

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Л. М. Сороко

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Изложен принцип максимума энтропии, который выражает ограничение на искомое решение обратной задачи, заданной системой линейных уравнений. Принцип максимума энтропии позволяет апостериорно повысить разрешающую способность физического прибора и восстановить томографические изображения по усеченной совокупности проекций.

The maximum entropy approach which manifests the restriction on the solution of the inverse problem given by a set of linear equations is summarized. The maximum entropy approach can get the a posteriori super-resolution and can reconstruct a tomographic image from a truncated set of projections.

ВВЕДЕНИЕ

Возможности экспериментальной установки, используемой в физике элементарных частиц и атомного ядра, определяются степенью достоверности получаемых данных, величиной разрешающей способности установки, а также тем, в какой мере она оснащена вычислительной техникой и каковы те алгоритмы, которые лежат в основе окончательной обработки экспериментальных данных. Чем полнее известна характеристика установки, тем выше ее реальная разрешающая способность, которую можно получить при обработке экспериментальных данных после окончания опыта, или, как принято называть, «апостериорно».

О том, что разрешающую способность измерительного прибора можно повысить при апостериорной обработке результатов измерений, было отмечено еще Рэлеем. Г. С. Горелик [1] указал, что предел, до которого можно пойти в процессе апостериорного повышения разрешающей способности измерительного прибора, зависит от точности измерений и уровня шумов, сопровождающих любой эксперимент. Однако вопрос о том, как повысить апостериорно разрешающую способность прибора, долгое время оставался открытым. Только с наступлением эры вычислительной техники

и благодаря развитию теории информации, теории связи и теории эксперимента была создана теоретическая база для алгоритмов апостериорного повышения разрешающей способности измерительного прибора. Важным фактором развития этих алгоритмов явились успехи математики и в особенности работы А. Н. Тихонова [2] по формализации методов решения обратных задач.

Обратной называют задачу обработки первичных экспериментальных данных в целях определения тех характеристик исследуемого процесса, которые прямым измерениям не доступны. Обратная задача позволяет выявить причины тех сигналов, которые наблюдаются на выходе измерительного прибора. По существу, проблему интерпретации результатов любого эксперимента можно рассматривать как обратную задачу. В простейших ситуациях физик-экспериментатор опирается на полуинтуитивные методы решения обратных задач, использует логику здравого смысла и априорную информацию о наблюдаемом процессе или действует методом проб и ошибок, заменяя обратную задачу совокупностью нескольких прямых задач. При интерпретации сложного эксперимента используют методы регрессионного анализа [3, 4], которые позволяют сформулировать обратную задачу как переопределенную с небольшим числом свободных параметров.

В общем случае обратная задача, записанная на языке математики, является некорректно поставленной задачей. Это значит, что небольшие погрешности в экспериментальных данных и данных о характеристике измерительного прибора могут дать очень большие ошибки в искомом решении. Одна из причин некорректности обратных задач заключается в том, что в ее исходной математической формулировке она является недоопределенной. Чтобы ее доопределить, в условие задачи вводят дополнительную информацию и тем самым сужают класс функций, в котором находится искомое решение обратной задачи. Однако структура априорной информации должна быть такой, чтобы ограниченный класс функций, в котором ищется искомое решение обратной задачи, был компактным [23]. Если обратную задачу сформулировать в матрично-векторной форме, то условий на априорную информацию не возникает, так как ограниченное замкнутое множество векторов с конечным числом компонент всегда является компактным.

Особый класс обратных задач возникает в реконструктивной томографии [5]. Так называют принципиально новый метод получения изображений внутренней структуры объекта по совокупности проекций, измеренных под несколькими ракурсами. В качестве носителя информации в реконструктивной томографии используют рентгеновские лучи, γ -кванты [6], нейтроны [7], протоны [8], а также ультразвуковые волны [9] или сигналы ядерного магнитного резонанса [10]. В настоящее время реконструктивную томографию широко используют в медицине [11, 12], в атомной энер-

гетике [13], в радиоастрономии [14] и при исследовании пространственного строения солнечной короны [15].

Обратная задача в реконструктивной томографии является некорректно поставленной [16, 17], так как на стадии восстановления изображения по проекциям необходимо дифференцировать функцию, которая задана на конечной последовательности точек. Однако применение алгебраических методов восстановления [18] и учет специфических особенностей объектов, подвергаемых изучению на практике, позволили не только устранить некорректность обратной задачи в реконструктивной томографии, но и создать быстрые и весьма эффективные алгоритмы восстановления [19—21].

Среди алгоритмов решения обратных задач особое место занимает принцип максимума энтропии [22]. Этот принцип позволяет в наиболее компактной форме учесть априорную информацию об объекте и в наиболее общем виде дополнить обратную задачу. Чтобы пояснить указанный принцип, возьмем в качестве предмета наблюдения плоский объект, яркость которого изменяется от точки к точке. Таким объектом может быть фотография следов частиц в трековой камере, двумерный спектр на дисплее, чертеж и в принципе любая двумерная функция, вещественная или комплекснозначная. Будем называть такой объект изображением. Понятие изображения пригодно для рассмотрения не только двумерных плоских объектов, но также и трехмерных, так как набор двух и более изображений в виде фотографий, сделанных под различными ракурсами, позволяет восстановить объект в пространстве трех измерений. Исследователи, которые используют изображающие системы в различных диапазонах электромагнитного излучения или при помощи других носителей информации — протонов, нейтронов и электронов — с неизбежностью сталкиваются с проблемой нахождения наиболее правдоподобного соотношения между изображением и объектом. Это — фундаментальная и извечно актуальная проблема естествознания и философии. Задача состоит в том, чтобы по искаженной версии картины объекта получить представление о самом объекте. Очевидно, что, каким бы высоким ни было качество изображения, ему соответствует всегда большое число возможных объектов. Поэтому обратная задача, сформулированная для изображения, в общем случае может иметь только приближенное решение. Для его нахождения были разработаны многочисленные методы, которые являются либо разновидностью строгих методов регуляризации [23—25], либо представляют собой новые эвристические алгоритмы обработки изображений [26, 27].

Так как каждому изображению соответствует большое число возможных объектов, то обратную задачу можно свести к проблеме выбора того из них, который является наиболее правдоподобным. При решении этой проблемы используют принцип максимума энтропии. Сущность его заключается в том, что каждому возмож-

ному объекту приписывают некоторую априорную вероятность его реализации и в качестве оценки искомого объекта берут ту оценку, вероятность реализации которой максимальна. Метод максимума энтропии существенно отличается от метода максимума правдоподобия [4]. Связь между этими двумя методами удалось установить в явном виде только для задач спектрального анализа [28].

Цель данного обзора — изложить сущность принципа максимума энтропии, а также описать применение этого метода для решения обратных задач, для апостериорного повышения разрешающей способности изображающей системы, а также для получения томографических изображений внутренней структуры объекта по совокупности проекций, измеренных под несколькими ракурсами.

Принцип максимума энтропии был успешно использован при получении изображения поверхности Ганимеда, спутника Юпитера [29], при восстановлении структуры лазерной плазмы по рентгеновским фотографиям, полученным в экспериментах по термоядерному синтезу [30], а также при фурье-синтезе радиоастрономических изображений [31]. Принцип максимума энтропии позволяет извлечь предельно полную информацию из коротких записей характеристик исследуемого процесса в геофизике [32] и в палеонтологии [22]. Разрешающая способность по спектру в методе максимума энтропии в несколько раз выше, чем в традиционных линейных алгоритмах обработки спектров [33].

Метод максимума энтропии совместно с реконструктивной томографией был использован в атомной энергетике при контроле степени выгорания тепловыделяющих элементов активной зоны ядерного реактора [13]. В отличие от традиционных алгоритмов реконструктивной томографии метод максимума энтропии позволял выявить выгоревшие стержни при числе измерений в несколько раз меньше, чем для традиционных алгоритмов. Наконец, следует отметить, что применение метода максимума энтропии в медицинской томографии позволяет уменьшить в несколько раз дозу облучения пациента без ухудшения качества томографического изображения. Все указанные выше примеры убедительно свидетельствуют о том, что метод максимума энтропии имеет большое значение и сфера его применения должна быть расширена. В частности, его следует испытать в физике элементарных частиц и атомного ядра.

1. ЭНТРОПИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Понятие энтропии, введенное первоначально в теории тепловых машин, позднее стало использоваться как мера неопределенности или беспорядочного движения любой системы. Согласно определе-

нию, данному Больцманом, энтропия равна логарифму статистического веса или логарифму вероятности реализации данного состояния. Переход от вероятности к ее логарифму придает энтропии свойство аддитивности: энтропия двух независимых частей системы равна сумме энтропий каждой из них.

Второй областью науки и техники, где потребовалось ввести понятие энтропии, была теория связи. В 1928 г. Хартли [34] предложил взять в качестве меры информативности сообщения или эксперимента логарифм числа его возможных исходов. Мера Хартли обладает аддитивными свойствами и отвечает основному положению теории информации: количество информации, содержащееся в двух и более независимых сообщениях, равно сумме количеств информации в каждом сообщении. Определение энтропии Больцмана и определение меры информативности сообщения в формулировке Хартли аналогичны друг другу. Более того, указанная аналогия не является чисто формальной, и, как было установлено позднее, выражает универсальное свойство энтропии описывать меру неупорядоченности системы, число степеней свободы у которой не меньше двух. Именно поэтому понятие энтропии широко используется в статистической физике, теории информации, квантовой оптике, теории связи, а также в теории обработки экспериментальных данных и при описании природных процессов.

Важной вехой в развитии понятия энтропии были работы Шеннона [35, 36]. Чтобы кратко пояснить их суть, проследим за ходом рассуждений, которые приводят к определению понятия информационной энтропии. Пусть имеется совокупность N исчерпывающих, взаимно исключающих и равновероятных случаев, причем n_k случаев из указанной совокупности благоприятствует появлению события k . Это значит, что вероятность события k равна величине

$$p(k) = n(k)/N, \quad (1)$$

которую называют линейной мерой априорной неопределенности результата опыта. Если с каждым событием k связана величина $x(k)$, то вероятность события $p(k)$ позволяет найти как среднюю величину

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^N x(k) p(k), \quad (2)$$

так и момент любого порядка n :

$$\bar{x}^n = \sum_{k=1}^N x^n(k) p(k). \quad (3)$$

Вместо линейной меры априорной неопределенности результата опыта $p(k)$, которая изменяется в пределах от 0 до 1, удобно взять более мощную меру неопределенности события, которая изме-

няется от 0 до ∞ . Такой мерой является величина

$$I(k) = \lg_2 [1/p(k)]. \tag{4}$$

Среднее значение этой величины по всей выборке из N случаев равно энтропии распределения вероятности $p(k)$:

$$H = - \sum_{k=1}^N p(k) \lg p(k). \tag{5}$$

Энтропия сообщения H обладает следующими свойствами:

- 1) $H_{\text{макс}} = \lg N$, если $p(k) = 1/N$;
- 2) $H_{\text{мин}} = 0$, если $p(k) = \begin{cases} 1, & k = l; \\ 0, & k \neq l; \end{cases}$
- 3) энтропия совместного события (x, y) равна

$$H(x, y) = H(x) + H_x(y) = H(y) + H_y(x), \tag{6}$$

где $H_x(y)$ и $H_y(x)$ — условные энтропии, равные по определению

$$\left. \begin{aligned} H_y(x) &= - \sum_k \sum_l p(k, l) \lg p_l(k); \\ H_x(y) &= - \sum_k \sum_l p(k, l) \lg p_k(l), \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

$p_k(l)$ — вероятность появления символа k при наличии символа l ; $p_l(k)$ — вероятность появления символа l при наличии символа k .

Для непрерывного сигнала энтропия события x равна

$$H(x) = - \int p(x) \lg p(x) dx. \tag{8}$$

Если, кроме очевидного ограничения

$$\int p(x) dx = 1, \tag{9}$$

зафиксировать один из моментов, например n -й:

$$\int x^n p(x) dx = \text{const}, \tag{10}$$

то энтропия достигнет своего максимального значения при [37]

$$p(x) = A \exp(-\beta x^n), \tag{11}$$

где A и β выбирают с учетом ограничений (9) и (10). Если $n = 1$, а x — энергия системы, то

$$p(E) = A \exp(-\beta E), \tag{12}$$

где E — полная энергия системы. Выражение (12) представляет распределение Больцмана [41]. Если $n = 2$, а v — скорость молекул газа, то

$$p(v) = A \exp(-\beta v^2). \tag{13}$$

Это — закон Максвелла — Больцмана для распределения скоростей молекул идеального классического газа. Из (13) следует более общий вывод: когда средний квадрат флуктуаций фиксирован, распределение Гаусса является наиболее случайным, а из всех возможных распределений ему соответствует максимум энтропии. Понятие информационной энтропии, определяемое выражением (5) или (8), можно применить как для решения многих проблем теории передачи сообщений по каналам связи, так и в оптике.

