«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1985, ТОМ 16, ВЫП. 3

УДК 539.12+530.145

ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ И ГЕНЕРАЦИИ МАСС В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

В. А. Миранский, П. И. Фомин
Институт теоретической физики АН УССР, Киев

Рассматривается динамика спонтанного нарушения симметрий и генерации масс частиц в калибровочных теориях без фундаментальных скалярных полей. Основное внимание уделяется рассмотрению механизма нарушения симметрий, связанного с динамикой сверхкритических кулоноподобных сил, обусловленных обменом между фермионами калибровочных бозонов. Этот механизм применяется к различным калибровочным теориям, в частности к описанию спонтанного нарушения киральной симметрии в квантовой хромодинамике (КХД). Получены массовые соотношения для нонета псевдоскалярных мезонов, и дана динамическая реализация гипотезы частичного сохранения аксиально-векторных токов. Дано качественное описание скалярных мезонов.

Исследуется характер ультрафиолетовых расходимостей в квантовой электродинамике (КЭД) с точки зрения динамики генерации массы фермионов. Указан механизм появления в КЭД с большой затравочной константой связи дополнительных (по сравнению с теорией возмущений) ультрафиолетовых расходимостей. Физическое явление, стоящее за таким механизмом, можно классифицировать как полевой аналог квантовомеханического явления «падения на центр». Указано, что аналогичное явление имеет место и для ряда двумерных полевых моделей.

Кроме того, кратко обсуждается динамика образования бифермионных конденсатов в «обрушивающихся» калибровочных теориях.

The dynamics of the spotaneous symmetry breaking and the particle mass generation in gauge theories with no fundamental scalar fields is considered. The emphasis is on the consideration of the symmetry breaking mechanism connected with the dynamics of the supercritical Coulomb-like forces caused by the gauge boson exchange between fermions. This mechanism is applied to different gauge theories, in particular, to the description of the spontaneous chiral symmetry breaking in quantum chromodynamics. The mass relations for pseudoscalar meson nonet are obtained and it is shown that this mechnism results in the dynamical realisation of the hypothesis of the partial conservation of the axial-vector currents. The qualitative description of scalar mesons is given.

The nature of the ultraviolet divergencies in quantum electrodynamics (QED) is investigated from the viewpoint of the dynamics of the fermion mass generation. The mechanism of the appearance of the additional (in comparison with perturbation theory) ultraviolet divergencies in QED with large bare coupling constant is indicated. The physical phenomenon underlying this mechanism is identified as the field theory analogue of the quantum mechanical «fall into the centre» (collapse) phenomenon. The similar phenomenon is shown to take place in some two-dimensional quantum field models.

Besides, the dynamics of the bifermion condensates formation in tumbling gauge theories is briefly discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Успехи последнего времени в физике элементарных частиц в значительной мере связаны с развитием двух концепций — калибровочных полей и спонтанного нарушения симметрии [1, 2]. Простейший путь для реализации спонтанного нарушения симметрии связан с включением в лагранжиан массивных скалярных полей с «неправильным» (положительным) знаком при массовом члене (механизм Голдстоуна [3]). Именно на этом основании была построена единая теория слабых и электромагнитных взаимодействий — теории Вайнберга — Салама [4]. Существуют, однако, примеры спонтанного нарушения симметрии, к которым применить непосредственно механизмы Голдстоуна нельзя. Наиболее известным примером такого рода является спонтанное нарушение киральной симметрии в физике адронов. Скалярные адроны (мезоны) являются связанными состояниями фермионов (кварков и антикварков) и не описываются фундаментальными скалярными полями. Поэтому в этом случае реализация спонтанного нарушения симметрии тесно связана с реализацией динамики сильносвязанных бифермионных состояний. Механизм Голдстоуна оказывается здесь вторичным в том смысле, что его можно применить не к самому лагранжиану исходной теории, а к эффективному лагранжиану, описывающему низкоэнергетическое взаимодействие адронов, когда структура адронов оказывается несущественной. Таким эффективным лагранжианом является лагранжиан σ-модели [5, 6] (обсуждение вопроса соответствия этой модели микроскопической теории можно найти, например, в [7]).

Спонтанное нарушение симметрии, реализуемое через составные скалярные поля, носит название динамического нарушения симметрии. В физике элементарных частиц такое нарушение впервые рассматривалось в работах Намбу и Иона-Лазинио [8], Б. А. Арбузова, А. Н. Тавхелидзе и Р. Н. Фаустова [9], В. Г. Вакса и А. Н. Ларкина [10]. В этих работах был выяснен ряд общих закономерностей, присущих этому явлению и положенных впоследствии в основу феноменологического описания киральной динамики адронов [6, 11—13].

В работах [8—10] динамическое нарушение симметрии исследовалось или в неперенормируемых [8, 10] или двумерных [9] моделях. В дальнейшем различные аспекты этого явления в более реалистических (четырехмерных перенормируемых) моделях рассматривались в работах [14—18]. В [14—16] исследовалась возможность (за счет динамического нарушения калибровочных симметрий) генерации массы у векторных бозонов (динамический механизм Швингера — Хиггса [19]); в [17, 18] изучалась возможность нарушения киральной симметрии в квантовой электродинамике. В работе [20] с точки зрения динамического нарушения симметрии рассматривалась проблема разности масс мюона и электрона.

В настоящее время проблема динамического нарушения симметрии в калибровочных теориях поля стала особенно актуальной. Это обусловлено рядом причин. Во-первых, появилась калибровочная теория, квантовая хромодинамика, являющаяся серьезным кандидатом на роль последовательной теории сильных взаимодействий. Так как успех феноменологического описания спонтанного нарушения киральной симметрии в физике адронов не оставляет сомнений в реальности этого явления *, оно с необходимостью должно быть реализовано в КХД (если последняя действительно является теорией адронов). Во-вторых, в теории Вайнберга — Салама и в моделях, объединяющих слабые, электромагнитные и сильные взаимодействия (модели большого объединения [2, 23]), существует ряд проблем (например, проблема калибровочных иерархий [2, 24]), решить которые, возможно, удастся при отказе от используемого в них механизма спонтанного нарушения симметрии Голдстоуна и при переходе к механизму динамического нарушения симметрии [25—27]. В-третьих, в интенсивно развивающихся сейчас моделях составных лептонов, кварков и векторных бозонов (см. обзор в [28]) и в моделях большого объединения, использующих суперсимметрии [29] (обзор см. в [30]), также имеется ряд проблем, решение которых требует знания механизма динамического нарушения симметрии в калибровочных теориях.

В настоящей работе дается обзор результатов, касающихся динамического нарушения симметрий в калибровочных теориях, полученных в основном в работах авторов и их сотрудников [31—48]. Основное внимание уделяется изложению механизма нарушения симметрий, связанного с динамикой сверхкритических кулоноподобных сил, обусловленных обменом калибровочными бозонами между фермионами. Рассматриваются следующие вопросы:

асимптотические (определяющие ультрафиолетовые асимптотики) уравнения для функций Грина и характер динамики спонтанного нарушения киральной симметрии в калибровочных теориях поля;

связь динамики спонтанного нарушения киральной симметрии в калибровочных теориях с явлением рождения пар частиц в сильных внешних полях;

массовые соотношения для псевдоскалярных мезонов и динамическая реализация основных результатов линейной σ-модели в квантовой хромодинамике;

характер ультрафиолетовых расходимостей в абелевых калибровочных теориях вне теории возмущений.

---

* На спонтанное нарушение киральной симметрии указывают многочисленные правила сумм алгебры токов и низкоэнергетические соотношения пионной физики [6, 11—13]. О том, что псевдоскалярные мезоны можно рассматривать как «почти» голдстоуновские бозоны, говорит анализ массовых соотношений для мезонов [6, 21]. Наконец, о существовании кирального конденсата ($\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0\rangle \neq \neq 0$) в пределе, когда затравочные массы трех легких кварков m_{0i} ($i = u, d, s$) равны нулю, свидетельствуют правила сумм для функции Грина квантовой хромодинамики [22].

Кроме того, кратко рассматривается вопрос определения остаточной симметрии в калибровочных теориях без фундаментальных скалярных полей, в которых образование бифермионных конденсатов приводит к спонтанному нарушению не только глобальной, но и калибровочной симметрии (так называемые «обрушивающиеся» калибровочные теории [49]).

Гипотеза о принципиальной роли сверхкритических кулоноподобных сил для генерации массы фермионов в калибровочных теориях была впервые выдвинута в [31] на основании анализа уравнений ренормализационной группы (см. также [32]). В этой работе было указано, что физическое явление, стоящее за динамическим нарушением киральной симметрии в калибровочных теориях, тесно связано с перестройкой вакуума для сверхкритического кулоновского центра $-Ze^2/r$ с $Z > Z_c \simeq 137$ [50—53]. Как известно, при $Z > 137$ нижайшие водородоподобные уровни становятся квазистационарными состояниями с $\mathrm{Im}\,\varepsilon \neq 0$. В [31] была высказана гипотеза, что в калибровочных теориях с нулевой затравочной фермионной массой сверхкритические кулоноподобные силы приводят к появлению в симметричной (безмассовой) фазе тахионных связанных состояний (являющихся здесь аналогом квазистационарных состояний), несущих киральный заряд. Наличие таких состояний означает, что в стабильной фазе теории образуется киральный конденсат и фермионы приобретают массу.

Отметим, что динамика сверхкритических кулоноподобных сил в калибровочных теориях исследовалась также группой Мандула [54—57]. В своих первых работах [54, 55] эти авторы считали (см. также [58]), что такая динамика должна привести к самопроизвольной экранировке изолированного кварка в вакууме, что явилось бы альтернативой механизму удержания кварков. Однако в более поздних работах [56, 57] эти авторы также пришли к выводу, что динамика сверхкритических кулоноподобных сил приводит к спонтанному нарушению киральной симметрии *.

Отметим в заключение, что различные аспекты этой динамики исследовались также в работах [58—64].

---

* В своих первых работах эти авторы отталкивались от картины перестройки вакуума в поле сверхкритического кулоновского центра с $Z > 137$. Появление квазистационарных уровней с $\mathrm{Im}\,\varepsilon \neq 0$ при таких Z интерпретируется [51—53] как неустойчивость относительно спонтанного рождения из вакуума e^+e^--пары; рожденный электрон связывается с центром и тем самым экранирует его, а позитрон уходит на бесконечность. В калибровочных теориях это явление должно, казалось бы, проявиться как самоэкранировка фермиона со сверхкритическим зарядом.

Вопрос, почему в калибровочных теориях динамика сверхкритических кулоноподобных сил приводит не к экранировке заряда, а к спонтанному нарушению киральной симметрии, рассматривается в разд. 2, 3.

1. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В КХД. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Классическая лагранжева плотность хромодинамики имеет вид [1]

$$L = -\frac{1}{12}\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3}\ \sum_{i,\,j=1}^{K} \bar{\psi}^{i\alpha}\,(i\delta_{ij}\hat{D}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}m_{ij}^{(0)})\,\psi_{j\beta}, \qquad (1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\,[A_\mu,\ A_\nu];\ \ A_\mu = A_\mu^a t^a;\\ &\hat{D}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\gamma^\mu\partial_\mu - ig\tau_{\alpha\beta}^a A_\mu^a \gamma^\mu; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

t^a, $a = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$ — восемь матриц из присоединенного представления калибровочной группы $SU(3)$ ($\operatorname{Tr} t^a t^b = 3\delta^{ab}$), а матрицы τ^a относятся к фундаментальному представлению этой группы $\left(\operatorname{Tr}\tau^a\tau^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}\right)$; K — число кварковых ароматов.

Если массовая матрица $m_{ij}^{(0)} = 0$, то лагранжева плотность (1) инвариантна относительно киральной глобальной группы $SU_L(K) \times SU_R(K)$ и глобального преобразования $U_{L+R}(1)$ *. С киральной группой $SU_L(K) \times SU_R(K)$ связаны $2K^2 - 2$ сохраняющихся тока:

$$\begin{aligned} &\text{левые } j_{L\mu}^r = \bar{\psi}^{\alpha i}\gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\lambda_{ij}^r\psi_{\alpha j},\quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ K^2-1;\\ &\text{правые } j_{R\mu}^r = \bar{\psi}^{\alpha i}\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\lambda_{ij}^r\psi_{\alpha j}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где λ^r — матрицы фундаментального представления группы $SU(K)$. С группой $U_{L+R}(1)$ связан векторный ток $j_\mu = \bar{\psi}^{\alpha i}\gamma_\mu\psi_{\alpha i}$. Существенно, что все эти токи являются синглетными по отношению к калибровочной группе.

В теории с точной симметрией $SU_L(K) \times SU_R(K)$, когда как лагранжева плотность, так и вакуум инвариантны относительно этой группы, общая структура фермионного пропагатора имеет вид (все групповые индексы опущены)

$$S^{-1}(q) = -\hat{q}A(q^2). \qquad (4)$$

Действительно, если

$$U_r\,|0\rangle = |0\rangle;\ \ U_{r5}\,|0\rangle = |0\rangle, \qquad (5)$$

---

* В квантовой теории дивергенция синглетного аксиально-векторного тока $j_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$, связанного с группой $U_{L-R}(1)$, отлична от нуля даже в киральном пределе, когда $m_{ij}^{(0)} = 0$ [65]:

$$\partial^\mu j_{5\mu} = (g^2K/96\pi^2)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\operatorname{Tr}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}.$$

Поэтому преобразование $U_{L-R}(1)$ требует специального рассмотрения (см. разд. 5).

где преобразования U_r и U_{r5} имеют вид

$$U_r^{-1}\psi(x)\,U_r = \exp(i\theta\lambda^r)\,\psi(x);\quad U_{r5}^{-1}\psi(x)\,U_{r5} = \exp(i\theta\gamma_5\lambda^r)\,\psi(x),$$

то

$$S(x) = i\,\langle 0\mid T\psi(x)\,\overline{\psi}(0)\,|0\rangle = \exp(i\theta\lambda^r)\,S(x)\exp(-i\theta\lambda^r);$$
$$S(x) = \exp(i\theta\gamma_5\lambda^r)\,S(x)\exp(i\theta\gamma_5\lambda^r).$$

Поэтому

$$[\lambda^r,\ S] = 0;\ \{\gamma_5\lambda^r,\ S\} = 0, \tag{6}$$

откуда и следует структура вида (4) [из (6) следует также, что пропагатор $S(q)$ диагонален по индексам глобальной группы: $S_{ij}^{-1}(q) = -\delta_{ij}\hat{q}A(q^2)$].

При спонтанном нарушении симметрии $SU_L(K)\times SU_R(K)\to SU_{L+R}(K)$ соотношения (5) не имеют места и у фермионного пропагатора может появиться массовый член

$$S_{ij}^{-1}(q) = -\delta_{ij}(\hat{q}A(q^2) - B(q^2)). \tag{7}$$

При этом в стабильной фазе с симметрией $SU_{L+R}(K)\times U_{L+R}(1)$ в силу теоремы Голдстоуна [1—3] должны появиться K^2-1 псевдоскалярных безмассовых мезонов (голдстоуновских бозонов), связанных с генераторами $SU_L(K)\times SU_R(K)/SU_{L+R}(K)$, т. е. с зарядами

$$Q_5^r = \int d^3x\,(j_{L0}^r - j_{R0}^r) = \int d^3x\,\overline{\psi}\gamma_0\gamma_5\lambda^r\psi. \tag{8}$$

Фактически проблема спонтанного нарушения киральной $SU_L(K)\times SU_R(K)$ симметрии в КХД сводится к динамической реализации основных результатов линейной σ-модели [5, 6]. Напомним, что: 1) в симметричной (нестабильной) фазе линейной σ-модели имеется K^2 скалярных и K^2 псевдоскалярных тахионов, относящихся к представлению $(K,\ K^*)\oplus(K^*,\ K)$ группы $SU_L(K)\times SU_R(K)$; 2) в стабильной фазе с конденсатом, в которой $SU_L(K)\times SU_R(K)$-симметрия понижается до $SU_{L+R}(K)$, K^2-1 псевдоскалярных тахиона становятся голдстоуновскими бозонами, преобразующимися по присоединенному представлению группы $SU_{L+R}(K)$, а K^2 скалярных и один псевдоскалярный [синглет по отношению к группе $SU_{L+R}(K)$] тахион переходят в массивные мезоны с $M>0$; 3) в случае, когда кроме спонтанного имеет место также и явное нарушение киральной симметрии, K^2-1 псевдоскалярных мезонов приобретают массу и реализуется гипотеза частичного сохранения аксиально-векторных токов (ЧСАТ) [5, 6, 11].

В КХД $2K^2$ мезонов являются связанными состояниями кварков и антикварков, и следует определить динамику, которая может обеспечить существование столь сильносвязанных состояний, как тахионы и голдстоуновские бозоны в симметричной и несимметричной фазах соответственно. Тем самым реализация динамики спонтанного нарушения киральной симметрии с необходимостью требует выхода за рамки теории возмущений.

2. КРИТИЧЕСКАЯ КОНСТАНТА СВЯЗИ В ПРОБЛЕМЕ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В КХД [44, 45]

Покажем, что динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД формируется в области, где бегущая константа связи $\alpha(q^2) = g^2(q^2)/4\pi$ превышает некоторое критическое значение $\alpha_c > 0$ (в этом проявляется существенное отличие динамики спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД от динамики спонтанного нарушения калибровочной $U(1)$-симметрии в теории сверхпроводимости, где критическая константа связи равна нулю [66]). При получении этого результата существенную роль будет играть условие сохранения аксиально-векторных токов, связанных с киральной группой $SU_L(K) \times SU_R(K)$. Как оказывается, это условие выступает как доопределение пространства допустимых решений уравнения для динамической (т. е. связанной со спонтанным нарушением киральной симметрии) массовой функции фермиона $m(q^2) = B(q^2)/A(q^2)$.

Начнем с задачи определения ультрафиолетовой асимптотики динамической массовой функции фермиона. Известны два эквивалентных метода определения ультрафиолетовой асимптотики функций Грина: метод, использующий асимптотические уравнения Швингера — Дайсона [67], и метод ренормализационной группы [68]. Однако для определения асимптотики динамической массовой функции фермиона требуется выйти за рамки улучшенной теории возмущений, к которой приводят оба этих метода. Впервые такая задача рассматривалась в [69, 70]. С использованием метода операторных разложений для асимптотики функции $m(q^2)$ в евклидовой области в поперечной калибровке были получены выражения вида

$$m(q^2) \sim \frac{1}{q^2}(\ln q^2/M_0^2)^{1/2\pi^2 b} \quad \text{(работа [69]);} \tag{9а}$$

$$m(q^2) \sim \frac{1}{q^2}(\ln q^2/M_0^2)^{\frac{1}{2\pi^2 b}-1} \quad \text{(работа [70]),} \tag{9б}$$

где $b = (11 - 2K/3)/8\pi^2$; M_0 — размерный параметр квантовой хромодинамики. Однако вывод, использовавшийся в этих работах, был подвергнут критике [71, 72]. Суть критики сводится к тому, что асимптотическое уравнение для массовой функции кварка в КХД с нулевой затравочной массой допускает также решение вида

$$m(q^2) \sim (\ln q^2/M_0^2)^{-1/2\pi^2 b}. \tag{10}$$

Как было указано в [71, 72], аргументация против этого решения, опирающаяся на метод операторных разложений, является неубедительной, так как при обосновании самого этого метода априори принимается быстро убывающее решение вида (9).

Возникает необычная ситуация. С одной стороны, динамическая массовая функция определяется из точных уравнений для функций Грина, с другой — ультрафиолетовая асимптотика этой функции не определяется однозначно из асимптотического уравнения. Единственный вывод, к которому можно отсюда прийти, состоит, казалось бы, в том [72], что определить ультрафиолетовую асимптотику динамической массовой функции нельзя без определения ее поведения в предасимптотической области, что является весьма сложной задачей.

Как будет, однако, показано ниже, ситуация оказывается иной: лишь решение (9б) удовлетворяет **асимптотичекому уравнению в КХД с кирально-инвариантным лагранжианом** (т. е. с сохраняющимися аксиально-векторными токами). Как хорошо известно, из-за сингулярного характера на малых расстояниях уравнения для функций Грина в КХД должны быть доопределены. В теории возмущений такое доопределение сводится к перенормировке. Здесь будет указана процедура доопределения этих уравнений при учете явления спонтанного нарушения киральной симметрии. Процедура однозначно определяется самой сутью этого явления. Как оказывается, динамическая массовая функция кварка должна удовлетворять более жестким ограничениям, чем те, которые следуют из рассматривавшегося в [71, 72] уравнения для массовой функции с нулевой затравочной массой. В результате однозначно отбирается асимптотика вида (9б).

