«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1983,
ТОМ 14, ВЫП. 5

Посвящается памяти
Юрия Михайловича Широкова

УДК 539.182

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЧАСТИЦ И ПОЛЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

А. К. Погребков, М. К. Поливанов

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва

Предложена схема описания взаимодействий классических релятивистских частиц и полей, основанная на динамике сингулярностей решений существенно нелинейных уравнений теории поля. Исходя из физических соображений, получено описание таких уравнений и типа их сингулярных решений и проведено подробное рассмотрение предложенной схемы для случая двухмерного пространства — времени.

A framework for interaction of classical relativistic particles and fields based on dynamics of singular solutions of essentially nonlinear field theory equations is proposed. Starting with physical considerations we give the description of such equations, the type of their singular solutions and the detailed construction of this framework for two-dimensional space-time.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе предлагается возможная схема описания взаимодействий релятивистских частиц и полей в классической теории. Прежде чем сформулировать нашу задачу, напомним основные трудности стандартного подхода к этой проблеме. Движущаяся (заряженная) частица создает и излучает некоторое поле, которое обычно определяется как решение линейного уравнения с источником, связанным с мировой линией частицы. Например, для скалярного случая в четырехмерном пространстве — времени

$$\Box\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds\,\delta^{(4)}(x - y(s)), \tag{1}$$

где $y(s)$ — мировая линия частицы; s — собственное время. Уравнение (1) определяет поле по заданной мировой линии частицы. Поэтому, чтобы получить описание взаимодействия полей и частиц, следует замкнуть систему, т. е. по аналогии с электронной теорией Лоренца дополнить (1) уравнениями движения частицы в поле. Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\, \partial^{\mu}\varphi(x)\, \partial_{\mu}\varphi(x) + \lambda \int ds\,\varphi(y(s)) - m\int ds. \tag{2}$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа для этого действия по φ дают (1), а по $y(s)$

$$\ddot{y}^{\mu}(s) = \lambda \frac{\dot{y}^{\mu}(s)(\dot{y}(s)\,\partial\varphi(y(s))) - \partial^{\mu}\varphi(y(s))}{m - \lambda\varphi(y(s))}. \tag{3}$$

Уравнения (1) и (3) уже образуют замкнутую систему и могли бы претендовать на описание взаимодействия полей и частиц. Однако решения уравнения (1) сингулярны при $x \in \{y(s) \mid -\infty < s < \infty\}$. А именно в этих точках следует брать φ и $\partial\varphi$ в правой части (3). Таким образом, правая часть (3) бесконечна. Этот факт не зависит от выбора действия (2) и известен в литературе как эффект самодействия (бесконечной собственной массы). Фактически это означает, что искомого описания мы не получили. Многочисленные попытки преодоления этой трудности предпринимались в первой половине этого века, например Пуанкаре, Планком, Уилером и Фейнманом. Однако своими следствиями эти попытки приводили к потере либо конечности энергии, либо пуанкаре-инвариантности, либо причинности. И по сей день замкнутой теории взаимодействия классических частиц и полей не существует. По аналогии с электродинамикой можно задавать движение частицы (если нас не интересует поле) уравнением (3), а $\varphi(t, x)$ понимать как сумму внешнего поля, поля «трения» и т. д. При этом, однако, точное уравнение содержит производные $y(s)$ бесконечно высокого порядка. Поэтому исключение полевой переменной при соответствующей модификации (3) также не решает нашей задачи.

В то же время очевидно, что основной недостаток стандартного описания взаимодействия частиц и полей состоит в том, что полевые переменные и координаты частиц входят в него на равных основаниях. Тогда естественное физическое требование локальности приводит к бесконечности «силы», действующей на частицу [как в (3)]: частица излучает поле, обращающееся в бесконечность в точке нахождения частицы, а это поле влияет на частицу. Но уже из сказанного видно, что такое «равноправное» описание полей и частиц избыточно. Ведь если задано поле, обладающее сингулярностью на некоторой (времениподобной) кривой (или кривых), то каждую такую кривую можно интерпретировать как мировую линию частицы. Собственно экспериментальное обнаружение частицы всегда сводится к измерению излучаемого поля и его характеристик. Значит, весь вопрос сводится к тому, существуют ли замкнутые полевые уравнения, допускающие решения с нетривиальной динамикой особенностей. Если да, то мы избавляемся от необходимости вводить в теорию независимые от полевых переменные частиц. Вся информация о частицах будет содержаться лишь в фиксации сингулярностей начальных данных задачи Коши.

Широко распространено мнение, основанное на результатах для линейных и квазилинейных уравнений и для некоторых не слишком сильных особенностей, что сингулярности начальных данных распространяются по характеристикам. Очевидно, что такая динамика особенностей нас устроить не может — соответственно следует ожидать, что уравнения, представляющие для нас интерес, должны быть существенно нелинейны. Не удивительно поэтому, что мы будем опираться на идеи и методы, развитые за последние годы в связи с исследованием такого рода уравнений. Действительно, для ряда известных уравнений существуют специальные локализованные регулярные решения (солитоны). Такие решения, по крайней мере асимптотически, можно интерпретировать как частицы. При этом для нелинейного уравнения на одно скалярное поле в переменных действие — угол находим как полевые, так и дискретные переменные, которые естественно сопоставлять частицам. Здесь возникает картина, близкая к той, которую мы хотим построить. Она еще не совсем удовлетворительна, поскольку обычные регулярные солитоны существуют лишь на временных асимптотиках. Наша задача, очевидно, должна состоять в построении решений, локализованных во все моменты времени.

Итак, первая проблема, которая решается в этой работе, следующая. Если есть движущаяся частица, то можно ли, исходя из разумных общих предположений, таких как причинность, пуанкаре-инвариантность и т. д., найти уравнения, которым должно удовлетворять излучаемое ею поле?

На этот вопрос дается положительный ответ. В самом деле, при дополнительном предположении о светоподобности поля мы найдем пуанкаре-инвариантные уравнения для скалярных полей, создаваемых частицей. Форма этих уравнений зависит от размерности пространства — времени. Их общая черта — конформная инвариантность, которая есть следствие дополнительного предположения. Некоторые уравнения выписаны и для векторных полей.

