«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1983,
ТОМ 14, ВЫП. 5

Посвящается памяти
Юрия Михайловича Широкова

УДК 539.182

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ И ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД К ДИНАМИКЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

П. А. Николов, И. Т. Тодоров

Институт ядерных исследований и ядерной энергетики Болгарской академии наук,
София

Дан обзор недавних результатов, полученных в релятивистской механике прямовзаимодействующих точечных частиц. Приведена не зависящая от параметризации формулировка задачи в терминах проективных касательных пространств и дифференциальных систем второго порядка. Обсуждается отношение общей пространственно-временной картины к гамильтонову подходу со связями, в том числе к теореме о калибровочной зависимости мировых линий в пространстве канонических координат. В двухчастичном случае построены (по теории возмущений) неканонические переменные положения и времени с не зависящими от параметризации траекториями. Дан также обзор применения канонического гамильтонова подхода к проблеме двух тел в общей теории относительности.

A review of recent results obtained within relativistic mechanics of directly interacting point particles is given. A parametrization independent formulation of the problem in terms of projective tangent spaces and second order differential systems is presented. The relation is discussed of this general space-time picture to the Hamiltonian approach with constraints and to the theorem on gauge dependence of world lines in the space of canonical coordinates. For the two-particle case non-canonical position variables are constructed (within perturbation theory) with parametrization independent trajectories. A review is also given of application of the Hamiltonian approach to the two-body problem in general relativity theory.

ВВЕДЕНИЕ

Хотя с момента создания специальной теории относительности и одновременно формулировки механики одной релятивистской частицы во внешнем поле прошло 75 лет, только в последние годы разрозненные до сих пор попытки построения релятивистской механики системы нескольких прямовзаимодействующих частиц стали восприниматься как разные стороны единой непротиворечивой картины. Так называемая теорема об отсутствии взаимодействия (см. например, сборник [15], монографию [19] и статьи [12, 16, 20, 26, 27], где полученные результаты обсуждаются с современной точки зрения) многими интерпретировались как указание на то, что вообще нельзя построить релятивистскую теорию взаимодействующих частиц без участия поля, реализующего идею близкодействия, хотя сами авторы теоремы указывали, что она приводит лишь к необходимости рассматривать неканонические координаты.

Здесь уместно оговориться. Картина заряженных частиц, взаимодействующих через электромагнитное поле, которое несет бесконечно много степеней свободы, является лучшим приближением к действительности, чем описание взаимодействия таких частиц посредством некоего эффективного потенциала. Однако существует класс явлений (включающий как задачу о связанных состояниях, так и кулоновское рассеяние), в котором эффекты излучения пренебрежимо малы и для которого оправдано использование более простого «квазипотенциального» подхода как в нерелятивистском, так и в релятивистском случае *. (Различие между этими двумя случаями проявляется в релятивистском эффекте запаздывания, который кодируется зависимостью потенциала от энергии.) Такое приближение может сочетаться с точной лоренцевой (или галилеевой) инвариантностью задачи. В течение более двух столетий мы работаем с математически самосогласованной (инвариантной относительно группы Галилея) механикой Ньютона конечного числа точечных частиц. В последние годы завершается построение не менее последовательной релятивистской механики частиц, которая может служить, кроме всего прочего, классической основой всех существующих вычислений тонкой структуры и лэмбовского сдвига спектра водородоподобных атомов и позитрония.

Проследить историю создания релятивистской механики прямовзаимодействующих точечных частиц весьма не просто. Число работ по этой теме — в особенности в послевоенный период — огромно (см., например, библиографию в триестских лекциях [38]; этой теме посвящено уже несколько монографий — см., например, [2, 14, 19]). В 40-х годах этой проблемой занимались Дирак [6] и Уилер и Фейнман [41]. В 50-х годах она привлекла внимание Ю. М. Широкова **. Работы 60-х годов (см., например, [15]) поставили под сомнение применимость канонического гамильтонова подхода к релятивистской задаче взаимодействующих частиц. Выход из указанных затруднений, который рассматривается в разд. 2 (см. также [36—48]), основан на гамильтоновом формализме со связями, развитом Дираком и др. [7, 10, 13], и на идее о неканонических координатах. Другие подходы,

---

* Истоки квазипотенциального подхода могут быть найдены еще в работах 30-х годов (см., например, [11] и цитированную там литературу). Последовательное развитие и применение этого метода, однако, началось с работы А. А. Логунова и А. Н. Тавхелидзе [17]. Наше изложение в разд. 2 связано с вариантом этого подхода, изложенным в [25, 35], где читатель найдет также более полную библиографию.

** Вклад Ю. М. Широкова в эту тему не исчерпывается его публикациями [29]. Своей компетентной и доброжелательной критикой, в частности в качестве руководителя семинара по квантовой теории поля Математического института им. В. А. Стеклова, он поддерживал ряд работ в данном направлении и способствовал их улучшению (в том числе работы [20, 30, 31, 36], о которых речь пойдет ниже).

которые приводят к аналогичному результату, содержатся в работах С. Н. Соколова [30—32], Бела и др. [3], Дроз-Венсэна [8], Саждяна [27, 28] и др. [12, 34]. (Во всех случаях мы цитируем поздние работы перечисленных авторов, в которых имеются ссылки на их более ранние публикации.)

Первый раздел настоящей статьи содержит сжатое изложение не зависящей от параметризации формулировки законов движения релятивистских частиц, разработанной в [21]. В разд. 2 обсуждается связь этой пространственно-временной картины с теоремой [20] о калибровочной зависимости мировых линий в пространстве канонических координат и рассматривается применение канонического гамильтонова подхода к задаче двух тел в общей теории относительности.

1. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ФОРМУЛИРОВКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ БЕЗ ВЫДЕЛЕННОГО ПАРАМЕТРА ЭВОЛЮЦИИ

А. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии. Понятие о дифференциальной системе. Начнем с напоминания некоторых понятий из дифференциальной геометрии, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть M — гладкое (C^∞), вещественное, D-мерное многообразие; k-мерная *дифференциальная система* (называемая также *распределением*) на M ($1 \leqslant k \leqslant D$) определяется заданием для каждого $x \in M$ некоторого k-мерного подпространства $\sigma(x)$ касательного пространства T_xM, удовлетворяющего следующему условию гладкости. Для каждого $x \in M$ существует окрестность $U \ni x$ и k гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_k$ на U, на которые натянуто $\sigma(y)$ для любого $y \in U$.

Связное иммерсированное * k-мерное подмногообразие S многообразия M называется *интегральным многообразием* для дифференциальной системы σ, если для любого $x \in S$

$$T_xS = \sigma(x). \tag{1}$$

Существует не более одного максимального интегрального подмногообразия, проходящего через данную точку. Дифференциальная система σ называется *интегрируемой*, если существует ее интегральное многообразие, проходящее через каждую точку M. Согласно классической *теореме Фробениуса* система σ интегрируема в том и только в том случае, если она *инволютивна*, т. е. если для каждой

---

* Здесь существенно, что топология иммерсированного многообразия $S \in M$ может отличаться от топологии индуцированной многообразием M. В качестве стандартной ссылки по дифференциальной геометрии для ознакомления со всеми используемыми здесь понятиями, мы рекомендуем монографии Б. А. Дубровина, С. П. Новикова, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1979; Ш. Кобаяси и К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. Т. I и II. М.: Наука, 1981.

