

# ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ (ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАНОВСКОГО ТИПА)

**Б. Н. Захарьев**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

**В. Н. Шивоварчик**

Одесский инженерно-строительный институт, Одесса

**Е. Б. Плеханов**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

**А. А. Сузько**

Институт тепло- и массообмена АН БССР, Минск

Систематизированы многочисленные семейства потенциалов, допускающих решение в явном виде прямой и обратной задач квантовой механики и получающих из уравнений Гельфанда — Левитана и Марчевко с вырожденными ядрами.

Рассмотрены одномерные, одноканальные, многоканальные, многомерные и многочастичные модели. Обсуждаются возможности их использования для исследования качественных особенностей квантовых систем и приближенного восстановления сил по данным рассеяния.

Integral equations of inverse problem in quantum mechanics give in the case of degenerated kernels wide classes of potentials, which allow exact solution of both the direct and inverse problems. Single dimensional, singlechannel, multichannel, multidimensional and many-particle models are considered. The possibilities of their applications are discussed, especially for approximate numerical reconstruction of forces in nuclear systems.

## ВВЕДЕНИЕ

В обширной литературе по квантовой механике отсутствует одна полезная книга, где, как в хранилище особых ценностей, были бы собраны все до сих пор найденные случаи решения в замкнутом виде уравнений Шредингера. Такие данные получаются из двух источников: прямой и обратной задач, решения которых, по существу, общие. В настоящем обзоре рассматриваются результаты второй группы.

В уравнении Шредингера (в прямой задаче)

$$-\Psi'' + V\Psi = E\Psi; \quad 2m = 1, \quad \hbar = 1 \quad (1)$$

входной информацией служит потенциал  $V$ , а из волновых функций определяются характеристики рассеяния и параметры связанных состояний, которые мы будем обозначать  $S$ . Одним из эквивалентных наборов спектральной информации служит  $S = \{S(E = k^2), \kappa_n, M_n\}$ ,

где  $S, \kappa_n = \sqrt{-E_n}$ ,  $M_n$  — функция рассеяния, волновые числа связанных состояний и нормировочные множители, входящие в асимптотику  $\Psi$ :  $\Psi(E > 0, r)_{r \rightarrow \infty} \sim \exp(-ikr) - S(E) \exp(ikr)$ ;  $\Psi(E_n < 0, r)_{r \rightarrow \infty} \sim M_n \exp(-\kappa_n r)$ . Поэтому сначала в квантовой механике шел поиск простейших потенциалов, с которыми (1) сводится к уравнениям для элементарных или специальных функций. Много таких примеров разобрано в [1].

После создания аппарата обратной задачи появилась возможность подойти к проблеме поиска точно решаемых моделей с другой стороны. В обратной задаче, исходя уже из  $S$ , задают ядро  $Q$  интегрального уравнения. Например, в подходе Марченко:

$$Q(r, r') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - S(k)] \exp[ik(r + r')] dk + \sum_n M_n^2 \exp[-\kappa_n(r + r')].$$

В подходе Гельфанда — Левитана  $Q$  определяется спектральной функцией  $\rho(k)$ , которая будет введена дальше \*

$$K(x, y) + Q(x, y) + \int K(x, z) Q(z, y) dz = 0, \tag{2}$$

а по его решению  $K$  восстанавливают потенциал

$$V(x) = \pm 2 \frac{d}{dx} K(x, x); \tag{3}$$

(верхний знак для  $K_{ГЛ}$ , нижний знак для  $K_M$ ) и волновую функцию

$$\Psi(x) = \mathring{\Psi}(x) + \int K(x, y) \mathring{\Psi}(y) dy. \tag{4}$$

Здесь  $\mathring{\Psi}$  — некоторое известное решение (1) с  $V \equiv 0$  (например,  $\mathring{\Psi}_{ГЛ} \sim \sin kx$ ), а пределы интегрирования в (2) и (4) выбираются в зависимости от конкретного подхода:  $[0, x]$  по Гельфанду — Левитану [2];  $[x, \infty)$  по Марченко [3];  $[x, a < \infty]$  — в  $R$ -матричной теории рассеяния для сил конечного радиуса действия [4]. В обратной задаче функции типа  $\mathring{\Psi}$  играют роль «строительного материала», из которого получают  $Q, K, \Psi, V$ .

Как (1), так и (2) осуществляют одну и ту же связь  $V \rightleftharpoons S$  только в противоположных направлениях. Для построения явных решений на основе (2) естественно искать упрощающие его специального вида

\* Для того чтобы подчеркнуть единство разных подходов в обратной задаче, воспользуемся одними и теми же обозначениями для ядер уравнений Марченко и Гельфанда — Левитана, лишь иногда пометая их индексами  $M$  и  $ГЛ$  (обычно вместо  $Q_M$  пишут  $F$  или  $A$ ).

$S$  [а не  $V$ , как в (4)]. Выбор  $S$ , дающий вырожденные  $Q$  [в виде конечной суммы произведений  $\sum_i Q_{1i}(x) Q_{2i}(y)$ ], сводит (2) к алгебраическим уравнениям и сильно расширяет семейство точно решаемых моделей (настолько, что с их помощью можно приблизиться к потенциалам практически произвольной формы). Эти модели одновременно годятся и для (1), и для (2). Так, ядра  $Q(x, y)$  вырождаются при дробно-рациональной зависимости функции рассеяния  $S$  от волнового числа  $k$ .

Схема решения при этом следующая. Пусть, например,

$$Q(x, y) = Q_1(x) Q_2(y), \quad (5)$$

тогда (2) перепишем так:

$$K(x, y) = -\left\{ Q_1(x) \int K(x, z) Q_1(z) dz \right\} Q_2(y), \quad (6)$$

откуда ясно, что, обозначив выражение в фигурных скобках через  $\mathcal{K}$ , можно искать  $K(x, y)$  в факторизованном виде

$$K(x, y) = -\mathcal{K}(x) Q_2(y). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получаем для  $\mathcal{K}$  простое алгебраическое уравнение, которое сразу решается:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x) &= Q_1(x) P^{-1}(x); \quad P(x) = 1 + \int Q_1(z) Q_2(z) dz; \\ K(x, y) &= -Q_1(x) Q_2(y) P^{-1}(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8), (3), (4) тогда имеем в явном виде:

$$V(x) = \mp 2 \frac{d}{dx} [Q_1(x) Q_2(x) P^{-1}(x)] = \mp 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln P(x); \quad (9)$$

$$\Psi(E, x) = \hat{\Psi}(E, x) - Q_1(x) \int Q_2(z) \hat{\Psi}(E, z) dz P^{-1}(x). \quad (10)$$

Цель данного обзора — суммировать все полученное во втором направлении [модели, построенные на основе уравнений обратной задачи (2)].

Материал обзора располагается по степени возрастания сложности систем, для которых имеются точные решения.

Начинается рассмотрение с одномерного, одноканального движения частицы во внешнем поле (см. § 1). Здесь различаются случаи распространения волн на всей оси ( $-\infty < x < \infty$ ), на полуоси ( $0 \leq x < \infty$ ) и на конечном отрезке ( $0 \leq x \leq a$ ).

Первый охватывает обширный класс потенциалов (зависящих от конечного числа параметров), для которых в замкнутом виде известны точные волновые функции, описывающие прохождение волн через область взаимодействия (разд. 1.6). Сюда, в частности, относятся так называемые прозрачные потенциалы, не дающие никакого отражения при любой энергии. Они стали знамениты благодаря их центральной роли при решении ряда нелинейных уравнений с помощью

техники обратной задачи. Солитонные решения (имеющие вид уединенных волн) совпадают на асимптотике по форме с такими безотражательными потенциалами.

Решения на полуоси ( $0 \leq x < \infty$ ) обычно связывают с парциальными волнами в разложении волновой функции по сферическим гармоникам. Здесь возможны две постановки обратной задачи: с одним фиксированным значением орбитального момента  $l$  (см. § 1) или с фиксированной энергией  $E$  (см. § 2). При этом точные решения получаются как для обычных локальных потенциалов  $V(x)$ , так и для взаимодействий с нелокальной зависимостью от углов или  $V(E, x)$ , меняющихся с энергией. С такими силами приходится иметь дело при анализе экспериментальных данных в оптической модели ядерного (атомного) рассеяния.

Третий случай конечного отрезка ( $0 \leq x \leq a$ ) интересен, в частности, тем, что к нему сводятся часто встречающиеся в ядерной физике задачи с потенциалами ограниченного радиуса действия, когда данные рассеяния параметризуются чисто дискретным набором параметров: положениями  $R$ -матричных резонансов  $E_\lambda$  и амплитудами их приведенных ширин  $\gamma_\lambda$ .

Развитие квантовой механики и ее приложений требует создания методов исследований все более сложных объектов. К одномерным и одноканальным задачам прибавляется быстрорастущее число многоканальных и многомерных. Приходится также переходить от локальных к нелокальным силам для уточнения описания эффективного взаимодействия составных систем с помощью двухчастичных потенциалов. Резко возрастающая при этом трудоемкость расчетов делает особенно актуальным поиск взаимодействий, допускающих решение в замкнутом аналитическом виде. Такие точные решения для многоканальных систем уравнений Шредингера

$$-\Psi''_{\alpha\alpha_0}(x) + \sum_{\alpha'} V_{\alpha\alpha'}(x) \Psi_{\alpha'\alpha_0}(x) = E_\alpha \Psi_{\alpha\alpha_0}(x), \quad (11)$$

позволяющих описывать неупругие столкновения ( $\alpha_0$  — индекс входного, а  $\alpha$  — произвольного канала), рассмотрены в § 3. Замечательно, что простейшие из потенциальных матриц  $V_{\alpha\alpha'}$ , допускающих решения  $\Psi$  в явном виде, записываются в столь же компактной форме, как и в одноканальном случае [ср. (25) и (161)].

На основе многоканального формализма получают классы точных решений многомерных\* и многочастичных задач (см. разд. 3.5). К системам типа (11) эти задачи сводятся разложением волновых функций по базисным наборам  $\Phi_\alpha(\xi)$ , где  $\xi$  — все переменные, кроме одной выделенной  $x$ . Тогда матричные элементы от потенциального поля по функциям  $\Phi_\alpha$  дают матрицу  $\|V_{\alpha\alpha'}(x)\|$ . Ее можно рассмат-

\* К примерам таких многомерных задач относится движение частицы в несимметричном поле, когда переменные в уравнении Шредингера не разделяются, или даже в поле сил вращающейся мишени.

ривать как потенциал «нелокальный» по дискретной переменной индекса  $\alpha$ . Нелокальными же по переменным  $\xi$  (отвечающим  $\alpha$ ) оказываются потенциалы в точно решаемых многомерных и многочастичных моделях. Это вызвано тем, что нельзя одновременно удовлетворить условиям, накладываемым на  $S$  требованием вырожденности ядер  $Q$  и локальности  $V$ . По той же причине не получается нелокальность  $V$  по углу  $\theta$  в формализме с  $l = \text{const}$ , о чем говорилось выше.

Строительным материалом для модельных потенциалов и волновых функций могут служить не только  $\dot{\Psi}$ , отвечающие свободному движению с  $\dot{V}(x) \equiv 0$  в (1), но и с  $\dot{V}(x) \neq 0$ , для которых  $\dot{\Psi}$  известны в аналитическом виде. Это сильно расширяет множество точно решаемых моделей, причем техника построения  $\Delta V = V - \dot{V}$  (как и  $Q$ ,  $K$ ,  $S$ ,  $\Psi$ ) остается той же, что и с  $\dot{V}(x) \equiv 0$ . Например, в качестве  $\dot{V}$  можно взять  $1/x$  и тогда в формулы для  $V$ ,  $\Psi$  и т. д. вместо  $\dot{\Psi}$  достаточно подставить соответствующие кулоновские функции. Очевидно, также, что новые формы потенциалов можно конструировать из разных модельных  $V$ , заданных на отдельных координатных интервалах, гладко сшивая волновые функции в точках сопряжения соседних участков (например, добавить к  $V$  твердую отталкивающую сердцевину, построить периодический потенциал).

Помимо самостоятельной ценности точно решаемые модели представляют интерес как средство приближенного решения обратных задач (в общем случае, когда ядра  $Q$  уже не вырождаются). Этому вопросу посвящены разд. 1.10; 2.4; 3.4 обзора. Трудность численного восстановления произвольных потенциалов методами обратных задач состоит в их предельной неустойчивости к погрешностям в исходных данных. Поэтому говорят о некорректности постановки обратной задачи. Для регуляризации некорректных задач искусственно сужают пространство их решений [5, 6]. Именно в этом отношении удобно пользоваться множеством модельных потенциалов, зависящих от конечного числа параметров. Приближая  $S$  из семейства модельных  $S^{\text{мод}}$  (подгоняя параметры по принципу наименьшего в каком-либо смысле отклонения  $S^{\text{мод}}$  от  $S$ ), мы рассматриваем модельный потенциал  $V^{\text{мод}}$ , соответствующий  $S^{\text{мод}}$ , как приближение к искомому  $V$ . Это частный случай «параметрической регуляризации» решения обратной задачи.

Хотя методика таких приближенных решений не стала еще универсальной и надежной, имеется уже много работ, в которых восстанавливались силы для конкретных ядерных систем.

Яркой иллюстрацией широты и плотности множества  $V^{\text{мод}}$  служит приближение формы разного типа бесконечных («запирающих») потенциальных ям для кварков с помощью  $V^{\text{мод}}$  конечной глубины [7, 8]. На рис. 1 показан пример аппроксимации [8] линейного потенциала  $V(x) = |x|$  с помощью  $V^{\text{мод}}$  из условия совпадения

восьми нижних уровней в  $V$  и  $V_{\text{мод}}$  (для подавления осциллиций в  $V_{\text{мод}}$  использовался специальный выбор дополнительного свободного параметра — глубины ямы  $V_{\text{мод}}$ ).

В списке литературы содержится библиография работ, опубликованных до начала 1982 г., по которым разбросана информация о точно решаемых моделях, получаемых с помощью обратной задачи. В § 4 содержатся краткие комментарии по литературе.

Физики, желающие без лишних слов перейти к практическому использованию формул для потенциалов и соответствующих волновых функций, могут сразу обратиться к соотношениям: одноканальным радиальным [25—27, 32, 35—37, 47—49, 68—70]; одномерным на всей оси [79, 80, 85]; на  $[0, a]$  [93—95]; многоканальным [161, 162, 166, 168]; многомерным и многочастичным [178, 179]; конечно-разностным [100—103]; полученным методом преобразования уравнений [104—107, 169—173]. Иногда указанные выражения представляют собой лишь отдельные примеры для  $V$  и  $\Psi$ , но из текста обзора следует логика вывода явных формул, приспособленных к конкретным нуждам потребителей.

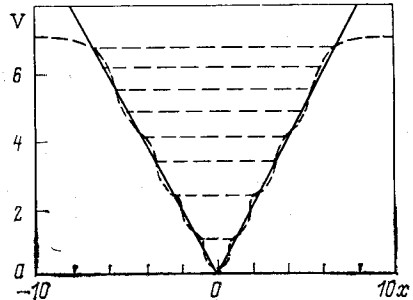


Рис. 1. Приближенное восстановление  $V(x) = |x|$  по восьми уровням с помощью безотражательной ямы конечной глубины [8]

### 1. ПОСТРОЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ ПРИ РАЗНЫХ ЭНЕРГИЯХ (ОДНОКАНАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ)

К одноканальному будем относить движение, описываемое одним обыкновенным дифференциальным уравнением Шредингера [для волновой функции одной переменной, как в (1)]. На примере одного канала легче понять главные моменты обратной задачи и ее точно решаемых моделей.

Начнем с пояснительных замечаний об основном интегральном уравнении (2), конкретный вид которого меняется в зависимости от способа введения в него спектральной информации.

1.1. Уравнения Гельфанда-Левитана и Марченко. Формализм обратной задачи становится понятнее, если подчеркнуть его аналогию с обычной ортогонализацией векторов. Для этого рассмотрим соотношение полноты (равенство Парсеваля) для волновых функций:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Psi(k, r) \Psi^*(k, r') dk + \sum_n \Psi(E_n, r) \Psi^*(E_n, r') = \delta(r - r') \quad (12)$$

как условие ортонормировки функций  $\Psi$ . В отличие от того, что принято обычно называть ортонормировкой собственных векторов  $\Psi$ , здесь интегрирование (и суммирование) ведется не по пространственной, а по энергетической переменной. Значение  $r$  рассматривается как параметр, отличающий разные векторы  $\Psi$ .

В обратной задаче сами функции  $\Psi$  считаются заранее неизвестными, а полагается заданным лишь их асимптотическое поведение. В подходе Марченко исходят из  $\{S(k), E_n, M_n\}$ , т. е. из асимптотики  $\Psi$  при  $r \rightarrow \infty$ ; по Гельфанду — Левитану исходят из спектральной функции  $\rho(E)$ , которую можно определить по поведению  $\Psi$  при  $r \rightarrow 0$ ; в  $R$ -матричной теории — из  $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$ , что соответствует информации о собственных векторах на краю области взаимодействия  $r \rightarrow a$ .

Будем строить  $\Psi$  согласно (4) из известных вспомогательных функций  $\dot{\Psi}$ , отвечающих свободному движению ( $V \equiv 0$ ), с помощью коэффициентов  $K(r, r')$ . В зависимости от конкретной постановки обратной задачи  $\dot{\Psi}$  нужно выбирать с тем же поведением, что и  $\Psi$  вблизи одной из точек:  $r = 0$ ;  $r = a$ ;  $r \rightarrow \infty$ . В этих случаях функции  $\dot{\Psi}$  нормируются по-разному и их следует отличать, несмотря на введенное нами для удобства общее обозначение (можно помечать  $\dot{\Psi}$  индексами: ГЛ, R, M). В подходе Марченко  $\dot{\Psi}_M(k, r) = \exp(-ikr) - S(k) \exp(ikr)$  при  $E = k^2 > 0$  и  $\dot{\Psi}_M(E_n, r) = M_n \exp(-\kappa_n r)$  при  $E = E_n < 0$  для связанных состояний в искомом потенциале  $V(r) \neq 0$ . В подходе Гельфанда — Левитана  $\dot{\Psi}_{GL}(k, r) = -2i \sin kr / F^+(k)$  при  $k^2 = E > 0$  и  $\dot{\Psi}_{GL}(E_n, r) = C_n \operatorname{sh} \kappa_n r / \kappa_n$  при  $E = E_n$ , где  $F^+(k)$  — функция Йоста, связанная с  $S(k)$  и  $\rho(k)$  соотношениями\*:

$$S(k) = F^-(k) / F^+(k); \quad F^+(k) = F^-(-k); \quad (13)$$

$$d\rho(E) = \frac{k^2 dk}{\pi F^+(k) F^-(k)} \quad \text{при } E \geq 0, \quad (14)$$

а при  $E < 0$

$$d\rho(E) = C_n^2 \delta(E - E_n) dE; \quad C_n = \Psi'(E_n 0). \quad (15)$$

Нормировочные константы  $C_n$  иногда удается определить непосредственно из эксперимента [34]. Случай взаимодействия конечного радиуса будет рассмотрен отдельно в разд. 1.7. Таким образом, в функции

\* Тем самым  $F^+(k)$  осуществляет связь  $S(k)$  и  $\rho(k)$ , по которым строятся  $\rho$  в подходах Марченко и Гельфанда — Левитана. Функцию Йоста  $F^+(k)$  можно определить по фазовому сдвигу  $\delta(k)$  ( $S = \exp 2i\delta$ ) и энергиям связанных состояний  $E_n$  с помощью дисперсионного соотношения (см. [9, (2.2.1)]):

$$F^+(k) = \prod_n \left( 1 - \frac{E_n}{E} \right) \exp \left[ -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\delta(k') k' dk'}{k'^2 - k^2} \right].$$

$\Psi$  свободного движения с  $V = 0$  закладывается спектральная информация  $\{S(k), E_n, M_n\}$  или  $\rho(k)$ , отвечающая неизвестному сначала потенциалу  $V(r) \neq 0$ , для построения затем из  $\dot{\Psi}$  искомым  $\Psi$  и  $V$ .

В подходе Гельфанда — Левитана строить векторы  $\Psi$  и  $\dot{\Psi}$  начинают от точки  $r = 0$ , где они совпадают по определению. В точках  $r > 0$  ищем  $\Psi(k, r)$  в виде комбинации векторов  $\dot{\Psi}(k, r'')$  с  $r'' \leq r$ :

$$\Psi(k, r) = \dot{\Psi}_{\text{ГЛ}}(k, r) + \int_0^r K(r, r'') \dot{\Psi}_{\text{ГЛ}}(k, r'') dr''. \quad (16)$$

Векторы  $\dot{\Psi}(k, r)$  линейно независимы при разных значениях  $r$ . Поэтому взаимная ортогональность  $\Psi(k, r)$  и  $\Psi(k, r')$  по (12) при всех  $r' < r$  эквивалентна ортогональности  $\Psi(k, r)$  ко всем  $\dot{\Psi}(k, r')$  с  $r' < r$ , из которых согласно (16) строятся  $\Psi$ . Ортогональность же  $\Psi(k, r)$  и  $\dot{\Psi}(k, r')$  может быть обеспечена коэффициентами  $K$ , с помощью которых строятся  $\Psi$  из известных  $\dot{\Psi}$  согласно (16). Таким образом, можно искать эти  $K$  из условия ортогональности  $\Psi(k, r)$  в виде (16) ко всем  $\dot{\Psi}(k, r')$  с  $r' < r$ .

Имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \dot{\Psi}(kr) \dot{\Psi}(kr') dk + \int_0^r K(r, r'') \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \dot{\Psi}(kr'') \dot{\Psi}(kr') \right] dr'' = 0.$$

Чтобы придать уравнению стандартную форму, прибавим и вычтем в квадратных скобках  $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin kr'' \sin kr' dk$  и учтем, что  $\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin kr \sin kr' dk = \delta(r - r')$ .

Полученное в результате линейное уравнение для  $K(r, r')$  и является уравнением Гельфанда — Левитана:

$$K(r, r') + Q(r, r') + \int_0^r K(r, r'') Q(r'', r') dr'' = 0, \quad (17)$$

где

$$Q(r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin kr \sin kr' \left[ \frac{1}{|F^+(k)|^2} - 1 \right] dk + \sum_n \frac{C_n^2}{\kappa_n^2} \text{sh } \kappa_n r \text{ sh } \kappa_n r'. \quad (18)$$

Мы отступили от традиционной процедуры [2, 9], чтобы сделать вывод (17) понятнее физикам. Обычно же рассуждения проводятся с нефизическими регу-



лярными решениями уравнения Шредингера  $\varphi$ ,  $\overset{\circ}{\varphi}$ , удовлетворяющими граничным условиям в начале координат:

$$\varphi(k, 0) = \overset{\circ}{\varphi}(k, 0) = 0; \varphi'(k, 0) = \overset{\circ}{\varphi}'(k, 0) = 1. \quad (19)$$

Эти  $\varphi$  и  $\overset{\circ}{\varphi}$  отличаются от  $\Psi$ ,  $\overset{\circ}{\Psi}$  лишь множителями:  $\varphi(k, r) = -\frac{F^+(k)}{2ik} \Psi(k, r)$ ,

$\overset{\circ}{\varphi}(k, r) = \frac{F^+(k)}{-2ik} \overset{\circ}{\Psi}_{\Gamma\text{Л}}(k, r)$ . Через эти решения ядро  $Q$  выражается стандартной формулой:

$$Q(r, r') = \int \overset{\circ}{\varphi}(k, r) \overset{\circ}{\varphi}(k, r') d(\rho(k) - \overset{\circ}{\rho}(k)) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{\varphi}(k, r) \overset{\circ}{\varphi}(k, r') \left[ \frac{1}{|F^+(k)|^2} - 1 \right] k^2 dk + \sum_n C_n^2 \overset{\circ}{\varphi}(\alpha_n, r) \overset{\circ}{\varphi}(\alpha_n, r'). \quad (18')$$

В подходе Марченко проводится та же процедура ортогонализации векторов  $\Psi$ , только начиная с асимптотики  $r \rightarrow \infty$ , где  $\Psi$  совпадает с  $\overset{\circ}{\Psi}_M$ , а при конечных значениях  $r$  функции  $\Psi(k, r)$  строятся из  $\overset{\circ}{\Psi}_M(k, r')$  с  $r' \geq r$ :

$$\Psi(k, r) = \overset{\circ}{\Psi}_M(k, r) + \int_r^{\infty} K(r, r') \overset{\circ}{\Psi}_M(k, r') dr'. \quad (20)$$

Функция  $K(r, r')$  здесь отличается, конечно, от обозначенной так же функции в подходе Гельфанда — Левитана. Она находится аналогично из условия ортогональности  $\Psi(k, r)$  ко всем  $\overset{\circ}{\Psi}_M(k, r')$  с  $r' > r$ , что дает уравнение Марченко

$$K(r, r') + Q(r, r') + \int_r^{\infty} K(r, t) Q(t, r') dt = 0, \quad (21)$$

где

$$Q(r, r') \equiv Q(r + r') = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(r + r')] [1 - S(k)] dk + \sum_n M_n^2 \exp[-\alpha_n(r + r')]. \quad (22)$$

Обычно [3, 9] уравнения Марченко получаются с помощью решений Йоста  $f^{\pm}(k, r)$ , задаваемых их поведением на асимптотике

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f^{\pm}(k, r) \exp(\mp ikr) = 1, \quad (23)$$

вместо физических функций  $\Psi$ . Константы  $M_n$  и  $C_n$  в подходах Марченко и Гельфанда — Левитана имеют то общее, что с их помощью строится одна и та же нормированная волновая функция связанного состояния только из разных вспо-

могательных решений  $\varphi$  и  $f$ :

$$\Psi(E_n, r) = C_n \varphi(E_n, r) = M_n f^+(E_n, r);$$

$$C_n^{-2} = \int_0^\infty \varphi^2(E_n, r) dr; \quad M_n^{-2} = \int_0^\infty |f^+(E_n, r)|^2 dr.$$

Аналогия ортогонализации векторов по Шмидту с решением обратной задачи становится буквальной для конечно-разностного уравнения Шредингера, когда  $r$  принимает только дискретные значения, нумерующие отдельные векторы  $\Psi$  [4]. Соответствующие решения рассматриваются в разд. 1.8.

**1.2. Простейшая модель.** Из формулы (18') для ядра  $Q$  в подходе Гельфанда — Левитана следует, что каждое связанное состояние дает вклад в  $Q$  в виде члена, в котором зависимость от переменных  $r$  и  $r'$  факторизуется — входит в разные множители.

Можно выбрать спектральные данные, не оставив в  $Q$  ничего, кроме одного такого члена, и тогда получается простейшее вырожденное ядро типа (5). Для этого достаточно положить спектральную функцию  $\rho(k)$  равной при  $E \geq 0$  невозмущенной  $\rho^\circ(k) = k^3/3\pi$  [в результате чего в (18') исчезает интеграл], а все константы  $C_n$ , кроме первой, взять равными нулю. С полученным таким образом ядром  $Q$ :

$$Q(r, r') = C_1^2 \overset{\circ}{\varphi}(i\kappa_1, r) \overset{\circ}{\varphi}^*(i\kappa_1, r') =$$

$$= \overset{\circ}{\Psi}(i\kappa_1, r) \overset{\circ}{\Psi}(i\kappa_1, r') \underset{\overset{\circ}{V}(r) \equiv 0}}{=} \frac{1}{\kappa_1^2} \text{sh } \kappa_1 r \text{ sh } \kappa_1 r' \quad (24)$$

в явном виде находим по схеме (5)–(10) однопараметрическое семейство потенциалов

$$V(r) = \overset{\circ}{V} - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[ 1 + C_1^2 \int_0^r \overset{\circ}{\varphi}^2(i\kappa_1, r') dr' \right] \underset{\overset{\circ}{V}(r) \equiv 0}}{=} =$$

$$= - \frac{2C_1^2 \text{sh } 2\kappa_1 r}{\kappa_1 P(r)} + \frac{2C_1^4 \text{sh}^4 \kappa_1 r}{\kappa_1^4 P^2(r)};$$

$$P(r) = 1 + \frac{C_1^2}{\kappa_1^2} \left( \frac{\text{sh } 2\kappa_1 r}{4\kappa_1} - \frac{r}{2} \right) \quad (25)$$

и решения  $\varphi$  уравнения Шредингера

$$\varphi(k, r) = \overset{\circ}{\varphi}(k, r) -$$

$$- \overset{\circ}{\varphi}(i\kappa_1 r) C_1^2 \int_0^r \overset{\circ}{\varphi}(i\kappa_1 r') \overset{\circ}{\varphi}(k, r') dr' \left[ 1 + C_1^2 \int_0^r \overset{\circ}{\varphi}^2(i\kappa_1 r') dr' \right]^{-1} \underset{\text{при } \overset{\circ}{V}(r) \equiv 0}}{=} =$$

$$= \frac{\sin kr}{k} - \frac{C_1^2 \text{sh } \kappa_1 r (\kappa_1 \text{ch } \kappa_1 r \sin kr - k \text{sh } \kappa_1 r \cos kr)}{k (\kappa_1^2 + k^2) \left( \kappa_1^2 + \left( \frac{C_1^2}{2} \right) \left( \frac{\text{sh } 2\kappa_1 r}{2\kappa_1} - r \right) \right)} \quad (26)$$

для непрерывного спектра и для связанного состояния

$$\begin{aligned} \varphi(i\kappa_1, r) &= \overset{\circ}{\varphi}(i\kappa_1, r) \left[ 1 + C_1^2 \int_0^r \overset{\circ}{\varphi}^2(i\kappa_1, r') dr' \right]^{-1} \underset{\overset{\circ}{V}(r) \equiv 0}{=} \\ &= \frac{\kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_1 r}{\kappa_1^2 + (C_1^2/2) (\operatorname{sh} \kappa_1 r / 2\kappa_1 - r)}. \end{aligned} \quad (27)$$

От регулярных решений  $\varphi$  просто перейти к физическим волновым функциям  $\Psi$ , как это отмечалось уже в разд. 1.1. Действительно, одно из граничных условий у  $\varphi$  и  $\Psi$  общее:  $\Psi(E, 0) = \varphi(E, 0) = 0$ , поэтому они как решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка могут отличаться лишь множителем, не зависящим от  $r$ . Этот множитель согласно (15), (19) равен  $C_1$  для  $E_1 < 0$ , а при  $E > 0$  определяется сравнением асимптотического поведения  $\varphi$  и  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \frac{i}{2k} \{F^+(k) f^-(k, r) - F^-(k) f^+(k, r)\} \\ &\rightarrow -\frac{F^+(k) \exp(-ikr) - F^-(k) \exp(ikr)}{2ik}; \operatorname{Im} k = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $f^\pm$  определены в (23);

$$\Psi(k, r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \exp(-ikr) - \frac{F^-(k)}{F^+(k)} \exp(ikr); \quad (29)$$

$$\Psi(k, r) = -\frac{2ik}{F^+(k)} \varphi(kr); \quad \Psi(E_n, r) = C_n \varphi(E_n, r). \quad (30)$$

Отсюда следует, что  $\overset{\circ}{\Psi}_{\text{ГЛ}}(k, r) = 2i k \overset{\circ}{\varphi}(k, r) / F^+(k)$ . (Но нужно помнить, что связь между  $\overset{\circ}{\varphi}$  и  $\overset{\circ}{\Psi}_{\text{М}}$  иная, так как  $\overset{\circ}{\varphi}(E, 0) \equiv 0$ , а  $\overset{\circ}{\Psi}_{\text{М}}(E, 0) = 1 - S(k) \neq 0$ .)

Переходя к асимптотике  $r \rightarrow \infty$  в формуле (26) с  $\overset{\circ}{V} \equiv 0$  для  $\Psi$  (при этом сокращаются экспоненциально растущие множители в числителе и знаменателе) и выделяя член с  $\exp(-ikr)$ , находим коэффициент при  $\exp(-ikr)$  (функцию Йоста)  $F^+(k)$ , а по ней  $S(k)$ :

$$F^+(k) = \frac{k - i\kappa_1}{k + i\kappa_1}; \quad S(k) = \frac{(k + i\kappa_1)^2}{(k - i\kappa_1)^2}. \quad (31)$$

Запишем явный вид физической волновой функции:

$$\Psi(k, r) = +\frac{2}{i} \left[ \frac{k + i\kappa_1}{k - i\kappa_1} \sin kr - \frac{C_1^2 \operatorname{sh} \kappa_1 r (\kappa_1 \operatorname{ch} \kappa_1 r \sin kr - k \operatorname{sh} \kappa_1 r \cos kr)}{(k - i\kappa_1)^2 [\kappa_1^2 + (C_1^2/2) (\operatorname{sh} 2\kappa_1 r / 2\kappa_1 - r)]} \right]. \quad (32)$$

Поскольку  $S(k)$  не зависит от нормировочной константы  $C_n$  связанного состояния с  $E = E_n$ , потенциалы (25) дают одно и то же рассеяние при любых значениях  $C_1$  и образуют семейство *фазово-эквивалентных потенциалов*  $V(r)$  (см. гл. 4, § 26 [9]. Случай без связанных состояний рассмотрен в Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 1657.).

На рис. 2 показаны отдельные представители из одного такого семейства.

То же самое однопараметрическое множество потенциалов (25) получается, естественно, и в подходе Марченко, если исходить из  $S(k)$  в виде (31) и произвольной нормировки  $M$  связанного состояния с  $E = E_1 < 0$ . При этом демонстрируется различие интегральных членов  $Q$  в обоих подходах [в (18) и (22)]. В  $Q_{ГЛ}$  интеграл исчезал, а в  $Q_M$  непрерывный спектр дает вклад. Интеграл в  $Q_M$  равен вычету в полюсе  $k = i\kappa_1$  функции  $S(k)$  в верхней полуплоскости комплексного  $k$ . Вклады от  $E_1$  и  $E > 0$  оказываются здесь подобными и поэтому объединяются. В результате  $Q_M$ , как и  $Q_{ГЛ}$ , представляется в виде одного факторизованного члена.

Может показаться, что в подходе Марченко простое одночленное факторизованное ядро  $Q_M$  можно получить, если по аналогии с  $Q_{ГЛ}$  (24) убрать в  $Q_M$  интеграл [выбрав  $S_{исх}(k) \equiv 1$ ] и оставить вклад лишь одного уровня. По обычной схеме получаем (см. [3], с. 134, пример 5):

$$V(r) = -8\kappa_1^2 M_1^2 \exp(-2\kappa_1 r) P^{-2}(r); P(r) = 1 + \frac{M_1^2}{2\kappa_1} \exp(-2\kappa_1 r);$$

$$f^\pm(k, r) = \exp(\pm ikr) \{1 - M_1^2 \exp(-2\kappa_1 r) \times P^{-1}(r)/(\kappa_1 \mp ik)\}, f^+(i\kappa_1, r) = \exp(-\kappa_1 r) P^{-1}(r).$$

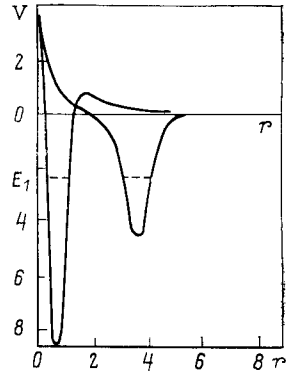


Рис. 2. Фазово-эквивалентные потенциалы, имеющие различные нормировочные константы связанных состояний [13]

Прямой подстановкой убеждаемся, что эти  $f^\pm$  удовлетворяют уравнению Шредингера с найденным потенциалом. Однако эти решения не соответствуют исходной  $S_{исх}(k) \equiv 1$ . Функция Йоста  $F^+(k) \equiv f^+(k, 0)$  дает  $S(k) = F^-(k)/F^+(k) \equiv 1$ ; или иначе: «физическая» волновая функция  $f^-(k, r) = S_{исх}(k) f^+(k, r)$  с  $S_{исх} \equiv 1$  не удовлетворяет граничному условию  $\Psi(k, 0) = 0$  (то же получается и для связанного состояния  $E = -\kappa_1^2$ ). Дело в том, что выбор  $S_{исх} \equiv 1$  при наличии уровня нарушает теорему Левинсона [ $\delta(k=0) - \delta(\infty) = n\pi$ , где  $\delta$  — фазовые сдвиги, а  $n$  — число связанных состояний; при  $S_{исх} \equiv \exp(2i\delta) = 1$  имеем  $\delta(0) = \delta(\infty) = 0$ , что противоречит  $n = 1$ ].

Полученные с помощью фиктивных спектральных данных  $S = \{S_{исх} \equiv 1; M_1, \kappa_1\}$  формулы для  $f^\pm$  можно все же использовать для построения с найденным потенциалом правильных физических решений:  $\Psi(k, r) = f^-(k, r) - S(k) f^+(k, r) = S(k) \times f^+(k, r)$  только с другой  $S = f^-(k, 0)/f^+(k, 0) \equiv 1$ . Вместо же уровня  $E = -\kappa_1^2$  нужно взять такое значение энергии  $E'_1$ , при котором  $f^+(i\kappa'_1, 0) = 0$ :

$$\Psi(i\kappa'_1, r) = M'_1 f^+(i\kappa'_1, r), \text{ где } (M'_1)^{-2} = \int_0^\infty |f^+(i\kappa_1, r)|^2 dr. \text{ С исправленным спек-$$

тральным набором  $S$  ядро  $Q$  получается вырожденным, как и раньше. Общий случай таких ядер рассматривается в § 5.

### 1.3. Высшие орбитальные моменты $l > 0$ и случай $V(r) \neq 0$ .

Если в уравнение Шредингера (1) добавить центробежный потенциал  $l(l+1)/r^2$ , то обратная задача для  $l \neq 0$  решается так же, как и для

$s$ -волн, только в качестве вспомогательных функций  $\overset{\circ}{\varphi}_l, \overset{\circ}{f}_l^\pm, \overset{\circ}{\Psi}_l$  нужно использовать соответствующие функции Бесселя и их комбинации:

$$\left. \begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}_l(k, r) &= (2l+1)!! k^{-l} j_l(kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} (2l+1)!! k^{-l-1} \sin(kr - l\pi/2); \\ \overset{\circ}{f}_l^\pm(k, r) &= \pm ikr \exp(\pm il\pi/2) h_l^{(1,2)}(kr) \xrightarrow{kr \rightarrow \infty} \exp(\pm ikr) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и модифицировать граничное условие для  $\varphi$  при  $r \rightarrow 0$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_l(k, r) r^{-l-1} = 1; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f_l^\pm(k, r) \exp(\mp ikr) = 1. \quad (34)$$

При этом соотношения (25)–(27) переходят в

$$V_l(r) = -2 \frac{d^2}{dr^2} \ln P_l(r), \quad (35)$$

где  $P_l(r) = 1 - \frac{C^2 [(2l+1)!!]^2 r^3}{2\alpha^{2l}} [j_l^2(i\alpha r) - j_{l-1}(i\alpha r) j_{l+1}(i\alpha r)]$ ;

$$\varphi_l(k, r) = \frac{(2l+1)!! r j_l(k, r)}{k^l} - \frac{C^2 ((2l+1)!!)^3 r j_l(i\alpha r) W[r j_l(i\alpha r), r j_l(kr)]}{\alpha^{2l} k^l (\alpha^2 + k^2) P_l(r)}; \quad (36)$$

$$\varphi_l(i\alpha r) = \frac{(2l+1)!! r j_l(i\alpha r)^*}{(i\alpha)^l P_l(r)}. \quad (37)$$

Форма потенциала (35) меняется с  $l$ . Поэтому уравнение для другой парциальной волны  $l' \neq l$ , но с тем же баргмановским потенциалом  $V_l$ :

$$-\Psi_{l'}'' - \frac{l'(l'+1)}{r^2} \Psi_{l'} + V_{l \neq l'} \Psi_{l'} = E \Psi_{l'} \quad (39)$$

уже не будет иметь явных решений. Конечно, каждый потенциал (35) с определенным фиксированным  $l$  может служить локальным симметричным потенциалом  $V(|\mathbf{r}|) \equiv V_l(r)$  некоторой трехмерной задачи, но соответствующие ему решения для парциальных уравнений (39) трудно находить приближенными численными методами, кроме одного с  $l' = l$ , известного в явном виде. Если же допустить, что в каждом парциальном канале имеется свой потенциал  $V_l, V_{l'}$  и т. д. вида (35), то это отвечает нелокальному по углам трехмерному силовому полю; волновая функция в таком потенциале представляется

\* Для вычисления интегралов от произведений цилиндрических функций можно использовать формулы (5.54), (5.55) из справочника И. С. Градштейна и И. М. Рыжика, М., Физматгиз, 1963. Полезно также выражение для двух произвольных решений одного и того же уравнения Шредингера

$$\int_a^b \chi(E_1, r) \eta(E_2, r) dr = \frac{W[\chi(E_1, r), \eta(E_2, r)]}{E_2 - E_1} \Big|_a^b, \quad (38)$$

где  $W$  — вронскиан:  $W[\chi, \eta] = \chi\eta' - \eta\chi'$ .

в замкнутом виде с радиальными компонентами (36), (37). Действительно,  $V_l$  можно рассматривать как диагональные элементы матрицы  $\|V_{\alpha\alpha'}\|$ :

$$V_{lm'l'm'}(r) = V_l(r) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{m_0} = \int Y_{lm}^*(\Omega) V(r, \Omega, \Omega') Y_{l'm'}(\Omega') d\Omega d\Omega';$$

$$\Omega \equiv \{\theta, \varphi\}. \tag{40}$$

Умножая обе части равенства (40) на  $Y_{lm}(\omega) Y_{l'm'}(\omega')$  и суммируя по  $lm'l'm'$ , получаем, пользуясь свойством полноты набора шаровых гармоник  $[\sum_{lm} Y_{lm}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega') = \delta(\Omega - \Omega')]$ :

$$V[(r, \Omega, \Omega')] = \sum_l V_l(r) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') (2l + 1)/4\pi, \tag{41}$$

где  $P_l$  — полиномы Лежандра. Это потенциал с нелокальной зависимостью от  $\theta$ .