Мы приходим к следующей самосогласованной картине. Движущаяся частица создает поле, удовлетворяющее некоторому нелинейному пуанкаре-инвариантному уравнению, а сама частица есть сингулярность того же поля, т. е. она связана с сингулярным решением нелинейного уравнения, полученного указанным путем. Подчеркнем пуанкаре-инвариантность этих уравнений, что, в частности, означает независимость от мировой линии частицы. Это исключает уравнения с какими-либо членами типа источника и однозначно приводит к замкнутым полевым системам.

Вся информация о частице содержится при этом в начальных данных для уравнений поля. Описан соответствующий класс сингулярных начальных данных.

В простейшем случае двухмерного пространства — времени ($n = 2$) полученное уравнение — это уравнение Лиувилля. Сингулярные решения этого уравнения подробно изучались в ряде предыдущих статей [1—4]. Уравнение Лиувилля решается точно благодаря его богатой симметрии, и анализ его решений можно довести до детальной картины движения сингулярностей (частиц). Здесь мы с помощью этих решений установим связь между полями и частицами.

В свете результатов, приведенных в этой статье, выделенная роль уравнения Лиувилля становится понятной с новой точки зрения. Другой интересный момент состоит в том, что обобщение уравнения Лиувилля на высшие размерности не сводится к добавлению производных в даламбертиан. Вместо этого возникают уравнения, форма которых меняется с изменением размерности, но в то же время их можно понимать как прямое обобщение уравнения Лиувилля для двух измерений. Любопытно отметить, что для четырехмерного случая скалярного пуанкаре-инвариантного уравнения не получается. Фактически в этом случае мы приходим к уравнению Д'Аламбера со стандартным членом источника.

В первой части работы рассматривается переход от частицы к полю. Приводятся все необходимые определения и формулировка задачи. Затем, следуя работе [5] одного из авторов, приведено решение этой задачи, т. е. пуанкаре-инвариантные уравнения для поля. Далее с помощью конформного преобразования строится решение с двумя частицами. В заключение этой части сформулирована задача Коши для уравнения поля с описанием класса сингулярных начальных данных.

Вторая часть посвящена двухмерному случаю, иллюстрирующему описанную программу. На основе [1—4] приводится краткое описание решений уравнения Лиувилля, содержащих много сингулярностей, и обсуждается отвечающая им динамика релятивистских частиц. Рассмотрены также вопросы, связанные с принципом суперпозиции в нелинейной динамике и с возможностью возникновения «массивных» полей (в смысле, который уточняется). Рассмотрены примеры, дающие некоторые частные ответы на эти вопросы. Это — уравнение sh-Гордон и динамика его сингулярных решений, а также короткое обсуждение сингулярных решений ($e^{2\varphi} - e^{-\varphi}$)-уравнения.

1. ПОЛЯ, ИЗЛУЧАЕМЫЕ ЧАСТИЦЕЙ, И РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ КОШИ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

1. Светоподобное скалярное поле, излучаемое частицей. Рассмотрим частицу в n-мерном пространстве Минковского $\mathscr{M}_n$. Пусть

$$x^\mu = y^\mu(s), \quad \mu = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{4}$$

— заданная мировая линия этой частицы. Здесь $y^\mu(s)$ — функции собственного времени s, т. е.

$$\dot{y}^2 \equiv 1, \quad \dot{y}^0 > 0. \tag{5}$$

Точка обозначает производную по s, $\dot{y}^2 = \dot{y}^\mu \dot{y}_\mu$ и времениподобный метрический тензор $g^{00} = -g^{11} = \ldots = -g^{n-1,\, n-1} = 1$.

Пусть частица излучает некоторое поле, инвариантное относительно преобразований из группы Пуанкаре координатной системы в $\mathscr{M}_n$. Уточним, что мы под этим понимаем. «Частица излучает скалярное поле» — это значит, что для каждой точки $x \in \mathscr{M}_n$ определена некоторая функция f, функционально зависящая от мировой линии: $f = f(x \mid y)$. Как следствие причинности $f(x \mid y)$ может зависеть только от части мировой линии, лежащей либо в переднем световом конусе с вершиной в точке x (опережающее поле), либо в заднем световом конусе с той же вершиной (запаздывающее поле). Начнем с запаздывающего поля, причем, следуя [5], будем считать, что поле зависит от поведения $y(s)$ лишь в точке пересечения мировой линии с задним конусом и не зависит от $y(s)$ внутри конуса. По очевидным причинам такое поле мы называем *светоподобным*.

Вследствие времениподобности мировой линии точка пересечения ее с задним конусом всегда существует и единственна, т. е. уравнение

$$[x - y(s)]^2 = 0 \tag{6}$$

единственным образом определяет s как функцию точки x: $s = s(x)$ при условии, что скалярное произведение

$$r = (x - y(s(x)))\,\dot{y}(s(x)) \tag{7}$$

неотрицательно (запаздывание). Таким образом,

$$f = f(x,\ y(s),\ \dot{y}(s),\ \ddot{y}(s),\ \ldots)\,|_{s=s(x)}, \tag{8}$$

где f в правой части зависит от произвольного, но конечного числа производных от $y(x)$. Зависимость от бесконечного числа производных означала бы фактическую зависимость поля от мировой линии внутри конуса, которую мы пока исключаем.

Далее, пуанкаре-инвариантность f означает, что она может зависеть только от скалярных произведений векторов $x-y$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ и т. д. В соответствии с обсуждавшимся во введении рассмотрим теперь свойства f как функции только лишь x. Соответственно обозначим

$$\varphi(x) = f(x - y(s),\ \dot{y}(s),\ \ddot{y}(s),\ \ldots)\,|_{s=s(x)}, \tag{9}$$

где $\varphi(x)$ и есть интересующее нас поле. Подчеркнем, что φ как функция только x [явно и неявно через $s = s(x)$], т. е. для фиксированной мировой линии, не инвариантна ни относительно трансляций, ни относительно преобразований Лоренца.

2. Пуанкаре-инвариантные уравнения для полей излучения частиц. Удовлетворяет ли введенное светоподобное поле $\varphi(x)$, излучаемое частицей, какому-либо пуанкаре-инвариантному дифференциальному уравнению второго порядка? Какова конкретная форма φ и этого уравнения? Повторим еще раз, что эти пуанкаре-инвариантные уравнения не могут зависеть от мировой линии частицы, порождающей поле, и в частности не могут содержать никаких членов типа источника.

