

КВАНТОВАЯ ЗАДАЧА N ТЕЛ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*А. А. Квицинский, Ю. А. Куперин, С. П. Меркурьев,
А. К. Мотовилов, С. Л. Яковлев*

Ленинградский государственный университет, Ленинград

Описывается формулировка задачи рассеяния для систем N частиц в конфигурационном представлении. Рассматривается случай короткодействующих парных потенциалов, потенциалов с кулоновским дальним действием, а также модель граничных условий. На основе дифференциальной формы уравнений Фаддеева проведен численный анализ процессов Nd -рассеяния и различных связанных трехчастичных систем: ядер ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$, иона позитрония и некоторых барионов в нерелятивистской кварковой модели.

Formulation of the N -body scattering problem in the configuration representation is described. We consider short-range and Coulombic two body potentials as well as the boundary condition model. The general formalism is applied to the numerical study of the Nd scattering problem as well as of bound states problems for nuclei ${}^3\text{He}$, ${}^3\text{H}$, positroniums ion and light baryons in non-relativistic quark model.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных задач квантовой теории систем нескольких частиц заключается в развитии безмоделльных методов расчета физических характеристик таких систем. По мере роста возможностей ЭВМ становится все более очевидно, что эффективность того или иного метода определяется тем, насколько он математически обоснован. Иначе говоря, только математически корректные методы при наличии достаточно мощной ЭВМ позволяют вычислять физические интересные величины с контролируемой точностью.

Один из наиболее мощных и перспективных методов основан на дифференциальной формулировке задачи рассеяния в конфигурационном пространстве. В этом подходе интегральные уравнения для компонент волновой функции, которые служат математической базой задачи, используются только для изучения общих свойств решения — гладкости, асимптотик, выделения основных сингулярностей и т. д. Численные же расчеты проводятся на основе дифференциальной формы таких уравнений, которая возникает путем того или иного обращения интегральных операторов.

Привлекательной стороной данного метода является прежде всего его универсальность. В едином по математической структуре подходе могут быть рассмотрены весьма различные физические системы с любым типом взаимодействия. Это — и системы нескольких нукло-

нов, и мезоатомы, и кварковые системы. С точки зрения взаимодействия — короткодействующее, кулоновское, растущее, модель граничных условий.

Обзору методов, основанных на дифференциальном подходе, и их реализации в конкретных задачах и посвящена данная работа.

Дадим краткий обзор развития квантовой теории рассеяния систем нескольких частиц. Исследования и численные расчеты свойств таких систем на основе корректных математических методов стали возможны после того, как Л. Д. Фаддеев создал строгую теорию рассеяния в системах трех тел [1], а О. А. Якубовский обобщил ее на системы с произвольным числом частиц [2]. Уравнения Фаддеева и Якубовского явились основой для создания новых вычислительных методов в ядерной и атомной физике. Наиболее интенсивно такие методы развивались в ядерной физике, в основном для описания систем трех нуклонов. При этом вскоре выяснилось, что непосредственное решение уравнений Фаддеева в их первоначальной интегральной формулировке для реалистических ядерных потенциалов требует огромных вычислительных ресурсов. Чтобы упростить процедуру решения интегральных уравнений, было предложено использовать сепарабельные приближения [3—5] и метод квазичастиц [6]. Эти методы, однако, не позволяли рассматривать реалистические NN -взаимодействия.

Для численных расчетов с локальными межнуклонными потенциалами более удобной оказалась дифференциальная форма уравнений для компонент. Впервые дифференциальные уравнения Фаддеева, предложенные в [7], были успешно использованы для расчета энергий связи ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ [8]. После появления формулировки задачи рассеяния в координатном представлении [9] эти уравнения были также применены для расчета результатов nd -столкновений с реалистическим NN -взаимодействием [10].

На следующем этапе уравнения Фаддеева были обобщены на системы заряженных частиц. При энергиях ниже порога развала модификация интегральных уравнений была предложена в [11]. В [12] была развита теория рассеяния трех заряженных частиц в координатном пространстве. Модифицированные дифференциальные уравнения Фаддеева, предложенные в этих работах, позволили корректно учесть кулоновское взаимодействие в задаче pd -рассеяния [13].

В дальнейшем дифференциальный формализм был обобщен на системы произвольного числа частиц [14, 15], а также на системы трех тел, взаимодействие в которых задается граничными условиями на волновую функцию [16]. На основе дифференциальных уравнений [16] был проведен строгий расчет процессов nd -рассеяния в модели граничных условий [17].

Отметим также, что кроме традиционного круга задач ядерной физики дифференциальные уравнения Фаддеева были с успехом применены для расчета статических характеристик барионов в нерелятивистской кварковой модели [18, 19].

Настоящая работа состоит из трех разделов. В первом описывается общий формализм дифференциального подхода. Мы подробно рассмотрим системы трех и четырех тел, а в общем случае задачи N тел лишь сформулируем окончательные результаты. В конце этого раздела описывается дифференциальная постановка задачи N тел в модели граничных условий.

Остальная часть работы посвящена применению дифференциального подхода для расчета свойств конкретных физических систем. В разд. 2 рассматривается задача рассеяния пучков на дейтроне. В разд. 3 дифференциальные уравнения Фаддеева применяются для анализа характеристик различных связанных трехчастичных систем: ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$, иона позитрония и легких барионов в нерелятивистской кварковой модели.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальная формулировка задачи рассеяния. Опишем общий дифференциальный формализм в задаче N тел. Ради простоты будем считать частицы бесспиновыми и попарно взаимодействующими.

Обозначения. Введем сперва несколько обозначений, используемых на протяжении всей работы.

Будем называть разбиением a_k некоторый способ разделения системы на k подсистем α_l из l частиц. Разбиение a_k назовем кластерным, если для каждой подсистемы α_l , входящей в a_k , существуют связанные состояния. Соответственно кластером будем называть связанное состояние подсистемы $\psi_{\alpha_l}^j$ и $-\varepsilon_{\alpha_l}^j$ будем обозначать энергии связи кластеров. $\Psi_{J_{a_k}}$ обозначим произведение кластерных собственных функций, описывающее внутреннее состояние разбиения a_k с энергией $-\varepsilon_{J_{a_k}}$, равной сумме кластерных собственных значений.

Индекс J_{a_k} , обозначающий набор номеров связанных состояний подсистем $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}$, $J_{a_k} = \{i_{\omega_{i_1}}, i_{\omega_{i_2}}, \dots, i_{\omega_{i_k}}\}$, слишком громоздкий. Поэтому в дальнейшем мы заменим его одной буквой, например, A, B и т. д. При этом N свободным частицам будем сопоставлять индекс $A = 0$.

Если разбиение a_k получается из a_i делением подсистем на части, мы будем говорить, что a_k следует за a_i и обозначать $a_k \subset a_i$ ($a_i \supset a_k$), $i < k$. При этом одинаковыми буквами в дальнейшем будем обозначать лишь разбиения, связанные отношением \subset , т. е. $a_{N-1} \subset a_{N-2} \subset \dots \subset a_2$. Последовательность таких разбиений, начинающаяся с некоторого k , $2 \leq k \leq N - 1$ будем называть цепочкой разбиений и обозначать A_k , $A_k = \{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{N-1}\}$. Последним разбиением в цепочке всегда является a_{N-1} .

Заметим, что каждое разбиение a_{N-1} определяется парой частиц α , входящих в единственную нетривиальную подсистему. По этой причине мы часто будем отождествлять индекс a_{N-1} с символом отвечающей ему подсистемы α , $a_{N-1} \leftrightarrow \alpha$.

Введем далее относительные координаты, применяемые для описания системы N частиц. Пусть r_i — радиус-вектор i -й частицы массы m_i и ρ_{ω_k} — координаты центра инерции подсистемы ω_k массы m_{ω_k} . $x_{i\omega_k}$ обозначим приведенную относительную координату частицы i и подсистемы ω_k :

$$x_{i\omega_k} = \left(\frac{2m_i m_{\omega_k}}{m_i + m_{\omega_k}} \right)^{1/2} (r_i - \rho_{\omega_k}).$$

Рассмотрим последовательность подсистем $\omega_2, \omega_3, \dots$, которые получаются поочередным присоединением частиц i_2, i_3, \dots, i_N к частице i_1 . Сопоставим данной последовательности $N - 1$ относительные координаты $x_{i_1 i_2}, x_{i_3 \omega_2}, \dots, x_{i_N \omega_{N-1}}$. Совокупность этих

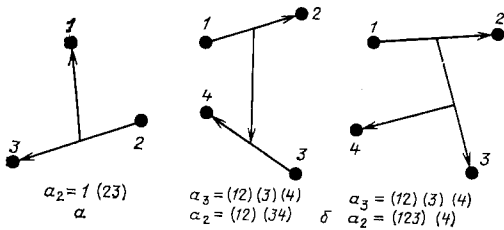


Рис. 1. Относительные координаты в системах трех (а) и четырех (б) тел

координат определяет точку X в конфигурационном пространстве R^{3N-3} . Переход от одного набора относительных координат к другому отвечает повороту системы координат в R^{3N-3} .

Пусть разбиение a_k состоит из подсистем $\omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \dots, \omega_{l_h}$. Обозначим $x_{\omega_{l_i}}$ ($x_{\omega_{l_i}} \in R^{3l_i-3}$) совокупность приведенных относительных координат подсистемы ω_{l_i} . Набор векторов $\{x_{\omega_{l_1}}, x_{\omega_{l_2}}, \dots, x_{\omega_{l_h}}\}$ называется внутренней по отношению к разбиению a_k координатой и обозначается x_{a_k} . Совокупность приведенных относительных координат точек $\rho_{\omega_{l_i}}$, рассматриваемых как координаты простых частиц, обозначим $y_{a_k}, y_{a_k} \in R^{3h-3}$. Справедливо представление $X = \{x_{a_k}, y_{a_k}\}$, которое определяет ортогональную систему координат в R^{3N-3} , отвечающую разбиению a_k .

В случае системы трех частиц имеется только один тип относительных координат $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Удобно представлять эти координаты в виде наглядной схемы, приведенной на рис. 1, а.

В системе четырех тел таких типов — два. Они представлены на рис. 1, б.

Эти координаты отвечают двум типам разбиений: $3 + 1$ и $2 + 2$ в системе четырех тел. Возможные относительные координаты в системах пяти, шести и т. д. тел настолько многочисленны, что их уже трудно перечислить.

Обозначим k_{a_l}, p_{a_l} относительные импульсы, сопряженные координатам x_{a_l}, y_{a_l} . Символы \hat{x}, \hat{k} и т. д. будут означать единичные векторы по направлениям векторов x, k .

В этих обозначениях оператор энергии системы N тел имеет вид

$$H = H_0 + \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}} \equiv -\Delta_X + \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}), \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям a_{N-1} (т. е. по всем парам частиц α). Обозначим Δ_X оператор Лапласа в $(3N - 3)$ -мерном пространстве, а $V_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}})$ — парные потенциалы взаимодействия. Движение центра инерции считается отделенным.

Система трех частиц. Опишем сначала дифференциальную формулировку задачи рассеяния на примере системы трех тел. Потенциалы взаимодействия будем считать быстро убывающими функциями.

Пусть Ψ — решение уравнения Шредингера

$$(H_0 + \sum_{\alpha} V_{\alpha} - E) \Psi = 0.$$

Здесь в отличие от общего случая (1) удобно использовать символы подсистем α вместо отвечающих им разбиений a_2 . В задаче трех тел волновая функция разбивается на три компоненты

$$\Psi_{\alpha} = -R_0(E + i0) V_{\alpha} \Psi, \quad R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}, \quad (2)$$

называемые компонентами Фаддеева. Суммируя по всем α , выразим Ψ через эти компоненты:

$$\Psi = \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}.$$

Подставив это равенство в правую часть (2) вместо Ψ , получим интегральные уравнения для компонент:

$$\Psi_{\alpha} = -R_0(E + i0) V_{\alpha} \sum_{\beta} \Psi_{\beta}.$$

Дифференциальные уравнения Фаддеева получаются отсюда, если обратить оператор R_0 и перенести в левую часть слагаемое с $\beta = \alpha$:

$$(H_0 + V_{\alpha} - E) \Psi_{\alpha} = -V_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_{\beta}. \quad (3)$$

Интегральные уравнения Фаддеева отвечают обращению оператора $H_0 + V_{\alpha} - E$ в этом соотношении:

$$\Psi_{\alpha} = -R_{\alpha}(E + i0) V_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_{\beta}, \quad R_{\alpha}(z) = (H_0 + V_{\alpha} - z)^{-1}. \quad (4)$$

Чтобы выделить единственное решение системы уравнений (3), которое совпадало бы с определенными решениями интегральных уравнений (4), необходимо задать асимптотические граничные условия. В случае связанных состояний это — условие убывания на бесконечности (собственная функция должна быть квадратично-интегрируемой). В случае состояний рассеяния эти условия значительно сложнее.

Рассмотрим, например, наиболее важный с точки зрения приложений процесс рассеяния частицы на связанной паре β . Компоненты Ψ_α будем снабжать дополнительным значком B , отвечающим номеру связанного состояния пары β , $B = \{i, \beta\}$. Асимптотическое поведение волновой функции отражает следующее представление:

$$\Psi_{\alpha B}(X, p_\beta) = \chi_B(X, p_\beta) \delta_{\alpha\beta} + \sum_A \Psi_A(x_\alpha) U_{AB}(y_\alpha, p_\beta) + U_{0B}^{(\alpha)}(X, p_\beta). \quad (5)$$

Здесь первое слагаемое χ_B описывает начальное состояние:

$$\chi_B(X, p_\beta) = \psi_B(x_\beta) \exp \{i(p_\beta, y_\beta)\},$$

слагаемое во второй группе U_{AB} описывает процессы упругого рассеяния с возможным возбуждением ($\alpha = \beta$) или перестройку ($\alpha \neq \beta$), а третье слагаемое $U_{0B}^{(\alpha)}$ — процессы распада системы на три свободные частицы. Функции U_{AB} и $U_{0B}^{(\alpha)}$ асимптотически при $|y_\alpha| \rightarrow \infty$ и $|X| \rightarrow \infty$ переходят в сферические волны с гладкими ограниченными амплитудами:

$$\left. \begin{aligned} U_{AB}(y_\alpha, p_\beta) &\sim f_{AB}(\hat{y}_\alpha, p_\beta) |y_\alpha|^{-1} \exp \{i \sqrt{E + \varepsilon_A} |y_\alpha|\}; \\ U_{0B}^{(\alpha)}(X, p_\beta) &\sim f_{0B}^{(\alpha)}(\hat{X}, p_\beta) |X|^{-5/2} \exp \{i \sqrt{E} |X|\}, \\ E &= p_\beta^2 - \varepsilon_B. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При этом сечения соответствующих процессов пропорциональны квадратам модулей амплитуд [20]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\hat{p}_\alpha} &= \frac{2\pi |p_\alpha|}{|p_\beta|} \mu_\alpha \mu_B |f_{AB}(\hat{p}_\alpha, p_\beta)|^2; \\ \frac{d\sigma}{d\hat{k}_\alpha d\hat{p}_\alpha dE_\alpha} &= 16\pi \mu_\beta \left(\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{3/2} |p_\alpha| |k_\alpha| |p_\beta|^{-1} \sum_\gamma f_{0B}^{(\gamma)}|^2; \\ \mu_\alpha &= 2 \left(\sum_{i=\alpha} m_i^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Отметим, что доказательство асимптотических формул (5), (6) в существенном опирается на интегральные уравнения для компонент (4), точнее с этой целью используются аналогичные неоднородные уравнения, которые возникают после выделения начального состояния χ_B . Соответствующие рассуждения приведены в [9].

Итак, мы сформулировали граничные задачи на основе дифференциальных уравнений Фаддеева, которые однозначно определяют компоненты волновых функций. Аналогичные граничные задачи можно получить и для компонент Якубовского волновых функций. Мы начнем с вывода дифференциальных уравнений для таких компонент на примере системы четырех тел.

Системы N тел. Компоненты Якубовского нумеруются цепочками разбиений A_2 . В случае четырех частиц эта цепочка содержит два разбиения: a_2, a_3 . Первое из этих разбиений указывает способ разделения четырех частиц на две подсистемы, второе — на способ разделения a_2 на три подсистемы. Всего имеется семь разбиений a_2 [четыре разбиения $3 + 1$, т. е. когда одна из подсистем содержит три частицы, и три разбиения $2 + 2$, когда каждая из подсистем содержит по две частицы] и шесть разбиений a_3 . Из этих разбиений можно образовать восемнадцать различных цепочек $A_2 = \{a_2, a_3\}$. Таким образом, для $N = 4$ необходимо ввести восемнадцать компонент волновых функций.

На первом этапе введем шесть компонент Фаддеева с помощью стандартных определений

$$\Psi_{a_3} = -R_0 V_{a_3} \Psi.$$

Точно так же, как и в случае трех частиц, компоненты Ψ_{a_3} удовлетворяют уравнениям Фаддеева

$$(H_0 + V_{a_3} - E) \Psi_{a_3} = -V_{a_3} \sum_{b_3 \neq a_3} \Psi_{b_3},$$

или в интегральной форме

$$\Psi_{a_3} = -R_{a_3}(E + i0) V_{a_3} \sum_{b_3 \neq a_3} \Psi_{b_3}, \quad R_{a_3}(z) = (H_0 + V_{a_3} - z)^{-1}. \quad (8)$$

Компоненты Якубовского волновой функции, классифицированные цепочками разбиений, вводятся равенствами

$$\Psi_{a_2 a_3} = -R_{a_3}(E + i0) V_{a_3} \sum_{\substack{b_3 \neq a_3 \\ b_3 \subset a_2}} \Psi_{b_3}, \quad (9)$$

т. е. в правой части формулы (8) оставляются лишь те слагаемые, для которых $b_3 \subset a_2$. Компоненты Фаддеева можно выразить через компоненты Якубовского с помощью правила сумм, которое для произвольного числа частиц имеет вид

$$\sum_{\substack{a_{k-1} \\ b_k \neq a_k \\ b_k \subset a_{k-1}}} \sum_{b_k \neq a_k} = \sum_{b_k \neq a_k}.$$

При $N = 4$ получаем представление

$$\Psi_{a_3} = \sum_{a_2} \Psi_{a_2 a_3}. \quad (10)$$

Заменим теперь компоненты Ψ_{b_3} в правых частях равенств (9) на соответствующие выражения через компоненты Якубовского (10). В результате такой замены получим уравнения

$$\Psi_{a_2 a_3} = -R_{a_3}(E + i0) V_{a_3} \sum_{\substack{b_3 \neq a_3 \\ b_3 \subset a_2}} \sum_{b_2} \Psi_{b_2 b_3}. \quad (11)$$

Применив к (11) оператор $H_0 + V_{a_3} - E$ и перенеся в левую часть слагаемое с $b_2 = a_2$, преобразуем систему (11) к следующему виду:

$$\begin{aligned} (H_0 + V_{a_3} - E) \Psi_{a_2 a_3} + V_{a_3} \sum_{\substack{c_3 \neq a_3 \\ c_3 \subset a_2}} \Psi_{a_2 c_3} = \\ = -V_{a_3} \sum_{b_2 \neq a_2} \sum_{\substack{b_3 \neq a_3 \\ b_3 \subset a_2}} \Psi_{b_2 b_3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эта система представляет собой искомое обобщение дифференциальных уравнений для компонент (3) на случай задачи четырех частиц.