пары векторных полей $X_1(x)$, $X_2(x)$, принадлежащих σ (при $x \in M$), коммутатор $[X_1, X_2]$ также принадлежит σ. Пространство всех (максимальных) интегральных многообразий инволютивной дифференциальной системы σ задает гладкое k-мерное слоение на M.

[Напомним, что семейство $\mathscr{F} = \{S_\alpha, \alpha \in A\}$ линейно связанных подмножеств S_α многообразия M называется k-мерным (гладким) слоением, если

$$1)\ \alpha\beta \in A,\ \alpha \neq \beta \Rightarrow S_\alpha \cap S_\beta = \varnothing;\ 2)\ \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha = M;$$

3) для каждого $x \in M$ существует *карта*, т. е. окрестность $U \ni x$ и отображение φ из U на открытое подмножество D-мерного евклидова пространства такая, что линейно связанные компоненты множества $\varphi(S_\alpha \cap U (\neq \varnothing))$ имеют вид $\{(x^1, \ldots, x^2) \in \varphi(U);\ x^{k+1} = C^{k+1}, \ldots, x^D = C^D\}$.] Из определения слоения следует, что для каждой достаточно малой окрестности $U \subset M$, если $S_\alpha \cap U \neq \varnothing$, то линейно связанные компоненты $S_\alpha \cap U$ являются k-мерными подмногообразиями M и S_α ($\alpha \in A$) являются иммерсированными подмногообразиями. Всякое слоение определяет инволютивную дифференциальную систему такую, что $\sigma(x) = T_x S_\alpha$ для всех $x \in S_\alpha$, $\alpha \in A$.

Соответствие между инволютивными дифференциальными системами и слоениями аналогично соответствию между векторными полями (дифференциальными операторами первого порядка) и потоками. В первом случае слои (аналог траектории потока) определяются без выделения «эволюционного» параметра. При рассмотрении релятивистской системы это является преимуществом, так как в этом случае нет привилегированного выбора параметра времени. Однако классическая механика (как релятивистская, так и нерелятивистская) имеет дело с дифференциальными уравнениями второго порядка. Таким образом, нам понадобится более общее понятие дифференциальной системы второго порядка, введенное в [1, 21]. Здесь мы приведем лишь частный случай этого понятия, который используется в рассматриваемой формулировке релятивистской динамики частиц.

Б. Одномерная дифференциальная система второго порядка, одночастичная динамика. В качестве предварительного шага к введению понятия одномерной дифференциальной системы второго порядка отметим, что всякая прямая $\sigma(x)$ может рассматриваться как точка в проективном пространстве $P(T_x M)$. Пространство всех гладких сечений в проективном касательном расслоении $P(TM) \xrightarrow{\pi} M$ (со стандартным слоем $P_{D-1} = P(\mathbf{R}^D)$) канонически изоморфно пространству всех одномерных дифференциальных систем на M, и мы будем использовать для них одно и тоже обозначение $\tilde{\sigma}$.

Пусть M — D-мерное многообразие. Сечение

$$\sigma\colon P(TM) \to P(TP(TM)) \tag{2}$$

называется (*одномерной*) *дифференциальной системой второго порядка на* M, если

$$\tilde{\pi}(\sigma(u)) = u \text{ для всех } u \in P(TM), \qquad (3)$$

где $\tilde{\pi}$ — касательное отображение, соответствующее проектированию π (в расслоении $P(TM) \xrightarrow{\pi} M$).

Воспользуемся следующим утверждением (см. [21], теорема 1): всякая дифференциальная система второго порядка σ на M определяет интегрируемое (одномерное) слоение $\mathcal{F}_\sigma$ на $P(TM)$.

Имея в виду применение к релятивистской динамике частиц, предположим, что многообразие M (которое будет отождествляться с физическим пространством — временем при $D = 4$) обладает *локальной причинной структурой*. Это означает, что задано (гладкое) поле конусов на касательном расслоении TM (т. е. *световой конус* в каждом T_xM) или *конформный класс* * *псевдоримановых метрик* g с сигнатурой $(-+\ldots+)$.

Кривая (т. е. одномерное подмногообразие) на M называется *времениподобной* (*изотропной*), если касательный вектор к ней в каждой точке времениподобен (изотропен).

Одночастичная релятивистская динамика определяется как одномерная дифференциальная система σ на M, чьи интегральные кривые времениподобны или изотропны. Динамика задает (одномерное) *фазовое слоение* $\mathcal{F}_\sigma = \{\tilde{l}_\alpha,\ \alpha \in A\}$; через каждую точку пространства $P(TM)$ проходит единственный слой $\tilde{l}_\alpha$, чья проекция $l_\alpha = \pi(l_\alpha)$ отождествляется с (времениподобной или изотропной) *мировой линией* частицы. Таким образом, для данной дифференциальной системы σ мировая линия l задается *начальными условиями*: точкой $x \in M$ и направлением в T_xM [т. е. точкой в $P(T_xM)$].

Покажем, что это не зависящее от параметризации определение включает уравнения Ньютона для частицы во внешнем поле.

Пусть $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ — локальные координаты на M и пусть $(x^\mu, \dot{x}^\nu)$ — соответствующие координаты в TM. Предполагая $\dot{x} \neq 0$ (что заведомо имеет место для времениподобных и светоподобных скоростей), мы будем использовать $[\dot{x}^\nu]$ как однородные координаты точки в трехмерном слое расслоенного пространства $P(TM)$. Пусть $u = (u^i) = (u^1, u^2, u^3)$ — независимые локальные координаты на $P(\mathbf{R}^4)$ $(\equiv P_3)$, пусть $(x^\mu, u^i[\dot{x}^\mu]) \equiv (x^\mu, u^i)$ — соответствующие координаты в семимерном «пространстве состояний» $P(TM)$. (Возможный выбор функций $u^i[\dot{x}^\mu]$, одинаково приспособленный для времениподобных и для изотропных мировых линий, есть $\mathbf{u} =$

---

* Метрические тензоры $g_{\mu\nu}(x)$ и $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ принадлежат одному и тому же конформному классу, если существует положительная функция $\Omega(x)$ такая, что $\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu}(x)$.