Как было показано в [5], условие того, что φ удовлетворяет таким уравнениям, определяет функцию $\varphi(x)$ однозначно [с точностью до преобразования переменной поля $\varphi(x) \to F(\varphi(x))$] при любой размерности n пространства — времени:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\ln r^2, & n=2; \\ r^{-(n-2)/2}, & n \geqslant 3, \end{cases} \tag{10}$$

где r определено равенством (7) с $s = s(x)$. Соответствующие дифференциальные уравнения для этих φ имеют вид

$$\partial^2\varphi = \begin{cases} -2\exp\varphi, & n=2; \\ \frac{(n-2)(n-4)}{2}\varphi^{(n+2)/(n-2)}, & n \geqslant 3, \quad n \neq 4. \end{cases} \tag{11}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу этих уравнений:

а. Функции $\varphi(x)$, заданные формулами (10), сингулярны при $r = 0$, так что уравнения (11) следует понимать в смысле обобщенных функций. Ниже мы дадим явное описание сингулярностей φ, тогда можно будет легко убедиться, что при каждом фиксированном x^0 все рассматриваемые функции (φ, $\partial^2\varphi$, $-2e^\varphi$, $\varphi^{(n+2)/(n-2)}$ определены как обобщенные функции (см. [7]) и в том же смысле выполняются уравнения (11).

б. Среди уравнений (11) отсутствует уравнение для $n = 4$. Формально при $n = 4$ имеем $\partial^2\varphi = 0$. Однако на самом деле $\partial^2\varphi = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\delta^{(4)}(x - y(s))$, так как при $n = 4$ согласно (10) φ — в точности свертка стандартной запаздывающей функции Грина уравнения Д'Аламбера с такой правой частью. Отметим, что φ в решении (10) зависит только от r, что отвечает согласно (8) и (9) полю f, зависящему только лишь от векторов $x - y$ и $\dot{y}$ [r в этом случае в силу (5) и (6) — единственный нетривиальный скаляр]. Единственная модификация (10) и (11), связанная с общим случаем зависимости в (8) и (9), это поле $\varphi(x) = \mathrm{const}\,(\partial^2)^{n/2-1}r^{-1}$ для всех четных $n \geqslant 6$, которое является решением того же, с точностью до постоянного множителя, уравнения Д'Аламбера с δ-функцией, которое приведено выше для $n = 4$. Мы не рассматриваем эти уравнения, так как они не пуанкаре-инвариантны: $\varphi(\Lambda x + a)$ удовлетворяет уравнению с мировой линией $\Lambda^{-1}[y(s) - a]$. Очевидно, в уравнениях (11) этого эффекта нет, так как они не содержат источников.

в. При $n = 2$ имеем уравнение Лиувилля. При $n \geqslant 3$ получаются конформно-инвариантные уравнения для скалярного поля. То, что мы пришли именно к конформно-инвариантным уравнениям, связано, очевидно, с выбранным светоподобным характером излучаемого поля. Ниже, опуская это требование, покажем, что есть совсем другие уравнения (например, уравнение sh-Гордон), имеющие аналогичные решения.

г. При подстановке

$$\chi = \begin{cases} \varphi, & n = 2; \\ \dfrac{2}{n-2} \ln \varphi^2, & n \geqslant 3 \end{cases} \tag{12}$$

уравнения (11) переходят в

$$\partial^2 \chi + \frac{n-2}{4} (\partial \chi)^2 = (n-4) \exp \chi. \tag{13}$$

Это — известные уравнения, описывающие метрику $g^{\mu\nu} \exp \chi$ конформно-плоских псевдоримановых пространств с постоянной скалярной кривизной (нулевой для $n = 4$). Возможны и любые другие замены полевой переменной φ, и нужна дополнительная физическая информация (поведение в точке сингулярности, поведение на бесконечности и т. п.) для того чтобы выбрать правильный представитель для поля, излучаемого частицей. Форма (11) представляется естественной, так как соответствующие лагранжианы суть

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} (\partial \varphi)^2 - 2 \exp \varphi, & n = 2; \\ \dfrac{1}{2} (\partial \varphi)^2 + \dfrac{(n-2)^2 (n-4)}{8n} \varphi^{\frac{2n}{n-2}}, & n \geqslant 3, \ n \neq 4, \end{cases}$$

и любое изменение φ приводит к умножению кинетического члена на некоторую функцию новой полевой переменной. В то же время φ в (10) при $n \geqslant 3$ положительно, так что следует рассматривать только положительные решения (11). Это обстоятельство неудобно при рассмотрении задачи Коши для таких уравнений, так что может оказаться полезным решать уравнение (13) для вещественных χ и определять φ посредством обратной к (12) формулы $\varphi = \exp \left\{ \frac{(n-2)}{4} \chi \right\}$.

д. Можно ввести и опережающие поля, излучаемые частицей. Единственное отличие состоит в том, что собственное время s будет определяться как функция x с помощью условия $r \leqslant 0$ [ср. (7)]. Опережающие поля оказываются решениями тех же уравнений (11). Но легко убедиться в том, что $\varphi(x)$ не может быть нетривиальной функцией запаздывающих и опережающих полей (опять при $n \neq 4$). Только при $n = 2$ вместо запаздывающих или опережающих полей можно рассматривать поля, распространяющиеся со скоростью $+1$ или -1. Последние также удовлетворяют уравнению Лиувилля.