При спонтанном нарушении киральной симметрии массовая функция $m\,(q^2)$ в фермионном пропагаторе отлична от нуля, а $K^2 - 1$ бесцветных аксиально-векторных токов $j^r_{5\mu} = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\lambda^r\psi$ $(r = 1, \ldots, K^2 - 1)$ сохраняются. Из уравнений движения следует

$$\partial^\mu j^r_{5\mu} = \lim_{\Lambda\to\infty} m^{(0)}(\Lambda)\,(\bar{\psi}\gamma_5\lambda^r\psi)_\Lambda = 0, \tag{11}$$

где $m^{(0)}(\Lambda)$ — затравочная масса фермиона; Λ — параметр обрезания. Поэтому для определения дивергенции $\partial^\mu j^r_{5\mu}$ следует рассмотреть поведение в локальном пределе $(\Lambda \to \infty)$ составного оператора $(\bar{\psi}\gamma_5\lambda^r\psi)_\Lambda$. Ответ известен (см., например, [22]):

$$(\bar{\psi}\gamma_5\lambda^r\psi)_\Lambda \simeq \left(\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2}\Big/\ln\frac{\mu^2}{M_0^2}\right)^{1/2\pi^2 b}(\bar{\psi}\gamma_5\lambda^r\psi)_\mu, \tag{12}$$

где μ — ренормгрупповой параметр. Из (11) и (12) получаем условие, гарантирующее обращение в нуль дивергенции аксиально-векторного тока в локальном пределе:

$$\lim_{\Lambda\to\infty} m^{(0)}(\Lambda)\,Z_m^{-1} = 0;\quad Z_m = \left(\ln\frac{\mu^2}{M_0^2}\Big/\ln\frac{\Lambda^2}{M_0^2}\right)^{1/2\pi^2 b}. \tag{13}$$

Таким образом, равенство нулю затравочной массы в локальном пределе ($m^{(0)} \equiv \lim\limits_{\Lambda\to\infty} m^{(0)}(\Lambda) = 0$), вообще говоря, не гарантирует сохранения аксиально-векторного тока. Такой гарантией является достаточно быстрое $m^{(0)}(\Lambda) = o\left((\ln \Lambda^2/M_0^2)^{-1/2\pi^2 b}\right)$ убывание при $\Lambda \to 0$ затравочной массы в теории с обрезанием. В частности, условие (13) выполняется при выборе $m^{(0)}(\Lambda) = 0$, т. е. когда лагранжиан теории с обрезанием является кирально-инвариантным.

Как будет показано ниже, условие (13) является решающим для определения ультрафиолетовой асимптотики динамической массовой функции кварка в КХД.

Асимптотические выражения для перенормированных функций $A^{(\mu)}(q^2)$ и $B^{(\mu)}(q^2)$, связанных с точкой вычитания μ, в принципе, могут быть получены из перенормированного уравнения Швингера — Дайсона

$$S^{(\mu)^{-1}}(q) = Z_{2\mu}(m^{(0)}(\Lambda) - \hat{q}) -$$
$$- \frac{Z_{1\mu} g_\mu^2}{i(2\pi)^4} \int^{\Lambda} dk^4 \Gamma_{1\lambda}^{(\mu)^a}(q, k)\, S^{(\mu)}(k)\, D_{\lambda\nu}^{(\mu)^{ab}}(q-k)\, \gamma_\nu \tau^b, \tag{14}$$

где $\Gamma_{1\lambda}^{(\mu)^a}$ — фермион-антифермион — глюонная вершина; $D_{\lambda\nu}^{(\mu)^{ab}}$ — глюонный пропагатор; $Z_{2\mu}$ и $Z_{1\mu}$ — константы перенормировки фермионного пропагатора и вершины $\Gamma_{1\lambda}^{(\mu)^a}$; Λ — вспомогательный регуляризующий параметр, который во всех конечных выражениях должен быть устремлен к бесконечности. Определить, однако, асимптотику функции $B^{(\mu)}$ из этого уравнения непросто по следующей причине: в пределе $q^2 \to \infty$ основным в $S^{(\mu)^{-1}}$ является член $\hat{q}A^{(\mu)}(q^2)$, и установить поведение $B^{(\mu)}(q^2)$ можно, удерживая для вершины $\Gamma_{1\lambda}^{(\mu)^a}$ не только главный, но и следующий член асимптотического разложения. Такая программа для случая квантовой электродинамики была реализована Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым [67]. Можно, однако, упростить анализ. Воспользуемся для этой цели тождеством Уорда (символ (Λ) относится к неперенормированным функциям)

$$P^\nu \Gamma_{5\nu}^{(\Lambda)^r}(q_2, q_1) = 2m^{(0)}(\Lambda)\, \Gamma_5^{(\Lambda)^r}(q_2, q_1) - \gamma_5 \lambda^r S^{(\Lambda)^{-1}}(q_1) - S^{(\Lambda)^{-1}}(q_2)\, \lambda^r \gamma_5, \tag{15}$$

где $P = q_2 - q_1$, а $\Gamma_{5\nu}^{(\Lambda)^r}$ и $\Gamma_5^{(\Lambda)^r}$ — «ампутированные» вершины бесцветного аксиально-векторного тока $j_{5\nu}^r = \bar{\psi}\gamma_\nu\gamma_5\lambda^r\psi$ и псевдоскалярной плотности $j_5^r = \bar{\psi}\gamma_5\lambda^r\psi$:

$$S^{(\Lambda)}(q_2)\,\Gamma_{5\nu}^{(\Lambda)^r} S^{(\Lambda)}(q_1) =$$
$$= \int d^4x_1 d^4x_2 \exp(\mathrm{i}q_2x_2 - \mathrm{i}q_1x_1)\,\langle 0 \mid T\psi(x_2)\, j_{5\nu}^r(0)\,\bar{\psi}(x_1) \mid 0\rangle; \quad (16)$$

$$S^{(\Lambda)}(q_2)\,\Gamma_5^{(\Lambda)} S^{(\Lambda)}(q_1) =$$
$$= \int d^4x_1 d^4x_2 \exp(\mathrm{i}q_2x_2 - \mathrm{i}q_1x_1)\,\langle 0 \mid T\psi(x_2)\, j_5^r(0)\,\bar{\psi}(x_1) \mid 0\rangle. \quad (17)$$

Вершины $\Gamma_{5\nu}^{(\Lambda)^r}$ и $\Gamma_5^{(\Lambda)^r}$ удовлетворяют уравнениям **типа Бете — Солпитера** [73]

$$(\Gamma_{5\nu}^{(\Lambda)r})_{nm} = \lambda^r(\gamma_\nu\gamma_5)_{nm} +$$
$$+ \int d^4k K_{nm;\,n'm'}^{(\Lambda)}(q_2, q_1; k)\,[S^{(\Lambda)}(k)\,\Gamma_{5\nu}^{(\Lambda)^r}(k, k+P)\,S^{(\Lambda)}(k+P)]_{n'm'}; \quad (18)$$

$$(\Gamma_5^{(\Lambda)^r})_{nm} = \lambda^r(\gamma_5)_{nm} +$$
$$+ \int d^4k K_{nm;\,n'm'}^{(\Lambda)}(q_2, q_1; k)\,[S^{(\Lambda)}(k)\,\Gamma_5^{(\Lambda)^r}(k, k+P)\,S^{(\Lambda)}(k+P)]_{n'm'}, \quad (19)$$

где для группы $SU(3)$ ядро $K_{nm;\,n'm'}^{(\Lambda)}$ в нижайшем приближении имеет вид

$$K_{nm;\,n'm'}^{(\Lambda)} = \frac{4\mathrm{i}}{3(2\pi)^4}\, g_\Lambda^2 \gamma_{nn'}^\nu \gamma_{m'm}^\lambda d_{\nu\lambda}(q-k);\quad q = \frac{1}{2}(q_1+q_2); \quad (20)$$

$$d_{\nu\lambda}(k) = -\frac{1}{k^2}(g_{\nu\lambda} - k_\nu k_\lambda/k^2)$$

(коэффициент $^4/_3$ возникает здесь из-за суммирования по цветовым индексам; в случае группы $SU(N)$ $^4/_3 \to (N^2-1)/2N$. Из (15), (18) и (19) в пределе $P^\nu \to 0$ получаем уравнение для функции $B^{(\Lambda)}$

$$(\gamma_5)_{nm} B^{(\Lambda)}(q^2) = (\gamma_5)_{nm} m^{(0)}(\Lambda) +$$
$$+ \int d^4k K_{nm;\,n'm'}^{(\Lambda)}(q; k)\,[S^{(\Lambda)}(k)\,\gamma_5 B^{(\Lambda)}(k^2)\,S^{(\Lambda)}(k)]_{n'm'}. \quad (21)$$

Переходя к перенормированным функциям

$$B^{(\mu)} = Z_{2\mu} B^{(\Lambda)};\quad S^{(\mu)} = Z_{2\mu}^{-1} S^{(\Lambda)};\quad K_{nm;\,n'm'}^{(\mu)} = Z_{2\mu}^2 K_{nm;\,n'm'}^{(\Lambda)}, \quad (22)$$

получаем уравнение

$$(\gamma_5)_{nm} B^{(\mu)}(q^2) = (\gamma_5)_{nm} Z_{2\mu} m^{(0)}(\Lambda) +$$
$$+ \int d^4k K_{nm;\,n'm'}^{(\mu)}(q; k)\,[S^{(\mu)}(k)\,\gamma_5 B^{(\mu)}(k^2)\,S^{(\mu)}(k)]_{n'm'}. \quad (23)$$

Так как ультрафиолетовые асимптотики функций $A^{(\mu)}(q^2)$ и $K^{(\mu)}_{nm;\,n'm'}$ нечувствительны к массовому члену, то их вид не должен меняться при учете спонтанного нарушения киральной симметрии. Поэтому в главном приближении для них будем использовать выражения, следующие из ренормализационной группы [69]:

$$A^{(\mu)}(q^2) = 1;$$

$$K^{(\mu)}_{nm;\,n'm'} = \frac{4i}{3(2\pi)^4} g^2(q-k)\, \gamma^{\nu}_{nn'}\gamma^{\lambda}_{m'm} d_{\nu\lambda}(q-k), \tag{24}$$

где в этом приближении бегущая константа связи $g^2(q) = 2/b \ln \frac{q^2}{M_0^2}$.

Как обычно, для определения ультрафиолетовой асимптотики функции $B^{(\mu)}$ в уравнении (23) удобно перейти в евклидову область. Ренормгрупповые аргументы [68, 69] показывают, что в пределе $q^2 \to \infty$ основной вклад в интеграл правой части уравнения (23) дает область k^2, $(q-k)^2 \gg M_0^2$. В этой области

$$S^{(\mu)}(k) \simeq -1/\hat{k}A^{(\mu)}(k^2) \simeq -1/\hat{k}. \tag{25}$$

Подставляя выражения (24) и (25) в (23) и переходя в евклидову область, получаем уравнение

$$B^{(\mu)}(q^2) = m^{(0)}(\Lambda) + \frac{4}{(2\pi)^4} \int^{\Lambda} d^4k \frac{g^2(q-k)}{(q-k)^2} \frac{B^{(\mu)}(k^2)}{k^2} \tag{26}$$

[мы учли, что в этом приближении $Z_{2\mu} = 1$, см. (24)]. В главном логарифмическом приближении в области k^2, $(q-k)^2 \gg M_0$ функцию $g^2(q-k)$ можно заменить на $g^2(q)$ при $q^2 > k^2$ и на $g^2(k)$ при $q^2 < k^2$. Поэтому, интегрируя в (26) по углам, в этом приближении получаем уравнение

$$B^{(\mu)}(q^2) = m^{(0)}(\Lambda) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{q^2}^{\Lambda^2} \frac{dk^2}{k^2} g^2(k) B^{(\mu)}(k^2) + \frac{g^2(q)}{4\pi^2 q^2} \int_{q_0^2}^{q^2} B^{(\mu)}(k^2)\, dk^2 \tag{27}$$

(нижний предел интегрирования q_0^2 в этом асимптотическом уравнении остается неопределенным).

Для определения ультрафиолетовой асимптотики динамической массовой функции мы должны решить уравнение (27) и затем в решении перейти к пределу $\Lambda \to \infty$ так, чтобы выполнялось условие сохранения аксиально-векторных токов (13).

Легко проверить, что решение уравнения (27) удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dq^2}\left[\frac{dB^{(\mu)}}{dq^2} \Big/ \frac{d}{dq^2}\left(\frac{g^2(q)}{q^2}\right)\right] = \frac{1}{4\pi^2} B^{(\mu)}(q^2) \tag{28}$$

и граничному условию

$$\left[q^2 \frac{dB^{(\mu)}}{dq^2} + \left(1 - \frac{d \ln g^2(q)}{d \ln q^2}\right)(B^{(\mu)} - m^{(0)}(\Lambda))\right]\Big|_{q^2=\Lambda^2} = 0. \quad (29)$$

Для наших целей достаточно знать, что общее решение уравнения (28) имеет вид

$$B^{(\mu)}(q^2) = c_1 B_1 + c_2 B_2, \quad (30)$$

где (как нетрудно проверить прямой подстановкой) функции B_i имеют асимптотику вида

$$B_1 \sim \left(\ln \frac{q^2}{M_0^2}\right)^{-1/2\pi^2 b}; \; B_2 \sim \frac{1}{q^2}\left(\ln \frac{q^2}{M_0^2}\right)^{\frac{1}{2\pi^2 b} - 1} \quad (31)$$

(напомним, что в этом приближении $g^2(q) = 2/b \ln \frac{q^2}{M_0^2}$). Из граничного условия (29) получаем

$$c_1 = -\frac{c_2}{2\pi^2 b\Lambda^2}\left(\ln \frac{\Lambda^2}{M_0^2}\right)^{\frac{1}{\pi^2 b} - 2} + m^{(0)}(\Lambda)\left(\ln \frac{\Lambda^2}{M_0^2}\right)^{1/2\pi^2 b}. \quad (32)$$

Отсюда и из условия (13) находим, что константа c_1 в локальном пределе равна нулю. Поэтому ультрафиолетовая асимптотика динамической массовой функции имеет вид

$$m(q^2) = \frac{B^{(\mu)}(q^2)}{A^{(\mu)}(q^2)} \underset{q^2 \to \infty}{\simeq} \frac{C}{q^2}\left(\ln \frac{}{M_0^2}\right)^{\frac{1}{2\pi^2 b} - 1}. \quad (33)$$

Подчеркнем, что доказать равенство $c_1 = 0$ удалось благодаря использованию выбранной процедуры перехода к локальному пределу. Если бы переход к пределу $\Lambda \to \infty$ осуществлялся непосредственно в уравнении (27), т. е. в граничном условии (29), то определить c_1 было бы нельзя: граничному условию с $\Lambda = \infty$ удовлетворяют обе функции B_i. Этот факт отражает то, что (как уже отмечалось) равенство нулю затравочной массы $m^{(0)} = \lim_{\Lambda \to \infty} m^{(0)}(\Lambda)$ не гарантирует сохранения аксиально-векторного тока $j^r_{5\mu}$. Существенно, что выбор процедуры перехода однозначно определяется физическим содержанием задачи (условием сохранения тока $j^r_{5\mu}$).

В принципе размерная константа C в выражении (33) должна выразиться через параметр КХД M_0. Сделать это в явном виде непросто (для этого требуется знать решение уравнения для массовой функции при всех q^2). Можно, однако, выразить константу C через феноменологический параметр $\langle 0 \mid (\bar{\psi}\psi)_\mu \mid 0 \rangle$. Действительно, в теории с обрезанием

$$\langle 0 \mid (\bar{\psi}\psi)_\Lambda \mid 0 \rangle = -\lim_{x \to 0} \mathrm{Tr} \langle 0 \mid T(\psi(x)\bar{\psi}(0)) \mid 0 \rangle =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr} \int^{\Lambda} d^4 k S^{(\Lambda)}(k) \simeq -\frac{3}{2} CKb \left(\ln \frac{\Lambda^2}{M_0^2}\right)^{1/2\pi^2 b}. \tag{34}$$

С другой стороны [22],

$$\langle 0 \mid (\bar{\psi}\psi)_\Lambda \mid 0 \rangle \simeq \left(\ln \frac{\Lambda^2}{M_0^2} \Big/ \ln \frac{\mu^2}{M_0^2}\right)^{1/2\pi^2 b} \langle 0 \mid (\bar{\psi}\psi)_\mu \mid 0 \rangle. \tag{35}$$

Из (34), (35) находим

$$C = -\frac{2}{3Kb} \langle 0 \mid (\bar{\psi}\psi)_\mu \mid 0 \rangle \Big/ \left(\ln \frac{\mu^2}{M_0^2}\right)^{1/2\pi^2 b} \tag{36}$$

[заметим, что в силу (35) константа C является ренорминвариантной, т. е. не зависит от μ].

Этот результат можно обобщить на случай $m_\mu = \lim_{\Lambda \to \infty} m^{(0)}(\Lambda) Z_{m\mu}^{-1} \neq \neq 0$, когда кроме спонтанного имеет место еще и явное нарушение киральной симметрии. В этом случае из (32) находим

$$m(q^2) = \frac{C}{q^2} \left(\ln \frac{q^2}{M_0^2}\right)^{\frac{1}{2\pi^2 b} - 1} + m_\mu \left(\ln \frac{q^2}{M_0^2} \Big/ \ln \frac{\mu^2}{M_0^2}\right)^{-1/2\pi^2 b}. \tag{37}$$

Отметим следующий характерный момент. Нетрудно проверить, что если решение B_1 с логарифмической асимптотикой [см. (31)] формируется в области $k^2 > q^2$, то соответствующее спонтанному нарушению киральной симметрии решение B_2 формируется в области $k^2 < q^2$. Это является указанием на то, что динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД формируется не на малых расстояниях.

Обсудим особенности перехода к локальному пределу $\Lambda \to \infty$ в уравнении (27) с точки зрения теории интегральных уравнений. Рассмотрим вспомогательное уравнение вида

$$\lambda B_\lambda(q^2) = \int_{q_0^2}^{\infty} dk^2 K(q^2, k^2) B_\lambda(k^2); \tag{38}$$

$$K(q^2, k^2) = \frac{1}{4\pi^2} \left[\theta(k^2 - q^2) \frac{g^2(k^2)}{k^2} + \theta(q^2 - k^2) \frac{g^2(q^2)}{q^2}\right], \tag{39}$$

которое при $\lambda = 1$ и $\Lambda = \infty$ совпадает с уравнением (27). В пространстве квадратично-интегрируемых функций ядро K является фредгольмовским (Гильберта — Шмидта) [74]), так как

$$\int_{q_0^2}^{\infty} \int_{q_0^2}^{\infty} dk^2 \, dq^2 K^2(q^2, k^2) < \infty.$$

Как известно [74], спектр собственных значений такого уравнения по модулю ограничен сверху $|\lambda| < A < \infty$. С другой стороны, решение уравнения (38) является суперпозицией двух функций ($B_\lambda = c_1 B_{1\lambda} + c_2 B_{2\lambda}$), имеющих ультрафиолетовые асимптотики вида ср. с (31)]

$$B_{1\lambda} \sim \left(\ln \frac{q^2}{M_0^2}\right)^{-1/2\pi^2 b\lambda}; \tag{40}$$

$$B_{2\lambda} \sim \frac{1}{q^2}\left(\ln \frac{q^2}{M_0^2}\right)^{\frac{1}{2\pi^2 b\lambda}-1}. \tag{41}$$

И так как обе эти функции удовлетворяют граничному условию на бесконечности $\left[\left[q^2 \frac{dB_{i\lambda}}{dq^2} + \left(1 - \frac{d\ln g^2}{d\ln q^2}\right) B_{i\lambda}\right]\right|_{q^2=\infty} = 0$; ср. с (29)], то формально уравнение допускает решение при всех $\lambda > 0$ (второе граничное условие при $q^2 = q_0^2$ определяет лишь отношение c_1/c_2). Противоречие устраняется тем, что функция $B_{1\lambda}$ не является квадратично-интегрируемой. Если ограничиться решениями $B_{2\lambda}$ в пространстве квадратично-интегрируемых функций, то придем к спектру вида $\lambda_n = f_n\,(q_0^2/M_0^2) < A < \infty$, где f_n — некоторые функции безразмерного параметра q_0^2/M_0^2.

Таким образом, условие сохранения аксиально-векторного тока, отбирающее быстро убывающее при $q^2 \to \infty$ решение, выступает как условие доопределения пространства допустимых решений. Учтем это доопределение при анализе динамики спонтанного нарушения киральной симметрии.