Переход к произвольным  $l > 0$  — лишь частный пример распространения техники баргмановских потенциалов на случай  $\dot{V}(r) \neq 0$ . Добавляя в уравнение Шредингера любые  $\dot{V}(r)$ , для которых известны точные решения  $\dot{\varphi}$ , можно строить новые потенциалы  $V = \dot{V} + \Delta V$  и соответствующие им точные волновые функции, пользуясь для  $\Delta V$  и  $\varphi$  формулами (25) — (27) с модифицированными  $\dot{\varphi}$ . В качестве исходных  $\dot{V}$  годятся и сами баргмановские потенциалы. Формулы (31) для  $F^+$  и  $S$  обобщаются следующим образом:

$$F^+_k(k) = \overset{\circ}{F}(k) \frac{k - i\kappa_1}{k + i\kappa_1}; \quad S(k) = S(k) \frac{(k + i\kappa_1)^2}{(k - i\kappa_1)^2}. \tag{31'}$$

При изменении взаимодействия  $V \rightarrow \dot{V} + \Delta V$ , когда  $F^+$  и  $S$  меняются согласно (31'), к уровням потенциала  $\dot{V}$  добавляется новый, отвечающий связанному состоянию с энергией  $E = -\kappa_1^2$ .

На рис. 3 показаны примеры, когда в качестве  $\dot{V}$  бралась бесконечно глубокая яма, а баргмановское добавочное поле сдвигало один или два уровня в  $\dot{V}$  [85].

#### 1.4. Модели с более общей функцией Йоста $F^+(k) = \overset{\circ}{F}^+(k) \frac{k - \alpha}{k - \beta}$ .

В разд. 1.2 и 1.3 параметры  $\alpha$  и  $-\beta$  в  $F^+$  выбирались равными и чисто мнимыми:  $\alpha = -\beta = i\kappa$ ,  $\kappa > 0$ . Снимем теперь это ограничение.

Будем предполагать отсутствие связанных состояний в  $\dot{V}$ .

Положим  $\text{Im } \beta < 0$ , что обеспечивает аналитичность  $F^+(k)$  в верхней полуплоскости комплексного  $k$  [так как там же аналитична  $\overset{\circ}{F}^+(k)$ ]. Таким  $\overset{\circ}{F}^+$ , как известно (см., например, [10], гл. 12), отвечают потен-

циалы, удовлетворяющие условию  $\int_0^\infty |V| r dr < \infty$ .

Пусть сначала  $\text{Im } \alpha < 0$ , тогда отсутствуют связанные состояния (нули  $F^+$  и соответствующие им полюсы  $S$ , расположенные в верхней полуплоскости  $k$ ) и в выражении для  $Q$  остается только интегральный член.

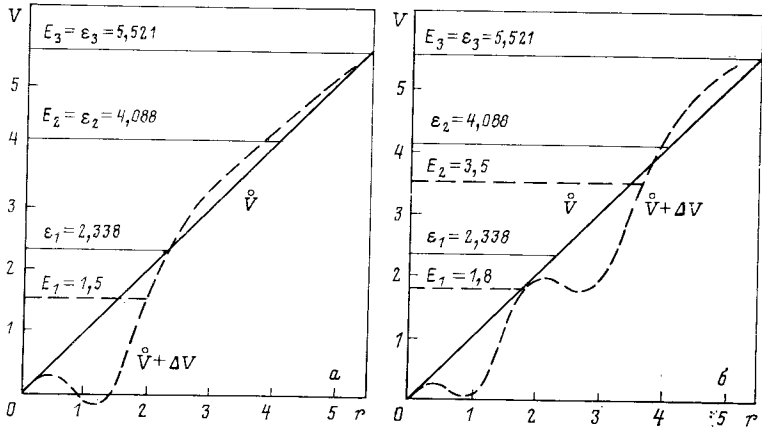


Рис. 3. Сдвиг  $\varepsilon_i \rightarrow E_i$  одного (а), двух (б) уровней в потенциале  $\mathring{V}(r) = |r|$  с помощью баргмановской добавки  $\Delta V(r)$

Вычисляя его в подходе Марченко с помощью вычетов, получаем  $Q$  вида (5), а  $V$  и  $\psi$  аналогично (9), (10). Те же результаты получаются и в подходе Гельфанда — Левитана.

Приведем типичные выкладки, которые требуются для вычисления  $Q_{\text{ГЛ}}$ . Подставим  $F^+(k) = \mathring{F}^+(k)(k - \alpha)/(k - \beta)$  в (14), а полученное  $\rho$  в (18'):

$$Q(r, r') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \frac{\mathring{\varphi}(k, r) \mathring{\varphi}(k, r')}{\mathring{F}^+(k) \mathring{F}^-(k)} \left[ \frac{k^2 - \beta^2}{k^2 - \alpha^2} - 1 \right] dk. \tag{42}$$

Пусть  $r' > r$ . Заменим в (42) функцию  $\mathring{\varphi}(k, r')$  ее выражением через решения Йоста согласно (28):

$$\begin{aligned} Q(r, r') &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\mathring{\varphi}(k, r) [\mathring{f}^+(k) \mathring{f}^-(k, r') - \mathring{f}^-(k) \mathring{f}^+(k, r')]}{\mathring{F}^+(k) \mathring{F}^-(k)} \times \\ &\times \left[ \frac{k^2 - \beta^2}{k^2 - \alpha^2} - 1 \right] dk = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\mathring{\varphi}(kr) \mathring{f}^-(k, r')}{\mathring{F}^-(k)} \left[ \frac{k^2 - \beta^2}{k^2 - \alpha^2} - 1 \right] dk - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\mathring{\varphi}(k, r) \mathring{f}^+(k, r')}{\mathring{F}^+(k)} \left[ \frac{k^2 - \beta^2}{k^2 - \alpha^2} - 1 \right] dk. \tag{43} \end{aligned}$$

Вычислим полученные интегралы. Замкнем контур интегрирования в первом — в нижней полуплоскости  $k$ , а во втором — в верхней. При этом интегралы по полуокружностям бесконечного радиуса ( $|k| \rightarrow \infty$ ) исчезают в силу экспоненциального затухания подынтегральных выражений (фактор  $\exp[\text{Im } k(r - r')]$ ), который получается из решений  $\overset{\circ}{\varphi}$  и  $\overset{\circ}{f}$ . Первый интеграл равен вычету в точке  $k = \alpha$ , а второй — в  $k = -\alpha$ . Вклады обоих в  $Q$  оказываются одинаковыми, что дает одночленное ядро. Аналогично вычисляем  $Q$  и при  $r > r'$  (производим замену  $r \leftrightarrow r'$ ):

$$Q(r, r') = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\overset{\circ}{F}^+(-\alpha)} \begin{cases} \overset{\circ}{\varphi}(\alpha, r) \overset{\circ}{f}^+(-\alpha, r') & \text{при } r \leq r'; \\ \overset{\circ}{f}^+(-\alpha, r) \overset{\circ}{\varphi}(\alpha, r') & \text{при } r \geq r'. \end{cases} \quad (44)$$

Вместе с  $Q$  факторизуется и  $K$ . Правда,  $K$ , отвечающая (44), определяется несколько иначе (сложнее), чем по  $Q$  вида (5) или (24). Воспользуемся формулой (20.15) из [10] для  $K$ :

$$K(r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k, r) \overset{\circ}{\varphi}(k, r') d(\overset{\circ}{\rho}(k) - \rho(k)), \quad r > r', \quad (45)$$

которая отличается от  $Q$  в виде (42) лишь заменой  $\varphi(k, r') \rightarrow -\overset{\circ}{\varphi}(k, r')$ . Поэтому, выполнив с (45) те же операции, что и при выводе (42) — (44), получим, используя (28) для  $\varphi$  и выражение  $F^+(k) = \overset{\circ}{F}^+(k)(k - \alpha)/(k - \beta)$ :

$$K(r, r') = 2\pi\beta \frac{f^+(-\beta, r) \overset{\circ}{\varphi}(\beta, r')(\beta - \alpha)}{\overset{\circ}{F}^+(-\beta)} \quad \text{при } r > r'. \quad (46)$$

Подставляя  $Q$  из (44) и  $K(r, r')$  из (46) в уравнение Гельфанда — Левитана (17), получаем с помощью тождества (13.13) из [9] просто решаемое алгебраическое уравнение для  $f^+(-\beta, r)$ . В результате находим:

$$f^+(-\beta, r) = \frac{\overset{\circ}{f}(-\alpha, r) F^+(-\beta)(\alpha + \beta)}{\beta W[\overset{\circ}{\varphi}(-\beta, r), \overset{\circ}{f}^+(-\alpha, r)]}; \quad (47)$$

$$\varphi(k, r) = \overset{\circ}{\varphi}(k, r) + \overset{\circ}{f}^+(-\alpha, r) \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{(k^2 - \beta^2)} \frac{W[\overset{\circ}{\varphi}(-\beta, r), \overset{\circ}{\varphi}(k, r)]}{W[\overset{\circ}{\varphi}(-\beta, r), \overset{\circ}{f}^+(-\alpha, r)]}; \quad (48)$$

$$V(r) = \overset{\circ}{V}(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \frac{W[\overset{\circ}{\varphi}(-\beta, r), \overset{\circ}{f}^+(-\alpha, r)]}{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (49)$$

Выражение (49) — это один из потенциалов Эккарта (см. [10], формула (14.14) и [11]), найденных сначала с помощью техники гипергеометрических функций в прямой задаче. Кстати, от сил Эккарта берут начало пионерские работы Баргмана [12, 13]. Потенциал (49) замечателен еще и тем, что приближение эффективного радиуса с ним дает точный результат при всех энергиях. Пусть теперь  $\text{Im } \alpha > 0$ .



Тогда в системе имеется связанное состояние с  $E = -\alpha^2$ . Решение в данном случае можно свести к последовательному применению процедур, рассмотренных в этом разделе и в 1.2 (см. также [9] гл. 4, § 3). Умножив и разделив функции Йоста  $F^+(k)$  на одно и то же выражение  $k + \alpha$ , представим  $F^+(k)$  в виде:

$$F^+(k) = \overset{\circ}{F}^+(k) \frac{k-\alpha}{k-\beta_1} = \overset{\circ}{F}^+ + \frac{k+\alpha}{k-\beta} \frac{k-\alpha}{k+\alpha} \equiv F_1^+(k) \frac{k-\alpha}{k+\alpha}. \quad (50)$$

Сначала находим потенциал и решение с функцией Йоста  $F_1^+(k)$ , следуя (42) — (49), когда нет связанного состояния с  $E = -\alpha^2$ , а затем вводим его с помощью множителя  $\frac{k-\alpha}{k+\alpha}$ , как в разд. 1.2.

Потенциал оказывается вещественным, если  $\alpha$  и  $\beta$  лежат на мнимой оси в  $k$ -плоскости, а нормировочный параметр  $C$  для связанного состояния — действительное число. В противном случае в  $V$  появляется мнимая компонента.

Если  $\text{Im } \beta = 0$ , то получается потенциал, не удовлетворяющий условию  $\int_0^\infty |V| r dr < \infty$ . При  $\beta = 0$  и мнимом отрицательном  $\alpha$  имеем:

$$V(r) = -\frac{2\alpha^2}{(1+i\alpha r)^2}. \quad (51)$$

Для потенциала (51) нарушается теорема Левинсона (см. обзор [14])  $\delta(k=0) - \delta(\infty) = n\pi$ . В данном случае  $\delta(0) = -\pi/2$ ,  $\delta(\infty) = 0$ , а связанных состояний нет:  $n = 0$ . При  $\beta$ , мнимом и отрицательном, и  $\alpha = 0$

$$V(r) = 2\beta/\text{ch}^2 i \beta r. \quad (52)$$

**1.5. Многочленные ядра  $Q$ .** К вырожденным ядрам общего вида приводят функции Йоста  $F^+$  с дробно-рациональной зависимостью  $k$  фактора при  $\overset{\circ}{F}^+$ :

$$F^+(k) = \overset{\circ}{F}^+(k) \prod_{j=1}^N \frac{k-\alpha_j}{k-\beta_j}, \quad (53)$$

сводящиеся к (50) в частном случае  $N = 1$ .

Одинаковое число сомножителей в числителе и знаменателе обеспечивает асимптотическое поведение при  $\text{Im } k > 0$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ :  $F^+(k) \rightarrow 1$ , которому должна удовлетворять функция Йоста, если потенциал принадлежит классу  $\int_0^\infty |V(r)| r dr < \infty$ . Для таких потенциалов  $\text{Im } \beta_j < 0$ , а нули  $k = \alpha_j$  функции  $F^+(k)$  в верхней полуплоскости комплексного  $k$  лежат на мнимой оси. Для вещественных потен-

циалов нули  $\alpha_j$  и полюсы  $\beta_j$  функции  $F^+$  должны быть расположены симметрично относительно мнимой оси.

Решение обратной задачи с  $F^+$  вида (53) можно провести в два этапа, обобщая процедуру, описанную в разд. 1.4.

Для тех  $\alpha_j$ , которые отвечают связанным состояниям, представим  $j$ -й сомножитель под знаком произведения в (53) аналогично (50) в виде

$$\frac{k - \alpha_j}{k - \beta_j} = \frac{k - \alpha_j}{k + \alpha_j} \frac{k + \alpha_j}{k - \beta_j}. \tag{54}$$

Соберем теперь в  $F^+$  все сомножители типа  $(k - \alpha_j)/(k + \alpha_j)$  в отдельный фактор, вводящий в систему связанные состояния:

$$F^+(k) = F_1^+(k) \prod_n^{N_b} \frac{(k - \alpha_n)}{(k + \alpha_n)}, \tag{53'}$$

а остальные включим в  $F_1^+(k)$ :

$$F_1^+(k) = \overset{\circ}{F}^+(k) \prod_j^N \frac{(k - \alpha_j)}{(k - \beta_j)}, \tag{55}$$

где для компактности записи мы переобозначили  $\pm\alpha_j \rightarrow a_j$ , выбирая знак «—» для  $\alpha$ , явно фигурирующих в (53').

Сначала найдем решение с функцией Йоста  $F_1^+$ . Действуя подобно (42) — (46), только с учетом большего числа сомножителей при  $\overset{\circ}{F}^+$  и тождества

$$\prod_j^N \frac{k^2 - \beta_j^2}{k^2 - a_j^2} - 1 = \sum_j^N \frac{A_j}{k^2 - a_j^2}, \tag{56}$$

где

$$A_j = \prod_i^N (a_j^2 - \beta_j^2) / \prod_{i \neq j}^N (a_j^2 - a_i^2), \tag{57}$$

получаем:

$$Q(r, r') = \sum_j^N A_j \overset{\circ}{\Phi}(-a_j, r) \overset{\circ}{f}^+(-a_j, r') / \overset{\circ}{F}^+(-a_j) \quad \text{при } r < r', \tag{58}$$

а при  $r > r'$  в (58) меняются местами  $r$  и  $r'$ :

$$K(r, r') = \sum_j^N \beta_j (\beta_j - a_j) f^{+-i}(-\beta_j, r) \overset{\circ}{\Phi}(-\beta_j, r) \times \times \overset{\circ}{F}^{+-i}(-\beta_j) \quad \text{при } r > r'. \tag{59}$$

Подставляя  $Q$  и  $K$  в уравнение Гельфанда — Левитана, получаем, следуя работе [9 см. формулы (4.3.9) — (4.3.14)], систему алгебраич-

ческих уравнений для  $f^+(-\beta_j, r)$ :

$$\mathring{f}^+(-a_l, r) - \sum_j^N W_{lj}(r) \beta_j (\beta_j - a_j) f^+(-\beta_j, r) / \mathring{F}^+(-\beta_j) = 0, \quad (60)$$

где  $W_{lj}$  — элементы матрицы  $\|W\|$ :

$$W_{lj}(r) = (\beta_j^2 - a_l^2) \int_0^r \mathring{f}^+(-a_l, t) \mathring{\varphi}^+(-\beta_j, t) dt,$$

откуда имеем:

$$f^+(-\beta_j, r) = \frac{\mathring{k}^+(-\beta_j)}{\beta_j (\beta_j - a_j)} \sum_l \|W\|_{jl}^{-1} \mathring{f}^+(-a_l, r), \quad (61)$$

и согласно (3), (59) и (61)

$$V(r) = \mathring{V}(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \det \|W\|, \quad (62)$$

$$\varphi(k, r) - \mathring{\varphi}(k, r) + \sum_{jl} \|W\|_{jl}^{-1} \mathring{f}^+(-a_l, r) \frac{W[\mathring{\varphi}^+(-\beta_j, r), \mathring{\varphi}(k, r)]}{(k^2 - \beta_j^2)}. \quad (63)$$

На втором этапе решения обратной задачи с функцией Йоста (53) введем в систему  $N_b$  связанных состояний, отвечающих рациональному множителю при  $F_1^+$ , в формуле (53') для  $F^+$ . В качестве исходных  $\mathring{V}$  и  $\mathring{\varphi}$  будем использовать  $V_1$  и  $\varphi_1$ , задаваемые соотношениями (62), (63). Спектральные функции  $\rho$  и  $\rho_1$  равны при  $E > 0$ :

$$\begin{aligned} d(\rho(k) - \rho_1(k)) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{k^2}{F^+(k) F^+(-k)} - \frac{k^2}{F_1^+(k) F_1^+(-k)} \right] dk = \\ &= \frac{1}{\pi F_1^+(k) F_1^+(-k)} \left[ \prod_i^{N_b} (k + \alpha_j) / (k - \alpha_j) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_i (-k + \alpha_i) / (-k - \alpha_i) - 1 \right] = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Следовательно, вклад в  $Q$  дадут лишь  $N_b$  связанных состояний

$$Q(r, r') = \sum_n^{N_b} C_n^2 \varphi_1(i\kappa_n, r) \varphi_1(i\kappa_n, r'). \quad (65)$$

Подобно (5) — (7) или пользуясь (45), находим:

$$K(r, r') = - \sum_n^{N_b} C_n^2 \varphi(i\kappa_n, r) \varphi_1(i\kappa_n, r'). \quad (66)$$

Подставляя (65) и (66) в уравнение Гельфанда — Левитана, получаем систему  $N_b$  алгебраических уравнений для  $\varphi(i\kappa_n, r)$  с матри-

цей коэффициентов  $P_{mn}(r)^*$ :

$$P_{mn}(r) = \delta_{mn} + C_m^2 \int_0^r \varphi_1(i\kappa_m, t) \varphi_1(i\kappa_n, t) dt. \quad (67)$$

Решая эту систему, находим:

$$\varphi(i\kappa_n, r) = \sum_m \varphi_1(i\kappa_m, r) P_{mn}^{-1}(r). \quad (68)$$

Из (3), (66) и (68) находим \*\*::

$$V(r) = V_1(r) - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \det \mathbf{P}(r); \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \varphi(k, r) = & \varphi_1(k, r) - \\ & - \sum_{mn} C_m^2 \varphi_1(i\kappa_m, r) P_{mn}^{-1}(r) \int_0^r \varphi_1(i\kappa_n, t) \varphi_1(k, t) dt. \end{aligned} \quad (70)$$

**1.6. Одномерное движение по всей оси**  $-\infty < x < \infty$ . Специфика обратной задачи на  $(-\infty, \infty)$  состоит в том, что вместо одного уравнения Марченко пишется два (мы будем здесь следовать работе [15]):

$$K_1(x, y) + Q_1(x+y) + \int_x^\infty K_1(x, z) Q_1(z+y) dz = 0; \quad (71)$$

$$K_2(x, y) + Q_2(x+y) + \int_{-\infty}^x K_2(x, z) Q_2(z+y) dz = 0, \quad (72)$$

где  $Q_1(Q_2)$  выражаются через коэффициенты отражения  $S_{12}(S_{21})$  волны, бегущей справа (слева), и параметры связанных состояний:

$$Q_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_{12}(k) \exp(ikx) dk + \sum_j^{N_b} M_{1j}^2 \exp(-\kappa_j x); \quad (73)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty S_{21}(k) \exp(-ikx) dk + \sum_j^{N_b} M_{2j}^2 \exp(\kappa_j x). \quad (74)$$

Нормировочные константы  $M_{1j}$  и  $M_{2j}$  различаются тем, что представляют собой амплитуды при экспоненциально убывающих хвостах волновой функции  $\Psi(\kappa_j, x)$  связанного состояния при  $E = E_j$  с разных сторон потенциальной ямы.

\* См. сноску на с. 1296.

\*\* При численных расчетах вместо обращения матриц, связанного часто с вычитанием больших чисел, удобно пользоваться итерационной процедурой последовательного учета добавок к потенциалу от отдельных нулей функции Йоста (что сводится к решению на ЭВМ уравнений Рикатти для логарифмических производных волновых функций; см. [41]).

Потенциал  $V(x)$  выражается через  $K_1$  или через  $K_2$ :

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K_1(x, x) = -2 \frac{d}{dx} K_2(x, x). \quad (75)$$

Поэтому достаточно найти одно из  $K$ . Нас интересуют точные решения обратной задачи. Как и в предыдущем разделе, рассмотрим два отдельных случая, комбинируя которые можно построить модельные потенциалы и волновые функции общего вида.