Энтропия стационарного состояния квантовомеханической системы определяется выражением [38]:

$$H(\rho) = -\text{Sp}(\rho \ln \rho), \quad (14)$$

где ρ — матрица плотности стационарного состояния. Если ее записать в канонической диагональной форме:

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \\ 0 \leq \beta_n \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1, \quad (15)$$

то энтропия

$$H(\rho) = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \ln \beta_n. \quad (16)$$

Свойство аддитивности выражения (16) для энтропии стационарного состояния следует из того, что собственные состояния $\{\psi_n\}$ образуют полную ортогональную систему, и поэтому эти состояния являются независимыми друг от друга.

Если состояние квантовомеханической системы является «чистым», то $\beta_1 = 1$, $\beta_k = 0$, $k > 1$, и энтропия такого состояния равна нулю: $H(\rho) = 0$. Свойство энтропии $H(\rho)$ из (16) поясним на примере состояний поляризации монохроматического пучка света. Матрица поляризации света размером 2×2 в силу нормировочного соотношения $\beta_1 + \beta_2 = 1$ имеет вид

$$\rho = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 - \beta \end{bmatrix}, \quad (17)$$

а энтропия состояний поляризаций света определяется выражением

$$H(\rho) = -\beta \ln \beta - (1 - \beta) \ln (1 - \beta). \quad (18)$$

Энтропия (18) максимальна, если $\beta = 1/2$ и пучок света не поляризован.

Энтропия квантовомеханической смеси не меньше суммы энтропий каждой из компонент этой смеси:

$$H[\alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2] \geq \alpha H(\rho_1) + (1 - \alpha) H(\rho_2). \quad (19)$$

На языке математики (19) означает, что энтропия является выпуклой функцией своего аргумента. Можно далее доказать, что состояние с максимальной энтропией при заданной энергии системы представляет собой равновесное тепловое состояние.

Все сказанное выше позволяет сделать вывод, что обращение энтропии состояния в максимум является важным ограничением как для информационной [36], так и для квантовомеханической системы [38]. Если к этому условию добавить еще одно ограничение, например зафиксировать момент системы вида (3), то этого оказывается достаточно, чтобы получить хорошо известные законы статистической физики [41] и теории информации [35].

Перейдем теперь к нахождению выражения для энтропии изображения. В [39] и [40] показано, что энтропия изображения зависит от того, является ли регистрируемое поле излучения классическим или его надо рассматривать при помощи фотонной модели.

В первом случае физически наблюдаемой величиной является средняя мощность излучения в каждом элементе изображения:

$$I(x, y) = \langle |E(x, y, t)|^2 \rangle, \quad (20)$$

где $E(x, y, t)$ — скалярное поле, а усреднение в (20) ведется по большому интервалу времени. Поле $E(x, y, t)$ можно рассматривать как одну из многих реализаций случайного процесса, и степень незнания об этом случайном процессе определяется энтропией. Чтобы получить выражение для энтропии в классическом приближении, рассмотрим фурье-образ по времени от поля $E(x, y, t)$, который обозначим $E(x, y, \omega)$. Если электромагнитное поле является пространственно некогерентным, а его временные характеристики соответствуют белому шуму, то $E(x, y, \omega)$ и $E(x', y', \omega')$ не зависят друг от друга при $(x, y, \omega) \neq (x', y', \omega')$. Предположим, что поле отлично от нуля в ограниченной области (x, y) и ограничено по частоте ω . В качестве элемента изображения возьмем площадку, размер которой определяется дифракционной разрешающей способностью изображающей системы при некогерентном освещении. Тогда изображение можно описать N -компонентным вектором, где N — число элементов изображения. Каждая компонента такого вектора представляет собой отсчеты яркости [26]. В силу независимости этих отсчетов функция плотности вероятности произвольного N -компонентного вектора равна произведению функций плотности вероятности всех отсчетов, а энтропия — сумме частных энтропий для каждого отсчета. Если полоса частот Ω одинакова для всех отсчетов, то энтропия изображения равна [39]

$$H_1 = \int \int \int \lg f(x, y, \omega) dx dy d\omega + \text{const}. \quad (21)$$

Если исходить из фотонной модели, то энтропия изображения имеет другое выражение:

$$H_2 = - \int \int \int f(x, y, \omega) \lg f(x, y, \omega) dx dy d\omega + \text{const}. \quad (22)$$

Таким образом, из (21) и (22) видно, что энтропия изображения в классической модели и энтропия в фотонной модели электромагнитного поля существенно различны.

В работе [40] приведен более подробный анализ этой проблемы и получено общее выражение для энтропии изображения. Для простоты предполагалось, что объект является плоским и ограниченным, а геометрическое увеличение изображающей системы равно единице. В этом случае объектом наблюдения является двумерное распределение квазимонохроматических фотонов, прошедших через апертуру изображающей системы. Разобьем область, на которой расположен объект или приемник изображения, на элементы в виде квадратов, границы между которыми образуют сетку прямым с постоянным шагом по осям x и y . Пусть за время экспозиции t из i -й площадки объекта было испущено n_i фотонов. Тогда совокупность чисел $\{n_i\}$, $i = 1, \dots, N^2$, где N^2 — полное число площадок, полностью характеризует стационарный объект. Найдем наиболее вероятное распределение совокупности чисел $\{n_i\}$. Для этого сначала рассмотрим отдельную элементарную площадку. Пусть z — число степеней свободы, которое имеют фотоны, вылетевшие из i -й площадки. Тогда число комбинаций, которое может привести к испусканию n_i фотонов, имеющих z степеней свободы, определяется биномиальным распределением:

$$q_i(n_i) = (n_i + z - 1)! / n_i! (z - 1)!. \quad (23)$$

Выражением (23) учтено, что фотоны подчиняются статистике Бозе. Каждая из $q_i(n_i)$ комбинаций представляет собой квантовомеханическое состояние ансамбля из n_i фотонов.

Предположим, что каждая из $q_i(n_i)$ комбинаций реализуется с одной и той же априорной вероятностью. Величина $q_i(n_i)$ имеет смысл квантовомеханического понятия «степень вырождения» и равна вероятности того, что n_i фотонов распределены заданным образом по z степеням свободы. Переходя от вероятности к ее логарифму, получаем частичную энтропию фотонного поля

$$H_i(n_i) = \ln q_i(n_i). \quad (24)$$

Чтобы пояснить физический смысл выражения (24), достаточно рассмотреть три частных случая.

А. Если $z = 1$, то $q_i = 1$ и $H_i = 0$. Действительно, если число степеней свободы равно 1, то все n_i фотонов заполняют эту единственную степень свободы. Так как фотоны взаимно неразличимы, степень вырождения равна 1, а ее логарифм равен нулю.

Б. Если $z > 1$, а $n_i \gg z$, то

$$H_i \approx (z - 1) \ln n_i - \ln (z - 1)!. \quad (25)$$

В. Если $z \gg n_i$, то

$$H_i \approx n_i \ln z - n_i (\ln n_i - 1). \quad (26)$$

Когда число степеней свободы значительно больше числа фотонов, распределение фотонов по степеням свободы становится классическим и описывается максвелловским распределением. Фотоны в этих условиях можно рассматривать как классические частицы.

Число комбинаций, которыми создается распределение фотонов $q_i(n_i)$ для всего объекта, в силу независимости процессов в каждом элементе изображения равно

$$Q(n_1, n_2, \dots, n_{N^2}) = \prod_{i=1}^{N^2} q_i(n_i), \quad (27)$$

а энтропия изображения равна $H = \ln Q$, где

$$n = \sum_{i=1}^{N^2} n_i, \quad \sum_{i=1}^{N^2} \frac{n_i}{n} \equiv \sum_{i=1}^{N^2} p_i = 1. \quad (28)$$

Если $z = 1$ для всех ячеек изображения, то $Q = 1$ и $H = \ln Q = 0$. В таком случае вероятность Q не зависит от распределения фотонов по ячейкам $\{p_i\}$, и поэтому любое распределение $\{p_i\}$ имеет одну и ту же вероятность. В указанных условиях выбрать наиболее вероятное изображение таким методом невозможно.

Если $z > 1$, но $n_i \gg z$, то энтропия изображения равна

$$H = \sum_i H_i = \sum_i [(z - 1) \ln n - \ln (z - 1)!] + (z - 1) \sum_i \ln p_i. \quad (29)$$

Если же $z \gg n_i$, то

$$H = n \ln (z/n) - n \sum_i p_i (\ln p_i - 1). \quad (30)$$

Выражения (29) и (30) имеют следующий физический смысл. Если число фотонов, приходящихся на одну степень свободы, велико, то энтропия изображения содержит слагаемые вида $\sum_i \ln p_i$.

Слагаемые, которые не зависят от p_i , можно не учитывать, так как полное число фотонов n и число степеней свободы z являются постоянными величинами в каждой конкретной задаче апостериорной обработки изображений. Если число фотонов, приходящихся на одну степень свободы, значительно меньше единицы, то энтропия изображения содержит слагаемые вида $-\sum_i p_i \ln p_i$, где p_i — нормированная яркость ячейки изображения, $i = 1, 2, \dots, N^2$.

Напомним, что число фотонов, приходящихся на одну степень свободы n/z , используют при анализе статистики излучения. Это число связано с эффектом группировки фотонов. Так, например, вероятность возникновения фотонов в некотором поле излучения пропорциональна величине $(n/z) + 1$, а усредненные во времени квадратичные флуктуации числа фотонов в каждой элементарной моде пучка света равны [43]

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle + (1/g) \langle n \rangle^2, \quad (31)$$

где $\langle n \rangle$ — среднее число фотонов в элементарной моде, а g — объем элементарной ячейки фазового пространства для пучка света, равный

$$g = (1/c^3) \Omega V v^2 \Delta v. \quad (32)$$

Здесь Ω — телесный угол, захватываемый отдельной ячейкой; $V = cSt$, S — площадь поперечного сечения пучка света; v — частота электромагнитных колебаний; t — время наблюдения; c — скорость света; Δv — интервал захватываемых частот.

Первое слагаемое (31) описывает некогерентные эффекты и связано с квантовой природой света. Второе слагаемое, квадратичное по числу фотонов, описывает когерентные эффекты и выражает волновое свойство света в терминах среднего числа фотонов в элементарной ячейке. Чем больше объем элементарной ячейки пучка света, тем слабее проявляются когерентные эффекты. Все сказанное выше позволяет сделать вывод о том, что объем элементарной ячейки пучка света равен числу степеней свободы z :

$$z = g = (1/c^3) \Omega V v^2 \Delta v = (dS/R^2) (At/c^3) (c^2/\lambda^2) (1/\tau) = (t/\tau) (\sigma/\lambda^2), \quad (33)$$

где τ — временная когерентность пучка света; R — расстояние между плоскостью объекта и плоскостью изображения; λ — длина волны света; $\sigma = R^{-2} A dS$ — эффективное сечение пучка света, соответствующее элементарной площадке объекта dS и площади детектора A . Число степеней свободы z можно разбить на два множителя:

$$z = z_{\text{врем}} z_{\text{простр}} = (t/\tau) (A/\sigma). \quad (34)$$

Здесь $z_{\text{врем}}$ равно отношению времени наблюдения t к временной когерентности τ или полному числу пугов пучка света, попавших в детектор за время экспозиции. Величина $z_{\text{простр}}$ равна отношению площади детектора A к эффективному пространственному сечению пучка σ .

Последняя стадия регистрации изображения состоит в актах поглощения фотонов в фотоприемнике. Возникающее при этом статистическое распределение фотоэлектронов в фотоэлектрическом приемнике отличается в общем случае от распределения падающих фотонов [44]. В частности, это различие становится

существенным тогда, когда квантовая эффективность фотодетектора значительно меньше единицы. Однако указанное различие является несущественным для тех задач, которые здесь рассматриваются, и им можно пренебречь. Процесс поглощения фотонов в фотоэмульсии усложняется пороговым эффектом, в результате которого величина n/z возрастает одновременно с увеличением средней засветки фотоэмульсии (45). И этим эффектом также пренебрегаем.

Наиболее существенное изменение величины n/z наблюдается при переходе от одной длины волны электромагнитного излучения к другой и от одних объектов наблюдения к другим. Так, например, в видимом диапазоне обычно $n/z \ll 1$. Однако при длинах волн более 3 мкм $n/z > 1$. Наиболее высокие значения n/z наблюдаются в ярких радиоастрономических объектах, для которых $n/z \approx 10^4 - 10^8$ [40].

Для электронов и других частиц, подчиняющихся статистике Ферми, число комбинаций q_i , по которым n_i фермионов распределены по z степеням свободы, равно

$$q_i^\Phi = z! / (z - n_i)! n_i!. \quad (35)$$

Случай $n_i > z$ для фермионов, очевидно, невозможен из-за принципа исключения Паули: в одной элементарной ячейке поля фермионов не могут находиться две частицы с одними и теми же квантовыми числами. Поэтому если $z = 1$, то $q_i = 1$ и $H_i = 0$.