Введем параметр инфракрасного обрезания q_0 в точное уравнение для динамической массовой функции (23) с $\Lambda = \infty$ и $m^{(0)} = 0$. Будем говорить, что критическое значение бегущей константы связи для нарушения киральной симметрии равно нулю, если это уравнение имеет нетривиальное решение при сколь угодно большом значении q_0. Если же величина таких q_0 ограничена сверху, $q_0 < \sigma < \infty$, то будем говорить, что критическое значение $\alpha_c = g_c^2/4\pi = \alpha\,(\sigma^2)$. Из этого определения ясно, что величина σ определяет верхнюю границу той области импульсов, где в основном формируется динамика спонтанного нарушения киральной симметрии. Приведем соображения, показывающие, что в КХД критическая константа $\alpha_c > 0$.

Напомним, что при спонтанном нарушении киральной симметрии вершина $\Gamma_{5\nu}^r\,(q_2, q_1)$ имеет полюс в нуле по переменной $P^2 = (q_2 - q_1)^2$, вычет которого выражается через волновую функцию Бете — Солпитера голдстоуновского бозона χ^r [6]:

$$\Gamma_{5\nu}^r(P,\ q) \xrightarrow[P^2\to 0]{} \frac{iP_\nu F_\pi}{P^2} S^{-1}(q_2)\,\chi^r(P,\ q)\,S^{-1}(q_1), \tag{42}$$

где $q = \frac{1}{2}(q_2 + q_1)$, а F_π — константа слабого распада псевдоскалярных мезонов. Подставляя (42) в тождество Уорда (15) с $m^{(0)}(\Lambda) = 0$, получаем соотношение вида

$$\chi^r(q) \equiv \chi^r(P = 0, q) = 2iF_\pi^{-1}\lambda^r S(q)\gamma_5 B(q^2) S(q). \tag{43}$$

Из (21) и (43) следует уравнение для волновой функции голдстоуновского бозона

$$[S^{-1}(q)\chi^r(q) S^{-1}(q)]_{nm} = \int d^4k K_{nm;\, n'm'}(q, k)\chi^r_{n'm'}(k). \tag{44}$$

В силу (43) это уравнение фактически является нелинейным. Перейдем к линейной версии этого уравнения:

$$[S_0^{-1}(q)\tilde{\chi}^r_\lambda(q) S_0^{-1}(q)]_{nm} = \frac{1}{\lambda}\int d^4k K^{(0)}_{nm;\, n'm'}(q, k)(\tilde{\chi}^r_\lambda)_{n'm'}(k), \tag{45}$$

где $S_0 = S|_{B=0}$, $K^{(0)} = K|_{B=0}$; λ — свободный параметр, который введен здесь из следующих соображений. Уравнение (45) является уравнением для волновой функции голдстоуновского бозона в пределе, когда динамическая масса равна нулю. Из общих физических соображений следует ожидать, что уменьшение массы возможно лишь при ослаблении взаимодействия между фермионом и антифермионом в голдстоуновском бозоне. Поэтому собственные значения λ решений уравнения (45), соответствующих спонтанному нарушению киральной симметрии, должны быть больше единицы (очевидно, условие $\lambda > 1$ означает ослабление взаимодействия). Покажем, что при достаточно большом значении параметра инфракрасного обрезания q_0 собственные значения λ решений, удовлетворяющих условию сохранения аксиально-векторных токов, становятся меньше единицы. Это и будет означать, что критическая константа $\alpha_c > 0$.

При достаточно больших значениях q_0 уравнение (45) при замене $q^2\tilde{\chi}_\lambda \to B_\lambda$ (где $\lambda^r\gamma_5\tilde{\chi}_\lambda = \tilde{\chi}^r_\lambda$) переходит в асимптотическое уравнение (38). Поэтому имеет место следующее граничное условие:

$$\frac{d}{dq^2}[q^2\tilde{\chi}_\lambda]\Big|_{q^2=q_0} = 0. \tag{46}$$

Подставляя в (46) решение $\tilde{\chi}_{2\lambda} = B_{2\lambda}/q^2$, соответствующее спонтанному нарушению киральной симметрии, находим, что при $q_0^2 \to \infty$

$$\lambda \underset{q_0^2\to\infty}{\simeq} \frac{1}{2\pi^2 b}(1 + \ln q_0^2/M_0^2)^{-1} \to 0. \tag{47}$$

Таким образом, при достаточно большом значении параметра q_0 собственные значения уравнения (45) становятся меньше единицы. Это и означает, что критическое значение $\alpha_c > 0$.

Вопрос о критическом значении α_c тесно связан с вопросом о механизме спонтанного нарушения киральной симметрии. Ниже будут приведены аргументы, показывающие, что критическое значение α_c есть аналог критического значения $Z_c e^2/4\pi \simeq 1$ в явлении рождения сверхкритическим кулоновским полем $-Ze^2/4\pi r$, $Z > Z_c \simeq 137$, фермион-антифермионных пар [50—53].

В заключение этого раздела отметим следующее. Несмотря на неинвариантность массовой функции фермиона относительно калибровочной группы, условие $m(q^2) \neq 0$ в поперечной калибровке достаточно для доказательства спонтанного нарушения киральной симметрии. Это прямо следует из равенств (33) и (36), связывающих при больших q^2 функцию $m(q^2)$ с калибровочно-инвариантным параметром порядка $\langle 0 \mid (\bar{\psi}\psi)_\mu \mid 0 \rangle$.

3. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИТИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ [31]

Рассмотрим следующую модельную задачу. В уравнении (45) выберем ядро $K^{(0)}$ в виде

$$\left.\begin{aligned} K^{(0)}_{nm;\, n'm'} &= \frac{i\alpha}{3\pi^3}\gamma^{\nu}_{nn'}\gamma^{\lambda}_{m'm} d_{\nu\lambda}(q-k);\quad \alpha = g^2/4\pi;\\ d_{\nu\lambda}(k) &= -\frac{1}{k^2}(g_{\nu\lambda} - k_\nu k_\lambda/k^2). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Введем далее параметры ультрафиолетового ($\Lambda = \sigma < \infty$) и инфракрасного ($q_0 = \delta$) обрезаний, а пропагатор S_0 выберем в виде $S_0(q) = -(\hat{q})^{-1}$. Тогда уравнение (45) в евклидовой области примет вид [ср. с (27)]

$$q^2\tilde{\chi}_\lambda(q^2) = \frac{\alpha}{\lambda\pi}\int\limits_{q^2}^{\sigma^2}\tilde{\chi}_\lambda(k^2)\,dk^2 + \frac{\alpha}{\lambda\pi q^2}\int\limits_{\delta^2}^{q^2} k^2\tilde{\chi}_\lambda(k^2)\,dk^2;\quad \gamma_5\lambda^r\tilde{\chi}_\lambda = \tilde{\chi}^r_\lambda. \tag{49}$$

Наличие ультрафиолетового обрезания соответствует ситуации, когда при $k^2 > \sigma^2$ взаимодействие выключено (т. е. свойство асимптотической свободы неабелевых калибровочных теорий [1] здесь усилено); константу α можно рассматривать как некоторое усредненное значение бегущей константы связи $\alpha(q^2)$ в интервале $\delta^2 \leqslant q^2 \leqslant \sigma^2$.

Общее решение уравнения (49) есть

$$\tilde{\chi}_\lambda = c_1\tilde{\chi}_{1\lambda} + c_2\tilde{\chi}_{2\lambda}, \tag{50}$$

где

$$\tilde{\chi}_{1\lambda} = (q^2)^{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha/\lambda\pi}}; \tag{51}$$

$$\tilde{\chi}_{2\lambda} = (q^2)^{-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha/\lambda\pi}}. \tag{52}$$

Отношение c_1/c_2 и собственные значения λ определяются из двух граничных условий при $q^2=\sigma^2$ и $q^2=\delta^2$:

$$\left[q^2 \frac{d}{dq^2}(q^2\tilde{\chi}_\lambda)+q^2\tilde{\chi}_\lambda\right]\Big|_{q^2=\sigma^2}=0; \tag{53}$$

$$\frac{d}{dq^2}(q^2\tilde{\chi}_\lambda)\,|_{q^2=\delta^2}=0. \tag{54}$$

Приведем здесь ответ, который следует из общего анализа, выполненного в приложении I. Спектр собственных значений уравнения (49) определяется из соотношения

$$n=\pi^{-1}(-\beta_\lambda \ln\rho+2\,\mathrm{arctg}\,2\beta_\lambda),\quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{55}$$

где

$$\beta_\lambda=\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda\pi}-\frac{1}{4}};\quad \rho=\delta^2/\sigma^2.$$

Из (55) следует, что максимальное собственное значение $\lambda_1 \geqslant 1$, если $\alpha>\alpha_1$, где α_1 определяется уравнением

$$1=\pi^{-1}(-\beta_1 \ln\rho+2\,\mathrm{arctg}\,2\beta_1). \tag{56}$$

Ясно, что $\alpha_1>\alpha_c=\pi/4$. Так как спонтанное нарушение киральной симметрии возможно лишь при $\lambda_1>1$ (см. разд. 2), то находим, что в этой модели такое нарушение может иметь место лишь при сверхкритических значениях $\alpha>\alpha_c=\pi/4$. Из (51) и (52) видно, что значение $\alpha_c=\pi/4$ разделяет две области значений α с разным поведением функций $\tilde{\chi}_{i\lambda}\,|_{\lambda=1}$. При сверхкритических α в пределе $q^2\to\infty$ асимптотики функций $\tilde{\chi}_{1\lambda=1}$ и $\tilde{\chi}_{2\lambda=1}$ выравниваются, и в вещественных комбинациях этих функций

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\chi}'_{1\lambda=1}&=(q^2)^{-\frac{3}{2}}\cos(\beta_1\ln q^2);\\ \tilde{\chi}'_{2\lambda=1}&=(q^2)^{-\frac{3}{2}}\sin(\beta_1\ln q^2)\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

появляются осцилляции. В локальном пределе ($\sigma=\infty$) число нулей у функций $\tilde{\chi}'_{1\lambda=1}$ и $\tilde{\chi}'_{2\lambda=1}$ равно бесконечности. Такая ситуация характерна для явления, которое в квантовой механике носит название «падение на центр» [75]. Название отражает тот факт, что в этом случае у системы нет нижайшего энергетического уровня, т. е. энергия в такой системе при $\sigma=\infty$ не ограничена снизу (коллапс).

В неабелевых калибровочных теориях явление падения на центр буквально не реализуется: эффекты поляризации вакуума (свойство асимптотической свободы [1]) действуют как динамическое обрезание на малых расстояниях. Причем значение такого эффективного обрезания естественно оценить из условия $\alpha(\sigma^2)\sim\alpha_c\sim 1$, т. е. динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в основном формируется в области, где бегущая константа связи $\alpha(q^2) > \alpha_c$ и $q^2 \leqslant \sigma^2$. Иная ситуация должна иметь место в абелевых калибровочных теориях, где областью сильной связи является область больших импульсов. Эти теории рассматриваются в разд. 6.

Отметим, однако, что между проявлениями ситуации типа падения на центр в нерелятивистской квантовой механике и квантовой теории поля есть принципиальное различие. В нерелятивистской квантовой механике ситуация падения на центр означает существование сколь угодно глубоких **стационарных** уровней, что возможно лишь в силу сохранения числа частиц — невозможности рождения пар. Уже в релятивистской квантовой механике ситуация меняется: здесь себя проявляют процессы рождения пар частиц, и существование связанных состояний с энергией $\varepsilon < -m$ становится невозможным. Так, в задаче релятивистского электрона в сильном внешнем поле уровни с $\mathrm{Re}\,\varepsilon < -m$ соответствуют квазистационарным состояниям с $\mathrm{Im}\,\varepsilon \neq 0$, описывающим уходящую позитронную волну [50—53]. Как уже отмечалось во введении, наличие такого уровня означает сложный процесс перестройки, когда из вакуума рождается e^+e^--пара, позитрон уходит на бесконечность, а электрон связывается с источником поля, тем самым экранируя его.

Аналогичную ситуацию следует ожидать и в квантовой теории поля. Наличие нулей у волновой функции связанного состояния с нулевой массой должно означать, что вакуум нестабилен и кроме этого состояния имеются также тахионные состояния с $M^2 < 0$, т. е. состояния с мнимой (а не отрицательной) массой *. Эти состояния играют здесь роль квазистационарных состояний релятивистской квантовой механики и приводят к нестабильности вакуума. Последнее проще всего увидеть, вычисляя плотность энергии вакуума. Воспользовавшись тем, что в однопетлевом приближении плотность энергии вакуума ε_V совпадает с плотностью энергии нулевых колебаний, находим, что при $M^2 < 0$

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_V = \mathrm{Im}\,\frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3k\,\sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2} = M^4/64\pi^2, \tag{58}$$

т. е. вакуум нестабилен.

В ситуации типа падения на центр, когда у волновой функции безмассового состояния есть бесконечное число нулей, число тахионных уровней бесконечно. При наличии механизма эффективного обрезания взаимодействия на малых расстояниях (каковым является механизм поляризации вакуума в асимптотически свободных калибровочных теориях) число тахионных уровней в нестабильном вакууме конечно. Квантовые числа тахионов определяют характер перестройки вакуума (квантовые числа образующихся конденсатов). Появле-

* Отметим, что во вторично квантованной релятивистской теории вообще нельзя согласованно ввести бозонные состояния с отрицательной массой.

ние конденсатов приводит к тому, что тахионные состояния переходят в состояния с положительной или нулевой (голдстоуновские бозоны) массой. Отметим, что тахионы играют роль куперовских пар теории сверхпроводимости: в полевой теории сверхпроводимости куперовская пара также является состоянием с мнимой (а не отрицательной) энергией [66] в нестабильном вакууме.

Остановимся несколько подробнее на аналогии между спонтанным нарушением киральной симметрии в калибровочных теориях и явлением рождения фермион-антифермионных пар сверхкритическим кулоновским полем.

В нерелятивистской квантовой механике явление падения на центр имеет место для сингулярных потенциалов $V(r)$, для которых в пределе $r \to 0$ выполняется неравенство $\lim\limits_{r\to 0} - r^2 V(r)/\gamma_c > 1$, где $\gamma_c = 1/8m$ [75]. Существование этого явления для таких потенциалов прямо следует из принципа неопределенности. В релятивистской теории кинетическая энергия $\varepsilon_k = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - m \underset{p\to\infty}{\approx} p$ и поэтому явление падения на центр имеет место уже для сверхкритического кулоновского потенциала $-\alpha/r$ с $\alpha > \alpha_c = 1$ [76]. Последнее обстоятельство проявляется, в частности, в том, что энергия нижайшего $S_{1/2}$ уровня $\varepsilon = m\sqrt{1-\alpha^2}$ при $\alpha > 1$ становится чисто мнимой.

С формальной (математической) точки зрения ситуация падения на центр означает, что гамильтониан является эрмитовым, но не самосопряженным оператором, т. е. имеет ненулевые индексы дефекта [74], и его следует расширить (доопределить) до самосопряженного. С физической точки зрения падение на центр соответствует ситуации, когда характеристики системы зависят от способа доопределения гамильтониана в точке $r = 0$. Доопределение должно диктоваться физическим содержанием задачи. Так, кулоновское поле $-Ze^2/4\pi r$ обычно связывается с полем ядра заряда Z. Доопределение задачи при $Z > Z_c \simeq 137$ сводится к явному учету конечных размеров ядра [51—53], например

$$V_k(r) = = Ze^2/4\pi r \to V(r) = -Ze^2/4\pi \left[\theta(r - r_0)\frac{1}{r} + \theta(r - r)\frac{1}{r_0}\right]. \quad (59)$$

Количественная теория дираковского электрона в сверхкритическом поле была развита В. С. Поповым [51]. Им был подробно исследован интересный с точки зрения практических приложений случай, когда энергия квазистационарного уровня удовлетворяет условию $\frac{|\varepsilon| - m}{m} \ll 1$, т. е. уровень расположен вблизи границы «моря» Дирака $\varepsilon = -m$. Было показано, что при значениях $\alpha = Ze^2/4\pi$, превышающих некоторое критическое значение $\alpha_c \sim 1$, нижайшие стационарные уровни переходят в квазистационарные, соответствующие уходящей позитронной волне.

Нас интересует связь этой задачи с проблемой устойчивости вакуума в калибровочных теориях с нулевой затравочной массой фермиона. В симметричной (нестабильной) фазе этих теорий мы ожидаем появление тахионов, являющихся связанными состояниями безмассовых фермиона и антифермиона. С этой точки зрения интерес представляет другой предельный случай, когда $|\varepsilon| \gg m$, и, в частности, случай безмассового электрона, $m = 0$. Приведем ответ для этого случая [31]: энергия электрона $nS_{1/2}$-уровня в пределе, когда $|\varepsilon| \gg m$, имеет вид

$$\varepsilon^{(n)} \simeq \varepsilon_0^{(n)} - \frac{m}{2} - \mathrm{i}\,\frac{m^2}{50\,|\varepsilon_0^{(n)}|}, \tag{60}$$

где

$$\varepsilon_0^{(n)} = ar_0^{-1}(\sin\beta - \mathrm{i}\cos\beta)\exp\left(\frac{-\pi n}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right); \tag{61}$$

$a \simeq 0{,}4$; $\beta = -\frac{\pi}{2}\operatorname{cth}\pi \simeq -\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}004$; r_0 — параметр обрезания [см. (59)].

Так как $\operatorname{Im}\varepsilon_0^{(n)} > 0$, то появление массы приводит к уменьшению мнимой части, т. е. к увеличению стабилизации системы. В частности, значение критической константы $\alpha_c\,(mr_0)$, начиная с которой появляется мнимая часть у энергии, растет с ростом m.

Таким образом, в принципе имеются две возможности стабилизации системы со сверхкритическим зарядом: спонтанная экранировка заряда и спонтанная генерация массы фермиона. В задаче со сверхкритическим кулоновским центром уже по самой ее постановке (задача является одночастичной) осуществима реализация только первой возможности. Гипотеза работы [31] состояла в том, что в калибровочных теориях реализуется вторая возможность — генерация динамической массы у фермиона. В соответствии с этой гипотезой сверхкритические кулоноподобные силы, связанные с обменом векторными бозонами, в неустойчивой (симметричной) фазе должны приводить к образованию связанных тахионных состояний из представления $(K, K^*) \oplus (K^*, K)$ киральной группы $SU_L(K) \times SU_R(K)$, играющих здесь роль квазистационарных состояний задачи сверхкритического кулоновского центра.

В следующих разделах будет дана конкретная реализация этой гипотезы.

4. МЕХАНИЗМ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ КИРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ В КХД [38 — 42]

Конкретная модель, реализующая механизм спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД, связанный с динамикой сверхкритических кулоноподобных сил, состоит в следующем. Сильносвязанные кварк-антикварковые состояния описываются уравнением Бете — Солпитера, в которое (дополнительно) введены параметры ультрафиолетового (σ) и инфракрасного (δ) обрезаний, выделяющие область взаимодействия, ответственного за образование таких сильносвязанных состояний. Ядро уравнения Бете — Солпитера выбирается в лестничном приближении со значением константы связи α и кварковой динамической массой m, являющимися некоторыми усредненными значениями бегущей константы связи $\alpha\ (q^2)$ и динамической массовой функцией фермиона

$$m\ (q^2) = B\ (q^2)/A\ (q^2)\quad (S^{-1}\ (q) = -\hat{q}A\ (q^2) + B\ (q^2))$$

в области $\delta^2 \leqslant q^2 \leqslant \sigma^2$. Смысл параметров обрезания σ и δ состоит в следующем.

а. Как было показано в разд. 2, в проблеме спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД имеется критическая константа $\alpha_c > 0$. В области, где формируется динамика спонтанного нарушения, бегущая константа связи $\alpha\ (q^2) > \alpha_c$, поэтому $\alpha\ (\sigma^2) \simeq \alpha_c$. Значение α_c будет оценено исходя из того, что рассматриваемые ниже уравнения Бете — Солпитера имеют нетривиальные решения лишь при условии, что $\alpha > \pi/4$; поэтому $\alpha_c \simeq \pi/4 \simeq 1$. Так как для таких значений поведение бегущей константы связи еще не известно, параметр σ может быть оценен лишь весьма грубо. Если использовать формулу однологарифмического приближения

$$\alpha\ (\sigma^2) = 4\pi/(11 - 2K/3)\ \ln \sigma^2/M_0^2,$$

то при $M_0 \simeq 200$ МэВ и $K = 3$ находим, что $\alpha\ (\sigma^2) = \pi/4$ при $\sigma \simeq$ $\simeq 500$ МэВ.