*Безотражательные (прозрачные) потенциалы* получаются, если выбрать коэффициенты  $S_{12}(k)$ ;  $S_{21}(k)$  равными нулю при всех  $k$ . Тогда в  $Q$  останется лишь вклад от связанных состояний

$$Q_1(x+y) = \sum_j^{N_b} M_{ij}^2 \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_j, x) \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_j y) = \sum_j^{N_b} M_{ij}^2 \exp[-\kappa_j(x+y)]. \quad (76)$$

Аналогично для  $K_1$  имеем [см. (45)]:

$$K_1(x, y) = - \sum_j^{N_b} M_{1j}^2 \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_j, x) \exp(-\kappa_j y). \quad (77)$$

Для  $f(i\kappa_j, x)$  имеем систему алгебраических уравнений с матрицей коэффициентов [см. (67)]:

$$\begin{aligned} P_{1ij}(x) &= \delta_{ij} + M_{1i}^2 \int_x^{\infty} \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_i t) \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_j, t) dt = \\ &= \delta_{ij} + M_{1i}^2 \frac{\exp[-(\kappa_i + \kappa_j)x]}{(\kappa_i + \kappa_j)}. \end{aligned} \quad (78)$$

Аналогично (68) – (70) получим:

$$f^+(i\kappa_j, x) = \sum_i \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_i, x) P_{1ij}^{-1}(x); \quad (79)$$

$$V(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det \|P_{ij}\|; \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{f}^2 f^+(k, x) &= \overset{\circ}{f}^+(k, x) - \\ &- \sum_{ij} M_{1i}^2 \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_i, x) P_{1ij}^{-1}(x) \int_x^{\infty} \overset{\circ}{f}^+(i\kappa_j, x') \overset{\circ}{f}^+(k, x') dx'. \end{aligned} \quad (81)$$

Функция  $\Psi$  с падающей слева волной получается умножением  $f^+$  на  $S_{11}$  при  $E > 0$  и на  $M_1$  при  $E < 0$  (хотя сама  $f^+$  найдена по отражению волн, падающих справа), а коэффициент прохождения, равный по модулю 1, имеет вид рациональной дроби:

$$S_{11}(k) = \prod_j^{N_b} \frac{k + i\kappa_j}{k - i\kappa_j}. \quad (82)$$

Рассмотрим теперь другой случай.

*Рациональный коэффициент отражения (связанных состояний нет).* Поскольку коэффициент отражения может быть по модулю меньше единицы, выбираем его в форме отношения полиномов  $P_m(k)$  и  $P_n(k)$  с  $m < n$ :

$$S_{12}(k) = rP_m(k)/P_n(k). \tag{83}$$

Константа  $r$  выделена, чтобы положить коэффициенты при старших степенях в  $P_m, P_n$  равными единице. Для вещественности потенциала полагаем

$$r = (i)^{m-n} r_0,$$

где  $\text{Im } r_0 = 0$ , а нули  $P_m(k)$  и  $P_n(k)$  должны быть расположены симметрично относительно мнимой оси в комплексной плоскости  $k$ . Константа  $r_0$  должна быть достаточно малой, чтобы  $|S_{11}(k)|$  был меньше 1. Обозначим  $\alpha_j^+$  нули полинома  $P_n$  в верхней полуплоскости  $k$ . Замкнем контур интегрирования в  $Q_1$  дугой бесконечного радиуса с  $\text{Im } k > 0$  [напомним, что суммы в (73) нет, как предполагается в этом разделе]. Из-за экспоненциального режущего фактора интеграл по этой дуге равен нулю при  $x > 0$ . В результате  $Q_1(x)$  записывается при  $x > 0$  в виде суммы вычетов (в  $n_+$  полюсах  $S_{12}$  в верхней полуплоскости  $k$ ):

$$Q_1(x) = \sum_{j=1}^{n_+} \rho_j \exp(i\alpha_j^+ x), \quad x > 0, \tag{84}$$

где  $\rho_j$  с точностью до множителя  $i$  совпадают с вычетами  $S_{12}$  в точках  $k = \alpha_j^+$ . Из уравнения (71) с вырожденным ядром (84) находим  $K_1(x, y)$ , которое дает:

$$V(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det (I + Z_1(x)), \quad x > 0, \tag{85}$$

где матрица  $Z_1$  имеет элементы

$$Z_{ij}^{(1)} = i\rho_i \exp [i(\alpha_i^+ + \alpha_j^+)x] / (\alpha_i^+ + \alpha_j^+),$$

а для  $f$  получаем формулы типа (79), (81). При  $x < 0$  потенциал можно найти аналогичной процедурой с  $Q_2, K_2$ .

**1.7. Потенциалы конечного радиуса действия и бесконечно глубокие ямы (чисто дискретный спектр).** Для сил, отличных от нуля на конечном интервале  $[0, a]$ , удобно пользоваться полнотой вспомогательных собственных функций  $u_\lambda$  оператора Шредингера с однородными граничными условиями в точках 0 и  $a$ . В этом случае спектр чисто дискретный (резонансы  $R$ -матрицы). Это значительно экономней, чем иметь дело с непрерывным спектром, когда собственные функции — волновые функции  $\psi$  на оси или полуоси. В то же время вся «физика» сил конечного радиуса действия исчерпывается с помощью решений на  $[0, a]$ , поскольку свободное движение во внешней

области учитывается тривиально. В терминах этих дискретных состояний решаются и задачи непрерывного спектра. Такой формализм в квантовой механике называется  $R$ -матричной теорией рассеяния. В ней непрерывные по энергии характеристики, например  $S(E)$ , параметризуются счетным набором  $R$ -матричных резонансов  $E_\lambda$  и амплитуд их приведенных ширин  $\gamma_\lambda$ . Сама  $R$ -матрица, взаимно однозначно связанная с функцией рассеяния  $S(E)$ :

$$R(E) = \frac{\exp(-ika) - S(E) \exp(ika)}{-(ik + B/a) \exp(-ika) - S(E) (ik - B/a) \exp(ika)} \quad (B = \text{const}), \quad (86)$$

имеет вид (произвол в выборе константы  $B$  в граничных условиях  $u'(a)/u(a) = B/a$  сказывается на параметрах  $E_\lambda$  и  $\gamma_\lambda$ , но не меняет наблюдаемых величин):

$$R(E) = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E}. \quad (87)$$

Соответствующая обратная задача: восстановление потенциала по набору  $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$  рассматривалась в [4, 16, 17]. Ее математический аппарат совпадает с теорией Гельфанда — Левитана для конечного отрезка [2], только граничные условия для вспомогательных регулярных решений задаются не в начале координат, а в точке  $a$ , например (при  $B = 0$ ):

$$\varphi(E, a) = \dot{\varphi}(E, a) = \sqrt{2a}; \quad \varphi'(E, a) = \dot{\varphi}'(E, a) = 0. \quad (88)$$

При резонансных значениях  $E = E_\lambda$  решения  $\varphi$  обращаются в нуль при  $r = 0$  и становятся пропорциональными собственным функциям  $u(E_\lambda, r) = \gamma_\lambda \varphi(E_\lambda, r)$ . Благодаря дискретности набора собственных состояний на  $[0, a]$  интегральный член в ядре уравнения Гельфанда — Левитана вообще отсутствует, вместо него имеется бесконечная сумма \*:

$$Q(r, r') = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda}^2 \dot{\varphi}(E_{\lambda}, r) \dot{\varphi}(E_{\lambda}, r') - \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda}^2 \dot{\varphi}(E_{\lambda}, r) \dot{\varphi}(E_{\lambda}, r'). \quad (89)$$

Множители  $\gamma_{\lambda}^2$  (приведенные ширины) играют здесь ту же роль, что и нормировочные константы  $C_n$  для связанных состояний в (18). Вместе с  $E_{\lambda}$  они содержат всю необходимую спектральную информацию о  $V(r)$ . Вторая сумма в (89) и набор  $\{E_{\lambda}, \gamma_{\lambda}\}$  отвечают резонансам потенциала  $\dot{V}(r)$ .

Уравнение Гельфанда — Левитана имеет обычный вид, но только с особыми пределами интегрирования

$$K(r, r') + Q(r, r') + \int_r^a K(r, t) Q(t, r') dt = 0. \quad (90)$$

\* То же получается для бесконечно глубоких потенциалов на неограниченном интервале [83, 84] (ср. получение точных решений с [16]).

Форма (89) ядра  $Q$  в  $R$ -матричной теории удобна для построения точно решаемых моделей. Если выбрать лишь конечное число параметров из набора  $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$  отличными от  $\{\dot{E}_\lambda, \dot{\gamma}_\lambda\}$ , то взаимно уничтожается бесконечное число членов в двух суммах в (89), отвечающих остальным (неизменным) значениям  $E_\lambda = \dot{E}_\lambda$ ;  $\gamma_\lambda = \dot{\gamma}_\lambda$ . Остается конечная сумма факторизованных членов в  $Q$ , т. е. ядро вырождается. Однако при выборе  $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$  нельзя нарушать связи между этими параметрами, чтобы существовал локальный потенциал с такими резонансами. Явный вид этих связей нам неизвестен \*, но проверкой правильности выбора  $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$  может служить прямая подстановка в уравнение Шредингера полученных функций  $\varphi$  и потенциала  $V$ . Нужно также убедиться, выполняются ли граничные условия (для собственных функций в  $r = 0$  и  $r = a$ ).

Самый простой вид  $Q$  получается, если взять для  $V$  тот же спектр  $E_\lambda$ , что и для  $\dot{V}$  (все  $E_\lambda = \dot{E}_\lambda$ ), и лишь для одного собственного значения ( $\lambda = \nu$ ) выбрать амплитуду приведенной ширины  $\gamma_\nu$ , отличной от  $\dot{\gamma}_\nu$  ( $\delta\gamma_\nu^2 = \gamma_\nu^2 - \dot{\gamma}_\nu^2$ ):

$$Q(r, r') = \delta\gamma_\nu^2 \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, r) \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, r'). \tag{91}$$

Обычная процедура решения (90) с  $Q$  из (91) дает:

$$K(r, r') = -\frac{\delta\gamma_\nu^2 \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, r) \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, r')}{P(r)}; \quad P(r) \equiv 1 + \delta\gamma_\nu^2 \int_r^a \dot{\varphi}^2(\dot{E}_\nu, t) dt. \tag{92}$$

Такому ядру  $K$  оператора обобщенного сдвига ( $\dot{\varphi} \rightarrow \varphi$ ) соответствуют:

$$\varphi(\dot{E}_\nu, r) = \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, r) P^{-1}(r) \text{ при } E = \dot{E}_\nu; \tag{93}$$

$$\begin{aligned} \varphi(E, r) = & \dot{\varphi}(E, r) - \\ & - \delta\gamma_\nu^2 \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, r) \int_r^a \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, t) \dot{\varphi}(E, t) dt P^{-1}(r); \end{aligned} \tag{94}$$

$$V(r) = \dot{V}(r) + 4\delta\gamma_\nu^2 \dot{\varphi}(\dot{E}_\nu, r) P^{-1}(r) + 2(\delta\gamma_\nu^2)^2 \dot{\varphi}^4(\dot{E}_\nu, r) P^{-2}(r). \tag{95}$$

Если в наборе  $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$  изменить одну лишь  $E_\lambda$  по сравнению с ее невозмущенным значением  $\dot{E}_\lambda$ , то в  $Q$  будет два факторизованных члена. В общем многочленном случае нужно решать системы алгебраических уравнений, как в разд. 1.5.

В качестве примера нарушения связей между спектральными параметрами возьмем для всех значений  $\lambda : E_\lambda = \dot{E}_\lambda, \gamma_\lambda = \dot{\gamma}_\lambda$

\* Сформулированы ограничения [18, гл. 3, § 4] на совокупность двух спектров  $\{E_\lambda, E_\mu\}$ , отвечающих одному и тому же уравнению Шредингера, но разным однородным граничным условиям на концах интервала  $[0, a]$ . По теореме о двух спектрах  $\{E_\lambda, E_\mu\}$  связаны с  $\{E_\lambda, \gamma_\lambda\}$  [19].



и добавим еще один новый резонанс  $E_\mu, \gamma_\mu$ . Тогда  $Q$  будет иметь почти такой же вид, как и в (91), только нужно заменить  $\delta\gamma_\nu^2 \rightarrow \gamma_\mu^2$ ;  $\dot{E}_\nu \rightarrow E_\mu$ . Для  $\varphi(E_\mu, r)$ ,  $\varphi(E, r)$  и  $V(r)$  получаем аналогично формулы типа (93) — (95). Эти  $\varphi$  будут удовлетворять уравнению Шредингера с  $V$  из (95), но нарушаются граничные условия  $\varphi(E_\lambda, 0) = 0$ , так как  $\dot{\varphi}(E_\mu, 0) \neq 0$  при  $E_\mu$ , не совпадающем ни с одним из  $\dot{E}_\lambda$ . Для найденного таким образом потенциала (по несогласованным спектральным параметрам) можно получить и правильный набор  $\{E_{\lambda'}, \gamma_{\lambda'}\}$ : значениям  $E_{\lambda'}$  будут соответствовать те  $E$ , при которых  $\varphi(E, 0) = 0$ , а  $\gamma_{\lambda'}$  — нормировочные множители этих  $\varphi(E_{\lambda'}, r)$  на  $[0, a]$ . О подобном «исправлении» решений говорилось уже в разд. 1.2.

Аналогичная техника построения баргмановских потенциалов с чисто дискретным спектром работает для сил неограниченного радиуса действия, когда  $\dot{V}$  — бесконечно глубокая яма. При этом в отличие от  $R$ -матричного случая можно не только сдвигать уровни потенциала  $\dot{V}$ , но и добавлять к ним новые, исключать имеющиеся [83, 84].

**1.8. Конечно-разностное уравнение Шредингера.** Дискретным (по координате) аналогом (1) служит разностное уравнение второго порядка — система рекуррентных соотношений для значений волновой функции  $\Psi(r)$  в отдельных точках  $r_n = n\Delta$ , где  $\Delta$  — шаг разностного дифференцирования:

$$-\frac{1}{\Delta^2} \{\Psi(E, n+1) - 2\Psi(E, n) + \Psi(E, n-1)\} + V(n)\Psi(n) = E\Psi(n). \quad (96)$$

Как и уравнение Шредингера в обычной дифференциальной форме (1), оно имеет решения  $\Psi$ , отвечающие состояниям рассеяния с асимптотикой:

$$\Psi(E, n) \sim \exp(-i\theta n\Delta) - S(E) \exp(i\theta n\Delta), \quad (97)$$

где, однако, «волновое число»  $\theta/\Delta$  связано с  $E$  иначе, чем  $k$  с  $E$ , и лишь при малых энергиях  $E \sim (\theta/\Delta)^2$ . Аналогично вводятся и связанные состояния.

Формализм восстановления потенциалов  $V(n)$  по спектральной информации, отвечающей конечно-разностному уравнению (96), был предложен в [20, 21] в подходах Гельфанда — Левитана и Марченко, а в [4, 22] — для сил конечного радиуса действия.

Специфика уравнения (96) проявляется в том, что спектр разностного оператора Шредингера ограничен сверху. Непрерывный спектр, например, обрывается при энергии  $E_{\text{макс}} = 4/\Delta^2$  (а в  $R$ -матричной теории спектр состоит из конечного числа резонансов  $E_\lambda$ ), в соотношении полноты  $\delta$ -функция заменяется конечной величиной  $\delta_{m\pi}/\Delta$ .

Уравнения обратной задачи благодаря дискретности  $r_n$  превращаются из интегральных в системы алгебраических:

$$K(m, n) + Q(m, n) + \sum_p \Delta K(m, p) Q(p, n) = 0, \quad (98)$$

где пределы суммирования по  $p$  зависят от конкретного подхода:  $(1 \leq p \leq m - 1)$  — ГЛ;  $(m \leq p \leq \infty)$  — М;  $(m + 1 \leq p \leq N = a/\Delta) - R$ .

Можно получить конечно-разностные аналоги точно решаемых моделей с непрерывной зависимостью от пространственной переменной. Чтобы избежать лишних повторений, приведем здесь в качестве иллюстрации один простой пример.

Пусть спектральная функция  $\rho(E)$  совпадает при  $E > 0$  с невозмущенной  $\overset{\circ}{\rho}(E)$ . Тогда в  $Q_{\Gamma,1}$  остается вклад лишь связанных состояний. Для потенциалов  $V$  и  $\overset{\circ}{V}$  с двумя уровнями  $E_1 < E_2 < 0$  (одинаковыми в  $V$  и  $\overset{\circ}{V}$ , но с разными нормировками  $C_i^2 - \overset{\circ}{C}_i^2 = \delta C_i^2$ ) имеем:

$$Q(m, n) = \sum_{j=1}^2 \delta C_j^2 \overset{\circ}{\varphi}(E_j, m) \overset{\circ}{\varphi}(E_j, n). \quad (99)$$

В случае дискретной координаты нужно обеспечить  $\sum_j \delta C_j^2 = 0$ , чтобы не нарушалось условие полноты. Вместо граничных условий (19) для регулярных решений  $\varphi$ ,  $\overset{\circ}{\varphi}$  будем задавать:  $\overset{\circ}{\varphi}(0) = \varphi(0) = 0$ ;  $\varphi(1) = \overset{\circ}{\varphi}(1) = 1$ . Система бесконечного числа алгебраических уравнений (98) с факторизованным  $Q$  из (99) сводится к двум уравнениям для  $\varphi(E_i, m)$ , дающим [ср. (68)]:

$$\begin{aligned} \varphi(E_i, m) &= \sum_{j=1}^2 \overset{\circ}{\varphi}(E_j, m) P^{-1}(m)_{ji}; \quad P_{ij}(m) = \\ &= \delta_{ij} + \Delta^2 C_i^2 \sum_{p=1}^{m-1} \Delta \overset{\circ}{\varphi}(E_i, p) \overset{\circ}{\varphi}(E_j, p). \end{aligned} \quad (100)$$

Эти функции определяют [ср. (66)]  $K(m, n) = - \sum_i^2 \delta C_i^2 \varphi(E_i, m) \times \overset{\circ}{\varphi}(E_i, n)$ , с помощью которых находим  $\varphi$  при любых значениях  $E$ :

$$\begin{aligned} \varphi(E, m) &= \overset{\circ}{\varphi}(E, m) - \\ &- \sum_{i,j=1}^2 \delta C_i^2 \overset{\circ}{\varphi}(E_i, m) P_{ij}^{-1}(m) \sum_{p=1}^{m-1} \Delta \overset{\circ}{\varphi}(E_j, p) \overset{\circ}{\varphi}(E, p). \end{aligned} \quad (101)$$

Потенциал  $V(n)$  связан с  $K(m, n)$  соотношением [ср. (3)]

$$V(n) = - [K(n, n - 1) - K(n + 1, n)]/\Delta. \quad (102)$$

Подставляя сюда выражение для  $K$ , находим:

$$V(n) = \sum_{i,j=1}^2 \delta C_i^2 [\overset{\circ}{\varphi}(E_j, n) P_{ji}^{-1}(n) \overset{\circ}{\varphi}(E_i, n-1) - \overset{\circ}{\varphi}(E_j, n+1) P_{ji}^{-1}(n+1) \overset{\circ}{\varphi}(E_i, n)] / \Delta. \quad (103)$$

**1.9. Преобразования Крама — Крейна.** К способам построения точно решаемых моделей с помощью аппарата обратной задачи тесно примыкает методика, предложенная в [23, 24], а позднее развитая и изложенная в [3, 25].

Из решений  $\overset{\circ}{y}(E, x)$  и  $\overset{\circ}{y}(E_1, x)$  уравнения Шредингера (1) с потенциалом  $\overset{\circ}{V}(x)$  можно составить при фиксированной  $E_1$  и  $E \neq E_1$  новую функцию

$$y_1(E, x) = - \frac{\overset{\circ}{y}'(E, x) \overset{\circ}{y}(E_1, x) - \overset{\circ}{y}(E, x) \overset{\circ}{y}'(E_1, x)}{(E - E_1) \overset{\circ}{y}(E_1, x)} \equiv \frac{W[\overset{\circ}{y}(E, x), \overset{\circ}{y}(E_1, x)]}{(E - E_1) \overset{\circ}{y}(E_1, x)}, \quad (104)$$

где  $W$  — вронскиан), удовлетворяющую (1) с измененным потенциалом  $V = \overset{\circ}{V} + \Delta V$ , где

$$\Delta V(x) = -2 \left( \frac{\overset{\circ}{y}'(E_1, x)}{\overset{\circ}{y}(E_1, x)} \right)' = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln y_0(E_1, x). \quad (105)$$

Получается соотношение (104) цепочкой подстановок и операций дифференцирования с использованием (1) (см. [25]).

При  $E = E_1$  в качестве двух линейно независимых решений (1) с  $V = \overset{\circ}{V} + \Delta V$  можно взять:

$$z_1(E_1, x) = \frac{1}{\overset{\circ}{y}(E_1, x)} \quad \text{и} \quad \chi_1(E_1, x) = \frac{1}{\overset{\circ}{y}(E_1, x)} \int_0^x \overset{\circ}{y}^2(E_1, t) dt. \quad (106)$$

Они могут быть получены предельным переходом из (104).