Если $z \gg n_i$, то энтропия изображения фермионного поля равна

$$H^\Phi = \sum_i H_i^\Phi = n \ln(z/n) - n \sum_i p_i (\ln p_i - 1) \quad (36)$$

и соответствует классическому приближению.

Выше было отмечено, что для фотонов при $z = 1$ наиболее вероятный объект отождествить невозможно. Однако это утверждение является не точным. В случае, когда $z = 1$, необходимо перейти к вероятностному рассмотрению, ввести ансамбль ячеек и построить функцию вероятности распределения по различным реализациям f_n . Можно показать [40], что в этой формулировке наиболее вероятным распределением фотонов является распределение вида

$$f_n^{(0)} = \left(\frac{z}{\bar{n} + z} \right)^z \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + z} \right)^n \frac{(n + z - 1)!}{n! (z - 1)!}, \quad (37)$$

где \bar{n} — среднее число фотонов, а информационная энтропия изображения, соответствующая этому наиболее вероятному распределению, равна

$$H \{f_n^{(0)}\} / M = (\bar{n} + z) \ln(\bar{n} + z) - \bar{n} \ln \bar{n} - z \ln z, \quad (38)$$

где M — число ячеек в ансамбле, по которому производится упомянутое выше усреднение. Для $z = 1$ наиболее вероятное распределение имеет вид

$$f_n^{(0)} = [1/(\bar{n} + 1)] [\bar{n}/(\bar{n} + 1)]^n, \quad (39)$$

а соответствующая информационная энтропия изображения равна

$$H \{f_n^{(0)}\} / M = (\bar{n} + 1) \ln (\bar{n} + 1) - \bar{n} \ln \bar{n}. \quad (40)$$

Если $\bar{n} \gg 1$, то

$$(1/M) H \{f_n^{(0)}\} = 1 + \ln \bar{n}. \quad (41)$$

Последнее выражение для информационной энтропии изображения соответствует классическому приближению и имеет свой аналог в теории информации. А именно, было показано, что если число отсчетов при построении информационной энтропии, как ее определил Шеннон [35], выбрать равным числу, которое требует теорема отсчета [42], то $z = 1$, а информационная энтропия записывается в виде (41).

Выражения, приведенные выше, справедливы только в том случае, если изображение получено при некогерентном освещении, а размер элемента изображения не меньше площадки пространственной когерентности света. Если освещение является когерентным или частично-когерентным, то энтропия изображения не обладает свойством аддитивности [57], так как электромагнитные волны, идущие из различных элементов изображения, не являются статистически независимыми друг от друга. Ярким примером, иллюстрирующим свойство неаддитивности энтропии изображения при когерентном освещении, является интерферометр Майкельсона. Энтропия двух пучков света в интерферометре Майкельсона не равна сумме энтропий из-за наличия взаимной частичной корреляции между ними. По той же причине нельзя суммировать энтропии волн, испытавших дифракцию на дифракционной решетке бесконечной протяженности. В таком случае энтропия падающей волны равна энтропии всех дифрагированных волн.

Чтобы определить энтропию изображения при частично-когерентном освещении, необходимо поле световой волны разложить на независимые волны и только затем суммировать выражения для энтропии каждой независимой волны. Впервые идея этого перехода была предложена фон Лауе [58] и подробно разработана Гамо [57] для случая, когда поле световой волны можно рассматривать полуклассически. В [57] показано, что энтропия частично-когерентного излучения больше, чем энтропия когерентного излучения с той же интенсивностью, но меньше, чем энтропия некогерентного излучения. Этот вывод также следует из свойства выпуклости энтропии (19).

Анализ процесса образования изображения в терминах энтропии изображения [59] показывает, что если изображающая система расфокусирована, то энтропия изображения уменьшается. Потери энтропии равны логарифму отношения спектров мощности на выходе и на входе изображающей системы. В работах [57, 59] также показано, что матричный формализм [60] является эффективным методом рассмотрения процесса образования изображения при частично-некогерентном освещении.

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА И НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

В силу квантовой природы процесса образования изображения накопленная в нем информация имеет дискретный характер. Ее можно выразить в виде совокупности координат всех проявленных зерен фотоэмульсии. На практике вместо такой громоздкой формы описания изображения вводят усредненные характеристики, например, среднюю оптическую плотность фотонегатива, которую представляют в виде непрерывной функции. Тогда процесс образования изображения можно записать в виде следующей линейной модели [26].

Если $f(\xi)$ — объект, $s(x)$ — его изображение, а свойство изображающей системы описывается функцией размытия $h(x, \xi)$, то

$$s(x) = \int_D f(\xi) h(x, \xi) d\xi + n_a(x), \quad (42)$$

где область интегрирования D содержит полностью плоский объект $f(\xi)$; $n_a(x)$ — аддитивный шум, а $\xi(\xi, \eta)$ и $x(x, y)$ — векторы точек в плоскости объекта и изображения соответственно. При проведении расчетов на ЭВМ модель процесса образования изображения (42) переводят в матричную форму. Так, например, наблюдаемое изображение представляют в виде квадратной матрицы $s(i, k) = [s]$, $i, k = 0, 1, \dots, N - 1$, элементы которой равны отсчетам непрерывной функции $s(x)$, полученным при помощи определенной системы базисных функций. Вместо (42) получается следующее выражение:

$$s(i, k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w(m, n) h(m, n, i, k) f(m, n) + n(i, k), \quad i, k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (43)$$

где $w(m, n)$ — матрица весовых коэффициентов, значения которых зависят от формулы численной квадратуры при переходе от интеграла к конечной сумме. Если размытие вдоль строк не зависит от размытия вдоль столбцов, то матрица $h(m, n, i, k)$ равна

кронеккеровскому произведению матриц $h_x(m, i)$ и $h_y(n, k)$:

$$h(m, n, i, k) = h_x(m, i) \otimes h_y(n, k). \quad (44)$$

Если, кроме этого, элементы матрицы $w(m, n)$ равны между собой, то процесс образования изображения приобретает следующую матричную форму:

$$[s] = [h_x] [f] [h_y]^T + [n], \quad (45)$$

где $[s]$, $[f]$, $[n]$, $[h_x]$, $[h_y]$ — квадратные $N \times N$ матрицы изображения, объекта, аддитивного шума, матрицы размытия по строкам и по столбцам соответственно.

Предположим, что можно пренебречь аддитивным шумом, и продолжим рассмотрение обратной задачи на примере одномерного объекта. Тогда (45) запишется в виде

$$s = [h] f, \quad (46)$$

где s и f — N -компонентные векторы, а $[h]$ — матрица размытия изображающей системы вдоль одномерного объекта.

Уравнение (46) представляет собой запись обратной задачи в дискретной форме. По известному вектору s и известной матрице размытия $[h]$ требуется найти оценку искомого вектора f . Если детерминант матрицы $[h]$ отличен от нуля и существует обратная матрица $[h]^{-1}$, то решение (46) имеет вид

$$\hat{f} = [h]^{-1} s. \quad (47)$$

Так как элементы матрицы $[h]$ известны с некоторой погрешностью, а вычислительная машина дает округление, условие $\det [h] \neq 0$ проверить невозможно. При этом имеется в виду, что при варьировании элементов матрицы $[h]$ в пределах допустимых округлений ЭВМ может возникнуть как случай $\det [h] = 0$, так и случай $\det [h] \neq 0$. Поэтому простейший алгоритм (47) при больших значениях N применить непосредственно невозможно и его заменяют такими алгоритмами построения приближенного решения уравнения (46), которые являются стабильными к погрешностям измерений, а также позволяют получить однозначное решение обратной задачи. Необходимо также учесть, что в реальном эксперименте матрица $[h]$ не является квадратной, и поэтому обратная задача может быть либо переопределенной, либо недоопределенной.

Формализация методов решения обратной задачи и их строгое математическое обоснование сводится к исследованию однозначности решения, условий асимптотической сходимости и оптимального выбора операторов регуляризации. Все эти вопросы подробно рассмотрены в (23, 24). При построении приближенного решения обратной задачи в условие задачи вводят дополнительную априорную информацию об искомом решении. Эта априорная

информация должна сужать класс функций, в котором ищут решение обратной задачи, а также давать необходимую стабильность решения относительно ошибок измерений. Многообразие методов решения обратных задач определяется тем, в какой форме выражена априорная информация об искомом решении.

Рассмотрим некоторые из алгоритмов нахождения решений обратной задачи, записанной в матрично-векторной форме (46). Начнем с алгоритма введения ограничения на абсолютное значение второй производной искомого решения [46, 47]. Приближенную оценку искомого решения \hat{f} ищут путем минимизации целевой функции вида

$$\gamma \sum_{x=1}^{N-2} \{[D] \hat{f}\}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [h] \hat{f} - s \right\}^2, \quad (48)$$

где γ — свободный параметр, характеризующий степень гладкости оценки искомого решения, а $[D]$ — матричный оператор вторых разностей [47]. В явном виде оценка искомого решения равна

$$\hat{f} = [[h]^T [h] + \gamma [D]^T [D]]^{-1} [h]^T s. \quad (49)$$

Ее находят методом последовательных приближений.

Во втором алгоритме дополнительную информацию об объекте вводят в виде некоторой функции φ и решение находят путем минимизации целевой функции:

$$\gamma \varphi + \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [h] \hat{f} - s \right\}^2. \quad (50)$$

В работе [25] использована функция φ вида

$$\varphi = \gamma \{[\Delta] \hat{f}\} + \beta \{[\Delta] \hat{f}\}^2, \quad (51)$$

где $[\Delta]$ — матричный оператор первых разностей.

Самостоятельную группу образуют алгоритмы псевдообращения [48—50]. Используемая в этих алгоритмах псевдообратная матрица позволяет построить оценку искомого решения, которая минимизирует норму невязки

$$\|s - [h] \hat{f}\|^2 \quad (52)$$

и одновременно имеет минимальную норму. Оценка искомого решения в алгоритме псевдообращения равна

$$\hat{f} = [h]^+ s. \quad (53)$$

Если строки матрицы $[h]$ линейно независимы, а число столбцов больше числа строк, то псевдообратная матрица определяется выражением

$$[h]^+ = [h]^T [[h] [h]^T]^{-1}. \quad (54)$$

Число строк в матрице $[h]^+$ больше числа столбцов. Если линейно независимыми являются столбцы матрицы $[h]$, а число строк больше числа столбцов, то псевдообратная матрица определяется иначе:

$$[h]^+ = [[h]^T [h]]^{-1} [h]^T. \quad (55)$$

Если матрица $[h]$ размером $M \times M$ является диагональной и

$$[h] = \text{diag} [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}], \quad (56)$$

то ее псевдообратная матрица равна

$$[h]^+ = \text{diag} [\lambda_0^+, \lambda_1^+, \dots, \lambda_{M-1}^+],$$

где

$$\lambda_k^+ = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M-1; \\ \lambda_k^{-1}, & \text{если } \lambda_k \neq 0. \end{cases} \quad (57)$$

Классическими алгоритмами построения псевдообратных матриц являются: метод ортогонализации Грамма — Шмидта, метод исключения Гаусса — Йордана, метод градиентных проекций и метод характеристического полинома [48]. Исследования последнего времени показали, что эффективным алгоритмом построения псевдообратной матрицы является метод сингулярных разложений [27, 51, 52], который заключается в следующем.

Пусть ранг матрицы $[h]$ размером $M \times N$ равен r . Тогда существуют такие два ортогональных преобразования $[U]$ и $[V]$ соответственно размером $M \times M$ и $N \times N$, что [49]:

$$[U]^T [h] [V] = \begin{bmatrix} [\Lambda] & | & [0] \\ \hline [0] & | & [0] \end{bmatrix}, \quad (58)$$

где $[\Lambda]$ — диагональная матрица размером $r \times r$ с положительно определенными элементами, а $[0]$ — матрицы из нулевых элементов соответствующего размера. Если матрицы $[U]$ и $[V]$ записать в виде:

$$\begin{aligned} [U] &= [u_0 | u_1 | \dots | u_{r-1}]; \\ [V] &= [v_0 | v_1 | \dots | v_{r-1}], \end{aligned} \quad (59)$$

где u_i , $i = 0, 1, \dots, (r-1)$, — M -компонентные векторы-столбцы матрицы $[U]$, а v_i , $i = 0, 1, \dots, (r-1)$, — N -компонентные векторы-столбцы матрицы $[V]$, то

$$[h] = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i v_i u_i^T, \quad (60)$$

где λ_i^2 , $i = 0, 1, \dots, (r-1)$, — ненулевые собственные значения матрицы $[h] [h]^T$ или $[h]^T [h]$. Величины λ_i называют сингулярны-

ми значениями матрицы $[h]$. Векторы \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_i , $i = 0, 1, \dots, (r - 1)$ являются ортогональными собственными векторами матриц $[h]$ $[h]^T$ и $[h]^T [h]$ соответственно. Прямое произведение векторов $\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$ представляет собой матрицу размером $M \times N$, ранг которой равен 1.