б. Голдстоуновские бозоны и тахионы отличаются от обычных связанных состояний тем, что имеют большой дефект квадрата массы $D = 4m^2 - M^2 \geqslant 4m^2$ ($M = 0$ для голдстоуновских бозонов и $M^2 < 0$ для тахионов; $m = 0$ в симметричной фазе и $m \neq 0$ в фазе с конденсатом). Мы принимаем, что размер R этих состояний таков, что силы удержания, которые, как ожидается, становятся значительными на сравнительно больших расстояниях, $r > \delta^{-1} \simeq M_0^{-1}$, не играют заметной роли в формировании динамики этих состояний. Как станет ясным из дальнейшего, размер голдстоуновских бозонов $R \sim m^{-1}$. Поэтому это предположение оправдано при условии, что $m \gg M_0$. По современным оценкам $m \gtrsim 0{,}35$ ГэВ, а $M_0 < 0{,}2$ ГэВ [22]. Поэтому можно считать, что это предположение соответствует разумному (хотя, вероятно, и не очень точному) приближению. К вопросу о возможной роли сил удержания в проблеме спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД мы еще вернемся в заключении.

в. Постановка задачи спонтанного нарушения симметрии в заданном приближении возможна при условии, что в этом приближении выполняются тождества Уорда (т. е. законы сохранения), связанные с исследуемой симметрией. Как показано в приложении II, в лестничном приближении выделенной в этом смысле является поперечная калибровка (калибровка Ландау).

Таким образом, в рассматриваемой модели описываются связанные состояния, в которых: 1) на малых расстояниях $r < \sigma^{-1}$ кварки двигаются свободно; 2) на средних расстояниях $r \sim m^{-1}$ между кварками действуют сверхкритические кулоноподобные силы; 3) размер этих состояний таков, что струноподобные силы не играют для них заметной роли.

Отметим, что рассматриваемая модель напоминает в какой-то степени модель кваркового мешка [78, 79] с той существенной разницей, что здесь вводятся сверхкритические кулоноподобные силы и эти силы приводят к такой области локализации голдстоуновских бозонов, что граничные условия на поверхности мешка становятся несущественными. Отметим также, что необходимость модификации стандартной модели мешка для описания π-мезонов давно обсуждается в литературе [80]: эта модель приводит к завышенному значению массы π-мезона и не описывает спонтанное нарушение киральной симметрии.

Отметим также, что близкая модель для псевдоскалярных мезонов рассматривалась в [60].

5. УРАВНЕНИЕ БЕТЕ — СОЛПИТЕРА ДЛЯ МЕЗОНОВ [38 — 43]

В КХД с кирально-инвариантным лагранжианом волновые функции Бете — Солпитера для скалярных (s) и псевдоскалярных (p) бесцветных мезонов состояний в пренебрежении U_{L-R} (1)-аномалией [81—83] имеют структуру вида

$$\chi_{ij}^{(s)r} = F\left[\langle 0 \mid T\psi_i(x)\,\bar{\psi}_j(0) \mid P;\ r;\ (s)\rangle\right](q) =$$
$$= \lambda_{ij}^r\left[\chi_1^{(s)} + \hat{p}\chi_2^{(s)} + \hat{x}\chi_3^{(s)} + \sigma_{\mu\nu}(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu)\,\chi_4^{(s)}\right]; \qquad (62)$$

$$\chi_{ij}^{(p)r} = F\left[\langle 0 \mid T\psi_i(x)\,\bar{\psi}_j(0) \mid P;\ r;\ (p)\rangle\right](q) =$$
$$= \lambda_{ij}^r\left[\chi_1^{(p)} + \hat{p}\chi_2^{(p)} + \hat{x}\chi_3^{(p)} + \sigma_{\mu\nu}(p^\mu x^\nu - p^\nu x^\mu)\,\chi_4^{(p)}\right]\gamma_5, \qquad (63)$$

где F — знак фурье-преобразования; P и q — полный и относительный импульсы фермионов; $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$; $\chi_i^{(s)}$, $\chi_i^{(p)}$ — скалярные функции переменных P^2, q^2, Pq и в правых частях разложения (62) и (63) в целях удобства используются безразмерные векторы $p_\mu = P_\mu/\sigma$ и $x_\mu = q_\mu/\sigma$. Подразумевается, что по цветным индексам проведено суммирование, дираковские индексы опущены, а индексы i, j относятся к группе ароматов $U(K)$: $i, j = 1, 2, \ldots, K$; $r = 0, 1, \ldots, K^2 - 1$; $\lambda_{ij}^0 = \delta_{ij}/\sqrt{2K}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать наиболее интересный с практической точки зрения случай $SU_L(3) \times SU_R(3)$ симметрии ($i, j = u, d, s$). Причем будем рассматривать не только КХД с кирально-инвариантным лагранжианом, но также и случай КХД с ненулевыми затравочными (токовыми) массами кварков m_{0i}, когда киральная симметрия нарушается явно (при $m_{0i} \neq m_{0j}$ нарушается также унитарная $SU_{L+R}(3)$-симметрия). В этом случае (см. разд. 2) массовая функция i-го кварка $m_i(q^2) = m(q^2) + m_{0i}(q^2)$, где функция $m(q^2)$ связана со спонтанным, а функция $m_{0i}(q^2)$ — с явным нарушением киральной симметрии; эффективная масса кварка $m_i = m + m_{0i}$, где значения m и m_{0i} интерпретируются как некоторые усредненные значения функций $m(q^2)$ и $m_{0i}(q^2)$ в интервале $\delta^2 \leqslant q^2 \leqslant \sigma^2$.

Уравнения Бете — Солпитера будут проанализированы при условии, что $|\Delta m_{ij}| = |m_{0i} - m_{0j}| \ll m$, т. е. при условии малого нарушения унитарной $SU_{L+R}(3)$-симметрии (обсуждение этого ограничения дано ниже). При этом можно считать, что волновая функция, описывающая мезон, состоящий из i-го кварка и j-го антикварка, имеет вид

$$\delta_{ii'}\delta_{jj'}\chi^{(A)} = \sum_{r=0}^{8} \chi^{(A)r}_{i'j'}\lambda^r_{ij}; \quad A = s,\ p. \tag{64}$$

В лестничном приближении в произвольной ковариантной калибровке с калибровочным параметром d уравнение Бете — Солпитера для волновой функции мезона, состоящего из i-го кварка и j-го антикварка, имеет вид

$$[S_i^{-1}(q+P/2)\,\chi^{(A)}(q,\ P)\,S_j^{-1}(q-P/2)]_{nm} = \\ = \int\limits_{\delta}^{\sigma} d^4k K_{nm;\,n'm'}(q,\ k)\,\chi^{(A)}_{n'm'}(k,\ P), \tag{65}$$

где

$$K_{nm;\,n'm'} = \frac{i\alpha}{3\pi^3}\gamma^{\nu}_{nn'}\gamma^{\lambda}_{m'm}d_{\nu\lambda}(q-k); \tag{66}$$

$$d_{\nu\lambda}(k) = -\frac{1}{k^2}(g_{\nu\lambda} - k_\nu k_\lambda/k^2) - \frac{d}{k^2}\frac{k_\nu k_\lambda}{k^2}; \tag{67}$$

$$S_i^{-1}(p) = -\hat{p} + m_i. \tag{68}$$

Символ $\int\limits_{\delta}^{\sigma}$ означает, что после перехода в евклидову область в интеграл следует ввести ультрафиолетовый (σ) и инфракрасный (δ) параметры обрезания.

Подставляя в уравнение (65) разложения (62), (63), получаем две системы уравнений:

а) скалярные состояния

$$\left(\frac{p^2}{4}-x^2-\frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right)\chi_1^{(s)}(p,x)+\left(2\frac{\overline{m}}{\sigma}x^\mu-\frac{\Delta m}{2\sigma}p^\mu\right)\chi_\mu^{(s)}(p,x)+$$

$$+2\mathrm{i}\,[(px)^2-p^2x^2]\,\chi_4^{(s)}(p,x)=\frac{-\mathrm{i}\alpha}{3\pi^3}\int\limits_{\rho^{1/2}}^{1}d^4y\,d_\mu^\mu(x-y)\,\chi_1^{(s)}(p,y); \qquad (69)$$

$$\left(x^2-\frac{p^2}{4}-\frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right)\chi_\mu^{(s)}(p,x)+\left(\frac{p_\mu p^\nu}{2}-2x_\mu x^\lambda\right)\chi_\lambda^{(s)}(p,x)+$$

$$+\left(2x_\mu\frac{\overline{m}}{\sigma}-p_\mu\frac{\Delta m}{2\sigma}\right)\chi_1^{(s)}(p,x)+2\mathrm{i}\left(\frac{\overline{m}}{\sigma}p^\lambda-\frac{\Delta m}{\sigma}x^\lambda\right)\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(p,x)=$$

$$=\frac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi^3}\int\limits_{\rho^{1/2}}^{1}d^4y\,[\delta_\mu^\lambda d_\nu^\nu(x-y)-2d_\mu^\lambda(x-y)]\,\chi_\lambda^{(s)}(p,y); \qquad (70)$$

$$\left(\frac{p^2}{4}-x^2+\frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right)\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(p,x)-\frac{\mathrm{i}}{2}(p_\lambda x_\mu-p_\mu x_\lambda)\,\chi_1^{(s)}(p,x)+$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\overline{m}}{\sigma}(p_\lambda\chi_\mu^{(s)}(p,x)-p_\mu\chi_\lambda^{(s)}(p,x))+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\Delta m}{\sigma}(x_\mu\chi_\lambda^{(s)}(p,x)-x_\lambda\chi_\mu^{(s)}(p,x))=$$

$$=\frac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi^3}\int\limits_{\rho^{1/2}}^{1}d^4y\,[2d_\mu^\nu(x-y)\,\chi_{\lambda\nu}^{(s)}(p,y)-$$

$$-2d_\lambda^\nu(x-y)\,\chi_{\mu\nu}^{(s)}(p,y)-d_\nu^\nu(x-y)\,\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(p,y)]; \qquad (71)$$

б) псевдоскалярные состояния

$$\left(x^2-\frac{p^2}{4}-\frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right)\chi_1^{(p)}(p,x)+\left(\frac{\overline{m}}{\sigma}p^\mu+\frac{\Delta m}{\sigma}x^\mu\right)\chi_\mu^{(p)}(p,x)+$$

$$+2\mathrm{i}\,[p^2x^2-(px)^2]\,\chi_4^{(p)}(p,x)=\frac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi^3}\int\limits_{\rho^{1/2}}^{1}d^4y\,d_\mu^\mu(x-y)\,\chi_1^{(p)}(p,y); \qquad (72)$$

$$\left(x^2-\frac{p^2}{4}+\frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right)\chi_\mu^{(p)}(p,x)-\left(2x_\mu x^\lambda-\frac{1}{2}p_\mu p^\lambda\right)\chi_\lambda^{(p)}(p,x)-$$

$$-\left(\frac{\overline{m}}{\sigma}p_\mu+\frac{\Delta m}{\sigma}x_\mu\right)\chi_1^{(p)}(p,x)+\mathrm{i}\left(4\frac{\overline{m}}{\sigma}x^\lambda+\frac{\Delta m}{\sigma}p^\lambda\right)\chi_{\mu\lambda}^{(p)}(p,x)=$$

$$=\frac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi^3}\int\limits_{\rho^{1/2}}^{1}d^4y\,[\delta_\mu^\lambda d_\nu^\nu(x-y)-2d_\mu^\lambda(x-y)]\,\chi_\lambda^{(p)}(p,y); \qquad (73)$$

$$\left(x^2-\frac{p^2}{4}+\frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right)\chi_{\lambda\mu}^{(p)}(p,x)+\frac{\mathrm{i}}{2}(p_\lambda x_\mu-p_\mu x_\lambda)\,\chi_1^{(p)}(p,x)+$$

$$+\frac{i\bar{m}}{\sigma}\left(x_\lambda \chi_\mu^{(p)}(p, x)-x_\mu \chi_\lambda^{(p)}(p, x)\right)+\frac{i\Delta m}{4\sigma}\left(p_\lambda \chi_\mu^{(p)}(x, p)-p_\mu \chi_\lambda^{(p)}(x, p)\right)=$$

$$=\frac{i\alpha}{3\pi^3}\int\limits_{\rho^{1/2}}^{1} d^4y\,[2d_\lambda^\nu(x-y)\,\chi_{\mu\nu}(p, y)-$$

$$-2d_\mu^\nu(x-y)\,\chi_{\lambda\nu}^{(p)}(p, y)+d_\nu^\nu(x-y)\,\chi_{\lambda\mu}^{(p)}(p, y)]. \tag{74}$$

В этих уравнениях мы используем следующие обозначения: $y = k/\sigma$; $\bar{m} = (m_i + m_j)/2$; $\Delta m = m_j - m_i$; $\rho = \delta^2/\sigma^2$;

$$\chi_\mu^{(A)}=p_\mu \chi_2^{(A)}+x_\mu \chi_3^{(A)};\quad \chi_{\lambda\mu}^{(A)}=(p_\lambda x_\mu-p_\mu x_\lambda)\,\chi_4^{(A)}\ (A=s,\ p).$$

Как следует из общего обсуждения разд. 1, реализация динамики спонтанного нарушения киральной $SU_L(3)\times SU_R(3)$-симметрии означает, что: 1) в $SU_L(3)\times SU_R(3)$-симметричной фазе КХД с кирально-инвариантным лагранжианом ($m_i = 0$) имеется девять скалярных и девять псевдоскалярных тахионов, относящихся к представлению $(3,3^*)\oplus(3^*,3)$ группы $SU_L(3)\times SU_R(3)$;

2) в фазе с конденсатом КХД с кирально-инвариантным лагранжианом ($m_{0i} = 0$; $m \neq 0$), где $SU_L(3)\times SU_R(3)$-симметрия понижается до $SU_{L+R}(3)$, восемь псевдоскалярных тахионов становятся безмассовыми голдстоуновскими бозонами, преобразующимися по присоединенному представлению группы $SU_{L+R}(3)$, а девять скалярных и один псевдоскалярный [синглет по отношению к группе $SU_{L+R}(3)$] тахионы переходят в массивные мезоны с $M > 0$;

3) в случае, когда имеет место также и явное нарушение киральной симметрии (затравочные массы кварков $m_{0i} \neq 0$), восемь псевдоскалярных мезонов приобретают массу и реализуется гипотеза частичного сохранения аксиально-векторных токов (ЧСАТ).

Прежде чем приступить к реализации этой программы, сделаем некоторые замечания.

Как отмечалось в разд. 4, «лучшей» в лестничном приближении является поперечная калибровка ($d = 0$). Однако по соображениям, которые станут ясными из дальнейшего, уравнения (69) — (74) записаны в произвольной ковариантной калибровке.

В симметричной фазе ($m_i = 0$) уравнения для скалярных и псевдоскалярных мезонов совпадают и, кроме того, уравнения для инвариантных функций $\chi_1^{(A)}$ и $\chi_4^{(A)}$ отщепляются от уравнений для функций $\chi_2^{(A)}$ и $\chi_3^{(A)}$. Последнее связано с тем, что в симметричной фазе функции $\chi_1^{(A)}$, $\chi_4^{(A)}$ и $\chi_2^{(A)}$, $\chi_3^{(A)}$ описывают состояния, относящиеся к разным неприводимым представлениям киральной группы $SU_L(3)\times SU_R(3)$: первые, стоящие при четном числе γ-матриц, описывают состояния из представления $(3,3^*)\oplus(3^*,3)$, вторые — из представления $(3\times 3^*,1)\oplus(1,3\times 3^*) = 2\,(1,1)\oplus(8,1)\oplus(1,8)$. Совпадение уравнений для скалярных и псевдоскалярных мезонов является следствием того, что представления $(3,3^*)\oplus(3^*,3)$ и

(8,1) $\oplus$ (1,8) являются неприводимыми относительно группы $SU_L(3) \times SU_R(3) \times P$ [напомним, что при операции пространственной инверсии P представление $(a, b) \to (b, a)$].

Наконец отметим, что при $m_i = m \neq 0$ (т. е. в фазе с остаточной $SU_{L+R}(3)$-симметрией) уравнения для мезонов из унитарного октета и синглета совпадают. Этот факт является проявлением хорошо известной $U_{L-R}(1)$-проблемы в КХД [81—83]. В лестничном приближении (и вообще в приближении, в котором учитываются только плоские диаграммы) не проявляется аномалия синглетного $\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi$ тока [82]. Поэтому в этом приближении фактически речь должна идти о спонтанном нарушении $U_L(3) \times U_R(3)$ (а не $SU_L(3) \times SU_R(3)$-симметрии). К учету $U_{L-R}(1)$-аномалии мы вернемся ниже.

Анализ уравнений для псевдоскалярных мезонов [38, 40, 42]. Анализ начнем с голдстоуновских бозонов ($m_i = m \neq 0$) [38]. Как видно из (72) — (74), уравнения существенно упрощаются при $p_\mu = 0$. В частности, можно записать отдельное уравнение для инвариантной функции $\chi_1^{(p)}$

$$(m^2/\sigma^2 - x^2)\,\chi_1^{(p)}(x) = \frac{i\alpha(3+d)}{3\pi^3} \int\limits_{\rho^{1/2}}^{1} \frac{d^4y}{(x-y)^2}\,\chi_1^{(p)}(y). \tag{75}$$

Такое упрощение уравнений является прямым следствием тождества Уорда для аксиально-векторных токов: как следует из соотношения (43), при $p_\mu = 0$ волновая функция Бете — Солпитера псевдоскалярных мезонов выражается через динамическую массовую функцию фермиона, так что структура $\chi^{(p)r}$ имеет вид $\lambda^r\gamma_5\chi_1^{(p)}$.

Переходя в евклидову область, уравнение (75) запишем в виде

$$(x^2 + m^2/\sigma^2)\,\chi_1^{(p)}(x) = \frac{\alpha(3+d)}{3\pi^3} \int\limits_{\rho^{1/2}}^{1} \frac{d^4y}{(x-y)^2}\,\chi_1^{(p)}(y). \tag{76}$$

Интегрируя в (76) по угловым переменным, получаем уравнение

$$(x^2 + m^2/\sigma^2)\,\chi_1^{(p)}(x) = \frac{\alpha(3+d)}{3\pi} \int\limits_{\rho}^{1} dy^2 \left[\frac{\theta(x^2-y^2)}{x^2} + \frac{\theta(y^2-x^2)}{y^2}\right] y^2\chi_1^{(p)}(y). \tag{77}$$

Анализ уравнения (77) выполнен в приложении I. Здесь приведем результаты анализа. Общее решение уравнения (77) имеет вид

$$U \equiv (x^2 + m^2/\sigma^2)\,\chi_1^{(p)} = c_1u_1 + c_2u_2, \tag{78}$$

где

$$u_1 = F(r, r^*, 2; -\tilde{x}^2);$$

$$u_2 = \tilde{x}^{-2r} F(r, -r^*, 2r; -\tilde{x}^{-2}) + \tilde{x}^{-2r^*} F(r^*, -r, 2r^*; -\tilde{x}^{-2}); \quad (79)$$

$$r = \frac{1}{2} + i\beta; \quad r^* = \frac{1}{2} - i\beta; \quad \beta = \left(\frac{\alpha(3+d)}{3\pi} - \frac{1}{4}\right)^{1/2}; \quad \tilde{x}^2 = \frac{q^2}{m^2};$$

F — гипергеометрическая функция. При данном значении константы связи α это уравнение имеет n нетривиальных решений, где число

$$n = [\pi^{-1}(\beta \ln \rho^{-1} + 2 \operatorname{arctg} 2\beta)]; \quad (80)$$

символ $[C]$ означает целую часть числа C. Как видно из (80), $n \geqslant 1$, если константа α превосходит критическое значение $\alpha_c(\rho) > \alpha_c = 3\pi/4\,(3+d)$, причем $\alpha_c(\rho) \to \alpha_c$ при $\rho \to 0$.

Каждому нетривиальному решению соответствует свое значение динамической массы $m^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots, n$:

$$m^{(s)2} = \sigma^2 Z^{(s)}(\beta, \rho), \quad (81)$$

где $Z^{(s)}$ — положительные монотонно растущие функции константы связи, причем $Z^{(s)} > Z^{(s+1)}$. При $m^{(s)} \gg \delta$ и $\dfrac{\alpha - \alpha_c}{\alpha_c} \ll 1$

$$m^{(s)2} \simeq 16\sigma^2 \exp\left(\frac{-\pi s}{\beta}\right). \quad (82)$$

Функции u_i [см. (79)] зависят от отношения q^2/m^2. При $m^2 \gg \delta^2$ отношение c_2/c_1 [см. (78)] мало ($c_2/c_1 \to 0$ при $m^2/\delta^2 \to \infty$) и параметр m^{-1} определяет радиус локализации голдстоуновского бозона.

Каждому значению $m^{(s)}$ соответствует свой фермионный пропагатор и поэтому свой вакуум. Как будет, однако, далее показано, только максимальное значение массы фермиона $m^{(1)}$ приводит к стабильному вакууму. При этом будет также выяснен физический смысл остальных значений $m^{(s)}$.

