

АНАЛИЗ ЖЕСТКИХ ИНКЛЮЗИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

А. В. Радюшкин

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

На примере анализа двух простейших инклюзивных процессов: e^+e^- -аннигиляции в адроны и глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния, излагается один из подходов к исследованию жестких процессов в КХД, основанный на систематическом использовании анализа асимптотик фейнмановских диаграмм в α -представлении.

Concentrating on the analysis of the two simplest inclusive processes: e^+e^- -annihilation into hadrons and deep inelastic lepton-hadron scattering, we describe an approach to the investigation of hard processes in QCD, based on a systematic use of the α -representation analysis of the Feynman diagrams.

ВВЕДЕНИЕ

Жесткие процессы, т. е. процессы рассеяния, в которых велики не только энергия сталкивающихся частиц, но и импульс, который передан одной или нескольким частицам, детектируемым в конечном состоянии,— основной поставщик информации о строении сильно-взаимодействующих элементарных частиц (адронов) и их взаимодействиях на расстояниях, малых по сравнению с адронным радиусом. Однако рождение частицы с большим (по сравнению с характерным адронным масштабом порядка 1 ГэВ) переданным импульсом — сравнительно редкое событие, сопровождаемое в большинстве случаев рождением большого числа частиц с малым переданным импульсом за счет периферических взаимодействий адронов. В такой ситуации очень удобно инклюзивное описание [1], когда в конечном состоянии выделяется несколько частиц (обычно не более двух) с большим переданным импульсом, а остальные частицы (их совокупность обычно обозначают X) не детектируются; таким образом, по их характеристикам автоматически производится суммирование.

Среди инклюзивных процессов важное место занимают глубоконеупругие лептон-адронные процессы, такие, как $e^+e^- \rightarrow X$ (e^+e^- -аннигиляция в адроны); $eh \rightarrow eX$, $\mu h \rightarrow \mu X$, $\nu h \rightarrow \nu X$ (глубоконеупругое e^- , μ^- и ν -рассеяние), $h_1 h_2 \rightarrow \mu^+ \mu^- X$, $h_1 h_2 \rightarrow e^+ e^- X$ (рождение

массивной лептонной пары), $e^+e^- \rightarrow hX$ и др. По современным представлениям лептоны являются точечными частицами, и с их помощью в названных выше процессах производится как бы зондирование внутренней структуры протяженных частиц — адронов. Еще в начале 60-х годов было указано на возможность точечноподобного поведения структурных функций глубоконеупругого рассеяния [2]. Экспериментальное обнаружение такого поведения (масштабной инвариантности [3] или скейлинга [4]) привело к созданию партонной модели [5] (см. также [6]), в которой адроны рассматриваются как системы, состоящие из точечноподобных объектов — партонов. Было установлено также, что асимптотика структурных функций глубоконеупругого рассеяния (ГНР) однозначно связана с сингулярностями коммутаторов соответствующих лептонных токов на световом конусе [7]. Детальный анализ сингулярностей на световом конусе, проведенный в [8], показал, что масштабное (или автомодельное [3]) поведение структурных функций ГНР не противоречит основным принципам квантовой теории поля. Однако попытки получить масштабное поведение структурных функций ГНР в рамках конкретных ренормируемых теоретико-полевых моделей не увенчались успехом: было установлено, в частности, что в высших порядках теории возмущений (ТВ) для таких моделей характерно логарифмическое нарушение скейлинга [9]. Были разработаны методы суммирования логарифмических вкладов, основанные на различных подходах к анализу асимптотики фейнмановских диаграмм, и показано, что в зависимости от поведения эффективной константы связи при больших передачах импульса в конечном итоге возможно логарифмическое и степенное отклонение от масштабного поведения [10, 11]. Затем был развит подход [12], позволяющий легко воспроизводить результаты, полученные ранее прямым суммированием, а также получать новые результаты в ситуации, когда методы прямого суммирования малоэффективны. В подходе [12] широко используются такие мощные методы, как операторные разложения [13, 14], ренормализационная группа [15—19] и дисперсионные соотношения [20].

Обнаружение асимптотической свободы в неабелевых калибровочных теориях [21] открыло путь к современному пониманию природы скейлинга в ГНР и привело к созданию квантовой хромодинамики (КХД) [22], которая считается наиболее вероятным претендентом на роль фундаментальной теории сильных взаимодействий. Краеугольным камнем КХД является гипотеза о том, что адроны построены из кварков [23], имеющих дополнительную степень свободы — цвет [24—26] (см. также обзор [27]) и взаимодействующих друг с другом через неабелево калибровочное поле глюонов*. Предполагается (но пока не доказано), что кварки, глюоны и другие цветные объекты не

* В КХД цветовая симметрия считается точной. Вследствие этого кварки в КХД имеют дробный электрический заряд, зависящий от типа кварка (u, d, s, c, b, \dots), но не зависящий от его цвета. В последнее время интенсивно обсуждаются целозарядные модели со спонтанно нарушенной цветовой симмет-

существуют в свободном состоянии, а адроны представляют собой бесцветные связанные состояния.

Малость эффективной константы связи $\alpha_s(Q)$ в КХД при больших Q позволяет надеяться на применимость ТВ для вычисления характеристик, связанных с взаимодействиями на малых расстояниях. Однако в любом процессе рассеяния будем иметь дело не только с малыми, но и с большими расстояниями, т. е. кроме больших Q^2 всегда имеются также и малые импульсные инварианты p^2 (например, массы адронов, средние виртуальности кварков, глюонов и т. п.). В теории возмущений это проявляется при возникновении больших (при $Q^2 \rightarrow \infty$) логарифмических вкладов типа $(g^2 \ln Q^2/p^2)^N$, присутствие которых свидетельствует о бессмысленности прямолинейного применения ТВ. Однако для форм-факторов ГНР существование операторных разложений на световом конусе гарантирует возможность разделения вкладов больших ($\sim 1/p$) и малых ($\sim 1/Q$) расстояний:

$$W(Q^2, p^2) = w(Q^2/\mu^2, \alpha_s(\mu)) \otimes f(\mu^2, p^2) \{1 + O(1/Q^2)\}. \quad (1)$$

Масштаб $1/\mu$ в формуле (1) имеет смысл границы между большими и малыми расстояниями. Выбирая его в области, где эффективная константа связи $\alpha_s(\mu)$ мала, можно вычислить $w(Q^2/\mu^2, \alpha_s(\mu))$ по теории возмущений. Функции $f(\mu^2, p^2)$ аккумулируют информацию о динамике на больших расстояниях, и поэтому функции $f(\mu^2, p^2)$ не могут быть вычислены в КХД по теории возмущений. Следовательно, и сама функция $W(Q^2, p^2)$ пока не может быть вычислена в КХД, но по теории возмущения можно найти закон изменения $W(Q^2, p^2)$ с ростом Q^2 .

Методы, основанные на операторных разложениях, не применимы, однако, к более сложным жестким процессам, таким, например, как $h_1 h_2 \rightarrow \mu^+ \mu^- X$. Тем не менее исследование этого процесса в рамках ряда простых теоретико-полевых моделей [29, 30] показало, что и в этом случае в асимптотике имеет место факторизация вкладов больших и малых расстояний. Предположение о справедливости такой факторизации в КХД было подкреплено сначала результатами вычислений низших радиационных поправок [30, 31], а затем доказано во всех порядках ТВ [32—36]. В настоящее время факторизация вкладов малых и больших расстояний является краеугольным камнем любых расчетов по теории возмущений в КХД.

В настоящем обзоре на примере анализа простейших характеристик двух процессов — полного сечения e^+e^- -аннигиляции в адроны и структурных функций глубоконеупругого лептон-адронного рассеяния — излагается один из подходов к факторизации, развитый в [33] (более элементарное изложение дано в [32, 37]). Поскольку к анализу этих характеристик применим и подход, основанный на опера-

рий [28]. Излагаемые в настоящем обзоре методы анализа жестких процессов применимы и в таких моделях, однако ограничим круг рассматриваемых проблем квантовой хромодинамикой.

торных разложениях, мы имеем возможность сравнить эти два подхода, в частности дать диаграммную интерпретацию операторных разложений.

В обзоре обсуждается также привлекающая к себе в последнее время значительное внимание (см. [34—45]) проблема неоднозначности результатов расчетов по теории возмущений в КХД и связь между теоретико-полевыми подходами и партонной моделью. Отдельный раздел посвящен анализу специфики факторизации вкладов малых и больших расстояний в неабелевых калибровочных теориях, к которым относится КХД.

Сконцентрировав усилия на изложении принципиальных моментов анализа жестких процессов в КХД, мы не имели возможности уделить внимание более практическим аспектам применения КХД к анализу конкретных процессов (технике вычисления фейнмановских диаграмм, сравнению предсказаний КХД с экспериментальными данными и т. п.). Интересующимся этими вопросами можно порекомендовать обзоры [46—49].

Как уже подчеркивалось, методы, основанные на факторизации вкладов больших и малых расстояний, особенно ценны тем, что они работают и в тех случаях, когда операторные разложения неприменимы. Соответствующие процессы (такие, как $h_1 h_2 \rightarrow \mu^+ \mu^- X$, $h_1 h_2 \rightarrow h_3 X$ и др.) являются сейчас объектом интенсивного теоретического исследования (см., например, [50—52]), и многие важные результаты (большие радиационные поправки в процессе $h_1 h_2 \rightarrow h_3 X$ [52], несокращение некоторых инфракрасных вкладов в процессе $h_1 h_2 \rightarrow \mu^+ \mu^- X$ [53] и др.) были получены в самое последнее время. Исходя из этого, мы считаем, что результаты анализа таких процессов заслуживают отдельного изложения.

1. АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ

α -Представление. В основе нашего подхода к жестким процессам в КХД лежит анализ асимптотик диаграмм теории возмущений, дающих вклад в изучаемые характеристики интересующих нас процессов. Существует несколько методов анализа асимптотик фейнмановских диаграмм [10, 55—58]. С нашей точки зрения наиболее удобно для анализа общей структуры вкладов параметрическое представление [59, 60], основанное на следующей простой формуле:

$$\frac{1}{m_\sigma^2 - k^2 - i\epsilon} = i \int_0^\infty d\alpha_\sigma \exp\{i\alpha_\sigma (k^2 - m_\sigma^2 + i\epsilon)\}. \quad (2)$$

Применяя ее ко всем пропагаторам диаграммы и вычисляя стандартным образом возникающие в результате гауссовы интегралы

по k (см., например, [17]), получаем для исследуемого вклада $T(p_1, \dots, p_n; m_\sigma)$ искомое α -представление:

$$T(p_1, \dots, p_n; m_\sigma) = \frac{P(\text{к.с.})}{(4\pi)^{zd/4}} \int_0^\infty \prod_\sigma d\alpha_\sigma D^{-dI^2}(\alpha) G(\alpha_\sigma; p_1, \dots, p_n; m_\sigma) \times \exp \left\{ iQ(\alpha; p_1, \dots, p_n) / D(\alpha) - i \sum_\sigma \alpha_\sigma (m_\sigma^2 - i\varepsilon) \right\}, \quad (3)$$

где d — число измерений пространства—времени; p_1, \dots, p_n — импульсы, соответствующие внешним линиям диаграммы; m_σ — масса частицы, соответствующей линии σ ; $P(\text{к.с.})$ — произведение констант связи (подразумевается, что амплитуда T имеет «естественную» нормировку, в которой древесные диаграммы не имеют множителей типа l или $2l$); D, Q, G — функции, однозначно связанные со структурой рассматриваемой диаграммы. В частности, $D(\alpha)$ дается суммой

$$D(\alpha) = \sum_{X_i} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_z} \quad (4)$$

по всевозможным наборам $X_i \equiv \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_z}\}$, обладающим тем свойством, что после удаления линий $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_z}$ из исходной диаграммы \mathcal{G} последняя, оставаясь связной, превращается в некоторую древесную диаграмму \mathcal{G}_i (напомним, что древесной называется диаграмма, не содержащая замкнутых циклов). Очевидно, число линий в каждом таком наборе X_i равно z — числу независимых циклов диаграммы \mathcal{G} . Функция $Q(\alpha; \{p_k\})$ имеет сходную, но более сложную структуру

$$Q(\alpha; \{p_k\}) = \sum_{Y_j} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_{z+1}} (p_{k_1} + \dots + p_{k_l})^2, \quad (5)$$

где $Y_j \equiv \{\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_{z+1}}\}$ — некоторый набор линий $\{\sigma_{j_\nu}\}$, обладающий тем свойством, что после удаления Y_j из исходной диаграммы \mathcal{G} она превращается в диаграмму \mathcal{G}_j , состоящую из двух древесных связных компонент, в одну из которых входят внешние импульсы p_{k_1}, \dots, p_{k_l} (заметим, что в силу закона сохранения импульса $(p_{k_1} + \dots + p_{k_l})^2 = (p_{k_{l+1}} + \dots + p_{k_n})^2$, где $p_{k_{l+1}}, \dots, p_{k_n}$ — импульсы, входящие во вторую компоненту, и поэтому формула (5) задает функцию $Q(\alpha; \{p\})$ однозначно). Правила (4), (5) были установлены в [60—66]. Аналогичные правила справедливы и для предэкспоненциального фактора $G(\alpha; \{p\}; m)$, обусловленного числителями пропагаторов и вершинными множителями типа γ_μ, k_μ (см. [67, 68])* . Отметим, что после вычисления шпуров $G(\alpha; \{p\}; m)$ представляет собой полином по $(p_i p_j)$, m^2 с коэффициентами, зависящими от α -параметров.

* Подробное изложение техники α -представления можно найти в [17, 69].

Ультрафиолетовые (УФ) расходимости. Интегралы в (3) по некоторым из областей α -пространства, в которых функция $D(\alpha)$ обращается в нуль, могут на самом деле расходиться, что соответствует хорошо известным УФ-расходимостям. Для их устранения необходимо предварительно регуляризовать исходное выражение. При анализе в α -представлении наиболее удобна размерная регуляризация [70], основанная на переходе к $d = 4 - 2\epsilon$:

$$d^4 k \rightarrow d^{4-2\epsilon} k (\mu_R^2)^\epsilon, \tag{6}$$

где μ_R — некоторая константа, имеющая размерность массы. В результате замены (6) подынтегральное выражение для регуляризованной амплитуды T_ϵ приобретает согласно (3) дополнительный фактор

$$(4\pi\mu_R^2)^{2\epsilon} D^\epsilon(\alpha), \tag{7}$$

а логарифмические расходимости превращаются в полюса по ϵ , которые удаляются с помощью R -операции [71] (см. также [17, 69, 72]), т. е. введением соответствующих контрчленов в исходный лагранжиан.

«Физический» смысл α -параметров. Согласно основной формуле (2) параметр α_σ фурье-сопряжен виртуальности линии σ . В этом смысле малые α_σ соответствуют большой виртуальности $p^2 - m_\sigma^2 \sim 1/\alpha_\sigma$, а предел $\alpha_\sigma \rightarrow \infty$ — нулевой виртуальности, т. е. ситуации, когда частица находится на массовой поверхности. Заметим, что поскольку в виртуальном состоянии частицы могут находиться (в силу соотношения неопределенностей) ограниченное время $\Delta t \sim 1/(p^2 - m^2)$, а в свободном при $p^2 = m^2$ — неограниченное, параметр α_σ можно интерпретировать как временной интервал (или расстояние) между концами линии σ . В этой аналогии, как увидим позже, есть немалая доля истины, однако ее не нужно понимать буквально, — в частности, двум линиям σ_1, σ_2 , имеющим совпадающие концы, могут соответствовать совершенно разные значения α -параметров, т. е. различные временные интервалы (или расстояния) между этими концами. Более последовательна в этом отношении интерпретация α -параметра как сопротивления отрезка электрической цепи, сопоставляемой рассматриваемой фейнмановской диаграмме (см., например, [73, § 127]). В этом случае $\alpha_\sigma = 0$ аналогично короткому замыканию линии σ , а $\alpha_\sigma = \infty$ — бесконечному сопротивлению, т. е. удалению линии σ из диаграммы. Эта аналогия оправдывается, в частности, тем, что при $\alpha_\sigma = 0$ функции $D(\alpha), Q(\alpha; p)$ переходят в функции $\tilde{D}(\alpha), \tilde{Q}(\alpha; p)$, соответствующие диаграмме $\tilde{\mathcal{G}}$, которая возникает из исходной диаграммы \mathcal{G} стягиванием линии σ в точку. Аналогично исходя из (4), (5), можно показать, что $Q(\alpha; p)/D(\alpha)$ в пределе $\alpha_\sigma \rightarrow \infty$ переходит в функцию $\tilde{Q}(\alpha; p)/\tilde{D}(\alpha)$, построенную для диаграммы $\tilde{\mathcal{G}}$, получающейся из \mathcal{G} удалением линии σ .

Общий анализ вкладов. Анализируя жесткие процессы, мы имеем дело с такой кинематической ситуацией, когда скалярные произведения $(p_i p_j)$ внешних импульсов можно разбить на две группы. В первую войдут «большие» инварианты $(p_i p_j) \sim Q^2$, а в другую — «малые» $(p_h p_l) \sim p^2 \ll Q^2$. Формулу (3) в этом случае можно записать в виде

$$T(Q^2, p^2) = R_\varepsilon \left\{ \frac{P(\text{к.с.})}{(4\pi)^{2z}} (4\pi\mu_R^2)^\varepsilon \int_0^\infty \prod_\sigma d\alpha_\sigma D^{-2+\varepsilon}(\alpha) \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ iQ^2 \sum_{ij} \omega_{ij} \frac{A_{ij}(\alpha)}{D(\alpha)} + p^2 I \left(\alpha, \frac{m^2}{p^2} \right) \right\} \left(\sum_{n=0} (Q^2)^n g_n(\alpha, p^2, m) \right) \right\}, \quad (8)$$

где $\omega_{ij} = 2(p_i p_j)/Q^2$; R_ε — R -операция, удаляющая полюса по ε . Отметим, что по построению $D(\alpha) \geq 0$ и $A_{ij}(\alpha) \geq 0$ [см. (4), (5)]. Коэффициент перед Q^2 в экспоненте выражения (8) будем, как правило, обозначать $F(\alpha, \omega)$.

При больших Q^2 основной вклад в интеграл (8) дает, очевидно, интегрирование по области α -параметров, в которой $Q^2 F(\alpha, \omega) \leq O(1)$, поскольку в противном случае экспонента в (8) быстро осциллирует, что приводит к сильному подавлению. В частности, интегрирование по области, в которой $F(\alpha, \omega) > \rho$, дает экспоненциально убывающий вклад $O(\exp[-Q^2 \rho])$. Таким образом, все вклады, имеющие степенное ($O(Q^{-N})$) поведение при $Q^2 \rightarrow \infty$, обусловлены интегрированием по областям α -пространства, внутри которых функция $F(\alpha, \omega)$ обращается в нуль. Возможны два варианта: или все слагаемые $A_{ij}(\alpha)/D(\alpha)$ одновременно обращаются в нуль, или нулевой результат для $F(\alpha, \omega)$ получается только после суммирования по i, j . Далее, поскольку $A_{ij}(\alpha)$ и $D(\alpha)$ согласно (4), (5) представляют собой суммы произведений α -параметров, то равенство $A_{ij}/D = 0$ означает, что либо $A_{ij}(\alpha)$ обращается в нуль быстрее, чем $D(\alpha)$ при стремлении некоторых α -параметров к нулю, либо $D(\alpha)$ быстрее, чем $A_{ij}(\alpha)$ стремится к ∞ при стремлении некоторых α -параметров к ∞ . В соответствии с этим имеется три основных механизма, ответственных за обращение $F(\alpha, \omega)$ в нуль.

1. *Режим малых расстояний (РМР).* В данном случае $F(\alpha, \omega) = 0$ вследствие того, что равны нулю некоторые α -параметры $\alpha_{\tau_1}, \dots, \alpha_{\tau_n}$ (соответствующие линии τ_1, \dots, τ_n будем иногда называть «тяжелыми»). Одновременное стремление к нулю набора α -параметров $\{\alpha_{\tau_1}, \dots, \alpha_{\tau_n}\}$ удобно описывать с помощью замены

$$\lambda(V) = \sum_{j=1}^n \alpha_{\tau_j}; \quad (9)$$

$$\alpha_{\tau_j} = \lambda(V) \beta_{\tau_j}, \quad (10)$$

где V — подграф, составленный из линий τ_1, \dots, τ_n и имеющий $z(V)$ циклов.

Исследуем поведение функций $D(\alpha)$ и $Q(\alpha, \{p\})$ в пределе $\lambda(V) \rightarrow 0$. Функция $D(\alpha)$ согласно (4) дается суммой по всевозможным наборам линий, удаление которых размыкает все z циклов рассматриваемой диаграммы, и в том числе $z(V)$ циклов, целиком лежащих внутри подграфа V . Поэтому каждое из слагаемых суммы (4) содержит не менее $z(V)$ α -параметров линий τ , принадлежащих подграфу V^* , и при $\lambda(V) \rightarrow 0$ имеем

$$D(\alpha) = [\lambda(V)]^{z(V)} \{O(1) + O(\lambda(V))\}. \tag{11}$$

Слагаемые, входящие в сумму (5) для $Q(\alpha, p)$, даются произведением $(z + 1)$ α -параметров, т. е. для каждого слагаемого всегда найдется цикл, дающий два (или больше) α -параметра в соответствующее произведение.

Функция $A_{ij}(\alpha)$ убывает при $\lambda(V) \rightarrow 0$ быстрее, чем $D(\alpha)$, только в том случае, когда для всех входящих в $A_{ij}(\alpha)$ слагаемых цикл, дающий два α -параметра, целиком содержится в V . Если это условие выполнено, то при $\lambda(V) \rightarrow 0$ функция $A_{ij}(\alpha)$ ведет себя как $[\lambda(V)]^{z(V)+1}$. В противном случае для $A_{ij}(\alpha)$ справедливо представление (11) и отношение $A_{ij}(\alpha)/D(\alpha)$ стремится к константе при $\lambda(V) \rightarrow 0$.

Таким образом, далеко не каждый подграф V обеспечивает выполнение равенства $F(\alpha, \omega) = 0$ при $\lambda(V) = 0$. Однако существует правило, позволяющее легко (по одному только «внешнему виду» диаграммы) находить подграфы V , ответственные за степенные РМР-вклады. Учтем сначала, что при $\alpha_{\tau_1} = \dots = \alpha_{\tau_n} = 0$ функция $F(\alpha, \omega)$ переходит в функцию $\tilde{F}(\alpha, \omega)$, соответствующую диаграмме \mathcal{E} («редуцированной» диаграмме, ср. [56, 57]), у которой линии τ_1, \dots, τ_n сжаты в точки. Требование $F(\alpha, \omega) = 0$ при $\lambda(V) = 0$ означает, что $\tilde{F}(\alpha, \omega) = 0$. Это эквивалентно тому, что в скалярной теории вклад редуцированной диаграммы не зависит от Q^2 , т. е. от больших импульсных инвариантов. Задача, таким образом, сводится к поиску подграфов V , сжатие которых в точку превращает исходную диаграмму \mathcal{E} , в диаграмму $\tilde{\mathcal{E}}$, вклад которой (в скалярной теории) не зависит от Q^{2**} . Нетрудно сообразить, что $\tilde{\mathcal{E}}$ в этом случае должна иметь вид розетки (рис. 1), обладающей тем свойством, что все инварианты $(p_i^{(a)} p_j^{(a)})$, которые можно составить из импульсов $p_i^{(a)}, p_j^{(a)}$, входящих в одну и ту же компоненту розетки, должны быть малы: $(p_i^{(a)} p_j^{(a)}) = O(p^2)$. В противном случае, когда $(p_i^{(a)} p_j^{(a)}) = O(Q^2)$, вклад соответствующей компоненты, а следовательно, и всей диаграммы будет зависеть от Q^2 .

* Разбиение произвольной диаграммы на циклы неоднозначно, но наши рассуждения справедливы для любого разбиения.

** Такие подграфы иногда называют существенными [69] или Q^2 -подграфами [10].

2. *Инфракрасный режим (ИР)*. В этом случае $F(\alpha, \omega) = 0$ из-за того, что некоторые α -параметры $\alpha_{\sigma_1}, \alpha_{\sigma_2}, \dots, \alpha_{\sigma_n}$ обращаются в бесконечность (соответствующие линии будем называть «мягкими»).

Одновременное стремление параметров $\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_n}$ к ∞ (или, что то же самое, стремление $1/\alpha_{\sigma_1}, \dots, 1/\alpha_{\sigma_n}$ к нулю) удобно описывать с помощью замены

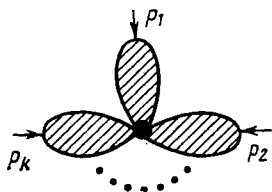


Рис. 1

$$1/\kappa(S) = \sum_{i=1}^n 1/\alpha_{\sigma_i}, \quad (12)$$

где $S \equiv \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ — подграф, составленный из линий $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Поиск подграфов S , ответственных за ИР, облегчается правилом, аналогичным правилу Q^2 -подграфов: необходимо найти набор линий $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, удаление которых из исходной диаграммы \mathcal{G} дает

диаграмму $\tilde{\mathcal{G}}$, вклад которой (в скалярной теории) не зависит от больших инвариантов. Можно показать, что для таких подграфов $F(\alpha, \omega) \sim 1/\kappa(S)$ при $\kappa(S) \rightarrow \infty$.