Как и в задаче трех тел, имеется тесная связь между этими уравнениями и компактными интегральными уравнениями: квадратично-интегрируемые решения системы уравнений (12) совпадают с решениями однородных интегральных уравнений Якубовского. В случае же состояний рассеяния необходимо задавать подходящие асимптотические граничные условия, аналогичные (5). Тогда решения дифференциальных уравнений будут совпадать с соответствующими решениями интегральных уравнений. В этом смысле можно сказать, что дифференциальные уравнения (12) эквивалентны интегральным уравнениям Якубовского.

Упомянутые асимптотические условия мы опишем ниже, после того как исследуем формальное соотношение между дифференциальными и интегральными уравнениями.

Итак, перейдем от системы (12) к интегральным уравнениям Якубовского. С этой целью обратим матричный дифференциальный оператор, порождаемый левой частью (12). Заметим сначала, что этот оператор имеет блочную структуру. Матричные элементы оператора, необходимого для обращения одного блока, удовлетворяют уравнению:

$$(H_0 + V_{a_3} - z) R_{a_2 b_3}^{a_2}(z) + V_{a_3} \sum_{\substack{c_3 \neq a_3 \\ c_3 \subset a_2}} R_{c_3 b_3}^{a_2}(z) = \delta_{a_2 b_3} I, \quad (13)$$

где I — единичный оператор; $\delta_{a_2 b_3}$ — символ Кронекера. Перепишем (13) в интегральной форме:

$$R_{a_2 b_3}^{a_2}(z) = R_{a_3}(z) \delta_{a_2 b_3} - R_{a_3}(z) V_{a_3} \sum_{\substack{c_3 \neq a_3 \\ c_3 \subset a_2}} R_{c_3 b_3}^{a_2}. \quad (14)$$

Уравнения (14) совпадают с интегральными уравнениями Фаддеева для компонент резольвенты системы четырех частиц, в которой отличны от нуля лишь потенциалы взаимодействия между частицами, входящими в подсистемы разбиения a_2 [2]. Обозначим H_{a_2} оператор энергии такой задачи:

$$H_{a_2} = H_0 + \sum_{a_3 \subset a_2} V_{a_3}.$$

В этой задаче переменные делятся, причем справедливо представление

$$H_{a_2} = h_{a_2} \otimes 1 - 1 \otimes \Delta_{y_{a_2}},$$

где оператор энергии h_{a_2} действует только по переменным x_{a_2} . Этот оператор описывает трехчастичную подсистему в случае разбиения a_2 типа $3 + 1$ или систему из двух не взаимодействующих между собой пар в случае разбиения a_2 типа $2 + 2$.

В силу единственности решения уравнений (14) операторы $R_{a_2 b_2}^{a_2}$ совпадают с компонентами функции Грина [2]:

$$R_{a_2 b_2}^{a_2}(z) = R_0(z) \delta_{a_2 b_2} - R_0(z) V_{a_2} R_{a_2}(z),$$

$$R_{a_2}(z) = (H_{a_2} - z)^{-1}.$$

Таким образом, обращение каждого блока в левой части уравнений (12) можно провести в терминах операторов $R_{a_2 b_2}^{a_2}$. В результате этого обращения система (12) может быть преобразована к виду:

$$\Psi_{a_2 a_2} = - \sum_{b_2 \neq a_2} \sum_{\substack{c_2 \neq b_2 \\ c_2, b_2 \subset a_2}} R_{a_2 c_2}^{a_2} V_{c_2} \Psi_{b_2 b_2}. \quad (15)$$

Уравнения (15) совпадают с однородной системой интегральных уравнений Якубовского для задачи четырех частиц [2]. Итак, мы показали, что уравнения (12) являются дифференциальным аналогом интегральных уравнений Якубовского.

Перейдем к описанию упомянутых выше асимптотических граничных условий для уравнений (12). Отметим, что эти условия могут быть получены с помощью интегральных уравнений Якубовского (15). Мы рассмотрим лишь случай бинарных столкновений. Компоненты волновых функций будем снабжать дополнительным значком B , который описывает квантовые числа начального состояния системы. Последнее задается волновой функцией $\chi_B(X, p_{b_2}) = \psi_B(x_{b_2}) e^{i(p_{b_2}, y_{b_2})}$.

Компоненты волновой функции $\Psi_{A_2, B}$ представляются в виде

$$\Psi_{A_2, B}(X, p_{b_2}) = \chi_{a_2 A}(X, p_{a_2}) \delta_{AB} + \sum_A \Psi_{a_2 A}(x_{a_2}) U_{AB}(y_{a_2}, p_{b_2}) +$$

$$+ \sum_A \Psi_A(x_{a_2}) U_{AB}^{a_2}(y_{a_2}, p_{b_2}) + U_{0B}^{A_2}(X, p_{b_2}). \quad (16)$$

Слагаемые в этой формуле имеют следующий смысл.

Функции $\chi_{a_2 A}$ представляют собой компоненты начального состояния системы и выражаются через волновую функцию начального состояния $\chi_A(X, p_{a_2})$ формулой:

$$\chi_{a_2 A} = -R_0(E + i0) V_{a_2} \chi_A.$$

Правую часть этой формулы можно переписать в виде произведения $\chi_{a_2 A} = \psi_{a_2 A}(x_{a_2}) \exp \{i(p_{a_2}, y_{a_2})\}$, где $\psi_{a_2 A}$ — компоненты Фаддеева волновой функции связанного состояния трех частиц (2) [если a_2 —

разбиение типа $3 + 1$] либо компоненты Фаддеева волновой функции в вырожденной задаче двух не взаимодействующих пар (в случае разбиения $2 + 2$). В последнем случае волновые функции $\psi_A(x_{a_2})$ имеют вид произведения двухчастичных собственных функций.

Во второй группе слагаемых суммирование ведется по всем кластерным состояниям разбиения a_2 . При $a_2 = b_2$ эти слагаемые описывают упругие процессы с возможным возбуждением, а при $a_2 \neq b_2$ — процессы перестройки. В третьей группе суммирование ведется по собственным числам двухчастичных подсистем, входящих в разбиение a_3 . Эти слагаемые отвечают распаду начального состояния на три кластера (процесс $2 \rightarrow 3$). Наконец, последнее слагаемое $U_{0B}^{A_2}$ описывает полный развал на четыре свободные частицы ($2 \rightarrow 4$).

Функции U_{0B} , $U_{AB}^{A_2}$ и $U_{AB}^{A_3}$ в (16) асимптотически равны сферическим волнам с гладкими ограниченными амплитудами:

$$U_{AB}(y_{a_2}, p_{b_2}) \sim f_{AB}(\hat{y}_{a_2}, p_{b_2}) |y_{a_2}|^{-1} \exp\{i\sqrt{E + \varepsilon_A} |y_{a_2}|\};$$

$$U_{AB}^{A_2}(y_{a_2}, p_{b_2}) \sim f_{AB}^{A_2}(\hat{y}_{a_2}, p_{b_2}) |y_{a_2}|^{-5/2} \exp\{i\sqrt{E + \varepsilon_A} |y_{a_2}|\};$$

$$U_{0B}^{A_2}(X, p_{b_2}) \sim f_{0B}^{A_2}(\hat{X}, p_{b_2}) |X|^{-4} \exp\{i\sqrt{E} |X|\},$$

где $E = p_{b_2}^2 - \varepsilon_B$. Физические амплитуды процессов $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ и $2 \rightarrow 4$ связаны с амплитудами сферических волн соотношениями:

$$f_{AB} = f_{AB}, \quad f_{AB} = \sum_{2 \rightarrow 3} f_{AB}^{A_2}, \quad f_{0B} = \sum_{2 \rightarrow 4} f_{0B}^{A_2}.$$

Через эти амплитуды уже обычными формулами [20] выражаются эффективные сечения процессов $2 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ и $2 \rightarrow 4$.

На этом мы закончим описание общих мест дифференциального формализма в задаче четырех тел. Коротко рассмотрим общий случай N тел.

Дифференциальный аналог интегральных уравнений Якубовского для N тел был получен в [14, 15]. Соответствующие уравнения для компонент Ψ_{A_1} , называемые дифференциальными уравнениями Якубовского, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (H_0 + V_{a_{N-1}} - E) \Psi_{A_2} + V_{a_{N-1}} \sum_{i=3}^{N-1} \sum'_{\substack{C_i \neq A_i \\ C_i \subset a_{i-1}}} \Psi_{a_2 a_3 \dots a_{i-1}} c_i = \\ = -V_{a_{N-1}} \sum_{b_2 \neq a_2} \sum'_{\substack{B_3 \neq A_3 \\ b_3 \subset a_2}} \Psi_{B_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется лишь по «зацепляющимся» с A_3 цепочкам B_3 , для которых выполнены условия

$$b_{N-1} \neq a_{N-1}, \dots, b_3 \neq a_3; \quad b_{N-1} \subset a_{N-2}, \dots, b_4 \subset a_3.$$

Полная волновая функция связана с компонентами Ψ_{A_2} равенством:

$$\Psi = \sum_{A_2} \Psi_{A_2},$$

где суммирование ведется по всем цепочкам A_2 .

Отметим, что интегральные уравнения Якубовского получаются из (17) в результате обращения матричного дифференциального оператора в левой части.

Асимптотические граничные условия для уравнений (17) могут быть получены с помощью интегральных уравнений Якубовского [14]. Они имеют вид, аналогичный (16). В частности, компоненты волновых функций, отвечающих двухкластерным начальным состояниям в конфигурационном пространстве, представляются в виде:

$$\Psi_{A_2 B}(X, p_{b_2}) = \chi_{B_3 B}(\chi, p_{b_2}) \delta_{AB} + \sum_{i=2}^{N-1} \sum_A \Psi_{A_{i+1}, A}(x_{a_i}) U_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}(y_{a_i}, p_{b_2}) + U_{0B}^{A_2}(X, p_{b_2}), \quad (18)$$

где $\chi_{B_3 B}$ описывает начальное состояние системы:

$$\chi_{B_3 B}(X, p_{b_2}) = \Psi_{B_3 B}(x_{b_2}) \exp \{i(p_{b_2}, y_{b_2})\},$$

$\Psi_{A_{i+1}, A}$ — компоненты Якубовского волновой функции i -кластерного разбиения a_i . Функция $U_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}(y_{a_i}, p_{b_2})$ при $|y_{a_i}| \rightarrow \infty$ асимптотически переходит в сферическую волну в R^{3i-3} :

$$U_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}(y_{a_i}, p_{b_2}) \sim \sim f_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}(\hat{y}_{a_i}, p_{b_2}) |y_{a_i}|^{\frac{4-3i}{2}} \exp \{i\sqrt{E + \varepsilon_A} |y_{a_i}|\}. \quad (19)$$

Функция $U_{0B}^{A_2}(X, p_{b_2})$ при $|X| \rightarrow \infty$ переходит в сферическую волну в R^{3N-3} и соответствует развалу на N частиц:

$$U_{0B}^{A_2}(X, p_{b_2}) \sim f_{0B}^{A_2}(\hat{X}, p_{b_2}) |X|^{\frac{4-3N}{2}} \exp \{i\sqrt{E} |X|\}. \quad (20)$$

Физические амплитуды процессов $B \rightarrow A$ связаны с амплитудами сферических волн (19) формулами:

$$f_{AB} = \sum_{a_2 \dots a_{i-1}} f_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}.$$

Наконец, амплитуда развала двухкластерного состояния на N свободных частиц дается равенством

$$f_{0B} = \sum_{A_2} f_{0B}^{A_2}.$$

Итак, мы показали, каким образом можно определить волновые функции с помощью дифференциальных уравнений для компонент.

При этом мы считали частицы нейтральными. Ниже мы обобщим дифференциальный формализм на случай заряженных частиц.

Системы заряженных частиц. В случае систем заряженных частиц парные потенциалы имеют вид суммы кулоновской и короткодействующей частей

$$V_{a_{N-1}}(x) = n_{a_{N-1}} |x|^{-1} + V_{a_{N-1}}^{(s)}(x).$$

При этом интегральные уравнения Фаддеева и Якубовского становятся некомпактными из-за дальнедействующего характера кулоновского взаимодействия. Задача модификации этих уравнений рассматривалась во многих работах [11—14, 21—26]. Мы остановимся здесь только на подходе, который основан на дифференциальном формализме.

По-видимому, этот подход наилучшим образом приспособлен для формулировки задачи рассеяния в системах заряженных частиц. Это обстоятельство, в частности, находит свое отражение в том, что необходимые модификации сводятся лишь к поправкам в асимптотике волновых функций. При этом все такие поправки могут быть интерпретированы в рамках квазиклассических приближений — это эйкональные приближения, построенные по отношению к траекториям классических нейтральных частиц [12]. Мы не будем описывать здесь аппарат, необходимый для вывода подобных асимптотик, а ограничимся только формулировкой окончательных результатов.

Рассмотрим сразу же общий случай системы N тел. Начнем с формулировки модифицированных дифференциальных уравнений для компонент.

Пусть $\Omega_{a_{N-1}}(v)$ — область конфигурационного пространства, где выполняется условие $|x_{a_{N-1}}| \leq C(1 + |y_{a_{N-1}}|)^v$, $0 < v < 1/2$. Введем гладкую финитную функцию $\chi_{a_{N-1}}(X)$, равную 1 в области $\Omega_{a_{N-1}}(v)$ и нулю вне $\Omega_{a_{N-1}}(v_1)$, $v < v_1 < 1/2$. Разобьем потенциал взаимодействия $V_{a_{N-1}}$ на короткодействующую и дальнедействующую части с помощью функции $\chi_{a_{N-1}}$:

$$V_{a_{N-1}}(x_{a_{N-1}}) = \hat{V}_{a_{N-1}}(X) + V_{a_{N-1}}^{(0)}(X), \quad (21)$$

где

$$\hat{V}_{a_{N-1}}(P) = V_{a_{N-1}}^{(s)} + \frac{n_{a_{N-1}}}{|x_{a_{N-1}}|} \chi_{a_{N-1}}; \quad V_{a_{N-1}}^{(0)} = (1 - \chi_{a_{N-1}}) \frac{n_{a_{N-1}}}{|x_{a_{N-1}}|}.$$

Согласно разбиению (21) представим оператор энергии системы N заряженных частиц в виде

$$H = H_{as} + \sum_{a_{N-1}} \hat{V}_{a_{N-1}}. \quad (22)$$

Здесь асимптотический гамильтониан H_{as} описывает движение системы N свободных частиц на фоне кулоновских «хвостов» $V_{a_{N-1}}^{(0)}$.

Он определяется выражением:

$$H_{as} = H_0 + \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}^{(0)}.$$

Итак, мы включили все дальнедействующие части потенциалов в новый «невозмущенный» оператор энергии H_{as} . Далее можно дословно повторить все рассуждения, которые привели нас к дифференциальным уравнениям для компонент (3), (12) или (17). Все изменения сводятся к замене оператора H_0 на H_{as} , а оператора взаимодействия $V_{a_{N-1}}$ — на его «короткодействующую» часть $\hat{V}_{a_{N-1}}$. В итоге получаются следующие модифицированные уравнения:

$$\begin{aligned} (H_{as} + \hat{V}_{a_{N-1}} - E) \Psi_{A_2} + \hat{V}_{a_{N-1}} \sum_{i=3}^{N-1} \sum'_{\substack{c_i \neq A_i \\ c_i = a_{i-1}}} \Psi_{a_2 a_3 \dots a_{i-1} c_i} = \\ = -\hat{V}_{a_{N-1}} \sum_{b_2 \neq a_2} \sum'_{\substack{B_3 \neq A_3 \\ b_3 = a_2}} \Psi_{B_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

При этом, как и выше, волновая функция равна сумме компонент по всем цепочкам

$$\Psi := \sum_{A_2} \Psi_{A_2}. \quad (24)$$

Если обратить матричный интегральный оператор в левой части этих уравнений, то можно получить модифицированные интегральные уравнения Фаддеева ($N = 3$) или Якубовского ($N > 3$). В системе трех тел было доказано, что такие уравнения являются компактными [25]. Можно ожидать, что это свойство интегральных уравнений сохранится и в общем случае.

В ряде задач (например, когда частицы заряжены одноименно и кулоновское взаимодействие значительно слабее короткодействующего) удобно использовать в численных расчетах простейший тип модифицированных уравнений, который получается, если положить $\chi_{a_{N-1}} \equiv 0$. Это означает, что в этом случае все кулоновское взаимодействие включается в «невозмущенный» гамильтониан H_{as} :

$$H_{as} := H_0 + \sum_{a_{N-1}} n_{a_{N-1}} |x_{a_{N-1}}|^{-1},$$

а полный оператор энергии представляется в виде

$$H = H_{as} + \sum_{a_{N-1}} V_{a_{N-1}}^{(s)}.$$

Например, в задаче трех тел эта процедура приводит к уравнениям [26]

$$\left(H_0 + \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha}}{|x_{\alpha}|} + V_{\alpha}^{(s)} - E \right) \Psi_{\alpha} = -V_{\alpha}^{(s)} \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_{\beta}. \quad (25)$$

После обращения оператора в левой части отсюда получаются интегральные уравнения Нобла — Фаддеева, впервые предложенные в [22] (см. также [12]).

Сформулируем теперь граничные условия, которые однозначно задают решение модифицированных уравнений (23). Как и выше, мы рассмотрим только рассеяние с двумя кластерами в начальном состоянии.