е. Как отмечалось в работе [5], легко модифицировать всю схему для векторного светоподобного поля, излучаемого частицей. Там были рассмотрены два типа решений.

i. Поле

$$A = \frac{\dot{y}}{r} \bigg|_{s = s(x)}, \tag{14}$$

удовлетворяющее уравнению

$$\partial^2 A^\mu = (n-4)\{(A\partial)\, A^\mu + A^2 A^\mu\}, \quad n \geqslant 2 \qquad (15)$$

с дополнительным условием (связью)

$$\partial A = 0.$$

Для $n = 4$ опять имеем уравнение Д'Аламбера и снова, рассматривая (15) в смысле обобщенных функций, получаем, что источник следует вводить тогда и только тогда, когда $n = 4$. Поле (14) при $n = 4$ — это, конечно, просто потенциал Льенара — Вихерта.

ii. Размерность $n = 4$ была выше исключительным случаем. Но для векторного поля можно включить ее в общую схему, положив

$$A = \frac{x-y}{r^2} - \left.\frac{\dot{y}}{r}\right|_{s=s(x)}. \qquad (16)$$

Такое векторное поле удовлетворяет в смысле обобщенных функций уравнению

$$\partial^2 A^\mu + 2A^2 A^\mu = 0 \quad (n=4) \qquad (17)$$

с дополнительным условием

$$\partial A + A^2 = 0.$$

3. Построение двухчастичного решения с помощью конформного преобразования. Рассмотрим специальное решение уравнений (11), отвечающее прямолинейному равномерному движению частицы. При этом

$$y = us, \qquad (18)$$

где u — постоянный вектор, причем вследствие (5)

$$u^2 = 1. \qquad (19)$$

Решая (6) в этом частном случае, находим $s(x) = xu - \sqrt{(xu)^2 - x^2}$, так что вследствие (7)

$$r = \sqrt{(xu)^2 - x^2}. \qquad (20)$$

Если $x_\perp = x - (xu)\,u$, то $r = \sqrt{-x_\perp^2}$. В частности, если $u = (1, \mathbf{0})$, т. е. если частица покоится, то $r = \sqrt{\mathbf{x}^2}$. Таким образом, r есть расстояние между точкой x и мировой линией частицы. Расстояние r обращается в нуль, когда $-x_\perp^2 = 0$: $x_\perp$ — пространственно-подобный вектор, так что $r = 0$ тогда и только тогда, когда $x_\perp = 0$. Подставляя это r в (10) для соответствующей пространственно-временной размерности n, получаем решение уравнения (11), описывающее поле, излучаемое свободно движущейся частицей. Воспользуемся теперь конформной инвариантностью для построения нового решения, исходя из обсуждаемого.

Пусть $n \geqslant 3$ и $x \to 'x$ — конформное преобразование, т. е. $\frac{\partial x}{\partial' x^\mu} \frac{\partial x}{\partial' x^\nu} = \omega^{-2}(x)\, g_{\mu\nu}$, где ω — скалярная вещественная функция. Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет (11), тогда $'\varphi(x) = [\omega(x)]^{(n-2)/2} \times \times \varphi('x(x))$ также удовлетворяет (11) (см. [8]). Выберем $\varphi(x)$, как указано выше, с $u = (1, 0, \ldots, 0)$ (покоящаяся частица)

$$\varphi(x) = (\mathbf{x}^2)^{-\frac{n-2}{4}} \tag{21}$$

и рассмотрим специальное конформное преобразование

$$'x = \frac{x - bx^2}{1 - 2bx + b^2x^2},$$

где b — фиксированный вектор. Тогда вместо (21) получим новое решение

$$'\varphi(x) = (\mathbf{x} - \mathbf{b}x^2)^{-\frac{n-2}{4}}. \tag{22}$$

Это решение также сингулярно, однако его сингулярности образуют две линии

$$\mathbf{x}_\pm = -\frac{\mathbf{b}}{2\mathbf{b}^2}\left[1 \pm \sqrt{4b^2(x^0)^2 + 1}\right] \tag{23}$$

вместо одной (ось t) в решении (21). Не теряя общности, положим $b = (-a, 0, \ldots, 0)$, $a > 0$. Получаем две линии в (x^0, x^1)-плоскости (рис. 1). Решение (22) описывает две частицы, мировые линии которых идентифицируются с сингулярностями этого решения. Оно отвечает отталкиванию двух (асимптотически) безмассовых частиц.

Таким образом, уравнения (11), построенные при помощи одночастичных решений, имеют также и двухчастичные решения. Естественно предположить, что они имеют и многочастичные решения. Это так для двухмерного случая ($n = 2$). Здесь [см. (10)] для покоящейся частицы имеем решение (11)

$$\varphi(x) = \ln(x^1)^2, \tag{24}$$

так как $r = (\mathbf{x}^2)^{1/2} = |x^1|$. Конформная группа при $n = 2$ бесконечномерна, и конформная инвариантность уравнения Лиувилля означает, что если $\varphi(x, t)$ — решение, то и

$$\varphi\left(\frac{A(x+t) + B(x-t)}{2}, \frac{A(x+t) - B(x-t)}{2}\right) + \\ + \ln A'(x+t)\, B'(x-t)$$

является решением. Две монотонные функции A и B параметризуют конформное преобразование.

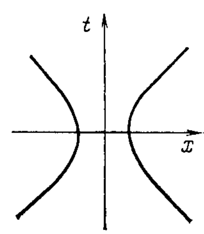

Рис. 1. Линии особенности двухсингулярного решения

Исходя из решения (24) и пользуясь этим конформным преобразованием, получаем решение уравнения Лиувилля, зависящее от двух произвольных ($A' > 0$, $B' > 0$) вещественных функций,

$$\varphi(x, t) = \ln \frac{4A'(x+t)B'(x-t)}{[A(x+t)+B(x-t)]^2}. \tag{25}$$

Это в точности представление Лиувилля [9] для общего регулярного решения уравнения. Как показано в [3, 4] и как будет обсуждаться ниже, можно определить A и B таким образом, что (25) будет действительно описывать решения с произвольным числом линий сингулярности.

4. Формулировка задачи Коши для уравнений (11). Было показано, что в принципе существует возможность исследования некоторых многочастичных механических систем в рамках полевого подхода, если мы принимаем в рассмотрение сингулярные решения нелинейных уравнений. Естественно параметризовать решения любых дифференциальных уравнений заданием данных Коши. В нашем случае эти начальные данные должны быть, разумеется, сингулярными. И, кроме того, они должны содержать информацию о поведении линий сингулярности соответствующих решений. Поэтому для осуществления намеченной программы описания классических частиц с помощью сингулярностей решений нелинейных уравнений поля следует: i. выделить тот класс начальных данных, которые приводят к нужным решениям, и ii доказать теорему существования и единственности решения задачи Коши в этом классе. Вторая задача очень сложна. Заметим, что таких теорем нет для уравнений (11) (при $n \geqslant 3$), для уравнений (15) и (17) даже и для регулярных решений. Поэтому дальше будет рассмотрено только уравнение Лиувилля ($n = 2$), для которого эта теорема была доказана в [2]. Рассмотрим теперь класс начальных данных.