Преобразование, обратное к (104) ( $V \rightarrow \overset{\circ}{V}$ ), имеет вид:

$$y_0(E, x) = - \frac{y_1'(E, x) z_1(E_1, x) - y_1(E, x) z_1'(E_1, x)}{z_1(E_1, x)}. \quad (107)$$

Указанные преобразования можно проводить и в тех случаях, когда не существует уравнений Гельфанда — Левитана — Марченко. Связь преобразований (104), (106), (107) с баргмановскими решениями, рассмотренными в предыдущих разделах, можно продемонстрировать, последовательно применив (104), а затем (107). Действительно, исходя из  $\overset{\circ}{y}(E_1, x)$ , построим для уравнения Шредингера с потенциалом

$V_1 = \overset{\circ}{V} + \Delta V$  решение в виде линейной комбинации решений (106) с фиксированным  $E = E_1$ :

$$\eta_1(E_1, x) = \frac{1}{\overset{\circ}{y}(E_1, x)} \left[ 1 + C^2 \int_0^x \overset{\circ}{y}^2(E_1, t) dt \right]. \quad (108)$$

Решение с произвольным  $E$  для  $V_1$  определим согласно (104):

$$y_1(E, x) = \frac{W[\overset{\circ}{y}(E, x), \overset{\circ}{y}(E_1, x)]}{(E - E_1) \overset{\circ}{y}(E_1, x)} = \frac{1}{\overset{\circ}{y}(E_1, x)} \int_0^x \overset{\circ}{y}(E, t) \overset{\circ}{y}(E_1, t) dt. \quad (109)$$

С помощью решений (108), (109) проведем преобразование (107)

$$\varphi_2(E, x) = -\frac{W[y_1(E, x), \eta_1(E_1, x)]}{\eta_1(E_1, x)} = \overset{\circ}{y}(E, x) - \overset{\circ}{y}(E_1, x) \int_0^x \overset{\circ}{y}(E, t) \overset{\circ}{y}(E_1, t) dt \left[ 1 + C^2 \int_0^x \overset{\circ}{y}^2(E_1, t) dt \right]^{-1}. \quad (110)$$

Это решение уравнения (1) с потенциалом

$$V_2 = \overset{\circ}{V} + \Delta V_1 + \Delta V_2 = \overset{\circ}{V} - 2(\ln \overset{\circ}{y}(E_1, x))'' - 2 \ln \eta_1(E_1, x)'' = \overset{\circ}{V} - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left( 1 + C^2 \int_0^x \overset{\circ}{y}^2(E_1, t) dt \right). \quad (111)$$

Полученные формулы (111), (110) совпадают с баргмановскими (25) и (26).

Если функция  $\overset{\circ}{y}(E_1, x)$  имеет нуль в некоторой точке, то в преобразованных решениях и потенциалах появляются сингулярности. Интересен частный случай, когда  $\overset{\circ}{y}(E_1, r)$  — регулярное в нуле решение радиального уравнения Шредингера для парциальной волны с  $l \neq 0$  [в  $\overset{\circ}{V}$  имеется центробежный барьер  $l(l+1)/r^2$ ]. Тогда преобразование (104) увеличивает на единицу орбитальный момент нового уравнения [25]. Последнее обстоятельство можно использовать для конструирования решений уравнения с  $l \neq 0$  из решений уравнения (1) с  $l = 0$ . Обратное преобразование же (107) с помощью нерегулярного решения  $z_1(E_1, x)$  уменьшает на единицу значение параметра  $l$  решений и потенциала. В преобразованиях (104), (107) сохраняется свойство регулярности (нерегулярности) преобразуемых решений.

Многократное применение преобразований с использованием решений, отвечающих разным энергиям (вещественным и комплексным) и разным граничным условиям, дает все новые и новые точно решаемые модели.

Обобщение рассмотренного подхода на многоканальный случай дается в разд. 3.3.

Преобразования Крама — Крейна оказались мощным вспомогательным средством при доказательствах в теории обратной задачи [3, 25].

**1.10. Приближенное восстановление потенциалов с помощью точно решаемых моделей.** Класс спектральных данных, отвечающих вырожденным ядрам  $Q$  уравнений обратной задачи, весьма широк и гибок благодаря возможности менять у баргмановских потенциалов значения свободных параметров и их число. Оставаясь в этом классе, можно приближаться к данным рассеяния (и характеристикам связанных состояний) произвольных искомым потенциалов. Такая аппроксимация сразу же дает готовые формулы для потенциала и волновых функций, поскольку в модели известна точная связь  $S \rightarrow V$ .

Простота этой схемы делает ее привлекательной для практического применения к анализу экспериментальных измерений для конкретных квантовых систем.

Подбор параметров модели по заданной функции рассеяния  $S(k) = \exp [2i\delta(k)]$  осуществлялся в [26] по следующей схеме.  $S$ -функция приравнивается к ее модельному приближению в виде рациональной дроби:

$$S(k) = \prod_{i=1}^n \frac{k - \alpha_i}{k - \beta_i} = \frac{k^n + A_1 k^{n-1} + \dots + A_n}{k^n + B_1 k^{n-1} + \dots + B_n} = \exp [2i\delta(k)]. \quad (112)$$

Последнее равенство в  $2n$  фиксированных точках  $k_s$  ( $s = 1, \dots, 2n$ ) дает  $4n$  линейных алгебраических уравнений для мнимых и реальных частей коэффициентов  $A_i, B_i$ :

$$\begin{aligned} k_s^n + \operatorname{Re} A_1 k_s^{n-1} + \dots + \operatorname{Re} A_n &= \cos 2\delta(k_s) [k_s^n + \operatorname{Re} B_1 k_s^{n-1} + \dots \\ &\dots + \operatorname{Re} B_n] - \sin 2\delta(k_s) [\operatorname{Im} B_1 k_s^{n+1} + \dots + \operatorname{Im} B_n]; \\ \operatorname{Im} A_1 k_s^{n-1} + \dots + \operatorname{Im} A_n &= -\cos 2\delta(k_s) [\operatorname{Im} B_1 k_s^{n-1} + \dots \\ &\dots + \operatorname{Im} B_n] + \sin 2\delta(k_s) [k_s^n + \operatorname{Re} B_1 k_s^{n-1} + \dots + \operatorname{Re} B_n]. \end{aligned}$$

С известными же  $A_i$  ( $B_i$ ) просто найти  $\alpha_i$  ( $\beta_i$ ), как нули полинома в числителе (знаменателе) дроби в (112).

В [27—31] по энергетической зависимости данных рассеяния восстанавливались  $\alpha - \alpha$  и нуклон-нуклонные потенциалы. Ссылки на другие примеры численного решения ядерных обратных задач даны в разд. 2.3 (по фазам при фиксированной энергии) и разд. 3.4 (многоканальная техника).

К сожалению, пока выполнено мало расчетов по восстановлению известных потенциалов для проверки эффективности этой методики. Обнадешивают результаты [7, 8] сотрудников Лаборатории Ферми

(Батавия, США) по численной реконструкции бесконечных линейной и осцилляторных ям с помощью баргмановских потенциалов конечной глубины исходя из положений уровней в нижней части спектра (см. рис. 1, 4, 5) \*.

Интересно, что одного совпадения нижних уровней оказалось недостаточно для хорошего воспроизведения пробной ямы. В зависимости от выбора положения «края» баргмановского потенциала

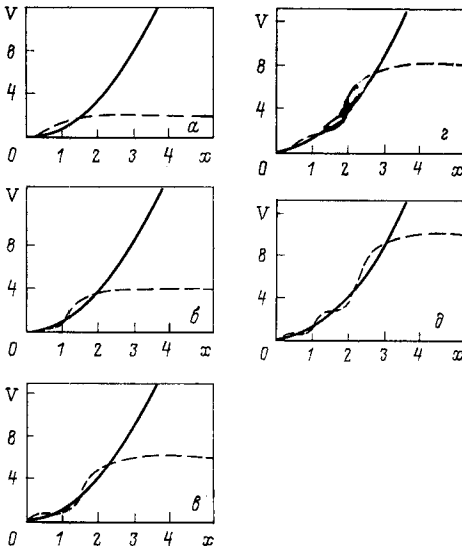
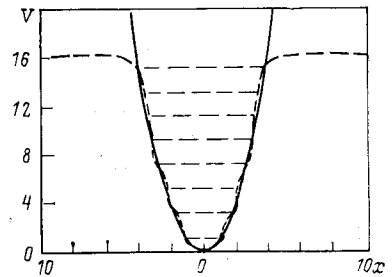


Рис. 4. Восстановление осциллятора  $V(x)$  с помощью баргмановских потенциалов  $V^B$  конечной глубины, уровни которых совпадают с нижними уровнями  $V(x)$  [7]: в яме  $V^B$  имеется  $a$  — одно;  $б$  — два...,  $г$  — пять связанных состояний

Рис. 5. Восьмиуровневое приближение осцилляторной ямы модельным потенциалом конечной глубины [13]



(энергии, равной  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = \hat{V} = \text{const}$ ) относительно уровней в восстановленном потенциале возникают большие или меньшие осцилляции, которые удастся существенно подавить при специальном определении этого свободного параметра, когда край ямы располагался посередине между верхним  $N$ -м уровнем аппроксимирующей и  $N + 1$ -м искомой ямы. Это показано на рис. 6.

Правда, для бесконечной прямоугольной ямы результаты расчетов оказались существенно хуже (рис. 7). Но этого можно ожидать для сил с резкими скачками потенциальной энергии.

Авторы работы [8] сделали первую попытку анализа сходимости приближений с помощью баргмановских потенциалов. Они исследо-

\* Для симметричных (по отношению к отражению в центральной точке) потенциалов одни лишь углы (резонансы) без нормировочных амплитуд составляют достаточный в богатой задаче набор спектральных данных [32, 33].

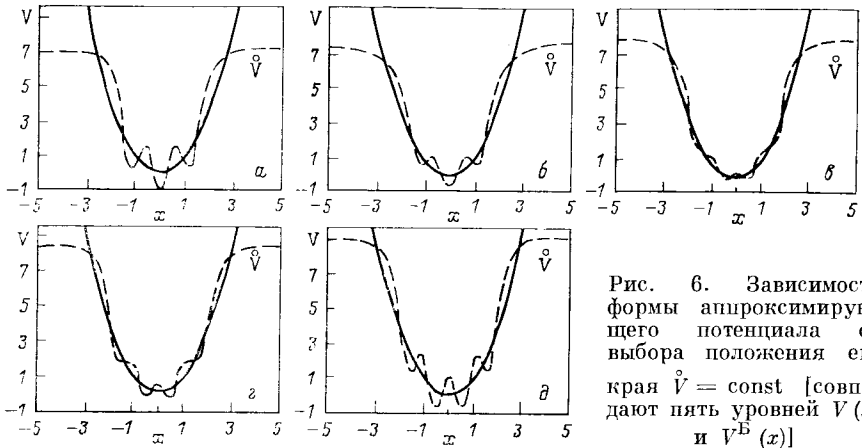
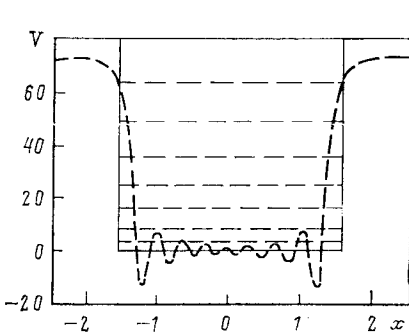


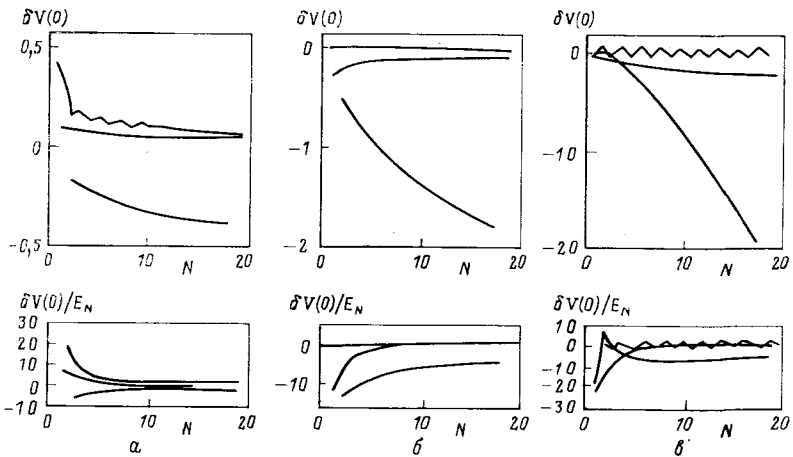
Рис. 6. Зависимость формы аппроксимирующего потенциала от выбора положения его края  $\dot{V} = \text{const}$  [совпадают пять уровней  $V(x)$  и  $V^B(x)$ ]



←  
Рис. 7. То же, что и на рис. 1, 5, но для бесконечной прямоугольной ямы

Рис. 8. Зависимость абсолютной  $[\delta V(x=0) = V - V^B]$  и относительной  $[\delta V(0)/E_N]$  погрешностей приближения от числа  $N$  нижних уровней, совпадающих в  $V^B(x)$ :

— в линейном потенциале; б — в осциляторе; в — в прямоугольной яме. Кривые на одном графике соответствуют разным положениям края  $\dot{V}$  баргмановского потенциала



вали отклонение  $\delta V$  найденного значения  $V$  от искомого в одной лишь точке (в начале координат). При лучшем выборе  $\overset{\circ}{V}$  относительная погрешность  $\delta V(x=0)/E_N$ , где  $E_N$  — энергия возбуждения самого верхнего уровня в пробной яме, стремится к нулю с увеличением числа  $N$  параметров в аппроксимирующем  $\overset{\circ}{V}$ , т. е. числа членов в  $Q$ . При том же  $\overset{\circ}{V}$  абсолютная погрешность  $\delta V(x=0)$  возрастает в случае восстановления прямоугольной ямы, но убывает для осциллятора и линейного  $V$  (рис. 8).

Такие исследования были бы очень интересны и для потенциалов с непрерывным спектром. Тогда будет больше доверия к информации, получаемой с помощью моделей из экспериментальных данных (когда нет прямой возможности оценить точность приближения).

Пример восстановления бесконечно глубокой ямы

$$V(r) = \alpha r - \beta \exp(-r/r_0),$$

исходя из бесконечной же линейной ямы  $\overset{\circ}{V}(r) = \alpha r$ , был дан в [34].

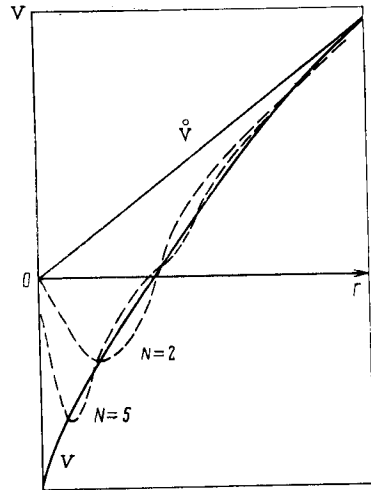


Рис. 9. Приближение потенциала  $V(r) = \alpha r - \beta \exp(-r/r_0)$  с помощью баргмановских добавок к  $\overset{\circ}{V}(r) = \alpha r$ : штриховые линии изображают  $V^B(r) = V + \Delta V$  при различных нижних уровнях, совпадающих в  $V(r)$  и  $\overset{\circ}{V}(r)$

На рис. 9 показано, как  $\overset{\circ}{V}(r) + \Delta V_N$  приближается к  $V(r) = \alpha r - \beta \exp(-r/r_0)$  при учете сдвига с помощью баргмановских добавок  $\Delta V_N$  нижних  $N$  уровней в яме  $\overset{\circ}{V}$  до совпадения с их положением в яме  $V$ . В той же статье [34] восстановлен потенциал для кварков.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ ПРИ ОДНОЙ ЭНЕРГИИ $E$ И РАЗНЫХ $l$

Обратная задача переопределена, если данных рассеяния больше, чем необходимо для восстановления взаимодействия. В случае локального сферически-симметричного потенциала такой избыток вызван тем, что потенциал зависит от единственной скалярной пространственной переменной  $|r|$ , в то время как данные рассеяния представляют собой функции двух переменных, например



амплитуда рассеяния  $A(E, \vartheta)$  — функция энергии и углов или фазовый сдвиг  $\delta(E, l) \equiv \delta_l(E)$  — функция энергии и орбитального момента.

Имеются две равноправные постановки обратной задачи, использующие лишь часть информации о рассеянии.

Либо ищут  $V(r)$  по фазам при всех  $E \geq 0$  и параметрам связанных состояний, отвечающим одному значению  $l$ , либо выбирают при одном значении  $E$  совокупность  $\delta_l$  со всевозможными  $l$ , что соответствует заданию углового распределения амплитуды рассеяния с фиксированной энергией  $E$ . В § 1 мы имели дело с первым подходом. Рассмотрим теперь точно решаемые модели в другом случае.

При довольно существенных различиях обоих формализмов имеется много объединяющих их моментов. Так, в подходе при  $E = \text{const}$  используются уравнения типа Гел'фанда — Левитана — Марченко (2), как и при  $l = \text{const}$ , только получаются они на основе других соотношений полноты: ортогональности векторов состояний при суммировании (интегрировании) по переменной орбитального момента  $\lambda = l + 1/2$  вместо переменной импульса  $k$ .

Аналогия задач на собственные значения  $\lambda^2$  и  $k^2$  становится заметнее, если преобразовать уравнение Шредингера согласно [35] с помощью замены переменной  $r = \exp(\rho)$  и функции  $\Psi_l(k, r) = \Phi_E(\lambda, \rho) \exp(\rho/2)$ :

$$-\Psi_l''(k, r) + [l(l+1)/r^2 + V(r)] \Psi_l(k, r) = k^2 \Psi_l(k, r); \quad (113)$$

$$-\Phi_E''(\lambda, \rho) + [V - E] \exp(2\rho) \Phi_E(\lambda, \rho) = -\lambda^2 \Phi_E(\lambda, \rho). \quad (114)$$

Правда, подобие (113) и (114) далеко не полное. Полуось  $0 \leq r < \infty$  переходит во всю ось  $-\infty < \rho < \infty$ . Точнее, отрезок  $0 \leq r \leq 1$  растягивается в полуось  $-\infty < \rho < 0$ , а полуось  $1 \leq r < \infty$  переходит в полуось  $0 \leq \rho < \infty$ , претерпевая логарифмическое сжатие. Сильно отличаются также в (113) и (114) потенциальные члены. Разница знаков в правых частях (113) и (114) приводит к тому, что непрерывному спектру при вещественных значениях  $k$  отвечают значения на мнимой оси в комплексной плоскости  $\lambda$ .

Рассмотрим поучительный пример [36], демонстрирующий сохранение свойства полноты собственных функций при переходе от (113) к (114), несмотря на то что  $\Phi_E(\lambda, \rho)$  при мнимых  $\lambda$  сильно отличаются от функций  $\Psi_l(k, r)$ . В простейшем случае  $k^2 = E = 0$ ;  $V(r) \equiv 0$  решения  $\varphi = r^{i\tau} = \exp(i\tau \ln r)$  уравнения (113) при мнимых значениях  $\lambda = i\tau$  имеют колебания с неограниченно возрастающей частотой при  $r \rightarrow 0$ . Они описывают движение в поле притяжения  $\lambda^2/r^2$  («перевернутом центробежном барьере»), в котором возможно так называемое падение на центр. На языке же переменной  $\rho$  это обычные свободные волны  $\exp(i\lambda\rho)$  (бесконечно учащающиеся вблизи  $r = 0$  колебания функции становятся равномерными при растяжении окрестности точки  $r = 0$  в полуось  $\rho$ ). В результате прямое и обратное преобразование Фурье (свойство полноты) функций от  $\rho$

$$\mathcal{F}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\rho) \exp(-i\tau\rho) d\rho; \quad h(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\tau) \exp(i\tau\rho) d\tau \quad (115)$$

трансформируется при замене  $\rho$  на  $\ln r$  в преобразования Меллина для функции от  $r$

$$\mathcal{F}(\tau) = \int_0^{\infty} g(r) r^{-i\tau} \frac{dr}{r}; \quad g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\tau) r^{i\tau} d\tau. \quad (116)$$

Формулы (116) можно записать в виде соотношения ортогональности

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^{-i\tau} r'^{i\tau} d\tau = r\delta(r-r') \quad (117)$$

или, полагая  $\phi(r, i\tau) = (r^{i\tau}/2^{i\tau}) \Gamma(1+i\tau)$  и пользуясь формулой  $\Gamma(p)/\Gamma(1-p) = \pi/\sin p\pi$ , еще так

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r', i\tau) \phi(r, i\tau) \frac{\tau d\tau}{\operatorname{sh} \pi\tau} = \tau\delta(r-r'). \quad (118)$$

В более общем случае  $E \neq 0$  и  $V \neq 0$ , рассмотренном ниже, помимо непрерывного спектра вдоль мнимой оси появляются еще и дискретные состояния.

Выделим две главные формы обратной задачи при  $E = \text{const}$ , которые условно можно сопоставить подходам Гельфанда — Леви-тана и Марченко при  $l = \text{const}$ , рассмотренным в § 1. Они основываются на соотношениях полноты, записанных через решения Йоста  $f$  и регулярные  $\varphi$ .

**2.1. Уравнения обратной задачи и модели на базе решений  $f(\lambda, k, r)$  при  $k = \text{const}$ .** В [37] было получено равенство Парсеваля (тем же методом, что описан в книге Ньютона [10, гл. 12, § 1, с. 343—345]), только с заменой переменных  $k \leftrightarrow \lambda$  и решений  $f \leftrightarrow \varphi^*$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{\pi} \int_0^{i\infty} \frac{f^+(\lambda, k, r) f^+(\lambda, k, r') \lambda^2 d\lambda}{r r' F^+(\lambda, k) F^+(-\lambda, k)} + \\ & + \sum_i^n C_i^2 \frac{f^+(\alpha_i, k, r) f^+(\alpha_i, k, r')}{r r'} = \delta(r-r'), \end{aligned} \quad (119)$$

где интегрирование ведется по мнимой полуоси  $\lambda^{**}$ , а  $C_i^2 = \int_0^{\infty} \frac{f^{+2}(\alpha_i, k, r)}{r^2} dr$  — комплексная нормировка решений Йоста  $f^+$

\* Асимптотические условия для  $f^+(\lambda, k, r) \sim \exp(ikr)$  не зависят от  $\lambda$  подобно тому, как условия для  $\varphi \rightarrow r^{\lambda+1/2}$  не зависят от  $k$ .