Из соображений наглядности рассмотрим сначала следующую модельную задачу рассеяния. Пусть кластеры ω_l и ω_k , составляющие разбиение b_2 , имеют заряды q_{ω_l} и q_{ω_k} соответственно. Рассмотрим эти кластеры как точечные бесструктурные частицы. Такие эффективные частицы взаимодействуют только посредством кулоновских потенциалов

$$V_{\omega_l \omega_k}^c = \frac{n_{\omega_l \omega_k}}{|y_{b_2}|}; \quad n_{\omega_l \omega_k} = (2\mu_{\omega_l \omega_k})^{1/2} q_{\omega_l} q_{\omega_k},$$

где $\mu_{\omega_l \omega_k}$ — приведенная масса кластеров ω_l и ω_k , а y_{b_2} — их приведенная относительная координата.

Упругое рассеяние этих частиц описывается волновой функцией

$$\chi_{b_2}(X) = F(\xi_{b_2}) \exp\{i(p_{b_2}, y_{b_2})\}, \quad (26)$$

где функция $F(\xi)$ выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$F(\xi) = e^{-\pi\eta_{b_2}} \Gamma(1 + i\eta_{b_2}) \Phi(-i\eta_{b_2}, 1, i|p_{b_2}| \xi),$$

где η_{b_2} — характерный кулоновский параметр:

$$\eta_{b_2} = n_{\omega_l \omega_k} / 2 |p_{b_2}|,$$

а ξ_{b_2} — параболическая координата, $\xi_{b_2} = |y_{b_2}| \hat{y}_{b_2} - (y_{b_2}, \hat{p}_{b_2})$. При этом, если направление векторов y_{b_2} и p_{b_2} не совпадает (т. е. не рассматривается направление рассеяния вперед), то функция χ_{b_2} асимптотически принимает вид суммы искаженных плоских и сферических волн:

$$\chi_{b_2}(y_{b_2}, p_{b_2}) \sim \exp\{i(p_{b_2}, y_{b_2}) + i\eta_{b_2} \ln |p_{b_2}| \xi_{b_2}\} + a_{b_2}^c \hat{y}_{b_2} |y_{b_2}|^{-1} \exp\{i|p_{b_2}| |y_{b_2}| - i\eta_{b_2} \ln 2 |p_{b_2}| |y_{b_2}|\}.$$

Амплитуда сферической волны дается формулой

$$a_{b_2}^c = -\frac{\eta_{b_2}}{2 |p_{b_2}|} \frac{\exp\left\{2i \left(-\eta_{b_2} \ln \sin \frac{\theta_{b_2}}{2} + \Delta_{b_2}^c\right)\right\}}{\sin^2 \frac{\theta_{b_2}}{2}}, \quad (27)$$

где

$$\Delta_{b_2}^c = \arg \Gamma(1 + i\eta_{b_2}); \quad \cos \theta_{b_2} = (\hat{y}_{b_2}, \hat{p}_{b_2}).$$

Мы будем называть эту амплитуду чисто кулоновской.

Рассмотрим далее физическую волновую функцию $\Psi_B(X, p_{b_2})$, которая описывает рассеяние с двумя кластерами (ω_k и ω_l) в начальном состоянии. Как и в системе нейтральных частиц, индекс B обозначает внутреннее состояние подсистем.

Начальное состояние системы в таком процессе описывается функцией

$$\chi_B(X, p_{b_2}) = \chi_{b_2}(y_{b_2}, p_{b_2}) \Psi_B(x_{b_2}), \quad (28)$$

где модельная функция χ_{b_2} была введена выше. Волновая функция равна сумме компонент (24), которые можно представить в виде, аналогичном (18):

$$\Psi_{A_2B}(X, p_{b_2}) = \chi_{B_3B}(X, p_{b_2}) \delta_{AB} + \sum_{i=2}^{N-1} \sum_A \Psi_{A_{i+1}, A}(x_{a_i}) Q_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}(y_{a_i}, p_{b_2}) + Q_{0B}^{A_2}(X, p_{b_2}). \quad (29)$$

При этом слагаемые в правой части сопоставляются таким же физическим процессам, как в системах нейтральных частиц, и имеют нетривиальное отличие от (18) в асимптотике.

Первое слагаемое в (29), которое отвечает начальному состоянию системы, выражается через компоненты собственной функции $\Psi_B(x_{b_2})$ и функцию χ_{b_2} :

$$\chi_{B_3B}(X, p_{b_2}) = \Psi_{B_3B}(x_{b_2}) \chi_{b_2}(y_{b_2}, p_{b_2}).$$

Асимптотика этого слагаемого была описана выше.

Функции $Q_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}$ и $Q_{0B}^{A_2}$, которые сопоставляются процессам перестройки и распада кластеров, асимптотически превращаются в искаженные сферические волны с ограниченными гладкими амплитудами:

$$Q_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}(y_{a_i}, p_{b_2}) \sim h_{AB}^{a_2 \dots a_{i-1}}(\hat{y}_{a_i}, p_{b_2}) |y_{a_i}|^{\frac{4-3i}{2}} \times \exp \{i \sqrt{E + \varepsilon_A} |y_{a_i}| + iW_{AB}(y_{a_i})\}; \quad (30)$$

$$Q_{0B}^{A_2}(X, p_{b_2}) \sim h_{0B}^{A_2}(\hat{X}, p_{b_2}) |X|^{\frac{4-3N}{2}} \exp \{i \sqrt{E} |X| + iW_{0B}(X)\}. \quad (31)$$

Кулоновские фазы W_{AB} и W_{0B} , искажающие сферические волны, даются равенствами:

$$W_{AB} = - \sum_{\substack{\omega_l, \omega_k \\ l \neq k}} \frac{n_{\omega_l \omega_k}}{2 \sqrt{E + \varepsilon_A}} \frac{|y_{a_i}|}{|y_{\omega_l \omega_k}|} \ln 2 \sqrt{E + \varepsilon_A} |y_{a_i}|; \quad (32)$$

$$W_{0B}(X) = - \sum_{i \neq j} \frac{\sqrt{2\mu_{ij} q_i q_j}}{2 \sqrt{E}} \frac{|X|}{|y_{ij}|} \ln 2 \sqrt{E} |X|. \quad (33)$$

Суммирование в формуле (32) ведется по различным подсистемам разбиения a_i ; $y_{\omega_l \omega_k}$ — приведенная относительная координата

подсистем ω_l и ω_k . В формуле (33) индексами i и j нумеруют различные частицы системы N частиц; μ_{ij} и y_{ij} — приведенные масса и относительная координата частиц i и j ; q_i — заряд i -й частицы.

Как мы отмечали, при $\xi_{b_2} \rightarrow \infty$ можно разделить плоские и сферические волны в первом слагаемом (29). Следовательно, в амплитуду упругого рассеяния $B \rightarrow B$ будут входить два слагаемых — чисто кулоновская амплитуда $a_{b_2}^c$ и амплитуда h_{BB} из (30), которая учитывает эффективное короткодействующее взаимодействие между кластерами:

$$f_{BB} = a_{b_2}^c + h_{BB}.$$

Амплитуды возбуждения и перестройки кластеров для процессов $2 \rightarrow 2$ f_{AB} совпадают с амплитудами h_{AB} ($A \equiv J_{a_1}$). Амплитуды же процессов $2 \rightarrow l$, $l > 2$, когда возможны образования более чем двух кластеров в конечном состоянии, получаются из $h_{AB}^{a_2 \dots a_{l-1}}$ суммированием по компонентам:

$$f_{AB} = \sum_{a_2 \dots a_{l-1}} h_{AB}^{a_2 \dots a_{l-1}}, \quad A = J_{a_1};$$

$$f_{0B} = \sum_{A_2} h_{0B}^{A_2}.$$

При этом эффективные сечения указанных процессов выражаются через амплитуды теми же формулами, что и в случае нейтральных частиц.

Особо следует оговорить характер асимптотических условий в случае уравнений типа (25), которые получаются, если взять $\chi_{a_{N-1}} = 0$. Если все частицы заряжены одноименно, то асимптотика компонент имеет такой же вид, как и асимптотика аналогичных компонент в случае уравнений (23) с $\chi_{a_{N-1}} \neq 0$. Эта асимптотика описывается формулами (29)—(33). Если же в системе имеются разноименно заряженные частицы, то ничего определенного об асимптотике компонент (25) уже сказать нельзя. Как показывают примеры, асимптотика будет зависеть от числа разноименно заряженных пар. При этом оказывается необходимым учитывать вклад «нефизических» каналов, которые отвечают связанным состояниям для «чисто» кулоновских потенциалов. Эта асимптотика выглядит даже сложнее, чем асимптотика полной волновой функции. Поэтому в случае разноименно заряженных частиц следует использовать только уравнения (23) при $\chi_{a_{N-1}} \neq 0$.

Модель граничных условий. Рассмотрим еще одну задачу, которая может быть решена в конфигурационном пространстве. Это — модель граничных условий. В этой модели взаимодействие между частицами задается не только потенциалами, но и краевыми условиями на волновую функцию. Таким образом, эта задача формулируется в терминах координатного представления. Покажем, что ее решение также естественным образом может быть получено в этом представлении. Начнем с задачи трех тел.

Система трех твердых сфер. Будем считать ради простоты, что парные потенциалы равны нулю, и рассмотрим сначала нулевые граничные условия (модель трех твердых сфер [27, 28]).

В модели граничных условий конфигурационное пространство Ω состоит из точек, которые удовлетворяют условиям

$$|x_\alpha| \geq C_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

где параметр C_α определяет минимальное расстояние, на которое могут сближаться твердые сферы. Оператор энергии определяется выражением

$$Hf(X) = -\Delta f(X) \quad (34)$$

на функциях f , которые подчиняются граничным условиям Дирихле

$$f|_{\partial\Omega} = 0 \quad (35)$$

на границе области Ω . Пример конфигурационного пространства для трех одинаковых одномерных сфер дан на рис. 2.

С точки зрения локальных потенциалов твердая сердцевина соответствует бесконечно сильному отталкиванию при $|x_\alpha| \leq C_\alpha$. Это толкование граничных условий помогает понять, почему уравнения Фаддеева (4), полученные в предположении достаточной гладкости потенциалов, в данном случае нельзя использовать для формулировки задачи рассеяния. Вопрос о модификации этих уравнений обсуждался в многочисленных работах (см., например, [29—31]).

Мы не будем здесь останавливаться на анализе соответствующих подходов. Отметим лишь, что в рамках этих подходов не удалось полностью преодолеть основные трудности проблемы. В частности, уравнения, предложенные в этих работах, не могут быть использованы для исследования особенностей функции Грина и соответственно для обоснования задачи рассеяния.

В [16] были предложены интегральные уравнения типа уравнений Фаддеева, которые позволяют решить указанные задачи. Коротко опишем основную идею этой работы. При традиционном методе исследования краевых задач решение строится методами теории потенциала [32, 33]. В частности, для функции Грина оператора энергии (34) используется представление в виде потенциала простого слоя. При этом поверхность $\partial\Omega$, на которой задана плотность потенциала, является неограниченной. В результате в задачах с компактными границами [32, 33] интегральные уравнения простого слоя оказываются нефредгольмовыми. Чтобы перейти к уравнениям типа Фредгольма, можно использовать метод Фаддеева — явно

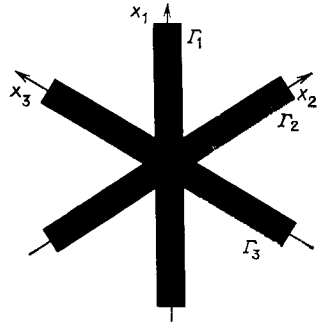


Рис. 2. Конфигурационное пространство трех одинаковых одномерных частиц в модели граничных условий

обратить диагональные сингулярные части интегральных операторов. Такие перестроенные уравнения могут быть также сформулированы и в дифференциальной форме. Последний подход наиболее приспособлен для численных расчетов.

Опишем интегральные уравнения Фаддеева для потенциала простого слоя. Функция Грина оператора энергии (34) подчиняется уравнению:

$$(-\Delta_X - z) R(X, X', z) = \delta(X - X') \quad (36)$$

при X, X' из Ω и граничным условиям

$$R(X, X', z)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (37)$$

по каждой переменной X, X' . С помощью формулы Грина можно получить следующее соотношение:

$$R(X, X', z) = R_0(X, X', z) - \int_{\partial\Omega} dS R_0(X, S, z) \frac{\partial}{\partial n_e} R(S, X', z), \quad (38)$$

где $R_0(X, X', z)$ — функция Грина свободного гамильтониана H_0 . Как следует из этого представления, функция Грина $R(X, X', z)$ может быть явно выражена через значение ее нормальной производной на границе. Эта производная задает плотность $\mu(S) = \frac{\partial}{\partial n_e} R(S, X', z)$ потенциала простого слоя

$$U(X, z) = \int_{\partial\Omega} dS R_0(X, S, z) \mu(S).$$

Напомним, что этот потенциал имеет непрерывные нормальные производные, когда переменная X принимает значение на границе:

$$\lim_{X \rightarrow S \mp 0} \frac{\partial U}{\partial n_{i,e}} = \mp \frac{1}{2} \mu(S) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} R_0(S, S', z) \mu(S') dS'. \quad (39)$$

Здесь знак $- (+)$ соответствует внутреннему (i) [внешнему (e)] пределу.

Дифференцируя уравнение (38) и учитывая (39), получаем следующее интегральное уравнение для плотности $\mu(S)$:

$$\frac{1}{2} \mu(S) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} R_0(S, S', z) \mu(S') dS' = \frac{\partial}{\partial n} R_0(S, X', z). \quad (40)$$

Как мы отмечали выше, это уравнение является нефредгольмовым ввиду неограниченности поверхности $\partial\Omega$. Перейдем к уравнениям типа Фаддеева для компонент плотности.

Уравнения Фаддеева для потенциала простого слоя. Введем сначала несколько новых обозначений. Обозначим Γ_α гиперцилиндр $|x_\alpha| = C_\alpha$ в пространстве R^6 . Часть этого цилиндра, принадлежа-

щую границе $\partial\Omega$, обозначим Γ_α^e и Γ_α^i — дополнение Γ_α^e к Γ_α . Будем называть Γ_α внешней, а Γ_α^i — внутренней частью цилиндра (по отношению к Ω). Ясно, что поверхность $\partial\Omega$ является объединением Γ_α^e , $\partial\Omega = \bigcup_\alpha \Gamma_\alpha^e$. Будем называть компонентой плотности функцию $\mu_\alpha^e(S)$, заданную на Γ_α^e . При этом удобно рассматривать компоненты как функции, заданные на всем гиперцилиндре. Тогда μ_α^e (μ_α^i) обозначим нетривиальную часть $\mu_\alpha(S)$, заданную на внешней (внутренней) части Γ_α , а P_α^e и P_α^i — операторы умножения на характеристические функции Γ_α^e и Γ_α^i . При этом, например, $P_\alpha^e \mu_\alpha = \mu_\alpha^e$ на Γ_α^e и $P_\alpha^e \mu_\alpha = 0$ на Γ_α^i .

В этих обозначениях уравнение (40) может быть переписано в виде системы трех уравнений для компонент μ_α :

$$\frac{1}{2} P_\alpha^e \mu_\alpha = P_\alpha^e \vec{V}_\alpha R_0 - P_\alpha^e \vec{V}_\alpha R_0 \sum_{\beta \neq \alpha} P_\beta^e \mu_\beta. \tag{41}$$

Здесь использовано обозначение $\vec{V}_\alpha R_0$ для интегрального оператора с ядром, равным нормальной производной ядра R_0 :

$$(\vec{V}_\alpha R_0)(S, X', z) = \frac{\partial}{\partial n} R_0(S, X', z), \quad S \in \Gamma_\alpha, X' \in \Omega. \tag{42}$$

С другой стороны, это уравнение можно использовать для того, чтобы определить внутреннюю часть компоненты μ_α^i : операторы P_α^e следует заменить операторами P_α^i . Тогда полные компоненты будут удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{1}{2} \mu_\alpha = \vec{V}_\alpha R_0 - \vec{V}_\alpha R_0 \sum_{\beta \neq \alpha} P_\beta^e \mu_\beta. \tag{43}$$

Далее, согласно методу Фаддеева следует перенести диагональный член с $\beta = \alpha$ в левую часть и обратить возникающий при этом оператор $1/2 I + \vec{V}_\alpha R_0$. В результате получают следующие уравнения Фаддеева для потенциала простого слоя [16]:

$$\mu_\alpha = \vec{V}_\alpha R_0 + \frac{1}{2} \vec{V}_\alpha \rho_\alpha \mu_\alpha^i - \vec{V}_\alpha R_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \mu_\beta^e. \tag{44}$$

Здесь R_α — функция Грина для оператора энергии системы двух сфер в трехчастичном пространстве. Последний определяется соотношениями (36), (37), где граничные условия Дирихле ставятся на гиперцилиндре Γ_α ; ρ_α — плотность двойного слоя, которая задает функцию Грина $R_\alpha(X, X', z)$ в виде

$$R_\alpha(X, X', z) = R_0(X, X', z) - \int_{\Gamma_\alpha} dS \rho_\alpha(X, S, z) \frac{\partial}{\partial n} R_0(S, X', z). \tag{45}$$

При этом как функция ρ_α , так и ядро R_α явно выражаются в терминах задачи двух сфер [16].

Полученные уравнения можно исследовать обычными методами теории потенциала [32, 33]. Можно показать, в частности, что матричный интегральный оператор, определяемый правой частью (44), может быть представлен в виде суммы вполне непрерывного оператора и оператора с нормой меньше единицы [16]. При этом последний порождается окрестностями углов, которые образованы пересечением гиперцилиндров Γ_α . Таким образом, к уравнениям (44) применима альтернатива Фредгольма и с их помощью можно исследовать свойства плотности $\mu(S)$. Наконец, зная поведение $\mu(S)$, можно изучить свойства функции Грина $R(X, X', z)$ с помощью представления (38). Дальнейшая процедура построения волновых функций и исследования их свойств (полноты, ортогональности, асимптотик и т. д.) полностью аналогична процедуре, отработанной для трехчастичной задачи с ограниченными гладкими потенциалами [25].

Итак, мы описали интегральные уравнения, которые могут служить основой для обоснования задачи рассеяния в системе трех твердых сфер. На следующем этапе мы перейдем к дифференциальным уравнениям для компонент, которые удобно использовать для численных расчетов.

Формализм обобщенных потенциалов. Чтобы получить дифференциальные уравнения для компонент, удобно использовать формализм обобщенных потенциалов. Коротко опишем этот подход.