Мы интерпретировали решение с одной линией сингулярности как поле, излучаемое одной частицей. Естественно интерпретировать решение с несколькими линиями сингулярности как поле, излучаемое соответствующим числом частиц, т. е. как своего рода суперпозицию. Невзирая на то, что эта суперпозиция нелинейна, физическая интуиция подсказывает нам, что в окрестности некоторой частицы сингулярность поля определяется вкладом именно этой частицы, а остальные вносят в этой окрестности только регулярный вклад. Тогда можно пользоваться (10) для определения типа сингулярности. Так как нас интересуют начальные условия, то фиксируем

$$x^0 = t$$

и рассмотрим поведение по переменной $\mathbf{x}$. Пусть точка $(t, \mathbf{z})$ принадлежит мировой линии (4), т. е. $r|_{x=(t, \mathbf{z})} = 0$. Тогда из (7) следует, что для $\mathbf{x}$ вблизи $\mathbf{z}$

$$r=\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2+\frac{((\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\mathbf{v})^2}{1-\mathbf{v}^2}}+O(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2);$$

$$\partial^0 r=-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\mathbf{v}}{1-\mathbf{v}^2}\,\frac{1}{\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2+\frac{((\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\mathbf{v})^2}{1-\mathbf{v}^2}}}+O(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|).$$

Мы ввели здесь вектор $\mathbf{v}$ скорости частицы в точке $(t,\ \mathbf{z})$:

$$\dot{y}(s(t,\ \mathbf{z}))=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}},\ \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}\right).$$

Итак, для $\chi=-\ln r^2$ при произвольном n [см. (10) и (12)] получаем

$$\chi(t,\ \mathbf{x})=-\ln\left[(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2+\frac{((\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\mathbf{v})^2}{1-\mathbf{v}^2}\right]+O(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|);$$

$$\partial^0\chi(t,\ \mathbf{x})=\frac{2\,(\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\mathbf{v}}{(\mathbf{x}-\mathbf{z})^2\,(1-\mathbf{v}^2)+((\mathbf{x}-\mathbf{z})\,\mathbf{v})^2}+O(1). \qquad (26)$$

Воспользовавшись снова (12), легко получить сигнулярности φ: при $n=2$ $\varphi=\chi$, а при $n>2$ самая сильная сингулярность φ есть $|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^{-n-2}$. В соответствии с обсуждением естественно рассматривать начальные данные с поведением такого типа вблизи каждой точки сингулярности $\mathbf{z}_i$ со своей скоростью $\mathbf{v}_i$. Подчеркнем, что начальные данные для частиц включены в начальные данные для поля. Таким же путем, пользуясь решениями (10) или (12), можно найти асимптотическое поведение по $\mathbf{x}$ введенных полей. Легко видеть, что $\chi(t,\ \mathbf{x})$ на асимптотике логарифмически растет, а $\partial^0\chi(t,\ \mathbf{x})$ убывает как $1/|\mathbf{x}|$. Это завершает описание начальных данных для уравнений (11) или (13). Так же можно найти класс начальных данных для векторных полей, удовлетворяющих уравнениям (15) и (17).

2. СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

1. Уравнение Лиувилля. В этом разделе опишем свойства сингулярных решений и покажем, как общая схема работает в этих случаях. Начнем с уравнения Лиувилля, т. е. в точности с нашей схемы для $n=2$. Удобно немного изменить обозначения: вместо $x=(x^0,\ x^1)$ будем далее писать $(x^0,\ x^1)=(t,\ x)$. В этих обозначениях первое из уравнений (11) запишется в виде

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+2\exp\varphi=0. \qquad (27)$$

Рассмотрим задачу Коши для этого уравнения

$$\varphi(0,\ x)=\phi(x);\ \varphi_t(0,\ x)=\pi(x), \qquad (28)$$

где $\phi(x)$ и $\pi(x)$ — заданные функции. Эти функции сингулярны, и их сингулярности определяются формулой (26). Свойства этих функций таковы: $\phi(x)$ дважды дифференцируема, а $\pi(x)$ один раз дифференцируема везде в $-\infty < x < \infty$ за исключением конечного множества точек сингулярности $\{x_j\}_{j=1}^N$. Каждой точке сингулярности x_j отвечает некоторая окрестность U_j, гладкие функции $f_j(x)$, $g_j(x)$ и вещественный параметр v_j, $|v_j| < 1$ такие, что для каждого $x \in U_j$

$$\left.\begin{aligned} \phi(x) &= -\ln\frac{(x-x_j)^2}{(1-v_j^2)} + (x-x_j) f_j(x); \\ \pi(x) &= v_j\left(\frac{2}{x-x_j} + f_j(x)\right) + (x-x_j) g_j(x). \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

В соответствии с рассуждением, следующим за (26), рассмотрим таким способом решение с N сингулярностями. Функция $\phi(x)$ ведет себя на пространственной бесконечности логарифмически, а $\pi(x)$ убывает как $1/x$ [вследствие (12) в этом случае $\varphi = \chi$]. Именно такая задача Коши с сингулярностями рассматривалась в наших предыдущих работах. В [2] доказана теорема существования и единственности решения этой задачи. В [1, 3] изучены общие свойства этих решений. Там было установлено, что все такие решения описываются с помощью представления Лиувилля (25), где A и B имеют следующий общий вид:

$$\left.\begin{aligned} A(\xi) &= I(\xi) + \alpha + \sum_{j=1}^{N_A} \frac{c_j}{x_j - I(\xi)}, \\ B(\eta) &= J(\eta) + \beta + \sum_{j=1}^{N_B} \frac{d_j}{z_j - J(\eta)}. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