\*\* Точнее, при интегрировании по мнимой оси надо обходить лежащие на ней полюсы Редже.

в полюсах Редже  $\lambda = \alpha_i$  [нулях функций Йоста  $F^+(\lambda, k)$  при  $\text{Re } \lambda > 0$ ]. В точках  $\lambda = \alpha_i$  функции  $f^\pm(\lambda, k, r)$ , помимо обычного условия при больших  $r$ :  $\lim_{r \rightarrow \infty} f^\pm(\lambda, k, r) \exp(\mp ikr) = 1$ , ведут себя как  $r^{\lambda+1/2} = r^l$  при  $r \rightarrow 0$ . Функции Йоста  $F^+(\lambda, k)$  аналитичны в правой полуплоскости  $\text{Re } \lambda > 0$  и служат коэффициентами, связывающими решения  $f^\pm(\lambda, k, r)$  с  $\phi(\lambda, k, r)$  подобно (28). Для  $\text{Im } V = 0$   $F^{+*}(\lambda, k) = F^+(\lambda^*, -k)$ .

Опираясь на «ортонормировку» (119), можно получить уравнение типа Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(r, r') = Q(r, r') + \int_r^\infty K(r, t) Q(t, r') dt, \tag{120}$$

где ядро  $Q$  определяется подобно (18')

$$Q(r, r') = \int \frac{\overset{\circ}{f}^+(\lambda, k, r) \overset{\circ}{f}^+(\lambda, k, r')}{rr'} \left[ \frac{1}{\overset{\circ}{F}^+(\lambda, k) \overset{\circ}{F}^+(-\lambda, k)} - \frac{1}{\overset{\circ}{F}^+(\lambda, k) \overset{\circ}{F}^+(-\lambda, k)} \right] \lambda^2 d\lambda + \sum_i^n C_i^2 \overset{\circ}{f}^+(\alpha_i, k, r) \overset{\circ}{f}^+(\alpha_i, k, r') / rr', \tag{121}$$

а потенциал выражается через  $K$ , почти как в (3):

$$V(r) = \overset{\circ}{V}(r) - 2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} rK(r, r). \tag{122}$$

Решения баргмановского типа получаются с функциями Йоста вида [ср. (53)]:

$$F^+(\lambda, k) = \overset{\circ}{F}^+(\lambda, k) \prod_j^N \frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda - \beta_j}, \tag{123}$$

где  $\overset{\circ}{F}^+$  — известная функция Йоста, отвечающая потенциалу  $\overset{\circ}{V}$ . Функции  $F(\lambda, k)$  удовлетворяют требованию:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda, k)}{\overset{\circ}{F}(\lambda, k)} = 1; \tag{124}$$

$$|\arg \lambda| < \pi/2$$

в отличие от случая  $l = \text{const}$ , когда отдельно  $F_l^+(k)$  и  $\overset{\circ}{F}_l^+(k)$  стремились к 1 при  $|k| \rightarrow \infty$ .

Чтобы обеспечить аналитичность  $F(\lambda, k)$  в правой полуплоскости  $\lambda$  и непрерывность при  $\text{Re } \lambda \geq 0$ , следует выбирать  $\text{Re } \beta_i < 0$ , а для вещественности потенциала должно выполняться равенство  $\beta_i = -\alpha_i^*$  [так как  $F^{+*}(\lambda, k) = F^+(\lambda^*, -k)$  и  $F^+(\lambda, k) F^+(-\lambda, -k) = F^+(-\lambda, k) F^+(\lambda, -k) = 4i\lambda k$ ].

В этом случае  $F$  и  $S$  имеют вид:

$$F^+(\lambda, k) = \overset{\circ}{F}^+(\lambda, k) \prod_{j=1}^N \frac{\lambda - \alpha_j}{\lambda + \alpha_j^*}; \quad (125)$$

$$S(\lambda, k) = \overset{\circ}{S}(\lambda, k) \prod_{j=1}^N \frac{\lambda^2 - \alpha_j^{*2}}{\lambda^2 - \alpha_j^2}. \quad (126)$$

Подставляя (125) в (121) при  $n = N = 1$ , получаем [ср. (24), (44)]:

$$Q(r, r') = C_1^{-2} \frac{\overset{\circ}{f}^+(\alpha_1, k, r) \overset{\circ}{f}^+(\alpha_1, k, r')}{rr'} + \frac{\alpha_1^{*2} - \alpha_1^2}{rr' \overset{\circ}{F}^+(\alpha, k)} \begin{cases} \overset{\circ}{\varphi}(\alpha_1, k, r) \overset{\circ}{f}^+(\alpha_1, k, r') & \text{при } r \leq r', \\ \overset{\circ}{f}^+(\alpha_1, k, r) \overset{\circ}{\varphi}(\alpha_1, k, r') & \text{при } r \geq r'. \end{cases} \quad (127)$$

С таким вырожденным ядром находим из (120):

$$K(r, r') = - \left[ \frac{\alpha_1^{*2} - \alpha_1^2}{\overset{\circ}{F}^+(\alpha_1, k)} \frac{\overset{\circ}{\varphi}(\alpha_1, k, r)}{r} + \frac{C_1^{-2} \overset{\circ}{f}^+(\alpha_1, k, r)}{r} \right] \times \times \frac{\overset{\circ}{f}^+(-\alpha_1^*, k, r')}{r'} W^{-1} \left[ \overset{\circ}{f}^+(-\alpha_1^*, k, r), \frac{\overset{\circ}{f}^+(\alpha_1, k, r) C_1^{-2}}{\alpha_1^{*2} - \alpha_1^2} + \frac{\overset{\circ}{\varphi}(\alpha_1, k, r)}{\overset{\circ}{F}^+(\alpha_1, k)} \right]. \quad (128)$$

Из всего семейства потенциалов, отвечающих (128), вещественными являются только те, у которых нормировка  $C_1$  выбрана в виде  $C_1^{-2} = \overset{\circ}{F}^+(-\alpha_1, k) (\alpha_1^* - \alpha_1^2) / 2ik \overset{\circ}{F}^+(\alpha_1, k)$ :

$$V(r) = -2(\alpha_1^{*2} - \alpha_1^2) |\overset{\circ}{f}^+(\alpha_1^*, k, r)|^2 W^{-1} [\overset{\circ}{f}^+(\alpha_1^*, k, r) \overset{\circ}{f}^+(\alpha_1^*, k, r)], \quad (129)$$

так как тогда становится действительным  $K(r, r')$  при  $r = r'$ .

Подробнее эти результаты изложены в работе В. В. Малярова и В. Н. Пивоварчика (Укр. физ. ж., 1982, т. 27, № 7).

Такие потенциалы были получены в [38]. В более ранней работе [39] функция Йоста (125) выбиралась с  $\text{Re } \alpha_i < 0, \text{Re } \beta_i < 0$ , что приводит к потенциалам, зависящим от  $k$  (и от знака при  $k$ ).

Авторы работы [37] получили соотношение полноты (119) без учета возможного обращения функций Йоста в нуль на мнимой оси, а также существования кратных нулей (полюсов Редже  $S$ -матрицы). Обобщение результатов работы [37] можно осуществить по аналогии с Лянце (Мат. сб., 1967, т. 72, с. 114).

**2.2. Уравнения, основанные на полноте решений  $\varphi(\lambda, k, r)$  при  $k = \text{const}$ .** В этом случае кроме непрерывного спектра на мнимой оси имеется бесконечный дискретный ряд собственных состояний с  $\lambda = \lambda_n$  на действительной оси (вместо полюсов Редже в разд. 2.1); причем  $\lambda_n$  не совпадают с физическими значениями  $\lambda = l + 1/2$ , где  $l$  — целые положительные числа.

Доказательство полноты набора  $\varphi(\lambda, k, r)$  при  $k = \text{const}$  дано в статье [36] (см. также [40]). Следуя [36], покажем здесь лишь, как появляется дискретный спектр с  $\lambda = \lambda_n$ , поскольку о непрерывном спектре уже говорилось в начале § 2 для частного случая  $E = 0$ ,  $V = 0$  [см. (115) — (118)].

Наложим на  $\varphi$  однородное граничное условие (помимо регулярности решения  $\varphi$  в нуле) сначала в далекой, но конечной точке  $r = b$ :

$$\varphi(\lambda, k, b) \cos \beta + \varphi'(\lambda, k, b) \sin \beta = 0, \quad (130)$$

где  $\beta$  — произвольное число, а затем перейдем к пределу  $b \rightarrow \infty$ . Учитывая, что асимптотика  $\varphi$  имеет вид:

$$\varphi(\lambda, k, r) \sim r^{-1/2} \sin \left[ kr + \delta(\lambda) - \frac{\pi}{2}(\lambda - 1/2) \right], \quad (131)$$

можно переписать (130):

$$\sin \left[ kb + \beta + \frac{1}{4} \pi - \pi\lambda/2 + \delta(\lambda) \right] = o(1). \quad (130')$$

С увеличением  $\lambda$  аргумент синуса будет последовательно проходить значения, кратные  $\pi$ , отвечающие точкам дискретного спектра (можно представить себе, как растущий с  $\lambda$  центробежный барьер «вытесняет» колеблющуюся часть функции  $\varphi$  вправо через точку  $b$ ). Если увеличить  $b$ , но компенсировать с помощью  $\beta$  изменение  $b$  с точностью до значения, кратного  $2\pi$ , собственные значения останутся на прежнем месте [для тех  $\lambda$ , при которых справедлива (131)]. В пределе  $b \rightarrow \infty$  таких  $\lambda_n$  становится бесконечно много (число собственных значений  $\lambda_n$  связано с числом узлов функций  $\varphi$  слева от  $b$ ). Когда  $E = 0$  и  $V \equiv 0$ , синусоида (130') и (131) выпрямляется ( $k = 0$ ) и дискретный спектр исчезает, а остается только непрерывный, как было показано перед разд. 2.1. Со спектральной функцией (весовым множителем в соотношении полноты), вычисленной в [36], равенство Парсеваля—ортонормировка функций  $\varphi$  по переменной  $\lambda$ —имеет вид\*:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \varphi(\lambda_n, k, r) \varphi(\lambda_n, k, r') + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \varphi(i\tau, k, r) - \frac{\mu(-i\tau)}{\mu(i\tau)} \varphi(-i\tau, k, r) \right] \times \\ & \times \varphi(-i\tau, k, r') \frac{\tau d\tau}{\sin \tau\pi} = r\delta(r-r'). \end{aligned} \quad (132)$$

\* Если  $V(r) \equiv 0$ , соотношение полноты принимает вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} 2n I_{2n}(kr) I_{2n}(kr') + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [I_{i\tau}(kr) + I_{-i\tau}(kr)] I_{i\tau}(kr') \frac{\tau d\tau}{\sin \tau\pi} = r\delta(r-r'), \end{aligned}$$

где  $I$  — функция Бесселя первого рода.

Соответствующее уравнение обратной задачи совпадает с (17) при замене  $dr' \rightarrow dr'/r'$ , только ядро  $Q$  вычисляется по формуле:

$$Q(r, r') = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 I_{\lambda_n}(kr) I_{\lambda_n}(kr') - \sum_{n=1}^{\infty} 2n I_{2n}(kr) I_{2n}(kr') - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\mu(-i\tau)}{\mu(i\tau)} + 1 \right] I_{-1\tau}(kr) I_{-1\tau}(kr') \frac{\tau d\tau}{\sin \pi\tau}. \quad (133)$$

При  $\dot{V} \equiv 0$  ядро  $Q$  зависит от произведения  $rr'$  (ср. с подходом Марченко при  $l = \text{const}$  (22):  $Q$  зависит от  $r + r'$ ).

Сабатье (*J. Math. Phys.*, 1966, v. 7, № 8) и Б. М. Левитан [36] показали, что для потенциалов, допускающих аналитическое продолжение функции  $rV(r)$  во всю комплексную плоскость  $r$ , можно искать  $Q$  в виде чисто дискретного разложения

$$Q(r, r') = \sum_{l=1}^{\infty} C_l^2 I_l(kr) I_l(kr') + \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+1/2}^2 I_{l+1/2}(kr) I_{l+1/2}(kr'), \quad (134)$$

из которого в частном случае  $C_l = 0$  получается ядро метода Ньютона — Сабатье ([10, гл. 20, с. 57], [9, гл. 12]):

$$Q(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+1/2}^2 I_{l+1/2}(kr) I_{l+1/2}(kr'). \quad (135)$$

Соответствующая функция  $K(r, r')$  имеет вид:

$$K(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} C_{l+1/2}^2 \varphi(l+1/2, k, r) I_{l+1/2}(kr'), \quad (136)$$

а  $\varphi(l+1/2, k, r)$  определяются системой бесконечного числа алгебраических уравнений:

$$\varphi(l+1/2, k, r) = I_{l+1/2}(kr) + \sum_{l'}^{\infty} L_{ll'} C_{l'+1/2}^2 \varphi(l'+1/2, k, r), \quad (137)$$

где

$$L_{ll'} = \int_0^r I_{l+1/2}(kr') I_{l'+1/2}(kr') \frac{dr'}{r} = \frac{I_{l+1/2}(kr) I'_{l'+1/2}(kr) - I'_{l+1/2}(kr) I_{l'+1/2}(kr)}{(l'-l)(l'+l+1)}. \quad (138)$$

При конечном числе  $N$  отличных от нуля коэффициентов  $C_{l+1/2}^2$  выражение (137) становится системой  $N$  алгебраических уравнений, которая решается в замкнутом виде.

Если оставить в (135) только один коэффициент  $C_L$  отличным от нуля, то из (137) получим [10, гл. 20, с. 576—577]:

$$\varphi_L(k, r) = krj_L(kr) P^{-1}(r); \quad \varphi_{l \neq L}(k, r) = krj_l(kr) - C_L^2 L_{lL}(r) krj_L(kr) P^{-1}(r); \quad P(r) = 1 + C_L^2 L_{LL}(r). \quad (139)$$

С таким  $\varphi$  находим  $K$ , подставляя (139) в (136) с  $C_{l \neq L} = 0$ , откуда имеем для потенциала:

$$V(r) = -2r^{-1}C_L^2 \frac{d}{dr} \{r^{-1} [kr j_L(kr)]^2 P^{-1}(r)\}. \quad (140)$$

При  $r \rightarrow \infty$ , пользуясь (139), находим:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_l = 0 \text{ при всех четных } l-L, \text{ включая } l=L, \\ \operatorname{tg} \delta_l = \frac{C_l^2}{1 + \frac{1}{2} \pi C_L^2 / (2L+1)} \frac{1}{(l-L)(l+L+1)} \text{ при нечетных } l-L. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Для  $N > 1$  имеем (суммирование по значениям орбитального момента, для которых  $C_l \neq 0$ ):

$$\varphi_l(k, r) = \sum_{l'}^N kr M_{ll'}^{-1} j_{l'}(kr), \text{ где } M_{ll'} = \delta_{ll'} + L_{ll'} C_l^2. \quad (142)$$

и

$$V(r) = -2r^{-1} \frac{d}{dr} \left\{ r^{-1} \sum_l^N (kr)^2 j_l(kr) C_l^2 \sum_{l'}^N M_{ll'}^{-1} j_{l'}(kr) \right\}. \quad (143)$$

Аналогично получаются решения  $\varphi$  и потенциалы  $V$  при  $Q$  более общего вида (134).

**2.3. Новый класс потенциалов.** Когда работа над этим обзором близилась к завершению, Липперхейде и Фиделдей прислали препринт [41], в котором дано еще одно семейство потенциалов, допускающих решение уравнения Шредингера в замкнутом виде. Выражение для  $V(r)$  имеет вид, аналогичный (129), где, однако, вместо решений Йоста  $f^+(\lambda, k, r)$  используются регулярные в нуле функции  $\overset{\circ}{\varphi}(\lambda, k, r)$  [ $\overset{\circ}{V}(r) \equiv 0$ ;  $J_\lambda$  — функция Бесселя]:

$$\overset{\circ}{\varphi}(\lambda, k, r) = \left(\frac{2}{k}\right)^\lambda \Gamma(\lambda+1) V \bar{r} J_\lambda(kr) \xrightarrow{r \rightarrow 0} r^{\lambda+1/2}; \quad (144)$$

$$V(r) = \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{|\overset{\circ}{\varphi}(\alpha, k, r)|^2}{\chi_{\alpha\alpha^*}(r)} \right], \quad (145)$$

где  $\chi_{\lambda\mu}(r) = W[\overset{\circ}{\varphi}(\lambda, k, r), \overset{\circ}{\varphi}(\mu, k, r)] / (\lambda^2 - \mu^2)$  — фиксированное комплексное число.

Регулярное решение  $\varphi$  уравнения Шредингера с потенциалом (145) определяется так:

$$\varphi(\lambda, k, r) = \overset{\circ}{\varphi}(\lambda, k, r) - (\chi_{\lambda\alpha}(r) / \chi_{\alpha\alpha^*}(r)) \overset{\circ}{\varphi}(\alpha^*, k, r). \quad (146)$$

Из асимптотического поведения  $\varphi$  при  $r \rightarrow \infty$  находим  $S$ -функцию рассеяния ( $\sigma_\alpha = \exp[-i\pi(\alpha - 1/2)]$ ):

$$S(\lambda) = \left( \frac{\sigma_{\alpha^*} - \sigma_\alpha}{\alpha^{*2} - \alpha^2} - \frac{\sigma_\lambda - \sigma_\alpha}{\lambda^2 - \alpha^2} \frac{\sigma_{\alpha^*}}{\sigma_\lambda} \right) \left( \frac{\sigma_{\alpha^*} - \sigma_\alpha}{\alpha^{*2} - \alpha^2} - \frac{\sigma_\lambda - \sigma_\alpha}{\lambda^2 - \alpha^2} \right)^{-1}. \quad (147)$$

В общем случае отличного от нуля исходного потенциала  $\overset{\circ}{V}$  и нескольких  $(2N)$  комплексных параметров  $\alpha_m, \beta_n$  ( $m, n = 1, \dots, N$ ) имеем вместо (145) — (147):

$$V(r) = \overset{\circ}{V}(r) - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \lg \det \chi(r) \right], \quad (148)$$

где  $\chi(r) \equiv \|x_{mn}\| \equiv \|\chi_{\alpha_m \beta_n}\|$  — матрица  $N \times N$ ;

$$\varphi(\lambda, k, r) = \overset{\circ}{\varphi}(\lambda, k, r) \frac{\det \|x_{mn} - x_{\lambda m} \overset{\circ}{\varphi}(\beta_n, k, r) / \overset{\circ}{\varphi}(\lambda, k, r)\|}{\det \chi(r)}; \quad (149)$$

$$S(\lambda) = \overset{\circ}{S}(\lambda) \frac{\det \left\| \begin{array}{ccc} \overset{\circ}{\sigma}_{\beta_n} - \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha_m} & \overset{\circ}{\sigma}_{\lambda} - \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha_m} & \overset{\circ}{\sigma}_{\beta_n} \\ \beta_n^2 - \alpha_m^2 & \lambda^2 - \alpha_m^2 & \overset{\circ}{\sigma}_{\lambda} \end{array} \right\|}{\det \|(\overset{\circ}{\sigma}_{\beta_n} - \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha_m}) / (\beta_n^2 - \alpha_m^2) - (\overset{\circ}{\sigma}_{\lambda} - \overset{\circ}{\sigma}_{\alpha_m}) / (\lambda^2 - \alpha_m^2)\|}, \quad (150)$$

где  $\overset{\circ}{\sigma}_{\lambda} = \exp[-i\pi(\lambda - 1/2)] \overset{\circ}{S}(\lambda)$ .

Если  $\overset{\circ}{V}(r)$  — вещественная функция и, кроме того, набор  $\{\beta_n\}$  комплексно сопряжен  $\{\alpha_m\}$ , то и потенциал  $V(r)$  вещественный, а  $S$ -функция унитарна для реальных  $\lambda$ .

В функции рассеяния (147), (150)  $\lambda$  входит в показатели экспонент через  $\sigma_{\lambda}$  и  $\overset{\circ}{\sigma}_{\lambda}$ , так что зависимость  $S$  от  $\lambda$  в отличие от баргмановских моделей не рациональна. Благодаря этому авторам [41] удается избежать сингулярностей в потенциалах, когда по методу (123) — (129) [38] они возникали.

**2.4. Приближенное восстановление потенциалов.** Благодаря явному виду модельных  $S$ -функций рассеяния просто решается проблема их аналитического продолжения из точек с целыми значениями  $l$  в комплексную плоскость  $\lambda$ .