$= \dfrac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{x}^0}$ $(=\mathbf{v})$, удобный выбор для временитодобных скоростей есть $\mathbf{u} = \dfrac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = ((\dot{x}^0)^2 - \dot{\mathbf{x}}^2)^{-\frac{1}{2}}\dot{\mathbf{x}}$. Аналогично $(x^\mu,\ u^i;\ [\dot{x}^\nu,\ u^j])$ параметризует открытое множество в $P\,(TP\,(TM))$ (точками из $\mathbf{R}^7 \otimes \otimes P\,(\mathbf{R}^7)$). Сечение $\sigma\{P\,(TM) \to P\,(TP\,(TM))\}$ может быть задано в локальных координатах формулой

$$\sigma : (x^\mu,\ u^i) \to (x^\mu,\ u^i;\ [S^\nu(x,\ u),\ F^j(x,\ u)]).$$

Из условия (3) следует, что S^ν должны быть пропорциональными 4-скорости:

$$S^\nu(x,\ u) = \lambda(x,\ u)\,\dot{x}^\nu \text{ или } \sigma : (x^\mu,\ u^i) \to (x^\mu,\ u^i;\ [\lambda(x,\ u)\,\dot{x}^\nu,\ F^j(x,\ u)]). \tag{4}$$

Пусть $\tilde{l}$ — интегральное многообразие системы σ в $P\,(TM)$, так что

$$T(x,\ u)\,\tilde{l} = \sigma(x,\ u) \text{ для всех } (x,\ u) \in \tilde{l}. \tag{5}$$

Чтобы установить соответствие с обычной трактовкой одночастичной задачи, введем «параметр времени» τ, который задает локальную параметризацию $(x^\mu(\tau),\ u^i(\tau))$ кривой $\tilde{l}$. Из (4), (5) следует, что

$$\left[\frac{dx^\mu}{d\tau},\ \frac{du^i}{d\tau}\right] = [\lambda\dot{x}^\mu,\ F^i]. \tag{6}$$

(Предполагается, что 7-вектор в левой части не обращается в нуль, и равенство квадратных скобок означает, что соответствующие прямые совпадают.) Из (6) следует уравнение ньютоновского типа

$$m(\tau)\,\frac{du^i}{d\tau} = F^i\ \left(u^i = u^i\left[\frac{dx^\mu}{d\tau}\right]\right). \tag{7}$$

Множитель $m(\tau)$ зависит от выбора параметров времени (и от определения «силы» F). В частном случае временитодобного движения, выбирая в качестве τ собственное время, мы можем переписать (7) в ковариантной 4-мерной форме

$$m\,\frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu, \tag{8}$$

где $u^2 + 1 = 0 = u\,\dfrac{du}{d\tau} = uF\ (= \eta_{\mu\nu}u^\mu F^\nu = \mathbf{uF} - u^0F^0)$.

Мы закончим обсуждение одночастичной динамики несколькими замечаниями.

1. Излагаемый подход дает лишь возможность определить отношение F/m (даже после фиксирования выбора параметра времени). *Масса* m может быть определена только в том случае, если имеется

независимое определение силы F. Например, для частицы с зарядом e во внешнем электромагнитном поле $F^{\mu\nu}(x)$ $(=-F^{\nu\mu}(x))$ можно положить

$$F^{\mu}(x,\ u)=eu_{\nu}F^{\mu\nu}(x)\ (\text{для } u^2=\mathbf{u}^2-u_0^2=-1). \tag{9}$$

Тогда коэффициент m в уравнении (8) задает массу заряженной частицы. Возможно также теоретическое определение массы свободной частицы в терминах ассоциированного представления группы Пуанкаре (см. ниже, разд. 2В). Подчеркнем, однако, что лишь описанная здесь процедура «взвешивания» различных частиц в данном поле сил дает экспериментальное значение массы.

2. Обычно рассматривается динамика, в которой тип мировой линии сохраняется: она либо времениподобна, либо изотропна. Говорят, что скорость массивной частицы не может достичь скорости света за конечный промежуток времени. Дифференциальная система второго порядка, параметризованная посредством собственного времени τ, обеспечивает выполнение этого условия, если сила F в (8) ограничена.

3. Предположение о времениподобном или изотропном характере мировых линий позволяет заменить пространство состояний $P\ (TM)$ пространством лучей $P\ (T_{>}M)$, где $T_{>}M$ состоит (локально) из всех пар $(x,\ \dot{x})$, для которых $\dot{x}^0 \geqslant |\dot{\mathbf{x}}|$, $\dot{x}^0>0$.

В. N-частичная динамика. Следствия из пуанкаре-инвариантности. Пусть M — (4-мерное) *причинное многообразие* (т. е. гладкое многообразие, оснащенное локальной причинной структурой, определенной в предыдущем пункте). Определим *N-частичную релятивистскую динамику* при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
{[P\,(TP\,(T_{>}M))]^N} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, shift left] & {[P\,(T_{>}M)]^N} \arrow[d, "\pi"] \\
{[P\,(T_{>}M)]^N} \arrow[u, dashed, shift left, "\sigma"] \arrow[r, "\pi"] & M^N,
\end{tikzcd} \tag{10}$$

где σ — инволютивное сечение, а $T_{>}M$ определено в третьем замечании в конце предыдущего пункта. [Мы предполагаем, что σ в диаграмме (10) лежит в области определения проективного касательного отображения $\tilde{\pi}$.] Ограничение σ_k дифференциальной системы σ на $P\ (T_{>}M_k)$, где k — номер частицы, удовлетворяет всем требованиям одночастичной динамики. Внешняя сила F_k, действующая на k-ю частицу, будет, вообще говоря, функцией координат и скоростей всех частиц.

Перейдем к рассмотрению динамики с симметрией.

Пусть G — группа преобразований многообразия M, чье действие $(V_g,\ \tilde{V}_g;\ g\in G)$ на пару $(P\ (T_{>}M),\ P\ (TP\ (T_{>}M)))$ является *гомоморфизмом расслоения*. Другими словами, если π-проекция в расслоении $P(TP(T_{>}M)) \to P(T_{>}M)$, то $\pi \cdot \widetilde{V}_g = V_g \cdot \pi$. Будем говорить, что группа G является группой симметрии дифференциальной системы σ (рассматриваемой как сечение на данном расслоении), если

$$(\widetilde{V}_g \cdot \sigma \cdot V_g)(y) = \sigma(y) \text{ для всех } g \in G, \ y \in P(T_{>}M). \tag{11}$$

Это понятие легко переносится на N-частичный случай.

Наиболее широкая группа симметрии, возникающая в данном подходе, есть конформная группа, локально изоморфная (связной) псевдоортогональной группе $SO_0(D, 2)$. Для одночастичной системы из конформной симметрии следует, что частица должна двигаться со скоростью света (т. е. $\dot{x}^2 = \dot{\mathbf{x}}^2 - \dot{x}_0^2 = 0$). Наиболее широкая группа пространственно-временной симметрии для частицы с фиксированной положительной массой это — группа Пуанкаре, чья связная компонента (включающая тождественное преобразование) будет обозначаться $\mathcal{P}_+^\uparrow$.