Тогда псевдообратную матрицу $[h]^+$ можно записать в виде

$$[h]^+ = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i^{-1} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad \lambda_i \neq 0. \quad (61)$$

Если вместо полной суммы (60) взять усеченную сумму:

$$[h_k] = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad k < r, \quad (62)$$

то

$$\| [h] - [h_k] \|^2 = \sum_{i=k}^{r-1} \lambda_i^2. \quad (63)$$

Это значит, что процедура усечения суммы (60) удовлетворяет критерию минимума наименьших квадратов на каждом шаге и что не существует другого линейного разложения, более оптимального по указанному критерию, чем сингулярное.

Псевдообратная оценка искомого решения $\hat{\mathbf{f}}$ одномерной обратной задачи равна

$$\hat{\mathbf{f}} = [h]^+ \mathbf{s} = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i^{-1} (\mathbf{u}_i^T \mathbf{s}) \mathbf{v}_i, \quad (64)$$

где величины $\mathbf{u}_i^T \mathbf{s}$, $i = 0, 1, \dots, (r - 1)$, являются скалярными. Соотношение (64), обобщенное на двумерный случай, успешно применялось при обработке размытых изображений [66].

Связь между погрешностями измерений и дисперсиями оценки искомого решения обратной задачи можно выразить через условное число C . В тех случаях, когда аддитивными шумами можно пренебречь, условное число определяется выражением

$$C = \| [h] \| \cdot \| [h]^+ \|, \quad (65)$$

где $\| [h] \| = \lambda_{\max}$, $\| [h]^+ \| = \lambda_{\min}^{-1}$, или

$$C = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}. \quad (66)$$

Если $\Delta \mathbf{f}$ — вектор дисперсии оценки искомого решения, а $\Delta \mathbf{s}$ — вектор дисперсии измерений, то

$$\| \Delta \mathbf{f} \| / \| \mathbf{f} \| \leq \| [h] \| \cdot \| [h]^+ \|^{-1} \times \\ \times (\| \Delta \mathbf{s} \| / \| \mathbf{s} \|) = C \| \Delta \mathbf{s} \| / \| \mathbf{s} \|. \quad (67)$$

Из (67) видно, что верхняя оценка относительной дисперсии найденного решения определяется относительной дисперсией измерений и тем выше, чем шире диапазон сингулярных значений матри-

цы $[h]$, причем сами сингулярные значения не влияют непосредственно на значение дисперсии оценки искомого решения.

Степень плохой обусловленности обратной задачи зависит также от числа элементов в матрице $[s]$, которая является дискретным эквивалентом непрерывной функции $s(x)$. Обычно шаг дискретизации изображения выбирают из теоремы отсчетов [42], которую, однако, можно использовать только в том случае, если известны границы спектра функции $s(x)$.

Ситуация осложняется тем, что спектр функции $s(x)$ отличен от нуля при сколь угодно больших пространственных частотах, и поэтому граничную пространственную частоту, которая задает шаг дискретизации, можно определить только приближенно.

Тенденция уменьшить шаг дискретизации и тем самым получить малую погрешность дискретизации приводит к матрице $[s]$ очень большого размера и соответственно увеличивает объем вычислений. Одновременно ухудшается обусловленность обратной задачи. Условное число, которое является количественной мерой обусловленности задачи, быстро возрастает по мере уменьшения шага дискретизации. С неизбежностью возникает задача оптимизации шага дискретизации. В [53] показано, что шаг дискретизации можно взять в качестве параметра регуляризации, и при этом получить такой же результат, который получается при помощи аналитической регуляризации А. Н. Тихонова. Найденные таким методом асимптотические оценки искомого решения оказываются эквивалентными тем оценкам, которые получаются при помощи классического метода аналитической регуляризации, а найденное таким образом решение обращает в минимум квадрат невязки.

Если аддитивным шумом в (45) пренебречь нельзя, то условное число имеет другой вид. Так, например, если среднее статистическое значение шума обращается в нуль, а матрица автоковариации шума равна $[R_n]$, то условное число C_n необходимо записать в виде

$$C_n = \|[B][h]\| \cdot \|[B][h]^+\|, \quad (68)$$

где

$$[R_n]^{-1} = [B]^T [B]$$

Так как матрица $[R_n]^{-1}$ является положительно определенной [50, 61], то ее всегда можно представить в виде квадрата некоторой матрицы $[B]$. Запишем прямоугольную матрицу $[B][h]$ при помощи сингулярного разложения:

$$[B][h] = [U_B][\Lambda_B]^{1/2}[V_B]^T, \quad (69)$$

где $[\Lambda_B]$ — диагональная матрица, элементы которой равны квадрату сингулярных значений матрицы $[B][h]$. Тогда дисперсия

оценки, обусловленная шумами, равна

$$\Delta \mathbf{f} = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{B_i}^{-1/2} [[U_B]^T [B] \mathbf{n}]_i \mathbf{v}_{B_i}, \quad (70)$$

а условное число

$$C_n = \lambda_{B \text{ макс}} / \lambda_{B \text{ мин}}. \quad (71)$$

Рассмотрим теперь некоторые особенности алгоритма введения линейных ограничений на искомое решение. В отличие от обычных методов аналитической регуляризации, в которых используют квадратичные функционалы вида $\mathbf{f}^T [\mathcal{Y}] \mathbf{f}$, где $[\mathcal{Y}]$ — некоторая определенным образом выбранная матрица, линейные ограничения выражаются следующим соотношением [62]:

$$[A] \hat{\mathbf{f}}_{\text{огр}} = \mathbf{t}, \quad (72)$$

где $[A]$ — матрица размером $r \times N$ для одномерной задачи; r — ранг матрицы $[A]$; $\hat{\mathbf{f}}_{\text{огр}}$ — оценка искомого решения с линейным ограничением; \mathbf{t} — заданный r -компонентный вектор. В [63] показано, что оптимальная оценка искомого решения задачи с линейным ограничением равна

$$\hat{\mathbf{f}}_{\text{огр}} = \hat{\mathbf{f}} + [[h]^T [R_n]^{-1} [h]]^{-1} [A]^T \times \\ \times [[A] [h]^T [R_n]^{-1} [h]]^{-1} [A]^T]^{-1} (\mathbf{t} - [A] \hat{\mathbf{f}}). \quad (73)$$

Здесь $\hat{\mathbf{f}}$ — оценка искомого решения задачи без ограничений, которая при наличии шумов равна

$$\hat{\mathbf{f}} = [[h]^T [R_n]^{-1} [h]]^{-1} [h]^T [R_n]^{-1} \mathbf{s}. \quad (74)$$

Матрица автоковариации такого оптимального решения, определяющая дисперсию оценки искомого решения, имеет следующий вид:

$$[R] = [R]_0 - [R]_0 [A]^T [[A] [R]_0 [A]^T]^{-1} [A] [R]_0, \quad (75)$$

где $[R]_0$ — матрица автоковариации оценки искомого решения задачи без ограничений, равная

$$[R]_0 = [[h]^T [R_n]^{-1} [h]]^{-1}. \quad (76)$$

Второе слагаемое в (75) представляет собой неотрицательно определенную матрицу, ранг которой равен r . Поэтому дисперсия оценки искомого решения задачи с линейным ограничением меньше соответствующей дисперсии задачи без ограничения. Из (73) видно, что в общем случае оптимальная оценка искомого решения задачи с ограничением не является несмещенной [63], однако смещение обращается в нуль, если выполнено условие (72). Методом статистических испытаний [56] можно проверить, действительно ли

введение линейных ограничений приводит к уменьшению дисперсии оценки искомого решения. В работе [62] показано, что привлечение линейных ограничений позволяет получить искомое изображение высокого качества. Однако реализация такого алгоритма решения обратной задачи на ЭВМ требует большого объема вычислений, и поэтому данный алгоритм не пригоден для обработки большого потока изображений.

Описанные выше методы решения обратных задач не всегда удается применить для изображений, так как матрица изображения размером 256×256 содержит около $8 \cdot 10^4$ неизвестных, и для их определения требуется обратить матрицу, содержащую около 10^9 элементов. Это послужило стимулом для разработки алгоритмов решения обратных задач применительно к изображениям. В обзоре [64] описаны около десяти линейных методов решения обратных задач. Новые алгоритмы, не упомянутые в указанном обзоре, кратко изложены ниже.

Наибольший практический интерес представляют те алгоритмы, которые можно свести к вычислениям при помощи быстрых алгоритмов преобразования Фурье. К ним относятся алгоритмы псевдообращения [48—50], которые, будучи эффективными и очень удобными алгоритмами решения обратных задач, не имеют быстрых алгоритмов реализации на ЭВМ. Однако если матрицу размытия изображающей системы превратить из теплицевской в циркулянтную, то ее диагонализует дискретное преобразование Фурье, реализация которого ведется при помощи быстрых алгоритмов счета. Число вычислительных операций для обращения матрицы изображения размером 512×512 сокращается в 6000 раз [66]. Этот выигрыш достигается ценой ухудшения качества реставрированного изображения вблизи краев кадра. Аналогичный прием использован в случае, когда функция размытия изображения не является пространственно-инвариантной [65].

Если аддитивным шумом в (45) пренебречь нельзя, то обратную задачу решают при помощи фильтра Винера. Однако если искомая и исходная функции заданы на конечном интервале, как это имеет место в случае изображений, то возникают принципиальные осложнения. Задачу приходится решать путем построения дважды ортогональной системы функций. Развитая в [67] модификация обратной задачи состоит в том, что значения искомой функции предполагаются точно известными на границах конечного интервала. В этом случае отпадает необходимость в построении дважды ортогональной системы функций, а фильтрацию Винера выполняют при помощи преобразования Фурье. Оптимальный фильтр, реализуемый при помощи быстрого алгоритма преобразования Фурье, был построен как для симметричных, так и для несимметричных пространственно-инвариантных функций. Дальнейшее развитие этого метода дано в [68].

3. МЕТОД МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ

Алгоритм решения обратной задачи по методу максимума энтропии содержит нелинейное ограничение на оценку искомого решения. А именно, оценка искомого решения должна обращать в максимум энтропию изображения. Это требование не может быть выражено в явном виде или сведено к линейным операциям. Условие максимума энтропии приводит к нелинейному алгоритму решения обратной задачи, и его реализация на ЭВМ требует большого объема вычислений. Вторым сдерживающим фактором является неоднозначность в выборе выражения для информационной энтропии изображения. В некоторых работах [31, 69] использовалось выражение для энтропии вида

$$H_1 = \sum_{x=0}^{N-1} \lg f(x), \quad (77)$$

а в других [70] —

$$H_2 = - \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \lg f(x). \quad (78)$$

По-видимому, впервые метод максимума энтропии вместо линейного алгоритма был использован Дж. Паркером Бергом в 1967 г. (работа не опубликована). Исходя из традиционного алгоритма спектрального анализа для нахождения оценок спектра мощности по заданной функции автокорреляции случайного процесса путем разложения этой функции в ряд Фурье [69], Берг ввел дополнительное ограничение, состоящее в том, что энтропия оценки спектра мощности должна быть максимальной. Метод максимума энтропии успешно «работал» при решении недоопределенных обратных задач [32]. Это позволило рассматривать метод максимума энтропии с принципиально других позиций, а именно, устремление к максимуму энтропии искомой оценки принимать за основное условие, а экспериментальные данные — как ограничения. Поэтому наиболее вероятную оценку искомого решения можно получить даже в том случае, когда выполнено только одно измерение. При добавлении новых измерений оценка искомого решения изменяется, но она всегда обращает в максимум энтропию изображения.

Берг обнаружил, что разрешение в оценке спектра мощности было выше того значения, которое получалось при помощи традиционных линейных алгоритмов спектрального анализа. В работах [22, 32] было обнаружено, что оценки искомого решения обратной задачи, найденные по методу максимума энтропии, достаточно стабильны к шумам и другим возмущениям, которые в линейных алгоритмах решения обратной задачи приводят к сингулярному

взрыву и требуют введения стабилизирующих операторов. При решении обратной задачи по методу максимума энтропии таких проблем не возникает. Это явилось решающим фактором для успешного применения метода максимума энтропии в геофизике [71], в оптике [72, 73] и при исследовании космического пространства. Так, например, фотографии, полученные при облете Юпитера и его спутников космическими аппаратами «Пионер» и «Вояджер», были обработаны методом максимума энтропии [29]. Разрешающая способность была в два раза выше разрешающей способности, полученной при обработке изображений методом псевдообращений. Время обработки матрицы изображения размером 23×23 составило около 30 с.