Замечание. Как правило, ИР дает вклад только, если мягкие линии соответствуют безмассовым частицам, поскольку в противном случае возникает обрезаящий фактор $\exp(-i\alpha_{\sigma} m_{\sigma}^2)$. Этот фактор, однако, может быть скомпенсирован членом из $Q(\alpha; p)/D(\alpha)$ [см. (3)], если некоторые из частиц, соответствующих внешним линиям диаграммы, находятся на массовой поверхности $p_i^2 = m_{\sigma}^2$. Эта возможность ведет к усложнению анализа. В целях его упрощения будем рассматривать только амплитуды вне массовой поверхности. В КХД это оправдывается также тем, что кварки и глюоны, скорее всего, не имеют массовой поверхности.

3. *Пинчевый режим (ПР)*. Инварианты $(p_i p_j)$ в псевдоевклидовом пространстве — времени могут быть положительными и отрицательными. Поэтому в ситуации, когда имеются инварианты обоих знаков, возможно обращение функции $F(\alpha, \omega)$ в нуль при ненулевых конечных α за счет компенсации входящих в $F(\alpha, \omega)$ слагаемых. При анализе вкладов, обусловленных ПР, важную роль играет теорема Тиктопулоса [56], гласящая, что ПР работает только в том случае, если $F(\alpha, \omega)$ представимо в виде произведения не менее чем двух функций $F_1(\alpha), F_2(\alpha)$, каждая из которых обращается в нуль при ненулевых α . Во многих важных случаях можно достаточно простым способом убедиться в отсутствии подобной факторизации и исключить ПР из рассмотрения, несмотря на наличие инвариантов обоих знаков.

Кроме перечисленных выше трех основных режимов возможны также и различные комбинированные режимы. Например, если $F(\alpha, \omega) \sim O(\lambda(V)) + O(1/\kappa(S))$ при $\lambda(V) \rightarrow 0, \kappa(S) \rightarrow \infty$ для некоторых подграфов V, S , то имеем дело с РМР—ИР-режимом.

Анализ поведения вкладов, связанных с РМР и ИР. В тех случаях, когда ПР не работает, анализ вкладов значительно упрощается. Пользуясь сформулированными выше правилами, в каждом конкретном случае нетрудно найти подграфы, ответственные за РМР и ИР. Интегрирование по соответствующей области α -параметров дает некоторый степенной $O(Q^{-N})$ -вклад. В асимптотике наиболее важны, конечно, лишь вклады с наименьшим возможным N . Значение показателя N можно оценить, исходя из того, что основной вклад в интеграл (3) связан с областью пространства α -параметров, в которой фаза экспоненты порядка 1.

Вклады, обусловленные РМР. Поскольку $F(\alpha, \omega) \sim \lambda(V)$ для Q^2 -подграфа V , основной вклад дается интегрированием по области, в которой $Q^2\lambda(V) \leq 1$. Это означает, что в импульсном представлении наиболее существенна область, в которой $|k_i^2| \geq Q^2$ для всех внутренних линий подграфа V . Большие виртуальные импульсы соответствуют малым временам (или расстояниям), т. е. как раз стягиванию подграфа V в точку. Слабосвязные компоненты редуцированной диаграммы, возникающей в результате такого стягивания, как мы установили выше, не должны зависеть от больших импульсных инвариантов, и можно поэтому считать, что по ним протекают импульсы с малой ($O(p^2)$)-виртуальностью. Таким образом, соответствующий вклад в $T(Q^2, p^2)$ имеет следующую структуру:

$$T_{(\text{РМР})}^V(Q^2, p^2) \sim E_V^{\{\alpha\}\{\mu\}}(Q) [f_1(p_1) \dots f_n(p_n)]_{\{\alpha\}\{\mu\}}, \quad (13)$$

где $\{\alpha\}$ — дираковские; $\{\mu\}$ — векторные индексы, сопоставляемые внешним кварковым и соответственно глюонным линиям подграфа V . Поскольку $|k_i^2| \geq Q^2$ для всех внутренних линий подграфа V , то $E_V(Q) \leq Q^{d(V)}$, где

$$d(V) = 4 - \sum_{j \in V} d_j, \quad (14)$$

а d_j — размерность (в единицах массы) поля, соответствующего j -й внешней линии подграфа V (напомним, что формулы типа (14) широко используются при подсчете индексов расходимости [17, 72, 73]). Необходимо, кроме того, учесть дополнительные множители, связанные с внешними кварковыми и глюонными линиями подграфа V . Каждый кварковый индекс α функции $f_{\{\alpha\mu\}}(p)$ дает дираковский спинор [например, $u_\alpha(p)$], каждый глюонный индекс μ может дать p_μ , а произведение импульсов $p_i^{(a)}$, $p_j^{(b)}$, относящихся к разным компонентам розетки (см. рис. 1), ведет себя как Q^2 . Таким образом, каждая глюонная внешняя линия подграфа V может привести в $T_V(Q^2, p^2)$ дополнительный множитель Q , а каждая кварковая линия $Q^{1/2}$. Нетрудно заметить корреляцию между дополнительным фактором Q^{N_j} и спином соответствующей частицы $N_j = s_j$ и получить в результате оценку:

$$T_{(\text{РМР})}^V(Q) \leq Q^{4 - \sum s_j}, \quad (15)$$

где $t_j \equiv d_j - s_j$ — твист [14, 74] j -й внешней линии подграфа V . В КХД $t=1$ для полей, сопоставляемых кваркам и фиктивным частицам («духам» Фаддеева — Попова [75]), и $t=0$ для векторного потенциала A_μ . Таким образом, связанный с РМР ведущий вклад дается интегрированием по λ ($V \approx 0$ для подграфов V , имеющих минимальное возможное число внешних линий с твистом 1 и произвольное число внешних глюонных линий).

Вклады, обусловленные ИР. Аналогичным образом можно получить и оценку для вкладов, обусловленных ИР. При этом необходимо учесть, что в отличие от $Q^2\lambda(V)$ величина $Q^2/\kappa(S)$ обладает ненуле-

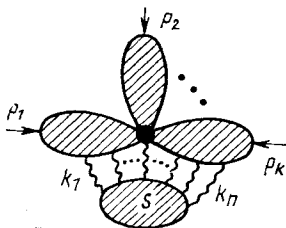


Рис. 2

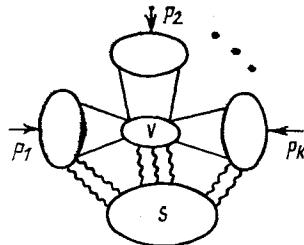


Рис. 3

вой размерностью. Имеет смысл поэтому перейти к безразмерным $\tilde{\alpha}$ -параметрам: $\alpha = \tilde{\alpha}/p^2$. В результате экспоненциальный фактор (8) превратится в

$$\exp \left\{ i \frac{Q^2}{p^2} F(\tilde{\alpha}, \omega) + iI(\tilde{\alpha}) \right\} \quad (16)$$

и основной вклад в ИР будет даваться интегрированием по области $Q^2/(p^2\kappa(S)) \approx 1$ или, используя обычные α -параметры, — по области $\alpha_\sigma \gtrsim Q^2/p^4$. Как показывает детальный анализ, в импульсном представлении это соответствует интегрированию по $|k_\sigma| < p^2/Q$ для всех мягких линий *. Окончательно для вклада ИР получаем оценку (рис. 2):

$$T_{(ИР)}^S(Q) \ll \left[\int_{k_j \ll p^2/Q} \left\{ \prod_{j=1}^n d^4k_j k_j^{-4+2d_j} \right\} \delta^4(\Sigma k_j) k^{4-\Sigma d_j} \right] Q^{\Sigma s_j}. \quad (17)$$

Поясним структуру выражения (17): $k_j^{-4+2d_j}$ — оценка на пропагатор j -й внешней линии подграфа S ; $k^{4-\Sigma d_j}$ дает оценку вклада внутренних петель подграфа S [ср. (14)], $\delta^4(\Sigma k_j)$ отражает закон сохранения импульса, а множитель $Q^{\Sigma s_j}$, как и для РМР, обусловлен

* Таким образом, предел $\alpha_\sigma \rightarrow \infty$ соответствует пределу $k \rightarrow 0$, а не просто $k^2 \rightarrow 0$.

спиновой структурой внешних линий подграфа S . Преобразуя (17), приходим к простой оценке

$$T_{(ИР)}^S(Q) \leq Q^{-2t_j}. \quad (18)$$

Таким образом, ведущие ИР-вклады также обусловлены конфигурациями с минимальным возможным числом внешних линий подграфа S . Оценка вклада комбинированного режима (рис. 3) дается, очевидно, произведением (15), (18):

$$T_{(РМР)}^V S_{(ИР)} \leq Q^{4 - \sum_{i \in V} t_i - \sum_{j \in S} t_j}, \quad (19)$$

где индекс i нумерует внешние линии подграфа V ; j — внешние линии подграфа S . Линии, соединяющие V с S , должны учитываться только один раз; условимся всегда относить их к S .

Физически интегрирование по малым α соответствует, таким образом, некоторому подпроцессу на малых расстояниях, а интегрирование по области $\kappa(S) \rightarrow \infty$ — обмену мягкими частицами. Отметим, что в КХД обмен мягкими глюонами ($t = 0$), в отличие от обмена мягкими безмассовыми кварками ($t = 1$), не приводит согласно (18), (19) к степенному подавлению соответствующего вклада и, следовательно, в КХД (в тех случаях, когда ИР дает вклад) необходимо суммировать по всем возможным мягким глюонным обменам.

Замечание. Оценки (15), (18), (19) получены, на первый взгляд, недостаточно строгим способом. Однако и детальный анализ различных возможностей в α -представлении дает те же самые оценки (см., например, приложение к первой из работ [33]).

Меллиновское представление. Вклады фейнмановских диаграмм в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ имеют обобщенно-степенную асимптотику: $T(Q^2, p^2) \sim Q^{-N} (\ln Q^2/p^2)^n$. Однако наличие безразмерных множителей типа $\ln Q^2/p^2$ не отражено в формулах (15), (18) и (19). При анализе логарифмических поправок очень удобной оказывается запись исследуемой амплитуды в виде меллиновского интеграла

$$T(Q^2, p^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta - i\infty}^{-\delta + i\infty} \Gamma(-J) (Q^2/p^2)^J \Phi(J) dJ. \quad (20)$$

В такой записи асимптотика амплитуды $T(Q^2, p^2)$ определяется самой правой особенностью ее модифицированного меллиновского образа $\Phi(J)$ в комплексной J -плоскости. В частности, если $\Phi(J) \sim (J - J_0)^{-n}$, то $T(Q) \sim (Q^2)^{J_0} (\ln Q^2/p^2)^{n-1}$. Степенные поправки к ведущему вкладу обусловлены особенностями функции $\Phi(J)$ при $J = J_0 - 1$, $J = J_0 - 2$ и т. п.

Часто используется также α -представление для меллиновского образа $\Phi(J)$ вклада некоторой диаграммы G :

$$\begin{aligned} \Phi_G(J) = R_e \left\{ \frac{P(\kappa, c)}{(4\pi)^{2z}} (4\pi\mu_R^2)^{ze} \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \prod_\sigma d\alpha_\sigma D^{-2+e}(\alpha) (iF(\alpha, \omega))^J \exp\{ip^2 I(\alpha)\} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\Gamma(n-J)}{\Gamma(-J)} g_n(\alpha, \omega, p^2) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

На языке меллиновского представления формула (15) означает, например, что интегрирование в (21) по области $\lambda(V) \approx 0$ дает полюс функции $\Phi_G(J)$ в точке

$$J = J_0 = 2 - \sum_{i \in V} t_i/2. \quad (22)$$

Кратные полюса $(J - J_0)^{-n}$, приводящие к логарифмическим вкладам, возникают в тех случаях, когда полюс $(J - J_0)^{-1}$ можно получить в результате нескольких независимых интегрирований.

Область применимости теории возмущений в КХД. Обобщенно-степенные вклады, как мы установили выше, могут возникать в результате интегрирования по различным областям виртуальных импульсов: режим малых расстояний соответствует интегрированию по области $k \gtrsim Q$, пинчевый режим — $k \sim p$, а инфракрасный — $k \lesssim p^2/Q$. Поскольку в КХД константа связи мала только в области достаточно больших импульсов (например, при $k \gtrsim 1$ ГэВ), на теорию возмущений в КХД можно надеяться лишь в случае, когда ПР и ИР, а также и комбинированные режимы или не дают вклада, или соответствующие вклады имеют степень $(O(1/Q^2))$ подавление по сравнению со вкладами, обусловленными только режимом малых расстояний.

2. АНАЛИЗ ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ e^+e^- -АННИГИЛЯЦИИ В АДРОНЫ

Партонная модель (ПМ). Согласно представлениям ПМ переход e^+e^- -пары в адроны (в низшем порядке по электромагнитной константе связи $\alpha \approx 1/137$) осуществляется в две стадии. Сначала в результате подпроцесса $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ образуется $q\bar{q}$ -пара, а затем, разлетаясь, кварки фрагментируют в наблюдаемые адроны. Считается также, что $q\bar{q}$ -пара превращается в адроны со 100%-ной вероятностью. Отсюда следует, что полное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow$ «любые адроны» в ПМ равно сумме сечений рождения возможных $q\bar{q}$ -пар. Далее, каждое такое сечение отличается от сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ лишь квадратом электрического заряда соответствующего

кварка (измеряемого в единицах заряда электрона). Таким образом, в партонной модели справедлива следующая формула [76]:

$$R(s) \equiv \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{i=1}^{N_f(s)} Q_{ij}^2, \quad (23)$$

где s — квадрат суммарной энергии e^+e^- -пары в системе центра масс; i — тип кварков (u, d, s, c, \dots); j — их цвет. Величина $N_f(s)$ определяется числом типов кварков, пороги рождения которых лежат ниже s . Формула (23) является слишком грубой. В частности, аккуратный учет пороговых эффектов для тяжелых кварков [77] приводит к замене (23) выражением

$$R(s) = 3 \left\{ \sum_{i=u, d, s} Q_i^2 + \sum_{i=c, b, \dots} Q_i^2 \theta(s - 4m_i^2) \sqrt{1 - 4m_i^2/s} (1 + m_i^2/2s) \right\}, \quad (24)$$

в котором включение новых типов кварков происходит плавно, а не скачком. Открытие каналов, связанных с рождением тяжелых кварков, сопровождается также появлением узких резонансов. В частности, экспериментальная кривая для вклада частиц, содержащих c -кварк в $R(s)$, начинается двумя узкими пиками при $\sqrt{s} = m_{J/\psi}$ и $\sqrt{s} = m_{\psi'}$. Таким образом, вопреки наивным партонным представлениям в области $m_{J/\psi} < \sqrt{s} < m_{\psi'}$ и далее вплоть до $\sqrt{s} = 2m_D$, т. е. при энергиях явно достаточных для рождения $c\bar{c}$ -пары, адроны, имеющие в своем составе c -кварки, не рождаются. При $\sqrt{s} > 2m_D$ сечение $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{charm})$ имеет ряд более широких пиков, и лишь при $\sqrt{s} \gtrsim 6$ ГэВ вклад чарма в $R(s)$ становится более или менее постоянным. Таким образом, в околопороговой (резонансной) области партонные представления (особенно предположение о 100%-ной вероятности перехода рожденной $c\bar{c}$ -пары в адроны) слишком грубы и можно надеяться лишь на то, что формула (24) соответствует реальной кривой не буквально, а «в среднем». Этому утверждению можно придать математический смысл.

Дисперсионные соотношения и правила сумм. По оптической теореме $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ пропорционально мнимой части функции $T_{\text{адр}}(q^2)$, соответствующей адронному вкладу в поляризацию вакуума:

$$T_{\text{адр}}(q^2) = \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | S^+ T(J^\mu(x) J_\mu(0) S) | 0 \rangle, \quad (25)$$

где S — матрица рассеяния; J^μ — электромагнитный ток адронов (см. [3, 5, 46]). Во времениподобной области функция $T(q^2)$ имеет разрез и σ_{tot} , а значит и $R(s)$, пропорционально скачку на этом разрезе при $q^2 = s$. Для наших целей удобно выделить из $T_{\text{адр}}$ все три-

виальные факторы и рассматривать функцию $t(Q^2)$ ($Q^2 = -q^2$), связанную с $R(s)$ соотношением:

$$R(s) = (1/2\pi i) [t(-s + i\epsilon) - t(-s - i\epsilon)]. \quad (26)$$

Вычисляя $t(Q^2)$ по теории возмущений, можно учесть поправки на взаимодействие кварков в конечном состоянии и тем самым уточнить партонную формулу (24). Однако упоминавшиеся выше узкие пики в околопороговой области ($s \sim 4m_q^2$) в высших порядках ТВ проявляют себя большими вкладами типа $(\alpha_s \sqrt{s - 4m_q^2})^n$, что приводит к бессмысленности прямолинейного использования ТВ. Более корректная процедура — применение ТВ к вычислению $t(Q^2)$ в пространственноподобной области $\text{Re}Q^2 > 0$, где опасные резонансные знаменатели вырождаются в степенные поправки $\sim (4m_q^2 + Q^2)^{-N}$, которыми можно пренебречь при достаточно больших Q^2 . Затем, пользуясь формулой Коши, можно записать дисперсионное соотношение

$$t(Q^2) = t(0) - Q^2 \int_{4m_q^2}^{\infty} R(s) ds / [s(s + Q^2)], \quad (27)$$

связывающее наблюдаемую на эксперименте функцию $R(s)$ с вычисляемой по ТВ-функцией $t(Q^2)$ [78]. Отметим, что поскольку $R(s) \rightarrow \text{const}$ при $s \rightarrow \infty$, то для получения (27) формула Коши применялась к $t(Q^2)/Q^2$.

Для сравнения (27) с экспериментальными данными необходимо формально знать $R(s)$ при всех энергиях, что недостижимо. Поскольку весовая функция в (27) довольно быстро (как $1/s$) убывает с ростом s , в области больших s с хорошей точностью можно считать $R(s)$ постоянным (см., например, [79]). Другой подход [80—82] основан на использовании правил сумм при конечной энергии [82] и приводит к соотношениям типа:

$$\int_{4m_q^2}^{s_0} R^{\text{эксп}}(s) s^n ds = \int_0^{s_0} R^{QCD}(s) s^n ds, \quad (28)$$

где $R^{QCD}(s)$ дается аналитическим продолжением функции $t(Q^2)$, вычисленной по ТВ с учетом только ведущих степенных вкладов*. Таким образом, в обоих подходах основная проблема — вычисление функции $t(Q^2)$ в КХД.

Общий анализ вкладов. Диаграммы, дающие вклад в $t(Q^2)$, имеют структуру рис. 4, а. Для ликвидации зависимости такой диаграм-

* Учет первых степенных поправок к $t(Q^2)$ позволяет получить ряд находящихся в прекрасном согласии с данными эксперимента предсказаний о свойствах резонансов [79]. В данной работе, однако, ограничимся анализом ведущих степенных вкладов.

мы от Q^2 необходимо добиться, по крайней мере, того, чтобы импульс q , квадрат которого велик, входил в диаграмму и выходил из нее в одной и той же точке (см. рис. 4, б) Это достигается только сжатием в точку некоторого подграфа V (см. рис. 4, а), содержащего обе фотонные вершины. Далее, поскольку возникающая в результате диаграмма (см. рис. 4, б) не зависит от Q^2 , такое сжатие не только необходимо, но и достаточно. Это означает, что все степенные вклады в $t(Q^2)$ обусловлены режимом малых расстояний и для их оценки можно воспользоваться (15). Необходимо учесть, что интересующая нас функция $t(Q^2)$ отличается от функции $T(Q^2)$, к которой непосредственно применима формула (15), множителем $O(Q^2)$: $t(Q^2) \sim T(Q^2)/Q^2$. Кроме того, фотонные внешние линии, которым формально соответствует спин 1, в рассматриваемой задаче не приносят дополнительных Q -факторов в $T(Q^2)$, и поэтому

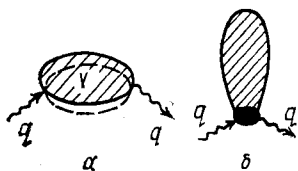


Рис. 4

$$t_{(\text{РМР})}^V(Q^2) \sim Q^{-\sum_{i=1}^L d_i}, \quad (29)$$

где суммирование идет по внешним линиям подграфа V , исключая фотонные. Отметим, что дополнительные Q^i -факторы [см. обсужденные, предшествующее формуле (15)] возникают только в том случае, когда рассматриваемая амплитуда зависит от таких импульсов P , квадраты которых малы ($P^2 \ll Q^2$), а скалярные произведения с другими импульсами велики ($Pq \sim Q^2$). Такие факторы, естественно, отсутствуют для амплитуд, зависящих только от одного (причем большого) импульса q .

Далее, поскольку $d^i \geq 1$ для любых полей, то ведущий в асимптотике вклад $t^{ac}(Q^2)$ дается подграфами с минимальным числом внешних линий, в данном случае равным двум: $t^{ac}(Q^2) \sim Q^0$. Поскольку любой подграф V , не совпадающий со всей диаграммой \mathcal{G} , имеет более чем две внешние линии, то его РМР-вклад $t_{\text{РМР}}^V(Q^2)$ согласно (29) степенным образом подавлен по сравнению с $t_{\text{РМР}}^{\mathcal{G}}(Q^2)$. Таким образом, чтобы получить $t^{ac}(Q^2)$, необходимо проинтегрировать по области $\lambda(\mathcal{G}) < 1/\mu^2$, где $\lambda(\mathcal{G}) = \alpha_{\sigma_1} + \dots + \alpha_{\sigma_\sigma}$ — сумма α_σ -параметров всех линий σ рассматриваемой диаграммы, а $\mu \sim Q$ — некоторый масштаб с размерностью массы.

Расходимости и логарифмические вклады. В меллиновском представлении (20) поведению $t(Q^2) \sim Q^0$ соответствует полюс при $J = 0$. Кроме того, необходимо учесть также эффекты, обусловленные ультрафиолетовыми расходимостями некоторых из подграфов внутри \mathcal{G} . С учетом замены $D^2(\alpha) \rightarrow D^{2-2\epsilon}(\alpha) (\mu^2)^{2\epsilon}$, связанной с размерной

регуляризацией [см. (7)], —интегрирование по области $\lambda(\mathcal{G}) < 1/\mu^2$ дает

$$\Phi(J, \varepsilon) \sim \frac{1}{J+z\varepsilon} \left(\frac{1}{\mu^2}\right)^{J-1+z\varepsilon} (4\pi\mu^2)^{z\varepsilon} \varphi(J, \varepsilon, g). \quad (30)$$

Отметим, что поскольку имеется всего лишь один подграф, дающий в РМР полюс при $J \sim 0$, и этот полюс уже выделен в (30), то функция



Рис. 5

$\varphi(J, \varepsilon, g)$ может иметь особенности по J только при $J \approx -1$ или еще левее. Переходя от $\Phi(J)$ к $t(Q^2)$ взятием вычета в точке $J = -z\varepsilon$, получаем:

$$t(Q^2) = R_\varepsilon \left\{ \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{z\varepsilon} \Gamma(1+z\varepsilon) \varphi(J = -z\varepsilon, \varepsilon, g) \right\} \{1 + O(1/Q^2)\}. \quad (31)$$

Упомянутые выше УФ-расходимости соответствуют полюсам функции $\varphi(J, \varepsilon, \mu)$ по ε , и каждый полюс $1/\varepsilon^k$ согласно разложению

$$\frac{1}{\varepsilon^k} (4\pi\mu^2 \exp(-\gamma_E)/Q^2)^{z\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[z\varepsilon \ln(4\pi \exp(-\gamma_E)\mu^2/Q^2)]^n}{n!} \quad (32)$$

приводит к появлению конечного при $\varepsilon \rightarrow 0$ логарифмического вклада $O(\ln^k(\mu^2/Q^2))$. Появление множителя $\exp(-\gamma_E)$ связано с тем, что

$$\Gamma(1+x) = \exp\{-\gamma_E x + O(x^2)\}, \quad (33)$$

где $\gamma_E = 0,5772156649$ — константа Эйлера (см. например, [83]).

Замечание. Расходимость в t имеется уже в нулевом порядке по сильному взаимодействию. Это обусловлено тем, что по отношению к электромагнитному взаимодействию соответствующая простейшая диаграмма (рис. 5, а) является составной частью собственно-энергетической поправки к пропагатору фотона. Ее вклад ведет себя как $Q_i^2 \ln(Q^2/\mu^2)$, где Q_i — заряд кварка, что дает согласно (26) постоянный вклад в $R(s)$, равный Q_i^2 .