Мы проиллюстрируем следствия пуанкаре-инвариантности на примере одночастичной системы в D-мерном пространстве-времени, предполагая стандартное (аффинное) действие группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$ на M, для которого преобразование V_g многообразия $P(T_{>}M)$ имеет вид

$$V(a, \Lambda)(x, [\dot{x}]) \to (\Lambda x + a, [\Lambda \dot{x}]). \tag{12}$$

Рассмотрим открытое $[(2D-1)$-мерное$]$ подмногообразие $P(T_{+}M)$ многообразия $P(T_{>}M)$, определенное как множество тех пар $(x, [\dot{x}])$, для которых 4-скорость $\dot{x}$ является положительным времениподобным вектором: $\dot{x}^0 > |\dot{\mathbf{x}}|$. Это подмногообразие является однородным пространством группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$ с подгруппой стабильности точки («малой группой»), изоморфной $SO(D-1)$. Для пространства — времени размерности $D > 2$ эта малая группа действует нетривиально на ускорение и, следовательно, на силы, не оставляя никакого ненулевого $D-1$-вектора инвариантным. Следовательно, при $D \geqslant 3$ условие пуанкаре-инвариантности одночастичной динамики приводит к свободному движению ($F = 0$). При $D = 2$, однако, малая группа $SO(1)$ сама тривиальна и не накладывает никаких условий на силу, так что приведенное выше рассуждение неприменимо. Действительно, в двухмерном пространстве — времени существует нетривиальная пуанкаре-инвариантная одночастичная динамика. Пользуясь переменной собственно времени, можно написать $\mathcal{P}_+^\uparrow$-инвариантное уравнение

$$\dot{u}_\mu = k\varepsilon_{\mu\nu}u^\nu, \text{ где } u^2 + 1 = 0, \ \varepsilon_{10} = -\varepsilon_{01} (= \varepsilon^{01}) = 1. \tag{13}$$

Его решение (относительно скорости), удовлетворяющее начальному условию $V \equiv \left(\frac{\mathbf{u}}{u^0}\right)_{\tau=0} = \operatorname{th} \alpha$, есть

$$u^0 = \operatorname{ch}(\alpha + k\tau), \ \mathbf{u} = \operatorname{sh}(\alpha + k\tau) \ (\mathbf{u} = u^1) \tag{14a}$$

Соответствующая мировая линия является ветвью гиперболы (с изотропными асимптотами)

$$\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}(t=0)+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{k}\right)^2-\left(t+\frac{\operatorname{sh}\alpha}{k}\right)^2=\frac{1}{k^2}. \tag{14б}$$

Отметим, однако, что система (13) неинвариантна относительно пространственного отражения. На самом деле не существует нетривиальной (гладкой) одночастичной динамической системы, инвариантной относительно ортохронной группы Пуанкаре $\mathcal{P}^{\uparrow}$. (Условие гладкости существенно. Без него, например, система с уравнением движения

$$\dot{u}_{\mu}=k\varepsilon_{\mu\nu}u^{\nu}\operatorname{sign}\mathbf{u},\ \ k>0, \tag{15}$$

является $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$-инвариантной динамической системой с непрямыми мировыми линиями.)

Возвращаясь к более высоким размерностям пространства — времени (включающим реальный случай $D = 4$), мы полагаем, что есть нетривиальные пуанкаре-инвариантные N-частичные динамики при $N \geqslant 2$. Основой такого убеждения служит то обстоятельство, что малая группа почти всех точек многообразия $[P\ (T_{>}M)]^N$ тривиальна. (Это правдоподобное утверждение будет обосновано с точки зрения гамильтонова формализма в п. 2, В.)

Мы опускаем здесь обсуждение спина (динамика частицы со спином во внешнем поле изучалась недавно в работе [39] *; фазовое пространство классической частицы со спином описано в разд. 3 второй из работ [38]).

2. ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД СО СВЯЗЯМИ

А. Фазовое пространство релятивистской частицы во внешнем поле. В предыдущем разделе было приведено общее рассмотрение пространственно-временной формулировки релятивистской динамики частиц. В связи с этим мы исключили все понятия, которые не рассматривались как строго необходимые для формулировки задачи.

Напротив, пытаясь построить реалистические примеры систем релятивистских частиц, следует пользоваться любыми имеющимися средствами. Особенно плодотворным при изучении динамики частиц (как классической, так и квантовой) оказывается гамильтонов формализм в фазовом пространстве (включая системы со связями).

В случае одной бесспиновой частицы (во внешнем поле) мы начинаем с 8-мерного *расширенного фазового пространства* $\Gamma = T^*M$, где M в общем случае есть четырехмерное псевдориманово многообразие, а T^*M есть касательное расслоение на M; при заданном $x \in M$ элементы T_x^*M задаются как линейные функции на касатель-

* Отметим, что авторы работы [39] пользуются термином «хронометрической» (вместо репараметризационной) инвариантности.

ном пространстве T_xM (или, эквивалентно, как одноформы вида $f_\mu(x)\,dx^\mu$). Г является симплектическим многообразием с канонической 2-формой $\omega = dx \wedge dp\ (=dx^\mu \wedge dp_\mu)$.

Еще в начале 40-х годов Дирак [5] заметил, что динамика заряженной релятивистской частицы во внешнем электромагнитном поле A_μ (в пространстве Минковского) может быть задана гамильтоновой связью вида

$$H_{em} = \frac{\lambda}{2}\,[m^2 + (p-eA)^2] \approx 0 \quad ((p-eA)^2 = (\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2 - (p^0-eA^0)^2), \tag{16}$$

где λ (>0) — *множитель Лагранжа*, связанный с выбором параметра времени. Знак *слабого равенства* $\approx$ указывает, что при вычислении скобок Пуассона x и p должны рассматриваться как независимые переменные; связь (16) должна учитываться лишь после выполнения дифференцирований. Например, 4-скорость частицы вычисляется по «гамильтониану» (16) при помощи стандартной формулы

$$\dot{x} = \{x,\ H_{em}\} = \lambda\,(p - eA) \tag{17}$$

(где мы воспользовались каноническими перестановочными соотношениями $\{x^\mu,\ p_\nu\} = \delta^\mu_\nu$). Из условия $\dot{x}^0 \geqslant |\,\dot{\mathbf{x}}\,|$ (или $(x,\ \dot{x}) \in T_>M$) следует ограничение

$$p^0 - eA^0 \geqslant |\,\mathbf{p} - e\mathbf{A}\,| \tag{18}$$

на переменные фазового пространства [для данного $A_\mu(x)$]. Выбор множителя Лагранжа $\lambda = 1/m$ соответствует переменной собственного времени [что вытекает из сопоставления (17) с (16)].

В качестве второго примера можно указать на движение частицы с массой m во внешнем гравитационном поле. В соответствии с общей теорией относительности оно описывается как движение по геодезической линии в псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, которое можно задать при помощи гамильтоновой связи

$$H_{GR} = \frac{\lambda}{2}\left(g^{\mu\nu}(x)\,p_\mu p_\nu + \frac{1}{6}R\,(x) + m^2\right) \approx 0. \tag{19}$$

Член $\frac{1}{6}R$ [где $R = R\,(x)$ — скалярная кривизна] обеспечивает конформную инвариантность предела $m = 0$ (этот член был впервые введен Пенроузом [23] в контексте квантовой теории). Условие $-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \geqslant 0$ (выражающее времениподобность или изотропность 4-скорости) приводит в силу (19) к неравенству $m^2 + \frac{1}{6}R\,(x) \geqslant 0$.