В этих формулах ξ и η — конусные переменные:

$$\xi = (x+t)/2; \quad \eta = (x-t)/2, \qquad (31)$$

α, β, c_j, d_j, y_j, z_j — константы такие, что c_j, $d_j > 0$, $y_1 < \ldots < y_{N_A}$, $z_1 < \ldots < z_{N_B}$, а I и J — трижды непрерывно дифференцируемые вещественные функции при $-\infty < \xi < \infty$, $-\infty < \eta < \infty$ со свойством монотонности $I'(\xi) > 0$, $J'(\eta) > 0$ и с линейным поведением при $|\xi| \to \infty$ и $|\eta| \to \infty$ соответственно. Чтобы определить все указанные константы и функции I и J через начальные данные, надо решить некоторое уравнение Шредингера при нулевой энергии с регулярным потенциалом, приведенным в [3]. Легко убедиться в том, что решение (25) после подстановки (30) не имеет иных сингулярностей кроме тех, которые определяются уравнением

$$A(\xi) + B(\eta) = 0. \qquad (32)$$

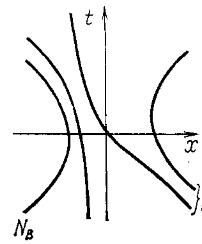

Рис. 2. Общее поведение линий особенности решения уравнения Лиувилля для $N_A = 2$, $N_b = 1$

Решения этого уравнения образуют N гладких времениподобных линий в плоскости (x, t) без пересечений (рис. 2), причем

$$N = N_A + N_B + 1. \tag{33}$$

Такая картина сингулярностей естественно интерпретируется в терминах частиц, так что решение уравнения Лиувилля с определенным N описывает движение N взаимодействующих классических частиц. Чтобы получить уравнения движения этих частиц, заметим, что представление (30) подсказывает наличие выделенного подкласса решений, для которых

$$I(\xi) = c\xi, \quad J(\eta) = d\eta; \quad c,\ d > 0. \tag{34}$$

Такие решения мы назвали в [3, 4] чисто сингулярными. Это — простейшие решения с заданным N. Для того чтобы из этого подкласса получить весь класс, следует воспользоваться конформным преобразованием $\xi \to I(\xi)$, $\eta \to J(\eta)$, которое вследствие (33) не меняет N. Замечательная особенность подкласса чисто сингулярных решений состоит в том, что он пуанкаре-инвариантен. В самом деле, трансляция и лоренцевы бусты компенсируются изменением параметров в (30) и (34). Общие свойства динамических систем, отвечающих чисто сингулярным решениям, рассмотрены в [4], где показано, что это — релятивистские вполне интегрируемые системы. Поведение мировых линий частиц этих систем такое же, как на рис. 2. При $|t| \to \infty$ находим N_A безмассовых частиц со скоростями -1, N_B безмассовых частиц со скоростями $+1$ и одну массивную частицу со скоростью v, $|v| < 1$. В результате взаимодействия частицы обмениваются не только скоростями, но и массами. Рассмотрим подробнее следующие простейшие примеры:

$N = 1$. Из (30), (32) — (34) следует уравнение для линии сингулярности: $x = q + vt$, $-1 < v < 1$, так что чисто сингулярное решение описывает свободную релятивистскую частицу с ненулевой массой. Ее уравнение движения есть $\ddot{x} = 0$ (точка здесь означает дифференцирование по t), и ее лагранжиан

$$\mathscr{L} = \mathrm{const}\sqrt{-\dot{\xi}\dot{\eta}} \equiv -\mathrm{const}\sqrt{1-\dot{x}^2}.$$

Отсюда получается, что общее решение с $N = 1$ описывает движение частицы во «внешнем» потенциале с

$$\mathscr{L} = -\mathrm{const}\,(I'(\xi)\,J'(\eta))^{1/2}\sqrt{1-\dot{x}^2}.$$

$N = 2$. Здесь уравнения движения частиц суть

$$\ddot{x}_i = 2\,\frac{1-|\dot{x}_1+\dot{x}_2|+\dot{x}_1\dot{x}_2}{x_i-x_j}, \quad (i,\ j) = (1,\ 2),\ (2,\ 1),$$

а лагранжиан имеет вид

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{|x_1-x_2|}\sqrt{1-|\dot{x}_1+\dot{x}_2|+\dot{x}_1\dot{x}_2}-\mathrm{const}\sqrt{1-(1-|\dot{x}_1+\dot{x}_2|)^2}.$$

Опять, совершая конформное преобразование $\xi\to I(\xi)$, $\eta\to J(\eta)$, найдем уравнения и лагранжиан, описывающие движение сингулярностей общего решения с $N=2$. И его опять естественно понимать как движение той же системы во внешнем поле. Таким образом, можно рассматривать общее сингулярное решение уравнения Лиувилля как нелинейную суперпозицию некоторого внешнего поля и поля, излученного движущимися частицами.

2. Сингулярные решения уравнения sh-Гордон. В первой части этой работы рассмотрены лишь светоподобные поля. Существенным моментом было то, что поле в точке x определялось только одной точкой на мировой линии частицы [см. формулу (6)]. Это была точка пересечения мировой линии с поверхностью заднего светового конуса с вершиной в точке x. Вследствие этого рассматриваемые поля в известном смысле — безмассовые, что и подтверждается их конформной инвариантностью. Для того чтобы включить еще и «массивные» поля, следует рассматривать поле в точке как суперпозицию полей, достигающих этой точки из всех точек мировой линии внутри соответствующего конуса, причем такая суперпозиция обязана быть нелинейной. Это очень сложная задача. Но здесь есть обходный путь. С точки зрения физики поведение поля вблизи частицы не должно зависеть от массы этого поля. Кроме того, построенные нами сингулярные решения могли иметь особенность на произвольной времениподобной кривой, причем тип особенности сохранялся в динамике. Учитывая это, рассмотрим следующую задачу (для простоты в двухмерном пространстве — времени).

Пусть поле $\varphi(t, x)$ удовлетворяет скалярному уравнению

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+U'(\varphi)=0, \tag{35}$$

где $U'=dU/d\varphi$. Будем считать, что выполнены следующие три условия:

1. $\varphi_t(t, x)$, $\varphi_x(t, x)$, $U(\varphi)\to 0$ при $|x|\to\infty$, так что соответствующие интегралы для P^μ и лоренцева буста сходятся на пространственной бесконечности; $U(\varphi)\geqslant 0$, т. е. в регулярном случае энергия неотрицательна.

2. Существует стационарное решение $\varphi_0(x)$, обращающееся в $+\infty$ в точке $x=0$.