Чтобы избавиться от расходимости в исходной диаграмме рис. 5, а, обычно рассматривают не саму функцию $t(Q^2)$, а ее производную [78]:

$$D(Q^2) = Q^2 \frac{d}{dQ^2} t(Q^2). \quad (34)$$

В низшем приближении (и при нулевых массах кварков) $D(Q^2)$ дается тем же выражением, что и $R(s)$:

$$D^{(0)}(Q^2) = N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \quad (35)$$

[ср. (23)]. Диаграммы следующего порядка (см. рис. 5, б и в), вообще говоря, содержат УФ-расходимости. Однако их суммарный вклад в $D(Q^2)$ свободен от расходимостей, что связано с сохранением электромагнитного тока. Вследствие этого вклад диаграмм рис. 5, б и в в $D(Q^2)$ не содержит логарифмического $[O(\ln Q^2/\mu^2)]$ вклада. Такие вклады появятся лишь в следующем порядке по g^2 .

Логарифмические вклады и ренормгруппа. Таким образом, после удаления УФ-расходимостей, т. е. полюсов по ϵ , амплитуда $D(Q^2)$ представляет собой (с точностью до степенных поправок, которые мы не рассматриваем) функцию от $\ln(Q^2/\mu^2)$ и константы связи g :

$$D(Q^2) = D_{\text{лидр}}(\ln(\mu^2/Q^2), g) \{1 + O(1/Q^2)\}. \quad (36)$$

Однако поскольку $D(Q^2)$ непосредственно связана с наблюдаемой величиной (сечением e^+e^- -аннигиляции в адроны), она не должна зависеть от нашего произвола в выборе параметра μ^2 . Это можно обеспечить лишь в том случае, если разным μ^2 соответствуют различные g , т. е. если g в действительности некоторая функция от μ^2 : $g = \bar{g}(\mu^2)$. Совокупность преобразований $\{\mu \rightarrow \mu', g \rightarrow g'\}$, оставляющих физические величины [такие, как $T(Q^2)$] неизменными, образуют ренормализационную группу (РГ) [15—17]. С помощью метода РГ можно показать (см., например, [17, 84, 85]), что в перенормируемых теориях (в частности, в КХД) требование независимости некоторой (произвольной) физической величины $T_i(Q)$ от выбора параметра μ дает один и тот же (для всех T_i) вид зависимости *эффективной константы связи* $\bar{g}(\mu^2)$ [86] от ее аргумента μ^2 . Функция $\bar{g}(\mu^2)$ играет исключительно важную роль во всех вычислениях по ТВ в КХД, поэтому имеет смысл сначала подробно обсудить характер зависимости $\bar{g}(\mu^2)$ от μ^2 и лишь затем вернуться к исследованию ряда ТВ для $D(Q^2)$.

Эффективная константа связи. Явный вид функции $\bar{g}(\mu^2)$ можно, в принципе, вычислить следующим образом. Пусть $f(g, l, \ln \mu^2/Q^2)$ — некоторая величина, не меняющаяся при изменении μ :

$$f(g, l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g^n l^k a_{nk}. \quad (37)$$

Поскольку $df/dl = 0$ при любых l , и в частности при $l = 0$, то, вычисляя последовательно коэффициенты a_{n0} и a_{n1} , можно найти (в виде ряда по g) β -функцию

$$\beta(g) = \left. \frac{dg}{dl} \right|_{l=0} = \sum_k \beta_k g^k, \quad (38)$$

которая и задает искомый характер зависимости $\bar{g}(\mu^2)$ от μ^2 . Действительно, интегрируя (38), получаем

$$\ln(\mu^2/\tilde{\mu}^2) = \int_{\bar{g}(\tilde{\mu}^2)}^{\bar{g}(\mu^2)} \frac{dx}{\beta(x)} \equiv \Phi(\bar{g}(\mu^2)) - \Phi(\bar{g}(\tilde{\mu}^2)), \quad (39)$$

так называемое уравнение Гелл-Мана — Лоу [16], из которого следует, что

$$\bar{g}(\mu^2) = \Phi^{-1}[\ln(\mu^2/\tilde{\mu}^2) + \Phi(\bar{g}(\tilde{\mu}^2))]. \quad (40)$$

Таким образом, зная \bar{g} в некоторой точке $\tilde{\mu}^2$, можно в рамках теории возмущений найти $\bar{g}(\mu^2)$ как функцию μ^2 . Нетрудно заметить, что комбинация $\ln(\mu^2/\tilde{\mu}^2) + \Phi(\bar{g}(\tilde{\mu}^2))$ в (39) на самом деле не зависит от $\tilde{\mu}$. Это возможно, если

$$\Phi(\bar{g}(\tilde{\mu}^2)) = \ln(\tilde{\mu}^2/\Lambda^2), \quad (41)$$

где Λ — некоторый параметр с размерностью массы. В результате $\bar{g}(\mu) = \Phi^{-1}[\ln(\mu^2/\Lambda^2)]$.

При этом необходимо иметь в виду, что Φ определена выражением (39) лишь с точностью до произвольной константы. Однако, заменяя

$$\Phi \rightarrow \Phi_\varphi \equiv \Phi + 2\varphi, \quad (42)$$

согласно определению Λ (41) необходимо произвести также и замену $\Lambda \rightarrow \Lambda_\varphi \equiv \Lambda \exp(-\varphi)$. При этом $\bar{g}(\mu^2)$ не меняется, и мы имеем дело фактически с однопараметрическим семейством выражений $\bar{g}(\mu^2)$ через $\ln \mu^2$:

$$\bar{g}(\mu^2) = \Phi_\varphi^{-1}[\ln(\mu^2/[\Lambda \exp(-\varphi)]^2)]. \quad (43)$$

Поведение эффективной константы связи в безмассовой хромодинамике. В настоящее время функция $\beta_{QCD}(g)$ вычислена вплоть до членов $O(g^7)$ [24, 87–89]:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dL} \Big|_{MS} = & - \sum_{k=0}^{\infty} b_k G^{k+2} = - \left[\left(11 - \frac{2N_f}{3} \right) G^2 + \right. \\ & \left. + \left(102 - \frac{38}{3} N_f \right) G^3 + \left(\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} N_f + \frac{325}{24} N_f^2 \right) G^4 \right] + O(G^5), \end{aligned} \quad (44)$$

где $G = (\bar{g}/4\pi)^2$; N_f — число типов кварков (u, d, s, \dots).

В низшем приближении (44) дает

$$\alpha_s(Q) \equiv \frac{\bar{g}^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - 2N_f/3) \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (45)$$

т. е. при $N_j \leq 16 \alpha_s(\mu)$ убывает до нуля с ростом μ . Это свойство теории («асимптотическая — свобода» [21, 46]) — краеугольный камень для всех подходов, использующих теорию возмущений в квантовой хромодинамике.

При замене $\Lambda \rightarrow \Lambda \exp(-\varphi)$ формула (45) сохраняет свою структуру с точностью до членов $O(1/\ln^2 Q^2)$, и поэтому, чтобы зафиксировать произвол в определении параметра Λ , необходимо учесть G^3 -член в разложении (44). Уравнение Гелл-Мана — Лоу (39) с учетом (41) в данном случае сводится к

$$L \equiv \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) = \frac{1}{b_0 G} + \left(\frac{b_1}{b_0^2} \ln G + \Delta\right) + \left(\frac{b_2 b_0 - b_1^2}{b_0^3} G\right) + O(G^2), \quad (46)$$

где Δ — параметр, отражающий обсуждаемый произвол; b_i — коэффициенты β -функции [см. (44)]. При малых G это уравнение можно решать итерациями:

$$\left. \begin{aligned} G^{(0)} &= 1/(b_0 L); \quad G^{(1)} = (1/b_0 L) \{1 + L_1/L\}^{-1}; \\ G^{(2)} &= (1/b_0) \left\{ L + L_1 + \frac{b_1}{b_0^2} \ln(1 + L_1/L) - \frac{b_2 b_0 - b_1^2}{b_0^3 L} (1 + L_1/L)^{-1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

и т. д., где

$$L_1 = (b_1/b_0^2) \ln(b_0 L) - \Delta. \quad (48)$$

Часто используется разложение $\alpha_s(\mu, \Delta)$ в ряд по $(1/L)$:

$$\alpha_s(\mu, \Delta) = \frac{4\pi}{b_0 L} \left\{ 1 - \frac{L_1}{L} + \frac{1}{L^2} \left(L_1^2 - \frac{b_1}{b_0^2} L_1 + \frac{b_2 b_0 - b_1^2}{b_0^3} \right) + O(1/L^3) \right\}. \quad (49)$$

Из формул (47) и (48) видно, что выбор $\Delta = 0$ не слишком удачен, поскольку при физически наиболее интересных значениях логарифма $3 < L < 10$, т. е. в области $0,5 > \alpha_s > 0,1$, отношение L_1/L , характеризующее двухпетлевую поправку к (45), составляет от 80 до 30%. Обычно выбирают

$$\Delta_{06} = (b_1/b_0^2) \ln b_0. \quad (50)$$

При этом формула (49) не содержит членов вида const/L^2 :

$$\alpha_s(\mu^2, \Delta_{06}) = \frac{4\pi}{b_0} \left\{ \frac{1}{L} - \frac{b_1}{b_0^2} \frac{\ln L}{L^2} + O(1/L^3) \right\}. \quad (51)$$

Значение первой поправки в (51) составляет 30—15%. Нетрудно найти и такое (в некотором смысле оптимальное) значение параметра Δ :

$$\Delta_{\text{опт}} = (b_1/b_0^2) \ln(4b_0), \quad (52)$$

при котором L_1/L составляет не более 7% во всей области $\infty > L > 3$. Заметим далее, что поскольку выбор $\Delta = \Delta_{\text{опт}}$ приводит в интересующей нас области ($G \leq 0,05$) к минимизации относительного вклада двухпетлевой поправки не только в формуле (49), но и в исходном

уравнении (46), то значительное отклонение Δ от $\Delta_{\text{опт}}$ приводит к заметному росту коэффициентов при старших степенях разложения $\alpha_s(\mu, \Delta)$ по $1/L$, а выбор (52) эквивалентен суммированию больших поправок в множитель $\exp(\Delta - \Delta_{\text{опт}})$, приводящий к переопределению параметра Λ :

$$\Lambda(\Delta_{\text{опт}}) = \Lambda(\Delta) \exp[(\Delta - \Delta_{\text{опт}})/2]. \quad (53)$$

В частности, $\Lambda(\Delta_{\text{опт}}) \approx 0,6\Lambda(\Delta_{\text{об}})$ при $N_f = 3,4$.

Таким образом, если взять $\Delta = \Delta_{\text{опт}}$, то простейшая формула (45) дает очень хорошее приближение для $\alpha_s(Q)$ в области $L > 3$. При желании можно учесть и следующие две поправки в (49).

Замечание. Коэффициенты b_2, b_3, \dots зависят, в отличие от b_0, b_1 , от используемого рецепта вычитания УФ-расходимостей (см., например, [90]). В частности, приведенное в (44) значение коэффициента b_2 [89] вычислено в схеме минимальных вычитаний [91] или MS-схеме (MS — minimal subtraction). Вид b_2 в других схемах пока не известен. Далее, из (44), (49) следует, что относительный вклад $O(G^4)$ -членов в правую часть уравнения Гелл-Мана — Лоу при $G \leq 0,05$ не превышает 3%, и поэтому кривая для $\alpha_s^{(2)}(Q, \Delta_{\text{опт}})$, полученная с учетом трехпетлевых поправок, незначительно отличается от кривой $\alpha_s^{(0)}(Q, \Delta_{\text{опт}})$ вплоть до $L \approx 1$ (см. [92]).

Анализ структуры ряда теории возмущений для $D(Q)$. Получив явные выражения для $\alpha_s(\mu)$ в КХД, вернемся к анализу функции $D(Q)$:

$$D(Q) = N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \sum_{n=0}^{\infty} d_n(Q^2/\mu^2) \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\right)^n. \quad (54)$$

Выбор аргумента эффективной константы связи. Как уже отмечалось, сумма ряда (54) не зависит от параметра μ . Используя формулы РГ, мы можем переходить от разложения по $\alpha_s(\mu)$ к разложению по $\alpha_s(\tilde{\mu})$, и с точки зрения РГ все такие разложения равноправны: *внутри РГ нет критерия, на основании которого мы могли бы предпочесть одно разложение другому.* Реально, однако, мы имеем дело лишь с суммой нескольких первых членов ряда ТВ, которая имеет нетривиальную зависимость от μ и при неудачном выборе μ может сильно отличаться от истинного значения $D(Q)$. Это отклонение будет скомпенсировано лишь вкладами более высоких порядков разложения по $\alpha_s(\mu)$. Таким образом, большие поправки в разложении (54) следует рассматривать как указание на то, что сделанный выбор параметра μ неудачен. Поэтому имеет смысл выбрать μ так, чтобы поправки были наименьшими. Допустим, что мы используем стандартную схему вычитаний [17, 72, 73] или, как ее еще называют, *МОМ-схему* (МОМ — momentum subtraction) и $\bar{g}(\mu)$ соответствует кварк-глюонной вершине, в которую входят импульсы k_i с виртуальностью μ^2 ; $k_i^2 = -\mu^2$. Поскольку основной вклад

в $D(Q)$ обусловлен интегрированием по виртуальным импульсам $k_i^2 \sim -Q^2$, в MOM-схеме имеет смысл взять $\mu^2 = Q^2$, т. е. разлагать $D(Q)$ по $\alpha_s(Q)$. При таком выборе вклады, содержащие $\ln(Q^2/\mu^2)$, абсорбируются эффективной константой связи, и есть все основания ожидать, что остальные вклады дадут хотя и ненулевую, но достаточно малую поправку. Проверим, в какой мере такие ожидания подтверждаются результатами прямых расчетов коэффициентов d_n .

Согласно (35) $d_0 = 1$. Вклады двухпетлевых диаграмм (см. рис. 5, б и в) отличаются лишь цветовым фактором $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ (в КХД $C_F = 4/3$) от своих квантовоэлектродинамических аналогов, для которых соответствующие расчеты были выполнены еще в [93]. Используя [93], можно получить $d_1 = 3C_F/4$ [94], т. е. в КХД $d_1 = 1$. В настоящее время известен также и коэффициент d_2 [95—97], причем в разных ренормировочных схемах. В MOM-схеме [97]:

$$d_2(\mu^2/Q^2)|_{\text{MOM}} = \frac{85}{36\sqrt{3}} Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{43}{48} + \left(\frac{23}{24} - \zeta(3)\right) b_0 + \frac{b_0}{4} \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) \approx -2,193 + 0,162N_f + \frac{b_0}{4} \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right), \quad (55)$$

где $Cl_2(\theta)$ — функция Клаузена [98]:

$$Cl_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)/n^2, \quad (56)$$

$Cl_2(\pi/3) = 1,014942 \dots$; $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана [83], $\zeta(3) = 1,2021 \dots$

Из (55) следует, что в MOM-схеме при $N_f = 3$ и $\mu^2 = Q^2$ вклад $O(\alpha_s^2)$ -поправки составляет (для $\alpha_s/\pi \approx 0,1$) примерно 17% $O(\alpha_s)$ -вклада. Это явно свидетельствует о том, что приведенные выше физические соображения относительно оптимального выбора параметра μ , по-видимому, недалеко от истины.

Схемы, основанные на размерной ренормировке. Необходимо отметить, что MOM-схема весьма неудобна при непосредственных вычислениях, и в этом отношении она сильно уступает упоминавшейся ранее MS-схеме 'т Хоофта [91]. Коэффициент d_2 был впервые вычислен в [95] именно в MS-схеме:

$$d_2\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right)|_{\text{MS}} = \left\{ \frac{1}{12} + \left[\frac{11}{2} - 4\zeta(3) + (\ln(4\pi) - \gamma_E) + \ln\left(\frac{\mu^2}{Q^2}\right) \right] \frac{b_0}{4} \right\} \approx \approx 7,359 - 0,441N_f + (b_0/4) \ln(\mu^2/Q^2). \quad (57)$$

Результат (57) был повторен и другими авторами [96, 97].

Из (57) следует, что в MS-схеме выбор $\mu^2 = Q^2$ явно далек от оптимального, поскольку вклад $O(\alpha_s^2)$ составляет (при $\alpha_s/\pi \approx 0,1$) около 60% вклада $O(\alpha_s)$. Однако 40% из них обусловлены вкладом $\ln(4\pi) - \gamma_E$, возникшим из-за того, что в MS-схеме логарифмы $\ln(\mu^2/Q^2)$ согласно (32) появляются всегда в комбинации $\ln(4\pi\mu^2 \exp(-\gamma_E)/Q^2)$.

Если же взять $\mu^2 = (\exp(\gamma_E)Q^2/4\pi)$, то бессмысленные члены типа $(\ln(4\pi) - \gamma_E)^k$ не возникнут ни в каком порядке по α_s . Обычно предпочитают сохранить «естественный» выбор $\mu^2 = Q^2$, а для удаления множителя $4\pi \exp(-\gamma_E)$ меняют сам рецепт размерной регуляризации, используя вместо (6) замену

$$d^4k/(2\pi)^4 \rightarrow [d^{4-2\epsilon}k/(2\pi)^{4-2\epsilon}] (\mu^2 \exp(\gamma_E)/4\pi)^\epsilon, \quad (58)$$

соответствующий рецепт перенормировки называют \overline{MS} -схемой [38]. Разложение по $\overline{g}(Q^2)$ в \overline{MS} -схеме дает тот же ряд, что и разложение по $\overline{g}(Q^2 \exp(\gamma_E)/4\pi)$ в MS-схеме. В терминах Λ -параметров это означает, что

$$\Lambda_{\overline{MS}}^2 = 4\pi \exp(-\gamma_E) \Lambda_{MS}^2 \approx (2,656\Lambda_{MS})^2, \quad (59)$$

если параметр Λ в (46) один и тот же для обеих схем. В дальнейшем будем всегда предполагать, что во всех схемах $\Lambda = \Lambda_{\text{опт}}$ [см. (52)].

В работе [99] предложен еще один вариант схемы минимальных вычитаний «G-схема»:

$$\Lambda_G = e\Lambda_{\overline{MS}}, \quad (60)$$

которая имеет ряд технических преимуществ при явных вычислениях коэффициента d_2 .

OMS-схема и разложение по $1/L$. Если вместо (59) взять

$$\Lambda_{OMS} = 2,104\Lambda_{\overline{MS}}, \quad (61)$$

то коэффициент $d_2^{OMS}(\mu^2/Q^2)$ в соответствующей схеме, которую будем называть *OMS-схемой* (OMS — optimized minimal subtraction), при $N_f = 3$ совпадает с $d_2^{MOM}(\mu^2/Q^2)$. Это не означает, что схемы OMS и MOM идентичны. В частности, коэффициенты d_2^{MOM} и d_2^{OMS} отличаются друг от друга при $N_f \neq 3$:

$$d_2^{OMS}(\mu^2/Q^2) = -2,105 + 0,133N_f + (b_0/4)\ln(\mu^2/Q^2). \quad (62)$$

Кроме того, поскольку $d(\ln(k\mu)) = d(\ln \mu)$, то MS-, \overline{MS} -, OMS-схемы согласно (38) имеют одну и ту же β -функцию, не обязательно совпадающую, начиная с третьего коэффициента, с β -функцией в MOM-схеме [90]. Аналогично коэффициенты d_n^{OMS} и d_n^{MOM} при $n \geq 3$ также могут отличаться друг от друга даже и при $N_f = 3$.

Если положить $\mu = Q$ и выразить $\alpha_s(Q)$ по формуле (49), то $D(Q)$ дается рядом:

$$D(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=\max[0, n-1]}^{\infty} \frac{(\ln \ln(Q^2/\Lambda_S^2))^k}{(\ln(Q^2/\Lambda_S^2))^n} a_{nk}^S, \quad (63)$$

у которого коэффициенты a_{nk}^{OMS} и a_{nk}^{MOM} при $N_f = 3$ равны друг другу для всех n и k . Действительно, изменение коэффициентов $a_{nk}^S \rightarrow$

→ $a_{nh}^{S'}$, связанное с переходом $S \rightarrow S'$ от одной схемы к другой, может быть скомпенсировано в (63) только переходом от параметра Λ_S , сопоставляемого схеме S , к Λ -параметру схемы S' : $\Lambda_S \rightarrow \Lambda_{S'} = \kappa_{SS'} \Lambda_S$. Отсюда следует, во-первых, что первые три коэффициента (a_{00} , a_{10} и a_{11}) в (63) не зависят от выбранной схемы, а во-вторых, что, фиксируя коэффициент $a_{20} \equiv 4d_2(1)/b_0$, мы однозначно фиксируем и все остальные коэффициенты a_{nh} [41, 42].

Принцип минимальной чувствительности. Таким образом, если в схеме S ряд (63) был получен из ряда (54) при $\mu = Q$, то чтобы получить ряд (63) с теми же коэффициентами a_{nh} в некоторой другой схеме S' , необходимо в исходном ряде (54) взять не $\mu = Q$, а $\mu = \Lambda_{S'} Q / \Lambda_S$. Иначе говоря, если конечный результат для $D(Q)$ представляется в виде ряда (63), то произвол в выборе схемы эквивалентен произволу в выборе аргумента для $\bar{g}(\mu^2)$. Поэтому, исследуя зависимость аппроксимантов $D_n(\mu^2/Q^2, \alpha_s(\mu))$, соответствующих сумме первых $(n + 1)$ членов ряда (54), от выбора параметра μ , можно получить достаточно полное представление о характере зависимости результатов вычисления $D(Q)$ по теории возмущений от выбранного рецепта ренормировки.

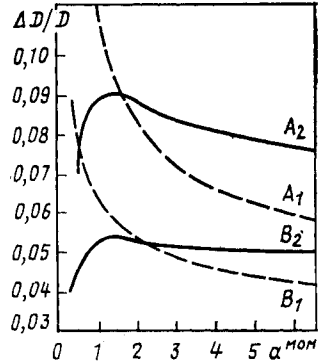


Рис. 6

Поскольку в рассматриваемой задаче нижее приближение D_0 не зависит от μ , имеет смысл анализировать не D_n , а разность $\Delta D_n \equiv D_n - D_0$ или ее отношение к D_0 . Первый аппроксимант

$$\Delta D_1(\mu^2/Q^2, \alpha_s(\mu))/D_0 = 4/b_0 \ln[(\mu^2/Q^2)(Q^2/\Lambda^2)]. \tag{64}$$

На рис. 6 приведены соответствующие кривые при $\ln(Q^2/\Lambda^2) = 4$ (кривая A_1) и при $\ln(Q^2/\Lambda^2) = 7$ (кривая B_1).

Видно, что $\Delta D_1/D_0$ имеет заметную зависимость от параметра μ во всем интервале его изменения, и в этом смысле первый аппроксимант весьма далек от предельной формы $\Delta D_\infty(\mu^2/Q^2, \alpha_s(\mu)) = D(Q) - D_0(Q)$, представляющей собой некоторую горизонтальную прямую. Учет следующего вклада несколько улучшает ситуацию: кривые A_2 и B_2 на рис. 6, соответствующие второму аппроксиманту (при $\ln Q^2/\Lambda^2 = 4$ и 7 ; $N_f = 3$):

$$\frac{\Delta D_2^{\text{OMS}}(\mu^2/Q^2, \alpha_s(\mu))}{D_0} = \frac{4}{b_0 L_\mu} \left\{ 1 - \frac{b_1}{b_0^2} \frac{\ln(L_\mu/4)}{L_\mu} + \frac{4}{b_0} \frac{0,133N_f - 2,105}{L_\mu} + \frac{\ln(\mu^2/Q^2)}{L_\mu} \right\}, \tag{65}$$

где $L_\mu \equiv \ln(\mu^2/\Lambda^2)$, имеют участок, в пределах которого $\Delta D_2(\mu^2/Q^2, \alpha_s(\mu))$ довольно слабо зависит от μ . Учитывая следующие вкла-

ды, мы должны получать все более плоские кривые, приближающиеся при $n \rightarrow \infty$ к прямой $D(Q) - D_0(Q)$. Исходя из этого, следует ожидать, что наилучшее приближение для $D(Q)$ получим, выбирая μ в области, где ΔD_2 имеет слабую зависимость от μ . Эти соображения лежат в основе принципа минимальной чувствительности, сформулированного в [45] следующим образом: «Если аппроксимант зависит от «нефизических» параметров, то их значения нужно выбрать так, чтобы чувствительность аппроксиманта к малым вариациям этих параметров была минимальной». «Нефизическими» считаются такие параметры, от частного выбора которых не должно зависеть истинное значение исследуемой величины D . В нашем примере таков параметр μ .