Приведем эвристические рассуждения, которые лежат в основе метода обобщенных потенциалов. Заметим сначала, что уравнение (38) можно толковать как уравнение Липпмана — Швингера с обобщенным потенциалом \vec{V} , который действует на функции $f(X)$ согласно равенству

$$\vec{V}f = \delta(\partial\Omega) \frac{\partial}{\partial n_e} f. \quad (46)$$

Здесь $\delta(\partial\Omega)\varphi$ — обобщенная функция, называемая простым словом [34], и $\frac{\partial}{\partial n_e} f$ — предельные значения из Ω на $\partial\Omega$ нормальной производной f . Отметим, что обобщенная функция $\delta(\partial\Omega)\varphi$ действует согласно равенству:

$$(g, \delta(\partial\Omega)\varphi) = \int_{\partial\Omega} dS g(S) \varphi(S).$$

Следуя этой формальной аналогии, рассмотрим наряду с интегральным уравнением уравнение Шредингера с обобщенными потенциалами. При этом, чтобы формальная аналогия с системой трех частиц была полной, мы, как и при выводе уравнений (44), добавим к потенциалам нетривиальные слагаемые, локализованные на поверхностях Γ_α^i . В результате представим обобщенный потенциал в виде

суммы $\sum_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}$, где каждое слагаемое действует согласно (46) на всем гиперцилиндре Γ_{α} . Соответствующий оператор энергии определим выражением

$$Hf(X) = -\Delta f(X) + \sum_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} f(X), \quad (47)$$

где переменная X пробегает все пространство R^6 . Тем самым мы расширяем область определения оператора (34) на функции, заданные как вне, так и внутри поверхности $\partial\Omega$. Заметим далее, что согласно (39) эти функции следует считать непрерывными вместе со своими производными вплоть до поверхностей Γ_{α} и допускать существование разрывов

$$f^e - f^i, \quad \frac{\partial}{\partial n_e} f - \frac{\partial}{\partial n_i} f$$

при переходе через эти поверхности. Множество таких функций обозначим \mathcal{D} .

На этом множестве действие оператора Лапласа должно пониматься в смысле обобщенных функций следующим образом [34]:

$$-\Delta f = -\Delta_X f - \sum_{\alpha} \delta(\Gamma_{\alpha}) \left(\frac{\partial f}{\partial n_e} - \frac{\partial f}{\partial n_i} \right) + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial n} \delta(\Gamma_{\alpha}) (f^i - f^e). \quad (48)$$

Здесь Δ_X — оператор Лапласа, понимаемый в обычном смысле в пространстве R^6 с исключенными поверхностями Γ_{α} ; $\delta(\Gamma_{\alpha}) \varphi$ — простой слой на поверхности Γ_{α} и $\frac{\partial}{\partial n} (\delta(\Gamma_{\alpha}) \varphi)$ — двойной слой на этой поверхности.

Итак, мы пришли к выводу о целесообразности рассмотрения оператора энергии (47), определенного на множестве \mathcal{D} равенствами (47) и (48). Посмотрим теперь, какие граничные условия выполняются для функций, удовлетворяющих уравнению Шредингера с этим оператором:

$$(-\Delta + \sum_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}) \Psi = E\Psi. \quad (49)$$

Для этого раскроем левую часть (49) с помощью (46) и (48). Получим, что вне поверхностей Γ_{α} эти функции подчиняются уравнению

$$(-\Delta - E) \Psi = 0. \quad (50)$$

Приравнивая нулю остальные слагаемые, придем к двусторонним граничным условиям, которые должны выполняться на Γ_{α} :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \Psi|_{\Gamma_{\alpha}} = 0; \quad (51)$$

$$\Psi^i|_{\Gamma_{\alpha}} = \Psi^e|_{\Gamma_{\alpha}}. \quad (52)$$

Таким образом, внутри гиперцилиндров Γ_α должны выполняться уравнения Гельмгольца (50) с краевыми условиями Неймана (51). При этом нужно рассматривать совокупность таких задач, отвечающих возможным областям, которые ограничены пересечениями поверхностей Γ_α (см. рис. 2). С другой стороны, если точка E не принадлежит дискретному спектру этих внутренних задач, то соответствующие решения тождественно равны нулю, $\Psi^i = 0$. Поэтому из (52) вытекает, что во внешней области Ω должно выполняться уравнение (50) с граничным условием Дирихле (35).

Итак, в Ω решение уравнения Шредингера (49) с обобщенными потенциалами совпадает с решением уравнения Шредингера для трех твердых сфер. На этом результате и основан метод обобщенных потенциалов в модели граничных условий.

Покажем теперь, как метод обобщенных потенциалов можно трактовать в рамках интегральных уравнений. Введем в рассмотрение обобщенную функцию Грина $G(X, X', z)$ с помощью уравнения (49) с δ -функцией $\delta(X - X')$ в правой части. Как и в случае функции (36), можно показать, что $G(X, X', z)$ удовлетворяет уравнению Липпмана — Швингера (38), где в качестве поверхности интегрирования в данном случае следует взять совокупность поверхностей Γ_α , т. е. $\partial\Omega \rightarrow \bigcup_{\alpha} \Gamma_\alpha$. В операторной форме это уравнение имеет вид

$$G(z) = R_0(z) - R_0(z) \sum_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} G(z). \quad (53)$$

Как и в случае волновых функций, можно показать, что $G(X, X', z)$ совпадает с функцией Грина (36), когда переменные X, X' лежат в области Ω (в других случаях функция G выражается с помощью функций Грина внутренних задач Неймана).

Чтобы изучить свойства функции G , удобно перейти к уравнениям теории потенциала. При этом, в отличие от (40), здесь плотность $\mu(S)$ с самого начала задается не только на Γ_{α}^e , но и на Γ_{α}^i . Для компонент плотности потенциала простого слоя $\mu_{\alpha} = \partial/\partial n_e G|_{\Gamma_{\alpha}}$ таким же путем, как и в случае функции $R(X, X', z)$, можно получить следующие уравнения Фаддеева:

$$\mu_{\alpha} = \vec{V}_{\alpha} G_{\alpha} - \vec{V}_{\alpha} G_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \mu_{\beta}. \quad (54)$$

Здесь G_{α} — обобщенная функция Грина, определяемая как решение уравнения (49), которое содержит только один обобщенный потенциал \vec{V}_{α} .

Уравнения (54) рассматриваются на функциях, заданных на поверхностях Γ_{α} . Их можно переписать как уравнения в конфигурационном пространстве, если перейти к операторам $M_{\alpha} = \vec{V}_{\alpha} G$, которые можно трактовать как обобщенные компоненты T -матрицы.

Последние связаны с плотностями равенствами $M_\alpha = \delta(\Gamma_\alpha) \mu_\alpha$. Упомянутые уравнения для M_α имеют следующий вид:

$$M_\alpha = \vec{V}_\alpha G_\alpha - \vec{V}_\alpha G_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} M_\alpha. \quad (55)$$

По определению решения уравнений (54) совпадают с компонентами, которые удовлетворяют уравнению (44), на внешних частях цилиндров Γ_α . Можно показать, что на внутренних частях Γ_α эти решения равны нулю. Отсюда, в частности, следует, что представления (38) и (53) для функции Грина эквивалентны.

Итак, мы описали альтернативный формализм в задаче трех твердых сфер, в котором граничные условия воспроизводятся с помощью обобщенных потенциалов. В рамках этого подхода легко включить и дополнительное взаимодействие, которое задается с помощью обычных потенциалов. Все что нужно сделать — это заменить в соотношениях (47) — (55) обобщенные потенциалы \vec{V}_α суммой обобщенных и обычных $\vec{V}_\alpha + V_\alpha$.

Аналогично можно рассмотреть модель, в которой используются произвольные граничные условия третьего рода

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n_e} + \tau f \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (56)$$

При этом формальная схема остается без изменения. Обобщенные потенциалы в данном случае определяются равенством

$$\vec{V}_\alpha f = -\delta(\Gamma_\alpha) \tau f^e + \frac{\partial}{\partial n_e} (\delta(\Gamma_\alpha) f^e). \quad (57)$$

Перейдем к формулировке дифференциальных уравнений для компонент.

Дифференциальные уравнения для компонент. В формализме обобщенных потенциалов компоненты и дифференциальные уравнения для них строятся таким же способом, как и в случае обычных потенциалов. При этом можно рассматривать и комбинацию взаимодействий, когда наряду с граничными условиями имеются гладкие потенциалы. Например, в задаче трех тел компоненты волновой функции вводятся равенством

$$\Psi_\alpha = -R_0 (V_\alpha + \vec{V}_\alpha) \Psi.$$

Дифференциальные уравнения Фаддеева для этих компонент имеют следующий вид:

$$(-\Delta + V_\alpha + \vec{V}_\alpha - E) \Psi_\alpha = -(V_\alpha + \vec{V}_\alpha) \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_\beta. \quad (58)$$

Обобщенные потенциалы порождают граничные условия для компонент. Например, в модели твердых сфер эти условия имеют вид

$$\left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial n_i} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial n_e} \right) \Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad \Psi_\alpha^i \Big|_{\Gamma_\alpha} = \Psi_\alpha^e \Big|_{\Gamma_\alpha}. \quad (59)$$

С другой стороны, поскольку уравнение (58) эквивалентно уравнению Шредингера (49) с граничными условиями (51) и (52), эти компоненты будут также удовлетворять более простым условиям

$$\sum_{\alpha} \Psi_{\alpha} |_{\Gamma_{\alpha}} = 0.$$

Этих условий достаточно, для того чтобы определить компоненту Ψ_{α} во внешней части гиперцилиндра Γ_{α} .

Чтобы однозначно задать волновые функции, мы должны также присоединить к уравнениям (58) асимптотические условия. Последние имеют такой же вид, как и в случае обычных потенциалов (5), (6).

Наконец, в изложенную выше схему можно включить и далекодействующие потенциалы. При этом в модифицированных дифференциальных уравнениях для компонент следует заменить короткодействующие потенциалы суммой короткодействующих и обобщенных: $V_{\alpha}^{(s)} \rightarrow V_{\alpha}^{(s)} + \vec{V}_{\alpha}$.

Рассмотрим, наконец, задачу N тел. Мы ограничимся только описанием формализма обобщенных потенциалов и не будем обсуждать вопросы его обоснования. Граничные условия на волновую функцию в этом случае ставятся на гиперцилиндрах $\Gamma_{\alpha_{N-1}}$, задаваемых условием $|x_{\alpha_{N-1}}| = C_{\alpha_{N-1}}$.

Соответствующая краевая задача во внешности этих гиперцилиндров может быть решена с помощью уравнения Шредингера с обобщенными потенциалами

$$(-\Delta_x + \sum_{\alpha_{N-1}} (V_{\alpha_{N-1}} + \vec{V}_{\alpha_{N-1}}) - E) \Psi = 0.$$

От уравнения Шредингера можно перейти к уравнениям для компонент Ψ_{A_2} (17), где следует взять сумму обычных и обобщенных потенциалов; $V_{\alpha_{N-1}} \rightarrow V_{\alpha_{N-1}} + \vec{V}_{\alpha_{N-1}}$. При этом обобщенные потенциалы порождают краевые условия. Например, в модели N твердых сфер имеем условия:

$$\Psi_{A_2}^i |_{\Gamma_{\alpha_{N-1}}} = \Psi_{A_2}^e |_{\Gamma_{\alpha_{N-1}}}, \left(\frac{\partial \Psi_{A_2}}{\partial n_i} + \frac{\partial \tilde{\Psi}_{A_2}}{\partial n_e} \right) \Big|_{\Gamma_{\alpha_{N-1}}} = 0,$$

где

$$\tilde{\Psi}_{A_2} = \sum_{i=3}^{N-1} \sum'_{\substack{C_i \neq A_i \\ C_i \subset \alpha_{i-1}}} \Psi_{\alpha_2 \dots \alpha_{i-1}} C_i + \sum_{b_2 \neq \alpha_2} \sum'_{\substack{B_3 \neq A_3 \\ B_3 \subset \alpha_2}} \Psi_{B_2}.$$

Асимптотические граничные условия для компонент волновых функций остаются такими же, как и в случае обычных потенциалов (18)—(20).

Наконец, отметим, что модифицированные уравнения для компонент в случае далекодействующих потенциалов можно применять

и после постановки граничных условий. Необходимо лишь заменять короткодействующие потенциалы суммой $V_a^{(s)} N_{-1} + \vec{V}_{a N_{-1}}$.

На этом мы закончим описание дифференциального формализма в модели граничных условий. Мы видим, что основные уравнения, рассмотренные выше, сохраняют свою форму, если пользоваться обобщенными потенциалами. Ниже мы покажем, что этот подход успешно можно использовать для численных расчетов.

2. РАССЕЙНИЕ НУКЛОНОВ НА ДЕЙТРОНЕ

На примере простейших трехчастичных систем ядерной физики (npn) и (npp) опишем схему применения дифференциальных уравнений Фаддеева для численного решения задачи рассеяния. Проведем парциальный анализ этих уравнений и сформулируем асимптотические условия для парциальных компонент, соответствующие процессам Nd -рассеяния. Изложение ведется сразу для более общего случая pd -рассеяния, когда в системе кроме ядерного есть и дальнедействующее кулоновское взаимодействие.

S-волновые уравнения Фаддеева. В формализме изоспина все частицы системы (npp) считаются тождественными. Волновая функция системы является спинором в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\tau$, где \mathcal{H}_s (\mathcal{H}_τ) — пространство спиноров, характеризующих спиновое (изоспиновое) состояние системы. Компоненты Фаддеева Ψ_α также спиноры из \mathcal{H} . Они удовлетворяют системе модифицированных уравнений Фаддеева (25). В данном случае это уравнения в пространстве $L_2(R^6) \otimes \mathcal{H}$:

$$(-\Delta + V^c + V_\alpha - E) \Psi_\alpha = -V_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_\beta, \tag{60}$$

где V^c и V_α — кулоновский и ядерный потенциалы. Они являются операторами в пространстве \mathcal{H} . Например, кулоновский потенциал имеет вид

$$V^c = \sum_\alpha \frac{n}{|x_\alpha|} \prod_{i \neq \alpha} \frac{1}{2} (1 + \tau_i^z), \quad n = \frac{mNe^2}{\hbar^2}, \tag{61}$$

где τ_i^z — оператор проекции изоспина частицы i из пары частиц α .

Тождественность частиц приводит к простой связи [9] между компонентами Фаддеева и позволяет выразить волновую функцию Ψ через одну компоненту с каким-либо фиксированным индексом α :

$$\Psi = (1 + \mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^-) \Psi_\alpha, \tag{62}$$

где \mathcal{P}^\pm — операторы циклической перестановки частиц:

$$\mathcal{P}^+ (123) = (312), \quad \mathcal{P}^- (123) = (231). \tag{63}$$

Для определенности будем считать, что пара α в (62) состоит из частиц (2,3). Символами без индексов, нумерующих разбиение, будем обозначать все величины, относящиеся к этому разбиению ($\Psi = \Psi_\alpha$, $V = V_\alpha$, $x = x_\alpha$ и т. д.).

Представление (62) сводит систему (60) к одному уравнению для компоненты Ψ :

$$(-\Delta + V^c + V - E) \Psi = -V (\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^-) \Psi. \quad (64)$$

Чтобы привести это уравнение к виду, пригодному для численных расчетов, нужно отделить в (64) спин-изоспиновые и угловые переменные. С этой целью введем в спиновом пространстве \mathcal{H}_s -базис, элементы которого классифицируются по значениям полного спина системы S и суммарного спина s_{23} пары (2,3). Элементы этого базиса χ_i ($i = 0, 1, 2$) характеризуются табл. 1 и подробно описаны, например, в [35]. Базисом в изоспиновом пространстве \mathcal{H}_τ являются аналогичные спиноры η_i ($i = 0, 1, 2$).

Таблица 1. Элементы
спинового базиса

Элементы базиса	s_{23}	S
χ_0	0	1/2
χ_1	1	1/2
χ_2	1	3/2

Таким образом, в пространстве \mathcal{H} базис образуют 9 спиноров $\chi_i \otimes \eta_k$.

Поскольку полный спин системы сохраняется, то парциальный анализ можно проводить независимо для $S = 1/2$ (дублет) и $S = 3/2$ (квартет). При $S = 3/2$ компонента Ψ — трехмерный спинор в пространстве с базисом ${}^4e_i = \chi_2 \otimes \eta_i$, $i = 0, 1, 2$, а при

$S = 1/2$ она спинор в шестимерном пространстве с базисом ${}^2e_{ik} = \chi_i \otimes \eta_k$, $i = 0, 1, k = 0, 1, 2$.

Проведем парциальный анализ для более простого случая квартета. Для этого опишем сначала представления операторов V^c , V и \mathcal{P}^\pm в базисе $\{{}^4e_i\}$.

Несложный подсчет показывает, что представление операторов перестановки определяется матрицей [35]

$${}^4P^\pm = \{ \langle {}^4e_k | \mathcal{P}^\pm | {}^4e_i \rangle \} = \begin{pmatrix} -1/2 & \mp \sqrt{3}/2 & 0 \\ \pm \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представление оператора кулоновского взаимодействия (61) также легко вычисляется и задается матрицей [35]

$$W^c = \{ \langle {}^4e_k | V^c | {}^4e_i \rangle \} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & -\sqrt{2} w_{12} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ -\sqrt{2} w_{12} & w_{23} & w_{33} \end{pmatrix}$$

с элементами

$$\left. \begin{aligned} w_{11} &= \frac{1}{2} (V_2^c + V_3^c), \quad w_{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (V_2^c - V_3^c); \\ w_{22} &= \frac{2}{3} \left(V_1^c + \frac{1}{2} w_{11} \right), \quad w_{23} = \frac{\sqrt{2}}{3} (V_1^c - w_{11}); \\ w_{33} &= \frac{1}{3} \sum_{\alpha=1}^3 V_{\alpha}^c, \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

где V_{α}^c — кулоновский потенциал в паре частиц α :

$$V_1^c = n/|x|, \quad V_2^c(x, y) = V_3^c(x, -y) = n \left| \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} \right|^{-1}.$$

(Здесь $1/2$ и $\sqrt{3}/2$ — коэффициенты перехода от одной системы приведенных координат Якоби к другой в случае равных масс частиц.)

Зависимость ядерного взаимодействия только от суммарного спина пары частиц приводит к диагональности потенциала V в базисе $\{^4e_i\} : \langle ^4e_i | V | ^4e_k \rangle = \delta_{ik} V_k(x)$. При этом $V_k(x) = 0$ при $k = 1, 2$, так как в синглет-синглетном ($s_{23} = \tau_{23} = 0$) и триплет-триплетном ($s_{23} = \tau_{13} = 1$) состояниях ядерное взаимодействие отсутствует.

