Carlitz R. D., Lee C.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 417.
22. **Bernard C. W. e.a.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 2967.
23. **Yang C. N.**— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1377.
24. **Wu T. T., Yang C. N.**— Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 3845; 1976, v. 14, p. 437; **Nucl. Phys. B**, 1976, v. 107, p. 365.
25. **Ward R. S.**— Phys. Lett. A, 1977, v. 61, p. 31; **Atiyah M. F., Ward R.S.**— Comm. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 117.
26. **Белавин А. А., Захаров В. Е.**— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 603.
27. **Лезнов А. Н., Савельев М. В., Федосеев И. А.** Препринт ИФВЭ ОТФ 77-147. Серпухов, 1977.
28. **Дринфельд В. Г., Манин Ю. И.**— Успехи мат. наук, 1978, т. 33, с. 241.
29. **Дринфельд В. Г., Манин Ю. И.**— Функциональный анализ и его приложение, 1978, т. 12, с. 48.
30. **Drinfeld V. G., Manin Yu. I.**— Comm. Math. Phys., 1978, v. 63, p. 177; **Meyers C., de Roo M.** Preprint CERN TH-2543. Geneva, 1978.
31. **Witten E.**— Phys. Lett. B, 1978, v. 77, p. 394.
32. **Corrigan E. F. e.a.**— Nucl. Phys. B, 1978, v. 140, p. 31; **Christ N. H., Weinberg E. J., Stanton N. K.** Columbia preprint, 1978; **Osborn H.**— Nucl. Phys. B, 1978, v. 140, p. 45.
33. **Corrigan E., Goddard P., Templeton S.** Preprint CERN TH-2563. Geneva, 1978.
34. **Дринфельд В. Г., Манин Ю. И.**— Ядерная физика
35. **'t Hooft G.** Preprint ITP. University of Utrecht, 1977; **Callan C. G. (Jr), Dashen R. F., Gross D. J.** Preprints IAS. Princeton, 1978; In: Quark Confinement and Field Theory. N.Y., 1977; В кн.: Тр. Междунар. конф. по физике высоких энергий. Токио, 1978.