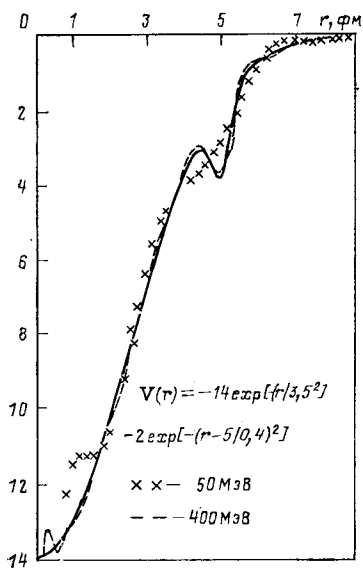
Первые работы по приближенному решению обратной задачи с помощью моделей с фиксированным  $E$  были выполнены одесской группой (В. В. Маляров и др.). Численные расчеты проведены для следующих ядерных систем:  $p - \alpha$  при  $E \approx 23 \div 28$  МэВ [42];  $p - {}^{12}\text{C}$  при  $E \approx 9,5$  МэВ [43 (1978)];  $N - N$  в четных синглетных состояниях при  $60 \leq E \leq 120$  МэВ [44];  $\alpha - \alpha$  без поглощения при  $E \approx 22$  МэВ [45];  $\alpha - \alpha$  с поглощением при  $60 < E < 80$  МэВ [46] (см. замечание в конце разд. 2.1).

Позднее усовершенствованная методика была применена к анализу рассеяния тяжелых ионов:  ${}^{18}\text{O} + {}^{184}\text{W}$  при  $E = 90$  МэВ;  ${}^{40}\text{Ar} + {}^{238}\text{U}$  при  $E = 240$  МэВ [47];  ${}^{16}\text{O} + {}^{28}\text{Si}$  при  $E_{\text{лаб}}$ , равном 50 и 55 МэВ [48].

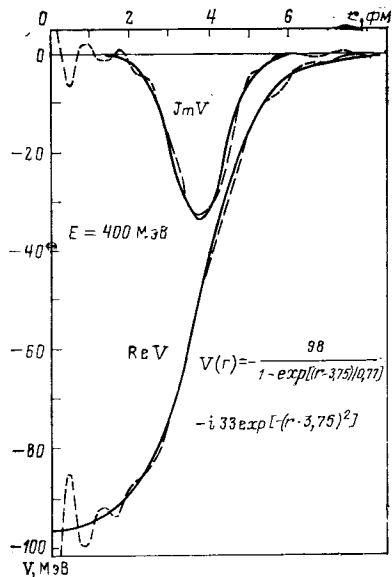
К сожалению, соответствующая процедура восстановления потенциалов не исследовалась еще на устойчивость на примерах известных  $V(r)$ .

Такая работа проводилась для метода Ньютона — Сабатье [49]. Результаты расчетов для нескольких  $V(r)$  опубликованы в [9, гл. 13,





a



б

Рис. 10. Восстановление потенциала  $V(r)$  (а) по 28 фазовым сдвигам и то же для комплексного потенциала (б) [50]

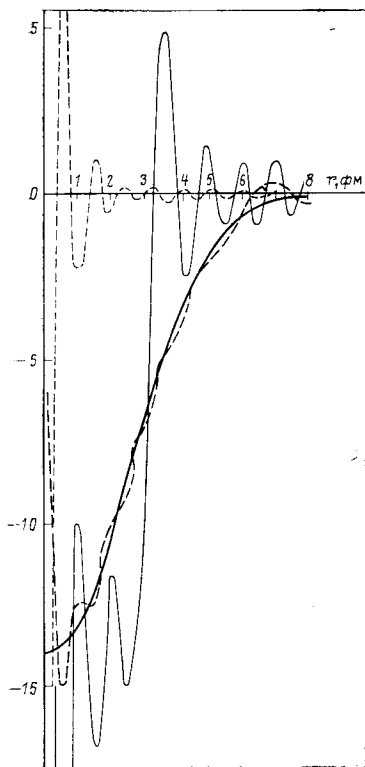


Рис. 11. Зависимость качества восстановления потенциала  $V(r)$  (сплошная жирная линия) по методу Ньютона — Сабатье от числа использованных фаз:  
 $\delta_L \leq 1$  — пунктир;  $\delta_L \leq 10$  — сплошная тонкая линия;  $\delta_L \leq 20$  — штриховая линия

с. 282—283]. Более точные вычисления были выполнены в диссертации К. Кудре [50]. Рисунок 10 демонстрирует качество восстановления довольно тонких деталей поведения вещественного потенциала (а) при разных энергиях и действительной и мнимой частей комплексного  $V$  (б). На рис. 11 показано, как меняется точность расчетов с числом учитываемых парциальных фаз  $\delta_l$  ( $l \leq L$ ). Результаты [50] для прямоугольной ямы подобны представленным на рис. 7. Расчеты по модифицированному методу Ньютона — Сабатье для прямоугольной и вудс-саксоновской ям были выполнены в [51]. Недавно этот метод был использован для восстановления  $\alpha - \alpha$  взаимодействия (Nucl. Phys. A, 1981, v. 366, p. 270).

### 3. МНОГОКАНАЛЬНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Уравнениям для связанных каналов (11) прямой задачи отвечает с и с т е м а интегральных уравнений

$$K_{\alpha\alpha'}(r, r') + Q_{\alpha\alpha'}(r, r') + \sum_{\beta} \int K_{\alpha\beta}(r, t) Q_{\beta\alpha'}(t, r') dt = 0 \quad (151)$$

обратной задачи [матричное обобщение (2)].

Начнем, как обычно, с примера простейшего решения, которое было найдено лишь совсем недавно [52].

**3.1. Ядро  $Q$  с факторизованной зависимостью от координат и индексов каналов.** Прямое матричное обобщение простейшего одноканального ядра (24), когда вклад в  $Q$  дает единственный уровень  $E = E^{\lambda} < 0$ , имеет вид \*:

$$Q_{\alpha\alpha'}(r, r') = \sum_{\beta\beta'}^N \overset{\circ}{\Phi}_{\alpha\beta}(\alpha_{\alpha}^{\lambda}, r) C_{\beta\beta'} \overset{\circ}{\Phi}_{\alpha'\beta'}(\alpha_{\alpha'}^{\lambda}, r'). \quad (152)$$

Вместо одной нормировочной константы  $C^2$  имеем теперь целую матрицу  $N \times N$ , где  $N$  — число каналов. Для матриц существенно, в каком порядке они перемножаются (по каким индексам идет суммирование), поэтому неслучайно  $C$  располагается между функциями  $\overset{\circ}{\Phi}$  в (152). Такой порядок сомножителей получается при выводе уравнений (151) из соотношения полноты для матричных решений  $\overset{\circ}{\Phi}$  [152].

Двойная сумма (по  $\beta, \beta'$ ) в (152) дает  $N^2$  факторизованных членов в  $Q$  вместо одного в (24). С таким ядром уравнения Гельфанда — Левитана сводятся к  $N^2$  алгебраических уравнений, решение которых требует обращения матриц  $N^2 \times N^2$  (при  $N = 10$  — порядка миллиона операций).

\* Элементы диагональной энергетической матрицы  $E \equiv \| E_{\alpha\alpha'} \| \equiv \| E_{\alpha} \delta_{\alpha\alpha'} \|$  жестко связаны между собой  $E_{\alpha} = E_1 - \Delta E_{\alpha}$ ,

где  $\Delta E_{\alpha}$  — значения порогов возбуждения каналов  $\alpha$ .

Симметричная матрица  $C$  может быть разложена в сумму прямых произведений своих собственных векторов [53]  $\Gamma_s = \{\Gamma_{s\alpha}\}$ :

$$C = \sum_s^p \mu_s \Gamma_s \cdot \Gamma_s^T, \text{ где } C \cdot \Gamma_s = \mu_s \Gamma_s, \quad (153)$$

— кратность вырождения уровня  $p \leq N$ , а «т» — значок транспонирования. При отсутствии вырождения нормировочная матрица является произведением векторов (пропадает сумма по  $s$  и факторизуется зависимость от индексов каналов):

$$C_{\alpha\beta} = \Gamma_\alpha \Gamma_\beta. \quad (154)$$

Дело в том, что связанным состояниям отвечают не матричные решения, а собственные векторы  $\Psi = \{\Psi_\alpha\}$ , получающиеся из  $\Phi$  в виде такой линейной комбинации

$$\Psi_\alpha(\kappa_\alpha^\lambda, r) = \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha^\lambda, r) \Gamma_\beta, \quad (155)$$

которая удовлетворяет однородным граничным условиям на обоих концах интервала  $(0, \infty)$ . Вклад же в условие полноты от связанного состояния дает произведение  $\Psi_\alpha(\kappa_\alpha^\lambda, r) \Psi_{\alpha'}^\lambda(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r') = \sum_{\beta\beta'} \Phi_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha^\lambda, r) \Gamma_\beta \Gamma_{\beta'} \Phi_{\alpha'\beta'}(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r')$  с факторизованной нормировочной матрицей  $C_{\beta\beta'} = \Gamma_\beta \Gamma_{\beta'}$ .

Благодаря этому и ядро (152) можно записать в форме, факторизованной одновременно по координатам и индексам каналов:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\alpha'}(r, r') &= \sum_\beta \overset{\circ}{\Phi}_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha^\lambda, r) \Gamma_\beta \sum_{\beta'} \Gamma_{\beta'} \overset{\circ}{\Phi}_{\alpha'\beta'}(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r') = \\ &= \overset{\circ}{\Psi}_\alpha(\kappa_\alpha^\lambda, r) \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha'}(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r'). \end{aligned} \quad (156)$$

С таким ядром система уравнений Гельфанда — Левитана сводится к единственному алгебраическому уравнению по схеме (5) — (10), как в одноканальном случае (!). Ищем  $K_{\alpha\alpha'}(r, r')$  в виде, соответствующем (156):

$$\begin{aligned} K_{\alpha\alpha'}(r, r') &= \sum_\beta \Phi_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha^\lambda, r) \Gamma_\beta \sum_{\beta'} \Gamma_{\beta'} \overset{\circ}{\Phi}_{\alpha'\beta'}(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r') = \\ &= \mathcal{K}_\alpha(r) \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha'}(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r'). \end{aligned} \quad (157)$$

Подставляя (156) и (157) в уравнение Гельфанда — Левитана, получаем для  $\mathcal{K}_\alpha(r)$ :

$$\mathcal{K}_\alpha(r) = -\overset{\circ}{\Psi}_\alpha(\kappa_\alpha^\lambda, r) P^{-1}(r); \quad P(r) = 1 + \sum_\beta \int_0^r \overset{\circ}{\Psi}_\beta^2(\kappa_\beta^\lambda, t) dt. \quad (158)$$

Из (157) и (158) получаем

$$\begin{aligned} K_{\alpha\alpha'}(r, r') &= -\overset{\circ}{\Psi}_\alpha(r) \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha'}(r') P^{-1}(r) = \\ &= -\sum_{\beta\beta'} \overset{\circ}{\Phi}_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha^\lambda, r) \Gamma_\beta \Gamma_{\beta'} \overset{\circ}{\Phi}_{\alpha'\beta'}(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r') P^{-1}(r). \end{aligned} \quad (159)$$

С этими  $K_{\alpha\alpha'}$  находим потенциальную матрицу и  $\Phi_{\alpha\alpha'}$ :

$$V_{\alpha\alpha'}(r) = \dot{V}_{\alpha\alpha'}(r) - 2 \frac{d}{dr} [\dot{\Psi}_{\alpha}(\kappa_{\alpha}^{\lambda}, r) \dot{\Psi}_{\alpha'}(\kappa_{\alpha'}^{\lambda}, r) P^{-1}(r)]; \quad (160)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\alpha'}(k_{\alpha}, r) = & \dot{\Phi}_{\alpha\alpha'}(k_{\alpha}, r) - P^{-1}(r) \sum_{\beta\beta'\gamma} \dot{\Phi}_{\alpha\beta}(\kappa_{\alpha}^{\lambda}, r) \times \\ & \times \Gamma_{\beta}\Gamma_{\beta'} \int_0^r \dot{\Phi}_{\gamma\beta'}(\kappa_{\gamma}^{\lambda}, t) \dot{\Phi}_{\gamma\alpha'}(k_{\gamma}, t) dt. \end{aligned} \quad (161)$$

В случае нулевой исходной потенциальной матрицы  $\dot{V}_{\alpha\alpha'} \equiv 0$  становится диагональным решением  $\dot{\Phi}_{\alpha\alpha'}(r) = \delta_{\alpha\alpha'} \dot{\Phi}_{\alpha\alpha}(r)$  из-за отсутствия связи каналов и в силу граничных условий

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\alpha\beta}(k_{\alpha}, 0) = \Phi_{\alpha\beta}(k_{\alpha}, 0) = 0; \\ \dot{\Phi}'_{\alpha\beta}(k_{\alpha}, 0) = \Phi'_{\alpha\beta}(k_{\alpha}, 0) = \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (162)$$

Это упрощает формулы (152), (156) — (161), снимая в них часть сумм. При  $r \rightarrow \infty$  в сумме в (161) «выживает» лишь один член, отвечающий самому закрытому каналу (с наименьшей  $E_{\alpha}$ ), из-за экспоненциально растущего знаменателя  $P$ . Матрица рассеяния  $\mathbf{S}(\mathbf{k})$  оказывается диагональной с единственным элементом, отличным от 1, в указанном канале. Формула (161) может дать модельные решения и с недиагональной  $\mathbf{S}$ , если обрезать матрицу взаимодействия при некотором  $r = a$  [положить  $V_{\alpha\alpha'}(r > a) = 0$ ] и шить в этой точке  $\Phi_{\alpha\alpha'}$  из (161) со свободными волнами.

Обобщение рассмотренной техники на случай одного антисвязанного состояния получается, если взять  $\mathbf{Q}$  в виде  $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{K}_v, r) \times \times \mathbf{M}\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{K}_v, r')$  и использовать подход Марченко [ $\dot{\mathbf{F}}$  — матрицы решений Йоста,  $\mathbf{K}_v$  — матрица волновых чисел, а  $\mathbf{M}$  факторизуется как  $\mathbf{C}$  в (154)].

**3.2. Вырожденный уровень.** Когда  $p$  связанных состояний имеют одну и ту же энергию, ядро  $Q$  согласно (153) представляется в виде  $p$  факторизованных членов ( $p \leq N$ ; предполагается, что других уровней нет, а непрерывный спектр вклада в  $Q$  не дает):

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\alpha'}(r, r') = \sum_{s=1}^p \mu_s \left\{ \sum_{\beta}^N \dot{\Phi}_{\alpha\beta}(\kappa_{\alpha}^{\lambda}, r) \Gamma_{\beta}^s \sum_{\beta'}^N \Gamma_{\beta'}^s \dot{\Phi}_{\alpha'\beta'}(\kappa_{\alpha'}^{\lambda}, r') \right\} = \\ = \sum_{s=1}^p \dot{\Psi}_{\alpha}^s(\kappa_{\alpha}^{\lambda}, r) \dot{\Psi}_{\alpha'}^s(\kappa_{\alpha'}^{\lambda}, r'), \end{aligned} \quad (163)$$

где  $\dot{\Psi}_{\alpha}^s(\kappa_{\alpha}^{\lambda}, r) = \mu_s^{1/2} \sum_{\beta}^N \dot{\Phi}_{\alpha\beta}(\kappa_{\alpha}^{\lambda}, r) \Gamma_{\beta}^s$ .

С таким ядром уравнение Гельфанда — Левитана сводится к системе  $p$  алгебраических уравнений для вектора-столбца  $\Psi_\alpha(r) = \{\Psi_\alpha^s(r)\}$  с матрицей коэффициентов  $\|P_{ss'}\|$ , не зависящих от  $\alpha$ :

$$P_{ss'}(r) = \delta_{ss'} + \sum_{\alpha}^N \int_0^r \hat{\Psi}_\alpha^s(\kappa_\alpha^\lambda, t) \hat{\Psi}_{\alpha'}^{s'}(\kappa_\alpha^\lambda, t) dt. \quad (164)$$

Для  $\Psi_\alpha^s$  получаем:

$$\Psi_\alpha^s(\kappa_\alpha^\lambda, r) = \sum_{s'}^p \hat{\Psi}_{\alpha'}^{s'}(\kappa_\alpha^\lambda, r) P_{s's}^{-1}(r). \quad (165)$$

Ядру  $Q$  в виде (163) соответствует следующее  $K_{\alpha\alpha'}(r, r')$ :

$$\begin{aligned} K_{\alpha\alpha'}(r, r') &= - \sum_s^p \Psi_\alpha^s(\kappa_\alpha^\lambda, r) \hat{\Psi}_{\alpha'}^s(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r') = \\ &= - \sum_{ss'}^p \hat{\Psi}_{\alpha'}^{s'}(\kappa_\alpha^\lambda, r) P_{s's}^{-1}(r) \hat{\Psi}_{\alpha'}^s(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r'), \end{aligned} \quad (166)$$

откуда для потенциальной матрицы  $V_{\alpha\alpha'}$  имеем:

$$\begin{aligned} V_{\alpha\alpha'}(r) &= \hat{V}_{\alpha\alpha'}(r) - \\ &- 2 \frac{d}{dr} \left[ \sum_{ss'}^p \sum_{\beta\beta'}^N \hat{\Phi}_{\alpha\beta}^s(\kappa_\alpha^\lambda, r) \Gamma_{\beta'}^s P_{s's}^{-1}(r) \Gamma_{\beta'}^s \hat{\Phi}_{\alpha'\beta'}^s(\kappa_{\alpha'}^\lambda, r) \right]. \end{aligned} \quad (167)$$

В случае многих уровней возрастает, по существу, лишь ранг системы алгебраических уравнений, которые требуется решать. Примеры матриц взаимодействия баргмановского типа (при одинаковом  $l$  во все каналах) были даны Коксом [53—55].

**3.3. Преобразование Крама—Крейна—Марченко.** В [3, ч. II, § 2] дано матричное обобщение преобразований, рассмотренных в разд. 1.9.

Пусть матричные функции  $Y_0(x)$  и  $Z_0(x)$  при некотором фиксированном  $E = \mathcal{E}$  удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} -Y_0''(\mathcal{E}, x) + V_0(x) Y_0(\mathcal{E}, x) &= \mathcal{E} Y_0(\mathcal{E}, x) \\ -Z_0''(\mathcal{E}, x) + Z_0(\mathcal{E}, x) V_0(x) &= \mathcal{E} Z_0(\mathcal{E}, x), \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

где во втором уравнении матрица  $V_0$  стоит после решения  $Z_0$ . Пусть также  $W[Z_0(\mathcal{E}, x), Y_0(\mathcal{E}, x)] \equiv 0$  и первообразная  $J_0(x)$  от  $Z_0 Y_0$  ( $J_0' = Z_0 Y_0$ ) имеет обратную при  $a < x < b$ . Тогда преобразование

$$\begin{aligned} \Phi_1(E, x) &= \Phi_0(E, x) - Y_0(\mathcal{E}, x) \times \\ &\times \left[ \int_0^x Z_0(\mathcal{E}, t) Y_0(\mathcal{E}, t) dt \right]^{-1} W[Z_0(\mathcal{E}, x), \Phi_0(E, x)] (\mathcal{E} - E)^{-1} \end{aligned} \quad (169)$$

переводит любое решение  $\Phi_0$  уравнения Шредингера с матрицей  $V_0$  в решение  $Y_1(E, x)$  уравнения с измененной  $V_1(x) = V_0 + \Delta V$ , где

$$\Delta V(x) = -2 \frac{d}{dx} \left[ Y_0(\xi, x) \frac{1}{\int_0^x Z_0(\xi, t) Y_0(\xi, t) dt} Z_0(\xi, x) \right]'. \quad (170)$$

При  $E = E_0$  и  $a < x < b$  решениями уравнений типа (168), но с потенциалом  $V_1 = V_0 + \Delta V$  будут:

$$\begin{aligned} Y_1(\xi, x) &= Y_0(\xi, ) \frac{1}{\int_0^x Z_0(\xi, t) Y_0(\xi, t) dt}; \\ Z_1(\xi, x) &= \frac{1}{\int_0^x Z_0(\xi, t) Y_0(\xi, t) dt} Z_0(\xi, x), \end{aligned} \quad (171)$$

удовлетворяющие соотношению  $W[Z_1(\xi, x), Y_1(\xi, x)] \equiv 0$ .

Для обратного преобразования имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_0(E, x) &= \Phi_1(E, x) - \\ &- Y_1(\xi, x) \frac{1}{\int_0^x Z_1(\xi, t) Y_1(\xi, t) dt} W[Z_1(\xi, t) \Phi_1(E, t)] (\xi - E)^{-1}, \end{aligned} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} Y_0(\xi, x) &= -Y_1(\xi, x) \frac{1}{\int_0^x Z_1(\xi, t) Y_1(\xi, t) dt}; \\ Z_0(\xi, x) &= -\frac{1}{\int_0^x Z_1(\xi, t) Y_1(\xi, t) dt} Z_1(\xi, x). \end{aligned} \quad (173)$$

Интересным частным случаем при вещественном  $E$  и эрмитовой матрице  $V$  является  $Z_0(\xi, x) = \pm Y_0^*(\xi, x)$ ;  $Z_1(\xi, x) = \pm Y_1^*(\xi, x)$ .