Перейдем к анализу системы уравнений (72) — (74) при $p_\mu \neq 0$ [40, 42]. В разд. 3 отмечалась выделенная роль поперечной калибровки в лестничном приближении. Отметим, однако, что в лестничном приближении во всех ковариантных калибровках форма уравнения Бете — Солпитера для псевдоскалярных голдстоуновских мезонов является одной и той же и единственное отличие состоит в коэффициенте при константе связи α: при переходе из поперечной калибровки в калибровку с $d \neq 0$ константа связи $\alpha \to \alpha\,(1 + d/3)$ [см. (77)]. Поэтому в этом приближении физическая картина динамического нарушения киральной симметрии является сходной для калибровок с $|d| \leqslant d_c \sim 1$, в которых критическое значение $\alpha_c \sim 1$. Мы воспользуемся этим в дальнейшем.

Система уравнений (72) — (74) упрощается в калибровке Фейнмана ($d = 1$): в этой калибровке правая часть уравнения (74) обращается в нуль и уравнение становится чисто алгебраическим. В киральном пределе ($p_\mu = 0$; $m_{0i} = 0$) система (72) — (74) имеет решение вида

$$\chi_4^{(p)} = \chi_1^{(p)}/[2i(x^2 + m^2/\sigma^2)]; \quad \chi_2^{(p)} = \chi_3^{(p)} = 0. \tag{83}$$

При $p_\mu \neq 0$ будем исследовать систему (72) — (74), используя теорию возмущений по малым параметрам p^2 и $\overline{m}^2/\sigma^2$. Рассматривая интегральное уравнение (73) как неоднородное относительно функции $\chi_\mu^{(p)} = p_\mu \chi_2^{(p)} + x_\mu \chi_3^{(p)}$, получаем

$$\chi_\mu^{(p)} \sim \left(\frac{\overline{m}}{\sigma} p_\mu + \frac{\Delta m}{\sigma} x_\mu\right) \chi_1^{(p)} - \left(4i \frac{\overline{m}}{\sigma} x^\lambda + i \frac{\Delta m}{\sigma} p^\lambda\right) \chi_{\mu\lambda}^{(p)}. \tag{84}$$

Так как мы приняли, что $|\Delta m| \ll m$, то из соотношений (83) и (84) находим, что в первом порядке по параметрам p^2, $m_i m_j/\sigma^2$ уравнение (72) сводится к уравнению вида

$$\left[x^2 + \frac{3}{4} p^2 + \frac{m_i m_j}{\sigma^2} - \frac{(px)^2}{x^2}\right] \chi_1^{(p)}(x) = \frac{4\alpha}{3\pi^3} \int\limits_{\rho^{1/2}}^{1} \frac{d^4 y}{(x-y)^2} \chi_1^{(p)}(y) \tag{85}$$

в евклидовой области. Покажем, что в этом приближении в качестве решения уравнения (85) можно взять функцию $\chi_1^{(p)} = G_0(x^2, p^2)$, не зависящую от $p_\nu \cdot x^\nu$. Разложим ядро $(x-y)^{-2}$ и волновую функцию $\chi_1^{(p)}$ по полиномам Гегенбауэра C_n^1 [84]:

$$(x-y)^{-2} = \frac{\theta(1-t)}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n C_n^1(\cos\psi) + \frac{\theta(t-1)}{y^2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} C_n^1(\cos\psi); \tag{86}$$

$$\chi_1^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x^2, p^2) C_n^1(\cos\varphi), \tag{87}$$

где

$$t = y^2/x^2; \quad \cos\psi = \frac{x_\nu y^\nu}{|x||y|}; \quad \cos\varphi = \frac{x_\nu p^\nu}{|x||p|}.$$

Подставляя (86) и (87) в уравнение (85) и используя теорему сложения для полиномов Гегенбауэра [84], приходим к бесконечной цепочке зацепляющихся уравнений

$$\left(x^2 + \frac{3}{4} p^2 + \frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right) G_0 - \frac{p^2}{4}(G_0 + G_2) = \frac{4\alpha}{3\pi} \int\limits_{\rho}^{1} dy^2 K_0(x, y) G_0(y); \tag{88}$$

$$\left(x^2 + \frac{3}{4} p^2 + \frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right) G_n - \frac{p^2}{4}(G_{n-2} + 2G_n + G_{n+2}) =$$
$$= \frac{4\alpha}{3\pi} \int\limits_{\rho}^{1} dy^2 K_n(x, y) G_n(y), \quad n \geqslant 2, \tag{89}$$

где

$$K_n(x, y) = \frac{y^2}{n+1}\left[\frac{\theta(x^2-y^2)}{x^2}\left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{n/2} + \frac{\theta(y^2-x^2)}{y^2}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{n/2}\right]. \tag{90}$$

В киральном пределе ($p_\mu = 0$) функция $\chi_1^{(p)} = G_0$ и $G_n = 0$, если $n \geqslant 2$. При $p_\mu \neq 0$ будем использовать теорию возмущений по параметру p^2. Рассматривая уравнения (89) как неоднородные интегральные уравнения для гармоник G_n с $n \geqslant 2$, находим, что имеется решение с

$$G_{n+2}/G_n \sim p^2 \ll 1.$$

Поэтому в первом порядке по p^2 членом $p^2 G_2$ в уравнении (88) можно пренебречь. В результате получаем уравнение

$$\left(x^2 + \frac{p^2}{2} + \frac{m_i m_j}{\sigma^2}\right) G_0 = \frac{4\alpha}{3\pi} \int\limits_\rho^1 dy^2 \left[\frac{\theta(x^2 - y^2)}{x^2} + \frac{\theta(y^2 - x^2)}{y^2}\right] y^2 G_0. \qquad (91)$$

При замене $\frac{p^2}{2} + \frac{m_i m_j}{\sigma^2} \to m^2/\sigma^2$ уравнение (91) переходит в уравнение (77) для голдстоуновского бозона, и можно воспользоваться результатом анализа этого уравнения.

Как следует из этого анализа, число нетривиальных решений уравнения (91) дается формулой (80). Спектр масс псевдоскалярных мезонов определяется формулой вида (81), если в ней заменить m^2 на $m_i m_j - \frac{1}{2} M^2(ij)$, где $M^2(ij) = -\sigma^2 p^2$:

$$M^2(ij) = 2m_i m_j - 2\sigma^2 Z^{(s)}, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (92)$$

Обсудим три случая.

1. $m_i = m_j = 0$ ($i, j = u, d, s$). Этот случай соответствует симметричной (безмассовой) фазе кирально-инвариантной КХД. Так как $Z^{(s)} > 0$, то из соотношения (92) следует, что в этой фазе есть тахионы, т. е. симметричная фаза является неустойчивой.

2. $m_{0i} = 0$, $m_i = m \neq 0$. Этот случай соответствует массивной фазе кирально-инвариантной КХД. В соответствии с теоремой Голдстоуна [1—3] в этой фазе должны быть безмассовые псевдоскалярные мезоны [$M^2(ij) = 0$]. Условие $M^2(ij) = 0$ приводит к уравнению для динамической массы кварка [ср. с (81)]

$$m^{(s)2} = \sigma^2 Z^{(s)}, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (93)$$

Как следует, однако, из соотношения (92), только максимальное значение $m^{(1)}$ приводит к стабильному вакууму: при $m = m^{(s_0)}$, $s_0 > 1$ уровни $M_s^2(ij) = 2(m^{(s_0)2} - m^{(s)2})$ с $s < s_0$ остаются тахионными.

В стабильном вакууме с $m = m^{(1)}$ имеется $n - 1$ радиальных (0^{-+})-возбуждений голдстоуновского мезона с массами

$$M_s^2(ij) = 2(m^{(1)2} - m^{(s)2}) > 0, \quad s = 2, 3, \ldots, n. \qquad (94)$$

Из соотношения (80) следует ограничение на значения эффективной константы связи, при которых $n \geqslant 2$. Беря для σ и δ значения $\sigma = 500$ МэВ и $\delta = 200$ МэВ (см. разд. 4), находим, что $n \geqslant 2$ при $\beta > 2$. Расчет на ЭВМ [41] показывает, что для таких β значение динамической массы $m > 0{,}8$ ГэВ. Так как столь большие значения для m трудно считать реалистическими [85], мы получаем указание на отсутствие легких возбуждений у псевдоскалярных мезонов *.

3. $m_{0i} \neq 0$, $m_i = m + m_{0i}$. Этот случай соответствует реальной ситуации, когда имеет место как спонтанное, так и явное нарушение $SU_L(3) \times SU_R(3)$-симметрии. Уравнение (92) с $s = 1$ определяет массовый спектр псевдоскалярного нонета

$$M^2(ij) = 2m(m_{0i} + m_{0j}) + 2m_{0i}m_{0j}. \tag{95}$$

Если принять, что $m_{0i} \ll m$ (малость явного нарушения $SU_L(3) \times SU_R(3)$-симметрии), то квадратичным членом $2m_{0i}m_{0j}$ в соотношении (95) можно пренебречь, и соотношение (95) переходит в массовое соотношение, следующее из алгебры токов и гипотезы ЧСАТ [6], в котором вместо динамической массы m стоит феноменологический параметр $-\frac{1}{2}F_\pi^{-2}\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0\rangle$:

$$M^2(ij) = -F_\pi^{-2}\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0\rangle (m_{0i} + m_{0j}). \tag{96}$$

Поэтому приходим к соотношению

$$\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0\rangle = -2mF_\pi^2. \tag{97}$$

Беря для m стандартное значение 350 МэВ и учитывая, что $F_\pi \simeq 95$ МэВ, находим

$$\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0\rangle \simeq -(200\ \text{МэВ})^3.$$

Это значение оказывается достаточно близким к значениям, полученным в других подходах [22, 85, 86]: $\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0\rangle \simeq -(220\ \text{МэВ})^3 \div -(240\ \text{МэВ})^3$. Таким образом, рассматриваемый механизм дает динамическую реализацию соотношениям алгебры токов и гипотезе ЧСАТ.

Полезно сравнить массовую формулу (95) с феноменологической массовой формулой для адронов, полученной в рамках нерелятивистской кварковой модели [87—89]:

$$M_h = \sum_i m_i + b\tilde{M}^2 \sum_j \frac{\sigma_i \sigma_j}{m_i m_j}, \tag{98}$$

где сумма идет по всем входящим в данный адрон кваркам; $b \simeq 25$ МэВ; $m_u \simeq m_d = \tilde{M} \simeq 360$ МэВ; $m_s \simeq 540$ МэВ; $\boldsymbol{\sigma}_i$ — спиновые матрицы i-го кварка. Эта формула достаточно хорошо описывает массы большинства известных адронов, но приводит к завышенным значениям масс псевдоскалярных мезонов: 570 МэВ для π-мезонов

* Под легкими мы понимаем состояния с большим дефектом масс. Разумеется, динамика больших расстояний, в принципе, может обеспечить существование достаточно тяжелых 0^{-+}-резонансов, лежащих на дочерних траекториях π- и K-траекторий.

и 800 МэВ для K-мезонов. В рамках рассматриваемого здесь подхода псевдоскалярные мезоны являются существенно релятивистскими объектами, и поэтому расхождение значений их масс с нерелятивистской формулой (98) представляется вполне естественным.

Различие между соотношениями (95) и (98) проявляется, в частности, в том, что если соотношение (98) (при пренебрежении спин-спиновыми силами) приводит к линейной зависимости между токовыми массами кварков и массой адрона, то (95) приводит к линейной зависимости между токовыми массами и квадратом массы мезона (при условии, что $m_{0i} \ll m$). Таким образом, условие $m_{0i} \ll m$ (т. е. условие близости псевдоскалярных мезонов к голдстоуновским бозонам) дает ответ на давний вопрос [88], почему в массовых соотношениях для псевдоскалярных мезонов следует использовать не массу M, а квадрат массы M^2 мезона.

Массовое соотношение (95) было получено в пренебрежении U_{L-R} (1)-аномалией [81—83] у синглетного аксиально-векторного тока. Учесть аномалию можно в рамках схемы $1/N$-разложения (N — число цветов), выделяя вклад канала аннигиляции кварк-антикварк $\rightarrow$ глюоны в массу синглетного η_1-мезона [82]. Отсылая за подробностями к работам [40, 42], здесь приведем лишь конечный результат. Комбинируя вклад канала аннигиляции с массовым соотношением (95), получаем, что при $m = 0{,}35 \div 0{,}55$ ГэВ квадраты масс $M^2(\eta) = 0{,}26 \div 0{,}27$ ГэВ^2; $M^2(\eta') = 0{,}95 \div 0{,}96$ ГэВ^2, а угол смешивания $\theta \simeq 20 \div 31°$ ($|\eta\rangle = \cos\theta\,|\eta_8\rangle + \sin\theta\,|\eta_1\rangle$; $|\eta'\rangle = \cos\theta\,|\eta_1\rangle - \sin\theta\,|\eta_8\rangle$). Если же использовать массовое соотношение (96), то $M^2(\eta) = 0{,}27$ ГэВ^2; $M^2(\eta') = 0{,}95$ ГэВ^2; $\theta \simeq 14°$ [82]. При этом следует иметь в виду, что, так как и условие $\Delta m \ll m$, и условие $m_{0i} \ll m$, лежащее в основе формулы (96), не слишком хорошо выполняются для мезонов, содержащих странный кварк, числовые значения, полученные как из соотношения (95), так и из соотношения (96), следует рассматривать только как оценочные.

Анализ уравнений для скалярных мезонов [43]. Как уже отмечалось, в симметричной фазе с $m_i = 0$ уравнения для скалярных и псевдоскалярных мезонов совпадают. Поэтому, как и должно быть при спонтанном нарушении киральной симметрии, в этой фазе сверхкритические кулоноподобные силы приводят к образованию восемнадцати ахионов из представления $(3,3^*) \oplus (3^*,3)$.

Однако при $m \neq 0$ уравнения для скалярных мезонов являются сложнее, чем уравнения для псевдоскалярных. Так, инвариантная функция $\chi_3^{(s)}$ в отличие от функции $\chi_3^{(p)}$ не равна нулю даже при $p_\mu = 0$ [см. уравнение (70) и уравнение (101) ниже]. Вследствие этого использовать в данном случае метод, который был применен к уравнениям для псевдоскалярных мезонов, нельзя.

Чтобы показать, что в фазе с конденсатом ($m \neq 0$), где псевдоскалярные мезоны являются безмассовыми, скалярные мезоны имеют массу $M > 0$, изберем следующий обходный путь [43]. Стабилизация системы с появлением массы у фермиона связана с тем общим фактом, что при заданной динамике взаимодействия квадрат массы связанного состояния растет с ростом масс m_i его составляющих. Поэтому при некоторых критических значениях m_{ic} данное тахионное состояние $|n\rangle$ станет безмассовым. При $m_i > m_{ic}^{(n)}$ это состояние будет иметь положительную массу [это общее положение реализуется, в частности на примере массового соотношения (92)]. Отсюда следует, что если для скалярных мезонов определить критическую массу кварков $m_c^{(s)}$ как то значение, при котором эти мезоны были бы безмассовыми, то в фазе с конденсатом ($m \neq 0$) масса скалярных мезонов будет положительной, если показать, что $m_c^{(s)} < m$.

Это замечание сводит задачу к определению $m_c^{(s)}$, т. е. к решению уравнений для безмассовых скалярных мезонов, которые являются значительно проще уравнений для массивных мезонов.

Общая структура волновой функции скалярного мезона при $p_\mu = 0$ имеет вид [ср. с (62)]

$$\chi^{(s)r} = \lambda^r (\chi_1^{(s)}(q^2) + \hat{x}\chi_3^{(s)}(q^2)). \tag{99}$$

При $p_\mu = 0$ из системы уравнений (69) — (71) в евклидовой области в калибровке Ландау после интегрирования по угловым переменным получаем следующие уравнения:

$$(-x^2 + a_c^{(s)})\chi_1^{(s)} + 2(a_c^{(s)})^{1/2} x^2 \lambda_3^{(s)} = -K_\rho[\chi_1^{(s)}]; \tag{100}$$

$$(-x^2 + a_c^{(s)})\chi_3^{(s)} - 2(a_c^{(s)})^{1/2} \chi_1^{(s)} = 0, \tag{101}$$

где $a_c^{(s)} = (m_c^{(s)})^2/\sigma^2$;

$$K_\rho[f] = \frac{\alpha}{\pi} \int_\rho^1 dy^2 \left[\frac{\theta(x^2-y^2)}{x^2} + \frac{\theta(y^2-x^2)}{y^2} \right] y^2 f(y). \tag{102}$$

При выводе уравнения (101) мы воспользовались тождеством

$$\int \frac{d^4k}{(q-k)^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{(q-k)_\mu (q-k)_\nu}{(q-k)^2} \right) \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu f(k^2) = 0. \tag{103}$$

Из (100), (101) получаем уравнение

$$(x^2 + a_c^{(s)})^2 \chi_1^{(s)} = x^2 K_\rho[\chi_1^{(s)}] - a_c^{(s)} K_\rho[\chi_1^{(s)}]. \tag{104}$$

Сравним это уравнение с уравнениями для псевдоскалярного голдстоуновского бозона (77), которое перепишем в виде

$$(x^2 + a)^2 = x^2 K_\rho[\chi_1^{(p)}] + a K_\rho[\chi_1^{(p)}]; \quad a = m^2/\sigma^2. \tag{105}$$

Знак минус при втором слагаемом в правой части уравнения (104) означает наличие в скалярном канале дополнительного (по сравнению с псевдоскалярным каналом) отталкивания. Уже отсюда следует искомое неравенство $m_c^{(s)} < m$, и как следствие этого неравенства получаем, что в фазе с конденсатом масса скалярных мезонов положительна.

Количественное сравнение значений m и $m_c^{(s)}$ можно получить, решая уравнение (104). Отсылая за подробностями к работе [43], приведем здесь конечный результат. Как оказывается, при всех сверхкритических значениях α, когда $m \neq 0$, отношение $m^2/m_c^{(s)2} > > 3{,}6$, причем в пределе $\alpha \to \infty$ это отношение стремится к бесконечности.

Этим завершается динамическая реализация основных результатов линейной σ-модели. Подчеркнем, что так как в симметричной фазе массы скалярных и псевдоскалярных мезонов (тахионов) совпадают, то все различие между ними в стабильной фазе определяется наличием у кварка динамической массы (т. е. спонтанным нарушением киральной симметрии). Довольно большое значение отношения $m^2/m_c^{(s)2}$ в согласии с экспериментом указывает на существенную разницу между динамикой псевдоскалярных и скалярных мезонов. Если первые являются чисто релятивистскими системами с большим дефектом масс, то вторые (в силу того, что динамическая масса кварка m значительно превосходит критическую массу $m_c^{(s)}$, при которой скалярные мезоны были бы безмассовыми), по-видимому, можно считать нерелятивистскими объектами. Это в свою очередь можно рассматривать как некое обоснование применимости потенциала Ферми — Брейта для описания скалярных мезонов [90] (экспериментальные значения масс нестранных скалярных мезонов $M_s \simeq 1$ ГэВ хорошо согласуются с результатами, полученными с помощью потенциала Ферми — Брейта).

Некоторые дополнительные аспекты динамики спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД, в частности связь рассматривавшегося здесь механизма нарушения с другими механизмами, обсуждаются в заключении.

6. ГЕНЕРАЦИЯ МАССЫ ФЕРМИОНОВ И ДИНАМИКА МАЛЫХ РАССТОЯНИЙ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ [33, 35 — 37, 39]

Проблема динамики малых расстояний в КЭД тесно связана с проблемой ультрафиолетовых расходимостей [68, 76] и вопросом существования локального предела в этой теории [91, 92]. Как следует из общего анализа ренормализационной группы [68, 93, 94], существование этого предела в квантовой теории поля возможно лишь при наличии ультрафиолетовостабильной неподвижной точки у бегущей константы связи. В неабелевых калибровочных теориях такой точкой является точка нуль (что отражает свойство асимптотической свободы неабелевых теорий [1]). В абелевых калибровочных теориях, где бегущая константа связи растет с уменьшением расстояний, ситуация коренным образом меняется и вопрос о существовании ультрафиолетовостабильной неподвижной точки в этих теориях не может быть решен в рамках теории возмущений. В настоящем разделе эта проблема рассматривается с точки зрения динамики спонтанного нарушения киральной симметрии в КЭД.

Вопрос о существовании ультрафиолетовостабильной неподвижной точки тесно связан с проблемой перенормировки заряда. В каждом порядке теории возмущений по константе связи в КЭД доказано следующее соотношение [68, 76]:

$$\alpha_\mu = Z_{3\mu}\alpha_\Lambda, \tag{106}$$

где α_μ — перенормированная константа связи, соответствующая точке вычитания μ; α_Λ — затравочная константа связи; $Z_{3\mu}$ — константа перенормировки фотонного пропагатора. Результаты теории возмущений должны при малой константе связи α_Λ сохраниться и в точной теории, но при большой константе связи они, в принципе, могут измениться. Ниже будет рассмотрен возможный механизм нарушения перенормировочного соотношения (106), связанный с динамикой генерации массы у фермиона.