36. **Weinberg E. J., Guth A. H.**— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 1660.
37. **Schwarz A. S.**— Comm. Math. Phys., 1977, v. 56, p. 79.
38. **Дынкин Е. Б.**— Мат. сборник, 1952, т. 30, с. 349.
39. **Kostant B.**— Amer. J. Math., 1959; v. 81, p. 973; **Navon A., Patera J.**— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 488; **Patera J., Sankoff D.** Les Presses de l'Université de Montréal, 1973; **Lorente M., Gruber B.**— J. Math. Phys., 1972, v. 13, p. 1639; **Bitar K. M., Sorba P.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 431.
40. **'t Hooft G.**— Nucl. Phys. B, 1974, v. 79, p. 276.
41. **Поляков А. М.**— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 430.
42. **Romanov V. N., Schwarz A. S., Tyupkin Yu. S.**— Nucl. Phys. B, 1977, v. 130, p. 209; **Schwarz A. S.**— Comm. Math. Phys., 1977, v. 56, p. 79; **Тюпкин Ю. С., Фатеев В. А., Шварц А. С.**— Теорет. и мат. физ., 1976, т. 26, с. 270.
43. **Wilkinson D., Goldhaber A. S.**— Phys. Rev. D, 1977, v. 16, p. 1221; **Nucl. Phys. B**, 1976, v. 114, p. 317.
44. **Witten E.**— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 121.
45. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Препринт ИФВЭ ОТФ 77-61, Серпухов, 1977.
46. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Phys. Lett. B, 1978, v. 76, p. 108.
47. **Glimm J., Jaffe A.**— Phys. Lett. B, 1978, v. 73, p. 167.
48. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Phys. Lett. B, 1978, v. 79, p. 294.
49. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.**— В кн.: Тр. Междунар. семинара по проблемам физики высоких энергий и теории поля. Т. 1, Протвино, 1978; **Bais F. A., Weldon H. A.**— Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 561.
50. **Leznov A. N., Saveliev M. V.**— Phys. Lett. B, 1979, v. 83, p. 314.
51. **Leznov A. N., Saveliev M. V.** Preprint IHEP 78-177. Serpukhov, 1978.
52. **Leznov A. N., Saveliev M. V.** — Lett. Math. Phys., 1979, v. 3, p. 207.
53. **Богомольный Е. Б.**— Ядерная физика, 1976, т. 24, с. 861.
54. **Prasad M. K., Sommerfield C. M.**— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 760.
55. **Bais F. A., Weldon H. A.**— Phys. Lett. B, 1978, v. 79, p. 297.
56. **Bais F. A., Weldon H. A.**— Phys. Rev. Lett., 1978, v. 41, p. 601; **Wilkinson D., Bais F. A.** Preprint FERMILAB-Pub.-78/77-THY, 1978.
57. **Brihaye Y., Nuyts J.**— J. Math. Phys., 1977, v. 18, p. 2177.
58. **Лезнов А. Н.** Препринт ИФВЭ ОТФ 79-12, Серпухов, 1979.
59. **Лезнов А. Н., Савельев М. В.** Препринт ИФВЭ ОТФ 78-86. Серпухов, 1978.
60. **Гантмахер Ф. Р.**— Мат. сборник, 1939, т. 5, с. 101.
61. **Семинар** «Софус Ли». Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. М., 1962; **Джекобсон Н.** Алгебры Ли. М., 1964; **Серр Ж. П.** Алгебры Ли и группы Ли. М., 1969; **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М., 1972.
62. **Liouville J.**—J. math. pures et appl., 1853, v. 18, p. 71; **Forsyth A. R.** Theory of Differential Equations. N.Y., 1959.
63. **Bais F. A.**— Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 1206.
64. **Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.**— Успехи мат. наук, 1976, т. 31, с. 55; **Zakharov V. E.** In: Lecture Notes in Mathematics. N.Y., 1978; **Манин Ю. И.** Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы мат. Т. 11, М., 1978; **Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.**— Функциональный анализ и его приложения, 1971, т. 5, с. 280; **Захаров В. Е., Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д.**— Докл. АН СССР, 1974, т. 219, с. 1334; **Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д.**— Теорет. и мат. физ., 1974, т. 21, с. 160.
65. **Bäcklund A. V.**— Math. Ann., 1876, Bd 9, S. 297; 1880, Bd 17, S. 285; 1882, Bd 19. S. 387; In: **Lecture** Notes in Mathematics. V. 15. N.Y., 1974.
66. **Mc Carthy P. J.**— Lett. Math. Phys., 1977, v. 2, p. 167; **Byrnes S. G.**— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 837; **Mc Laughlin D. W., Scott A. C.**— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1817.
67. **Замолодчиков А. Б., Замолодчиков Ал. Б.**— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 608; Preprint ITEP-35, M., 1978; **Zamolodchikov A.**— Comm. Math.

Phys., 1977, v. 55, p. 183; **Фаддеев Л. Д.** In: Methods in Field Theory. Les Houches Session XXXIII, 1975; в кн.: Тр. симп. в Алуште, 1976; Preprint IAS, 1975; **Фаддеев Л. Д.** Препринт ЛОМИ. Л., 1979.

68. **Corrigan E. F. e.a.**— Comm Math. Phys., 1978, v. 58, p. 223; **Brihaye Y. e.a.** Preprint DAMPT, 1978.
69. **Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.**— Журн. эксперим. и теор. физ., 1950, т. 20, с. 1064; **Абрикосов А. А.** Там же, 1957, т. 32, с. 1442; **Nielsen H. B., Olesen P.**— Nucl. Phys. B, 1973, v. 61, p. 45.
70. **Фалькен А.** Электролиты. М., 1935; **Спитцер Л.** Физика полностью ионизированного газа. М., 1957. **Фаулер Р., Гуггенгейм Р.** Статистическая термодинамика. М., 1949.
71. **Кац В. Г.**— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, т. 32, с. 1323; 1970, т. 34, с. 385; Adv. Math., 1977, v. 26. p. 8; **Moody R. V.**— Bull. Amer. Math. Soc., 1967, v. 73, p. 217; **Kostant B.**— Inv. Math., 1978, v. 48, p. 101.
72. **Toda M.**— Progr. Theoret. Phys. Suppl., 1970, v. 45, p. 174; Phys. Repts C, 1975, v. 18, p. 1; **Henon M.**— Phys. Rev. B, 1974, v. 9, p. 1921; **Flaska H.** — Phys. Rev. B, 1974, v. 9, p. 1924; **Манаков С. В.** — Журн. эксперим. и теорет. физ., 1974, т. 67, с. 543; **Bogoyavlensky O. I.**— Comm. Math. Phys., 1976, v. 51, p. 261; **Kostant B.** Preprint MIT, 1979.