Разложим теперь компоненту Ψ по спин-изоспиновому базису:

$$\Psi = \sum_{i=0}^2 \Psi_i(x, y) ^4e_i$$

и спроектируем уравнение (64) на элементы этого базиса. В результате получим систему уравнений относительно коэффициентов Ψ_i :

$$\left. \begin{aligned} (-\Delta + V_0 + w_{11} - E) \Psi_0 + w_{12} (\Psi_1 - \sqrt{2} \Psi_2) &= -V_0 \tilde{\Psi}_0; \\ (-\Delta + w_{22} - E) \Psi_1 + w_{12} \Psi_0 + w_{23} \Psi_2 &= 0; \\ (-\Delta + w_{33} - E) \Psi_2 - \sqrt{2} w_{12} \Psi_0 + w_{23} \Psi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

где

$$\tilde{\Psi}_0 = \sum_{i=0}^2 ({}^4P_{0i}^+ \mathcal{P}^+ + {}^4P_{0i}^- \mathcal{P}^-) \Psi_i.$$

Следующим этапом является отделение угловых переменных в уравнениях (66). Его удобно проводить в бисферическом базисе

$$|\lambda LL\rangle = \sum_{m+\mu=M} \langle l m \lambda \mu | LM \rangle Y_l^m(\hat{x}) Y_{\lambda}^{\mu}(\hat{y}), \quad (67)$$

где L — полный орбитальный момент системы.

Представление операторов перестановки в базисе (67) вычислено в [9]. Оно задается выражением

$$\begin{aligned} \langle \lambda' l' L' | \mathcal{P}^* U(|x|, |y|) |\lambda LL\rangle &= (-1)^{\lambda+\lambda'} \langle \lambda' l' L' | \mathcal{P}^{-*} U(|x|, |y|) |\lambda LL\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{L L'} (\hat{\lambda}^L_{\lambda' l', \lambda l} U)(|x|, |y|), \end{aligned}$$

где $\hat{h}_{\lambda' l', \lambda l}^L$ — интегральный оператор, который в полярных координатах $\rho^2 = x^2 + y^2$, $\text{tg} \theta = |y|/|x|$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (\hat{h}_{\lambda' l', \lambda l}^L U)(\rho, \theta) &= \int_{\theta^-}^{\theta^+} h_{\lambda' l', \lambda l}^L(\theta, \theta') U(\rho, \theta') d\theta', \\ \theta^+ &= \frac{\pi}{2} - \left| \theta - \frac{\pi}{6} \right|, \quad \theta^- = \left| \theta - \frac{\pi}{3} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Ядро оператора (68) описано в [9].

Ядерное взаимодействие диагонально в бисферическом базисе:

$$\langle \lambda l L | V_0 | \lambda' l' L' \rangle = \delta_{\lambda L} \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{l l'} V_0^l(x).$$

При этом для потенциалов, действующих только в s -состоянии, отличен от нуля лишь матричный элемент V_0^0 . В соответствии с традицией обозначим его V^l .

Разлагая функции Ψ_i в ряд по бисферическим гармоникам

$$\Psi_i = \sum_{\lambda, l} \frac{\Psi_i^{\lambda l}(|x|, |y|)}{|x| |y|} |\lambda l L\rangle \quad (69)$$

и отделяя затем в (66) угловые переменные, получаем бесконечную систему связанных уравнений для парциальных компонент $\Psi^{\lambda l}_i$. Эти уравнения зацеплены матричными элементами

$$\langle \lambda l L | w_{11} | \lambda' l' L \rangle, \quad \langle \lambda l L | w_{12} | \lambda' l' L \rangle \quad (70)$$

кулоновских потенциалов из (65).

Ясно, что для численного решения задачи эту бесконечную систему уравнений нужно «обрезать», т. е. учитывать в разложении компонент (69) только несколько парциальных членов. Рассмотрим, например, уравнения, которые получаются при сохранении в (69) только первого члена с $l = 0$, $\lambda = L$.

Матричные элементы (70) по функциям $|LOL\rangle$ в полярных координатах равны:

$$\langle LOL | w_{11} | LOL \rangle = n \int_{-1}^1 du [x^2 - 2\sqrt{3}|x||y|u + 3y^2]^{-1/2} = \frac{n\mu(\theta)}{\rho},$$

$$\mu(\theta) = 2/\max(\sqrt{3} \sin \theta, \cos \theta);$$

$$\langle LOL | w_{12} | LOL \rangle = 0.$$

В силу последнего равенства система (66) при таком обрезании распадается на однородную систему для Ψ_i^{L0} , $i = 1, 2$ и независимое неоднородное уравнение для Ψ_0^{L0} . Следовательно, по теореме единственности [12] $\Psi_i^{L0} = 0$ при $i = 1, 2$. Оставшаяся компонента $\Psi_0^{L0} \equiv \Psi^L$ подчиняется так называемому s -волновому уравнению

Фаддеева [13]:

$$\left(H_{L_0} + V^t + \frac{n\mu(\theta)}{\rho} - E \right) \Psi^L = -\frac{1}{2} V^t \hat{h}_{L_0, L_0}^L \Psi^L, \quad (71)$$

где

$$H_{\lambda l} = -\partial_{|x|}^2 - \partial_{|y|}^2 + \lambda(\lambda + 1) |y|^{-2} + l(l + 1) |x|^{-2}. \quad (72)$$

Интегральный оператор \hat{h}_{L_0, L_0}^L в (71) определен равенством (68). Его ядро выражается через полиномы Лежандра [9]:

$$h_{L_0, L_0}^L(\theta, \theta') = \frac{4L!}{\sqrt{3}} \left(\frac{-\sin \theta}{2 \sin \theta'} \right)^L \sum_{k=0}^L \frac{P_k(u) (\sqrt{3} \operatorname{ctg} \theta)k}{k!(L-k)!}, \quad (73)$$

где $u = -(\cos 2\theta + 2 \cos 2\theta')/\sqrt{3} \sin \theta$.

Таким образом, в результате обрезания при $l = 0, \lambda = L$ система уравнений (66) сводится к одному s -волновому уравнению Фаддеева (71). Отметим, что в системе (npr) (когда кулоновский потенциал отсутствует) это уравнение является точным для ядерных потенциалов, действующих только в s -состоянии. Для системы (npp) s -волновое уравнение является приближенным, так как в нем не учитываются высшие парциальные составляющие кулоновского взаимодействия. Однако, как показывают результаты расчетов, это приближение весьма точно описывает процессы pd -рассеяния при не слишком низких энергиях. По нашим оценкам вклад членов, которые в нем не учитываются, не превышает 1% при энергиях $E_{\text{п.с.}}^p \geq 0,5$ МэВ, что находится на уровне точности расчетов. Причина этого в том, что на расстояниях порядка радиуса действия ядерных сил кулоновское взаимодействие значительно слабее ядерного (так как мал приведенный заряд протона $n = 0,035$ фм⁻¹).

Однако при очень низких энергиях необходимо учитывать кулоновское взаимодействие в высших парциальных волнах [36]. Более подробно вопрос об области применимости s -волнового приближения будет обсуждаться ниже.

Итак, в случае кватретьного рассеяния модифицированное уравнение Фаддеева (64) редуцируется к интегродифференциальному уравнению (71).

При $S = 1/2$ парциальный анализ проводится аналогично и приводит к следующей системе s -волновых уравнений Фаддеева [13, 35]:

$$\begin{aligned} & \left(H_{L_0} + \frac{n\mu(\theta)}{\rho} - E \right) \Psi_0^L = -V^t \tilde{\Psi}_0^L; \\ & \left(H_{L_0} + \frac{2n}{3|x|} + \frac{n\mu(\theta)}{\rho} - E \right) \Psi_1^L + \\ & + \frac{\sqrt{2}n}{3} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{\mu(\theta)}{\rho} \right) \Psi_2^L = -V^s \tilde{\Psi}_1^L; \\ & \left(H_{L_0} + \frac{n}{2|x|} + \frac{2n\mu(\theta)}{3\rho} - E \right) \Psi_2^L + \\ & + \frac{\sqrt{2}n}{3} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{\mu(\theta)}{\rho} \right) \Psi_1^L = -V^s \tilde{\Psi}_2^L, \end{aligned} \quad (74)$$

неоднородные члены в которых равны

$$\tilde{\Psi}_i^L = \Psi_i^L + \sum_{k=0}^2 \hat{h}_{L0, L0}^L G_{ik} \Psi_k^L,$$

где матрица G имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & 0 \\ -3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Компоненты Ψ_i^L соответствуют различным спин-изоспиновым состояниям системы. Первые две из них отвечают дублету по полному изоспину, а компонента Ψ_2^L выражает вклад квартетной составляющей с $T = 3/2$. Отметим, что для системы (nnp) полный изоспин сохраняется и равен $1/2$. В соответствии с этим при $n = 0$ третье уравнение в (74) «отцепляется» от первых двух и имеет, следовательно, тривиальное решение $\Psi_2^L = 0$. Нетривиальность компоненты Ψ_2^L для системы (npp) выражает нарушение закона сохранения изоспина, вызванное наличием электромагнитного взаимодействия.

Асимптотики парциальных компонент. Для однозначной разрешимости уравнений (71), (74) необходимо задать граничные условия для компонент Ψ_i^L . Первое из них вытекает из регулярности волновой функции в начале координат:

$$\Psi_i^L \Big|_{|x|=0} = \Psi_i^L \Big|_{|y|=0} = 0. \quad (76)$$

Кроме того, необходимо наложить асимптотические условия на больших расстояниях. Они получаются парциальным разложением асимптотик (29)–(33) компонент Фаддеева в R^6 . Например, в случае квартетного Nd -рассеяния асимптотика функции Ψ^L имеет вид:

$$\Psi^L \sim_{\rho \rightarrow \infty} \chi_L + {}^4a_L \varphi_d(|x|) Q^L(|y|, k) + {}^4A_L(\theta) Q_0(\rho, \theta) + O(\rho^{-3/2}). \quad (77)$$

Здесь φ_d — волновая функция дейтрона с энергией связи $-\varepsilon$; $k^2 = E + \varepsilon$, а χ_L — парциальная компонента волновой функции начального состояния:

$$\chi_L = \varphi_d(|x|) e^{i\Delta_L^c} F_L(\eta, k|y|), \quad \Delta_L^c = \arg \Gamma(L + 1 + i\eta), \quad (78)$$

где $\eta = n/\sqrt{3}k$, а $F_L(\eta, \rho)$ — волновая функция Кулона [37].

Коэффициенты Q^L и Q_0 в (77) — это уходящие плоская и сферическая волны

$$Q^L = \exp\{i k |y| + i W - i \pi L/2\};$$

$$Q_0 = \rho^{-1/2} \exp\{i \sqrt{E} \rho + i W_0\},$$

искаженные кулоновскими фазами

$$W = -\eta \ln 2k |y|, \quad W_0 = -\frac{n}{2\sqrt{E}} \mu(\theta) \ln 2\sqrt{E} \rho.$$

В случае дублетного рассеяния для описания асимптотик компонент удобно перейти в (74) к представлению, в котором кулоновское взаимодействие диагонально [13, 35]. Этот переход осуществляется унитарным преобразованием $\hat{\Psi}^L = U\Psi^L$ с матрицей

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Асимптотика преобразованных компонент имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Psi}_0^L &\sim \chi_L + {}^2a_L \varphi_d Q^L + \hat{A}_0^L(\theta) Q_0; \\ \hat{\Psi}_1^L &\sim \hat{A}_1^L(\theta) \exp \left\{ i \sqrt{E} \rho + \frac{\ln \sec \theta}{2 \sqrt{E}} \ln 2 \sqrt{E} \rho \right\} \rho^{-1/2}; \\ \hat{\Psi}_2^L &\sim \hat{A}_2^L(\theta) Q_0. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Все физические характеристики Nd -рассеяния определяются коэффициентами в асимптотиках (77) и (80). Например, фазы упругого рассеяния ${}^{2S+1}\Delta_L = \Delta_L^c + {}^{2S+1}\delta_L$ и коэффициенты неупругости ${}^{2S+1}\eta_L$ связаны с величинами ${}^{2S+1}a_L$ соотношением

$${}^{2S+1}a_L = e^{2i\Delta_L^c} \{ {}^{2S+1}\eta_L \exp(2i{}^{2S+1}\delta_L) - 1 \} / 2i,$$

где ${}^{2S+1}\delta_L$ — вклад в фазу ядерного взаимодействия.

Амплитуда упругого рассеяния задается парциальным рядом

$${}^{2S+1}f(k, \theta) = a^c + k^{-1} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1)^{2S+1} a_L P_L(\cos \theta).$$

Здесь a^c — кулоновская амплитуда рассеяния (27).

С помощью дублетной 2f и квартетной 4f амплитуд можно получить дифференциальное сечение упругого рассеяния неполяризованного пучка нуклонов на дейтроне:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{3} |{}^2f|^2 + \frac{2}{3} |{}^4f|^2. \quad (81)$$

Парциальные члены ${}^{2S+1}\mathcal{A}^L$ амплитуды развала выражаются через амплитуды сферических волн в (77) и (80). При $S = 3/2$ они имеют вид:

$${}^4\mathcal{A}^L = \left(1 - \frac{1}{2} \hat{h}_{L0, L0}^L \right) {}^4A_L.$$

В случае дублета амплитуда ${}^2\mathcal{A}^L$ является вектором с тремя компонентами ${}^2\mathcal{A}_i^L$, $i = 0, 1, 2$, которые отвечают различным спин-изоспиновым квантовым числам системы в конечном состоянии. Этот вектор

связан с вектором $\hat{A}^L = (\hat{A}_0^L, \hat{A}_1^L, \hat{A}_2^L)$ равенством

$${}^2\mathcal{A}^L = (1 + \hat{h}_{L0, L0}^L G) U^{-1} \hat{A}^L, \quad (82)$$

где U и G — матрицы из (75), (79). Полная амплитуда развала выражается через ее компоненты ${}^2\mathcal{A}_i^L$ и ${}^4\mathcal{A}^L$ парциальным рядом [9].

Nd -рассеяние в модели граничных условий. Кратко опишем теперь метод решения задачи Nd -рассеяния в модели граничных условий. В этом случае уравнения Фаддеева (58) эквивалентны одному уравнению, аналогичному (64):

$$(-\Delta + V^c + V + \vec{V} - E) \Psi = -(V + \vec{V}) (\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^-) \Psi, \quad (83)$$

где \vec{V} — обобщенный потенциал. В зависимости от типа граничных условий \vec{V} имеет вид (46) или (57). Этот обобщенный потенциал порождает краевые условия типа (59) на цилиндре $|x| = C$, где C — диаметр кора нуклона.

С помощью парциального анализа уравнение (83) при $|x| \neq C$ сводится к обычным s -волновым уравнениям для парциальных компонент (71), (74). Эти уравнения снабжаются дополнительными двусторонними краевыми условиями на прямой $|x| = C$, которые получаются в результате отделения угловых переменных в (59).

Например, в случае жесткого кора [т. е. условий Дирихле (35)] краевые условия при $S = 3/2$ имеют вид [17]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial |x|} U_L(|x|, |y|) |_{|x|=C-0} = 0; \\ U_L(C+0, |y|) = U_L(C-0, |y|), \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

где

$$U_L = \Psi^L - \frac{1}{2} \hat{h}_{L0, L0}^L \Psi^L.$$

Напомним, что $\hat{h}_{L0, L0}^L$ — интегральный оператор (68) с ядром (73). Отметим, что (84) эквивалентно более простому условию $U_L(C, |y|) = 0$, которое удобно использовать в численных расчетах.

Если парные взаимодействия задаются условиями третьего рода, то краевые условия для парциальных компонент имеют вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial |x|} + \tau^t \right] U_L(|x|, |y|) |_{|x|=C+0} = 0, \quad (85)$$

$$U_L(C-0, |y|) = 0,$$

где τ^t (τ^s) — параметр граничного условия в триплетном (синглетном) спиновом состоянии пары частиц (2, 3).

Таким образом, задача Nd -рассеяния в модели граничных условий описывается s -волновыми уравнениями (71), (74), дополненными краевыми условиями (84) или (85) и асимптотиками (77), (80) компонент на больших расстояниях.

Численный метод. Алгоритм решения граничных задач, сформулированных выше, основан на конечно-разностной аппроксимации уравнений (71), (74) в полярных координатах. Такой метод был развит впервые в [10] для расчета nd -рассеяния в потенциальной модели. Затем в [13] он был обобщен на систему pd , а в [17] — на случай nd -рассеяния в модели граничных условий. Опишем основные моменты реализации этого метода на примере четвертого Nd -рассеяния [уравнение (71)] в потенциальной модели.

Прежде всего в уравнении (71) следует явно выделить из компоненты Ψ^L волновую функцию начального состояния χ_L [см. (78)]. В результате (71) сводится к неоднородному уравнению для остатка $\Psi_L = \Psi^L - \chi_L$, которое отличается от (71) только заменой $\Psi^L \rightarrow \Psi_L$ и добавлением в правую часть неоднородного члена

$$\Phi_L = \frac{n}{\rho} \left(\frac{2}{\sqrt{3} \sin \theta} - \mu(\theta) \right) \chi_L - \frac{1}{2} V^t \hat{h}_{L0, L0}^L \chi_L.$$

Для разностной аппроксимации уравнения для функции Ψ_L на квадранте $|x| \geq 0, |y| \geq 0$ наносится сетка, которая имеет N_θ узлов $\{\theta_i\}$ на дуге $\rho = \text{const}$ и $N_\rho + 1$ узлов $\{\rho_i\}$ на луче $\theta = \text{const}$. На фиксированной дуге $\rho = \rho_i$ значения функций Ψ_L и Φ_L в узлах сетки образуют векторы $U^{(i)}, I^{(i)} \in R^{N_Q}$ с компонентами $U^{(i)}_k = \Psi_L(\rho_i, \theta_k)$ и $I^{(i)}_k = \Phi_L(\rho_i, \theta_k)$. Совокупность N_ρ векторов $U^{(i)}$ и $I^{(i)}$ задает значения функций Ψ_L и Φ_L в узлах сетки на первых N_ρ дугах, т. е. определяет векторы $U, I \in R^{N_m}, N_m = N_\rho N_\theta$:

$$U = \sum_{i=1}^{N_\rho} \oplus U^{(i)}; \quad I = \sum_{i=1}^{N_\rho} \oplus I^{(i)}. \quad (86)$$

В таком представлении уравнение (71) в конечных разностях принимает вид системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} L_i U^{(i-1)} + (M_i - E) U^{(i)} + R_i U^{(i+1)} &= I^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N_\rho, \\ U^{(0)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Здесь L_i, M_i, R_i — матрицы ранга N_θ . Матрицы L_i и R_i порождаются радиальной частью оператора Лапласа в (71) и поэтому являются диагональными. Недиagonalная матрица M_i описывает вклад сферической части оператора Лапласа, потенциала и интегрального оператора $\hat{h}_{L0, L0}^L$ на дуге $\rho = \rho_i$.