В общем случае одночастичная гамильтонова динамика определяется заданием семимерного подмногообразия $\mathscr{M}$ — обобщенной одночастичной массовой поверхности — в восьмимерном (расширенном) фазовом пространстве, которое допускает каноническую форму

$$H^{\rm can} = h(\mathbf{p},\ x) - p^0 = 0, \tag{20}$$

где $h \to \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ при исчезающем внешнем поле.

Чтобы установить соответствие между (одночастичной) системой, заданной при помощи гамильтоновой связи $H(p,\ x)$, и дифференциальной системой второго порядка типа рассмотренной в разд. 1, проще всего ввести лагранжиан $L(x,\ \dot{x})$ посредством преобразования Лежандра

$$L(x,\ \dot{x}) = p\dot{x} - H(p,\ x), \tag{21}$$

где $p = p(x,\ \dot{x})$ определяется из гамильтонова уравнения $\dot{x} = \partial H/\partial p$ (при данном множителе Лагранжа). В частности, для примеров (16) и (19) находим

$$L_{em} = \frac{\dot{x}^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} m^2 + eA\dot{x},\quad L_{GR} = \frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2}\left(m^2 + \frac{R}{6}\right). \tag{22}$$

Если $\left(m^2 + \frac{1}{6}R\right) > 0$, то множитель Лагранжа можно исключить, пользуясь связью $\partial L/\partial\lambda = 0$, что приводит к явно репараметризационно-инвариантному лагранжиану:

$$L_{em} = -m\sqrt{-\dot{x}^2} + eA\dot{x},\quad L_{RG} = -\sqrt{-\left(m^2 + \frac{R}{6}\right) g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}. \tag{23}$$

[Уравнения Лагранжа — Эйлера для L_{em} являются не зависящим от параметризации обобщением уравнений (8), (9).]

Б. Калибровочная зависимость мировых линий, взаимодействующих частиц в пространстве канонических координат. Перейдем к изучению пуанкаре-инвариантной N-частичной системы в рамках дираковой гамильтоновой формулировки со связями [7, 10, 13]. Следуя [20, 36, 37, 38], начнем с расширенного фазового пространства $\Gamma^N = \Gamma_1 x \ldots x\Gamma_N$, $\Gamma_k = T^*M_k$, где M_k — (плоское) пространство Минковского канонических координат q_k^μ k-й частицы. Пространство Γ^N снабжено симплектической формой

$$\omega = \sum_{k=1}^{N} dq_k \wedge dp_k \ (dq_k \wedge dp_k \equiv dq_k^\mu \wedge dp_{k\mu}) \tag{24}$$

и стандартным диагональным действием группы Пуанкаре.

Обобщенная N-частичная массовая оболочка определяется как $7N$-мерное связное пуанкаре-инвариантное подмногообразие $\mathcal{M}$ пространства Γ^N, удовлетворяющее следующим условиям.

1. В каждой системе отсчета поверхность $\mathcal{M}$ может быть представлена локально N *каноническими уравнениями* вида

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_k^{\rm can} = h_k(\mathbf{p}_1,\ \ldots,\ \mathbf{p}_N;\ q_{12},\ \ldots,\ q_{N-1N}) - p_k^0 = 0;\\ &q_{lm} = q_l - q_m;\ k(l,\ m) = 1,\ \ldots,\ N \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

так, что полная энергия положительна:

$$(0<)\ P^0 \geqslant |\,\mathbf{P}\,| \quad \text{для} \quad P = p_1 + \ldots + p_N. \tag{26}$$

2. Пусть Ker $(|\,\omega\,|_\mu)$ — множество всех векторов, касательных к $\mathcal{M}$, для которых ограничение на $\mathcal{M}$ симплектической формы (24), $|\,\omega\,|_{\mathcal{M}}$, обращается в нуль. Если $\mathcal{M}$ задано локальными уравнениями $\varphi_k = 0$, $k = 1, \ldots, N$, тогда мы требуем, чтобы Ker $(\omega\,|_{\mathcal{M}})$ порождалось операторами Лиувилля

$$L_{\varphi_k} = \sum_{l=1}^{N} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_l} \frac{\partial}{\partial q_l} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_l} \frac{\partial}{\partial p_l} \right).$$

Мы предполагаем далее, что слоение

$$\mathcal{M} \to \Gamma_* \equiv \mathcal{M}/\mathrm{Ker}\,(\omega|_{\mathcal{M}}) \tag{27}$$

является (локально тривиальным) расслоенным пространством. Отсюда следует условие совместимости

$$\{\varphi_k,\ \varphi_l\} \approx 0, \text{ т.е } \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_m} \frac{\partial \varphi_l}{\partial p_m} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_m} \frac{\partial \varphi_l}{\partial q_m} \right)\bigg|_{\mathcal{M}} = 0. \tag{28}$$

Чтобы иметь стандартную теорию рассеяния, необходимо потребовать выполнения следующего условия.

3. *Разделимость*, или *свойство разбиения на пучки*, физически предполагает, что пучки частиц, разделенные большим пространственно-подобным интервалом, не взаимодействуют. В частности, если связи (25) определены глобально, то

$$\lim_{r_k \to \infty} h_k = \sqrt{m_k^2 + \mathbf{p}_k^2}, \tag{29}$$

где m_k — масса k-й частицы. (На самом деле необходимо несколько более сильное асимптотическое условие, обеспечивающее также стремление к нулю производных от $h_k - \sqrt{m_k^2 + \mathbf{p}_k^2}$.)

Чтобы убедиться в том, что приведенное определение содержательно, выпишем класс двухчастичных связей, включающий реалистические взаимодействия Φ и удовлетворяющий условиям 1—3:

$$\varphi_k = \frac{1}{2}(m_k^2 + p_k^2) + \Phi(r,\ w),\ k = 1,\ 2, \tag{30}$$

где

$$w = \sqrt{-P^2}\,(P = p_1 + p_2),\ q_\perp = q - \frac{1}{P^2}(Pq)\,P,\ q = q_1 - q_2,\ r = |q_\perp|; \tag{31}$$

мы предполагаем, что система (30) может быть решена относительно энергий частиц p_k^0 и что $\lim\limits_{r\to\infty} \Phi = 0 \left(\lim \frac{\partial \Phi}{\partial w} = \lim \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0\right)$.

Условие совместимости (28) вытекает из равенства

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2\} = -P\frac{\partial\Phi}{\partial q} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}P\frac{\partial r}{\partial q} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}Pq_\perp = 0.$$

Условие интегрируемости, содержащееся в 2, и условие положительности энергии (26) накладывают некоторые дополнительные ограничения на взаимодействие Ф.

N-частичные ($N \geqslant 3$) взаимодействия не поддаются простому написанию в замкнутом виде. Их существование, однако, может быть установлено либо методом Соколова [31] (с использованием классических волновых операторов [32] — см. разд. 6 второй ссылки [38]), либо при помощи (локальной) теоремы существования для некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных (см. [4, 28]).