Критерий Стивенсона не является математической теоремой. Он представляет собой, скорее, правило оптимального поведения в условиях острой нехватки информации. В его оправдание, однако, можно привести ряд доводов. Во-первых, значения параметра $\mu_{\text{опт}}$ найденные из условия:

$$\frac{d}{d\mu} \Delta D_2^{\text{OMS}}(\mu^2/Q^2, \alpha_s(\mu))|_{\mu=\mu_{\text{опт}}} = 0, \quad (66)$$

равны 1,25 и 1,52 для кривых A_2 и B_2 (см. рис. 6), что находится в полном согласии с предположением, что в MOM- и OMS-схемах оптимальным выбором для μ должна быть величина, близкая к Q . Во-вторых, поскольку кривые, соответствующие ΔD_1 и ΔD_2 , пересекаются в точке, близкой к $\mu_{\text{опт}}$ (при $\mu = 1,65Q$ в случае A и $\mu = 1,95Q$ в случае B), разница между ΔD_1 и ΔD_2 , т. е. величина трехпетлевой поправки, при $\mu = \mu_{\text{опт}}$ невелика. Это согласуется с требованием, что при оптимальном выборе μ ряд (54) сходится к точному значению $D(Q)$ достаточно быстро. Высокая эффективность критерия Стивенсона была продемонстрирована на ряде точно решаемых задач [45, 100]. Можно изобрести, однако, и бесчисленное множество «контрпримеров», когда плоские участки кривых для $\Delta D_n(\mu)$ будут достаточно близки к точному значению ΔD лишь при очень больших n . Отметим, что в такой ситуации неприменима теория возмущений вообще, а не только принцип минимальной чувствительности. Сам факт использования ТВ означает, что мы неявно предполагаем достаточно быструю сходимость кривых для ΔD_n к прямой, соответствующей точному результату, а в такой ситуации есть все основания доверять критерию Стивенсона.

Принципы минимизации как способ решения проблемы ренормгрупповой неоднозначности. Переход к другой ренормировочной схеме соответствует на рис. 6 лишь изменению масштаба по горизонтальной оси; масштаб по вертикальной оси, а следовательно, и значение ΔD_2 в максимуме кривой [т. е. $\Delta D_2(\mu = \mu_{\text{опт}})$], не меняется. Таким образом, использование критерия Стивенсона дает один и тот же результат для $\Delta D_2(\mu_{\text{опт}})$ во всех ренормировочных схемах.

От РГ-неоднозначности можно избавиться и другими способами. В частности, в [43, 44] предполагалось в качестве оптимального брать значение параметра μ , при котором разность $\Delta D_2 - \Delta D_1$, т. е. величина трехпетлевой поправки, равна нулю (*принцип минимизации поправки*). Значение ΔD_2 в точке пересечения кривых ΔD_1 и ΔD_2 (как и значение ΔD_2 в максимуме соответствующей кривой) не меняется при РГ-преобразованиях, и, следовательно, конечный результат для ΔD не зависит от выбора μ и (или) ренормировочной схемы.

3. ОСНОВЫ АНАЛИЗА ПРОЦЕССА ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО ЛЕПТОН-АДРОННОГО РАССЕЯНИЯ

Введение. В экспериментах по глубоконеупругому рассеянию (ГНР) исследуются структурные функции адронов W_1, W_2, W_3 (см. [3—14, 46—49, 51, 101]), выражающиеся формально через матричный элемент произведения соответствующих адронных токов*:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(P, q) &= \frac{1}{4\pi} \int d^4x \exp(iqx) \langle P | J_\mu^+(x) J_\nu(0) | P \rangle = \\ &= \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1 + \frac{1}{m_h^2} \left(P_\mu - \frac{Pq}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{Pq}{q^2} q_\nu \right) W_2 - \\ &\quad - i \frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha q^\beta}{2m_h^2} W_3, \end{aligned} \quad (67)$$

где m_h — масса адрона; токи J^+, J взяты в гейзенберговском представлении. При теоретическом анализе удобнее иметь дело со свертками: $W_\mu^\mu, P_\mu P_\nu W^{\mu\nu}$ и $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} W^{\mu\nu} q^\alpha P^\beta$, линейные комбинации которых дают W_1, W_2, W_3 . В дальнейшем ограничимся анализом форм-фактора $W \equiv -W_\mu^\mu$. Другие свертки можно проанализировать аналогичными методами.

Форм-фактор $W(P, q)$ зависит от импульсов P_2, q только через их скалярные произведения $P^2 = m_h^2, q^2 \equiv -Q^2, 2(Pq) \equiv \omega Q^2$. Кинематическая область ГНР определяется условиями

$$q^2 < 0, Q^2 \gtrsim 1 \text{ ГэВ}^2, (q + P)^2 \gg m_h^2. \quad (68)$$

Из последнего условия следует, что $\omega > 1$. Как и при анализе $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$, в данном случае также имеет смысл ввести в рассмотрение амплитуду

$$T(\omega, Q^2) = \frac{1}{4\pi} \int d^4x \exp(iqx) \langle P | S^+ T(j_\mu(x) j^\mu(0) S) | P \rangle, \quad (69)$$

заданную во всей комплексной ω -плоскости (j_μ — токи в представлении взаимодействия). Амплитуда $T(\omega, Q^2)$, соответствующая вир-

* В целях упрощения изложения будем рассматривать только ГНР на неполяризованной мишени. Это означает, что в (67) подразумевается усреднение по спину адрона. Специфика ГНР на поляризованной мишени рассматривалась в [102—104].

туальному комптоновскому рассеянию на нулевой угол, имеет на вещественной оси разрез при $|\omega| > 1$. Функция $W(\omega, Q^2)$ дается скачком на правом разрезе; пользуясь зарядовой симметрией токов j_μ , можно выразить $W(\omega, Q^2)$ и через скачок на левом разрезе (см., например, [12]). В области $(\omega - 1)Q^2 \sim m_h^2$ форм-фактор $W(\omega, Q^2)$ имеет резонансные пики, к вычислению характеристик которых простейший вариант ТВ в КХД (без учета степенных поправок) неприменим. В резонансной области поэтому предсказания КХД лишь «в среднем» соответствуют реальному поведению форм-факторов. Связь между $W(\sigma, Q^2)$ при $\sigma > 1$ и вычисляемой в рамках ТВ при $\omega < 1$ амплитудой $T(\omega, Q^2)$ дается дисперсионным соотношением [ср. (27)]:

$$T(\omega, Q^2) = \int_1^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma - \omega} W(\sigma, Q^2) + \int_{-\infty}^{-1} \frac{d\sigma}{\sigma - \omega} W(\sigma, Q^2). \quad (70)$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче $W(\sigma, Q^2) = -W(-\sigma, Q^2)$.

Анализ вкладов. Общая структура диаграмм, дающих вклад в $T(\omega, Q^2)$, дана на рис. 7. Как и при анализе $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$, имеем дело с ситуацией, когда квадрат одного из внешних импульсов q велик. Однако в отличие от $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$ форм-фактор W зависит еще от одного импульса P , квадрат которого мал, но скалярное произведение Pq велико.

В рассматриваемой задаче функцию $F(\alpha, \omega)$ [см. (8)] в общем случае можно записать в виде [10, 33]:

$$F(\alpha, \omega) = \{A(\alpha) - \omega[A_s(\alpha) - A_u(\alpha)]\}/D(\alpha), \quad (71)$$

где $A, A_s, A_u, D \geq 0$. Можно показать [33], что

$$|[A_s(\alpha) - A_u(\alpha)]/A(\alpha)| < 1. \quad (72)$$

Следовательно, в области $|\omega| < 1$ функция $F(\alpha, \omega)$ не может обращаться в нуль за счет компенсации ненулевых слагаемых. Пинчевый режим, таким образом, в этой области не работает*. Можно ограничиться анализом РМР и ИР, т. е. для начала найти способы ликвидации зависимости диаграмм рис. 7 от переменных Q^2, Pq . Необходимо добиться того, чтобы импульс q , квадрат которого велик, входил в диаграмму и выходил из нее в одной и той же точке, что достигается сжатием в точку некоторого подграфа V , содержащего обе фотонные вершины. При этом, как нетрудно убедиться, диаграмма (в скалярной теории) теряет также и зависимость от Pq . Следовательно, как и в задаче, рассмотренной в предыдущем разделе, такое сжатие оказывается не только необходимым, но и достаточным, и все степенные вклады в $T(\omega, Q^2)$ определяются только РМР.

* Поскольку $F(\alpha, \omega)$ не представимо в виде произведения двух функций $F_1(\alpha, \omega), F_2(\alpha, \omega)$, каждая из которых является разностью двух функций, то пинчевый режим, согласно теореме Тиктопулоса [56], не дает вклада и при $|\omega| > 1$

Подграф V кроме двух обязательных фотонных линий должен иметь еще L других внешних линий ($L \geq 2$). Учитывая, что внешние фотонные линии, как и в задаче $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$, не привносят дополнительных Q -факторов в амплитуду, получаем оценку

$$T_{(PMP)}^V(\omega, Q^2) \leq Q^{2 - \sum_{i=1}^L t_i}, \quad (73)$$

справедливую (в четырех измерениях) для всех теорий с безразмерной константой связи [см. (15) и предшествующее ей обсуждение]. В данном разделе в методических целях ограничимся рассмотре-

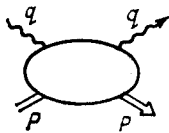


Рис. 7

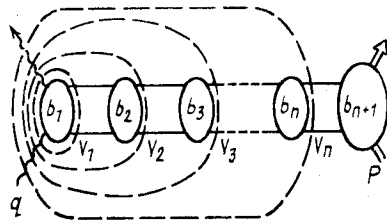


Рис. 8

нием ГНР в теории с юкавским взаимодействием, в которой глюоны имеют спин 0 (и твист 1), а полей с нулевым твистом нет. Анализ ГНР в КХД дан в разд. 5.

Если все поля имеют твист, равный единице, то ведущий степенной вклад $O(Q^0)$ в $T(\omega, Q^2)$ дает согласно (73) интегрирование по малым $\lambda(V)$ подграфов V , имеющих две (кроме фотонных) внешние линии. Для любой диаграммы такие подграфы можно упорядочить (рис. 8):

$$V_n \supset V_{n-1} \supset \dots \supset V_2 \supset V_1. \quad (74)$$

Замечание. Если рассматривается ГНР на составной частице, то максимальный подграф V_n не совпадает со всей диаграммой.

Анализ общей структуры ведущих степенных вкладов. Число подграфов V_1, \dots, V_n , ответственных за ведущий вклад $O(Q^0)$, определяется числом двухчастичных делений в (P, P) -канале и имеет смысл представлять себе каждую из исследуемых диаграмм в виде некоторой обобщенной лестницы, составленной из *двухчастично-неприводимых* [по отношению к (P, P) -каналу] подграфов b_1, \dots, b_{n+1} (см. рис. 8).

На языке меллиновского представления (20) суммарный ведущий вклад $T^{\text{lead}}(Q)$ можно определить как результат интегрирования по контуру малого радиуса $\delta \ll 1$, окружающему точку $J = 0$. Вклады $r(Q)$, обусловленные особенностями функции $\Phi(J)$ при $J = -1$ и левее, являются степенными поправками к $T^{\text{lead}}(Q)$. Согласно

общему анализу ведущий вклад (или, что то же самое, полюсная особенность при $J = 0$) возникает только в результате интегрирования по такой области пространства α -параметров, в которой по крайней мере одна из сумм $\lambda(V_i)$ [см. (9)] может обращаться в нуль. Поскольку из $\lambda(V_i) = 0$ следует, что и $\lambda(V_j) = 0$ для всех меньших подграфов $V_j \subset V_i$, каждый ведущий вклад T_i можно охарактеризовать максимальным подграфом V_i , для которого интегрирование по области $\lambda(V_i) \sim 0$ дает полюс $1/J$. Иными словами,

$$T(Q) = T^{\text{lead}}(Q) + r(Q) = \sum_{i=1}^n T_i(Q) + r(Q). \quad (75)$$

Структура выражения (75) воспроизводится явным образом в результате следующего построения. Проинтегрируем сначала по области, в которой мала сумма α -параметров линий, образующих наибольший подграф V_n : $\lambda(V_n) < 1/\mu^2$, где μ — некоторый масштаб. Соответствующий вклад обозначим $T_n(Q, \mu)$, затем в оставшейся области интегрирования выделим подобласть, в которой $\lambda(V_{n-1}) < 1/\mu^2$. Результат интегрирования обозначим $T_{n-1}(Q, \mu)$ и т. д. до тех пор, пока все возможности не будут исчерпаны. При таком построении вклад T_i в (75) обусловлен интегрированием по области, в которой $\lambda(V_i) < 1/\mu^2$, но $\lambda(V_j) > 1/\mu^2$ для всех подграфов V_j , содержащих V_i внутри себя.

Часто оказывается удобным более формальное определение приводящей к (75) процедуры разбиения вкладов. Пусть M_i — операция, выделяющая ведущий РМР-вклад подграфа V_i . Например, в приведенном выше построении M_i соответствует интегрированию по области, в которой $\lambda(V_i) < 1/\mu^2$. Тогда упомянутая процедура есть не что иное, как применение тождества:

$$1 \equiv M_n + (1 - M_n)M_{n-1} + (1 - M_n)(1 - M_{n-1})M_{n-2} + \dots + \\ + (1 - M_n)(1 - M_{n-1}) \dots (1 - M_2)M_1 + \\ + (1 - M_n)(1 - M_{n-1}) \dots (1 - M_2)(1 - M_1) \quad (76)$$

к амплитуде T , записанной в α -представлении. Операцию $(1 - M_i)$, соответствующую условию $\lambda(V_i) > 1/\mu^2$, будем в дальнейшем обозначать R_i . В этих обозначениях:

$$T_i = R_n \dots R_{i+1}M_i T; \quad (77)$$

$$r = R_n R_{n-1} \dots R_1 T. \quad (78)$$

Замечание. Определение операции M_i через простое ограничение области интегрирования слишком грубо. При таком определении не учитывается тот факт, что при интегрировании по области $\lambda(V_i) \sim 0$ могут возникать не только полюса $1/J$, но также и регулярные при $J = 0$ вклады, например полюса $1/(J + n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), расположенные в точке $J = -1$ и левее. Чтобы сформулировать более точное определение операции M_i , проанализируем более детально структуру интеграла по $\lambda(V_i)$.

Выделение ведущих вкладов. Интеграл по $\lambda (V_i)$ появляется в результате замены

$$\lambda_i \equiv \lambda (V_i) = \sum_{\sigma \in V_i} \alpha_\sigma; \alpha_\sigma = \lambda_i \beta_\sigma; \\ \prod d\alpha_\sigma = \lambda_i^{l-1} \prod d\beta_\sigma \delta(1 - \Sigma \beta_\sigma), \quad (79)$$

где l — число внутренних линий подграфа V_i . Используя (79), имеем

$$\Phi (J, \omega, p^2) = \int_0^\infty \lambda_i^{J-1} d\lambda_i \int_0^1 \prod_{\sigma \in V_i} d\beta_\sigma \delta(1 - \Sigma \beta_\sigma) \times \\ \times \int \prod_{\bar{\sigma} \in \bar{V}_i} d\alpha_{\bar{\sigma}} \varphi (J, \omega, \beta_\sigma, \alpha_{\bar{\sigma}}, \lambda_i; p^2) \exp [i p^2 I (\alpha_\sigma, \alpha_{\bar{\sigma}})], \quad (80)$$

причем линии $\bar{\sigma}$ принадлежат подграфу $\bar{V}_i = \mathcal{G} \setminus V_i$. Отметим, что p^2 -зависимость функции φ в (80) связана с предэкспоненциальным множителем $G (\alpha, \rho)$ в (3).

Разлагая подынтегральное выражение в ряд по λ_i :

$$\varphi (J, \omega, \beta_\sigma, \alpha_{\bar{\sigma}}, \lambda_i; p^2) \exp [i p^2 I (\alpha_\sigma, \alpha_{\bar{\sigma}})] = \\ = \varphi (J, \omega, \beta_\sigma, \lambda_i = 0, p^2) \exp [i p^2 I_0 (\alpha_{\bar{\sigma}})] + \sum_{k=1}^\infty \lambda_i^k \varphi_k (J, \beta_\sigma, \alpha_{\bar{\sigma}}, p^2) \quad (81)$$

(где $I_0 (\alpha_{\bar{\sigma}}) \equiv I (\alpha_\sigma = 0, \alpha_{\bar{\sigma}})$ представляет собой функцию $I (\alpha)$, построенную для диаграммы, у которой подграф V_i , сжат в точку), убеждаемся, что интегрирование по области $\lambda_i \approx 0$ дает полюс $1/J$ только для первого члена в (81). Следовательно, лишь этот член дает вклад в T_i , а вклады членов с $k \geq 1$ необходимо отнести к T_{i-1}, \dots, T_1 или r . Таким образом, операция M_i должна выделять из подынтегрального выражения в (81) ту его часть, которая после интегрирования по области $\lambda (V_i) < 1/\mu^2$ действительно дает полюс $1/J$. Обозначим эту операцию $M_i^{(1)}$:

$$M_i^{(1)} \Phi (J, \omega, p^2) = \left(\frac{1}{\mu^2} \right)^J \frac{1}{J} \int_0^1 \prod_{\sigma} d\beta_\sigma \delta(1 - \Sigma \beta_\sigma) \times \\ \times \int_0^\infty \prod_{\bar{\sigma}} d\alpha_{\bar{\sigma}} \varphi (J, \omega, \beta_\sigma, \alpha_{\bar{\sigma}}, \lambda_i = 0, p^2). \quad (82)$$

Учтем далее, что ведущий вклад $T^{\text{lead}} (Q)$ дается интегралом по малому контуру, окружающему точку $J = 0$. Это означает, что если разложить выражение $\Phi_i^{(1)} (J, \omega, p^2) \equiv (\mu^2)^J M_i^{(1)} \Phi (J, \omega, p^2)$ в ряд Лорана при $J = 0$, то лишь полюсные члены [обозначим их сумму

$\Phi_i^{(1)\text{pole}}(J, \omega, p^2)$ дадут вклад в $T^{\text{lead}}(Q)$, а регулярные при $J = 0$ члены необходимо добавить к r . Соответствующую операцию обозначим $M_i^{(2)}$:

$$M_i^{(2)}\Phi_i^{(1)}(J, \omega, p^2) - \Phi_i^{(1)\text{pole}}(J, \omega, p^2). \quad (83)$$

Окончательно: $M_i = M_i^{(2)}M_i^{(1)}$, и выражения (82), (83) дают полное определение операции M_i .

Замечание. Вклад области больших λ_i можно ограничить введением в интеграл по λ_i любой достаточно быстро убывающей при $\lambda_i \gtrsim 1/\mu^2$ функции, например $\exp(-\lambda_i\mu^2)$. В последнем случае $(1/J)$ в (82) необходимо заменить на $\Gamma(J) = \Gamma(J+1)/J$. Иными словами, допустимы различные определения операции $M_i^{(1)}$, отличающиеся от (82) на некоторый регулярный при $J = 0$ множитель.

Логарифмические вклады. Меллиновский образ $\Phi_i(J)$ вклада T_i имеет при $J = 0$ довольно сложную структуру. Это связано с тем, что V_i (при $i > 1$) содержит внутри себя меньшие подграфы V_{i-1}, \dots, V_1 , для которых интегрирование по области $\lambda_h \approx 0$ также дает ведущий вклад, т. е. полюс при $J = 0$. Это означает, что если применить замену

$$\sum_{\sigma \in V_{i-1}} \beta_\sigma = \rho_{i, i-1}; \quad \beta_\sigma = \rho_{i, i-1} \beta_\sigma^{(1)} \quad (84)$$

к β_σ -параметрам линий σ , принадлежащих подграфу V_{i-1} , то интеграл по λ_i, β_σ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \lambda_i^{J-1} d\lambda_i \int_0^1 (\rho_{i, i-1})^{J-1} d\rho_{i, i-1} \times \\ & \times \int_0^1 \prod_{\sigma \in V_i \setminus V_{i-1}} d\beta_\sigma \delta\left(1 - \rho_{i, i-1} - \sum_{\sigma \in V_i \setminus V_{i-1}} \beta_\sigma\right) \times \\ & \times \int_0^1 \prod_{\sigma \in V_{i-1}} d\beta_\sigma^{(1)} \delta\left(1 - \sum_{\sigma \in V_{i-1}} \beta_\sigma^{(1)}\right). \end{aligned} \quad (85)$$

Таким образом, интегрирование по области $\lambda_i < 1/\mu^2, \rho_{i, i-1} \approx 0$ дает фактор $(1/\mu^2)^{J/J^2}$, что соответствует логарифмическому вкладу. Заметим, что логарифм возник в результате интегрирования по области $\lambda_{i-1} \equiv \lambda_i \rho_{i, i-1} \ll \lambda_i$, т. е. в такой ситуации, когда «расстояния» внутри V_{i-1} намного меньше, чем внутри V_i как целого. Если подграф V_{i-1} также содержит меньший подграф V_{i-2} , то интегрирование по области $\rho_{i, i-1, i-2} \approx 0$, где

$$\rho_{i, i-1, i-2} = \sum_{\sigma \in V_{i-2}} \beta_\sigma^{(1)}; \quad \beta_\sigma^{(1)} = \rho_{i, i-1, i-2} \beta_\sigma^{(2)}, \quad (86)$$

дает еще один полюс J^{-1} . Следовательно, область $\lambda_{i-2} \ll \lambda_{i-1} \ll \lambda_i$ дает $\ln^2(Q^2/\mu^2)$, а для диаграммы G , состоящей из n блоков, функция $\Phi_G(J)$ имеет при $J = 0$ полюса вплоть до n -го порядка, т. е.

$$T_G(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right)^i a_k(\mu^2, \rho^2) + r_G(Q, p) \equiv T_G^{\text{lead}}(Q, p) + r_G(Q, p). \tag{87}$$

Чтобы перейти в (87) к другому μ , необходимо воспользоваться тождеством

$$\ln(Q^2/\mu^2) \equiv \ln(Q^2/\tilde{\mu}^2) + \ln(\tilde{\mu}^2/\mu^2) \tag{88}$$

и сгруппировать члены с одинаковой степенью $\ln(Q^2/\tilde{\mu}^2)$. Соответствующий коэффициент будет $a_k(\tilde{\mu}^2)$.

Замечание. Поскольку при замене (88) не возникают члены вида $O(1/Q^2)$, т. е. степенные поправки, то сумма логарифмических членов в (87) и остаток $r(Q, p)$ не зависят от μ . Это связано с тем, что разбиение на ведущий вклад, который дается интегралом по малому контуру, окружающему точку $J = 0$, и степенные поправки, соответствующие полюсам при $J = -1, -2, \dots$, будет единственными.

Вычитательная процедура. Действие операции $R_i \equiv (1 - M_i)$ можно проиллюстрировать на примере выражения (85). Рассмотрим вклад

$$T_{i-1} = R_n \dots R_i M_{i-1} T. \tag{89}$$

Для полюсной части интеграла по λ_i , т. е. для

$$\int (d\lambda_i/\lambda_i) \lambda_i^J, \tag{90}$$

операция $R_i = (1 - M_i)$ соответствует, грубо говоря, интегрированию по области $\lambda_i > 1/\mu^2$. Заметим теперь, что операция M_{i-1} , предшествующая в (89) операции R_i , согласно (82) включает в себя процедуру $\lambda_{i-1} \rightarrow 0$, и, следовательно, для вклада T_{i-1} операция R_i соответствует ограничению $\lambda(V_i \setminus V_{i-1}) > 1/\mu^2$ на α -параметры подграфа $V_i \setminus V_{i-1}$, представляющего собой разность подграфов V_i и V_{i-1} и лежащего вне V_{i-1} . Аналогично операции R_{i+1}, \dots, R_n сводятся с учетом процедуры $\lambda_{i-1} \rightarrow 0$ к ограничению

$$\lambda(V_k \setminus V_{i-1}) > 1/\mu^2; \quad k \geq i \tag{91}$$

для подграфов $V_{i+1} \setminus V_{i-1}, \dots, V_n \setminus V_{i-1}$, которые, как и V_i/V_{i-1} , все лежат вне подграфа V_{i-1} . В дальнейшем аналог условия (91) будем обозначать $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}(\bar{V}_{i-1})$, а аналог условия $\lambda(V_{i-1}) < 1/\mu^2$, т. е. операцию M_{i-1} , $\text{Reg}_{\mu^2}^{IR}(V_{i-1})$. Благодаря (91) интеграл (85), а также и аналогичные интегралы по $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ для вклада T_{i-1} все конечны при $J = 0$.