Небольшие возмущения от шума или от статистических флуктуаций результатов измерений не приводили к большим выбросам в искомом решении, полученном методом максимума энтропии. Это значит, что состояние максимума энтропии соответствует некоторому стабилизирующему взаимодействию входных и выходных данных обратной задачи. Стабилизирующий оператор неявно содержится в методе максимума энтропии, и вводить дополнительные стабилизирующие операторы не требуется. Метод максимума энтропии можно представить более простыми частными условиями, которые применимы для некоторых узких классов задач. Так, например, требование минимальной длины искомой кривой на плоскости, которое вводят в качестве нелинейного ограничения на искомую функцию одномерной обратной задачи, представляет собой эквивалент стабилизирующего условия подобно принципу максимума энтропии. Результаты, полученные в [74], полностью подтверждают сделанный вывод.

Прежде чем перейти к подробному изложению метода максимума энтропии, перечислим наиболее характерные свойства искомых решений, полученных при помощи этого метода. Во-первых, решения с максимумом энтропии являются наиболее гладкими функциями среди тех, которые удовлетворяют исходной системе линейных уравнений. Во-вторых, решения с максимумом энтропии весьма стабильны к шуму. В-третьих, в методе максимума энтропии неявно содержится ограничение на положительные значения искомого решения, которое приводит к дополнительному повышению разрешения сверх того, что дает линейный метод псевдообращения без ограничений. Наконец, в отличие от всех других методов решения обратных задач с ограничением, имеющим эвристическую основу, метод максимума энтропии имеет универсальную формулировку: оценка искомого решения обратной задачи должна иметь максимальную энтропию.

Рассмотрим алгоритм нахождения оценки искомого решения обратной задачи по методу максимума энтропии для изображений, зарегистрированных в фотоэмульсии [72]. Большое число прояв-

ленных зерен позволяет использовать статистические законы больших чисел в теории вероятности. Для упрощения записи ограничимся рассмотрением одномерной задачи. Пусть $f(x)$ — вероятность того, что проявленное зерно возникло на интервале длиной Δx вокруг точки x , а Δx выбрано в соответствии с теоремой отсчета с учетом тех оговорок, которые были сформулированы в разд. 2. Тогда уравнения, описывающие процесс образования фотографического изображения, можно записать в виде:

$$s(x) = \sum_{\xi=0}^{N-1} f(\xi) h(x, \xi) + n(x),$$

$$x = 0, 1, \dots, M-1; M < N, \tag{79}$$

где $s(x)$ — изображение объекта $f(\xi)$, полученное оптической системой, функция размытия которой равна $h(x, \xi)$, а $n(x)$ — аддитивный шум. Если функция $s(x)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\sum_{x=0}^{N-1} s(x) = A, \tag{80}$$

то уравнения (79) и (80) образуют систему из $(N + 1)$ уравнений, по которым требуется найти N компонент искомой функции $f(x)$ и M компонент шума $n(x)$. Это — недоопределенная обратная задача.

Аддитивный шум $n(x)$ имеет как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому, чтобы иметь дело с положительными значениями, к шуму добавляют смещение B , равное верхней грани отрицательных значений шума $n_-(x)$:

$$n_0(x) = n(x) + B \geq 0, \quad B = \sup n_-(x) \geq 0. \tag{81}$$

Используя традиционную процедуру построения уравнений с применением множителей Лагранжа, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} & - \sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x) \ln \hat{f}(x) - \rho \sum_{x=0}^{N-1} \hat{n}_0(x) \ln \hat{n}_0(x) - \\ & - \sum_{x=0}^{M-1} \lambda(x) \left[\sum_{\xi=0}^{N-1} \hat{f}(\xi) h(x, \xi) + \hat{n}_0(x) - B - s(x) \right] - \\ & - \mu \left(\sum_{\xi=0}^{N-1} \hat{f}(\xi) - P_0 \right) \rightarrow \max, \end{aligned} \tag{82}$$

где $\hat{f}(x)$ и $\hat{n}(x)$ — искомые оценки структуры объекта и шума; $\lambda(x)$ и μ — неизвестные множители; $\rho = \Delta f / \Delta n$ — отношение дисперсии искомого решения к дисперсии шума. Если первую производную от выражения (82) по $\hat{f}(x)$ приравняем нулю, то полу-

чим оценку искомого решения в виде

$$\hat{f}(x) = \exp \left[-1 - \mu - \sum_{\xi=0}^{M-1} \lambda(\xi) h(x, \xi) \right]. \quad (83)$$

Если приравняем нулю первую производную выражения по $\hat{n}_0(x)$, то получим выражение для оценки $\hat{n}_0(x)$:

$$\hat{n}_0(x) = \exp \left[-1 - \lambda(x)/\rho \right]. \quad (84)$$

Приравнивание нулю первых производных [выражения (82) по $\lambda(x)$, $x=0, 1, \dots, N-1$, и по μ приводит к следующей системе ограничивающих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} s(x) &= \sum_{\xi=0}^{N-1} \hat{f}(\xi) h(x, \xi) + \hat{n}_0(x) - B, \\ x &= 0, 1, \dots, M-1, \\ P_0 &= \sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Чтобы найти значения параметров $\lambda(x)$ и μ , подставим уравнения (83) и (84) в (85). Получим систему из $N+1$ уравнений для $N+1$ неизвестных $\lambda(x)$, $x=0, 1, \dots, N-1$, и μ . Эту систему решают методом итераций. Если никаких данных об изображении нет, то оценку объекта по максимуму энтропии принимают равной постоянной величине P_0/N , а $\lambda(x) = 0$, $x=0, 1, \dots, N-1$.

В отличие от оценок искомого решения, полученных линейным методом псевдообращения, оценка объекта $\hat{f}(x)$, найденная по методу максимума энтропии, не является функцией с ограниченной полосой пространственных частот, если только не все $\lambda(x)$ равны нулю. Это означает, что оценка объекта $\hat{f}(x)$ имеет разрешение, которое выше классического разрешения изображающей системы [26, 73].

Любая производная по координате от оценки объекта $\hat{f}(x)$ пропорциональна самой оценке $\hat{f}(x)$:

$$d^{(m)} \hat{f}(x)/dx^m \sim \hat{f}(x), \quad m=1, 2, \dots \quad (86)$$

Благодаря этому свойству метод максимума энтропии дает особенно хорошие результаты для линейных спектров или для изображений звезд на темном фоне.

Любая смешанная частная производная по $\lambda(x)$ или по μ от оценки объекта $\hat{f}(x)$ также пропорциональна самой оценке $\hat{f}(x)$:

$$\partial^{(m)} \hat{f}(x) / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 \dots \partial \lambda_m \sim \hat{f}(x), \quad m=1, 2, \dots \quad (87)$$

Поэтому там, где оценка $\hat{f}(x)$ близка к нулю, оценка $\hat{f}(x)$ остается стабильной относительно погрешностей в величинах $\lambda(x)$ и μ .

Моделирующие эксперименты по применению метода максимума энтропии в оптике при расшифровке линейчатых спектров, измеренных спектрометром при наличии аддитивных шумов, показали, что оценки линейчатого спектра характеризуются высоким разрешением и не содержат ложных осцилляций и боковых лепестков, типичных для линейных методов псевдообращения [72]. Было установлено, что в присутствии шумов с амплитудой в 5% относительно объекта удалось получить оценки искомого объекта в области пространственных частот, лежащей за пределами разрешающей способности изображающей системы при некогерентном освещении [73]. Исследования эффекта сверхразрешения, который дает метод максимума энтропии, показали [71], что при расшифровке линейчатых спектров, измеренных спектрометром с плохим разрешением, точнее всего определяется число спектральных компонент в слившемся мультиплете, несколько хуже устанавливаются положения компонент мультиплета и значение спектрального разрешения и хуже всего находятся данные об интенсивности отдельных компонент мультиплета [71].

Метод максимума энтропии был успешно применен в радиоастрономии [31] при определении картины радиоисточников на небосводе по данным о фурье-образе этого распределения, искаженным шумами. Исходные данные представляли собой интерферометрические изменения, полученные на разреженном массиве большого числа радиоантенн. Так как число фотонов, приходящихся на одну степень свободы, в этих условиях составляло около $10^4 - 10^5$, то выражение для энтропии имеет вид (77). Оценка распределения радиоисточников на небосводе $\hat{f}(k) \equiv \hat{f}(x_k y_k)$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, связана с величинами $s(i)$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, измеренными при помощи радиотелескопа, соотношением

$$s(i) = \Delta A \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(k) \exp[-j2\pi(u_i x_k + v_i y_k)] \quad (88)$$

(ΔA — площадь элемента изображения) и должна обращать в максимум энтропию вида

$$\sum_{k=0}^{N-1} \ln \hat{f}(k). \quad (89)$$

Дисперсии отдельных измерений $\sigma^2(i)$, $i = 1, 0, \dots, M - 1$, по условию являются независимыми и удовлетворяют ограничению:

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{\sigma^2(i)} |m(i) - \hat{m}(i)|^2 = M, \quad (90)$$

где

$$\hat{m}(i) = \Delta A \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \exp[-j2\pi(u_i x_k + v_i y_k)]. \quad (91)$$

Целевая функция, которая должна обращаться в максимум, имеет вид

$$\Delta A \left[\sum_{k=0}^{N-1} \ln \hat{f}(k) + \sum_{k=0}^{N-1} d(k) \hat{f}(k) \right] - \frac{1}{2} (\Delta A)^2 \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} p(l, k) \hat{f}(k) \hat{f}(l) - \lambda \sum_{i=0}^{M-1} [m(i)]^2 [\sigma(i)]^2, \quad (92)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d(l) &= 2\lambda \sum_{i=0}^{M-1} [\sigma(i)]^{-2} \{ m_{\text{Re}}(i) \cos [2\pi(u_i x_l + v_i y_l)] - \\ &\quad - m_{\text{Im}}(i) \sin [2\pi(u_i x_l + v_i y_l)]; \\ p(k, l) &= 2\lambda \sum_{i=0}^{M-1} [\sigma(i)]^{-2} \cos \{ 2\pi [u_i (x_l - x_k) + \\ &\quad + v_i (y_l - y_k)] \}, \\ p(k, l) &= p(l, k). \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Функция $d(l)$ представляет собой исходную нулевую оценку функции $f(x)$, полученную путем обратного преобразования Фурье результатов измерений $m(i) = m_{\text{Re}}(i) + jm_{\text{Im}}(i)$, $i = 0, 1, \dots, M-1$, которые в общем случае являются комплексно-значными величинами. Функция $p(k, l)$ равна отклику в k -м элементе под действием точечного источника, расположенного в l -м элементе. Для нахождения экстремума целевой функции был использован метод сопряженных градиентов [24]. Описанный метод получения картины радиисточников на небосводе по методу максимума энтропии был опробован на матрице изображения размером 21×21 . Оценка изображения радиодублета в созвездии Лебедь имела разрешение в два раза лучше, чем давал метод прямой расшифровки. Кроме того, в полученном изображении исчезли ложные осплелции, а также ложные источники.

Обобщение принципа максимума энтропии на приемники изображения, которые дают сигналы, подчиняющиеся статистике счета отдельных фотонов, дано в [70]. В этом случае источником шума являются статистические флуктуации числа зарегистрированных фотонов, которые описываются распределением Пуассона. Поэтому шум зависит от величины самого сигнала и не может быть описан моделью аддитивного шума. Подобная ситуация

типична для астрономии при регистрации очень слабых объектов или при регистрации элементарных частиц в физике высоких энергий, когда число зарегистрированных частиц в одном элементе изображения не превышает ста.

Если спектральные линии или точечные объекты расположены на плавно изменяющемся фоне, то процесс образования изображения задается выражением

$$s(x) = \sum_{\xi=0}^{N-1} f(\xi) h(x-\xi) + N(x) + n(x), \quad x=0, 1, \dots, M-1, \quad (94)$$

где $h(x)$ — пространственно-инвариантная функция размытия изображающей системы; $N(x)$ — плавно меняющийся фон; $n(x)$ — аддитивный шум. Если $N(x) = \text{const}$, то (94) перейдет в (79).