Систему (87) можно записать в виде

$$(H - E) U + R_{N_\rho} U^{(N_\rho+1)} = I, \quad (88)$$

где H — матрица ранга N_m . Из (87) вытекает, что она является разреженной и имеет ленточную структуру с шириной ленты $2N_\theta$.

Таким образом, мы получили систему (88) N_m уравнений для $N_m + N_\theta$ неизвестных. Дополнительное соотношение, которое фиксирует единственное решение этой системы, следует из асимптотики (77). Оно задает связь значений компоненты Фаддеева на двух

последних дугах:

$$U^{(N_\rho+1)} = CU^{(N_\rho)} + {}^4a_L \hat{I}^{(N_\rho)} + O(\rho_{N_\rho}^{-3/2}), \quad (89)$$

где $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_{N_\theta})$ — диагональная матрица с элементами:

$$c_i = Q_0(\rho_{N_\rho+1}, \theta_i) Q_0^{-1}(\rho_{N_\rho}, \theta_i);$$

а $\hat{I}^{(N_\rho)} = \Phi^{(N_\rho+1)} - C\Phi^{(N_\rho)}$, здесь $\Phi^{(i)} \in R^{N_\theta}$ — векторы с компонентами:

$$\Phi_j^{(i)} = \varphi_a(\rho_i \cos \theta_j) Q^L(\rho_i \sin \theta_j, k).$$

Условие (89) приводит уравнение (88) к виду

$$\tilde{H}U = I + {}^4a_L \hat{I}, \quad (90)$$

где матрица \tilde{H} отличается от $H - E$ заменой блока M_{N_ρ} на $M_{N_\rho} + CR_{N_\rho}$, а вектор $\hat{I} \in R^{N_m}$ по структуре аналогичен (86) и имеет отличной от нуля только последнюю составляющую $\hat{I}^{(N_\rho)}$.

В силу линейности решение (90) равно

$$U = U_0 + {}^4a_L U_1, \quad (91)$$

где векторы $U_{0,1}$ определяются уравнениями:

$$\tilde{H}U_0 = I; \quad \tilde{H}U_1 = \hat{I}, \quad (92)$$

в которых неоднородные члены известны. Так как матрица \tilde{H} имеет ленточную структуру, то для решения уравнений (92) оказывается эффективным алгоритм Гаусса.

Определив векторы $U_{0,1}$, можно затем с помощью асимптотики (77) найти парциальную амплитуду упругого рассеяния 4a_L . Для этого сравним представления (77) и (91) в области $|x| \ll |y|$ ($\theta \rightarrow 0$). В этой области третье слагаемое в (77) много меньше второго при достаточно большом ρ_{N_ρ} . Поэтому, пренебрегая третьим слагаемым в (77), получаем из (91) следующее выражение для 4a_L :

$${}^4a_L = [U_0^{(N_\rho)}]_i (\Phi_i^{(N_\rho)} - [U_1^{(N_\rho)}]_i)^{-1},$$

где индекс i отвечает малым углам θ_i .

Вычислив таким образом значение 4a_L , можно затем с помощью (91) найти вектор $U^{(N_\rho)}$, отвечающий значениям функции Ψ_L на последней дуге $\rho = \rho_{N_\rho}$, и определить затем амплитуды развала:

$${}^4A_L(\theta_i) = (U_i^{(N_\rho)} - {}^4a_L \Phi_i^{(N_\rho)}) Q_0^{-1}(\rho_{N_\rho}, \theta_i).$$

Отметим, что для увеличения точности расчетов узлы сетки должны располагаться неравномерно. Сетка должна быть плотной в области, примыкающей к оси $|x| = 0$, и становится более редкой при $|x| \rightarrow \infty$. Однако при этом важно соблюдать условие самосогласо-

ванности: поправочный член асимптотики (77) должен быть много меньше ошибки дискретизации в окрестности границы $\rho = \rho_{N\rho}$, т. е. $(\Delta h)^2 \gg \rho_{N\rho}^{-3/2}$. Здесь Δh — минимальный шаг в окрестности границы.

Результаты расчетов. В этом разделе описываются некоторые результаты расчетов характеристик Nd -рассеяния в моделях с различным типом NN -взаимодействия:

а. Потенциальная модель МТ-I-III

$$V^{s,t}(x) = \sum_{k=1}^2 \lambda_k^{s,t} \frac{\exp(-\mu_k |x|)}{|x|}, \quad (93)$$

параметры которой указаны в [38].

б. Модель граничных условий для юкавского потенциала с твердым кором (НСУ)

$$V^{s,t}(x) = V_0^{s,t} \left(\frac{R^{s,t}}{|x|} \right) \exp\left(-\frac{|x|}{R^{s,t}}\right), \quad |x| > C$$

и для экспоненциального потенциала с твердым кором (НСЕ)

$$V^{s,t}(x) = V_0^{s,t} \exp[(C - |x|)/R^{s,t}], \quad |x| > C.$$

Параметры моделей НСУ и НСЕ приведены, например, в [39].

с. Модель граничных условий третьего рода без потенциала (ВСМ).

В этой модели параметры граничного условия $\tau^{s,t}$ в (85) однозначно определяются энергией связи дейтрона и энергией виртуального состояния системы $n\rho$:

$$\tau^s = -0,04 \text{ фм}^{-1}; \quad \tau^t = 0,231 \text{ фм}^{-1}.$$

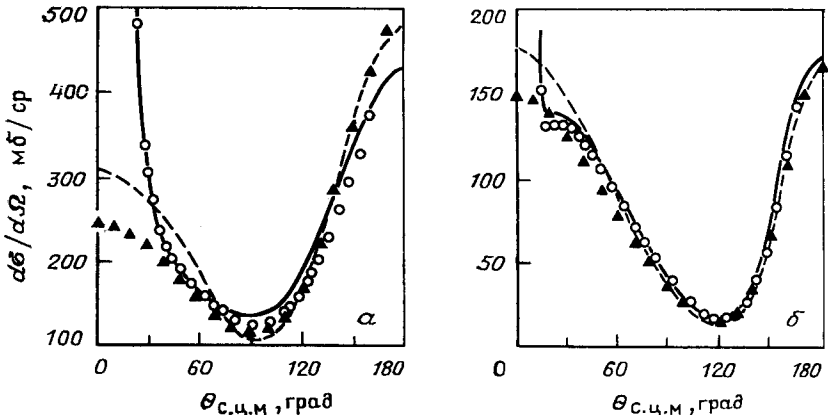


Рис. 3. Дифференциальное сечение упругого pd - и nd -рассеяния при $E_{T.c.}^N = 2$ МэВ (а) и $E_{T.c.}^N = 10$ МэВ (б):

сплошные и штриховые кривые — pd - и nd -рассеяние с потенциалом МТ-I-III; \circ , \blacktriangle — экспериментальные данные для pd - и nd -рассеяния [41]

На рис. 3 изображены дифференциальные сечения (81) упругого Nd -рассеяния в модели МТ-I-III. Расхождение между теорией и экспериментом для nd -сечения при малых углах отмечалось еще в ранних работах по этой тематике (например, [40]) и связано с «нерелистичностью» потенциалов типа (93).

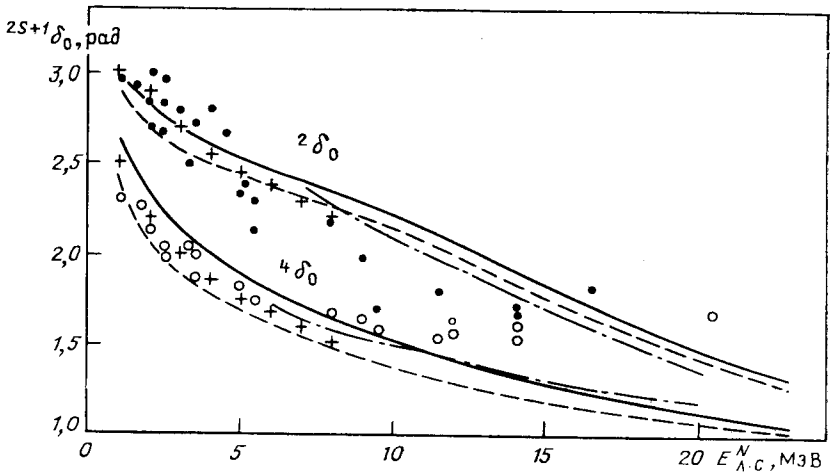


Рис. 4. Дублетные и квартетные фазовые сдвиги $^{2S+1}\delta_0$: сплошные и штриховые кривые — pd - и nd -рассеяние для потенциала МТ-I-III; штрихпунктирные — nd -рассеяние для потенциала Юкавы с твердым кором; \circ , \bullet — эксперимент nd [43]; $+$ — эксперимент pd [42];

На рис. 4 приведены фазы Nd -рассеяния $^{2S+1}\delta_0$ для моделей МТ-I-III и НСУ. На рис. 5 изображены коэффициенты неупругости $^{2S+1}\eta_0$ для потенциала МТ-I-III. Этот рисунок наглядно иллюстрирует действие принципа Паули в Nd -рассеянии. Как известно, принцип

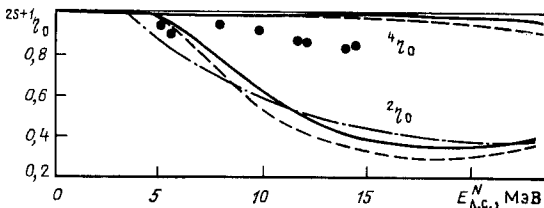


Рис. 5. Дублетные и квартетные коэффициенты неупругости $^{2S+1}\eta_0$: сплошные и штриховые кривые — pd - и nd -рассеяние для потенциала МТ-I-III; штрихпунктирные — теоретический результат из [40]. Точки — эксперимент из [43]

Паули препятствует сближению налетающего нуклона и дейтрона на малые расстояния. Поэтому канал развала $N + d \rightarrow N + p + n$ при $S = 3/2$ сильно подавлен. В результате величина $1 - ^4\eta_0$, характеризующая вклад амплитуды развала в полную S -матрицу, почти равна 0 в довольно широкой области энергий выше порога развала. По аналогичной причине при всех энергиях $^{2S+1}\eta_0 |_{nd} <$

Таблица 2. *s*-волновые фазовые сдвиги ${}^{2S+1}\delta_0$ и коэффициенты неупругости ${}^{2S+1}\eta_0$ для *nd*-рассеяния при $E_{л.с}^n = 14,1$ МэВ для различных моделей

Модель	Радиус кора, фм	${}^2\delta_0$, град	${}^2\eta_0$	${}^4\delta_0$, град	${}^4\eta_0$
MT-I-III	—	104	0,38	69	0,99
VCM	1,4	52	0,88	59	1,01
VCM	0,4	149	0,48	90	0,95
НСУ	0,4	103	0,40	77	1,01
НСЕ	0,4	100	0,40	79	1,01

$\langle {}^{2S+1}\eta_0 | pd \rangle$, так как кулоновское отталкивание в системе *pd* также препятствует сближению сталкивающихся частиц.

На рис. 6 приведены дублетные амплитуды развала (82) для потенциала MT-I-III. Эти же амплитуды для *nd*-рассеяния в моделях

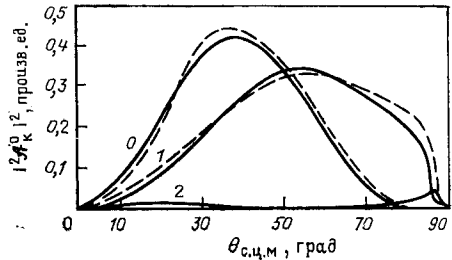


Рис. 6. Квадраты модулей амплитуд развала ${}^2\mathcal{A}_k^0(\theta)$ при $S = 1/2, L = 0$ для потенциала MT-I-III: сплошные и штриховые кривые — *pd*- и *nd*-реакции при $E_{л.с}^N = 14,1$ МэВ. Цифры у кривых — значения *k*

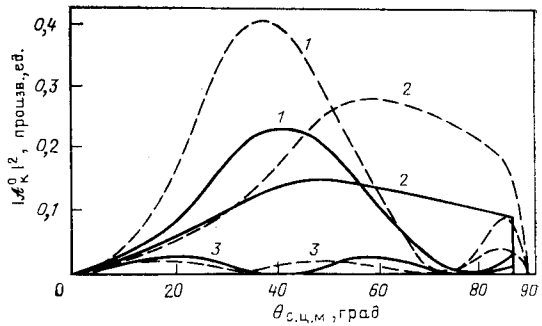


Рис. 7. Квадраты модулей дублетных ($\mathcal{A}_k^0 \equiv {}^2\mathcal{A}_{h-1}^0(\theta)$, $k = 1, 2$) и кватретных ($\mathcal{A}_k^0 \equiv {}^4\mathcal{A}^0(\theta)$) амплитуд развала для *nd*-рассеяния при $L = 0$ и $E_{л.с}^N = 14,1$ МэВ: сплошные кривые — модель граничных условий без потенциала; штриховые — потенциал Юкавы с твердым кором. Цифры у кривых — значения *k*

НСУ и VCM изображены на рис. 7. Радиус кора *C* в VCM был взят из [44], $C = 1,095$ фм.

Для сравнения рассмотренных моделей в табл. 2 сведены значения фаз и коэффициентов неупругости *nd*-рассеяния при одной энергии. Видно, что модели MT-I-III, НСУ и НСЕ дают весьма близкие результаты. В разумных пределах от них отличаются результаты в модели

ВСМ с кором $C = 0,4$ фм. В то же время при радиусе кора $C = 1,4$ фм, который предложен в [45], результаты модели ВСМ сильно отличаются от других расчетов и экспериментальных данных. По-видимому, такой большой радиус кора не соответствует физике NN -взаимодействия при низких энергиях.

Длины Nd -рассеяния. Одними из фундаментальных характеристик систем трех нуклонов являются длины Nd -рассеяния. Их вычисление естественным образом вкладывается в рамки дифференциального формализма. Кратко опишем соответствующую схему.

Длины Nd -рассеяния определяются в соответствии с разложением эффективного радиуса для фаз рассеяния с нулевым орбитальным моментом ${}^{2S+1}\delta_0$, т. е. как предел при нулевой энергии функции

Таблица 3. Длины pd -рассеяния

Литература	${}^2A_{pd}$, фм	${}^4A_{pd}$, фм
[48]	$1,8 \pm 0,4$	10,9
[49]	—	13,3
[50]	2,0	13,0
[51]	0,15	13,8
[52]	$-0,68 \pm 0,17$	$14,0 \pm 0,2$

$$a_s(k) = -C_0^{-2}(\eta)k^{-1} \operatorname{tg} {}^{2S+1}\delta_0(k), \quad (94)$$

где $C_0^2(\eta) = 2\pi\eta / (\exp(2\pi\eta) - 1)$ (в случае nd -рассеяния $\eta = 0$, т. е. $C_0 = 1$).

но найти длины Nd -рассеяния (94) в точку $k = 0$.

Расчет длин nd -рассеяния на основе дифференциальных уравнений Фаддеева проведен в [46]. Например, для протенциала МТ-1-III для них в [46] получены следующие значения: ${}^2A_{nd} = 0,62$ фм, ${}^4A_{nd} = 6,4$ фм, которые вполне согласуются с экспериментальными данными. Для того же ядерного потенциала в [47] вычислены длины pd -рассеяния:

$${}^2A_{pd} = 1,03 \text{ фм}; \quad {}^4A_{pd} = 11,96 \text{ фм}. \quad (95)$$

Для сравнения укажем экспериментальные значения этих длин:

$$(43): \quad {}^2A_{pd} = 1,3 \div 0,2 \text{ фм}, \quad {}^4A_{pd} = 11,4_{-1,2}^{+1,8} \text{ фм}$$

$$(42): \quad {}^2A_{pd} = 2,73 \div 0,1 \text{ фм}, \quad {}^4A_{pd} = 11,86_{-0,1}^{+0,4} \text{ фм}.$$

В табл. 3 приведены результаты расчета длин pd -рассеяния другими авторами. В [48] использовалась двухчастичная аппроксимация исходной задачи, поэтому ее результаты носят характер качественной оценки. Работы [49, 50, 52] основаны на интегральной формулировке уравнений Фаддеева в импульсном пространстве. Ядерное взаимодействие задавалось в них сепарабельными потенциалами ранга 1.

В [51] также использовались дифференциальные уравнения Фаддеева для системы (ppr) . Однако в отличие от [47], основанной на

строгих результатах об асимптотическом поведении фаз рассеяния при $k \rightarrow 0$, в [51] решались уравнения Фаддеева непосредственно при нулевой энергии. При этом предполагалось, что компоненты волновой функции с нулевой энергией имеют такую же координатную асимптотику, как и в задаче двух тел. Отметим, что дублетная длина рассеяния для потенциала МТ-I-III, полученная в [51], заметно отличается от (95).

Поляризационные эффекты в pd -рассеянии. Как отмечалось выше при выводе s -волновых уравнений Фаддеева, эти уравнения для системы pd являются приближенными. Приближение фактически состоит в том, что кулоновское взаимодействие налетающего протона с протоном мишени заменяется взаимодействием протона с центром масс дейтрона. Наиболее существенным следствием этого приближения является то, что в уравнениях (71), (74) не учитывается эффект поляризации дейтрона в процессе pd -рассеяния [36]. Иными словами, гамильтониану s -волновых уравнений отвечает эффективный потенциал $V_{\text{эф}}$ взаимодействия протона с дейтроном, который асимптотически содержит лишь экспоненциально убывающие поправки к кулоновскому взаимодействию [36]. Гамильтониану же исходных уравнений Фаддеева (60) отвечает потенциал $V_{\text{эф}}$, содержащий хорошо известный медленно убывающий поляризационный член:

$$V_{\text{эф}}(y) \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{|y|} - \frac{\gamma}{|y|^4} + \dots, \quad \gamma = \frac{8\alpha}{9} \frac{e^2 m_N}{\hbar^2}, \quad (96)$$

где α — поляризуемость дейтрона, $\alpha \simeq 0,6$ фм³ [53].

Ясно, что поляризационный потенциал (96) существенно влияет на характеристики pd -рассеяния при очень низких энергиях, когда кулоновский барьер на больших расстояниях подавляет вклад короткодействующего ядерного взаимодействия. Поэтому область таких энергий фактически определяет границу применимости s -волновых уравнений Фаддеева.