Таким образом, после применения процедуры $\lambda_{i-1} \rightarrow 0$ интегралы по $\lambda (V_k \setminus V_{i-1})$ при $J = 0$ формально расходятся на нижнем пределе, т. е. в ультрафиолетовой области, но операция $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}(\bar{V}_{i-1})$ дает рецепт вычитания (или вычитательную процедуру) соответствующих сингулярностей. В случае же, когда в разложении по λ_i [см. (91)] берутся вклады $O(\lambda_i)$, интегралы по λ_i при $J = 0$ не сингулярны, и для таких вкладов, очевидно, $M_i = 0$, а $R_i = 1$, т. е. R_i не дает никаких ограничений на интеграл по λ_i , но они и «не нужны», поскольку эти интегралы при $J = 0$ сходятся.

Замечание 1. В рассматриваемой задаче $V_k \supset V_i$, и выполнение условия $\lambda(V_i \setminus V_{i-1}) > 1/\mu^2$ автоматически влечет за собой выполнение условия (91) для всех $k > i$. Далее, условия (91) будут заведомо выполняться, если

$$\alpha_1^{(i)} + \alpha_2^{(i)} > 1/\mu^2 \quad (92)$$

для линий $\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}$, соединяющих блоки b_i и b_{i-1} . Условие (92) совместно с условием $\lambda(V_i) < 1/\mu^2$ можно интерпретировать следующим образом: подграф V_{i-1} соответствует «малым расстояниям», блок b_i отделен от него «большими расстояниями», а расстояния между блоками b_i, \dots, b_n (и внутри этих блоков) могут быть произвольными.

Замечание 2. Если используется определение операции M_i , отличающееся от (82) на некоторый множитель $k(J)$, то при этом, естественно, меняется и операция R_i . В частности, если M_i означает введение веса $\exp(-\lambda_i \mu^2)$ в интеграле по λ_i , то R_i будет соответствовать интегрированию по λ_i с весом $(1 - \exp(-\lambda_i \mu^2))$.

Факторизация вкладов больших и малых расстояний. Поскольку $\text{Reg}_{\mu^2}^{IR}(V_i)$ действует только на α -параметры линий подграфа V_i , а $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$ — на α -параметры линий подграфа $\bar{V}_i = G \setminus V_i$, то процедура $R_n \dots R_{i+1} M_i$ факторизуется:

$$R_n \dots R_{i+1} M_i = \text{Reg}_{\mu^2}^{UV}(\bar{V}_i) \text{Reg}_{\mu^2}^{IR}(V_i). \quad (93)$$

Еще важнее то, что зависимость функции $\varphi(J, \omega, \beta_\sigma, \alpha_\sigma, \lambda_i = 0; p^2)$ в (82) от параметров $\alpha_\sigma, \beta_\sigma$, относящихся соответственно к подграфам \bar{V}_i и V_i , также факторизуется:

$$\varphi(J, \omega, \beta_\sigma, \alpha_\sigma, \lambda_i = 0; p^2) = C(J, \beta_\sigma, \omega) \otimes f(\alpha_\sigma, p^2). \quad (94)$$

В частности, из (94) следует, что коэффициент при полюсе $1/J$ в (82) представляет собой произведение вкладов подграфов V_i и \bar{V}_i , а именно

$$\left[\int_0^1 \prod_{\sigma \in V_i} \delta(1 - \sum \beta_\sigma) C(J, \omega, \beta_\sigma) \right] \otimes \left[\int_0^\infty \prod_{\bar{\sigma} \in \bar{V}_i} d\alpha_{\bar{\sigma}} f(\alpha_{\bar{\sigma}}, p^2) \exp(ip^2 I_0(\alpha_{\bar{\sigma}})) \right]. \quad (95)$$

Для вклада $T_i(Q)$ это означает, что

$$T_i(Q) \sim \tilde{C}(Q^2, \omega, V_i) \otimes f(p^2, V_i). \quad (96)$$

Отсутствие Q^2 -зависимости в $f(p^2, \bar{V}_i)$ отражает тот факт, что сжатие подграфа V_i в точку, которое является аналогом процедуры $\lambda_i \rightarrow 0$ в $\varphi(J, \omega, \beta_\sigma, \alpha_\sigma, \lambda_i = 0; p^2)$, ликвидирует зависимость от Q^2 . Переход $\lambda_i \rightarrow 0$ приводит также к тому, что в множителе C_i , сопоставляемом подграфу V_i , нет p^2 -зависимости, обусловленной экспоненциальным фактором $\exp[ip^2 I(\alpha)]$. Функция $C(Q^2, \omega, V_i)$ могла бы иметь зависимость от p^2 за счет предэкспоненциального множителя $G(\alpha, p)$. Но в данном случае, как это следует из соображений размерности, p^2 может появиться только в виде степенной поправки p^2/Q^2 , которая, по определению, не должна входить в T_i . Таким образом, при построении $C(V_i)$ малые переменные p^2 необходимо приравнять нулю.

В простейших случаях (например, в скалярных теориях φ^3, φ^4) формула (94), которая выражает факторизацию вкладов, связанных с большими и малыми расстояниями, может быть без особого труда доказана непосредственно в α -представлении (см. [33]). Анализ теорий, в которых имеются частицы с ненулевым спином, значительно усложняется наличием предэкспоненциального множителя $G(\alpha, p)$, обусловленного числителями спинорных пропагаторов, вершинами с производными и т. п. Свойства факторизации этого множителя можно получить только в результате весьма кропотливого анализа. Для 4-хвостых диаграмм в теории с юкавским взаимодействием такой анализ был проделан в [68]. Однако в векторных теориях подграф V_i может иметь произвольное число внешних векторных линий, и это приводит к таким усложнениям, что даже в простейших (абелевых) векторных теориях анализ факторизации с помощью α -представления, видимо, невозможен. В неабелевых теориях (в частности, в КХД) к этому добавляются усложнения, связанные с наличием производных в трехглюонных вершинах и присутствием во всех вершинах цветовых матриц.

В [33] было предложено, исходя из установленной с помощью (довольно простого) анализа в α -представлении топологической структуры подграфов, ответственных за ведущий вклад, дальнейший анализ проводить в координатном представлении, в котором свойства факторизации почти тривиальны. На этом пути удается также установить связь между стандартным подходом к анализу асимптотики процесса глубокоэластичного рассеяния, основанным на операторных разложениях [12, 46], и методами прямого суммирования.

Анализ в координатном представлении. Формулу (75) с учетом (93) можно записать в виде

$$T_G(q, P) = \sum_{i=1}^n \int \exp(iqx) d^4x \times \\ \times R_\varepsilon \left[\int d\xi d\eta \text{Reg}_{\mu^2}^{IR} C_{\{\alpha\}}(V_i, q, \xi, \eta, \mu_R, g) \times \right. \\ \left. \times \text{Reg}_{\mu^2}^{UV}(\bar{V}_i, \xi, \eta, P; \varepsilon, \mu_R, g) \right] + r_G(q, P), \quad (97)$$

где ξ, η — координаты вершин подграфа V_i , из которых выходят две линии, соединяющие блоки b_i и b_{i+1} (рис. 9, а).

Заметим, что поскольку G и V_i не расходятся как целое, то R -операция в (97) факторизуется:

$$R_\varepsilon \{C(V_i, \varepsilon) f(\bar{V}_i, \varepsilon)\} = \{R_\varepsilon C(V_i, \varepsilon)\} \{R_\varepsilon f(\bar{V}_i, \varepsilon)\} \quad (98)$$

и ее применение не меняет структуры выражения (97).

Далее, если внешние линии подграфа V_i — спинорные, то имеет смысл с помощью тождества Фирца

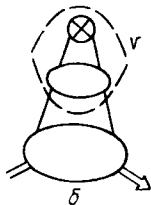
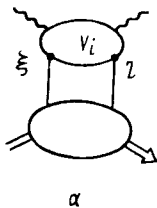


Рис. 9

$$\delta_\alpha^\alpha \cdot \delta_\beta^{\beta'} = \sum_{a=S, V, T, A, P} (\Gamma_a)_\beta^\alpha (\Gamma_a)_{\alpha'}^{\beta'} \quad (99)$$

избавиться от дираковских индексов $\{\alpha\}$. Для усредненных по спину амплитуд $T(q, P)$ только S - и V -проекции дают ненулевой вклад, причем V -проекция доминирует, так как в отличие от S -проекции она дает добавочный P_μ -фактор и реализует, таким образом, верхнюю оценку в (73).

Представление (97) справедливо для любой диаграммы, поэтому суммируя по всем диаграммам, получаем

$$T(q, P) = \sum_k \int \exp(iqx) dx \int d\xi d\eta [\text{Reg}_{\mu^2}^{IR} C_k(x, \xi, \eta, \mu_R, \bar{g}(\mu_R))] \times \\ \times [\text{Reg}_{\mu^2}^{UV} f_k(\xi, \eta, P, \mu_R, \bar{g}(\mu_R))] + R(q, P), \quad (100)$$

где k нумерует различные типы двухчастичных промежуточных состояний (кварковые, глюонные и т. п.).

Функции C, f , представляющие собой суммы всевозможных фейнмановских диаграмм с фиксированными внешними линиями, можно компактно записать в виде полных функций Грина

$$C_k(x, \xi, \eta; \mu_R, \bar{g}(\mu_R); \mu^2) = \\ = \text{Reg}_{\mu^2}^{IR} \langle 0 | R_\varepsilon S + T(j^\mu(x) j_\mu(0) \chi_k(\xi) \chi_k(\eta) S | 0) \rangle; \quad (101)$$

$$f_k(\xi, \eta; P; \mu_R, \bar{g}(\mu_R); \mu^2) = \langle P | R_\varepsilon S + T(\mathcal{O}_k(\varepsilon, \eta; \mu^2) S | P) \rangle, \quad (102)$$

где S — S -матрица; χ_k — точки, сопряженные полям φ_k ; \mathcal{O}_k — бло-кальный оператор. В частности, для скалярных полей

$$C^{(\varphi)}(\xi, \eta; \mu^2) = \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} (: \varphi(\xi) \varphi(\eta) :), \quad (103)$$

а для спинорных

$$\mathcal{O}_V^{(\psi)}(\xi, \eta; \mu^2) = \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} (: \bar{\psi}(\xi) \gamma_\nu \psi(\eta) :). \quad (104)$$

Знак нормального произведения $(: :)$ соответствует тому очевидному из рис. 9, а факту, что поля $\varphi(\xi), \varphi(\eta)$ [или $\psi(\xi), \psi(\eta)$] спарены с операторами из S -матрицы, а не друг с другом. Далее, линии,

соединяющие b_i и b_{i+1} , необходимо отнести к f_i , а не к C_i , поэтому f_i выражается через обычную, а C_i — через «ампутированную» функцию Грина, в которую вместо полей φ входят соответствующие токи χ .

Разложение по локальным операторам. В координатном представлении аналогом разложения в ряд по степеням $\lambda(V)$ является разложение биллокального оператора $\mathcal{O}_h(\xi, \eta)$ в ряд по $\Delta = \xi - \eta$:

$$\mathcal{O}_h(\xi, \eta; \mu^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^{v_1} \dots \Delta^{v_n}}{n!} O_{h v_1 \dots v_n} \left(\frac{\xi + \eta}{2}; \mu^2 \right). \quad (105)$$

Коэффициенты этого разложения представляют собой локальные операторы $O_{h v_1 \dots v_n}$.

Пользуясь стандартными методами (см., например, [17]), нетрудно установить, что матричные элементы локальных операторов $O_{h v_1 \dots v_n}$ обладают дополнительными расходимостями, которые возникают в подграфах v , содержащих новую вершину (с n производными) и имеющих две внешние линии (см. рис. 9, б), т. е. в подграфах, которые имеют вид разности $v = V_j \setminus V_i$ двух подграфов V_j, V_i , ответственных за ведущий вклад. Такие расходимости, соответствующие в α -представлении сингулярностям интегралов (85) при $J = 0$, не удаляются обычной R -операцией. Их появление отражает тот факт, что произведение двух квантовополевых операторов в одной точке не определено. Однако, как мы видели выше, операция $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$ [например, условие (94)] обеспечивает конечность интересующих нас интегралов по λ . Следовательно, с учетом операции $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$, которую можно, таким образом, трактовать как R -операцию для новых вершин, разложение (105) имеет вполне определенный смысл.

Переразложение по неприводимым операторам. Матричный элемент $\langle P | O_{v_1 \dots v_n} | P \rangle$ представляет собой, вообще говоря, сумму самых разнообразных структур типа $(P_{v_1} P_{v_2} \dots P_{v_n})$, $(g_{v_1 v_2} P_{v_3} \dots P_{v_n})$ и т. д., причем каждая из таких структур входит в эту сумму со своим коэффициентом, зависящим от динамики на больших расстояниях. Чтобы внести порядок в этот хаос, имеет смысл переразложить операторы $O_{v_1 \dots v_n}$ по неприводимым, для которых вид тензорной структуры определяется однозначно. Для скалярных операторов $O_{v_1 \dots v_n}^{(\varphi)}$, которые автоматически симметричны по v_1, \dots, v_n , это сводится к разложению по бесследовым тензорам:

$$\begin{aligned} & \Delta^{v_1} \dots \Delta^{v_n} (\varphi_h \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} \varphi) = \\ & = \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{n! (n-2l+1)!}{l! (n-l+1)!} \left(\frac{\Delta^2}{4} \right)^l \{ \Delta^{v_1} \dots \Delta^{v_{n-2l}} \} (\varphi (\partial^2)^l \{ \partial_{v_1} \dots \partial_{v_{n-2l}} \} \varphi), \quad (106) \end{aligned}$$

где { } означает взятие бесследовой части тензора:

$$g^{\mu\nu} \{O_{\mu\nu} \dots\} = 0. \tag{107}$$

Тензорная структура матричных элементов бесследовых операторов определяется однозначно:

$$\begin{aligned} i^n \langle P | R_c S + T ((\text{Reg}_{\mu^2}^{UV} : \partial_{v_1} \dots \partial_{v_{n-2l}}) \{ \varphi : \} S) | P \rangle = \\ = 2 \{ P_{v_1} \dots P_{v_{n-2l}} \} (M^2)^l A_{n,l}^{(\varphi)}(\mu^2, \mu_R^2, \bar{g}(\mu_R)). \end{aligned} \tag{108}$$

Множитель $(M^2)^l$, где M — параметр, имеющий размерность массы, выделен для того, чтобы коэффициент $A_{n,l}^{(\varphi)}$ был безразмерным.

Для спинорных полей необходимо сначала выделить из $O_{v_1 \dots v_n}^{(\psi)}$ оператор, симметричный по всем индексам:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma_\nu \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} \psi = (\bar{\psi} \gamma_\nu \partial_{v_1} \dots \partial_{v_n} \bar{\psi})_{\text{симм}} + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \bar{\psi} (\gamma_\nu \partial_{v_i} - \gamma_{v_i} \partial_\nu) \partial_{v_1} \dots \partial_{v_{i-1}} \partial_{v_{i+1}} \dots \partial_{v_n} \psi, \end{aligned} \tag{109}$$

а затем с помощью формул, аналогичных (106), переразложить имеющиеся в (109) операторы по бесследовым. Тензорная структура матричных элементов в этом случае также определяется однозначно, например:

$$\begin{aligned} i^{n-1} \langle P | \bar{\psi}_a \{ \gamma_{\mu_1} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \} \psi_a | P \rangle = \\ = 2 \{ P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \} [\tilde{f}_a(n) + (-1)^n \tilde{f}_a(n)]. \end{aligned} \tag{110}$$

Переразложение (106) особенно полезно тем, что оно автоматически приводит и к разложению координатного множителя по бесследовым комбинациям $\{ \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_{n-2l}} \} (\Delta^2)^l$. Поскольку матричный элемент $\langle P | O((\xi + \eta)/2) | P \rangle$ не зависит от ξ, η (в силу трансляционной инвариантности), тензорная структура результата интегрирования по ξ, η для каждой бесследовой комбинации фиксируется однозначно:

$$\begin{aligned} \int d\xi d\eta \{ \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_{n-2l}} \} (\Delta^2)^l C^{(\varphi)}(x, \xi, \eta; \mu^2) = \\ = \{ x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n-2l}} \} (x^2)^{l-d_0} E_{n,l}^{(\varphi)}(x^2 \mu^2). \end{aligned} \tag{111}$$

Подставляя (105), (106) и (111) в (97) и интегрируя по x , получаем

$$T^{(\varphi)}(q, P) = \sum_{n,l=0}^{\infty} C_{n,l}^{(\varphi)}(Q^2/\mu^2) A_{n,l}^{(\varphi)}(\mu^2) (M^2)^l \{2qP\}^{n-2l} / (Q^2)^n. \tag{112}$$

В (112) введено обозначение, которое будет использоваться в дальнейшем:

$$\{AB\}^n = \{A_{\mu_1} \dots A_{\mu_n}\} \{B^{\mu_1} \dots B^{\mu_n}\}. \tag{113}$$

Согласно (112) ведущий вклад в $T(q, P)$ соответствует операторам $\Phi\{\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n}\} \Phi$ с минимальным твистом, равным в данном случае двум. Операторы $O_l \equiv \Phi(\partial^2)^l \{\partial \dots \partial\} \Phi$, имеющие твист $2 + 2l$, при $l \geq 1$ дают степенные поправки $O(Q^{-2l})$ в $T^\Phi(q, P)$ [ср. (73)]. Аналогично ведущий вклад в $T^{(\Psi)}(q, P)$ обусловлен операторами $\bar{\Psi}\{\gamma_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n}\} \Psi$, а операторы, содержащие ∂^2 или $\gamma_{\mu} \partial^{\mu}$, так же, как и все операторы, антисимметричные по какой-либо паре индексов, приводят к степенным поправкам. Таким образом, приходим к стандартному представлению [12, 14, 46]:

$$T(q, P) = \int \exp(iqx) dx \left[\sum_{i=\Psi, \Phi} \{x^{v_1} \dots x^{v_n}\} (x^2)^{d_0^i} \times \right. \\ \left. \times E_n^i(x^2 \mu^2) \langle P | O_{v_1 \dots v_n}^i(0, \mu^2) | P \rangle + \text{«высшие твисты»} \right], \quad (114)$$

т. е. к операторному разложению для $T(q, P)$.

Интегрируя по x , получаем [ср. (112)]:

$$T(\omega, Q^2) = \sum_{\alpha=\Psi, \Phi} \sum_n \frac{2^n \{Pq\}^n}{(Q^2)^n} C_n^\alpha(Q^2/\mu^2, g) A_n^\alpha(\mu^2) + Q(1/Q^2). \quad (115)$$

Операторные разложения и асимптотика $T(Q^2, p^2)$ при $Q^2 \rightarrow \infty$. Обычно операторное разложение для глубоконеупругого рассеяния записывают в виде

$$T(J(x) J(0)) = (x^2)^{d_0} \sum_{\Phi, \Psi} \sum_{n=0}^{\infty} \{x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n}\} \times \\ \times E_n^i(x^2 \mu^2) O_{v_1 \dots v_n}(0; \mu^2) + \text{«высшие твисты»}, \quad (116)$$

т. е. целиком в координатном представлении, без какой-либо ссылки на импульсные переменные q, P . Такая запись представления (115) оправдана, однако, лишь постольку, поскольку асимптотика функции $T(q, P)$, являющейся фурье-образом матричного элемента $\langle P | TJ(x) J(0) | P \rangle$, в бьеркеновском пределе ($Q^2 \rightarrow \infty, (Pq) \rightarrow \infty, \omega \equiv 2(Pq)/Q^2$ — фиксировано) находится во взаимно однозначном соответствии с сингулярностями произведения токов $J(x), J(0)$ на световом конусе [8, 105, 106]. Поведение произведения токов при $x^2 = 0$ было исследовано во многих работах [7, 8, 14, 74, 101, 105—111]. В частности, в [109, 110] дано математически строгое доказательство справедливости разложений на световом конусе в рамках теории возмущений (см. также [117]). Однако существуют процессы, сечения которых также можно выразить через матричные элементы произведения токов, а связь между асимптотикой при $Q^2 \rightarrow \infty$ и сингулярностями произведения $J(x) J(0)$ при $x^2 = 0$ отсутствует. В качестве примера можно привести процесс инклю-

живного рождения массивной лептонной пары в столкновении двух адронов A, B :

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} \Big|_{AB \rightarrow \mu^+ \mu^- X} \propto \int dx \exp(ikx) dk \langle AB | J(x) J(0) | AB \rangle \delta^+(k^2 - Q^2), \quad (117)$$

где Q — инвариантная масса $\mu^+ \mu^-$ -пары. Кроме того, можно назвать множество процессов (к ним относятся, в частности, все чисто адронные жесткие процессы), сечения которых невозможно связать сколько-нибудь простым способом с матричными элементами произведения токов. Таким образом, подход, основанный на операторных разложениях (в стандартном понимании этого термина как разложения произведения операторов), имеет очень ограниченную область применимости. Именно этот факт стимулировал разработку подходов [33—36], в которых объектом исследования является амплитуда $T(q, P)$ независимо от того, можно ли выразить ее через произведение токов или нет.

4. ФАКТОРИЗАЦИЯ И МОДИФИЦИРОВАННАЯ ПАРТОННАЯ МОДЕЛЬ

Перейдем к обсуждению наиболее важных с практической точки зрения следствий, вытекающих из представления (115).

Кси-скейлинг. Вклад операторов, имеющих twist равный двум, содержит степенные поправки $O(m_p^2/Q^2)$, обусловленные ненулевой массой мишени (например, протона). Эти поправки возникают только из множителя $\{P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n}\}$ и поэтому их можно вычислить точно, если воспользоваться некоторыми достаточно простыми свойствами бесследовых комбинаций. Например, в 4-мерном пространстве — времени

$$\{AB\}^n = (\sqrt{A^2 B^2}/2)^n C_n^1((AB)/\sqrt{A^2 B^2}), \quad (118)$$

где C_n^1 — полином Гегенбауэра (см., например, [83])

$$C_n^1(\cos \theta) = \sin[(n+1)\theta]/\sin \theta. \quad (119)$$

Объединяя выражения (118), (119), легко получить

$$2^r \{P_{\mu_1} \dots P_{\mu_r}\} q^{\mu_1} \dots q^{\mu_r} / (Q^2)^r = \\ = [Q^2/2 (Pq)] [(1/\xi_-)^{r+1} - (1/\xi_+)^{r+1}] (\sqrt{1 + m_h^2 Q^2 / (Pq)^2})^{-1}, \quad (120)$$

где $Q^2 = -q^2$; $m_h^2 = P^2$; ξ_+ , ξ_- даются формулой

$$\xi_{\pm} = Q^2 / [(Pq) \mp \sqrt{(Pq)^2 + m_h^2 Q^2}]. \quad (121)$$

С помощью (120) можно переписать представление (115) в следующем виде:

$$T(q, P) = \frac{x}{\sqrt{1+4m_h^2 x^2/Q^2}} \sum_a \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\xi_-}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{\xi_+}\right)^{n+1} \right] \times \\ \times [1 + (-1)^n] C_n^a(Q^2/\mu^2, g) A_n^a(\mu^2) \equiv T_- - T_+, \quad (122)$$

где $x \equiv 1/\omega = Q^2/(2Pq)$ — обычная бьеркеновская переменная. Поскольку $|\xi_+| > 1$, ряд для T_+ всегда сходится, и, следовательно, только амплитуда T_- имеет разрез при $|x| < 1$, скачок на котором и дает структурную функцию $W(x, Q^2)$. Чтобы получить явное выражение для $W(x, Q^2)$, запишем (122) в виде меллиновского интеграла

$$T_-(x, Q^2) = \frac{x}{\sqrt{1+4m_h^2 x^2/Q^2}} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{dj}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin \pi(j+1)} \times \\ \times (1/\xi_-)^{j+1} [1 + \exp(i\pi j)] [M(j, Q^2) + r(j, Q^2)], \quad (123)$$

где $M(j, Q^2)$ и $r(j, Q^2)$ даются аналитическим продолжением коэффициентов $M_n \equiv E_n A_n$ и $r_n = O(1/Q^2)$ с четных n в комплексную плоскость j . Используем далее, что

$$(-\omega - i\epsilon)^{j+1} - (-\omega + i\epsilon)^{j+1} = 2i\omega^{j+1} \sin \pi(j+1). \quad (124)$$

В результате получаем представление для $\tilde{W}(\omega, Q^2) \equiv W(x, Q^2)$:

$$\tilde{W}(\omega, Q^2) = \frac{T(\omega + i\epsilon, Q^2) - T(\omega - i\epsilon, Q^2)}{2\pi i} = \\ = \frac{x}{\sqrt{1+4m_h^2 x^2/Q^2}} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} \frac{dj}{2\pi i} \left(\frac{1}{\xi}\right)^{j+1} [M(j, Q^2) + r(j, Q^2)], \quad (125)$$

из которого следует, что если пренебречь степенными поправками и логарифмической зависимостью от Q^2 , имеющейся в $M(j, Q^2)$, то величина

$$W(x, Q^2, m_h^2) \sqrt{1+4m_h^2 x^2/Q^2}/x. \quad (126)$$

будет функцией лишь от одной модифицированной масштабной переменной ξ [112, 113]:

$$\xi = \frac{2x}{1 + \sqrt{1+4m_h^2 x^2/Q^2}} = x - x^3 \frac{m_h^2}{Q^2} + \dots, \quad (127)$$

переходящей в пределе $Q^2 \rightarrow \infty$ в обычную переменную x .