Характерная особенность статистики Пуассона заключается в том, что искомый объект и неизвестный шум в изображении являются связанными величинами. Чтобы учесть эту связь, вводят совместное распределение

$$P(f, n) = P_1(f) P_2(n | f), \quad (95)$$

где функция вероятности P_1 описывает статистику объекта, не зависящую от шумов изображения, а P_2 — только шумы изображения, зависящие от объекта. Обычно предполагают, что P_1 равно априорной статистике объекта, которая определяется безусловным статистическим фактором:

$$P_1(f) = (P_0/\Delta f)! \prod_{x=0}^{N-1} [f(x)/\Delta f], \quad (96)$$

где Δf — инкремент по объекту f , о котором будет сказано позже. Так как распределение $P_2(n | f)$ является по условию пуассоновским и $n(x)$ однозначно определяет функцию $s(x)$ при неизменных $f(x)$ и $h(x)$:

$$P_2(n | f) = P_2(s | f). \quad (97)$$

Пуассоновской является также условная вероятность изображения при условии, что объект $f(x)$ задан. Наконец, обычно предполагают, что компоненты $s(x)$ и $f(x)$ в разных точках изображения и соответственно объекта статистически независимы. Пуассоновское распределение P_2 имеет вид

$$P_2(s(\xi) | f(x)) = \prod_{\xi=0}^{N-1} \frac{\nu_0(\xi)^{s(\xi)} \exp[-\nu_0(\xi)]}{\nu(\xi)!} \quad (98)$$

Здесь $\nu(\xi)$ — число инкрементов в каждой компоненте изображения $s(\xi)$, равное

$$\nu(\xi) = s(\xi)/\Delta s, \quad (99)$$

а

$$\nu_0(\xi) = s_0(\xi)/\Delta s, \quad (100)$$

где $s_0(\xi) = s(\xi) - N(\xi)$. Функция $s_0(\xi)$ задает несмещенную статистику функции $s(\xi)$. Требование максимума энтропии эквивалентно условию

$$\begin{aligned} & \ln P_1(f) + \ln P_2(s|f) - \\ & - \sum_{\xi=0}^{M-1} \lambda(\xi) \left[\sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x) h(x, \xi) - s(x) \right] - \\ & - \mu \left[\sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x) - P_0 \right] \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (101)$$

Если в (101) подставить выражение для $P_1(f)$ из (96) и $P_2(s|f)$ из (98), опустить постоянные слагаемые и считать известным плавно меняющийся фон $N(x)$, то (101) перейдет в выражение

$$\begin{aligned} & - \sum_{x=0}^{N-1} \hat{\tau}(x) \ln \hat{\tau}(x) + \sum_{\xi=0}^{M-1} [v(\xi) \ln v_0(\xi) - s_0(\xi) - v(\xi) \ln v(\xi)] - \\ & - \sum_{\xi=0}^{M-1} \lambda(\xi) \left[\sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x) h(x, \xi) - s(\xi) \right] - \\ & - \mu \left[\sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x) - P_0 \right] \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (102)$$

где $\hat{\tau}(x) = \hat{f}(x)/\Delta f$ — число инкрементов в каждом компоненте оценки искомого изображения.

Так как

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n(x)} \Big|_{\substack{f(x) \\ \text{фиксир}}} &= \frac{\partial}{\partial s(x)} \Big|_{\substack{f(x) \\ \text{фиксир}}}; \\ \frac{\partial s(x)}{\partial f(\xi)} \Big|_{\substack{n(x) \\ \text{фиксир}}} &= h(x - \xi), \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (103)$$

окончательное уравнение для нахождения оценки $\hat{f}(x)$ имеет вид

$$s(x) = \left[\sum_{\xi=0}^{N-1} f(\xi) h(x - \xi) + N(x) \right] \exp[-1 - \Delta s \lambda(x)]. \quad (104)$$

Наиболее вероятная оценка картины объекта $\hat{f}(x)$ в случае пуассоновской статистики равна

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}(x) &= \Delta f \exp[-1 - \mu \Delta f - \Delta f \sum_{\xi=0}^{M-1} \lambda(\xi) h(x - \xi)]; \\ \sum_{\xi=0}^{M-1} \hat{f}(\xi) h(x - \xi) &= s(x); \\ \sum_{x=0}^{N-1} \hat{f}(x) &= P_0. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Если ввести отношение инкрементов

$$\rho = \Delta f / \Delta s \quad (106)$$

и новые параметры Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda(x) &= \Delta f \lambda(x), \quad x = 0, 1, \dots, M-1; \\ \Gamma &= \mu \Delta f - \ln \Delta f, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

то оценку объекта можно записать в еще более компактной форме:

$$\hat{f}(x) = \exp \left[-1 - \Gamma - \sum_{\xi=0}^{M-1} \Lambda(\xi) h(x - \xi) \right], \quad x = 0, 1, \dots, M-1; \quad (108)$$

$$s(x) = \left[\sum_{\xi=0}^{N-1} \hat{f}(\xi) h(x - \xi) + \hat{N}(x) \right] \exp[-1 - \Lambda(x)/\rho]. \quad (109)$$

Из (109) видно, что оценка $f(x)$ положительно определена, а шум в наблюдаемом изображении $s(x)$ мультипликативный. Также видно, что чем больше параметр ρ , тем выше разрешение в оценке $\hat{f}(x)$. Инкремент Δx равен расстоянию между соседними уровнями квантования или между двумя близкими объектами $f(x)$. Инкремент Δs для пуассоновского изображения определяется отношением сигнала к шуму $S/N = \sqrt{\kappa}$, где $\kappa = s_{\text{макс}}/\Delta s$ равно полному числу инкрементов в изображении, а $s_{\text{макс}}$ — максимальная интенсивность изображения $s(x)$. Величина κ не может быть выше динамического диапазона приемника света. Чем больше величина κ , тем более гладкой оказывается оценка $\hat{f}(x)$. Наконец, можно показать, что

$$\rho = \Delta f / \Delta s = (\Delta f / s_{\text{макс}}) (S/N)^2 = (1/\kappa) (S/N)^2. \quad (110)$$

Хорошие результаты получены при $\rho = 100$. Моделирующие эксперименты по улучшению качества фотографий астрономических объектов показали, что матрицу изображения размером 50×50 можно оценить за 60 с работы ЭВМ СДС 6400 или 6 с ЭВМ СДС Сувег 175. При этом время счета тем больше, чем выше получаемое сверхразрешение в оценке картины объекта.

Все сказанное в этом разделе о методе максимума энтропии может вызвать у читателя некоторые вопросы. Первым из них, несомненно, является вопрос об информационной основе сверхразрешения, которое дает метод максимума энтропии. Действительно, согласно информационного принципа неопределенности, предельное разрешение по частоте, которое может дать последовательность из N отсчетов функции $f(x)$, $x = 0, 1, \dots, N-1$, с шагом Δx между соседними отсчетами определяется классическим выра-

жением

$$\Delta\omega_{\text{мин}} \geq 2\pi/N\Delta x. \quad (111)$$

Если частота ω такова, что на интервале $N \Delta x$ укладывается только один период синусоиды, то относительное разрешение по частоте равно 1:

$$\Delta\omega_{\text{мин}}/\omega \geq 2\pi \cdot N \Delta x / (N \Delta x \cdot 2\pi) = 1. \quad (112)$$

Между тем при помощи метода максимума энтропии удается получить относительное разрешение по частоте [32], которое значительно меньше классического ограничения (112). Причина этого кажущегося противоречия заключается в том, что в ходе построения последовательности оценок по методу максимума энтропии происходит экстраполяция исходной последовательности отсчетов на большее число отсчетов N' . В результате длина записи возрастает, а разрешение по частоте уменьшается в соответствии с классическим выражением (111). Динамика процесса экстраполяции данных по методу максимума энтропии была прослежена в [32] при помощи фильтра предсказания ошибки [76]. Сущность этого нелинейного метода решения обратных задач [77] заключается в том, что при помощи фильтра предсказания ошибки исходные данные $f(x)$ подвергаются процессу «отбеливания»: спектр мощности случайного процесса $\{f(x)\}$ превращается в постоянную величину, не зависящую от частоты ω . Это позволяет найти оценку спектра мощности процесса $\{f(x)\}$ в виде

$$\Phi(\omega) = \frac{\Phi(M+1)}{\left|1 + \sum_k a(M, k) \exp(-i\omega k)\right|^2}, \quad (113)$$

где $\Phi(M+1)$ — средняя выходная мощность на выходе фильтра предсказания ошибки с $M+1$ компонентами, причем первая из них должна равняться 1. Коэффициенты M -го фильтра $a(M, k)$ определяются матричными уравнениями вида

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M) \\ r(1) & & & \vdots \\ \vdots & & & r(1) \\ r(M) & \dots & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(M, 1) \\ \vdots \\ a(M, M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(M+1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (114)$$

где $r(0), r(1), \dots, r(M)$ — оценки автокорреляции случайного процесса $\{f(x)\}$. Соотношение (113) соответствует максимуму энтропии вида (30). Уравнение (114) решается с учетом исходных данных измерений $f(x)$ рекуррентным методом, разработанным Бергом [78].

Сначала полагаем $M=0$ в уравнении (114). Тогда

$$r(0) = \Phi(1) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^N [f(x)]^2. \quad (115)$$

На следующем шаге для двухкомпонентного фильтра предсказания ошибки исходим из уравнения

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \{1\} \\ \{0\} \end{array} \right| + a(1, 1) \left| \begin{array}{c} \{0\} \\ \{1\} \end{array} \right| = \\ & = \left| \begin{array}{c} \{\Phi(1)\} \\ \{\Delta(1)\} \end{array} \right| + a(1, 1) \left| \begin{array}{c} \{\Delta(1)\} \\ \{\Phi_1(1)\} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \Phi(2) \\ 0 \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (116)$$

Коэффициент $a(1, 1)$ оценивается по исходным данным минимизацией $\Phi(2)$ по отношению к $a(1, 1)$. Среднюю выходную мощность находим экстраполяцией исходных данных влево и вправо. Можно показать, что

$$\left. \begin{aligned} \Delta(1) &= -a(1, 1)\Phi(1); \\ \Phi(2) &= \Phi(1)[1 - a^2(1, 1)]. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Для построения трехкомпонентного фильтра используют уравнение

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} r(0) & r(1) & r(2) \\ r(1) & r(0) & r(1) \\ r(2) & r(1) & r(0) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ a(2, 1) \\ a(2, 2) \end{array} \right| = \\ & = \left| \begin{array}{ccc} r(0) & r(1) & r(2) \\ r(1) & r(0) & r(1) \\ r(2) & r(1) & r(0) \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \{1\} \\ \{a(1, 1)\} \\ \{0\} \end{array} \right| + a(2, 2) \left| \begin{array}{c} \{0\} \\ \{a(1, 1)\} \\ \{1\} \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (118)$$

Аналогично строят фильтр предсказания ошибки с еще большим числом компонент, используя на каждой итерации исходные данные. Этот метод был использован для нахождения оценки спектра мощности сигнала, который представлял собой синусоиду на частоте 1 Гц, усеченную до одного периода [77]. В моделирующих расчетах к усеченной синусоиде был добавлен белый шум с относительной амплитудой в 10%. Было обнаружено, что в отличие от линейных методов нахождения оценки спектра мощности исходного сигнала оценка, полученная по методу максимума энтропии, не дает сдвига по частоте, который наблюдается в линейных методах, а искомым спектр мощности содержит узкую линию.

Свойства фильтра предсказания ошибки, построенного по методу максимума энтропии, исследованы в [32]. Исходный сигнал состоит из 20 отсчетов функции, полученной при сложении трех синусоид на частотах 0,04; 0,08 и 0,12 Гц с равными амплитудами. Исходный сигнал, содержащий всего 0,8 периода синусоиды на частоте 0,04 Гц, экстраполирован в обе стороны, в результате чего длина сигнала возросла примерно в четыре раза. В отличие от других методов экстраполированная часть сигнала не имеет

тенденций к «разбалтыванию». Наоборот, по мере увеличения длины экстраполированного участка сигнал затухает и быстро стремится к нулю. Поэтому предельная длина участка экстраполяции ограничивается автоматически без наложения каких-либо дополнительных условий. Вместе с тем в [32] обнаружено, что при очень коротких записях наблюдаемого процесса соотношение между амплитудами гармоник в оценке спектра мощности становится неверным. Это явление исследовано более подробно в работе [71], где в качестве входного сигнала взята синусоида на частоте ω , к которой добавлен белый шум. Функция автокорреляции такого сигнала равна

$$\rho_1(x) = \delta(x) + \alpha \cos \omega_0 x, \quad (119)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. В [71] показано, что в отличие от линейных методов нахождения оценки спектра мощности ширина пика спектра мощности на частоте ω_0 зависит от параметра α как в методе максимума энтропии, так и в методе максимума правдоподобия.

Результаты моделирования показали, что при $\alpha N \gg 1$, $N \gg 1$, где N — число отсчетов функции автокорреляции (119), а Δx — шаг между отсчетами, ширина пика на частоте ω_0 равна

$$\Gamma_B = (\sqrt{6}/\pi N) \Delta x \quad (120)$$

для линейного метода Бартлетта [54],

$$\Gamma_{МП} = (2\Delta x/\pi N) \sqrt{6/\alpha N} \quad (121)$$

для метода максимума правдоподобия и

$$\Gamma_{мэ} = 4\Delta x/\pi \alpha N^2 \quad (122)$$

для метода максимума энтропии.