Как уже подробно обсуждалось в разд. 3, динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в калибровочных теориях тесно связана с явлением падения на центр в квантовой механике. Причем если в неабелевых теориях ввиду свойства асимптотической свободы возникает динамическое обрезание сверхкритических кулоноподобных сил на малых расстояниях, то в КЭД поляризация вакуума такого обрезания не обеспечивает. Прежде чем обсуждать следствие этого для самой КЭД, обсудим с точки зрения теории перенормировок задачу уравнения Дирака для безмассового ($m = 0$) электрона в кулоновском поле [37].

При значениях $\frac{Ze^2}{4\pi} < 1$ ($Z < Z_c \simeq 137$) масштабная инвариантность этого уравнения приводит к отсутствию водородоподобных стационарных уровней. В этом случае имеется непрерывный спектр с энергией $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$ («море» Дирака). Однако для значений $Z > Z_c$ ситуация коренным образом меняется: для этих значений имеет место явление падения на кулоновский центр, и в этом случае необходимо доопределить задачу и ввести обрезание на малых расстояниях. Если использовать обрезание вида

$$V_k(r) = -\alpha/r \to V(r) = -\alpha\left[\frac{\theta(r-r_0)}{r} + \frac{\theta(r_0-r)}{r_0}\right]; \quad \alpha = \frac{Ze^2}{4\pi}, \tag{107}$$

то при $\alpha > 1$ возникают квазистационарные уровни с энергией

$$\varepsilon_0^{(n)} \simeq a\Lambda(\sin\beta - i\cos\beta)\exp\left(\frac{-\pi n}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right); \quad \Lambda = r_0^{-1}; \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{108}$$

где параметры $a \simeq 0{,}4$; $\beta \simeq -1{,}004\cdot\frac{\pi}{2}$. Волновая функция, соответствующая этим состояниям, выражается через функцию Уиттекера

$$W_{\varkappa_2, i\mu}(x), \tag{109}$$

где $x = 2i\varepsilon r$; $\varkappa_2 = \frac{1}{2} - i\alpha$; $\mu = (\alpha^2 - 1)^{1/2}$. При малых $|x|$ эта функция имеет вид [95]

$$W_{\varkappa_2,\, i\mu} \simeq x^{1/2} \left(\frac{2\pi}{\mu\, \mathrm{sh}\, 2\pi\mu}\right)^{1/2} \frac{1}{\Gamma(i)} \cos[\mu \ln x - \arg \Gamma(2i\mu)]. \quad (110)$$

Для сверхкритических значений $\alpha > 1$ в локальном пределе $\Lambda \to \infty$ энергия $\varepsilon_0^{(n)}$ расходится, а волновая функция на малых расстояниях осциллирует [см. (110)], причем число осцилляций равно бесконечности, что является типичным проявлением ситуации падения на центр. Для устранения расходимостей в энергии необходимо провести операцию перенормировки. Эта операция означает такой выбор зависимости параметров лагранжиана от параметра обрезания Λ, чтобы в пределе $\Lambda \to \infty$ все наблюдаемые (в данном случае значения энергии $\varepsilon_0^{(n)}$) оставались конечными. Для безмассового уравнения Дирака имеется единственный такой параметр — константа связи α. В пределе $\Lambda \to \infty$; $\varepsilon_0^{(n)} < \infty$ значение

$$\alpha^2(\Lambda) = 1 + \frac{\pi^2}{\ln^2 \dfrac{a\Lambda}{|\varepsilon_0^{(1)}|}} \to 1 \quad (111)$$

фиксировано, волновая функция

$$W_{\varkappa_2,\, i\mu} \to W_{\varkappa_2,\, 0} \underset{|x| \ll 1}{\simeq} -\frac{x^{1/2} \ln x}{\Gamma(i)} \quad (112)$$

и все уровни с $n \geqslant 2$ исчезают ($\varepsilon_0^{(n)} \to 0$; $n \geqslant 2$). Любопытно, что в результате проведения этой перенормировочной процедуры меняется форма волновой функции [ср. (110) и (112)], в частности исчезают осцилляции. Физическая причина этого ясна: снимая обрезание и удерживая энергию конечной, мы избавляемся от явления падения на центр и как следствие исчезает его признак — осцилляции. В связи с этим отметим следующее. Соотношение перенормировки для функций Грина в теории возмущений имеет вид ($\{p\} \equiv \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$) [68, 76]

$$G_n^{(\mu)}(\{p\}, \mu, g_\mu) = Z(\mu/\Lambda, g_\mu)\, G_n^{(\Lambda)}(\{p\}, \Lambda, g_\Lambda) + \text{степенные поправки}. \quad (113)$$

Поэтому с точностью до малых степенных поправок $\sim\mu/\Lambda$, p/Λ функциональная форма перенормированной $G_n^{(\mu)}$ и неперенормированной $G_n^{(\Lambda)}$ функций Грина как функций импульсов $\{p\}$ является одной и той же при больших конечных Λ. Как видно из сравнения выражений (110) и (112), это свойство не имеет места для рассмотренного выше квантовомеханического примера.

С точки зрения ренормализационной группы [68, 93, 94] предельное значение

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \alpha_\Lambda = 1$$

является ультрафиолетовостабильной неподвижной точкой. Физический смысл критического значения $\alpha_c = 1$ состоит в том, что оно разделяет две области α: при $\alpha < \alpha_c$ никаких ультрафиолетовых расходимостей в задаче не возникает, при $\alpha > \alpha_c$ имеет место падение на центр и появляются ультрафиолетовые расходимости в энергии квазистационарных уровней. Наша цель — указать, что подобная ситуация возможна и в квантовой теории поля.

Рассмотрим в рамках модели, сформулированной в разд. 4, уравнение для голдстоуновского бозона в поперечной калибровке. Для калибровочной группы U (1) оно имеет вид уравнения (76), в котором $\alpha \to \frac{3}{4}\alpha$:

$$(q^2 + m^2)\chi_1^{(p)} = \frac{3\alpha}{4\pi^3}\int\limits_{\delta}^{\Lambda} \frac{d^4k}{(q-k)^2}\chi_1^{(p)} \qquad (114)$$

(мы заменили здесь обозначение верхнего предела интегрирования с σ на Λ, чтобы подчеркнуть разный смысл этих параметров для случаев неабелевой и абелевой калибровочных групп). Для простоты рассмотрим это уравнение при $\delta = 0$. Как показано в приложении I, решением этого уравнения при $\delta = 0$ является функция

$$\chi_1^{(p)} = (q^2 + m^2)^{-1} F\left(\frac{1}{2} + i\beta, \frac{1}{2} - i\beta, 2; -q^2/m^2\right), \qquad (115)$$

где $\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha}{\pi} - 1\right)^{1/2}$; F — гипергеометрическая функция, а спектр масс при $(\alpha - \pi/3)/\alpha \ll 1$ имеет вид

$$m^{(s)2} \simeq 16\Lambda^2 \exp\left(-\frac{\pi s}{\beta}\right), \quad s = 1, 2, \ldots, \qquad (116)$$

причем стабильному вакууму соответствует максимальное значение $m^{(1)}$. В пределе $\Lambda \to \infty$ масса m остается конечной, если

$$\alpha(\Lambda) = \frac{\pi}{3} + \pi^3/3\ln^2\frac{4\Lambda}{m} \qquad (117)$$

стремится к критическому значению $\alpha_c = \pi/3$, разделяющему безмассовую и массивную фазы теории. Отметим, что, как и в задаче сверхкритического кулоновского центра, перенормировка (117) меняет форму волновой функции. Действительно, используя асимптотическое разложение для гипергеометрических функций [95], находим, что при больших q^2

$$\chi_1^{(p)} \simeq \frac{1}{q^2}\left(\frac{m^2}{q^2}\right)^{1/2}\left(\frac{\operatorname{cth}\pi\beta}{\pi\beta\left(\beta^2 + \frac{1}{4}\right)}\right)^{1/2} \sin\left(\beta\ln\frac{q^2}{m^2} - \operatorname{arctg}2\beta + \Sigma(\beta)\right),$$

где

$$\Sigma(\beta) = \arg\left[\Gamma(1 + 2i\beta)/\Gamma^2\left(\frac{1}{2} + i\beta\right)\right],$$

а в результате перенормировки (117) характерные осцилляции исчезают:

$$\chi_1^{(p)} \to (q^2+m^2)^{-1} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2; -\frac{q^2}{m^2}\right) \underset{q^2\to\infty}{\approx} \frac{2}{\pi q^2}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)^{-1/2} \ln\frac{q^2}{m^2}.$$

С точки зрения ренормализационной группы $\alpha_c = \pi/3$ есть ультрафиолетовостабильная неподвижная точка. Появление этой точки уже в лестничном приближении вызвано динамикой, которую нельзя получить по теории возмущений. В частности, так как в этом приближении константа перенормировки фотонного пропагатора $Z_3 = 1$, а перенормировка константы связи тем не менее происходит [см. (117)], то перенормировочное соотношение теории возмущений (106) здесь не выполняется. Подчеркнем, что подобное явление может иметь место лишь при достаточно больших значениях затравочной константы связи α_Λ, когда возникает ситуация типа падения на центр; при малых значениях α_Λ подобных отклонений от результатов теории возмущений не возникает. Подчеркнем также, что причина появления массовой расходимости (116) является иной, чем в случае ультрафиолетовых петлевых расходимостей теории возмущений: причина появления последних связана с наличием в теории поля процессов с несохранением числа частиц, появление же расходимости (116) связано с сингулярным характером на малых расстояниях обменного взаимодействия, сохраняющего число частиц. В этом смысле эту расходимость можно назвать квантовомеханической *. Прежде чем обсуждать следствия этого явления для КЭД, мы рассмотрим некоторые двумерные модели, в которых имеет место аналогичное явление.

Обсуждавшееся выше явление возникновения дополнительных ультрафиолетовых расходимостей для сверхкритических значений затравочной константы связи в КЭД было рассмотрено в [35]. Год спустя в [98] был указан пример точно решаемой двумерной модели

* Отметим, что в проведенном рассмотрении важную роль играет выбор корректного перехода к локальному пределу $\Lambda \to \infty$ в уравнении (114). Этот выбор тесно связан с так называемой проблемой Голдстейна [96]. В [96] рассматривалось уравнение (114) с $\Lambda = \infty$ и $\delta = 0$. Решением этого уравнения при всех значениях α является функция (115). Возникает парадоксальная ситуация: уравнение Бете — Солпитера (114) допускает решение, соответствующее безмассовому парапозитронию (т. е. голдстоуновскому бозону, соответствующему нарушению киральной симметрии) при сколь угодно малой константе связи α. Объяснение этого парадокса можно получить, если учесть условия сохранения аксиально-векторного тока (11). Как уже отмечалось в разд. 2, переход к локальному пределу $\Lambda \to \infty$ непосредственно в уравнении Бете — Солпитера не гарантирует сохранения этого тока и поэтому не все решения уравнения с $\Lambda = \infty$ отвечают голдстоуновскому бозону. При учете условия сохранения возникает картина с ультрафиолетовостабильной неподвижной точкой, обсуждавшаяся выше. Отметим, что аналогичная ситуация с выбором процедуры перехода к локальному пределу встречается и в других задачах КЭД. Так, в [97] неоднозначность такого перехода обсуждалась в задаче вычисления собственной энергии электрона при учете гравитации.

(безмассовой модели Тирринга), где реализуется подобное явление. Ниже мы приведем пример другой двумерной модели (модели синус-Гордона), где также имеет место это явление [39]. Этот пример позволит лучше представить ситуацию и для интересующего нас случая четырехмерной КЭД.

Гамильтонова плотность модели синус-Гордона имеет вид [99]

$$\mathscr{H} = N_m \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_1 \varphi)^2 - \frac{\varkappa}{g^2} \cos g\varphi \right], \tag{118}$$

где π — канонический импульс; N_m — знак нормального упорядочивания со спариванием при равных временах

$$\Delta(x_1, m) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{\sqrt{k_1^2 + m^2}} \exp(-ik_1 x_1). \tag{119}$$

Легко видеть, что из-за двумерности пространства операция нормального упорядочивания в гамильтоновой плотности устраняет все петлевые ультрафиолетовые расходимости теории возмущений. Однако, как было показано в [99], при $g^2 > 8\pi$ эта модель не имеет основного состояния. Покажем, что причиной этого является то, что для таких сверхкритических значений g^2 в этой модели появляются дополнительные ультрафиолетовые расходимости, аналогичные тем, которые возникают в ситуации падения на центр.

Введем в интеграл (119) параметр обрезания Λ

$$\Delta^{(\Lambda)}(x_1, m) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\Lambda}^{+\Lambda} \frac{dk_1}{\sqrt{k_1^2 + m^2}} \exp(-ik_1 x_1); \tag{120}$$

$$\Delta^{(\Lambda)}(0, m) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{m} \right). \tag{121}$$

Параметр обрезания Λ введен по пространственной координате импульса. В евклидовом пространстве такое обрезание имитирует анизотропную решетку (временная ось непрерывна). В связи с этим напомним, что характер фазовой диаграммы не зависит от формы решетки (свойство универсальности фазовых переходов [94]).

Следуя работе [99], в качестве пробного вакуума выберем вакуум свободного скалярного поля с пробной массой μ

$$\varphi^-(x_1, \mu) \mid 0, \mu \rangle = \pi^-(x_1, \mu) \mid 0, \mu \rangle = 0. \tag{122}$$

Используя явный вид спаривания (120), находим

$$\mathscr{H} = N_\mu \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\partial_1 \varphi)^2 - \frac{\varkappa}{g^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right)^{g^2/8\pi} \left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \mu^2}} \right)^{g^2/4\pi} \cos g\varphi \right] + \\ + \frac{1}{4\pi} \Lambda \left(\sqrt{\Lambda^2 + \mu^2} - \sqrt{\Lambda^2 + m^2} \right). \tag{123}$$

Поэтому

$$\varepsilon_v(\Lambda) = \langle 0, \mu \mid \mathscr{H} \mid 0, \mu \rangle = \frac{1}{4\pi} \Lambda \left(\sqrt{\Lambda^2+\mu^2} - \sqrt{\Lambda^2+m^2}\right) - \\ - \frac{\varkappa}{g^2} \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{g^2/8\pi} \left(\frac{\Lambda+\sqrt{\Lambda^2+m^2}}{\Lambda+\sqrt{\Lambda^2+\mu^2}}\right)^{g^2/4\pi}. \tag{124}$$

В пределе $\Lambda \to \infty$ получаем выражение работы [99]

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{1}{8\pi}(\mu^2 - m^2) - \frac{\varkappa}{g^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{g^2/8\pi}. \tag{125}$$

При $g^2 > 8\pi$ это выражение не ограничено снизу: $\varepsilon_v(\infty) \to -\infty$ при $\mu^2 \to \infty$. Поэтому для таких сверхкритических g^2 локальная теория (с $\Lambda = \infty$) не имеет основного состояния (коллапс). В то же время, как видно из выражения (124), в теории с обрезанием $\varepsilon_v(\Lambda) \to \to \infty$ при $\mu^2 \to \infty$, т. е. в этом случае явление коллапса места не имеет.

Чтобы лучше понять ситуацию, найдем минимум плотности энергии $\varepsilon_v(\Lambda)$ в теории с обрезанием

$$\frac{d\varepsilon_v(\Lambda)}{d\mu^2} = \frac{1}{8\pi}\left(1+\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)^{-1/2}\left[1 - 4^\nu \frac{\varkappa}{m^2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\nu-1} \times \right. \\ \left. \times \left(1+\sqrt{1+\mu^2/\Lambda^2}\right)^{-2\nu}\right] = 0; \quad \nu = g^2/8\pi. \tag{126}$$

Из (126) получаем:

1) $\nu < 1$: в этом случае абсолютный минимум соответствует значению

$$\mu^2 \simeq \varkappa \left(\frac{m^2}{\varkappa}\right)^{\nu/(\nu-1)}; \tag{127}$$

2) $\nu > 1$: в этом случае значение (127) становится максимумом, а абсолютный минимум соответствует значению

$$\mu^2 \simeq 4^\nu \varkappa \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^{2\nu} + O(\Lambda^2, \Lambda^{2(\nu-1)}). \tag{128}$$

Как видно из выражения (128), при сверхкритических значениях $g^2 > 8\pi$ ($\nu > 1$) в теории появляется дополнительная ультрафиолетовая массовая расходимость. Покажем, что эта дополнительная расходимость может быть устранена подходящим выбором перенормировки параметров $\varkappa$ и g^2.

Из уравнения (126) следует, что

$$\nu = \ln(\mu\varkappa^{-1/2}) / \ln\left[2m^{-1}\mu\left(1+\sqrt{1+\mu^2/\Lambda^2}\right)^{-1}\right]. \tag{129}$$

В пределе $\Lambda \to \infty$; $\mu < \infty$ условие $d^2\varepsilon_v(\Lambda/d(\mu^2)^2 > 0$, гарантирующее, что экстремум есть минимум, принимает вид

$$\nu - 1 < \frac{\mu^2}{2\Lambda^2}\nu. \tag{130}$$

Поэтому в сверхкритической фазе в этом пределе параметры, определяющие минимум, удовлетворяют неравенству

$$0 \leqslant \nu - 1 \simeq \frac{\ln(m\varkappa^{-1/2}) + \mu^2/4\Lambda^2}{\ln(\mu m^{-1}) - \mu^2/4\Lambda^2} < \frac{\mu^2}{2\Lambda^2}\nu. \qquad (131)$$

Отсюда находим, что в локальном пределе $\Lambda \to \infty$ массовый параметр μ остается конечным при условии, что

$$\nu = g^2/8\pi \to 1; \quad \varkappa \to m^2, \qquad (132)$$

причем перенормировка (132) должна осуществляться вдоль таких траекторий в $(g^2, \varkappa)$-плоскости, на которых выполняется неравенство (131).

Смысл соотношения (132) становится ясным, если заметить, что в локальном пределе при $(g^2, \varkappa) = (8\pi, m^2)$ плотность энергии вакуума [см. (125)]

$$\varepsilon_v(\infty) = -m^2/8\pi, \qquad (133)$$

т. е. не зависит от пробного параметра μ. Поэтому при этих значениях g^2 и $\varkappa$ параметр μ произволен.

Таким образом, при $g^2 > 8\pi$ вакуум системы перестраивается [выражение для минимума плотности энергии (127) заменяется выражением (128)], что проявляет себя в появлении массовой расходимости, устранить которую можно дополнительной перенормировкой параметров g^2 и $\varkappa$.

На языке ренормализационной группы эту ситуацию можно описать следующим образом: при $g^2 < 8\pi$ значения $(g^2, \varkappa)$ образуют полуплоскость ультрафиолетовостабильных неподвижных точек и локальный предел существует для всех этих значений (другими словами, ренормгрупповая β-функция [68, 93, 94] при $g^2 < 8\pi$ тождественно равна нулю). В сверхкритической фазе с $g^2 > 8\pi$ появляется дополнительная массовая расходимость, устранить которую можно перенормировкой параметров g^2 и $\varkappa$ (β-функция при $g^2 > 8\pi$ не равна нулю); в этой фазе ультрафиолетовостабильной неподвижной точкой является точка $(g^2, \varkappa) = (8\pi, m^2)$. Отметим, что перестройка вакуума двумерной модели синус-Гордона при $g^2 > 8\pi$ с несколько иной точки зрения рассматривалась в [100].

Вернемся теперь к обсуждению интересующей нас четырехмерной кирально-инвариантной КЭД. В лестничном приближении фазовая диаграмма этой теории в чем-то напоминает диаграмму модели синус-Гордона: при $\alpha < \alpha_c = \pi/3$ в этом приближении ультрафиолетовые расходимости отсутствуют, а β-функция равна нулю, так что значения $\alpha < \alpha_c$ образуют линию неподвижных точек; при $\alpha > \alpha_c$ появляется дополнительная массовая расходимость, необходимо проводить перенормировку константы связи, что отражает себя в нарушении соотношения теории возмущений (106) (в этом приближении $Z_3 = 1$) и в появлении ультрафиолетовостабильной неподвижной точки $\alpha_c = \pi/3$.