Моменты структурных функций. Применяя к (125) обратное преобразование, приходим к формуле Нахтманна [112]:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} W(x, Q^2) \xi^{n+1} = C_n \otimes A_n + r_n(M^2/Q^2). \quad (128)$$

В действительности (128) является строгим следствием исходной формулы (115), а (125) справедлива при всех x лишь в том случае, когда $C_n \otimes A_n + r_n$ равномерно ограничены при различных n .

Корректный вывод (128) основан на использовании дисперсионного соотношения (70):

$$T(\omega, Q^2) = \int_1^{\infty} \left\{ \frac{d\sigma}{\sigma - \omega} \tilde{W}(\sigma, Q^2) + (\omega \rightarrow -\omega) \right\}, \quad (129)$$

связывающего величину $\tilde{W}(\sigma, Q^2)$, наблюдаемую экспериментально, с амплитудой $T(\omega, Q^2)$ в нефизической области $|\omega| < 1$ (эту область называют иногда также евклидовой, поскольку из-за отсутствия разрывов при $|\omega| < 1$ всегда возможен виковский поворот $k_0 \rightarrow ik_0$). Разлагая подынтегральное выражение в (129) по ω/σ , получаем

$$T(\omega, Q^2) = 2 \sum_{n=0, 2, 4, \dots} \int_1^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{n+1}} \omega^{n+1} W(\omega, Q^2). \quad (130)$$

Если пренебречь массой мишени, то сравнение коэффициентов при одинаковых степенях ω в (130) и (115) дает *правило сумм Полякова—Корнуолла—Нортонна* [114, 115]:

$$W_n(Q^2) = \int_1^{\infty} \frac{W(\omega, Q^2)}{\omega^{n+1}} d\omega = \sum_{a=\varphi, \psi} C_n^a(Q^2/\mu^2, g) A_n^a(\mu^2) + r_n(M^2/Q^2), \quad (131)$$

связывающее при четных n величины $C_n \otimes A_n, r_n$ с моментами структурной функции $\tilde{W}(\omega, Q^2)$.

Аналогичным образом, привлекая ряд формул для полиномов Гегенбауэра S_n^1 , можно получить из (129) и нахтманновские моменты (128) (см. [112]).

Связь с партонной моделью. Поскольку в $r_n(M^2/Q^2)$ вошли степенные поправки, для каждого n найдется такое Q_0^2 , зависящее, вообще говоря, от n , что при $Q^2 > Q_0^2$ величиной r_n можно пренебречь. В этом случае использование формулы (128) позволяет выразить моменты структурной функции $W(x, Q^2)$ через $C(n, Q^2/\mu^2)$ и $A_n^a(\mu^2)$. Из этих двух величин первая описывает взаимодействие на малых расстояниях, и поэтому в асимптотически свободных теориях функция $C(n, Q^2/\mu^2)$ может быть вычислена по теории возмущений. Коэффициенты A_n^a аккумулируют информацию о взаимодействии на больших расстояниях, и для них теория возмущений в реалистических теоретико-полевых моделях сильных взаимодействий не применима. Эти коэффициенты следует трактовать как феноменологические параметры. Аналогичная ситуация, как известно, имеет место и в партон-

ной модели [5]: $W(x, Q^2)$ выражается функцией распределения партонов $f_a(x)$, которые в рамках самой модели не вычисляются:

$$W(x, Q^2) = \sum_a e_a^2 [f_a(x) + f_{\bar{a}}(x)]. \tag{132}$$

Для моментов

$$W_n(Q^2) = \sum_a e_a^2 \int_0^1 [f_a(x) + f_{\bar{a}}(x)] x^n dx/x. \tag{133}$$

Таким образом, в партонной модели коэффициенты W_n пропорциональны моментам функций распределения партонов.

Модифицированная партонная картина. Попробуем теперь, не привлекая каких-либо представлений партонной модели, проанализировать свойства функций, моменты от которых равны A_n .

Согласно известной теореме Карлсона (см., например, [116]) последовательность чисел $\{A_n\}$ задает две аналитические функции $A^+(n)$, $A^-(n)$, совпадающие с A_n соответственно при четных и нечетных n :

$$\begin{aligned} A_n(n) &= \frac{1+(-1)^n}{2} A_n^+(n) + \frac{1-(-1)^n}{2} A_n^-(n) \equiv \\ &\equiv \tilde{f}_a(n) + (-1)^n \tilde{f}_{\bar{a}}(n). \end{aligned} \tag{134}$$

Это связано с тем, что в общем случае интегрирование по β в формуле моментов

$$A_n(n, \mu^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^n f_a(\beta, \mu^2) d\beta/\beta \tag{135}$$

идет по всей вещественной оси. Определяя $f_a(\beta) = f_{\bar{a}}(-\beta)$ при $\beta < 0$, можно перейти к интегралу от 0 до ∞ , и при этом перед $\tilde{f}_{\bar{a}}$ появляется множитель $(-1)^n$.

Подставляя далее (135) в

$$\begin{aligned} T_{\text{кварк}}(q, P) &= \int \exp(iqx) dx \int d\xi d\eta \sum_a C_{\mu_1}^a(x, \xi, \eta; \mu^2) \times \\ &\times \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} (\xi - \eta)_{\mu_2} \dots (\xi - \eta)_{\mu_n} \{P^{\mu_1} \dots P^{\mu_n}\} (1 + (-1)^n) A(n, \mu^2) \end{aligned} \tag{136}$$

[см. (100), (105) (110)], приходим к партонному представлению для $T(q, P)$:

$$T_{\text{кварк}}(q, P) = \sum_a \int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\beta} t_a(q, \beta P; \mu^2) |_{P^2=0} [f_a(\beta, \mu^2) + f_{\bar{a}}(\beta, \mu^2)], \tag{137}$$

где

$$t_a(q, \beta P; \mu^2) = \int \exp(iqx) \int \exp[-i(P\xi)\beta + i(P\eta)\beta] C_a(x, \xi, \eta; \mu^2) d\xi d\eta \quad (138)$$

— не что иное, как амплитуда T для подпроцесса $\gamma^*_{a'} \rightarrow \gamma^*_a$, в котором партон a имеет импульс βP (рис. 10).

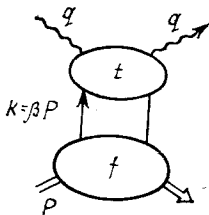


Рис. 10

Замечание. Поскольку $T(\omega, Q^2)$ является четной функцией параметра ω , в (136) вклад дает только $A^+(n)$, и поэтому в (137) стоит сумма $f_a + f_{\bar{a}}$.

Структура амплитуды в комплексной ω -плоскости. Амплитуда $T(q, P)$ регулярна при $|\operatorname{Re} \omega| < 1$ и имеет два разреза, начинающиеся в точках $\omega = \pm 1$. Аналогично функция $t_a(q, \beta P)$ имеет разрезы, начинающиеся в точках $\omega = \pm 1/\beta$. Отсюда следует, в частности, что функция $f(\beta)$ равна нулю при $\beta > 1$, в противном случае амплитуда $T(q, P)$ обладала бы особенностями при $|\operatorname{Re} \omega| < 1$.

Учтем далее, что за разрезы по ω в правой части выражения (137) ответственны только функции $t_a(q, \beta P; \mu^2)$. Это означает, что для скачка на данном разрезе, т. е. для $\tilde{W}(\omega, Q^2)$, справедлива формула

$$\tilde{W}_{\text{кварк}}(\omega, Q^2) = \sum_a \int_{1/\omega}^1 d\beta \tilde{w}_a(\beta\omega, Q^2/\mu^2) [f_a(\beta, \mu^2) + f_{\bar{a}}(\beta, \mu^2)], \quad (139)$$

аналогичная (137), где $w_a(\omega\beta, Q^2/\mu^2)$ — скачок функции $t(\beta P, q; \mu^2)$ на соответствующем разрезе. Вычисляя моменты

$$\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^{n+1}} \tilde{W}_{\text{кварк}}(\omega, Q^2) = \sum_a \left[\int_1^\infty w_a(\zeta, Q^2/\mu^2) \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \right] [\tilde{f}_a(n, \mu^2) + \tilde{f}_{\bar{a}}(n, \mu^2)], \quad (140)$$

приходим к заключению, что $C_n^a(Q^2/\mu^2)$ в (115) — моменты «структурных функций» $w_a(\zeta, Q^2/\mu^2)$ для кваркового подпроцесса.

Глюонный вклад. В силу вещественности глюонного поля глюон и антиглюон — это одно и то же и, следовательно,

$$\operatorname{Reg}_{\mu^2}^{UV} \langle P | S^+ T (: \varphi \{ \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \} \varphi : S) | P \rangle = \frac{1 + (-1)^n}{2} \{ P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \} \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta} f_g(\beta, \mu^2). \quad (141)$$

Таким образом, в общем случае $W = W_{\text{кварк}} + W_{\text{глюон}}$, где

$$\tilde{W}_{\text{глюон}}(\omega, Q^2) = \int_{1/\omega}^1 d\beta \tilde{w}_g(\omega\beta, Q^2/\mu^2) f_g(\beta, \mu^2). \quad (142)$$

Однако в отличие от кваркового глюонный вклад не равен нулю только в том случае, если учитываются кварк-глюонные взаимодействия, поскольку нейтральные глюоны не могут непосредственно взаимодействовать с электромагнитным полем.

Глюоны проявляют себя и в формуле для моментов:

$$W_n(Q^2) = \sum_{a=1}^{N_f} C_n^a(Q^2/\mu^2) (f_a(n, \mu^2) + f_{\bar{a}}(n, \mu^2)) + C_n^g(Q^2/\mu^2) f_g(n, \mu^2) + r_n(M^2/Q^2). \quad (143)$$

Замечание. Соотношения (134), (141) справедливы при всех n . Однако только при четных n величины $[f_a(n) + f_{\bar{a}}(n)]$ пропорциональны матричным элементам локальных операторов (108) и (110). При нечетных n эти матричные элементы для кварковых операторов пропорциональны $f_a - f_{\bar{a}}$, а для глюонного равны нулю. Иными словами, формула (143) при произвольных n дается аналитическим продолжением с четных n .

Синглетные и несинглетные вклады. В формуле (143) присутствуют два типа вкладов — кварковые и глюонные, и, кроме того, сами

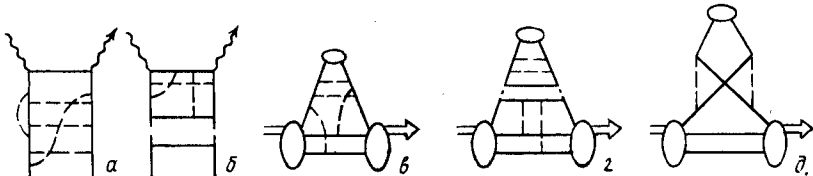


Рис. 11

кварки могут быть разных типов. Поскольку массы кварков по сравнению с Q^2 пренебрежимо малы, различие между функциями $C^a(V, \xi, \eta, \dots)$, относящимися к разным типам кварков, обусловлено только разницей в электрических зарядах e_a . Необходимо при этом иметь в виду, что подграфы V_i , соответствующие кварковому вкладу, могут быть двух видов (рис. 11). К первому виду отнесем подграфы, не имеющие внутри себя глюонных делений в канале (P, P) (см. рис. 11, а). Соответствующий вклад C_1^q пропорционален e_a^2 :

$$C_1^q = e_a^2 C^{NS}. \quad (144)$$

Ко второму типу отнесем подграфы, содержащие внутри себя по крайней мере одно глюонное деление в (P, P) -канале (см. рис. 11, б).

Соответствующий вклад C_{II} пропорционален $\langle e^2 \rangle$ — среднему квадрату заряда кварков

$$\langle e^2 \rangle = \frac{1}{N_f} \sum_{a=1}^{N_f} e_a^2, \quad (145)$$

поскольку в кварковом цикле, находящемся между глюонным делением и фотонными вершинами, необходимо просуммировать по всем типам кварков. Таким образом,

$$W_n = C^{NS} \sum_{a=1}^{N_f} e_a^2 A_a^+(n) + \langle e^2 \rangle C_{II} \sum_{a=1}^{N_f} A_a^+(n) + \langle e^2 \rangle C_g f_g(n), \quad (146)$$

причем функции C^{NS} , C_{II} не зависят от типов кварков. Введем функцию $C^S = C^{NS} + C_{II}$, которая соответствует сумме вкладов всех подграфов с кварковыми линиями. Тогда

$$W_n = C_n^{NS} \sum_{a=1}^{N_f} (e_a^2 - \langle e^2 \rangle) A_a^+(n) + \langle e^2 \rangle \{ C_n^S \sum_{a=1}^{N_f} A_a^+(n) + C_n^g \tilde{f}_g(n) \}. \quad (147)$$

С групповой точки зрения [имеется в виду $SU(N_f)$ -группа симметрии по типу кварков] это соответствует разбиению матрицы $\text{diag}(e_a^2)$ на синглетную, пропорциональную единичной матрице, и несинглетную (бесследовую) компоненты: $\text{diag}(e_a^2) = \langle e^2 \rangle \mathbf{1} + \text{diag}(e_a^2 - \langle e^2 \rangle)$, что достигается с помощью тождества Фирца для матриц $SU(N_f)$ -группы:

$$C^{ab} f_{ab} = \frac{1}{N_f} \text{Sp}(C \mathbf{1}) \text{Sp}(f \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_f^2-1} \text{Sp}(\lambda^k C) \text{Sp}(\lambda^k f). \quad (148)$$

Матрицы λ_k нормированы в (148) согласно $\text{Sp}(\lambda_k \lambda_l) = 2\delta_{kl}$. Для перехода от (148) к (147) необходимо учесть, что

$$\frac{1}{2} \sum_k \text{Sp}(\lambda^k C) \lambda^k = \text{diag}(e_a^2 - \langle e^2 \rangle) C^{NS}. \quad (149)$$

Подграфы \overline{V} , дающие вклад в f_a , также можно разбить на синглетную и несинглетную компоненты. Часто используется также деление функций распределения кварков на «валентную» и «морскую» часть. Валентными называются кварки минимального кваркового набора, имеющего квантовые числа исследуемого адрона, а морскими — кварки, возникшие в результате рождения $q\bar{q}$ -пар. В этой связи диаграммы, имеющие глюонные деления (см. рис. 11, в), дают вклад только в «морскую» компоненту. Довольно широко распространено ошибочное мнение, что диаграммы без глюонных делений дают вклад только в функции распределения валентных кварков. (Это соответствует отождествлению понятий валентный и несинглетный.) Такое отождествление

действие справедливо для диаграммы, изображенной на рис. 11, з, но имеются диаграммы (см. рис. 11, д), дающие вклад в функцию распределения антикварков, но не имеющие чисто глюонных делений в (P, P) -канале [117].

Факторизация и ренормгруппа. Как уже указывалось, параметр разбиения μ можно интерпретировать как параметр ренормировки вершин, специфичных для составных операторов. Иными словами, μ -зависимость величин $\tilde{f}_n(\mu, \dots)$ обусловлена PI -логарифмами, имеющимися в матричных элементах составных операторов. Поскольку величина $M_n(Q)$ от выбора μ не зависит, это означает, что обусловленная *массовыми логарифмами* $[\ln(Q^2/p^2)]^N$ зависимость $M_n(Q)$ от Q однозначно связана с обусловленной *PI -логарифмами* $[\ln(\mu^2/p^2)]^N$ зависимостью $\tilde{f}_n(\mu^2, \dots)$ от μ . Поскольку вершинные функции, соответствующие составным операторам, перенормируются мультипликативно:

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \tilde{f}_n(\mu^2, \mu_R^2 = \mu^2, g) &\equiv \left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \tilde{f}_n(\mu^2, g) = \\ &= \gamma_n(g) \tilde{f}_n(\mu^2, g), \end{aligned} \tag{150}$$

для вычисления их зависимости от μ достаточно знать *аномальные размерности* $\gamma_n(g)$. Здесь и далее, во избежание усложнений с $\ln(\mu^2/\mu_R^2)$ -вкладами, будем полагать равными параметр разбиения μ и ренормировочный параметр обычной R -операции μ_R : $\mu_R = \mu$. Этот стандартный прием (уменьшение числа независимых ренормировочных параметров) используется, как правило, во всех ренормгрупповых расчетах (см., например, [17]).

Отметим, что наличие глюонных делений в диаграммах для \tilde{f}_n (рис. 12, а — д) приводит к смешиванию глюонных и кварковых операторов, и, таким образом, для синглетных операторов γ_n представляет собой матрицу:

$$\gamma^S = \begin{pmatrix} \gamma_{qq}^S & \gamma_{qg} \\ \gamma_{gq} & \gamma_{gg} \end{pmatrix}. \tag{151}$$

В несинглетном канале такого смешивания нет, и γ^{NS} — просто число $\gamma^{NS} = \gamma_{qq}^{NS}$. Необходимо при этом иметь в виду, что $\gamma_{qq}^S \neq$

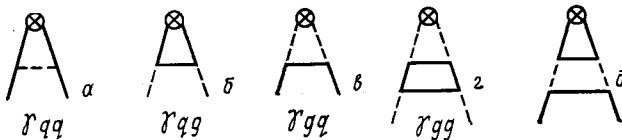


Рис. 12

$\neq \gamma_{qq}^{NS}$, поскольку в высших порядках есть диаграммы (см., например, рис. 12, д), дающие вклад в γ_{qq}^S , но не дающие вклада в γ_{qq}^{NS} .

Решение уравнения (150) хорошо известно [17, 46]:

$$\tilde{f}(n, \mu^2, \bar{g}(\mu^2)) = T \exp \left(\int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \gamma_n(\bar{g}(t)) \frac{dt}{t} \right) \tilde{f}(n, \mu_0^2, \bar{g}(\mu_0^2)), \quad (152)$$

где T означает t -упорядочение матриц γ_n (для f^{NS} знак T можно опустить).

Следовательно, если коэффициенты $\tilde{f}(n, \dots)$ известны при некотором $\mu^2 = \mu_0^2$, причем $\bar{g}(\mu_0)$ достаточно мало, то с помощью (152) можно найти $\tilde{f}(n, \mu^2, \bar{g}(\mu^2))$ как функцию μ^2 во всей области значений μ^2 , где применима теория возмущений. В частности, если положить в (147) $\mu = aQ$, тогда

$$W_n(Q) = \sum_i C_n^i(a^2, \bar{g}(a^2Q^2)) \tilde{f}_n^i(a^2Q^2). \quad (153)$$

Зависимость матричного элемента $\tilde{f}_n(a^2Q^2)$ от Q^2 дается формулой (147), а коэффициентная функция $C_n(a^2, \bar{g}(a^2Q^2))$ представляет собой ряд по $\bar{g}(a^2Q^2)$:

$$C_n(a^2, \bar{g}(a^2Q^2)) = \sum_{m=0}^{\infty} C_n(a, m) (\bar{g}^2(a^2Q^2))^m. \quad (154)$$

Таким образом, зная $\gamma_n(g)$ и $C_n(a, \bar{g})$, можно найти зависимость $M_n(Q^2)$ от Q^2 .

Замечание 1. Применимость ренормгрупповых методов для вычисления асимптотики величин типа $T(P, q)$, зависящих как от больших Q^2 , так и от малых p^2 импульсных переменных, является далеко не очевидной из-за того, что в $T(Q^2, p^2)$ имеются массовые логарифмы $\ln(Q^2/p^2)$. Массовые логарифмы возникают в сходящихся интегралах, и обычные ренормгрупповые преобразования, связанные с изменением параметра μ_R , их никак не затрагивают. Следовательно, применять ренормгруппу для их суммирования на этом этапе бессмысленно. Чтобы метод ренормгруппы позволил получить нетривиальную информацию о $T(Q^2, p^2)$, необходимо найти такую процедуру, которая обладала бы необходимыми свойствами R -операции и, кроме того, (и это главное) затрагивала массовые логарифмы. Такой процедуры может и не быть. Но в рассматриваемой задаче процедура разбиения вкладов больших и малых расстояний удовлетворяет сформулированным требованиям, что и обеспечивает применимость ренормгрупповых методов к анализу асимптотики $T(q, P)$.

Замечание 2. Как и при анализе $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{адроны})$, для фиксации параметра a в (153) необходимо добавить к РГ-анализу некоторый критерий минимизации.

Эволюция функций распределения. Изменение коэффициентов $\tilde{f}_n(\mu^2)$ с ростом μ^2 означает, что при этом эволюционируют также

и функции распределения $f(x, \mu^2)$. Используя связь между $f(x, \mu^2)$ и $\tilde{f}(n, \mu^2)$

$$\tilde{f}(n, \mu^2) = \int_0^1 x^{n-1} f(x, \mu^2) dx, \quad (155)$$

приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) f_a(x, \mu^2, g) = \sum_b \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{ab} \left(\frac{x}{y}, g \right) f_b(y, \mu^2, g), \quad (156)$$

решение которого и дает закон эволюции функций распределения $f(x, \mu^2)$. По определению $P_{ab}(z, g)$ -функция, моменты которой равны $\gamma_{ab}(n)$:

$$\int_0^1 P_{ab}(z) z^n \frac{dz}{z} = \gamma_{ab}(n). \quad (157)$$

В главном логарифмическом приближении, т. е. при учете только $O(g^2)$ -членов в P_{ab} , уравнение (156) имеет следующую простую партонную интерпретацию. Функции $f_a(x, \mu^2)$, как уже указывалось, описывают распределение партонов по импульсам в ситуации, когда структура адрона зондируется на расстояниях порядка $1/\mu$. Если μ , т. е. разрешающая способность нашего «партонометра», меньше характерного адронного масштаба $1/R_{\text{адрон}}$, то мы вообще не заметим, что внутри адрона (например, протона) имеются более мелкие составляющие. Однако начиная с некоторого $\mu = \mu_0$ в протоне станут видны три валентных кварка, а при некотором $\mu = \mu_1 = N\mu_0$ становятся видными и виртуальные глюоны, излучаемые валентными кварками. Если увеличить μ еще в N раз, то партонометр будет чувствовать виртуальные $q\bar{q}$ -пары, окружающие валентные кварки, при $\mu = \mu_0 N^3$ будут видны глюоны, излучаемые виртуальными кварками и т. д. (рис. 13). Таким образом, при $\mu = N^k \mu_0$ виден k -й уровень структуры адрона. В такой картине $P_{ab}(x/y)$ при $x \neq y$ характеризует вероятность того, что партон b , имеющий продольный импульс yP , переходит (посредством излучения глюона или рождения $q\bar{q}$ -пары) в партон a с продольным импульсом xP . Зондируя адрон партонометром с разрешающей способностью $\mu = \mu_0 N^{k+1}$, получим функции распределения $f_a(x, \mu_0 N^{k+1})$, отличающиеся от функций $f_a(x, \mu_0 N^k)$, измеренных при $\mu = \mu_0 N^k$. Это отличие обусловлено тем, что если при $\mu = \mu_0 N^k$ некоторый

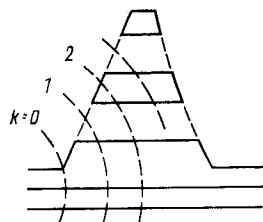


Рис. 13

партон b с импульсом yP воспринимался как точечный, то при $\mu = \mu_0 N^{h+1}$ можно с вероятностью $P_{ab}(x/y)$ обнаружить в нем партон a с импульсом xP . Необходимо учесть также, что если p_a — суммарная вероятность того, что партон a при увеличении разрешения в N раз будет выглядеть состоящим из более «мелких» партонов, то с вероятностью $(1 - p_a)$ увидим при $\mu = \mu_0 N^{h+1}$ тот же партон, что и при $\mu = \mu_0 N^h$. Запишем уравнение баланса

$$f_a(x, \mu_0 N^{h+1}) = f_a(x, \mu_0 N^h)(1 - p_a) + \int_{x+0}^1 \frac{dy}{y} P_{ab}(x/y, g) f_b(x, \mu_0 N^h). \quad (158)$$

Заменяя p_a по

$$f_a(x, \mu_0 N^{h+1}) - f_a(x, \mu_0 N^h) \quad (159)$$

производной $(d/dk) f_a(x, \mu_0 N^k)$ и учитывая, что $k = \ln(\mu/\mu_0)$, получаем из (158) уравнение эволюции (156), в котором $P_{ab}(x/y)$ при $x = y$ необходимо взять равным $[-p_a \delta_{ab} \delta(1 - x/y)]$. Коэффициенты p_a по своему смыслу не являются независимыми от $P_{ab}(x/y)$ величинами. Явные выражения для p_a через $P_{ab}(x/y)$ (при $x \neq y$) можно получить, воспользовавшись законами сохранения полного импульса и электрического заряда системы партонов в актах излучения глюонов и рождения пар. В частности, из равенства

$$\frac{d}{d(\ln \mu)} \left(\sum_a e_a \int_0^1 dx f_a(x, \mu^2) \right) = 0 \quad (160)$$

вытекает, что для кварков и антикварков $p_a = \rho_{ab}(1)$, где

$$\rho_{ab}(n) = \int_0^{1-0} z^n \frac{dz}{z} P_{ab}(z). \quad (161)$$

Аналогично из равенства

$$\frac{d}{d(\ln \mu)} \left(\sum_a \int_0^1 x dx f_a(x, \mu^2) \right) = 0, \quad (162)$$

выражающего закон сохранения энергии-импульса, получаем уравнение

$$\text{Det}(\rho_{ab}(2) - p_a \delta_{ab}) = 0. \quad (163)$$

Решая (163), находим явное выражение для p_g через $\rho_{ab}(2)$ и p_q :

$$p_g = \rho_{gg}(2) - 2N_f \rho_{\tau g}(2) \rho_{gq}(2) / [\rho_{qq}(2) - p_q]. \quad (164)$$

Замечание 1. Уравнения эволюции были предложены Л. Н. Липатовым [118] в рамках развитого ранее в [11] подхода к анализу асимптотики структурных функций в главном логарифмическом приближении. Переход к (156) от (150) с помощью обратного меллиновского преобразования восходит к работам [119,

120]. Партоновая интерпретация уравнений эволюции, в том виде как она изложена выше, была дана в [121]. Однако уравнения эволюции стали широко использоваться только после появления работы Алтарелли и Паризи [110], в которой был дан простой вывод уравнений эволюции в квантовой хромодинамике. В связи с этим уравнения эволюции в КХД называют иногда уравнениями Липатова — Алтарелли — Паризи. Несколько забегая вперед, отметим также, что уравнения эволюции в различных теоретико-полевых моделях отличаются только видом ядра $P_{ab}(x/y)$. В КХД это ядро одновременно с Алтарелли и Паризи было вычислено Ю. Л. Докшицером [122], использовавшим подход Грибова — Липатова [11] (см. также [51]).