В то же время при таких энергиях поляризационные эффекты приводят к нарушению разложения эффективного радиуса для фаз рассеяния [36]. В результате функция (94) в этом случае не имеет конечного предела при $k \rightarrow 0$. Тем самым длин pd -рассеяния в строгом смысле не существует. Поэтому возникает вопрос: как понимать длины рассеяния (95), отвечающие s -волновому приближению?

Чтобы решить этот вопрос, выясним, при каких энергиях поляризационные эффекты начинают играть существенную роль и как они при этом влияют на низкоэнергетические характеристики pd -рассеяния. Ясно, что это влияние будет порождать заметное отличие фазы ${}^{2S+1}\delta_0$, вычисленной в результате решения s -волновых уравнений Фаддеева, от ее точного значения ${}^{2S+1}\tilde{\delta}_0$. Тем самым разность $\delta_p = {}^{2S+1}\tilde{\delta}_0 - {}^{2S+1}\delta_0$ определяет вклад поляризационного потенциала в фазу рассеяния.

При низких энергиях функцию $\delta_p(k)$ можно аппроксимировать явным выражением [54] (см. также [36]):

$$\delta_p(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} \gamma k^2 b(\eta), \quad (97)$$

$$b(t) = 3\pi t^2 (1 - \operatorname{cth} \pi t) + 2t + 2t^2 \operatorname{Im} \psi'(1 + it) - 1/3t,$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Рассмотрим теперь функцию a_S , определенную равенством (94). Без учета поляризации она имеет конечный предел при нулевой энергии, равный длине рассеяния ${}^{2S+1}A_{pd}$. Учет же поляризационных эффектов (${}^{2S+1}\delta_0 \rightarrow {}^{2S+1}\delta_0 + \delta_p$) вследствие асимптотики (97) приводит к экспоненциальному росту функции a_S :

$$a_S(k) \underset{k \rightarrow 0}{\sim} - \frac{\gamma}{15\pi n} k^2 \eta^{-3} e^{2\pi\eta}.$$

Зависимость функции $a_{1/2}$ от лабораторной энергии протона приведена на рис. 8. Видно, что поляризационные эффекты радикально меняют поведение функции $a_{1/2}$ при сверхнизких энергиях $E_{п.с}^p \lesssim 10$ кэВ. При более высоких энергиях вклад поляризационного потенциала пренебрежимо мал. В результате в широком интервале энергий

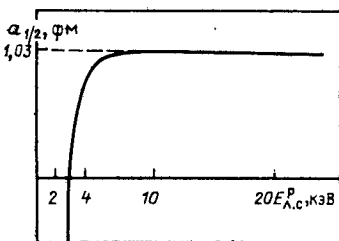


Рис. 8. Зависимость функции $a_{1/2}$ от лабораторной энергии протона вблизи порога

значение функции $a_{1/2}$ стабилизируется. Квартетная функция $a_{3/2}$ ведет себя совершенно аналогично.

Отсюда ясно, что длины pd -рассеяния следует понимать как значение функции a_S при не слишком низких энергиях $E_{п.с}^p \gtrsim 15$ кэВ. Эта область энергии определяет и границу применимости s -волновых уравнений Фаддеева.

3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ ТРЕХ ЧАСТИЦ

Одним из важных свойств дифференциальных уравнений Фаддеева является то, что они позволяют на основе единого подхода решать как задачи рассеяния, так и задачи о связанных состояниях систем нескольких частиц. В этой главе мы применим дифференциальный формализм для расчета характеристик нескольких трехчастичных систем, весьма различных по характеру взаимодействия и по масштабу энергий. Мы рассмотрим ядра ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$, атомную систему с чисто кулоновским взаимодействием — ион позитрония ($e^-e^+e^-$), а также трехкварковые системы — барионы из мультиплетов спин-четности $J^P = 1/2^+, 3/2^+$.

Ядра ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$. Основное состояние ядер трития и гелия характеризуется нулевым полным орбитальным моментом ($L = 0$) и полным спином $S = 1/2$. Волновые функции этих ядер, как и в задаче Nd -

рассеяния, можно разбить на три компоненты Ψ_α , которые удовлетворяют модифицированным уравнениям Фаддеева (60). С помощью парциального анализа эти уравнения сводятся к дублетным s -волновым уравнениям (74) с $L = 0$. Единственное отличие задачи на связанные состояния трех нуклонов от задачи Nd -рассеяния заключается в том, что уравнение (74) дополняется другим асимптотическим условием для парциальных компонент Ψ_i^0 на больших расстояниях. Вместо асимптотик (90) на них следует наложить условие убывания

$$\Psi_i^0(\rho, \theta) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad (98)$$

которое совместно с требованием регулярности (76) определяет единственное решение уравнений (74).

Если взаимодействие нуклонов задается моделью граничных условий, то уравнения (74) должны быть дополнены также краевыми условиями типа (84) или (85).

Для численного расчета характеристик ядер гелия и трития можно использовать конечно-разностную аппроксимацию уравнений (74). Она осуществляется точно так же, как и в задаче Nd -рассеяния (см. разд. 2). При этом условии убывания (98) позволяет «обрезать» систему алгебраических уравнений типа (88) при достаточно большом $\rho_{\max} = \rho_{N_\rho+1}$, т. е. положить в (88) $U^{(N_\rho+1)} = 0$. В итоге возникает матричная задача на собственные значения:

$$(H - E)U = 0.$$

Напомним, что матрица H получается в результате дискретизации гамильтониана уравнений (74), а вектор U задает значения компонент волновой функции в узлах полярной сетки. Структура матрицы H и вектора U описана в разд. 2.

Таким образом, задача о связанных состояниях трех нуклонов сводится к определению собственных чисел и векторов матрицы H . Ее можно решать любым из хорошо известных методов матричной алгебры. В наших расчетах мы использовали метод обратных итераций [55]. Эффективность этого метода определяется полосовой структурой матрицы H , в силу чего ее обращение на каждом шаге метода обратных итераций требует сравнительно небольших вычислительных ресурсов.

В табл. 4 приведены результаты некоторых расчетов энергии связи $-E$ (${}^3\text{H}$) ядра гелия трития и кулоновской энергии $\Delta E_c = E$ (${}^3\text{H}$) — $-E$ (${}^3\text{He}$) ядра гелия в различных моделях, которые описаны в разд. 2. Наш результат отмечен знаком «*». В работах [56 и 57] также использовались дифференциальные уравнения Фаддеева. В [58] решались интегральные уравнения для компонент с помощью итерационного метода, основанного на построении паде-аппроксимаций.

С точки зрения анализа модели граничных условий третьего рода представляют интерес также расчеты энергии связи трех бозо-

Таблица 4. Энергия связи ядра ${}^3\text{H}$ и кулоновская энергия ΔE_c ядра ${}^3\text{He}$ для различных моделей. Эксперимент: $E({}^3\text{H}) = 8,48$ МэВ, $\Delta E_c = 0,764$ МэВ

Модель	Литература	Радиус кора, фм	$E({}^3\text{H})$, МэВ	ΔE_c , МэВ
MT-I-III	*	—	8,58	0,670
	[56]	—	8,55	0,667
	[57]	—	8,5	—
	[38]	—	8,3	—
VCM	*	1,095	3,21	—
	[58]	1,095	4,05	—
НСУ	*	0,4	9,46	—

нов, имеющих нуклонные массы, в модели VCM. Для такой системы исходные дифференциальные уравнения Фаддеева (58) после отделения угловых переменных преобразуются к одному уравнению на плоскости, аналогичному (71). Это уравнение дополняется краевыми

Таблица 5. Энергия связи трех бозонов в VCM с параметрами: $C = 1,095$ фм, $\tau_{s,t} = 0,231$ фм $^{-1}$

Литература	E , МэВ
*	10,3
[44]	12,69
[29]	7,70
[58]	8,88

Таблица 6. Энергия связи и ширина двухфотонной аннигиляции иона позитрония. Эксперимент: $\Gamma_{2\gamma} = 2,09 \pm 0,09$ нс $^{-1}$ [59]

Литература	E , а.е.	$\Gamma_{2\gamma}$, нс $^{-1}$
*	0,267	2,17
[60]	0,26451	—
[61]	0,26208	—
[62]	0,2620045	2,0908
[63]	0,2620045	2,0864

условиями (85). В результате решения возникающей при этом задачи на собственные значения нами получено значение энергии связи, приведенное в табл. 5. Там же приведены результаты, полученные другими методами.

Ион позитрония $e^-e^+e^-$. Рассмотрим основное состояние системы $e^-e^+e^-$, которое характеризуется нулевым полным орбитальным моментом ($L = 0$) и суммарным спином электронов, равным 1. Для определенности пронумеруем частицы так, что пара $\alpha = 1$ содержит два электрона, а пары $\alpha = 2, 3$ — электрон и позитрон. Разобьем далее стандартным образом [см. (2)] волновую функцию данной системы Ψ на три компонента Фаддеева Ψ_α . Заметим, что в силу принципа

Паули координатная часть волновой функции должна быть симметрична относительно перестановки электронов:

$$\Psi(r_1, r_2, r_3) = Q\Psi(r_1, r_2, r_3) = \Psi(r_1, r_3, r_2),$$

где Q — оператор перестановки частиц 2 и 3. Поэтому компоненты Ψ_α должны удовлетворять условиям:

$$\Psi_1 = Q\Psi_1; \quad \Psi_3 = Q\Psi_2. \tag{99}$$

Соотношения (99) позволяют свести уравнения Фаддеева (3) к двум уравнениям для компонент $\Psi_{1,2}$:

$$\left. \begin{aligned} (-\Delta + V_1 - E) \Psi_1 &= -V_1(1 + Q) \Psi_2; \\ (-\Delta + V_2 - E) \Psi_2 &= -V_2(\Psi_1 + Q\Psi_2), \end{aligned} \right\} \tag{100}$$

где V_α — кулоновское взаимодействие в паре α .

Чтобы привести уравнения (100) к виду, пригодному для численных расчетов, нужно отделить в них угловые переменные. С этой целью разложим компоненты $\Psi_{1,2}$ по бисферическому базису (67). Так как $L = 0$, то в этих разложениях отличны от нуля только члены с $\lambda = l$. При этом в силу условия симметрии (99) в парциальное разложение (69) компоненты Ψ_1 должны входить только члены с четными l .

После отделения в (100) угловых переменных возникает бесконечная система интегродифференциальных уравнений для парциальных компонент $\Phi_\alpha^l \equiv \Psi_\alpha^{ll}$:

$$\left. \begin{aligned} (H_{ll} + V_1 - E) \Phi_1^l &= -V_1 \sum_k \hat{h}_{ll, kk}^0 \Phi_2^k; \\ (H_{kk} + V_2 - E) \Phi_2^k &= -\frac{1}{2} V_2 \left\{ \sum_l (-1)^k \hat{h}_{kk, ll}^0 \Phi_1^l + \right. \\ &+ \left. \sum_m (-1)^m \hat{h}_{kk, mm}^0 \Phi_2^m \right\}; \end{aligned} \right\} \tag{101}$$

$(l = 0, 2, 4 \dots; \quad k, m = 0, 1, 2 \dots,$

где операторы $H_{\lambda l}$ определены в (72), а $\hat{h}_{\lambda l, \lambda' l'}$ — интегральные операторы (68).

Единственное решение системы (101) фиксируется граничными условиями типа (76), (98).

В численных расчетах систему (101) нужно обрезать, т. е. учитывать в ней парциальные компоненты Φ_α^l только с несколькими первыми значениями l . Как показывают результаты наших расчетов, для достижения погрешности вычислений порядка 1% достаточно сохранить в (101) только три уравнения для компонент Φ_1^0 , Φ_2^0 и Φ_2^1 . Ядра соответствующих интегральных операторов $\hat{h}_{\lambda l, \lambda' l'}$ в таких

уравнениях имеют вид:

$$h_{00,00}^0 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad h_{11,00}^0(\theta, \theta') = 4P_1(u);$$

$$h_{00,11}^0(\theta, \theta') = \frac{2}{\sin 2\theta'} \{ \sqrt{3} \cos 2\theta - P_1(u) \sin 2\theta \};$$

$$h_{11,11}^0(\theta, \theta') = \frac{2}{\sqrt{3} \sin 2\theta'} \{ \sin 2\theta + 3\sqrt{3} P_1(u) \cos 2\theta + 2P_2(u) \sin 2\theta \},$$

где P_k — полиномы Лежандра, а параметр u определен в (73).

Решая численно систему (101) методом, кратко описанным в начале этого раздела, можно вычислить энергию связи — E и волновую функцию системы e^-e^+ , а также все физически интересные ее характеристики — например, ширину двухфотонной аннигиляции

$$\Gamma_{2\gamma} = 2\pi\alpha^4 \left(\frac{c}{a_0} \right) \left[1 - \alpha \left(\frac{17}{\pi} - \frac{19\pi}{12} \right) \right] \frac{\langle \Psi | \delta(r_1 - r_2) | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle},$$

где α — постоянная тонкой структуры; a_0 — боровский радиус.

Полученные нами значения E и $\Gamma_{2\gamma}$ отмечены в табл. 6 знаком « * ». Там же приведены результаты других авторов. В [60] использовались интегральные уравнения Фаддеева, в которых двухчастичная t -матрица аппроксимировалась рядом из штурмовских функций. В [61] применялась адиабатическая техника двухцентровых разложений. В вариационных расчетах [62, 63] использовался хиллерасовский базис с количеством членов $N = 125$ и $N = 250$ соответственно.

Барионы в нерелятивистской кварковой модели. Одно из важных приложений дифференциальных уравнений Фаддеева — расчеты статических характеристик барионов в нерелятивистской кварковой модели (NRQM) [18, 19]. Использование уравнений, базирующихся на исходной динамической формулировке задачи, позволяет, в частности, отделить трудности, связанные с техникой трехчастичных расчетов, от ограничений, присущих самой NRQM. Не останавливаясь на упомянутых ограничениях, связанных в основном с экстраполяцией NRQM в область кварков легких ароматов, проанализируем вкратце наиболее популярные методы решения спектральной задачи для трехкваркового оператора энергии.

Основной недостаток модели гармонического осциллятора (НОМ) — систематическое использование осцилляторных волновых функций, хотя рост кварк-кваркового потенциала на больших расстояниях не является, по-видимому, квадратичным [64]. Другая трудность НОМ — необходимость устранять дефекты волновых функций и чрезмерное вырождение спектра введением в модель ангармонических поправок [65], приводящих к сложной технике расщеплений и смешиваний. Как следствие утрачивается связь между свойствами барионов и лежащей в основе модели динамикой.

Альтернативный вариационный метод [66] достаточно эффективен, в особенности для барионов, построенных из кварков различных масс, благодаря возможности заранее параметризовать асимметрию

системы. Однако сходимость вариационных расчетов трудно оценить, поскольку контроль осуществляется лишь для одной фиксированной параметризации пробных функций.

Наконец, метод гиперсферических разложений [64, 67], применяемый для расчетов в NRQM, обладает, как известно, быстрой сходимостью лишь для qq -взаимодействий, не слишком сингулярных на малых межкварковых расстояниях. Сходимость метода значительно ухудшается уже для потенциалов $V_{qq}(x)$, имеющих кулоновскую особенность при $|x| \rightarrow 0$. Это обстоятельство значительно сужает класс потенциалов, для которых метод оказывается эффективным.

Метод Фаддеева в конфигурационном пространстве свободен от перечисленных выше недостатков; он оказывается удобным инструментом исследования задачи о связанных состояниях трехкварковых систем с любым типом парных или трехчастичных взаимодействий. Дополнительным преимуществом метода Фаддеева является также то обстоятельство, что компоненты Фаддеева — более гладкие функции координат по сравнению с полной волновой функцией. Эта особенность дифференциальных уравнений Фаддеева оказывается решающей для достижения высокой точности численного решения трехкварковой спектральной задачи на ЭВМ.

В настоящем разделе мы описываем некоторые результаты, полученные решением уравнений Фаддеева для барионов мультиплетов спин-четности $J^p = 1/2^+, 3/2^+$ в предположении $V_{qq} = \frac{1}{2}V_{qq}^-$. Не обсуждая здесь справедливость последнего соотношения [67, 68], мы рассмотрим несколько наиболее часто используемых потенциалов: потенциалы Бхадури [66], потенциал Ричардсона [69], потенциал Мартена [70]. Помимо спектра масс мы вычисляем также структурные параметры барионов, характеризующие «качество» волновых функций: зарядовые радиусы, электромагнитные формфакторы и функции распределения кварков.

Рассмотрим для простоты барионы, состоящие из кварков равных масс, и введем операторы \mathcal{P}^\pm циклической перестановки частиц (63). Определив оператор $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^-$, $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$, запишем уравнения Фаддеева в виде

$$(-\Delta + V_\alpha - E)\Psi_\alpha = -V_\alpha \mathcal{P}\Psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (102)$$

где V_α , \mathcal{P} — операторы в дополнительном спин-изоспин-цветовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_\tau \otimes \mathcal{H}_c$. Компоненты $\Psi_\alpha \in \mathcal{H}$ связаны друг с другом операторами \mathcal{P}^\pm и порождают полную волновую функцию Ψ согласно (62.)

Отметим, что оператор $H = -\Delta + V_\alpha + V_\alpha \mathcal{P}$ не является симметричным, так как операторы \mathcal{P} и V_α не коммутируют. Однако легко проверяемое соотношение $\mathcal{P}H = H^* \mathcal{P}$ позволяет доказать, что собственные числа оператора H вещественны.

Фиксируем систему координат в R^6 , выбирая координаты Якоби x_α , y_α , отвечающие паре $\alpha = 1$, и введем оператор Q , $Q(123) =$

$= (132)$; $Q\mathcal{F}^\pm = \mathcal{F}^\mp Q$. Согласно принципу Паули полная волновая функция Ψ антисимметрична и, следовательно, после отделения цветовых степеней свободы компонента $U \equiv \Psi_1$ должна быть симметрична относительно перестановки кварков пары $\alpha = 1$:

$$QU = U. \tag{103}$$

Координаты Якоби в паре $\alpha = 1$ будем обозначать x, y , а соответствующие орбитальные моменты $-l$ и λ : $l \oplus \lambda = L$. Полный спин S и изоспин T принимают значения $1/2$ и $3/2$. Полный орбитальный момент L объединяется с полным спином S в полный угловой момент $J = L \oplus S$. Сохранение спина S в сильных взаимодействиях позволяет рассматривать мультиплеты $J^P = 1/2^+, 3/2^+$ в отдельности. С другой стороны, четность $P = (-1)^{\lambda+l}$ состояния налагает ограничение на возможные значения l и λ . Например, для мультиплета $J^P = 1/2^+$ из (103) следует условие

$$\langle {}^2e_{ik} | Q | {}^2e_{ik} \rangle = (-1)^l, \tag{104}$$

где $\{ {}^2e_{ik} \}$ — базис спин-изоспиновых состояний системы, описанный в разд. 2.