Вид фазовой диаграммы в точной теории зависит также и от других перенормировок. Как известно, в безмассовой КЭД с малым затравочным зарядом α_Λ эффекты поляризации вакуума приводят к замене линии неподвижных точек инфракрасностабильной неподвижной точкой $\alpha = 0$ *. Следствием этого является то, что в локальном пределе $\Lambda \to \infty$, когда затравочная константа связи удерживается малой, возникает свободная теория без взаимодействия (ситуация нуль-заряда [91, 92]). Как показывает, однако, анализ динамики лестничного приближения в КЭД и рассмотренных выше двумерных моделей, ситуация существенно может измениться в области сильной связи. В этой области из-за эффектов типа падения на центр (коллапса) появляются дополнительные ультрафиолетовые расходимости, меняющие качественно всю картину. В частности, спонтанное нарушение киральной симметрии в КЭД с необходимостью приводит к появлению безмассового псевдоскалярного голдстоуновского бозона (безмассового парапозитрония) и как следствие к появлению эффективной вершины взаимодействия фермиона и антифермиона с голдстоуновским бозоном, выражающейся через волновую функцию Бете — Солпитера бозона. Поэтому даже экранировка заряда в локальном пределе, вообще говоря, может и не означать полного исключения взаимодействия в теории.

Существенно, что такая перестройка связана с явлением падения на сверхкритический кулоновский центр, существование которого в теории с большой затравочной константой связи выглядит весьма правдоподобным и при выходе за рамки лестничного приближения (напомним, что существование такого явления следует из принципа неопределенности, см. разд. 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были рассмотрены проявления динамики сверхкритических кулоноподобных сил в калибровочных теориях поля. Явление падения на центр, будучи сугубо академическим в нерелятивистской квантовой механике, в релятивистской квантовой теории выступает или как явление рождения пар частиц (релятивистская квантовая механика), или как динамическое нарушение симметрии (квантовая теория поля). Можно сказать, что в релятивистской теории вакуум осуществляет обратную связь: его перестройка, вызываемая достаточно сильным взаимодействием, приводит к эффективному ослаблению этого взаимодействия.

В физике адронов динамика сверхкритических кулоноподобных сил обеспечивает спонтанное нарушение киральной симметрии. В рамках конкретной модели были получены массовые соотношения

* Этот результат следует уже из формулы однологарифмического приближения $\alpha_m = \alpha_\Lambda [1 + \alpha_\Lambda \ln(\Lambda^2 m^{-2})/3\pi]^{-1}$. В пределе $m \to 0$ физический заряд α_m стремится к нулю.

для псевдоскалярных мезонов, найдена связь между динамической массой кварков и вакуумным средним $\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0 \rangle$, дано качественное описание скалярных мезонов. Отметим также, что, как было указано в [101], учет сверхкритических кулоноподобных сил между кварками может в принципе объяснить значения электрической поляризуемости псевдоскалярных мезонов, полученные в рамках киральных моделей [13].

Полезно сравнить рассмотренный механизм спонтанного нарушения киральной симметрии с двумя другими механизмами нарушения, интенсивно обсуждавшимися в литературе,— инстантонным механизмом [102—105], основанным на использовании инстантонных решений [106] уравнений Янга — Миллса, и механизмом, использующим силы удержания [107—110].

Как известно [81], учет инстантонов приводит к явному нарушению U_{L-R} (1)-симметрии, связанной с синглетным аксиально-векторным током. Однако прямой учет инстантонов не может обеспечить спонтанного нарушения киральной $SU_L(K) \times SU_R(K)$-симметрии, так как при числе кварковых мультиплетов $K \geqslant 2$ вакуумное среднее $\langle 0 \mid \bar{\psi}\psi \mid 0 \rangle$ при прямом учете инстантонов равно нулю [81]. В [102—104] рассматривался механизм спонтанного нарушения киральной симметрии, использующий инстантонные решения в рамках метода Хартри — Фока. Для динамической массовой функции кварка $m(q^2)$ в приближении Хартри — Фока было получено самосогласованное уравнение, допускающее нетривиальное решение. При этом было найдено, что вершина, входящая в уравнение Бете — Солпитера для псевдоскалярных голдстоуновских бозонов, оказывается пропорциональной m^{K-2}. В связи с этим сделаем следующее замечание. Как уже отмечалось, реализация спонтанного нарушения киральной $SU_L(K) \times SU_R(K)$-симметрии означает не только реализацию динамики K^2-1 голдстоуновских бозонов в устойчивой фазе с конденсатом, но и реализацию динамики $2K^2$ тахионов в симметричной фазе (что означает ее нестабильность). По существу, требуется проследить за судьбой этих $2K^2$ мезонов при перестройке вакуума с образованием в нем кирального конденсата. Появление динамической массы у фермиона должно приводить к ослаблению эффективного притяжения между кварком и антикварком в мезоне, в результате чего квадраты масс у $2K^2$ мезонов возрастают и тахионы становятся обычными частицами с вещественной массой (именно это обеспечивает механизм сверхкритических кулоноподобных сил).

Рассмотрим с этой точки зрения инстантонный механизм. Симметричной фазе соответствует решение $m = 0$, и так как вершина уравнения Бете — Солпитера для мезонов, к которой приводит инстантонный механизм, пропорциональна m^{K-2}, то при числе фермионных мультиплетов $K \geqslant 3$ эта вершина в симметричной фазе зануляется. Поэтому при $K \geqslant 3$ инстантонный механизм не приводит к тахионам в симметричной фазе и эта фаза (в рассматриваемом приближении) остается стабильной. Вместе с тем вполне вероятно, что учет инстантоноподобных конфигураций окажется важным для количественного описания динамики скалярных и псевдоскалярных мезонов [105]. В частности, вершина, связанная с инстантонным механизмом, обеспечивает отщепление SU_{L+R} (3)-синглетного псевдоскалярного состояния от октета голдстоуновских бозонов. Не исключено, что учет вклада канала аннигиляции в массу синглетного псевдоскалярного мезона, произведенный в работах [40, 42, 82] (см. разд. 5), имитирует учет вклада такой вершины. Поэтому представляло бы интерес рассмотреть систему уравнений Бете — Солпитера, включающих как вершину, связанную с обменом глюонов, так и вершину, связанную с инстантоноподобными конфигурациями.

Обсудим теперь ту роль, которую в динамике спонтанного нарушения киральной симметрии могут играть силы удержания. Растущие с расстоянием удерживающие силы могут привести только к образованию кварк-антикварковых связанных состояний с квадратом массы $M^2 > 4m^2$, т. е. с **отрицательным** значением дефекта квадрата массы $D = 4m^2 - M^2$ (действительно, энергия цветного поля, соответствующего силам удержания, является положительной). Однако динамика спонтанного нарушения киральной симметрии должна приводить к образованию в симметричной фазе тахионов с $M^2 < 0$ и в фазе с конденсатом — к образованию голдстоуновских бозонов с $M = 0$. Если принять стандартную картину спонтанного нарушения, когда в симметричной фазе масса кварка $m = 0$, а в фазе с конденсатом $m > 0$, то дефект квадрата массы $D = 4m^2 - M^2$ как тахионов, так и голдстоуновских бозонов является положительным. Силы удержания не могут привести к образованию таких связанных состояний.

Эту трудность, однако, можно, в принципе, обойти [109]. В симметричной фазе пропагатор кварка имеет вид

$$S(q) = -\frac{\hat{q}}{q^2 A(q^2)}. \tag{134}$$

Структура такого пропагатора как-будто указывает, что в этой фазе кварки являются безмассовыми. Представим, однако, что функция $A(q^2) \simeq (q^2 - m^2)/q^2$. Тогда

$$S(q) \simeq -\frac{\hat{q}}{q^2 - m^2}. \tag{135}$$

Структура (135) соответствует симметричной фазе [массовый член $B(q^2)$ отсутствует], однако кварки не являются безмассовыми. Если принять, что $m^2 < 0$ (т. е. кварки являются тахионами), то из таких кварка и антикварка силы удержания, в принципе, могут образовать бесцветный тахион с квадратом массы M^2 таким, что $M^2 > 4m^2$; в согласии с вышеприведенным общим аргументом дефект квадрата массы D такого связанного состояния был бы отрицательным. Аналогично можно представить, что в фазе с киральным конденсатом, где $S^{-1}(q) = -\hat{q}A(q^2) + B(q^2)$, силы удержания из таких тахионных кварка и антикварка образуют голдстоуновские бозоны с отрицательным дефектом $D = 4m^2$ *.

В связи с этим отметим, что в работе [110] исследовалась модель с глюонным пропагатором вида $M_0^2/(k^2)^2$ [в евклидовом пространстве такому пропагатору соответствует линейно растущий потенциал взаимодействия $V \sim r_E$; $r_E = (\mathbf{x}^2 + x_4^2)^{1/2}$]. В согласии со сказанным выше было показано, что в такой модели уравнения Швингера — Дайсона лестничного приближения допускают решение, соответствующее спонтанному нарушению киральной симметрии, при условии, что фермион является тахионом.

Наиболее прямые подтверждения возможности спонтанного нарушения киральной симметрии силами удержания дают расчеты в калибровочных теориях на решетке в пределе сильной связи (затравочная константа связи $g_\Lambda^2 \to \infty$) [107] или в пределе большого числа ($d \to \infty$) измерений пространства [108].

Мы подходим к центральному вопросу: какова динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в реальной (четырехмерной, непрерывной) квантовой хромодинамике? Нет надобности говорить, что в настоящее время окончательного ответа на этот вопрос нет. Более того, нет даже строгого доказательства существования такого нарушения в КХД. И тем не менее есть веские основания для оптимистической оценки ситуации в целом. Во-первых, существуют убедительные аргументы, связанные с соотношениями 'т Хофта для аномалий [112], в пользу нарушения киральной симметрии в КХД с числом кварковых ароматов $K \geqslant 3$. Во-вторых, рассмотренные выше механизмы нарушения киральной симметрии согласуются с твердо установленными динамическими свойствами КХД и естественно «вписываются» в эту теорию. Можно сказать, что в настоящее время не известно ни одной серьезной причины, по которой киральная симметрия в КХД не была бы нарушенной.

Уместно выделить две крайние точки зрения на механизм спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД:

1) динамика всех адронов подобна и определяется силами удержания; проявления других сил в формировании адронов незначительны (выражением этой точки зрения является модель кваркового мешка [78, 79]). В частности, нарушение киральной симметрии определяется силами удержания;

2) существуют определенные феноменологические свидетельства (см., например, [105, 113]) в пользу того, что динамика легких адронов значительно отличается от динамики адронов, состоящих из тяжелых кварков. К тому же многие свойства обычных адронов можно описать,

* В теориях с удержанием наличие цветных тахионов (в частности, кварков) не означает, что вакуум системы нестабилен (подробное обсуждение этого вопроса см. в [111]).

не используя концепции удержания [90]. Поэтому нельзя исключить, что расстояния, на которых формируется динамика легких адронов, меньше масштаба удержания (гипотеза второго масштаба в КХД [38—40, 60, 104, 105, 113]). Другие силы (кулоноподобные, инстантонные и т. д.) формируют эту динамику и, в частности, динамику спонтанного нарушения киральной симметрии.

Нельзя, конечно, исключить и возможности промежуточной ситуации, когда динамика спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД формируется как силами удержания, так и другими силами *.

В настоящее время нет какого-либо факта или достаточно общего аргумента, позволившего бы выбрать одну из перечисленных выше возможностей. Важную роль при решении этого вопроса, по-видимому, будут играть исследования калибровочных теорий на решетке с помощью ЭВМ. К сожалению, надежность этих исследований в задачах, касающихся свойств легких адронов, пока еще недостаточно высока.

В работах [46—48] механизм динамического нарушения симметрии, связанный со сверхкритическими кулоноподобными силами, был перенесен на так называемые «обрушивающиеся» (tumbling) калибровочные теории поля [49, 114] — теории без фундаментальных скалярных полей, в которых образование конденсатов в вакууме приводит к спонтанному нарушению не только глобальной симметрии (как это происходит при образовании кирального конденсата в КХД), но также и калибровочной симметрии (эти теории вызывают большой интерес в связи с проблемой калибровочных иерархий [2, 24]). Отсылая за подробностями к оригинальным работам [46—48], здесь остановимся на принципиальных моментах этого подхода.

Так как динамика формирования конденсатов в калибровочных теориях является весьма сложной, представляется необходимым развитие качественного описания этого явления. Первый шаг в этом направлении был сделан Рэби, Димопулосом и Сасскайндом, предложившими для определения остаточной симметрии вакуума критерий максимально притягивающего канала (МПК) [49]. В основе критерия лежат следующие предположения:

1) для данного энергетического масштаба E бифермионный конденсат $\{M\}\times\{N\}\to\{I\}$ (символы $\{M\}$, $\{N\}$ и $\{I\}$ относятся к представлениям калибровочной группы для фермионов и конденсата соответственно) может возникнуть, если выполняется условие

$$\frac{1}{2}\alpha(E)\,[C_{\{M\}}+C_{\{N\}}-C_{\{I\}}[\,>\alpha_c\sim 1, \tag{136}$$

где $\alpha(E)$ — бегущая константа связи; $C_{\{R\}}$ — квадратичный оператор Казимира представления $\{R\}$;

* Отметим также, что описание спонтанного нарушения киральной симметрии может выглядеть по-разному в разных калибровках. В частности, в различных калибровках доминирующим могут быть различные механизмы.

2) из всех конденсатов, удовлетворяющих этому условию, в вакууме образуется лишь конденсат с максимальным значением величины

$$C^{\{I\}}_{\{M\}\{N\}} = \frac{1}{2}\left[C_{\{M\}} + C_{\{N\}} - C_{\{I\}}\right]. \tag{137}$$

Хотя критерий МПК приводит к ряду интересных предсказаний и открывает путь для решения проблемы калибровочных иерархий, он оставляет без ответа основной вопрос о динамике, стоящей за образованием конденсатов. Более того, в ряде случаев критерий МПК не может однозначно отобрать тип остаточной симметрии вакуума [115].

В случае кирального конденсата КХД комбинация $C^{\{1\}}_{\{3\}\{3^*\}} = 4/3$. Для этого конденсата динамика сверхкритических кулоноподобных сил реализует предположение (136). Представляется поэтому естественным распространить этот механизм на общий случай «обрушивающихся» калибровочных теорий. В развитом в работах [46—48] подходе принимается, что, так же как и в случае нарушения киральной симметрии в КХД, динамика, ответственная за образование бифермионных конденсатов в обрушивающихся теориях, формируется на «средних» расстояниях, где действуют сверхкритические кулоноподобные силы.

Задачу динамического нарушения симметрии условно можно разбить на две части. Во-первых, следует показать неустойчивость симметричной фазы теории, т. е. наличие в ней тахионов. Во-вторых, определить устойчивую фазу с конденсатом, в которой все тахионы исчезают, причем часть из них, соответствующая генераторам нарушенной симметрии, переходит в безмассовые голдстоуновские бозоны. Уравнения для фазы с конденсатом можно получить, используя метод эффективного действия для составных полей [116], который, по существу, совпадает с разработанными в статистической физике методом квазисредних Боголюбова [117] и методом аномальных гриновских функций Горькова [118]. На этом пути удается не только получить динамическую реализацию критерия МПК, но и описать стабильный вакуум для случаев, когда этот критерий не приводит к определенному ответу. В частности, выясняется, что критерий МПК не всегда может определить остаточную симметрию стабильного вакуума по той причине, что он недостаточно учитывает динамику перестроенной фазы с конденсатом. Приведенный анализ показывает, что устойчивость вакуума тем выше, чем большие значения принимают динамические массы и чем большее число фермионов приобретает массу. Этот вывод может быть использован при анализе динамики различных калибровочных моделей без фундаментальных скалярных полей.

В заключение отметим, что в настоящем обзоре мы совсем не касались такого важного вопроса, как динамика образования глюонного конденсата в калибровочных теориях (существование такого конденсата в вакууме квантовой хромодинамики следует из правил сумм для функций Грина КХД [22]). По нашему мнению, полученные здесь результаты (см., например, [34, 102, 119—121]), в частности результаты, касающиеся связи этой динамики с проблемой удержания, пока следует рассматривать как предварительные.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

В этом приложении будет проанализировано уравнение для волновой функции голдстоуновского бозона в поперечной калибровке [см. (77)]

$$(x^2+a)\,\chi_1^{(p)}(x)=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_{\rho}^{1} dy^2\left[\frac{\theta(x^2-y^2)}{x^2}+\frac{\theta(y^2-x^2)}{y^2}\right]y^2\chi_1^{(p)}(y), \qquad (\text{П}.1)$$

где $a = m^2/\sigma^2$. Покажем прежде всего, что $da/d\alpha > 0$, т. е. что динамическая масса растет с ростом константы связи α.

Перейдем к функции $\chi' = x\,(x^2+a)^{1/2}\,\chi_1^{(p)}$. Тогда уравнение (П.1) принимает вид

$$\chi'(x^2)=\alpha\int\limits_{\rho}^{1} dy^2 K(x^2,\ y^2)\,\chi'(y^2), \qquad (\text{П}.2)$$

где симметричное ядро

$$K(x^2,\ y^2)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\theta(x^2-y^2)}{x^2}+\frac{\theta(y^2-x^2)}{y^2}\right]\frac{xy}{[(x^2+a)(y^2+a)]^{1/2}} \qquad (\text{П}.3)$$

определяет положительный оператор $\hat{K}$.

Перепишем уравнение (П.2) в операторной форме

$$\alpha^{-1}\,|\,a,\ \alpha\rangle=\hat{K}\,|\,a,\ \alpha\rangle; \qquad (\text{П}.4)$$

$$\langle a,\ \alpha\,|\,a,\ \alpha\rangle=1. \qquad (\text{П}.5)$$

Из уравнений (П.4) и (П.5) следует, что

$$\frac{d\alpha}{da}=-\alpha^2\left\langle a,\ \alpha\left|\frac{d\hat{K}}{da}\right|a,\ \alpha\right\rangle. \qquad (\text{П}.6)$$

Прямым вычислением можно убедиться в том, что оператор $-\,d\hat{K}/da$ является положительным. Поэтому

$$d\alpha/da>0, \qquad (\text{П}.7)$$

что и требовалось доказать.

Исследуем теперь массовый спектр уравнения (П.1) и, в частности, покажем, что число нетривиальных решений этого уравнения есть

$$n=[\pi^{-1}(-\beta\ln\rho^{-1}+2\,\text{arctg}\,2\beta)], \qquad (\text{П}.8)$$

где $\beta=\sqrt{\alpha/\pi-1/4}$, а символ $[C]$ означает целую часть числа C.

Дифференцируя уравнение (П.1) по x^2, находим, что оно эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx^2}\left\{x^4\frac{d}{dx^2}\,[(x^2+a)\,\chi_1^{(p)}]\right\}+\frac{\alpha}{\pi}x^2\chi_1^{(p)}=0 \qquad (\text{П}.9)$$

с двумя граничными условиями

$$x^4 \frac{d}{dx^2} [(x^2+a)\, \chi_1^{(p)}] \Big|_{x^2=\rho} = 0; \qquad (\text{П}.10)$$

$$\left\{x^2 \frac{d}{dx^2} [(x^2+a)\, \chi_1^{(p)}] + (x^2+a)\, \chi_1^{(p)}\right\} \Big|_{x^2=1} = 0. \qquad (\text{П}.11)$$

Общее решение уравнения (П.9) имеет вид

$$U \equiv (x^2 + a)\, \chi_1^{(p)} = c_1 u_1 + c_2 u_2, \qquad (\text{П}.12)$$

где

$$u_1 = F\,(r, r^*, 2; -\tilde{x}^2); \qquad (\text{П}.13)$$

$$u_2 = \tilde{x}^{-2r} F\,(r, -r^*, 2r; -\tilde{x}^{-2}) + \tilde{x}^{-2r^*} F\,(r^*, -r, 2r^*; -\tilde{x}^{-2}); \qquad (\text{П}.14)$$

$$r = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\beta; \; r^* = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\,\beta; \; \tilde{x}^2 = q^2/m^2;$$

F — гипергеометрическая функция.

Рассмотрим вначале случай $\rho = 0$. Из граничного условия (П.10) при $\rho = 0$ находим, что $c_2/c_1 = 0$, так что

$$U = cF\,(r, r^*, 2; -\tilde{x}^2). \qquad (\text{П}.15)$$

Второе граничное условие (П.11) определяет массовый спектр уравнения. Аналитический ответ можно получить в пределе, когда $a = m^2/\sigma^2 \ll 1$. Используя в этом случае асимптотическое разложение для гипергеометрической функции [95], из (П.11) находим уравнение

$$\sin\,(\beta \ln a - \Sigma\,(\beta)) = 0, \qquad (\text{П}.16)$$

где $\Sigma\,(\beta) = \arg\,[\Gamma\,(2r)/\Gamma^2\,(r)]$; Γ — гамма-функция Эйлера.