Замечание 2. При анализе структурных функций в области больших Q^2 весьма важной оказывается задача отыскания модельных выражений для функций распределения, которые удовлетворяют следующим требованиям: во-первых, они являются достаточно компактными, во-вторых, хорошо описывают экспериментальные данные при некотором фиксированном $Q^2 = Q_0^2$ и, в-третьих, с большой точностью удовлетворяют уравнениям эволюции. Простейшая из имеющихся в литературе параметризаций была предложена Бурасом и Гемерсом [123]. Несколько более сложная, но значительно лучше удовлетворяющая всем трем требованиям, параметризация для $f_a(x, Q^2)$ была разработана П. С. Исаевым и С. Г. Коваленко [124].

5. АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ В КВАНТОВОЙ ХРОМОДИНАМИКЕ

Усилия, затраченные на изучение в предшествующих разделах модели со скалярными глюонами, оправдываются тем, что всю программу факторизации вкладов больших и малых расстояний, как будет продемонстрировано ниже, можно провести и в квантовой хромодинамике, причем структура конечного результата для $T(\omega, Q^2)$ в КХД дается тем же выражением (115), что и в рассмотренной выше скалярной глюонной модели.

Структура вкладов. В КХД, как и в любой векторной теории, имеются поля A_μ^a с нулевым твистом. Это означает, что вклады кон-

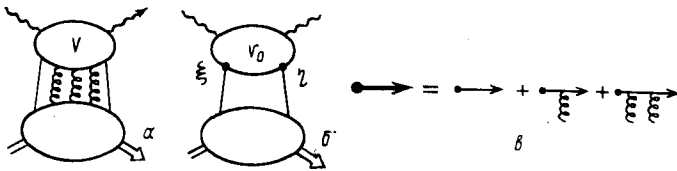


Рис. 14

фигураций рис. 14, а не имеют дополнительных $(1/Q^2)$ -факторов по сравнению с вкладом простейшей конфигурации (см. рис. 14, б) независимо от числа внешних глюонных линий подграфа V , соответствующего интегрированию по малым α . Нетрудно заметить, что любую из конфигураций рис. 14, а можно получить из соответствующей простейшей конфигурации добавлением глюонных линий, соединяющих линии исходного подграфа V_0 с остальной диаграммой. Это соответствует тому, что партоновый подпроцесс идет не в пустоте, а в глюон-

ном поле адрона. Имеет смысл поэтому рассматривать сразу сумму вкладов всех конфигураций, полученных из одной и той же простейшей конфигурации, т. е. просуммировать по глюонным внешним линиям подграфов V , соответствующих малым α .

Кварковый вклад. Для суммирования по глюонным линиям наиболее удобным является координатное представление. Пусть

$$\int \prod dx_i \int d\xi d\eta C_v(v_0, q; \xi, \eta, \{x_i\}; \mu^2) \times \langle P | S^+ T (\text{Reg}_{\mu^2}^{UV} : \bar{\psi}(\xi) \gamma^v \psi(\eta) : S) | P \rangle \quad (165)$$

— вклад простейшей конфигурации (см. рис. 14, б), причем x_i — координата i -й внутренней вершины подграфа v_0 . Переход к конфигурации, в которой подграф v имеет одну дополнительную внешнюю глюонную линию, соответствует добавлению поля $A_\mu^\alpha(z)$ в матричный элемент $\langle P | \bar{\psi} \dots \psi | P \rangle$, описывающий вклад больших расстояний, и модификации одного из пропагаторов [например, $S^c(x_1 - x_2)$], соответствующего некоторой внутренней линии подграфа v_0 :

$$S^c(x_1 - x_2) \rightarrow g \int d^4z S^c(x_1 - z) \gamma^\mu \tau_a S^c(z - x_2), \quad (166)$$

где $(\tau_a)_{AB}$ — матрица калибровочной $SU(3)_c$ -группы в кварковом (фундаментальном) представлении $\tau_a = \lambda_a/2$, где λ_a — матрица Гелл-Мана (см., например, [46]). Легко заметить, что сумма по глюонным линиям, присоединенным к линии (x_1, x_2) , т.е.

$$\mathcal{S}^c(x_1, x_2; A) = S^c(x_1 - x_2) + g \int d^4z S^c(x_1 - z) \gamma^\mu \hat{A}_\mu(z) S^c(z - x_2) + \dots \quad (167)$$

(см. рис. 14, в), дает формально пропагатор кварка во внешнем глюонном поле. Иначе говоря, (167) является разложением в ряд теории возмущений решения уравнения

$$(i \hat{D}_\mu \gamma^\mu - m_q) \mathcal{S}^c(x_1, x_2) = -\delta^4(x_1 - x_2), \quad (168)$$

где $\hat{D}_\mu = \partial/\partial x_\mu^i - ig \hat{A}_\mu$ — ковариантная производная, действующая на кварковое поле; $A_\mu \equiv A_\mu^\alpha \tau_a$. Таким образом, каждый пропагатор S^c , входящий в $C(v_0, \dots)$, необходимо заменить на \mathcal{S}^c . Решение уравнения (168) с учетом того, что \hat{A} в данном случае является матрицей, можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{S}^c(x_1, x_2; A) = \hat{E}(x_1, x_2; A) \{ S^c(x_1 - x_2) + \hat{R}(x_1, x_2; G) \}. \quad (169)$$

В (169) введено сокращенное обозначение

$$\hat{E}_{AB}(x, y; A) \equiv \left(P \exp i g \int_y^x \hat{A}_\mu(z) dz^\mu \right)_{AB}. \quad (170)$$

Интегрирование в (170) идет по прямой, соединяющей точки x и y , а P в (170) обозначает операцию упорядочивания матриц \hat{A} вдоль этого пути. Функция $R(x, y, G)$ удовлетворяет уравнению

$$i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \hat{R}(x, y; G) - g \gamma^\mu (x^\nu - y^\nu) \left\{ \tau^b \int_0^1 t dt G_{\mu\nu}^a (y + t(x-y)) \times \right. \\ \left. \times \tilde{E}_{ba}(y + t(x-y), y; A) [S^c(x-y) + \hat{R}(x, y; G)] \right\} = 0, \quad (171)$$

где $\tilde{E}_{ba}(x, y, A)$ дается формулой (170), в которой необходимо взять $A_\mu \equiv A_\mu^a \sigma_a$ вместо $\hat{A}_\mu [\sigma_a - \text{матрица калибровочной группы в глюонном (присоединенном) представлении: } (\sigma_a)_{bc} = -if_{abc}, \text{ где } f_{abc} - \text{структурные константы калибровочной группы}].$ При выводе (171) использовалось правило коммутации

$$(\tau^a)_{AB} \hat{E}_{BC}(z, y) = \hat{E}_{AB}(z, y) (\tau^b)_{BC} \tilde{E}_{ab}(z, y), \quad (172)$$

основанное на хорошо известной формуле (см., например, [72, приложение]):

$$\exp(A) B \exp(-A) = B + [A, B] + (1/2!) [A, [A, B]] + \dots \quad (173)$$

и соотношении

$$[\tau_b, \tau_a] = -(\sigma_b)_{ac} \tau_c. \quad (174)$$

Учитывая, что

$$G(z) \tilde{E}(z, y) = \sum_{n=0}^{\infty} G(y) \overleftarrow{D}_{\mu_1} \dots \overleftarrow{D}_{\mu_n} \frac{(z-y)^{\mu_1} \dots (z-y)^{\mu_n}}{n!}, \quad (175)$$

где $\overleftarrow{D}_\mu = \partial/\partial y^\mu - ig \tilde{A}_\mu$ — ковариантная производная, действующая на глюонное поле, придем к выводу, что R зависит от глюонного поля только через напряженность $\hat{G}_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu]$ и ее ковариантные производные. Формула (175) является частным случаем известной теоремы Бейкера — Хаусдорфа (см., например, [125]). Заметим далее, что в отличие от комбинации $\langle P | \bar{\psi} \dots A_\mu \dots A_\nu \dots \psi | P \rangle$, дающей двойной множитель $P_\mu P_\nu$, матричный элемент $\langle P | \bar{\psi} \dots G_{\mu\nu} \dots \psi | P \rangle$ не может добавить $P_\mu P_\nu$ к соответствующему вкладу $S^{\mu\nu}(v)$, поскольку тензор $\hat{G}_{\mu\nu}$ антисимметричен по индексам $\mu\nu$. В лучшем случае $\hat{G}_{\mu\nu}$ может добавить простой множитель P_μ (или P_ν). Следовательно, с учетом того, что размерность $G_{\mu\nu}$ равна двум, полю $G_{\mu\nu}$ необходимо сопоставить твист 1, как и полям со спином 0, 1/2. Отсюда вытекает, в частности, что операторы типа $\bar{\psi} \dots G \dots \psi$ имеют твист, не меньший трех, и, таким образом,

функция $R(x, y; G)$ в (169) ответственна в нашем случае только за степенные поправки к основному вкладу. Поскольку мы интересуемся лишь ведущей степенной асимптотикой амплитуды, при анализе конфигураций рис. 14, а вкладом \hat{R} в дальнейшем пренебрегаем. Отметим, что решая уравнение (171) итерациями, можно вычислить вклады в \hat{R} , содержащие G в первой, второй и т. д. степенях, т. е. произвести учет первых степенных поправок.

Таким образом, если пренебречь степенными поправками, то суммирование по глюонным линиям, присоединяемым к спинорной линии (x_α, x_β) , сводится к замене

$$S^c(x_\alpha - x_\beta) \rightarrow S^c(x_\alpha - x_\beta) \hat{E}(x_\alpha, x_\beta; A). \quad (176)$$

В абелевых теориях экспоненциальные множители, относящиеся к соседним линиям, легко объединяются:

$$E(x, y) E(y, z) = E(x, z) [1 + O(G)]. \quad (177)$$

Вкладами $O(G)$ в (177), обусловленными заменой интегрирования по ломаной (xyz) интегрированием по прямой (xz) , в приближении низших твистов можно пренебречь, и в результате после объединения всех экспоненциальных множителей вместо оператора $\bar{\psi}(\xi) \gamma_\nu \psi(\eta)$ в (165) возникает калибровочно-инвариантный билочальный оператор,

$$\mathcal{O}_\nu(\xi, \eta; \mu^2) = \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} \left\{ \bar{\psi}(\xi) \gamma_\nu \exp\left(ig \int_\eta^\xi A_\mu(z) dz^\mu\right) \psi(\eta) \right\}, \quad (178)$$

а коэффициентная функция $C^\nu(v, \xi, \eta)$ остается неизменной. Оператор (178) разлагается затем в ряд Тейлора по локальным калибровочно-инвариантным операторам

$$\begin{aligned} & \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} \bar{\psi}(\xi) \gamma_\nu E(\xi, \eta; A) \psi(\eta) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi - \eta)^{\nu_1} \dots (\xi - \eta)^{\nu_n} \text{Reg}_{\mu^2}^{UV} \psi(\xi) \gamma_\nu D_{\nu_1} \dots D_{\nu_n} \psi(\xi). \end{aligned} \quad (179)$$

[ср. (175)]. Далее, чтобы выделить ведущий степенной вклад, необходимо, как и для некалибровочных теорий, симметризовать операторы по индексам ν, ν_1, \dots, ν_n , потом разложить их по бесследовым тензорам и оставить только операторы с низшим твистом [ср. (106), (109)].

Вычитательная процедура. Операция $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$ означает, как обычно, что $\lambda(v) \geq 1/\mu^2$ для подграфов v , представляемых в виде разности двух подграфов V_1, V_2 , каждый из которых дает в РМР ведущий вклад. В калибровочных теориях такие подграфы v могут иметь

довольно сложный вид. Например, на рис. 15 объектами операции $\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}$ могут быть три подграфа, образованные линиями (1, 2, 3), (1, 4, 5) и (1, 2, 3, 4, 5).

В неабелевых теориях, в частности в КХД, глюонные линии можно присоединять не только к кварковым, но и к глюонным линиям,

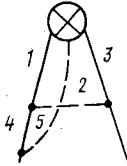


Рис. 15

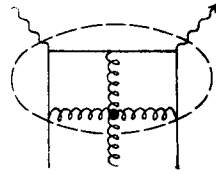


Рис. 16

а также к линиям фиктивных частиц («духов» Фаддеева — Попова). В результате

$$\begin{aligned} \delta_{ab} g_{\mu\nu} D^c(x_\alpha - x_\beta) &\rightarrow \mathcal{D}_{ab, \mu\nu}^c(x_\alpha, x_\beta) = \\ &= [\hat{E}(x_\alpha - x_\beta, A) \{g_{\mu\nu} D^c(x_\alpha - x_\beta) + O(G)\}]_{ab} \end{aligned} \quad (180)$$

для глюонного пропагатора и

$$\delta_{ab} D^c(x_\alpha - x_\beta) \rightarrow [\tilde{E}(x_\alpha, x_\beta; A) \{D^c(x_\alpha - x_\beta) + O(G)\}]_{ab} \quad (181)$$

для пропагатора фиктивных частиц. Отметим, что множитель $\tilde{E}_{ab}(x, y; A)$ имеет следующее свойство:

$$\tilde{E}_{ab}(x, y; A) = \tilde{E}_{ba}(y, x; A), \quad (182)$$

которое следует из того, что $(\sigma_a)_{bc} = -(\sigma_a)_{cb}$.

Поскольку в КХД имеются как 3-глюонные, так и 4-глюонные вершины, то необходимо учесть и более экзотическую возможность, когда внешняя глюонная линия присоединяется не к пропагатору, а прямо к 3-глюонной вершине (рис. 16). Заметим далее, что в исходной 3-глюонной вершине имеется производная, действующая, скажем, на пропагатор $D^c(x - y)$. Согласно (180) суммирование по глюонным вставкам в эту линию приводит к следующему изменению:

$$\begin{aligned} \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial x^\mu} D^c(x - y) &\rightarrow \tilde{E}(x, y; A) \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} D^c(x - y) + i g \tilde{A}_\mu(x) D^c(x - y) + O(G) \right\}, \end{aligned} \quad (183)$$

причем второй член в правой части выражения (183) как раз соответствует структуре 4-глюонной вершины. Непосредственные вычисления показывают, что сумма всех таких вкладов численно совпадает с вкладом конфигурации рис. 16, но имеет обратный знак. Таким образом, если пренебречь несущественными для ведущего вклада членами $O(G)$, то суммирование по глюонам, участвующим в подпроцессе, сводится к замене $\delta_{ab} \rightarrow \tilde{E}_{ab}$, $\delta_{AB} \rightarrow \hat{E}_{AB}$ для всех пропагаторов, соответствующих внутренним линиям подграфа v_0 .

Однако в отличие от абелевых теорий, чтобы объединить экспоненты, относящиеся к соседним кварковым линиям, необходимо, воспользовавшись формулой (172), предварительно прокоммутировать одну из экспонент с τ -матрицей в соответствующей кварк-глюонной вершине. В результате согласно (172) появляется дополнительный множитель \tilde{E} . Такой же множитель возникает после коммутации экспонент, входящих в модифицированные пропагаторы глюонов и фиктивных частиц, с σ -матрицами, стоящими в соответствующих тройных вершинах:

$$\tilde{E}_{ab}(x, y) (\sigma_c)_{bd} = (\sigma_j)_{ab} \tilde{E}_{bd}(x, y) \tilde{E}_{jc}(x, y). \quad (184)$$

Заметим, что 4-глюонную вершину можно представить в виде суммы трех членов, каждый из которых имеет цветовую структуру двух 3-глюонных вершин, находящихся в одной точке (например, x) и соединенных множителем $\delta_{ab} \equiv E_{ab}(x, x; A)$ (рис. 17). Учитывая

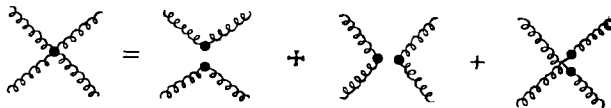


Рис. 17

все эти замечания, нетрудно убедиться в том, что экспоненциальные множители \tilde{E} , возникающие в результате коммутаций, сокращаются с аналогичными множителями, входящими в модифицированные пропагаторы глюонов и фиктивных частиц, и для подграфа v_0 с двумя внешними кварковыми линиями остается множитель $\hat{E}(\xi, \eta; A)$.

Для возникающего при этом оператора $\bar{\psi}(\xi) \gamma_v \hat{E}(\xi, \eta; A) \psi(\eta)$ будет справедлива формула (179), причем ковариантные производные необходимо брать в кварковом представлении. Таким образом, мы убедились на частном примере в справедливости хорошо известного (но обычно не доказываемого) общего утверждения, что для калибровочных теорий в операторном разложении необходимо использовать калибровочно-инвариантные локальные операторы.

Глюонный вклад. Конфигурации, в которых подграф V , соответствующий малым расстояниям, имеет только глюонные внешние

линии (рис. 18, а), согласно оценке (73) дает в $T(\omega, Q^2)$ вклад $O(Q^2)$. Исходный подграф V_0 в данном случае имеет вид фотонной вакуумной петли (см. рис. 18, б), и, поскольку фотоны бесцветны, все \hat{E} - и \tilde{E} -множители, обусловленные глюонными вставками в V_0 , сокращаются. Это означает, что суммирование по глюонам дает множитель $[1 + O(G)]$. Член с единицей соответствует исходной несвязной диаграм-

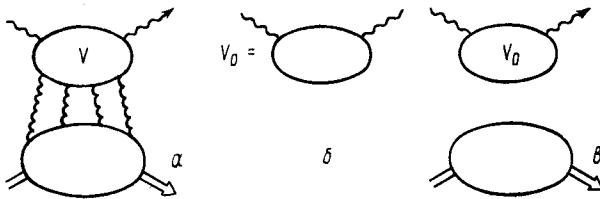


Рис. 18

ме (см. рис. 18, в) и поэтому дает нулевой вклад в $T(\omega, Q^2)$. Кроме того, поскольку $\langle P | G | P \rangle = 0$ (в силу сохранения цвета), ненулевой вклад дают лишь члены из $O(G)$, содержащие не менее двух операторов $G_{\mu\nu}$. Исходя из того, что твист $G_{\mu\nu}$ равен 1, мы должны заменить грубую оценку $T_{(g)} \sim Q^2$, справедливую для отдельных подграфов, более тонкой оценкой $T_g \sim Q^{2-n_g}$, справедливой для суммы всех таких подграфов. Здесь n_g — число полей $G_{\mu\nu}$, входящих в соответствующий составной оператор.

Из формул (169), (171) с учетом имеющихся в (171) \tilde{E} -факторов следует, что ведущий глюонный вклад можно записать в виде, аналогичном (165):

$$T_{(g)}^{\text{лидир}}(q, P) \sim \int \exp(iqx) dx \int d\xi d\eta C_{(g)}^{\mu\nu}(x, \xi, \eta; \mu^2) \times \\ \times \langle P | S+T(\text{Reg}_{\mu^2}^{UV}(\text{Tr} \tilde{G}_{\mu\nu}(\xi) \tilde{E}(\xi, \eta; A) \tilde{G}_{\nu}^{\alpha}(\eta) S) | P \rangle, \quad (185)$$

где Tr обозначает след по отношению к матрицам σ .

В КХД необходимо учесть также вклад подграфов, которые имеют внешние линии, сопоставляемые фиктивным частицам Фаддеева — Попова [73]. Твист этих частиц равен 1, и поэтому в ведущую асимптотику дают вклад только подграфы V с двумя внешними линиями фиктивных частиц (и произвольным числом глюонных внешних линий). Необходимость введения фиктивных частиц связана с тем, что в диаграммах, содержащих глюонные циклы (заметим, что такие циклы возможны лишь в неабелевых теориях), не имеет места обычная для абелевых теорий полная компенсация вкладов нефизических (продольной и временной) компонент векторного поля, и роль фиктивных частиц сводится к вычитанию нескомпенсированного остатка.

Поэтому учет подграфов с внешними линиями, соответствующими фиктивным частицам, эквивалентен замене

$$\tilde{G}_{\mu\kappa}(\xi) \tilde{E}(\xi, \eta) \tilde{G}_{\nu}^{\kappa}(\eta) \rightarrow \tilde{G}_{\mu\kappa}(\xi) \tilde{E}(\xi, \eta) \tilde{G}_{\nu\kappa'}(\eta) \rho^{\kappa\kappa'} \quad (186)$$

в выражении (185), где $\rho^{\kappa\kappa'}$ — проектор на состояния с физической поляризацией глюонов

$$\rho^{\kappa\kappa'} = \sum_{i=1}^2 \varepsilon^{\kappa}(\lambda_i) \varepsilon^{\kappa'}(\lambda_i) \quad (187)$$

(см., например, [126]). Оператор (186) необходимо разложить в ряд Тейлора, и дальнейший анализ глюонного вклада производится стандартным образом, как описано в разд. 3.

Конечный результат для $T(\omega, Q^2)$ имеет тот же вид (115), но коэффициентные функции C_n^i в этих двух случаях, очевидно, различны. Отличаются и локальные операторы, матричные элементы которых задают f_a , \tilde{f}_a и f_g :

$$\begin{aligned} & \frac{i^{n-1}}{2} \langle P | S^+ T(\text{Reg}_{\mu^2}^{UV} : \bar{\psi}_a \{ \gamma_{\mu_1} \hat{D}_{\mu_2} \dots \hat{D}_{\mu_n} \} \psi_a : S) | P \rangle = \\ & = \{ P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \} [\tilde{f}_a(n, \mu^2) + (-1)^n \tilde{f}_a^-(n, \mu^2)]; \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned} & \frac{i^n}{2} \langle P | S^+ T(\text{Reg}_{\mu^2}^{UV} \text{Tr} : \tilde{G}_{\alpha\mu_1} \tilde{D}_{\mu_2} \dots \tilde{D}_{\mu_{n-1}} \tilde{G}_{\mu_n\alpha} : \rho^{\alpha\alpha'}) S | P \rangle = \\ & = \{ P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \} \frac{1+(-1)^n}{2} \tilde{f}_g(n, \mu^2). \end{aligned} \quad (189)$$

Отметим, что в (188), (189), как обычно, подразумевается усреднение по спину мишени, а наличие индекса a одновременно у ψ_a и $\bar{\psi}_a$ в (188) не означает, что по этому индексу идет суммирование.