В той же работе моделирован процесс нахождения оценок спектра мощности для сигнала, функция автокорреляции которого имеет вид [71]

$$\rho_2(x) = 1 + 5,33 \cos(0,3\pi x) + 10,66 \cos(0,4\pi x), \quad x = 0, 1, \dots, 10. \quad (123)$$

На рис. 1 схематически приведены нормированные оценки для трех методов: линейного метода Бартлетта, метода максимума правдоподобия и метода максимума энтропии. На рис. 2 даны оценки спектра мощности сигнала, функция автокорреляции которого имеет вид

$$\rho_3(x) = \exp(-\alpha_1 x) [\cos \beta_1 x + (\alpha_1/\beta_1) \sin \beta_1 x] + 2 \exp(-\alpha_2 x) [\cos \beta_2 x + (\alpha_2/\beta_2) \sin \beta_2 x], \quad (124)$$

где $x = 0, 1, \dots, 10$; $\beta_1 = 2\pi \cdot 0,15$; $\beta_2 = 2\pi \cdot 0,30$; $\alpha_1 = 0,04$; $\alpha_2 = 0,04$ для тех же трех методов, а также дан истинный спектр

мощности, соответствующий непрерывной функции автокорреляции $\rho_3(x)$ в (124). Развитые в [71] методы построения оценок спектра мощности по методу максимума правдоподобия и по методу максимума энтропии были использованы для нахождения спектра мощности горизонтальной компоненты долгопериодического сейсмического шума, зарегистрированного в течение 17 мин

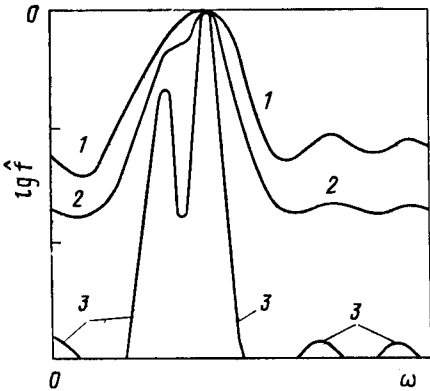


Рис. 1. Нормированные оценки спектра мощности сигнала, функция автокорреляции которого описывается выражением (123):

1 — оценка по методу Бартлетта; 2 — по методу максимума правдоподобия; 3 — по методу максимума энтропии

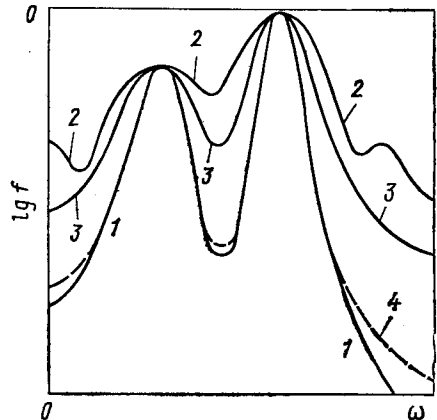


Рис. 2. Нормированные оценки спектра мощности сигнала, функция автокорреляции которого определяется выражением (124):

1 — исходный спектр мощности; 2 — оценка по методу Бартлетта; 3 — по методу максимума правдоподобия; 4 — по методу максимума энтропии

с интервалом отсчета в 1 с. В [71] обнаружено, что 20 отсчетов, обработанные по методу максимума правдоподобия, дают такое же разрешение по частоте, как и 99 отсчетов, обработанных по линейному алгоритму Бартлетта. Очень четкие пики спектра мощности индекса солнечной активности получены при обработке методом максимума энтропии массива данных, содержащего 70 отсчетов [75].

Связь между оценками спектра мощности, сделанными методом максимума правдоподобия и методом максимума энтропии установлена в [28]. Доказано, что обратная величина любой компоненты оценки спектра мощности по максимуму правдоподобия равна среднему от обратных величин соответствующей компоненты, которые последовательно находятся в процессе итерационного построения оценки спектра мощности методом максимума энтропии. Из этой теоремы можно сделать вывод о том, что оценка по методу максимума правдоподобия всегда имеет более низкий кон-

траст, чем оценка по методу максимума правдоподобия. Попытки дать методу максимума энтропии новую интерпретацию сделаны в работах [79, 80].

4. РЕКОНСТРУКТИВНАЯ ТОМОГРАФИЯ И МЕТОД МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ

Томографией называют метод получения изображений внутренней структуры объекта по плоскостям. Чтобы сформировать томографическое изображение в рентгеновских лучах, точечный источник излучения и фотопластинку перемещают синхронно во взаимно противоположных направлениях. При заданном отношении скоростей этих движений четкое проекционное изображение дают только те точки объекта, которые расположены на определенной глубине. Остальные точки объекта образуют сильно размытые изображения, которые вместе создают равномерный фон. Классическая томография не получила широкого распространения из-за низкого контраста изображений.

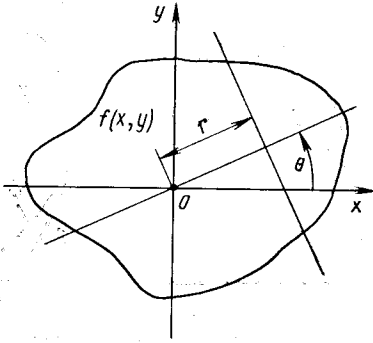


Рис. 3. Схема измерения одной из проекций в реконструктивной томографии. Искомая функция $f(x, y)$ задана в координатах xOy . Каждая проекция определяется параметрами r и θ

получения изображения среза объекта по совокупности проекций, измеренных под различными ракурсами. Процесс восстановления томографических изображений ведут при помощи ЭВМ [6], хотя известны также аналоговые методы получения томографических изображений [81]. Чтобы пояснить сущность реконструктивной томографии, рассмотрим схему измерения одной из проекций. Пусть функция $f(x, y)$ характеризует коэффициент ослабления интенсивности рентгеновских лучей или нейтронов в точке (x, y) , расположенной в некоторой заданной плоскости объекта (рис. 3). Каждое проекционное измерение характеризует степень суммарного ослабления узкого пучка рентгеновских лучей, прошедших через объект и попавших на соответствующий приемник излучения. Суммарное ослабление рентгеновских лучей равно интегралу от функции $f(x, y)$ вдоль линии, совпадающей с осью узкого пучка излучения. Каждое измерение индексируют двумя параметрами: расстоянием r от начала системы координат до линии проектирования и углом θ между осью Ox и нормалью, проведенной из начала

координат к линии проектирования. При заданном отношении скоростей этих движений четкое проекционное изображение дают только те точки объекта, которые расположены на определенной глубине. Остальные точки объекта образуют сильно размытые изображения, которые вместе создают равномерный фон. Классическая томография не получила широкого распространения из-за низкого контраста изображений.

На смену ей пришла реконструктивная томография — метод

системы координат к линии проектирования. Этот линейный интеграл, зависящий от r и θ , можно записать в виде преобразования Радона [82, 83]:

$$g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \theta - u \sin \theta, r \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (125)$$

Проекционные данные $g(r, \theta)$, полученные для всех r и θ , определяют искомую функцию $f(x, y)$ при помощи обратного преобразования Радона [16]:

$$f(x, y) = \frac{P}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{x \cos \theta + y \sin \theta - r} \frac{d}{dr} g(r, \theta) dr. \quad (126)$$

Чтобы устранить эффект сингулярности от множителя $(x \cos \theta + y \sin \theta - r)^{-1}$, интеграл от r берут в смысле главного значения Коши. Так как подынтегральное выражение (126) содержит операцию дифференцирования по r функции $g(r, \theta)$, которая в реальном эксперименте имеет вид дискретной совокупности отсчетов, реализация обратного преобразования Радона (126) на ЭВМ представляет собой некорректную задачу. Алгоритмы ее решения описаны в работах [84—86]. Однако традиционный метод регуляризации требует большого объема вычислений на ЭВМ, и поэтому были разработаны другие, более эффективные приближенные методы получения томографических изображений по проекциям. К ним принадлежит сверхточный алгоритм [87], различные варианты алгебраических методов восстановления [18, 88, 89], в частности, мультипликативный [90], а также метод максимума энтропии [91, 92]. Последним методом можно получить томографическое изображение хорошего качества по усеченной или прореженной совокупности проекций. Хотя метод максимума энтропии достаточно трудоемок, требования на объем памяти ЭВМ в нем ниже, чем у всех других алгоритмов восстановления, а восстановленные томографические изображения стабильны к шумам и погрешностям измерений.

Метод максимума энтропии в реконструктивной томографии представляет собой один из приемов решения обратных задач с ограничением. Оставив в стороне вопросы математического обоснования этого метода, изложим наиболее характерный вычислительный алгоритм, который в настоящее время используют в реконструктивной томографии [91]. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и удовлетворяет условиям:

$$f(x, y) \geq 0, \quad \iint_D f(x, y) dx dy = 1 \quad (127)$$

Тогда дискретную совокупность проекционных измерений, сделанных под ракурсными углами θ_k , можно записать в виде матрицы

$$G(k, m) = \int_{r(k, m)}^{r(k, m+1)} dr \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \theta_k - u \sin \theta_k, r \sin \theta_k + u \cos \theta_k) du, \\ m = 1, 2, \dots, M(k), k = 1, 2, \dots, J, \quad (128)$$

где $r(k, 1) < r(k, 2) < \dots < r(k, M(k))$ — совокупность абсцисс k -го ракурса. Поскольку область D ограничена, величины $r(k, 1)$ и $r(k, M(k))$ можно выбрать так, чтобы

$$\int f(r \cos \theta_k - u \sin \theta_k, r \sin \theta_k + u \cos \theta_k) du = 0 \quad (129)$$

для $r < r(k, 1)$ и $r > r(k, M(k))$, $k = 1, 2, \dots, J$. Условие (127) эквивалентно ограничениям:

$$G(k, m) \geq 0; \quad \sum_{m=1}^{M(k)} G(k, m) = 1. \quad (130)$$

Для рентгеновского излучения от катодно-лучевой трубки или нейтронов от источников малой интенсивности энтропию функции $f(x, y)$ следует записать в виде (22):

$$H(f) = - \int_D f(x, y) \ln [f(x, y) A] dx dy, \quad (131)$$

где A — площадь области D .

Уравнения (128) и (131) дают условие обратной задачи с ограничением в реконструктивной томографии. При ее решении целесообразно придерживаться следующей схемы рассуждений. Исходя из того, что задача сводится к нахождению максимума энтропии $H(f)$ при ограничениях, которые дают результаты проекционных измерений, последние имеют вид матрицы $G(k, m)$. Такая перефразировка задачи приводит к существенным упрощениям. А именно, функция $H(f)$ является выпуклой:

$$H[\alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2] \geq \alpha H[f_1] + (1 - \alpha) H[f_2], \quad (132)$$

если $f_1 \neq f_2$ и $0 < \alpha < 1$, а ограничение (128) представляет собой систему линейных уравнений относительно искомых компонент функции $f(x, y)$.

Для каждого из ограничивающих условий (128) вводят множители Лагранжа $\lambda(k, m)$ и строят функционал

$$\Psi(f, \lambda) = - \int_D \int f(x, y) \ln [f(x, y) A] dx dy - \\ - \sum_k \sum_m \lambda(k, m) \left[G(k, m) - \int_{r(k, m)}^{r(k, m+1)} dr \int f(r \cos \theta_k - \right. \\ \left. - u \sin \theta_k, r \sin \theta_k + u \cos \theta_k) du \right]. \quad (133)$$

Если второй интеграл в (133) привести к виду

$$\int \int \text{rect}(k, m) (x \cos \theta_k + y \sin \theta_k) f(x, y) dx dy, \quad (134)$$

где

$$\text{rect}(k, m) = \begin{cases} 1, & r(k, m) \leq r < r(k, m+1); \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases} \quad (135)$$

и приравнять нулю функциональную производную от Ψ по f , то получим

$$- \ln [f(x, y) A] - 1 + \sum_k \sum_m \lambda(k, m) \text{rect}(k, m) \times \\ \times (x \cos \theta_k + y \sin \theta_k) = 0. \quad (136)$$

Отсюда

$$f(x, y) = \frac{1}{eA} \prod_k \prod_m \exp [\lambda(k, m) \text{rect}(k, m) (x \cos \theta_k + y \sin \theta_k)]. \quad (137)$$

Если далее учесть (129), то

$$f(x, y) = \frac{1}{A} \prod_k \sum_m h(k, m) \text{rect}(k, m) \times \\ \times (x \cos \theta_k + y \sin \theta_k), \quad (138)$$

где

$$h(k, m) = \exp [\lambda(k, m) - 1/J], \quad (139)$$

находятся путем подстановки в (128) выражения (138). Тогда

$$G(k, m) = \frac{1}{A} h(k, m) \int \int \prod_{l \neq k} \sum_n h(l, n) \text{rect}(l, n) \times \\ \times [r \cos \theta(k, l) - u \sin \theta(k, l)] \text{rect}(k, m; r) du dr, \\ m = 1, 2, \dots, M(k), \quad k = 1, 2, \dots, J; \quad (140)$$

$$\theta(k, l) = \theta(k) - \theta(l). \quad (141)$$

Если $G(k, m) = 0$, то $h(k, m) = 0$ и соответствующий элемент исключают из множества переменных \mathcal{M}_k , по которым берется сумма \sum_m . Для решения системы уравнений (140) используют нелинейный метод Гаусса — Зайделя [93].