3. Для каждой времениподобной кривой $x=q(t)$ существует решение $\varphi(t, x)$, обращающееся на этой кривой в $+\infty$, причем сингулярное поведение этого решения по x в каждый фиксированный момент времени t вблизи точки $q(t)$ задается соответствующим пуанкаре-преобразованием функции $\varphi_0(x)$. Иными словами,

$$\varphi(t, x)=\varphi_0\left(\frac{x-q(t)}{\sqrt{1-\dot{q}(t)^2}}\right)+R(t, x), \tag{36}$$

где R — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Какой вид должны иметь соответствующие $U(\varphi)$? Путем довольно длинных, хотя и несложных выкладок, подставляя (36) в (35) и требуя сокращения сингулярных членов, получаем, что для удовлетворения требованиям 1—3 потенциал $U(\varphi)$ должен быть асимптотически лиувиллевым:

$$U(\varphi) = 2e^{\varphi} V(\varphi), \tag{37а}$$

где

$$V(+\infty) = 1,\ V'(+\infty) = 0,\ V''(+\infty) = 0,\ \ldots, \tag{37б}$$

конечно, с точностью до замены $U(\varphi) \to c_1 U(c_2\varphi)$, где константы c_1 и c_2 положительны. Более того, оказывается, что особенность φ_0, а значит и φ согласно (36), логарифмическая и в точности совпадает с той, которая описывается формулой (26).

Это означает, что помимо «безмассовых» уравнений (11) [для φ или соответственно (13) для χ] сингулярными частицеподобными решениями должны обладать уравнения, близкие в указанном выше смысле к (11) [или (13)] при обращении поля в бесконечность. Сингулярности полей при этом те же, что и в безмассовом случае.

Условие (37) лишь необходимо для выполнения требований 1—3. Не останавливаясь на достаточных условиях, перейдем к рассмотрению примеров, для которых эти условия заведомо выполняются. Простейшим из них, отличным от уравнения Лиувилля, является уравнение sh-Гордон: |

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + 4\,\mathrm{sh}\,\varphi = 0. \tag{38}$$

В самом деле, пусть $\varphi \to \pm\infty$. Тогда (35) переходит в

$$(\pm\varphi)_{tt} - (\pm\varphi)_{xx} - 2\exp(\pm\varphi) = 0.$$

Это обстоятельство позволяет думать, что уравнение sh-Гордон имеет решения, переходящие в пределе в сингулярные решения уравнения Лиувилля с одним очевидным отличием: если φ есть решение уравнения (38), то и $-\varphi$ — также решение. Значит, для такого уравнения следует рассмотреть такую же задачу Коши с сингулярностями, которая описывается формулами (28) и (29), однако правая часть для $\phi(x)$ и для $\pi(x)$ в представлении (29) должна домножаться на параметр $s_j = \pm 1$, указывающий на знак сингулярности в точке x_j. Другое отличие относится к асимптотике начальных данных. Поскольку $\varphi \equiv 0$ удовлетворяет уравнению sh-Гордон, то естественно выбрать $\phi(x)$ и $\pi(x)$ так, чтобы они стремились к нулю на пространственной бесконечности.

Для уравнения (38) не существует никакого аналога формулы Лиувилля (25), но для его решения можно применить метод обратной задачи рассеяния. Нам не удалось доказать теорему существования и единственности для глобального решения с сингулярностями, однако специальный класс решений, аналогичный чисто сингулярным решениям уравнения Лиувилля, был построен в [6]. Эти решения суть в точности сингулярные солитоны [хорошо известно, что уравнение (38) не имеет регулярных солитонных решений]. Они снова имеют времениподобные линии сингулярности, которые тоже можно интерпретировать как мировые линии релятивистских частиц с прямым взаимодействием (подробней см. [6]). Решение с одной сингулярностью опять описывает свободную частицу, но уже решение с двумя сингулярностями приводит к более интересной динамике, чем в случае уравнения Лиувилля (рис. 3). На рис. 3, *а* показаны линии

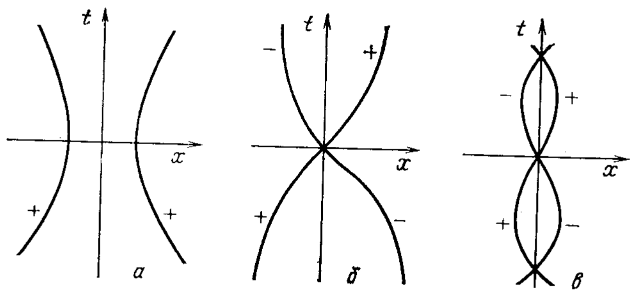

Рис. 3. Линии особенности для солитон-солитонного (*а*), солитон-антисолитонного (*б*) и бризерного (*в*) решений уравнения sh-Гордон

сингулярности для двухсолитонного решения. Это две массивные частицы с отталкиванием. Знаки обеих линий сингулярности здесь совпадают: $s_1 = s_2$. На рис. 3, *б* изображены линии сингулярности для солитон-антисолитонного решения. Это случай притяжения двух частиц, пересекающихся со световой скоростью. В этом случае $s_1 = -s_2$. При специальном выборе параметра скорости для $s_1 = -s_2$ можно получить другой случай (см. рис. 3, *в*), отвечающий бризерному решению, периодическому во времени. Оно описывает две частицы, пульсирующие вокруг общего центра, т.е. связанное состояние. Эта картина показывает, что знак сингулярности можно понимать как спин соответствующей частицы. Уравнения движения для такой системы, а также пример трехчастичной солитон-бризерной системы рассмотрены в [6].

3. Сингулярные решения для уравнения ($e^{2\varphi} - e^{-\varphi}$)-Гордон. Известно, что уравнение

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{4}{3}(e^{2\varphi} - e^{-\varphi}) = 0 \qquad (39)$$

также вполне интегрируемо и тоже стремится к уравнению Лиувилля, когда $\varphi \to \pm\infty$. Симметрия $\varphi \to -\varphi$ здесь отсутствует и предельные уравнения несколько отличаются друг от друга.