Из (П.16) находим массовый спектр

$$m^{(s)^2} \simeq \sigma^2 \exp\,[-\pi s + \Sigma\,(\beta)/\beta] \underset{\beta \ll 1}{\simeq} 16\sigma^2 \exp\,(-\pi s/\beta), \quad s = 1, 2 \ldots \qquad (\text{П}.17)$$

Перейдем теперь к случаю $\rho > 0$. В этом случае из граничного условия (П.10) находим

$$c_2/c_1 = -u_1'/u_2' \,|_{x^2=\rho}. \qquad (\text{П}.18)$$

Из второго граничного условия (П.11) получаем уравнение, определяющее массовый спектр:

$$\Phi = A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0, \qquad (\text{П}.19)$$

где

$$A_i = \left(x^2 \frac{du_i}{dx^2} + u_i\right)\Big|_{x^2=1}; \; B_i = -x^2 \frac{du_i}{dx^2}\Big|_{x^2=\rho}, \; i = 1, 2. \qquad (\text{П}.20)$$

Покажем теперь, как из уравнения (П.19) следует соотношение (П.8).

Рассмотрим уравнение (П.19) при $a < \rho$. Используя степенные разложения для гипергеометрических функций [95], находим, что

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\,(-y)^{n+1}; \; y = a/\rho < 1. \qquad (\text{П}.21)$$

Явный вид коэффициентов D_n приведен в [38]. Для наших целей достаточно знать, что коэффициент

$$D_0=\eta \sin (\beta \ln \rho^{-1}+\ \operatorname{arctg} 2\beta);\ \eta=-\left[(4\beta^2+1)\,\rho\,\frac{\operatorname{cth} \pi\beta}{\pi\beta}\right]^{1/2}\times$$
$$\times \cos [\Sigma(\beta)-2 \operatorname{arctg} 2\beta]. \qquad \text{(П.22)}$$

Как видно из (П.21), появление параметра инфракрасного обрезания ρ приводит к исчезновению осцилляций по переменной $\ln a$ [ср. с (П.16)], что, как будет сейчас показано, приводит к тому, что число нулей у функции Φ является конечным.

Число нетривиальных нулей $y^{(s)}$ в функции Φ при данном значении параметров β и ρ можно определить, если принять во внимание, что: а) как уже было показано выше, значение массы $m^{(s)}$ и поэтому и $y^{(s)}$ растет с ростом параметра β и б) минимальное значение $m^{(s)}=0$. Отсюда следует, что каждый новый уровень массового спектра появляется, когда выполняется следующее условие:

$$y^{-1}\Phi(y)\,|_{y=0}=0, \text{ т. е. } \sin(\beta \ln \rho^{-1}+2 \operatorname{arctg} 2\beta)=0. \qquad \text{(П.23)}$$

Поэтому число уровней спектра равно целой части числа

$$\pi^{-1}(\beta \ln \rho^{-1}+2 \operatorname{arctg} 2\beta).$$

Таким образом, при данных значениях параметров ρ и β массовый спектр имеет вид

$$m^{(s)^2}=\sigma^2 Z^{(s)}(\beta, \rho),\ s=1, 2, \ldots, n, \qquad \text{(П.24)}$$

где

$$n=[\pi^{-1}(\beta \ln \rho^{-1}+2 \operatorname{arctg} 2\beta)].$$

Функции $Z^{(s)}$ являются монотонно растущими функциями параметра β. Эти функции для различных значений параметров β и ρ были рассчитаны на ЭВМ [41].

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Постановка задачи спонтанного нарушения симметрии в заданном приближении возможна при условии, что в этом приближении выполняются тождества Уорда (т. е. законы сохранения), связанные с исследуемой симметрией. В этом приложении будут рассмотрены тождества Уорда для случая спонтанного нарушения киральной симметрии в КХД.

В лестничном приближении в уравнениях, описывающих бифермионные конденсаты, не учитывается прямое взаимодействие между векторными бозонами (в рассматриваемой модели это взаимодействие частично учитывается посредством введения в уравнения параметра обрезания σ), и поэтому структура тождеств Уорда неабелевых теорий (тождеств Уорда—Славнова—Тейлора [1]) совпадает со структурой тождеств квантовой электродинамики.

При спонтанном нарушении киральной $SU_L(K)\times SU_R(K)$-симметрии фермионный пропагатор имеет

$$S_{\alpha i,\,\beta j}(q)=\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}(-\hat{q}A(q^2)+B(q^2))^{-1}, \qquad \text{(П.25)}$$

$\alpha, \beta=1, 2, 3;\ i, j=1, 2, \ldots, K$. В приближении с затравочным глюонным пропагатором и фермион-антифермион-глюонной вершиной

$$\Gamma^a_{1\mu;\,\alpha i,\,\beta j}=\gamma_\mu \delta_{ij}\lambda^a_{\alpha\beta} \qquad \text{(П.26)}$$

уравнения Швингера—Дайсона для фермионного пропагатора в евклидовой области в ковариантной калибровке с калибровочным параметром d имеют вид

$$A(q^2)-1=d\frac{g^2}{3\pi^2}\int dk^2\frac{A(k^2)}{k^2A^2(k^2)+B^2(k^2)}\left[\frac{k^4}{q^4}\theta(q^2-k^2)+\theta(k^2-q^2)\right]; \tag{П.27}$$

$$B(q^2)=(1+d/3)\frac{g^2}{4\pi^2}\int dk^2\frac{B(k^2)}{k^2A^2(k^2)+B^2(k^2)}\left[\theta(k^2-q^2)+\frac{k^2}{q^2}\theta(q^2-k^2)\right]. \tag{П.28}$$

В поперечной калибровке с $d=0$ функция $A(q^2)=1$. Более того, в этой калибровке в силу поперечности глюонного пропагатора уравнения (П.27) и (П.28) не изменяются, если вершину $\Gamma^a_{1\mu;\alpha i,\beta j}$ выбрать в виде

$$\Gamma^a_{1\mu;\alpha i,\beta j}(q_2,\ q_1)=\delta_{ij}\lambda^a_{\alpha\beta}\left(\gamma_\mu+\frac{P_\mu}{P^2}\Phi\right), \tag{П.29}$$

где $P_\mu=q_{2\mu}-q_{1\mu}$; $q_\mu=\dfrac{q_{2\mu}+q_{1\mu}}{2}$; Φ — произвольная лоренц-инвариантная функция.

Вершина (П. 29) при выборе $\Phi=B(q_1^2)-B(q_2^2)$ удовлетворяет тождествам Уорда

$$P^\mu\Gamma^a_{1\mu;\alpha i,\beta j}=\lambda^a_{\alpha\gamma}S^{-1}_{\gamma i,\beta j}(q_1)-S^{-1}_{\alpha i,\gamma j}(q_2)\lambda^a_{\gamma\beta}, \tag{П.30}$$

следующим из сохранения восьми токов калибровочной группы $SU(3)$.

Из тождества Уорда для K^2-1 аксиально-векторных токов следует связь между динамической массовой функцией и волновой функцией Бете — Солпитера голдстоуновского бозона [см. (43)]

$$\chi^r(q)=\chi^r(P,q)\,|_{P=0}=2iF_\pi^{-1}\lambda^r S(q)\gamma_5 B(q^2)S(q). \tag{П.31}$$

В лестничном приближении

$$\chi^r(q)=2iF_\pi^{-1}\lambda^r\gamma_5 B(q^2)/(q^2+m^2). \tag{П.32}$$

Сравнивая уравнения (П.28) и (77), находим с учетом соотношения (П.32), что в поперечной калибровке лестничное приближение соответствует линеаризованной версии уравнения (П.28), когда в знаменателе $B^2\to m^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.** Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
2. **Окунь Л. Б.** Лептоны и кварки. М.: Наука, 1981.
3. **Goldstone J.**— Nuovo cimento, 1961, v. 19, p. 154.
4. **Weinberg S.**— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1264; **Salam A.**— In: Elementary Particle Theory/Ed. N. Svartholm, Stockholm, Almquist and Wiksell, 1968, p. 367.
5. **Gell-Mann M., Levy M.**— Nuovo cimento, 1960, v. 16, p. 705.
6. **де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Россетти К.** Токи в физике адронов: Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
7. **Волков М. К., Эберт Д.**— ЯФ, 1982, т. 36, с. 1265.
8. **Nambu Y., Jona-Lasinio G.**— Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 345.
9. **Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н.**— ДАН СССР, 1961, т. 139, с. 345.
10. **Вакс В. Г., Ларкин А. И.**— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 282.

11. **Адлер С., Дашен Р.** Алгебры токов и их применение в физике частиц: Пер. с англ., М.: Мир, 1970.
12. **Волков Д. В.**— ЭЧАЯ, 1973, т. 4, с. 3.
13. **Волков М. К., Первушин В. Н.** Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов. М.: Атомиздат, 1978.
14. **Мигдал А. А., Поляков А. М.**— ЖЭТФ, 1966, т. 88, с. 135.
15. **Jackiw R., Johnson K.**— Phys. Rev., 1973, v. D8, p. 2386; **Cornwall J. M., Norton R. E.**— Ibid., p. 3338.
16. **Eichten E., Feinberg F.**— Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 3254.
17. **Фомин П. И., Трутень В. И.**— ЯФ, 1969, т. 9, с. 838; **Трутень В. И., Фомин П. И.**— ТМФ, 1970, т. 5, с. 219.
18. **Фомин П. И.**— ЭЧАЯ, 1976, т. 7, с. 687.
19. **Schwinger J.**— Phys. Rev., 1962, v. 125, p. 397; **Higgs P. W.**— Ibid., 1966, v. 145, p. 1156.
20. **Кадышевский В. Г., Матеев М. Д., Чижов М. В.**— ТМФ, 1980, т. 45, с. 358.
21. **Филиппов А. Т.**— УФН, 1982, т. 137, с. 201
22. **Shifman M. A., Vainstein A. I., Zakharov V. I.**— Nucl. Phys., 1979, v. B147, p. 385.
23. **Georgi H., Glashow S. L.**— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 438.
24. **Gildener E.**— Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 1667.
25. **Weinberg S.**— Ibid., 1979, v. D19, p. 1277.
26. **Susskind L.**— Ibid., v. D20, p. 2619.
27. **Dimopoulos S., Susskind L.**— Nucl. Phys., 1979, v. B155, p.237; **Eichten E., Lane K. D.**— Phys. Lett., 1980, v. B90, p. 125; **Farhi E., Susskind L.**— Phys. Rep., 1981, v. C74, p. 279; **Chizhov M. V.**— Phys. Lett., 1982, v. B113, p. 159; **Hosek J.** Preprint JINR E2-82-542, Dubna, 1982.
28. **Peskin M. E.** Preprint Cornell University, CLNS 81/516, 1981.
29. **Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.**— Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 452; **Волков Д. В.**— В кн.: Тр. международного семинара. «Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике». Ч. 2. Калибровочные поля. Препринт ФИ АН СССР № 141, 1971, с. 4; **Волков Д. В., Акулов В. П.**— Письма ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 621; **Wess J., Zumino B.**— Nucl. Phys., 1974, v. B70, p. 39.
30. **Ellis J.** Preprint CERN Ref. TH. 3354, 1982.
31. **Fomin P. I., Miransky V. A.**— Phys. Lett., 1976, v. B64, p. 166.
32. **Gusynin V. P., Miransky V. A.**— Nucl. Phys., 1976, v. B109, p. 526; **Fomin P. I., Gusynin V. P., Miransky V. A., Sitenko Yu. A.**— Nucl. Phys., 1976, v. B110, p. 445.
33. **Гусынин В. П., Миранский В. А., Фомин П. И.**— ДАН УССР, 1978, сер. А, с. 533.
34. **Gusynin V. P., Miransky V. A.**— Phys. Lett., 1978, v. B76, p. 585.
35. **Fomin P. I., Gusynin V. P., Miransky V. A.**— Phys. Lett., 1978, v. B78, p. 136.
36. **Гусынин В. П., Миранский В. А.**— ЯФ, 1980, т. 31, с. 787.
37. **Miransky V. A.**— Phys. Lett., 1980, v. B91, p. 421.
38. **Miransky V. A., Gusynin V. P., Sitenko Yu. A.**— Phys. Lett., 1981, v. B100, p. 157.
39. **Miransky V. A.** Preprint of the Inst. Theoret. Phys., ITP-81-22E, Kiev, 1981.
40. **Miransky V. A., Fomin P. I.**— Phys. Lett., 1981, v. B105, p. 387.
41. **Бугрий Г. В., Гусынин В. П., Миранский В. А., Ситенко Ю. А.**— ЯФ, 1981, т. 34, с. 1384.
42. **Миранский В. А., Фомин П. И.**— ЯФ, 1982, т. 35, с. 1563.
43. **Гусынин В. П., Миранский В. А.**— ЯФ, 1983, т. 37, с. 202.
44. **Miransky V. A.**, Preprint of the Inst. Theor. Phys., ITP-82-138E, Kiev, 1982.
45. **Миранский В. А.**— ЯФ, 1983, т. 38, с. 468.
46. **Gusynin V. P., Miransky V. A., Sitenko Yu. A.**— Phys. Lett., 1983, v. B123, p. 407.

47. **Gusynin V. P., Miransky V. A., Sitenko Yu. A.**— Ibid., p. 428.
48. **Гусынин В. П., Миранский В. А., Ситенко Ю. А.**— ЯФ, 1983, т. 38, с. 522.
49. **Raby S., Dimopoulos S., Susskind L.**— Nucl. Phys., 1980, v. B169, p. 373.
50. **Герштейн С. С., Зельдович Я. Б.**— ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 654.
51. **Попов В. С.**— ЯФ, 1970, т. 12, с. 429.
52. **Зельдович Я. Б., Попов В. С.**— УФН, 1971, т. 105, с. 403.
53. **Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A.**— Phys. Rep., 1978, v. C38, p. 229.
54. **Hey A., Horn D., Mandula J. E.**— Phys. Lett., 1978, v. B80, p. 90.
55. **Finger J., Horn D., Mandula J. E.**— Phys. Rev., 1979, v. D10, p. 3253.
56. **Finger J., Mandula J. E., Weyers J.**— Phys. Lett., 1980, v. B96, p. 367.
57. **Finger J., Mandula J. E.**— Nucl. Phys., 1982, v. B199, p. 168.
58. **Rafelski J.**— Phys. Lett., 1978, v. B79, p. 419.
59. **Fukuda R., Kugo T.**— Progr. Theoret. Phys., 1978, v. 60, p. 565.
60. **Goldman T. J., Haymaker R. W.**— Phys. Lett., 1981, v. B100, p. 276.
61. **Goldman T. J., Haymaker R. W.**— Phys. Rev., 1981, v. D24, p. 724.
62. **Bawin M.**— Phys., Rev. 1981, v. D24, p. 3174.
63. **Amer A., Le Yaouanc A., Oliver L. e. a.**— Z. Phys. C, 1983, v. 17, p. 61.
64. **Ni G. J.**— Nucl. Phys, 1983, v. B211, p. 414.
65. **Adler S.**— Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 2426; **Bell J. S., Jackiw R.**— Nuovo cimento, 1969, v. A60, p. 47.
66. **Bardeen J., Cooper L., Schrieffer J. B.**— Phys. Rev., 1957, v. 108, p. 1175; **Боголюбов Н. Н.**— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 58.
67. **Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М.**— ДАН СССР, 1954, т. 96, с. 261.
68. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
69. **Lane K.**— Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 2605.
70. **Politzer H. D.**— Nucl. Phys., 1976, v. B117, p. 397.
71. **Langacker P.**— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 34, p. 1592.
72. **Pagels H.**— Phys. Rev., 1979, v. D19, p. 3080.
73. **Salpeter E. F., Bethe H.**— Phys. Rev. 1951, v. 84, p. 1232.
74. **Ахиезер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
75. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963.
76. **Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.** Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
77. **Wilson K.**— Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 2425.
78. **Bogoliubov P. N.**— Ann. Inst. Henri Poincare, 1968, v. VIII, p. 163.
79. **Chodos A., Jaffe R., Johnson K. e. a.**— Phys. Rev., 1974, v. D9, p. 3471.
80. **Chodos A., Thorn C. B.**— Phys. Rev., 1975, v. D12, p. 2735; **Jaffe R. L.** Preprint MIT CTP-814, 1979; **Мусаханов М. М.**— ЯФ, 1981, т. 33, с. 1621.
81. **'t Hooft.**— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8.
82. **Witten E.**— Nucl. Phys., 1979, v. B156, p. 269; **Veneziano G.**— Nucl. Phys., 1979, v. B159, p. 213; **Дьяконов Д. И., Эйдес М. И.**— ЖЭТФ, 1981, т. 81, с. 434.
83. **Волков М. К.**— ЭЧАЯ, 1982, т. 13, с. 1070.
84. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. II, М.: Наука, 1974.
85. **Gasser J., Leutwyler H.**— Phys. Rep., 1982, v. C87, p. 79.
86. **Joffe B. L.**— Nucl. Phys., 1981, v. B188, p. 317.
87. **Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н.** Препринт ОИЯИ Д-1968, Дубна, 1965.
88. **Коккедэ Я.** Теория кварков: Пер. с англ. М.: Мир, 1971.
89. **Шелест В. П., Зиновьев Г. М., Миранский В. А.** Модели сильновзаимодействующих элементарных частиц. Т. I. М.: Атомиздат, 1975.
90. **De Rujula A., Georgi H., Glashow S. L.**— Phys. Rev., 1975, v. D12, p. 147.

91. **Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.**— ДАН СССР, 1955, т. 102, с. 489.
92. **Фрадкин Е. С.**— ЖЭТФ, 1955, т. 28, с. 750.
93. **Gell-Mann M., Low F.**— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300.
94. **Вильсон К., Когут Дж.** Ренормализованная группа и ε-разложение: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
95. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. I: Пер. с англ. М.: Наука, 1973.
96. **Goldstein S.**— Phys. Rev., 1953, v. 91, p. 1516.
97. **Хриплович И. Б.**— ЯФ, 1966, т. 3, с. 575.
98. **Mc Coy B. M., Wu T. T.**— Phys. Lett., 1979, v. B87, p. 50.
99. **Coleman S.**— Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 2088.
100. **Корепин В. Е.**,— Письма ЖЭТФ, 1980, т. 30, с. 633.
101. **Львов А. И., Петрунькин В. А.**— Письма ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 53.
102. **Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.**— Phys. Rev., 1978, v. D17, p. 2717.
103. **Caldi D. G.**— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 121.
104. **Carlitz R. D., Creamer D. B.**— Ann. Phys., 1979, v. 118, p. 429.
105. **Shuryak E. V.**— Phys. Lett., 1981, v. B107, p. 103; Nucl. Phys., 1982, v. B203, p. 93.
106. **Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.**— Phys. Lett., 1975, v. B59, p. 85.
107. **Svetitsky B., Drell S. D., Quinn H. R., Weinstein M.**— Phys. Rev., 1980, v. D22, p. 490; **Banks T., Casher A.**— Nucl. Phys., 1980, v. B169, p. 103; **Smit J.**— Nucl. Phys., 1980, v. B175, p. 307; **Blairon J. M., Brout R., Englert F., Greensite J.**— Nucl. Phys., 1981, v. B180, FS2, p. 439; **Kluberg-Stern H., Morel A., Napoly O., Petersson B.**— Nucl. Phys., 1981, v. B190, FS2, p. 504.
108. **Alessandrini V., Hakim V., Krzywicki A.**— Nucl. Phys., 1982, v. B205, p. 253.
109. **Brout R., Englert F., Frére J. M.**— Nucl. Phys., 1978, v. B134, p. 327; **Amer A., Yaouanc A., Oliver L. e.a.**— Phys. Rev. Lett., 1983, v. 50, p. 87.
110. **Алексеев А. И., Арбузов Б. А., Байков В. А.**— ЯФ, 1981, т. 34, с. 1374.
111. **Coleman S.** Preprint SLAC-PUB-2484, 1980.
112. **'t Hooft G.**— In: Proc. 1979 Cargese Summer Institute. N. Y.; Plenum Press, 1980.
113. **Novikov V. A., Shifman M. A., Vainstein A. I., Zakharov V. I.**— Nucl. Phys., 1981, v. B191, p. 301.
114. **Farhi E., Susskind L.**— Phys. Rep., 1981, v. C74, p. 279.
115. **Amati D., Virasoro M.**— Phys. Lett., 1981, v. B99, p. 225.
116. **Cornwall J. M., Jackiw R., Tomboulis E.**— Phys. Rev., 1974, v. D10, p. 2428.
117. **Боголюбов Н. Н.** Избранные труды. Т. III. Киев: Наукова Думка, 1971, с. 174.
118. **Горьков Л. П.**— ЖЭТФ, т. 34, с. 735.
119. **Fukuda R.**— Phys. Lett., 1978, v. B73, p. 33.
120. **Fukuda R.**— Progr. Theoret. Phys., 1982, v. 67, p. 648.
121. **Cornwall J. M.**— Phys. Rev., 1982, v. D26, p. 1453.