В качестве нулевого приближения оценки берут

$$h^{(0)}(k, m) = 1, \quad m \in \mathcal{M}_k, \quad k = 1, 2, \dots, J, \quad (142)$$

а затем выполняют циклически итерации по следующему алгоритму:

$$h^{(i+1)}(k, m) = AG(k, m)Q^{-1}, \quad (143)$$

где

$$Q = \int dr \operatorname{rect}(k, m; r) \int du \prod_{l \neq k} \sum_n' h^{(i)}(l, n) \times \\ \times \operatorname{rect}(l, n) [r \cos \theta(k, l) - u \sin \theta(k, l)], \quad (144) \\ m \in \mathcal{M}_k, \quad k = i \pmod{J} + 1,$$

или

$$h^{(i+1)}(k, m) = h^{(i)}(k, m), \\ m \in \mathcal{M}_k, \quad k \neq i \pmod{J} + 1. \quad (145)$$

Подынтегральное выражение в (144) представляет собой кусочно-постоянную функцию на периметре многоугольника. Поэтому величины Q в (144) можно вычислить за конечное число шагов. Найденные таким образом величины $h(k, m)$ подставляют в уравнение (138) и находят значения компонент искомой функции $f(x, y)$. Как показано в [91], итерационный процесс, описываемый выражениями (143), (144) и (145), сходится к искомому решению.

Алгоритм максимума энтропии, описанный выше, был промоделирован на ЭВМ [91]. Число ракурсов было выбрано равным $J = 5$ с шагом по углу в 72° . Число равномерно расположенных абсцисс для каждого ракурса равнялось 51. Точность реконструкции в 1% достигалась при числе итераций, не превышающем 6. Если в проекционные данные ввести погрешности измерений с дисперсией 5%, то в восстановленной картине появится разброс в 10%. Таким образом коэффициент усиления погрешностей измерений равен 2. Метод максимума энтропии был также успешно опробован для реконструктивной томографии с веерным пучком [92].

В моделирующих экспериментах показано [91], что при помощи реконструктивной томографии с восстановлением изображений методом максимума энтропии можно надежно обнаружить воздушный пузырь в пластмассовой трубе, окруженной стальной оболоч-

кой. В этом эксперименте число ракурсов равнялось пяти, а угол между ними составлял 72° . Показано также, что в соответствии с предсказаниями теории метод максимума энтропии хорошо воспроизводит нулевые значения функции $f(x)$, которые во всех других методах отображаются в виде ложных осцилляций. Наконец, в [91] показано, что методом максимума энтропии можно получить восстановленное изображение трехмерного объекта по соответствующей трехмерной совокупности проекций.

Метод максимума энтропии был также использован в атомной энергетике при определении степени выгорания тепловыделяющих элементов активной зоны ядерных реакторов [13]. В моделирующих расчетах использовалась связка из 37 стержней гексагональной упаковки, причем три стержня были пустыми, а четыре были заполнены ядерным горючим только частично. Методом максимума энтропии были восстановлены изображения сечения связки стержней при 3; 6 и 18 ракурсах, причем выбранные углы проекций отвечали гексагональной симметрии связки стержней. Каждое изображение имело вид матрицы размером 100×100 при 64 градациях яркости изображения. Чтобы четко выявить все пустые стержни в активной зоне ядерного реактора, достаточно сделать шесть ракурсных измерений. Если известно, что в связке имеется только один пустой стержень, то для определения его положения достаточно сделать три соответствующим образом выбранных проекции. Если число пустых стержней велико, то требуемое число проекций возрастает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горелик Г. С. Колебания и волны. М., Физматгиз, 1959.
2. Тихонов А. Н.— Докл. АН СССР, 1963, т. 151, с. 501.
3. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. Пер. с англ. М., Наука, 1980.
4. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. М., Наука, 1964.
5. Gordon R. e.a.— *Scient. Amer.*, 1975, v. 233, N 4, p. 56.
6. Swindell W., Barrett H. H.— *Phys. Today*, 1977, v. 30, N 12, p. 32.
7. Barton C. F.— *Trans. Amer. Nucl. Soc.*, 1977, v. 27, p. 212.
8. Зорин Б. П., Сороко Л. М. Сообщение ОИЯИ, Б1-10-8-729, 1980.
9. Greanleaf J. F. e.a. In: *Acoust. Hologr.*, 1975, v. 6, (ed. Booth N.), p. 71, New York, Plenum Press.
10. Lauterbur P. C.— *Pure and Appl. Chem.*, 1974, v. 40, p. 149.
11. Hounsfield G. N.— *Brit. Journ. Radiol.*, 1973, v. 46, p. 1016.
12. Wood E. H. e.a.— In: *Image Reconstruction from Projections*. (ed. Herman G. T.). Springer, Berlin, 1979, p. 247.
13. Sanderson J.— *IEEE Trans.*, 1979, v. NS-26, p. 2685.
14. Bracewell R. N., Riddle A. C.— *Astrophys. J.*, 1967, v. 150, p. 427.
15. Altschuler M. D.— In: *Image Reconstruction from Projections* (ed. Herman G. T.). Springer, Berlin, 1979, p. 105.
16. Minerbo G. N., Sanderson J. G. Preprint, LA-UR-77—1697.
17. Липатов Н. П.— *Журн. вычисл. мат. и мат. физ.*, 1977, т. 17, с. 238.
18. Gordon R.— *IEEE Trans.*, 1974, v. NS—21, p. 78.

19. Herman G. T., Naparstek A.—SIAM Journ. Appl. Math., 1977, v. 33, p. 511.
20. Natterer F.—Numer. Math., 1978, v. 30, p. 81.
21. Herman G. T. e.a.—In: Medical data processing. London, Taylor and Francis, 1976, p. 581.
22. Ulrych T.—Nature, 1972, v. 235, p. 218.
23. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Изд. 2-е. М., Наука, 1979.
24. Гончарский А. В. и др. Численные методы решения обратных задач астрофизики. М., Наука, 1978.
25. Barakat R., Blackman E.—Opt. commun., 1973, v. 9, p. 252.
26. Andrews H. C., Hunt B. R. Digital Image Restoration. Prentice-Hall, 1977. Englewood Cliffs, New Jersey.
27. Andrews H. C., Patterson C. L.—Amer. Math. Monthly, 1975, v. 82, p. 1.
28. Burg J. P.—Geophysics, 1972, v. 37, p. 375.
29. Frieden B. R., Swindell W.—Science, 1976, v. 191, p. 1237.
30. Brolley J. E. e.a.—In: 1976 SPSE Conference Proceedings (ed. R. Shaw). SPSE, Washington D. C., 1977, p. 244.
31. Wernecke S. J., D'Addario L. R.—IEEE Trans., 1977, v. 26, p. 351.
32. Ulrych T. J. e.a.—J. Geophys. Res., 1973, v. 78, p. 4959.
33. Blackman R. B., Tukey J. W. The measurement of power spectra. N. Y., Dover, 1959.
34. Теория информации и ее приложения. Пер. с англ., М., Физматгиз, 1959.
35. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963, с. 243—332.
36. Яглом Ф. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. М., Наука, 1973.
37. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. Пер. с англ. М., Мир, 1966, с. 239.
38. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. Пер. с англ. М., Мир, 1970.
39. D'Addario L. R.—In: SPSE Intern. Confer. on image analyse and evaluation. Toronto, 1976, p. 1.
40. Kikuchi R., Soffer B. H.—J. Opt. Soc. America, 1977, v. 67, p. 1656.
41. Ансельм А. И. Основы статистической физики и термодинамики. М., Наука, 1973.
42. Джерри А. Дж.—ТИИЭР, 1977, т. 65, № 11, с. 53—89.
43. Перина Я. Когерентность света. Пер. с англ. М., Мир, 1974, с. 146.
44. Mandel L.—Proc. Phys. Soc., 1959, v. 75, p. 233.
45. Rosenblum W. M.—J. Opt. Soc. America, 1968, v. 58, p. 60.
46. Andrews H. C.—Report 560 USC IPI, 1975, p. 36.
47. Hunt B. R.—IEEE Trans., 1973, v. C-22, p. 805.
48. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. Пер. с англ. М., Наука, 1977.
49. Rao C. R., Mitra S. K. Generalized inverse of matrices and its applications. N. Y., John Wiley, 1971.
50. Rust B. W., Burrus W. R. Mathematical Programming and Numerical solution of linear equations. N. Y., Elsevier, 1972.
51. Andrews H. C., Patterson C. L.—IEEE Trans., 1976, v. ASSP-24, p. 26.
52. Golub G. H., Reinsch C.—Numer Math., 1970, v. 14, p. 403.
53. Natterer F.—Numerische Mathematik, 1977, Bd 28, S. 329.
54. Bartlett M. S. An Introduction to stochastic processes. N. Y. Cambridge University Press, 1956.
55. Ulrych T. J.—J. Geophys. Res., 1972, v. 77, p. 1396.
56. Toro-Vizcarrondo C., Wallace T. D.—J. Amer. Stat. Assoc. 1968, v. 63, p. 558.

57. Gamo H.— J. Phys. Soc. Japan, 1964, v. 19, p. 1955.
58. von Laue M.— Ann. Physik, 1906, Bd 20, S. 365.
59. O'Neill E. L., Asakura T.— J. Phys. Soc. Japan, 1961, v. 16, p. 301.
60. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М., Наука, 1971, с. 322.
61. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. М., Советское радио, 1979.
62. Mascarenhas N. D. A., Pratt W. K.— IEEE Trans., 1975, v. CAS-22, p. 252.
63. Mascarenhas N. D. A.— Report 520. USC IPI. 1974.
64. Фриден Б. В кн.: Обработка изображений и цифровая фильтрация. Под ред. Хуанга Т. М., Мир, 1979.
65. Andrews H. C.— Report 560 USC IPI, 1975, p. 36
66. Pratt W. K., Davarian F.— IEEE Trans. C, 1977, v. 26, p. 571.
67. Jain A. K., Padgyg R. A.— J. Comput. Phys., v. 28, p. 167.
68. Jain A. K.— IEEE Trans. C, 1977, v. 26, p. 1061.
69. Barnard T.— Texas Instrum.: Inc. Texas, 1969, Report N 9.
70. Frieden B. R., Wells D. C.— J. Opt. Soc. America, 1978, v. 68, p. 93.
71. Lacoss R. T.— Geophysics, 1971, v. 36, p. 661.
72. Frieden B. R.— J. Opt. Soc. America, 1972, v. 62, p. 511.
73. Frieden B. R., Burke J. J.— Ibid. 1972, v. 62, p. 1202.
74. Hawman E. G.— Ibid., 1977, v. 67, p. 76.
75. Radoski H. R. e.a.— J. Geophys. Res., 1975, v. 80, p. 619.
76. Peacock K. L., Treitel S.— Geophysics, 1969, v. 34, p. 155.
77. Ulrych T. J.— J. Geophys. Res., 1972, v. 77, p. 1396.
78. Burg J. M.— In: 37th Meeting Soc. Explor. Geophys., 1967.
79. Van den Bos A.— IEEE Trans., 1971, v. IT-17, p. 493.
80. Edward J. A., Fitelson M. M.— IEEE Trans., 1973, v. IT-19, p. 232.
81. Barrett H. H., Swindell W.— Proc. IEEE, 1977, v. 65, p. 65.
82. Radon J.— Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. Phys. Kl., 1917, Bd 69, S. 262.
83. Herman G. T., Lewitt R. M. In: Image Reconstruction from projections. (Ed. Herman, G. T.) Springer, Berlin, 1979, p. 1.
84. Mersereau R. M.— Comp. Graph. Image Proc., 1973, v. 2, p. 179.
85. Mersereau R. M., Oppenheim A. V.— Proc. IEEE, 1974, v. 62, p. 1319.
86. Natterer F.— R.A.I.R.O. Analyse Numerique, 1977, v. 11, p. 271.
87. Ramachandran G. N., Lakshminarayanan A. V.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1971, v. 69, p. 2236.
88. Herman G. T., Rowland S. W.— Comp. Graph. Image Proc. 1973, v. 2, p. 151.
89. Lewitt R. M.— IEEE Trans. 1979, v. NS-26, p. 2678.
90. Gordon R. e.a.— J. Theor. Biol., 1970, v. 29, p. 471.
91. Minerbo G.— Comp. Graph. Image Proc., 1979, v. 10, p. 48.
92. Minerbo G.— Comput. Biol. Med., 1979, v. 9, p. 29.
93. Ortega J. M., Rockoff M. L.— SIAM J. Numer. Anal., 1966, v. 3, p. 497.