При $\varphi \to +\infty$ имеем

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{4}{3} e^{2\varphi} = 0,$$

при $\varphi \to -\infty$

$$(-\varphi)_{tt} - (-\varphi)_{xx} + \frac{4}{3} e^{(-\varphi)} = 0.$$

Поэтому надо перенормировать φ, x и t, для того чтобы с помощью (26) найти возможные сингулярности начальных данных. Так, находим два типа сингулярностей для $\phi(x) = \varphi(0, x) = (\chi(0, x))$:

$$\phi(x) = -\ln \frac{2|x|}{\sqrt{3}\sqrt{1-v^2}} + O(x) \quad \text{при} \quad \phi \to +\infty;$$

$$\phi(x) = \ln \frac{2x^2}{3\sqrt{1-v^2}} + O(x) \quad \text{при} \quad \phi \to -\infty.$$

Формулы для $\pi(x) = \varphi_t(0, x)$ получаются таким же путем. Соответствующие (стационарные) решения с одной сингулярностью, т.е. односолитонные решения, суть

$$\varphi(t, x) = \ln \frac{(\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\,|x|)^2}{2\,\mathrm{sh}\,|x|\,(\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\, x + 2\,\mathrm{sh}\,|x|)},$$

$$\varphi_1(t, x) = \ln \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x + 1/2}.$$

Здесь нет симметрии между решениями с положительной и отрицательной сингулярностью. Это значит, что соответствующие частицы имеют массы, зависящие от спина, так что динамические системы, отвечающие решениям со многими сингулярностями, могут рассматриваться как аналогичные системам, связанным с уравнением sh-Гордон, но без вырождения по массам.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Начав с самого общего представления о светоподобном пуанкаре-инвариантном поле, излучаемом частицей, мы установили единственные пуанкаре-инвариантные уравнения для таких полей. Рассмотрены возможность построения многочастичных решений и выбор класса сингулярных начальных данных для соответствующей задачи Коши. Эти результаты указывают на возможность описания системы пуанкаре-инвариантных частиц с прямым взаимодействием между ними (вообще говоря, в некотором внешнем поле) с помощью причинных пуанкаре-инвариантных (ковариантных) уравнений. Рассмотрена реализация этой программы для двухмерного пространства-времени. Мы также коснулись некоторых обобщений, когда излучаемое поле несветоподобно, т. е. когда поле обладает массой.

Подчеркнем, что все рассмотренные уравнения для поля никак не зависят от параметров частиц. Как всегда в методе обратной задачи рассеяния эти параметры возникают только в переменных действие — угол, когда частицам отвечают дискретные переменные. а непрерывные переменные описывают внешнее поле.

Отметим, что канонические тензоры энергии — импульса, получаемые при помощи теоремы Нетер, имеют неинтегрируемые особенности для всех рассмотренных уравнений. Однако, пользуясь известным произволом в выборе этих тензоров, можно их ввести так, что они будут регулярны для всех $x \in \mathscr{M}_n$. Например, для уравнения Лиувилля такой тензор имеет вид

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{can}} - 2\varepsilon^{\mu\lambda}\partial_\lambda \varepsilon^{\nu\sigma}\partial_\sigma \varphi,$$

где $\varepsilon^{00} = \varepsilon^{11} = 0$, $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$. Это в точности бесшпуровый тензор, отвечающий дилатационной инвариантности уравнения (27). Регулярные тензоры можно построить для всех уравнений (11) или (13). Регулярные тензоры для уравнения sh-Гордон и для $e^{2\varphi} - e^{-\varphi}$-Гордон выглядят следующим образом:

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{can}} - 2\varepsilon^{\mu\lambda}\partial_\lambda \varepsilon^{\nu\sigma}\partial_\sigma \ln \operatorname{ch} \varphi \quad \text{для (38);}$$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{can}} - \varepsilon^{\mu\lambda}\partial_\lambda \varepsilon^{\nu\sigma}\partial_\sigma \ln (e^{\varphi} + e^{-2\varphi}) \quad \text{для (39).}$$

При этом мы получаем конечные энергию и импульс для сингулярных полей, но теряем положительную определенность гамильтонианов.

Идея рассмотрения линий сингулярности решений нелинейных уравнений как мировых линий частиц сама по себе не нова. Так в работах [10, 11] изучались линии сингулярности для уравнения Кортевага — де Фриза и в [12] для некоторых других уравнений. Однако там рассматривались только решения специального рационального вида

$$\varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{r_j(t)}{x - x_j(t)}.$$

По этой причине получавшаяся динамика частиц была неинвариантной и включала помимо уравнений движения еще и связи. Нам удалось обойти эти трудности, так как мы не пользовались никаким специальным анзатцем для наших решений, а тип сингулярностей начальных данных диктовался общими соображениями.

Круг идей, которые развиваются в этой работе, когда они только еще возникали у нас, мы неоднократно обсуждали с покойным Юрием Михайловичем Широковым, и его интерес к ним и благожелательная критика были нам очень дороги. Закончив сейчас эту статью, мы особенно остро ощущаем тяжелую утрату, которую все мы понесли с его безвременной кончиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jorjadze G. P., Pogrebkov A. K., Polivanov M. C.** Preprint IC/78/126, ICTR, Trieste, Italy, 1978.
2. **Погребков А. К.**— Докл. АН СССР, 1979, т. 244, № 4, с. 873—876.
3. **Джорджадзе Г. П., Погребков А. К., Поливанов М. К.**— ТМФ, 1979, т. 40, № 2, с. 221—234.

4. **Погребков А. К.**— ТМФ, 1980, т. 45, № 2, с. 161—170; **Pogrebkov A. K., Todorov I. T.** Relativistic Hamiltonian Dynamics of Singularities of the Liouville Equation.— Ann. Inst. H. Poincarè, 1982, v. 38, p. 81—92.

5. **Pogrebkov A. K.**— Lett. Math. Phys., 1982, v. 6, p. 243—248.

6. **Pogrebkov A. K**— Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, p. 277—285.

7. **Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.

8. **Tagirov E. A., Todorov I. T.**— Acta phys. Austriaca, 1979, v. 51, p. 135.

9. **Liouville J.**— J. Math. Pures Appl., 1853, v. 18, p. 71.

10. **Kruskal M. D.**— Lect. Appl. Math., 1974, v. 15, p. 61.

11. **Airault M., McKean H. P., Moser. J.**— Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, p. 95.

12. **Calogero F.**— Nuovo cimento, 1978, v. 43B, p. 177.