Гамильтониан H системы N частиц определяется как линейная комбинация связей φ_k^{can} с положительными (переменными коэффициентами («множителями Лагранжа»). Всякая траектория на фазовом пространстве принадлежит, таким образом, некоторому (N-мерному) слою $F \subset \mathscr{M}$ расслоения (27). Возникает вопрос: при каких условиях пространственно-временные мировые линии не зависят от выбора множителей Лагранжа (или, как мы будем говорить, *калибровочно-инвариантны*)? Ответ на этот вопрос дается следующим отрицательным результатом, который формулируется на примере двухчастичного случая.

Теорема [20]. Пусть $\mathscr{M}$ — обобщенная двухчастичная массовая поверхность, удовлетворяющая сформулированным выше условиям 1 и 2 (условие разделимости 3 здесь не понадобится). Проекция $\pi_k(F)$ каждого двухмерного слоя $F \subset \mathscr{M}$ на пространство Минковского M_k частицы k [$\pi_k(q_1, p_1; q_2p_2) = q_k$, $k = 1, 2$] является одномерным подмногообразием M_k, только если траектории в пространстве переменных q_k^μ являются прямыми линиями.

Точное соотношение этого результата к более ранним «теоремам об отсутствии взаимодействия» обсуждается во второй из работ [20]. Аналогичный результат получен (независимо) в рамках лагранжева подхода (см. [12]).

В. Неканонические переменные положения с калибровочно-инвариантными мировыми линиями. Выход из отрицательного результата сформулированной теоремы дает предположение, что физические переменные положения являются (неканоническими) * функциями канонических координат и импульсов, удовлетворяющих

$$\{x_k,\ \varphi_l^{\text{can}}\} = 0 \text{ для } k \neq l. \tag{32}$$

* Идея использования неканонических координат (некоммутирующих операторов положения в квантовом случае), с тем чтобы обойти «теоремы об отсутствии взаимодействия», возникла давно — см., например, работы (цитированную там литературу) [8, 15, 22, 27].

Наметим конструкцию физических координат x_k в двухчастичном случае (ср. с [27]).

Прежде всего предположим, что x_k являются лоренцевыми 4-векторами, которые могут быть записаны в виде

$$x_k = q_k + a_k\hat{P} + b_k\hat{r} + c_k\pi, \quad k = 1,\ 2, \tag{33}$$

где $\hat{P}$ и $\hat{r}$ — единичные векторы в направлении P и $q_\perp$ ($\hat{r}^2 = 1 = -\hat{P}^2$, $q_\perp = r\hat{r}$, $P = w\hat{P}$), а π — проекция относительного импульса

$$p = \mu_2 p_1 - \mu_1 p_2, \text{ где } \mu_1 + \mu_2 = 1,\ \mu_1 - \mu_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{w^2}, \tag{34а}$$

удовлетворяющего [для φ_k, заданных равенством (30)] соотношению

$$\varphi_1 - \varphi_2 = pP \approx 0, \tag{34б}$$

на плоскость, ортогональную $\hat{r}$:

$$\pi = p - p_r\hat{r}, \text{ где } p_r = \hat{r}p. \tag{35}$$

Коэффициенты a_k, b_k и c_k по предположению могут зависеть лишь от пуанкаре-инвариантных переменных r, p_r, π^2, w и

$$\chi = \hat{P}q/w. \tag{36}$$

Условие инвариантности мировой линии

$$\{x_1,\ \varphi_2\} = 0 = \{x_2,\ \varphi_1\} \tag{37}$$

[для φ_k, заданных равенством (30)] приводит к следующим уравнениям на коэффициенты разложения (33):

$$\left(L_R - \frac{\partial}{\partial\chi_k}\right) a_k = \Phi_w \left(\equiv \frac{\partial}{\partial w}\Phi(r,\ w)\right); \tag{38а}$$

$$b_k = \left[r\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k} - L_R\right) + p_r\right] c_k; \tag{38б}$$

$$\frac{\pi^2}{r} c_k + \left(\frac{\partial}{\partial\chi_k} - L_R\right) b_k = \chi\Phi_r \left(\equiv \chi\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right). \tag{38в}$$

Здесь

$$\chi_1 = -\frac{\chi}{\mu_2},\ \chi_2 = \frac{\chi}{\mu_1}, \quad \mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{m_1^2 - m_2^2}{w^2}\right), \tag{39}$$

в то время как L_R — оператор Лиувилля, соответствующий одномерному «гамильтониану» $R = \frac{1}{2}p_r^2 + \Phi$:

$$L_R = p_r\frac{\partial}{\partial r} - \Phi_r\frac{\partial}{\partial p_r}. \tag{40}$$

Эти уравнения приводят к задаче Коши относительно переменной χ, и мы зададим начальные условия

$$a_k = b_k = c_k = 0 \quad \text{для} \quad \chi_k = 0 \tag{41}$$

(иными словами, потребуем совпадения физических координат с каноническими при $\chi = 0$). Напишем первые несколько членов разложения по χ_k (единственного) решения уравнений (38) — (41)

$$a_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_k^n}{n!} L_R^{n-1}\Phi_w = \chi_k\Phi_w + \frac{\chi_k^2}{2!} p_r\Phi_{wr} + \\ + \frac{\chi_k^3}{3!}(p_r^2\Phi_{wr^2} - \Phi_r\Phi_{wr}) + O(\chi_k^4); \tag{42}$$

$$b_1 = -\mu_2 b(\chi_1;\ r,\ p_r,\ \pi^2),\ b_2 = \mu_1 b(\chi_2;\ r;\ p_r,\ \pi^2); \tag{43}$$

$$c_1 = -\mu_2 c(\chi_1;\ r,\ p_r,\ \pi^2),\ c_2 = \mu_1 c(\chi_1;\ r,\ p_r,\ \pi^2), \tag{44}$$

где

$$c = \chi_k^3\left\{\frac{1}{6} + \frac{\chi_k L_R}{12} + \frac{\chi_k^2}{40}\left[\frac{1}{3r}\left(\Phi_r - \frac{\pi^2}{r}\right) - L_R^2\right]\right\}\frac{1}{r}\Phi_r + O(\chi_k^6); \tag{45а}$$

$$b = \left[r\left(\frac{\partial}{\partial\chi_k} - L_R\right) + p_r\right]c = \frac{1}{2}\chi_k^2\left(1 + \frac{\chi_k}{3}p_r\frac{\partial}{\partial r}\right)\Phi_r + \\ + \frac{\chi_k^4}{4!}\left[\Phi_r\left(1 + 4r\frac{\partial}{\partial r}\right) + p_r^2\left(1 - 4r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\pi^2}{r}\right]\frac{\Phi_r}{r} + O(\chi_k^5). \tag{45б}$$

Существование класса взаимодействий Φ, для которого написанные выше разложения сходятся и физические координаты хорошо определены, не вызывает сомнения. Мы полагаем, что на этом пути можно доказать существование взаимодействующих пуанкаре- и репараметризационно-инвариантных двухчастичных систем (в соответствии с общим замечанием, сделанным в конце п. 1, В).

Г. Калибровочная инвариантность матрицы рассеяния. Предшествующий анализ показывает, что хотя физические координаты x_k (в терминах которых мировые линии частиц калибровочно инвариантны), по-видимому, и существуют, однако мы умеем находить их лишь в рамках теории возмущения, и полученные выражения слишком громоздки для конкретных применений к релятивистским системам. Поэтому интересно найти непосредственные приложения значительно более простой исходной схемы, использующей только канонические переменные p и q.