**3.4. Приближенное решение многоканальных обратных задач.** Таких работ пока очень мало. Не было еще выполнено расчетов по восстановлению известных матриц  $V_{\alpha\alpha'}(r)$ , что послужило бы ценным вкладом в демонстрацию возможностей баргмановской техники. Фултон и Ньютон [56] первыми нашли решения в замкнутой форме для системы двух связанных уравнений Шредингера с разными  $l$ , отвечающих тензорному и спин-орбитальному взаимодействию. В [57] эти авторы применили полученные потенциальные матрицы для поиска нейтрон-протонных сил.

Двухканальная нуклон-нуклонная матрица  $V_{\alpha\alpha'}$  восстанавливалась также чешской группой [58].

**3.5. Многомерные и многочастичные модели.** Когда удается разделить переменные, многомерная задача сводится к одномерной и одноканальной, рассмотренной уже в § 1.2. Сюда относятся, например, взаимодействие нескольких частиц с помощью *гиперсферически* симметричного многочастичного потенциала (подобно одному телу в сферически симметричном поле) [59].

При несимметричных  $V$  можно разложить волновую функцию системы (о сведении многомерных и многочастичных задач к многоканальным — см. [59, 60]):

$$\Psi(x, \xi) = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x) \Phi_{\alpha}(\xi), \quad (174)$$

где одна переменная  $x$  отделена от набора остальных  $\xi$ . Для каналовых функций  $\Psi_{\alpha}$  получаем уравнения типа (11) с матрицей взаимодействия

$$V_{\alpha\alpha'}(x) = \int \Phi_{\alpha}^*(\xi) V(x, \xi) \Phi_{\alpha'}(\xi) d\xi. \quad (175)$$

Матрица  $V_{\alpha\alpha'}$  может быть восстановлена по данным рассеяния с помощью техники, описанной в § 2. Но не всякой  $V_{\alpha\alpha'}$  соответствует локальная потенциальная энергия системы  $V(x, \xi)$ . В общем случае

$$V_{\alpha\alpha'}(x) = \int \int \Phi_{\alpha}^*(\xi) V(x, \xi, \xi') \Phi_{\alpha'}(\xi') d\xi d\xi', \quad (176)$$

где  $V(x, \xi, \xi')$  — потенциал, нелокальный по  $\xi$ , действующий на волновую функцию как ядро интегрального оператора  $\hat{V}\Psi = \int V(x, \xi, \xi') \Psi(x, \xi') d\xi'$ . По  $V_{\alpha\alpha'}$  находим:

$$V(x, \xi, \xi') = \sum_{\alpha\alpha'} V_{\alpha\alpha'}(x) \Phi_{\alpha}(\xi) \Phi_{\alpha'}^*(\xi'). \quad (177)$$

Построение сил баргмановского типа опирается на выбор  $Q$  в сепарабельном виде. Это предполагает определенную свободу задания (спектральных) параметров рассеяния. В случае же локальных сил на  $S$  накладываются жесткие связи из-за несоответствия числа переменных в  $S$  и  $V$ . Так, для трехмерного  $V(\mathbf{r})$  функция рассеяния  $S(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , где  $|\mathbf{k}| \neq |\mathbf{k}'|$ , зависит от пяти переменных, из которых могут быть составлены лишь три независимые [15] по их числу в  $V(\mathbf{r})$ . Указанные связи препятствуют существованию локальных баргмановских полей.

Нелокальные по части переменных модельные потенциалы для многомерных или многочастичных систем получаются подстановкой всевозможных баргмановских матриц  $V_{\alpha\alpha'}$  типа (160), (167) в (177) с различными базами  $\{\Phi_{\alpha}(\xi)\}$ .

В качестве примера многочастичного баргмановского потенциала (в одномерном случае) приведем «прозрачное» взаимодействие между частицей и квазидейтоном, представляющим собой другую частицу

в бесконечной прямоугольной яме с функциями связанных состояний

$$\Phi_n(x_2) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x_2;$$

$$V(x_1, x_2, x'_2) = -\frac{4}{a} \sum_{nn'} \sin \frac{n\pi}{a} x_2 \sin \frac{n'\pi}{a} x'_2 \frac{d}{dx_1} \times$$

$$\times \left\{ \exp[-(\kappa_n + \kappa_{n'}) x_1] \Gamma_n \Gamma_{n'} \left[ 1 + \sum_m \exp(-2\kappa_m x_1) \Gamma_m^2 / 2\kappa_m \right]^{-1} \right\}.$$

(178)

К указанному семейству относятся также трехмерные потенциалы Мозеса [61].

#### 4. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ЛИТЕРАТУРЕ

Отдельные вопросы, связанные с обсуждаемой темой, рассматривались уже в монографиях и обзорной литературе. Отметим здесь самые удачные работы, а затем перейдем к оригинальным статьям.

Пионерский обзор [13] Баргмана вышел свыше тридцати лет назад, и с тех пор не подводились сколько-нибудь полно итоги развития данного направления.

В первой книге по обратной задаче рассеяния [3, гл. 6, § 1,2] изложен формализм преобразований Крама — Крейна и разобраны интересные точно решаемые примеры с нарушением ограничений, накладываемых в теории на данные рассеяния (гл. 5, § 7). В обзоре Л. Д. Фаддеева [25] (английский перевод которого вышел в самом первом номере *J. Math. Phys*) можно прочесть о добавках  $\Delta V$  к  $\check{V}$ , возникающих при умножении функций Йоста или  $S$  на рациональную функцию от  $k$  (§ 13) и о преобразованиях уравнений типа Штурма — Лиувилля (§ 15). Второй обзор Фаддеева [15] содержит подробное изложение теории одномерного движения на всей оси (гл. 1) с примерами явных решений (гл. 1, § 6).

В монографии Ньютона [10] есть специальный § 7 (гл. 14), а у Шадана и Сабатье [9] даже два: § 3 (гл. 4) и § 1 (гл. 6), которые так и называются «потенциалы Баргмана». У них же как создателей метода Ньютона — Сабатье полезно посмотреть соответственно § 3 гл. 20 и § 4 гл. 11, посвященные восстановлению  $V(r)$  при фиксированной энергии по набору фазовых сдвигов  $\{\delta_l\}$ .

Комментарии к оригинальным статьям естественно начать с работы Баргмана [12], где в качестве примера фазово-эквивалентных взаимодействий указано семейство потенциалов Эккарта, так что первые потенциалы баргмановского типа  $V^B$  были найдены намного раньше другим автором [62], только тогда не было обращено внимание на их связь с обратной задачей.

Йост и Коон [63] обобщили технику [12, 13] на случай  $\dot{V} \neq 0$ , а частный пример кулоновского  $\check{V}$  при  $l = \text{const}$  рассмотрен Тейсом



[64], который ввел также комплексные  $V^B$ . Блажек [65] получил  $V^B$  из уравнений Гельфанда — Левитана, а Поплавский [66] — из уравнений Крейна.

Обратная задача для комплексных потенциалов рассмотрена Лянце (Мат. сб., 1967, т. 72, с. 114). Соответствующие функции Йоста могут иметь кратные нули и нули на вещественной оси (так называемые спектральные особенности). При этом полный набор состояний включает в себя помимо собственных еще и присоединенные функции. Техника построения потенциалов баргмановского типа может быть распространена и на этот случай. Первые многоканальные матрицы  $V_{\alpha\alpha}^B$  для спин-орбитальных и тензорных сил найдены в [56] (случай одинаковых энергий и разных  $l$  в связанных каналах).

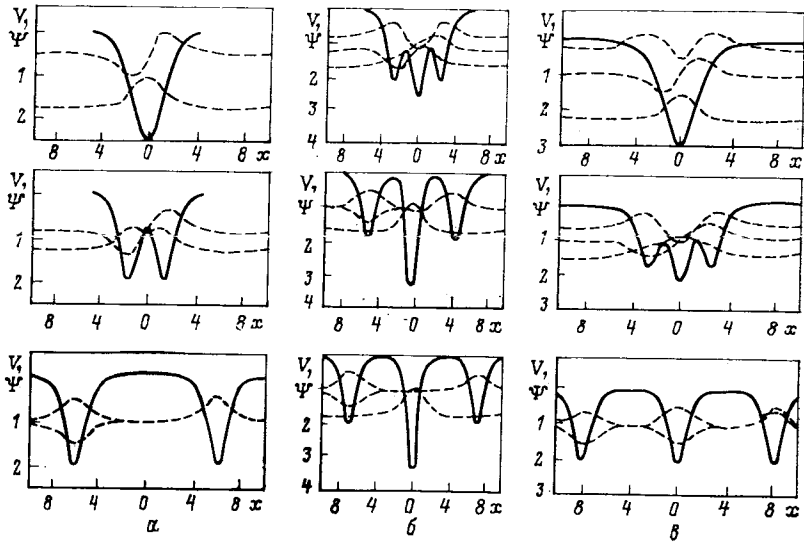


Рис. 12. Эволюция формы прозрачного потенциала при сближении: а — двух имеющихся в яме уровней; б — двух из трех; в — всех трех

Трудности построения  $V_{\alpha\alpha}^B$  общего вида обсуждались Коксом и Гарсия [55]. Формализм многомерной обратной задачи с нелокальными по углам силами развит Кеем и Мозесом [67], а соответствующие точно решаемые примеры приведены в [61] (эти же авторы получали и одномерные  $V^B$  [68, 69]). Восстановление сил конечного радиуса действия при фиксированной энергии рассматривалось в [40, 70]. В отличие от случая  $l = \text{const}$  переход к функциям на конечном интервале  $0 \leq r \leq a$  не приводит при  $E = \text{const}$  к дискретному спектру по  $\lambda$ . Действительно, в начале разд. 2 было показано, что преобразование ( $r \rightarrow \rho$ ) переводит  $[0, a]$  в полуось  $-\infty < \rho \leq \ln a$ , на которой полный набор образует континуум функций (ситуация, специфичная для поля, допускающего «падение на центр»). Однако спектр стано-

вится счетным, если исключить точку  $r = 0$ , вводя, например, твердую отталкивающую сердцевину [ $V(r) = \infty$  при  $r \leq r_0$ ] и однородные граничные условия в  $r = r_0$  и  $r = a$ ; таким образом можно ввести аналог  $R$ -матричной теории рассеяния и при  $E = \text{const}$  (с соответствующими баргмановскими решениями).

Эволюция формы безотражательного потенциала при сближении в нем уровней исследовалась в [71]. На рис. 12 показано, как в этом случае потенциал распадается на отдельные ямы, удаляющиеся друг от друга.

Исследование на модели предельного перехода от квантовой обратной задачи к ее квазиклассическому приближению проводилось в [38]. Обещающим представляется поиск и других модельных примеров, поясняющих качественные особенности поведения квантовых систем. Потенциал, не дающий рассеяния на полуоси, найден Мозесом и Туаном [72].

Преобразования Крама — Крейна ([23—24], см. разд. 1.9) можно обобщить на случай  $E = \text{const}$ . При этом формулам (104) — (106) соответствуют:

$$y_1(\lambda, r) = \frac{rW[y_0(\lambda, r), y_0(\lambda_1, r)]}{y_0(\lambda_1, r)(\lambda^2 - \lambda_1^2)}; \Delta V = \\ = -\frac{2}{r} \left[ \frac{ry'_0(\lambda_1, r)}{y_0(\lambda_1, r)} \right]'; y_1(\lambda_1, r) = \frac{r}{y_0(\lambda_1, r)}.$$

Пример зависящего от энергии баргмановского потенциала дан в [M. Jaulent J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 1351]. Представляется возможным построение и более общих примеров.

Для релятивистских уравнений Дирака и Бете — Солпитера решения баргмановского типа рассматривались в [73, 74], а для квазипотенциала — в [31] (1979 г.). О баргмановских потенциалах как решениях нелинейных уравнений — см. [75].

Укажем еще для справок литературу (помимо [1]) по точным решениям, полученным в прямой задаче.

В [76, 77] дается обзор результатов по потенциалам, найденным преобразованием гипергеометрических уравнений, и развитие этой методики (см. также [78]). Исходя из модифицированного уравнения Матье, точные шредингеровские решения были получены в [79, 80] [например, для  $V(r) \sim \pm 1/r^4$ ].

А. Л. Зубаревым написана монография [81] о нелокальных сепарабельных потенциалах, дающих точно решаемые модели, не рассмотренные в нашем обзоре (см. также [9, гл. 8]). Для них вырождаются ядра интегральных уравнений *прямой* задачи (Лишмана — Швингера), которое не следует путать с вырождением ядер  $Q$ , дающих в одномерном случае локальные силы. О многочастичных решениях квантовых задач см. [82].

В заключение, выражаем благодарность И. В. Амирханову, Е. Бангу, В. В. Малярову, В. Н. Мельникову, П. Ю. Никишову за полезные дискуссии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Т. 1, 2. Пер. с англ. М., Мир, 1974.
2. Гельфанд И. М., Левитан Б. М.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1951, № 2, с. 309—360.
3. Агранович Э. С., Марченко В. А. Обратная задача рассеяния. Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1960.
4. Захарьев Б. Н. и др.— ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 2, с. 290—329.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979.
6. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С.— УФН, 1970, т. 102, № 3, с. 345.
7. Thaker H. B., Quigg C., Rosner J. L.— Phys. Rev. D., 1978, v. 18, № 1, p. 274; 1980, v. 21, p. 234.
8. Shonefeld J. F. e.a.— Ann. Phys., 1980, v. 128, № 1, p. 1.
9. Шадан К., Сабатье П. Обратная задача в квантовой теории рассеяния. Пер. с англ. М., Мир, 1980.
10. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ. М., Мир, 1969.
11. Eckart C.— Phys. Rev., 1930, v. 35, № 11, p. 1303—1309.
12. Bargmann V.— Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 301.
13. Bargmann V.— Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 488.
14. Береги П., Захарьев Б. Н., Ниязгулов С. А.— ЭЧАЯ, 1973, т. 4, вып. 2, с. 512.
15. Фаддеев Л. Д. Современные проблемы математики. Т. 3, М., ВИНТИ, 1974, с. 93—180.
16. Захарьев Б. Н., Плеханов Е. Б., Сузько А. А.— Изв. АН СССР, сер. физ., 1980, т. 44, № 5, с. 949; Препринт ОИЯИ Е4-12913, Дубна, 1979.
17. Zakhariev B. N. — Nucleonika, 1976, v. 21, № 6, p. 709.
18. Марченко В. А. Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова думка, 1977.
19. Левитан Б. М., Гасымов М. Г.— УМН, 1964, т. 19, вып. 2, 3, гл. 2, § 1.
20. Case K. M., Cas M.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 594.
21. Case K. M.— Ibid., 1973, v. 14, p. 916.
22. Захарьев Б. Н., Ниязгулов С. А., Сузько А. А.— Ядерная физика, 1974, т. 20, с. 1273.
23. Crum M. M. Quart. J. Math. Oxford (2), 1955, v. 6, № 2, p. 121.
24. Крейн М. Г.— Докл. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 5, с. 970.
25. Фаддеев Л. Д.— УМН, 1959, т. 14, вып. 4 (88), с. 57.
26. Маляров В. В., Попушой М. Н.— Ядерная физика, 1973, т. 18, вып. 5, с. 1140.
27. Benn J., Scharf G.— Helv. Phys. Acta, 1967, v. 40, Fasc. 3, p. 271—282.
28. Benn J., Scharf G.— Nucl. Phys., 1969, v. A134, p. 481—504.
29. Поплавский И. В., Попушой М. Н., Хитчке Л. ВИНТИ; Депонир. публикац. 1978.
30. Визнер Я. и пр. Препринт политехнического института ИВТ-2/74М, Прага, 1974.
31. Маляров В. В., Поплавский И. В., Попушой М. Н.— Ядерная физика, 1975, т. 21, вып. 5, с. 987; 1979, т. 30, вып. 10, с. 1126.
32. Bargilou V.— J. Math. Phys., 1974, v. 15, № 4, p. 429.
33. Захарьев Б. Н. и др. Препринт ОИЯИ, Р4-8640, Дубна, 1975.
34. McWilliams B. Препринт Питсбургского университета СОО 3066-122, 1979.
35. Langer R. E.— Phys. Rev., 1937, v. 51, p. 669.
36. Левитан Б. М.— В кн.: Задачи механики и мат. физики. М., Наука, 1976, с. 166.
37. Burdet G., Giffon M., Predazzi E.— Nuovo cimento, 1965, v. 36, p. 1337.
38. Lipperheide R., Fiedeldey H.— Z. Phys., 1978, Bd A286, S. 45—56.
39. Маляров В. В., Поплавский И. В., Попушой М. Н.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 2, с. 432.
40. Loeffel Ann. Inst. Henri Poincare Sect A; Phys. Theor., 1968, v. 8, № 4, p. 339.

41. Lipperheide R., Fiedeldey H.— Z. Phys., 1981, Bd A301, S. 81.
42. Маляров В. В. и др.— Ядерная физика, 1978, т. 37, вып. 4, 1128.
43. Маляров В. В. и др.— Укр. физ. журн., 1978, т. 23, № 9, 1505; 1981, т. 26, № 8, 1262.
44. Маляров В. В. и др.— Ядерная физика, 1977, т. 25, вып. 1, с. 72.
45. Маляров В. В. и др.— Там же, 1975, т. 22, вып. 4, с. 860; вып. 5 с. 987.
46. Маляров В. В. и др.— ЯФ, 1972, т. 16, вып. 4, с. 873.
47. Frobrich P. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, № 16, p. 1147.
48. Lipperheide R. e.a.— Phys. Lett., 1979, v. 82B, № 1, p. 39.
49. Sabatier P. C., Quyen Van Phy F.— Phys. Rev., 1971, v. D4, p. 127.
50. Coudray C. Quelques aspects du problème inverse de la diffusion à énergie fixée. ORSAY, № 2160, 1979; Lett. Nuovo cimento, 1977, v. 19, p. 319.
51. Munchow M., Scheid W.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 1299.
52. Захарьев Б. Н., Плеханов Е. Б., Сузько А. А. Препринт ОИЯИ, P2-80-588, Дубна, 1980; Препринт ОИЯИ, E4-82-525, 1982.
53. Cox J. R.— Ann. Phys., 1966, v. 39, p. 216—236.
54. Cox J. R.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 1065.
55. Cox J. R., Garcia H. R.— Math Phys., 1975, v. 16, p. 1402—1410.
56. Fulton T., Newton R. G.— Nuovo Cimento, 1956, v. 3, p. 677.
57. Newton R. G., Fulton T.— Phys. Rev., 1957, v. 107, p. 1103.
58. Визнер Я. и др. Сообщения Политехнического института. Прага, ИВТ-2/74М, 1974; 2/75-М, 1975; ЭЧАЯ, 1978, вып. 3, с. 764.
59. Жигунов В. П., Захарьев Б. Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. М., Атомиздат, 1974.
60. Захарьев Б. Н., Сузько А. А.— ЯФ, 1975, т. 22, вып. 2, с. 289.
61. Moses H. E.— In: Lecture Notes in Physics, 1979, v. 130, p. 260.
62. Eckart C.— Phys. Rev., 1930, v. 35, p. 1303.
63. Jost R., Kohn W.— Kgl. Dan. Vid. Selsk. mat.-fys.medd., 1953, v. 27, № 9, p. 3.
64. Theis W. R.— Z. Naturforsch., 1956, Bd IIa, H.11, S. 889.
65. Blažek M.— Czech. J. Phys., 1962, v. B12, p. 249, 258; Mat. Fys. Casopis SAV, 1965, v. 15, № 4, p. 317.
66. Поплавский П. В.— Изв. вуз, сер. физ., 1968, № 8.
67. Kay I., Moses H. E.— Nuovo cimento, 1961, v. 22, № 4, p. 689.
68. Kay I., Moses H. E.— J. Appl. Phys., 1956, v. 27, p. 1503.
69. Kay I.— Comm. Pure Appl. Math., 1960, v. 13, № 3, p. 371.
70. Sergeant P., Coudray C.— Ann. Inst. Henri Poincare, 1978, v. 29, № 2, p. 179.
71. Kwong W. e.a.— Amer. J. Phys., 1980, v. 48, № 11, p. 926.
72. Moses H. E., Tuan S. F.— Nuovo cimento, 1959, v. 13, p. 197.
73. Адамян М. Н.— ТМФ, 1975, т. 22, № 2, с. 236.
74. Blažek M.— Acta Phys. Austriaca, 1968, v. 28, p. 267.
75. Захаров В. Е. и др. Теория солитонов. М., Наука, 1980.
76. Натанзон Г. А. Вестн. ЛГУ, 1971, № 10, вып. 2, с. 22.
77. Натанзон Г. А.— ТМФ, 1979, т. 38, № 2, с. 219.
78. Infeld L.— Rev. Mod. Phys., 1951, v. 23, p. 21. русск. перевод «Математика», т. 2. М., Изд-во иностр. литературы, 1960.
79. Spector R. M.— J. Math. Phys., 1964, v. 5, № 9, p. 1185.
80. Aly H. H., Spector R. M.— Nuovo cimento, 1965, v. 38, p. 149.
81. Зубарев А. Л.— Вариационный принцип Швингера в квантовой механике. М., Энергоиздат, 1981.
82. Calogero F., Marchioro C.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, № 2, p. 182; 1974, v. 15, № 9, p. 1425.
83. Abraham P. V., Moses H. E.— Phys. Rev., 1980, v. A22, № 1, p. 1333.
84. Адамян М. Н.— ТМФ, 1981, т. 48, № 1, с. 70.
85. Grosse H., Martin A.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 148, p. 413; Lect. Notes Phys., 1979, v. 116, p. 68.