Партонная интерпретация и аксиальная калибровка. Хотя формулы (188), (189) очень похожи на формулу (110), допускающую, как мы видели, естественную партонную интерпретацию, подобная интерпретация для (188), (189) затруднена наличием полей A_μ в ковариантных производных: формулы (188), (189) дают как бы функции распределения кварков и глюонов, сопровождаемых своими глюонными полями. Напомним, что необходимость учета полей A_μ в матричных элементах $\langle P | \psi \dots A_\mu \dots \psi | P \rangle$ обусловлена появлением дополнительного фактора P_μ [см. (15)]. По отношению к коэффициентной функции этот фактор играет роль поляризации глюона. Далее, поскольку рассматриваемый глюон возник в результате взаимодействий на больших расстояниях, его поперечный импульс мал, и можно считать, что в системе, где адрон быстро движется, импульс глюона также пропорционален P (формально это можно связать с тем, что в матричном элементе $\langle P | \dots | P \rangle$ нет других импульсов). Таким образом, глюоны, входящие в ковариантные производные, продольно поляризованы. В частности, их можно устранить

подходящим выбором калибровки. Действительно, умножая обе стороны выражений (188), (189) на тензор $l^\mu \dots l^{\mu n}$, где l^μ — светоподобный вектор; $l^2 = 0$, и выбирая аксиальную калибровку $(l_\mu A^\mu) = 0$, получаем вместо (188) представление

$$f_a(n) + (-1) f_a^-(n) = \frac{i^{n-1}}{2} \frac{1}{(lP)^n} \langle P | S^+ T (: \bar{\psi}_a (l_\mu \gamma^\mu) (l_\mu \partial_\mu^+)^{n-1} \psi_a : S) | P \rangle, \quad (190)$$

в которое входит оператор с обычными производными.

Иногда используются и другие аксиальные калибровки. В частности, если записать кварковый вклад в $T(\omega, Q^2)$ в виде

$$T_{\text{кварк}}(\omega, Q^2) \sim \sum_a C_n^a(Q^2/\mu^2) q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n} \langle P | \bar{\psi}_a \gamma_{\mu_1} \hat{D}_{\mu_2} \dots \hat{D}_{\mu_n} \psi_a | P \rangle \quad (191)$$

и взять аксиальную калибровку $(qA) = 0$ [118], то полями A_μ в \hat{D}_μ , т. е. вкладами конфигураций рис. 14, а, с точностью до степенных поправок можно пренебречь. Это означает, что слабовиртуальные глюоны, рожденные за счет взаимодействий на больших расстояниях, имеют в этой калибровке только поперечную поляризацию (подробнее см. [51]).

Аналогично, обращаясь к записи $T(\omega, Q^2)$ в координатном представлении (111), нетрудно установить, что в калибровке Швингера $(xA) = 0$ [127] вкладами конфигураций рис. 14, а в $T^{\text{lead}}(\omega, Q^2)$ также можно пренебречь. На этот факт можно взглянуть и с другой стороны, если учесть, что калибровка Швингера обладает замечательным свойством (см., например, [128]): поле A_μ в ней выражается через напряженность $G_{\mu\nu}$:

$$A_\mu(x) = x^\nu \int_0^1 t dt G_{\nu\mu}(tx) \quad (192)$$

и, следовательно, в этой калибровке полю A_μ необходимо сопоставлять твист, равный единице.

Характер нарушения скейлинга в КХД. Наиболее простую зависимость от Q^2 имеют моменты несинглетной компоненты структурной функции W . В этом случае аномальная размерность $\gamma^{NS}(n, g)$ есть просто число. Исходя из того, что

$$f^{NS}(n, \mu^2, \bar{g}(\mu^2)) = \exp \left[\int_{\bar{g}(\mu_0^2)}^{\bar{g}(\mu^2)} \frac{\gamma^{NS}(n, g)}{\beta(g)} dg \right] \tilde{f}^{NS}(n, \mu_0^2, \bar{g}(\mu_0^2)) \quad (193)$$

[эта форма записи решения уравнения РГ, как нетрудно убедиться, эквивалентна (152)] и представляя $\gamma(g)/\beta(g)$ в виде

$$\begin{aligned} \gamma(g)/\beta(g) &= \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (g^2/16\pi^2)^k \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{g^3}{16\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k (g^2/16\pi^2)^k \right)^{-1} \equiv \\ &\equiv \frac{2}{g^2} \left(\frac{\gamma_1}{b_0} \right) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (g^2/16\pi^2)^k \right] \end{aligned} \quad (194)$$

[ср. (44)], находим, что

$$\begin{aligned} W_n^{NS}(Q) &= C_n^{NS}(Q^2/\mu^2, \bar{g}(\mu)) \exp \left\{ \frac{\gamma_1^{NS}(n)}{b_0} \left[\ln \frac{\bar{g}^2(\mu^2)}{g^2(\mu_0^2)} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(n)}{k} [(\bar{g}^2(\mu^2))^k - (g^2(\mu_0^2))^k] \right\} \tilde{f}^{NS}(n, \mu_0^2). \end{aligned} \quad (195)$$

Далее, полагая $\mu = aQ$ и используя (154), получаем

$$\begin{aligned} W_n^{NS}(Q) &= A^{NS}(n) \left(\frac{4\pi}{b_0 \bar{g}^2(a^2 Q^2)} \right)^{-\gamma_1^{NS}/b_0} \times \\ &\times \left\{ 1 + \sum_{l=1}^n c_l(a, n) \left(\frac{\bar{g}^2(aQ)}{16\pi^2} \right)^l \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{\gamma_1^{NS}(n)}{b_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(n)}{k} \left(\frac{\bar{g}^2(a^2 Q^2)}{16\pi^2} \right)^k \right\}. \end{aligned} \quad (196)$$

Вся информация о динамике на больших расстояниях аккумулируется в коэффициенте $A^{NS}(n)$:

$$\begin{aligned} A^{NS}(n) &= \tilde{f}^{NS}(n, \mu_0^2) \left(\frac{b_0 \bar{g}^2(\mu_0^2)}{16\pi^2} \right)^{-\gamma_1^{NS}(n)/b_0} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{\gamma_1^{NS}(n)}{b_0} \sum_{\tilde{k}=1}^{\infty} \frac{a_{\tilde{k}}(n)}{\tilde{k}} \left(\frac{\bar{g}^2(\mu_0^2)}{16\pi^2} \right)^{\tilde{k}} \right\}. \end{aligned} \quad (197)$$

В низшем приближении (leading order — LO) формула (193) с учетом (45) дает знаменитое предсказание [46, 129] о логарифмическом нарушении скейлинга в КХД:

$$W_n^{NS(LO)} = \left(\ln \frac{a^2 Q^2}{\Lambda^2} \right)^{-\gamma_1^{NS}/b_0} A^{NS}(n). \quad (198)$$

Аномальная размерность γ_1^{NS} дается выражением [199]:

$$\gamma_1^{NS} = C_F \left[1 - \frac{2}{n(n+1)} + 4 \sum_{j=2}^n (1/j) \right]. \quad (199)$$

Отметим, что $\gamma_1^{NS}(1) = 0$; это связано с сохранением векторного тока [ср. (160), (164)].

Минимизация. Обычно в (195) берут $a = 1$, однако, чтобы выяснить, насколько тот или иной выбор a оправдан, необходимо вычислить следующую (next-to-leading order — NLO) поправку

$$W_n^{NS(NLO)}(Q) = W_n^{NS(LO)}(Q) [\alpha_s^{(NLO)}(aQ)/\alpha_s^{LO}(aQ)]^{(\gamma_1^{NS(n)/b_0})} \times \\ \times \{1 + [\alpha_s^{(LO)}(aQ)/4\pi] [C_1^{NS}(n) + \gamma_1(n) \ln a^2 + \\ + (\gamma_2^{NS}(n)/b_0 - \gamma_1^{NS}(n) b_1/b_0^2)]\}, \quad (200)$$

где $C_1^{NS}(n) \equiv C_1^{NS}(a = 1, n)$. Коэффициент $\gamma_2^{NS}(n)$ вычислен в [130] и приведен к более компактному виду в [131]. Однако и в [131] формула для $\gamma_2^{NS}(n)$ занимает около страницы текста. Не будем поэтому ее здесь приводить. Коэффициент $C_1^{NS}(n)$ имеет следующий вид [38]:

$$C_1^{NS}(n)|_{\overline{MS}} = C_F \left[3 \sum_{j=1}^n (1/j) - 4 \sum_{j=1}^n (1/j^2) - \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n (1/j) + \right. \\ \left. + 4 \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \frac{1}{j} + \frac{3}{n} + \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n^2} - 9 \right]. \quad (204)$$

Т а б л и ц а

n	OMS (MOM)	\overline{MS}	MS	OMS _{опт}
1	0	0	0	1
2	-3,19	2,9	3,11	1,14
3	-3,06	4,16	16,02	0,97
4	-2,20	8,12	21,75	0,86
5	-1,16	10,84	26,64	0,80
6	-0,03	13,34	30,93	0,75
7	+1,14	15,65	34,76	0,71
8	2,27	17,79	38,22	0,67
9	3,37	19,77	41,37	0,65
10	4,44	21,64	44,30	0,63
11	5,46	23,39	47,01	0,62
12	6,43	25,04	49,53	0,59

В таблице приведены численные значения коэффициента $K^{NS}(n)$:

$$K^{NS}(n) = C_1^{NS}(n) + (\gamma_2^{NS}(n)/b_0 - \gamma_1^{NS}(n) b_1/b_0^2), \quad (202)$$

характеризующего поправки в выбранной схеме при $a = 1$, $N_f = 4$. Видно, что выбор $a = 1$ наиболее оправдан в OMS, а в \overline{MS} -и, особенно, в MS-схеме этот выбор приводит к большим значениям коэффициента $k^{NS}(a)$.

Для оптимального выбора параметра a можно воспользоваться критерием Стивенсона [45]. Необходимо только учесть, что в рассматриваемой задаче ТВ предсказывает не абсолютную величину $W_n^{NS}(Q^2)$, а только зависимость $W_n^{NS}(Q^2)$ от Q^2 , и поэтому критерий Стивенсона нужно применять не к W_n^{NS} , а к логарифмической производной $d(\ln W_n)/d(\ln Q^2)$. В последней колонке табл. 1 приведены значения $a_{\text{опт}}$ в OMS-схеме при соответствующих n . Видно, что с ростом n значение $a_{\text{опт}}$ уменьшается. Этот факт можно истолковать

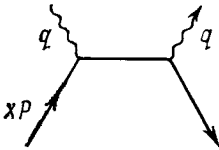


Рис. 19

следующим образом. В диаграмме (рис. 19), дающей борновский вклад в $C_n(Q^2)$, виртуальность кварковой линии (при $\omega < 1$) равна $Q^2(1 - x\omega)$. Поскольку большие значения n соответствуют ω , близким к 1: $(1 - \omega) \sim 1/n$, средняя виртуальность кварка уменьшается с ростом n , и в соответствии с этим должно уменьшаться и оптимальное значение аргумента константы связи $\alpha_s(\mu^2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в настоящем обзоре методы анализа асимптотик фейнмановских диаграмм применимы и к исследованию более сложных процессов, отличающихся от рассмотренных выше, например, наличием двух адронов в начальном состоянии (в этой связи стоит назвать процесс инклюзивного рождения массивной лептонной пары в адронных столкновениях $h_1 h_2 \rightarrow \mu^+ \mu^- X$) или наличием детектируемого адрона в конечном состоянии (простейший пример — процесс $e^+ e^- \rightarrow h X$). В последнем случае необходимо ввести рассмотренные также и функции распада партонов на адроны, которые в отличие от функций распределения партонов в адроне не могут быть непосредственно связаны с матричными элементами каких бы то ни было локальных операторов и выражаются через так называемые *разрезанные вершины* (cut vertices) [36]. Анализ процессов, в которых в начальном и/или конечном состоянии детектируются два или более адронов, заметно усложняется необходимостью учета вкладов, связанных с инфракрасным режимом. Для ведущей степенной асимптотики эти вклады, как правило, сокращаются (полное доказательство этого факта пока не дано), а для оставшихся вкладов имеет место факторизация больших и малых расстояний. Проблема инфракрасной чувствительности в процессах такого рода является в настоящее время объектом пристального внимания специалистов, и можно ожидать, что оставшиеся проблемы будут решены в самом ближайшем будущем.

В заключение я хотел бы выразить свою глубокую признательность А. В. Ефремову, в сотрудничестве с которым получен ряд результатов, вошедших в данный обзор, за неоценимую помощь и поддержку. Я благодарен также П. С. Исаеву и Д. И. Казакову, прочитавшим обзор в рукописи и сделавшим ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logunov A. A., Mestvirishvili M. A., Nguyen Van Hieu.— Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 611.
2. Марков М. А. Нейтрино. М.: Наука, 1964.
3. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н.— ЭЧАЯ, 1970, т. 1, вып. 1, с. 91.
4. Bjorken J. D. Lecture in Varenna School. Course 41. Italy, Varenna, 1967.
5. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. Пер. с англ. М., Мир, 1975.
6. Drell S. D., Yan T.-M.— Ann. Phys. (N. Y.), 1971, v. 66, p. 578.
7. Иоффе Б. Л.— Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 10, с. 143.
8. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н.— ТМФ, 1972, т. 12, с. 1.
9. Drell S. D., Levy P., Yan T.-M.— Phys. Rev., 1969, v. 187, п. 2159.
10. Efremov A. V., Ginzburg I. F.— F. Phys., 1974, Bd 22, S. 575.
11. Грибов В. Н., Липатов Л. Н.— Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 781, 1218.
12. Christ N., Hasslacher B., Mueller A. H.— Phys. Rev. D, 1972, v. 6, p. 3543.
13. Wilson K. G.— Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499.
14. Brandt R. A., Preparata G.— Nucl. Phys. B, 1971, v. 27, p. 541.
15. Stückelberg E. C. G., Peterman A.— Helv. Phys. Acta, 1953, v. 26, p. 499.
16. Gell-Mann M., Low F. E.— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300.
17. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1976.
18. Овсянников Л. В.— Докл. АН СССР, 1956, т. 109, с. 1112.
19. Callan C. G.— Phys. Rev. D, 1970, v. 2, p. 1541; Symanzik K.— Com. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 227.
20. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. М., Физматгиз, 1958.
21. Politzer H. D.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1346; Gross D. J., Wilczek F.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1343.
22. Fritzsche H., Gell-Mann M., Leutwyler H.— Phys. Lett. B, 1973, v. 47, p. 365.
23. Zweig G. Preprints CERN-TH 401, 412, Geneva, 1964; Gell-Mann M.— Phys. Lett., 1964, v. 8, p. 214.
24. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. Препринт ОИЯИ Д-1968, Дубна, 1965.
25. Greenberg O. W.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 598.
26. Han M., Nambu Y.— Phys. Rev. B, 1965, v. 139, p. 1006; Miyamoto Y.— Progr. Theor. Phys. Suppl., 1965, Extra Number, p. 187.
27. Говорков А. Б.— ЭЧАЯ, 1977, т. 8, вып. 5, с. 1056.
28. Pati I. S., Salam A.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 11; Верешков Г. М. и др.— Ядерная физика, 1980, т. 32, с. 227; Игнатьев А. Ю. и др.— ТМФ, 1981, т. 47, с. 147.
29. Kogut J. B.— Phys. Lett. B, 1976, v. 65, p. 377; Polkinghorne J. C.— Nucl. Phys. B, 1976, v. 103, p. 347; Hinchliffe I., Llewellyn Smith C. H.— Phys. Lett. B, 1977, v. 66, p. 281.
30. Radyushkin A. V.— Phys. Lett. B, 1977, v. 69, p. 245.
31. Politzer H. D.— Nucl. Phys. B, 1977, v. 129, p. 301.

32. Ефремов А. В., Радюшкин А. В. В кн.: Проблемы физики высоких энергий и квантовая теория поля (Труды Международного семинара, 11—17 июля 1978 г.). Серпухов, изд. ИФВЭ, 1978, с. 185.
33. Ефремов А. В., Радюшкин А. В.— ТМФ, 1980, т. 44, с. 17, 157, 327.
34. Ellis R. K. e.a.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 152, p. 285.
35. Libby S. V., Sterman G.— Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 3252.
36. Mueller A. H.— Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 3705; Gupta S., Mueller A. H.— Phys. Rev. D, 1979, v. 20, p. 118.
37. Efremov A. V., Radyushkin A. V.— Riv. Nuovo cimento, 1980, v. 3, N 2, chapter III.
38. Bardeen W. A. e.a.— Phys. Rev. D, 1978, v. 18, p. 3998.
39. Bace M.— Phys. Lett. B, 1978, v. 78, p. 132.
40. Schellekens A. N.— Lett. Nuovo cimento, 1979, v. 24, p. 513.
41. Celmaster W., Gonsalvez R.— Phys. Rev. D, 1979, v. 20, p. 1420.
42. Владимиров А. А.— Ядерная физика, 1980, т. 31, с. 1083.
43. Celmaster W., Sivers D.— Phys. Rev. D, 1981, v. 23, p. 227.
44. Efremov A. V., Radyushkin A. V. Preprint JINR E2-80-521, Dubna, 1980.
45. Stevenson P. M.— Phys. Lett., 1981, v. 100, p. 60; Phys. Rev. D, 1981, v. 23, p. 2916.
46. Politzer H. D.— Phys. Reports, 1974, v. 14, p. 129.
47. Reya E.— Phys. Reports, 1981, v. 69, p. 195; Buras A. J.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, p. 199.
48. Исаев П. С. Лекции для молодых ученых. Вып. 24. ОИЯИ P2-80-329, Дубна, 1980.
49. Brodsky S. J., Lepage G. P.— Preprint SLAC-Pub-2447, Stanford, 1979.
50. Altarelli G., Ellis R. K., Martinelli G.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 157, p. 461.
51. Dokshitzer Yu. L., Dyakonov D. I., Troyan S. I.— Phys. Reports, 1980, v. 58, p. 269.
52. Ellis R. K. e.a.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 127, p. 397.
53. Doria R., Frenkel J., Taylor J. C.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 168, p. 3; Di Lieto C. e.a.— Nucl. Phys. B, 1981, v. 183, p. 223.
54. Судаков В. В.— ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 87; Грибов В. Н., Липатов Л. Н.— Ядерная физика, 1972, т. 15, с. 781.
55. Kinoshita T., Ukawa A.— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 1573.
56. Tiktopoulos G.— Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 2373.
57. Sterman G.— Phys. Rev. D, 1978, v. 17, p. 2773.
58. Завьялов О. И., Степанов Б. М.— Ядерная физика, 1965, т. 1, с. 922.
59. Chisholm R.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1952, v. 48, p. 300, 518.
60. Nakanishi N.— Progr. Theor. Phys., 1957, v. 17, p. 401.
61. Numbu Y.— Nuovo cimento, 1957, v. 6, p. 1064.
62. Symanzik K. K.— Progr. Theor. Phys., 1958, v. 20, p. 690.
63. Nakanishi N.— Progr. Theor. Phys., 1961, v. 26, p. 337.
64. Shimamoto Y.— Nuovo Cimento, 1962, v. 25, p. 1292.
65. Kinoshita T.— J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 650.
66. Логунов А. А., Тодоров И. Т., Черников Н. А.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 1285.
67. Степанов Б. М.— ТМФ, 1970, т. 5, с. 356.
68. Гизбург И. Ф., Ефремов А. В., Сербо В. Г.— Ядерная физика, 1969, т. 2, с. 451, 868.
69. Завьялов О. И. Перенормированные диаграммы Фейнмана. М., Наука, 1979.
70. 't Hooft G., Veltman M.— Nucl. Phys. B, 1972, v. 44, p. 189.
71. Боголюбов Н. Н., Парасюк О.— Докл. АН СССР, 1955, т. 100, с. 25, 429.
72. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
73. Бьеркен Дж., Дрелл С. Релятивистская квантовая теория. Пер. с англ. Т. 2. М.: Мир, 1978.
74. Gross D. J., Treiman S. B.— Phys. Rev. D, 1971, v. 4, p. 1059.
75. Faddeev L. D., Popov V. N.— Phys. Lett. B, 1967, v. 25, p. 30.
76. Cabibbo N., Parisi G., Testa M.— Lett. Nuovo cimento, 1970, v. 4, p. 35.

77. Appelquist T., Politzer H. D.— Phys. Rev. D, 1975, v. 12, p. 1404.
78. Adler S. L.— Phys. Rev. D, 1974, v. 10, p. 3714.
79. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 147, p. 385, 448, 519.
80. Poggio E. S., Quinn H. R., Weinberg S.— Phys. Rev. D, 1976, v. 13, p. 1958.
81. Shankar R.— Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 755.
82. Chetyrkin K. G., Krasnikov N. V., Tavkhelidze A. N.— Phys. Lett. B, 1978, v. 76, p. 83.
83. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Пер. с англ. М., Мир, 1973.
84. Владимиров А. А., Ширков Д. В.— УФН, 1979, т. 129, с. 407.
85. Peterman A.— Phys. Reports, 1979, v. 53, p. 157.
86. Weinberg S.— Phys. Rev. D, 1974, v. 8, p. 3497.
87. Caswell W.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 244; Jones D. R. T.— Nucl. Phys. B, 1974, v. 75, p. 531.
88. Егорян Э. Ш., Тарасов О. В.— Теор. и матем. физика, 1979, т. 41, с. 26.
89. Tarasov O. V., Vladimirov A. A., Zharkov A. Yu.— Phys. Lett. B, 1980, v. 93, p. 429.
90. Владимиров А. А.— ТМФ, 1975, т. 25, с. 335.
91. 't Hooft G.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 61, p. 455.
92. Shirkov D. V.— Preprint JINR EA-80-609, Dubna, 1980.
93. Jost R., Luttinger J. M.— Helv. Phys. Acta, 1950, v. 23, p. 201.
94. Appelquist T., Georgi H.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 4000; Zee A.— Phys. Rev. D, 1973, v. 8, p. 4038.
95. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.— Phys. Lett. B, 1979, v. 85, p. 277.
96. Dine M., Saperstein J.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 43, p. 668.
97. Celmaster W., Gonsalvez R.— Phys. Rev. D, 1980, v. 21, p. 3112.
98. Lewin L. Dilogarithms and Associated Functions. London, MacDonald, 1958.
99. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 174, p. 345.
100. Stevenson P. M. University of Wisconsin preprint DOE-ER 00881-213, Madison (W1), 1981.
101. Гайер Б., Робашик Д., Влцорек Э.— ЭЧАЯ, 1980, т. 11, вып. 1, с. 132.
102. Heu A. J. G., Mandula J. E.— Phys. Rev. D, 1972, v. 5, p. 2610; Heiman R. L.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 64, p. 429.
103. Ahmed M., Ross G. G.— Nucl. Phys. B, 1976, v. 111, p. 441.
104. Altarelli G., Parisi G.— Nucl. Phys. B, 1977, v. 126, p. 298.
105. Смирнов В. А.— Теор. и матем. физ., 1977, т. 33, с. 319.
106. Vladimirov V. S., Zavialov B. I. Preprint JINR E2-11761, Dubna, 1978.
107. Frishman Y.— Phys. Reports, 1974, v. 13, p. 1.
108. Symanzik K.— Commun. Math. Phys., 1971, v. 23, p. 49.
109. Anikin S. A., Zavialov O. I.— Ann. Phys. (N. Y.), 1978, v. 116, p. 135.
110. Аникин С. А., Завьялов О. И., Карчев Н. И. ТМФ, 1979, т. 38, с. 291.
111. Bordag M., Robaschik D.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 169, p. 445.
112. Nachtmann O.— Nucl. Phys. B, 1973, v. 63, p. 237.
113. Georgi H., Politzer H. D.— Phys. Rev. D, 1976, v. 14, p. 1829.
114. Polyakov A. M.— In: Proc. XV Intern. Conf. on High Energy Physics. Kiev. Naukova dumka, 1972, p. 509.
115. Cornwall J. M., Norton R. E.— Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 2584.
116. Новожиллов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц. М., Наука, 1972.
117. Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T.— Nucl. Phys. B, 1977, v. 129, p. 66.
118. Липатов Л. Н.— Ядерная физика, 1974, т. 20, с. 181.
119. Parisi G.— Phys. Lett. B, 1973, v. 43, p. 207; *ibid.*, 1974, v. 50, p. 367.
120. Gross D. J.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 1071.

121. Kogut J. B., Susskind L.— Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 697, 3391.
122. Докшицер Ю. Л.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1216.
123. Buras A. J., Gaemers K.— Nucl. Phys. B, 1978, v. 132, p. 249.
124. Isaev P. S., Kovalenko S. G.— Hadronic J., 1980, v. 3, p. 919; Златев И. С. и др. Препринт ОИЯИ P2-81-45, Дубна, 1981.
125. Kumar K.— J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 1923, 1928.
126. Gottschalk T., Sivers D.— Phys. Rev. D, 1980, v. 21, p. 102.
127. Швингер Дж. Частицы, источники, поля. Пер. с англ. М., Мир, 1973, с. 343.
128. Shifman M. A.— Nucl. Phys. B, 1980, v. 173, p. 13.
129. Gross D. J., Wilczek F.— Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 980; Georgi H., Politzer H. D.— Phys. Rev. D, 1974, v. 9, p. 416.
130. Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T.— Nucl. Phys. B, 1977, v. 129, p. 66; *ibid.*, 1978, v. 139, p. 545 (Erratum); *ibid.*, 1979, v. 152, p. 493.
131. Gonzales-Arroyo A., Lopez C., Yndurain F. J.— Nucl. Phys. B, 1979, v. 153, p. 161.