Оказывается, что хотя траектории в q-пространстве зависят от калибровки (т. е. от выбора поверхности равных времен), асимптотические свойства N-частичного движения (например, матрица рассеяния, если она существует) калибровочно инвариантны (см. [20]). Немного упрощая, можно сказать, что в случае рассеяния мировые линии частиц обладают прямолинейными асимптотиками, а прямые линии не зависят от калибровки. В двухчастичном случае существует элементарное доказательство этого утверждения, основанное на калибровочной инвариантности относительной координаты $q_\perp$ (31), вытекающей из равенства $\{q_\perp, pP\} = 0$ (см. п. 2Д работы [20]). Наметим здесь более общее рассуждение (тоже приведенное в [20]), которое применимо к N-частичному случаю.

Задача рассеяния характеризуется парой гамильтонианов: «свободным гамильтонианом» H_0, описывающим асимптотическую систему невзаимодействующих частиц, и полным гамильтонианом H такие, что классические волновые операторы

$$W_\pm = W_\pm(H, H_0) = s \lim_{t\to\pm\infty} e^{tL_H} e^{-tL_{H_0}},$$

$$\text{где } L_f = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \tag{46}$$

существуют [сильные пределы определяются относительно $\mathscr{L}_1$-нормы в фазовом пространстве (см. [32])]. Для каждой такой системы существует (классический) оператор рассеяния

$$S = W_+^* W_-. \tag{47}$$

Репараметризационная инвариантность волновых операторов и матрицы рассеяния вытекает из (в сущности выражается посредством) *принципа инвариантности Бирмана — Като* [32]: для всякой гладкой монотонно растущей функции $F(\xi)$ $(F'(\xi) > 0)$ имеет место равенство

$$W_\pm(H, H_0) = W_\pm(F(H), F(H_0)). \tag{48}$$

В двухчастичном случае калибровочная инвариантность оператора S получается как следствие (48), если положить

$$H_0 = h_0 - P^0,\ h_0 = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2},\ H = h - P^0, \tag{49a}$$

где $h = h_1 + h_2$ определяется по канонической форме (25) связей (30),

$$F(H) = \lambda(p_k, q)H + \mu(p_k, q)P_p\ (P_p \approx 0 \approx$$
$$\approx \{pP, H\} = \{pP, H_0\}). \tag{49б}$$

Если N-частичная динамика при $N \geqslant 3$ определена при помощи релятивистского сложения взаимодействий [4, 30, 31], то для нее тоже можно доказать независимость оператора рассеяния от выбора параметризации. И в случае финитного движения (связанного состояния) асимптотические («адиабатические») инварианты, в первую очередь квантовомеханические уровни энергии [25, 35] и параметры классического эллипса [37, 38] (и его релятивистской прецессии), тоже не зависят от калибровки и могут быть найдены в рамках канонического гамильтонова подхода (не требуя знания точного вида физических координат). Мы приведем здесь лишь один пример (классического) применения канонического формализма со связями: задача двух тел в общей теории относительности [18].

Д. Применение квазипотенциального подхода к теории гравитации. Гравитационное взаимодействие двух массивных тел представляет собой последний по времени пример релятивистской двухчастичной задачи, сводящейся к изучению движения одной эффективной частицы во внешнем поле. Она заимствует из более ранней трактовки релятивистских систем в плоском пространстве [35—37] понятие релятивистской приведенной массы m_w и энергии E эффективной частицы:

$$m_w = \frac{m_1 m_2}{w}, \quad E = \sqrt{m_w^2 + b^2(w)} = \frac{w^2 - m_1^2 - m_2^2}{2w}, \tag{50}$$

где

$$w = \sqrt{-P^2}\ (P = p_1 + p_2), \quad b^2(w) = \frac{w^4 - 2(m_1^2 + m_2^2)w^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4w^2} \tag{51}$$

[$b^2(w)$ — значение квадрата относительного импульса (34а) на массовой оболочке]. Далее наше рассмотрение гравитационной задачи двух тел основывается на постулировании связи типа (19) с m, замененным m_w, и $p_0 = -E$. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ вычисляется (в подходящей калибровке) из диаграммы одногравитонного обмена линеаризованного варианта квантовой теории гравитации (см. [18]). Полученная таким образом гамильтонова связь имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left[m_w^2 - \left(1 - \frac{r_t}{r}\right)^{-1} p_0^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} p_\varphi^2\right)\right] \approx 0, \tag{52}$$

где

$$r_t = 2Gw\left[1 - 4\frac{b^2}{m_w^2}\left(2\frac{E}{w} - 3\frac{b^2}{w^2}\right)\right], \quad r_s = 2Gw\left[1 + \left(8\frac{E}{w} - 12\frac{b^2}{w^2}\right)\frac{E^2}{m_w^2}\right] \tag{53}$$

(G — ньютоновская гравитационная постоянная). Метрика, входящая в связи (52), может рассматриваться как релятивистское двухчастичное обобщение метрики Шварцшильда. Результирующее двухчастичное движение — плоское; траектория относительного движения записывается в полярных координатах в виде

$$\frac{l}{r} = 1 + \varepsilon\left[\cos\eta\varphi + \varepsilon\frac{r_s}{2l}(1 - |\sin\eta\varphi|)^2\right] + O\left(\frac{r_s^2}{l^2}\right), \tag{54а}$$

где

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{2J^2}{r_t m_w^2 - r_s b^2} + O(r_s)\left(\frac{r_s}{l} \ll 1\right); \quad \varepsilon^2 = \\ &= 1 + \frac{4r_t}{l} + \frac{l^2 b^2}{J^2}\left(1 + \frac{3r_t + r_s}{l}\right); \\ \eta &= 1 - \frac{3}{2}\frac{r_t}{l} + \frac{1}{2l}(r_t - r_s). \end{aligned}\right\} \tag{54б}$$

В приближении пробного тела [т. е. при $m_1 m_2 \ll (m_1 + m_2)^2$] и малых скоростей [т. е. при

$$1 - \frac{w}{m_1 + m_2} + O\left(G \frac{m_1 + m_2}{J^2}\right) \ll 1, \qquad (55)$$

где J — полный момент количества движения системы] равенства (54) воспроизводят классический результат Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [9] (см. также [14]). Эти уравнения, полученные в полностью ковариантном расчете (без использования разложений типа $1/c$), должны обладать преимуществом перед результатами других подходов в области слабых полей и релятивистских скоростей.

3. ВЫВОДЫ

В заключение обсуждения приведем некоторые узловые моменты.

1. Общее пространственно-временное описание движения релятивистских точечных частиц в терминах не зависящей от параметризации дифференциальной системы второго порядка ньютонового типа оставляет место для нетривиального пуанкаре-инвариантного взаимодействия.

2. Релятивистский гамильтонов подход со связями в расширенном фазовом пространстве дает возможность написать реалистичные двухчастичные взаимодействия. Однако мировые линии частиц в пространстве канонических координат зависят от выбора поверхности равных времен через соответствующие множители Лагранжа в гамильтоновой связи (мы говорим, что они *калибровочно-зависимы*).

3. Связь гамильтонова подхода с не зависящей от параметризации пространственно-временной формулировкой (разд. 1) устанавливается введением неканонических переменных положения, которые определяются как функции канонических координат и импульсов, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных (обеспечивающих калибровочную инвариантность мировых линий в физическом пространстве). При подходящих начальных условиях физические координаты x_k^μ (в двухчастичном случае $k = 1, 2$) задаются в виде ряда по степеням переменной Pq (где $P = p_1 + p_2$, $q = q_1 - q_2$, q_k — канонические координаты), коэффициенты которого являются полиномами по функции взаимодействия Φ и ее производным (обращающимися в нуль при $\Phi = 0$).

4. Канонические координаты могут использоваться непосредственно для получения асимптотических результатов, калибровочная инвариантность которых доказана. В качестве иллюстрации этого факта рассмотрена задача двух тел в общей теории относительности, в которой как параметры нерелятивистского эллипса, так и его релятивистской прецессии не зависят от калибровки.

Авторы выражают благодарность А. К. Погребкову за чтение рукописи и за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ambrose W.**— Topology, 1965, v. 3, suppl. 2, p. 199—238.

2. **Anderson J. L.** Principles of Relativity Physics. N.Y.— Lond. Acad. Press, 1967; **Arzelties H.** Relativistic Point Dynamics. Oxford, Pergamon Press, 1972.

3. **Bel L., Martin J.**— Ann. Inst. H. Poincaré, 1975, v. 22A, p. 173—195.

4. **Bidikov I., Todorov I. T.**— Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, p. 461.

5. **Dirac P. A. M.** Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, ser. A, 1943, № 1, p. 1—36. Ibid., ser. A, 1946, № 3, p. 1—33.

6. **Dirac P. A. M.**— Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 392—399.

7. **Dirac P. A. M.**— Canad. J. Math., 1950, v. 2, p. 129—148; **Proc.** Roy. Soc., Lond., 1958, v. A246, p. 326—332; **Lectures on Quantum Mechanics.** Belfer Graduate School of Science, N.Y., Yeshive Univ., 1964.

8. **Droz-Wincent Ph.**— Ann. Inst. H. Poincaré, 1980, v. 32A, p. 377—389.

9. **Einstein A., Infeld L., Hoffmann B.**— Ann. Math., 1938, v. 39, p. 65—100.

10. **Фаддеев Л. Д.**— ТМФ, 1969, т. 1, с. 3—18.

11. **Фок В. А.** Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.

12. **Giachetti R., Sorace E.**— Lett. Nuovo cimento, 1979, v. 26, p. 1—4.

13. **Hanson A. J., Regge T., Teitelboim C.** Constraint Hamiltonian Systems. Roma, Academia Nazionale dei Lincei, 1976.

14. **Infeld L., Plebanski J.** Motion and Relativity. Oxford, Pergamon Press and Warszawa, PWN, 1960 (see in particular, sec. 3 of ch. V).

15. **The Theory** of Action at a Distance in Relativistic Particle Dynamics. Ed. Kerner E. H. A reprint collection. N.Y., 1972 (see, in particular, the woork of Currie, Jordan, Sudarshan, Leutwyler and Hill).

16. **Leutwyler H., Stern J.**— Ann. Phys. (N.Y.), 1978, v. 112, p. 94—164.

17. **Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.**— Nuovo cimento, 1963, v. 29, p. 380—399.

18. **Maheshuari A., Nissimov E. R., Todorov I. T.**— Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, p. 359.

19. **Mann R. A.** The Classical Dynamics of Particles — Galilean and Lorentz Relativity. N.Y., Acad. Press, 1974 (see, in particular chapter 5, as well as references therein).

20. **Molotkov V. V., Todorov I. T.**— Int. Rep. 1C/79/59, Trieste, 1979;— Commun. Math. Phys., 1981, v. 79, p. 111—132.

21. **Nikolov P. A.** Second order differential systems and relativistic particle dynamics. Preprint Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy, Sofia, 1981.

22. **Pauri M., Prosperi G. M.**— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 1468—1495.

23. **Penrose R.**— In: Relativity Groups and Topology. Eds C. M. DeWitt and B. DeWitt. Les Houches Summer School, 1963. N.Y., Gordon and Breach, 1964, p. 565—584.

24. **Poincaré H.**— Rendicontti del Circolo Mat. di Palermo 1906, v. 21, p. 129—176 (see also M. Planck, Verhandl. Deutsch. Phys. Ges. 1906, Bd 8, S. 136—141).

25. **Rizov V. A., Todorov I. T., Aneva B. L.**— Nucl. Phys., 1975, v. B98, p. 447—471.

26. **Röhrlich F.**— Ann. Phys. (N. Y.), 1979, v. 117, p. 292—322.

27. **Sazdjian H.**— Nucl. Phys., 1979, v. B161, p. 469—492.

28. **Sazdjian H.** Orsay preprint IPNO/TH 80—38, 1980.

29. **Широков Ю. М.**— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 474—477 (см. также с. 478—480); 1961, т. 41, с. 1934—1937.

30. **Соколов С. Н.**— ТМФ, 1978, т. 36, с. 193—207.

31. **Соколов С. Н., Шатний А. Н.**— Там же, 1978, т. 37, с. 291—304.

32. **Sokolov S. N.**— Nuovo cimento, 1979, v. 52A, p. 1—22.

33. **Synge J. L.** Geometrical Mechanics and De Broglie Waves. Cambridge, Univ. Press 1954 (see, in particular, ch. V).

34. **Takabayashi T.**— Prog. Theor. Phys. Suppl., 1979, № 67, p. 1—68.

35. **Todorov I. T.**— Phys. Rev., 1971, v. D3, p. 2351—2356; in: Properties of Fundamental Interactions, vol. 9C. Ed. A Zichichi. Bologna, Editorice Compositori, 1973, p. 951—979.

36. **Todorov I. T.**— Commun. JINR E2—10125, Dubna, 1976.

37. **Тодоров И. Т.** Фундаментальные проблемы теоретической и математической физики, ОИЯИ, Дубна, 23—27 августа 1979 г., Д—12831, с. 487—511.

38. **Todorov I. T.** Hamiltonian dynamics of directly interacting relativistic point particles. Proceedings of the XVII Winter School in Theoretical Physics, Karpacz, 1980; Constraint Hamiltonian mechanics of directly interacting relativistic particles.— In: Relativistic action at a Distance: Classical and Quantum Aspects. Lecture notes in physics. Vol. 162. Ed. J. Llosa. Springer, Berlin, 1982, p. 213—263. Miramare—Trieste, 1980, part I.

39. **Van Dam H., Ruijgrok Th. W.**— Physica, 1980, v. 104A, p. 281—297.

40. **Van Dam H., Wigner E. P.**— Phys. Rev., 1965, v. 138B, p. 1576—1582; 1966, v. 142, p. 838—843.

41. **Wheeler J. A., Feynman R. P.**— Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 425—433.