Используя разложение компоненты U по ортогональному базису $\{ {}^2e_{ik} \otimes | \lambda L \rangle \}^J$ [см. (67)], получаем для парциальных компонент U_{ik}^λ , отвечающих барионам мультиплета $J^P = 1/2^+$, систему интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & (H_{\lambda l} + V_{ik}^{qq} - E) U_{ik}^\lambda = \\ & = -V_{ik}^{qq} \sum_{i'k', l'\lambda'} \hat{h}_{\lambda l, \lambda' l'}^L P_{ik, i'k'}^+ U_{i'k'}^{\lambda' l'}, \end{aligned} \tag{105}$$

где оператор $H_{\lambda l}$ определен в (72);

$$V_{ik}^{qq} = \langle {}^2e_{ik} | V_{qq} | {}^2e_{ik} \rangle; P_{ik, i'k'} = \langle {}^2e_{ik} | \mathcal{F}^+ | {}^2e_{i'k'} \rangle.$$

а $\hat{h}_{\lambda l, \lambda' l'}^L$ — интегральный оператор (72).

В численных расчетах система (105) должна быть обрезана по угловым моментам при некоторых $l = l_0, \lambda = \lambda_0$. Для s -волновых барионов $L = 0$ и, следовательно, $\lambda = l$. Минимальное обрезание системы (105) отвечает сохранению только компонент U_{ik}^{00} . В мультиплете $J^P = 1/2^+$ условие (104) влечет равенство $U_{ik}^{00} = 0$ для $i \neq k, k < 2$; кроме того, равна нулю компонента U_{12}^{00} , отвечающая $T = 3/2$. Таким образом, система (105) редуцируется к системе двух уравнений относительно компонент U_{00}^{00}, U_{11}^{00} . Аналогичные уравнения могут быть получены для барионов спин-четности $J^P = 3/2$.

Единственное решение системы (105) выделяется граничными условиями регулярности (76) и убывания (98) парциальных компонент.

Система уравнений (105) решалась численно методом конечно-разностных аппроксимаций для потенциалов Бхадури I, II (BI, BII), Мартена (M) и Ричардсона (R). Параметры потенциалов описаны

в [66, 69, 70]; параметры потенциала Ричардсона фиксировались нами по массам N , Δ и Ω . Остановимся подробнее на модели Ричардсона:

$$V(x) = \frac{4\pi}{(33-2n_f)} \Lambda \left(\Lambda |x| - \frac{f(\Lambda |x|)}{\Lambda |x|} \right), \quad (106)$$

где

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{\sin qt}{q} \left\{ \frac{1}{\ln(1+q^2)} - \frac{1}{q^2} \right\},$$

и n_f — число ароматов. Мы выбираем $n_f = 3$ (см. [71]), при этом остается единственный подгоночный параметр Λ (в оригинальной работе Ричардсона [69] $\Lambda = 398$ МэВ). В соотношении (106) можно провести разбиение

$$V_s = a |x|, \quad V_v = V - V_s,$$

где V_v — четвертая компонента вектор-потенциала; V_s — скалярная часть потенциала.

В соответствии с этим разбиением мы определяем два типа спин-спинового взаимодействия: «электрическое» V_v^{ss} и «магнитное» V_s^{ss} :

$$V_{v,s}^{ss} = \frac{2}{3m_q^2} (\vec{S}_i \vec{S}_j) \Delta \begin{cases} V_v; \\ V_v + V_s. \end{cases}$$

Два типа спин-спинового взаимодействия порождают соответственно две модели Ричардсона: RE-модель:

$$V_{qq}^e = V + V_v^{ss} + V_0$$

и RM-модель:

$$V_{qq}^m = V + V_s^{ss} + V_0,$$

где $V_0 = -2/3 \sqrt{2\pi/3} \Lambda e^{1/2-\gamma}$; γ — постоянная Эйлера [72].

С перечисленными выше потенциалами мы вычислили спектр масс некоторых s -волновых барионов (табл. 7). Наши результаты нахо-

Таблица 7. Спектр масс барионов (ГэВ) для различных моделей кварк-кваркового потенциала

Барион, J^P	Модель					
	M		BI		BII	
	*	[73]	*	[66]	*	[66]
$\Delta, 3/2^+$	1,241	—	1,229	1,231	1,205	1,234
$N, 1/2^+$	1,241	—	0,896	0,939	0,912	0,939
$\Omega, 3/2^+$	1,617	1,621	1,694	1,695	1,655	1,668
$\Omega^*, 3/2^+$	2,112	2,139				
$ccc, 3/2^+$	4,770	4,776				
$ccc^*, 3/2^+$	5,237	5,254				
$bbb, 3/2^+$	14,323	14,326				

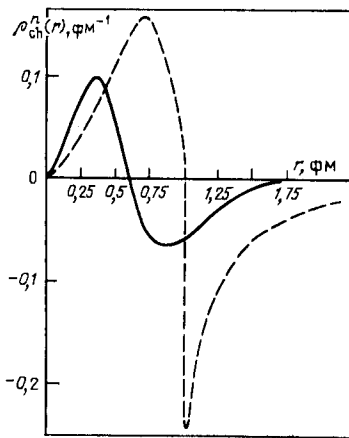
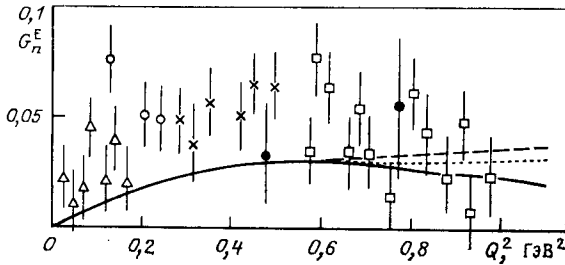


Рис. 9. Плотность распределения заряда в нейтроне: сплошная кривая — потенциал ВІІ в нерелятивистской кварковой модели, штриховая — результат модели мешков из [74]

Рис. 10. Электрический формфактор нейтрона: сплошная, штриховая и пунктирная кривые — потенциалы ВІІ, ВЕ, ВМ в нерелятивистской кварковой модели; Δ, ○, ×, □, ● — эксперимент из [75, 76]



дятся в удовлетворительном согласии с расчетами других авторов. Следует подчеркнуть, что для потенциала ВІ трехчастичная задача для барионов Δ и Ω⁻ решается точно. Таким образом, эти барионы в модели ВІ являлись для нас реперными. Практически абсолютное совпадение наших численных результатов с точным решением свидетельствует о высокой эффективности метода Фаддеева и позволяет оценить погрешность наших вычислений не выше чем 0,5%.

Полученные в результате волновые функции позволяют вычислить более тонкие по сравнению со спектром масс характеристики барионов: зарядовые радиусы и $\beta^2 = (v/c)^2$ для нейтрона и протона (табл. 8), а также распределение заряда в нейтроне (рис. 9). На рис. 9 для сравнения приведена также плотность распределения заряда в нейтроне, вычисленная в модели мешков [74]. С известными зарядовыми плотностями нуклона мы получаем электромагнитные формфакторы нейтрона (рис. 10, 11) и протона (рис. 12). Для небольших переданных импульсов $Q^2 \leq 1 \div 2 \text{ ГэВ}^2$ результаты вычислений находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Подчеркнем, что в настоящем разделе мы исследовали лишь s-волновые барионы и некоторые их характеристики. По-видимому, ин-

Таблица 8. Структурные характеристики барионов для различных моделей кварк-кваркового потенциала

Характеристики	RE	RM	ВII
$m_u, d, \text{ МэВ}$	282	405	336
$m_s, \text{ МэВ}$	616	642	582
$\Lambda, \text{ МэВ}$	448	335	—
$m_N, \text{ МэВ}$	939	939	912
$m_\Delta, \text{ МэВ}$	1232	1232	1205
$m_\Omega, \text{ МэВ}$	1672	1672	1655
$\langle r_{\text{ch}}^2 \rangle_p^{1/2}, \text{ фм}$	0,469	0,511	0,620
$\langle r_{\text{ch}}^2 \rangle_n, \text{ фм}^2$	-0,021	-0,022	-0,029
v^2/c^2	1,93	0,59	0,50

тересно было бы исследовать эффекты включения пионного поля в оригинальную версию NRQM, вычислить амплитуды радиационного $\Delta \rightarrow N\gamma$ и слабого $\Lambda \rightarrow p e \nu$ переходов, учесть эффекты включе-

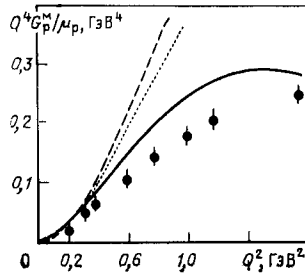
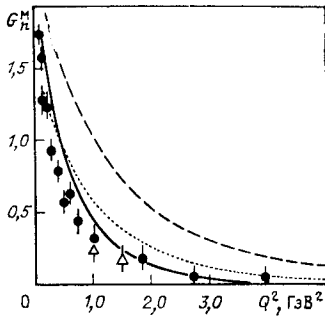


Рис. 11. Магнитный формфактор нейтрона: сплошная, штриховая и пунктирная кривые — потенциалы ВII, RE, RM; ●, Δ — эксперимент [76, 77]

Рис. 12. Магнитный формфактор протона: сплошная, штриховая и пунктирная кривые — потенциалы ВII, RE, RM; точки — эксперимент [78]

ния трехчастичных и тензорных сил и т. п. Все эти эффекты могут быть вычислены с гарантированной точностью на основе дифференциальных уравнений Фаддеева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Л. Д. — ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1459—1467; Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. МИАН СССР, т. 69. М.: Наука, 1963. 120 с.
2. Якубовский О. А. — ЯФ, 1967, т. 5, с. 1312—1320.

3. Mitra A. N. *Advances in Nucl. Phys.*, 1969, v. 3, p. 1—19.
4. Amado R. D.— *Phys. Rev.*, 1963, v. 132, p. 485—494.
5. Sitenko A. G., Kharchenko V. F.— *Nucl. Phys.*, 1963, v. 49, p. 15—28.
6. Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.— *Nucl. Phys.*, 1967, v. B2, p. 167—180.
7. Noyes H. P.— In: *Three — Body Problem*. Amsterdam, North-Holland, 1968, p. 195—293.
8. Laverne A., Gignoux C.— *Phys. Rev. Lett.*, 1972, v. 29, p. 436—438.
9. Merkuriev S. P., Gignoux C., Laverne A.— *Ann. Phys.*, 1976, v. 99, p. 30.
10. Benayoun J. J., Chauvin J., Gignoux C., Laverne A.— *Phys. Rev. Lett.*, 1976, v. 36, p. 1439—1440.
11. Веселова А. М.— *ТМФ*, 1970, т. 3, с. 326—331.
12. Меркурьев С. П.— *ЯФ*, 1976, т. 24, с. 289—297; *ТМФ*, 1977, т. 32, с. 187—207; *Ann. Phys.*, 1980, v. 130, p. 395—426.
13. Куперин Ю. А., Меркурьев С. П., Квицинский А. А.— *Вестник ЛГУ*, 1981, т. 22, с. 66—69; *ЯФ*, 1983, т. 37, с. 1440—1450.
14. Меркурьев С. П., Яковлев С. Л.— *ДАН СССР*, 1982, т. 262, с. 591—594; *ТМФ*, 1983, т. 56, с. 60—73.
15. Benoist-Gueutal, L'Huillier.— *J. Math. Phys.*, 1982, v. 23, p. 1823.
16. Merkuriev S. P., Motovilov A. K.— *Lett. Math. Phys.*, 1983, v. 7, p. 497—503; Меркурьев С. П., Мотовилов А. К.— В кн.: *Теория квантовых систем с сильным взаимодействием*. Калинин, Калининский гос. ун-т 1983, с. 95.
17. Мотовилов А. К.— *Вестник ЛГУ*, 1983, т. 22, с. 76—79.
18. Квицинский А. А., Куперин Ю. А., Меркурьев С. П., Новожилов В. Ю.— *ЯФ*, 1983, т. 38, с. 702—703; Kuperin Yu. A., Kvitsinsky A. A., Merkuriev S. P., Novozhilov V. Yu. Preprint ITP, 85-38E, Kiev, 1985, 20 p.
19. Silvestre-Brac V., Jain A. K., Gignoux C.— *Phys. Lett.*, 1984, v. B137, p. 5—9.
20. Гольдбергер М., Ватсон К.— *Теория столкновений: Пер. с англ.* М.: Мир, 1967. 823 с.
21. Веселова А. М.— *ТМФ*, 1978, т. 35, с. 180—191 с.
22. Noble J. V.— *Phys. Rev.*, 1967, v. 161, p. 1945—1955.
23. Alt E. O., Sandhas W., Ziegelmann H.— *Phys. Rev.*, 1978, v. C17, p. 1987—2005.
24. Sasakawa T., Sawada T.— *Phys. Rev.*, 1979, v. C20, p. 1954—1956.
25. Меркурьев С. П.— *Записки научн. сем. ЛОМИ*, 1978, т. 77, с. 148—187.
26. Merkuriev S. P.— *Boundary-value problems for three-particle wave functions*. Proc. of 1977 Europ. Symp. on few-particle problem. Potsdam, 1977, p. 94—95.
27. Feshbach H., Lomon E. L.— *Phys. Rev.*, 1956, v. 102, p. 891—904.
28. Hoenig M. M., Lomon E. L.— *Ann. Phys.*, 1966, v. 36, p. 363—434.
29. Ефимов В. Н., Шульц Г.— *ЭЧАЯ*, 1976, т. 7, с. 875—915.
30. Kim Y. E., Tubis A.— *Phys. Rev.*, 1971, v. C4, p. 693—699.
31. Кузьмичев В. Е., Харченко В. Ф.— В кн.: *Физика многочастичных систем*. Вып. 2. Киев, 1982, с. 36—60.
32. Смирнов В. И.— *Курс высшей математики*, т. 4, ч. 2. М.: Наука, 1974, 336 с.
33. Schulze B., Wildenhain G.— *Methoden der Potentialtheorie für elliptische differential Gleichungen beliebiger Ordnung*. Berlin: Akademie-Verlag, 1977. 408 S.
34. Владимиров В. С.— *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Наука, 1979, 318 с.
35. Меркурьев С. П., Куперин Ю. А., Квицинский А. А.— *Препринт ИФВЭ*, 82-161, Серпухов, 1982, 22 с.
36. Квицинский А. А., Меркурьев С. П.— *ЯФ*, 1985, т. 41, с. 647—654.
37. Абрамовиц М., Стиган И.— *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979, 830 с.
38. Malfliet R. A., Tjon J. A.— *Nucl. Phys.*, 1969, v. A127, p. 161—168.
39. Браун Дж. Е., Джексон А. Д.— *Нуклон-нуклонные взаимодействия: Пер. с англ.* М.: Атомиздат, 1979. 246 с.

40. Kloet W. M., Tjon J. A.— Ann. Phys., 1973, v. 79, p. 407—440.
41. Alt E. O. Proc. Intern. Symp. on Few-Particle Problems in Nucl. Phys., Dubna, 1979, p. 256—271.
42. Arvieux J.— Nucl. Phys., 1974, v. A221, p. 253—268.
43. Brockmann K. W., van Oers W. T. H.— Nucl. Phys., 1967, v. A92, p. 561—583; van Oers W. T. H., Seagrave J. D.— Phys. Lett., 1967, v. B24, p. 562—565.
44. Kim Y. E., Tubis A.— Phys. Lett., 1972, v. B38, p. 354—358.
45. Simonov Yu. A. Preprint ITEP-73, 1982. 35 p.
46. Benayoun J. J., Gignoux C., Chauvin J.— Phys. Rev., 1981, v. C23, p. 1854—1857.
47. Квицинский А. А.— Письма в ЖЭТФ, 1982, т. 36, p. 375—377.
48. Eyre D., Phillips A. C., Roig F.— Nucl. Phys., 1977, v. A275, p. 13—28.
49. Alt E. O. In: Few-body nuclear physics. Vienna: IAEA, 1978, p. 271—280.
50. Зепалова М. Л., Шадчин С. А.— В кн.: Всесоюзная конференция по теории систем нескольких частиц с сильным взаимодействием. Ленинград, ЛГУ, 1983, с. 35—37.
51. Friar J. L., Gibson B. F., Payne G. L.— Phys. Lett., 1983, v. B124, p. 287—292.
52. Zankel H., Mathelitsch L. J.— Phys. Lett., 1983, v. B133, p. 27—31.
53. King K., McKellar H. L.— Phys. Rev., 1974, v. C9, p. 1309—1328.
54. Berger R. O., Spruch L.— Phys. Rev., 1965, v. B138, p. 1106—1115.
55. Forsythe G. E., Wasow W. R. Finite-difference method for partial differential equations. J. Hiley, N.Y., 1960, 444 p.
56. Payne G. L., Friar J. L., Gibson B. F.— Phys. Rev., 1980, v. C22, p. 823—831.
57. Benayoun J. J., Gignoux C.— Phys. Rev., 1981, v. C23, p. 1854—1857.
58. Петров Н. М., Пушкаш А. М. Препринт ИТФ, 84—106Р, Киев, 1984.
- 19 с.
59. Mills A. P., Jr.— Phys. Rev. Lett., 1981, v. 46, p. 717—719; Phys. Rev., 1981, v. A24, p. 3242—3244.
60. Colegrave R. K., King A. M.— J. Phys. B, 1981, v. 14, p. L539—L543.
61. Виницкий С. И., Пономарев Л. И.— ЭЧАЯ, 1982, т. 13, т. 1336—1418.
62. Ho Y. K.— J. Phys. B, 1983, v. 16, p. 1503—1509.
63. Bhatia A. K., Drachman R. J.— Phys. Rev., 1983, v. A28, p. 2523—2525.
64. Richard J. M., Taxil P. Preprint CPT-83/PE.1476 IPNO-/TH83-02, 1983, 26 p.
65. Isgur N.— In: Proc. of the XVI Rencontre de Moriond, Les Arcs, France, 1981, p. 57—70.
66. Bhaduri R. K., Cohler L. E., Nogami Y.— Phys. Rev. Lett., 1980, v. 44, p. 1369—1374.
67. Richard J. M.— Preprint CERN TH.3006, 1980, 7 p.
68. Doseh H. G., Müller V. F.— Nucl. Phys., 1976, v. B116, p. 470—490.
69. Richardson J. M.— Phys. Lett., 1979, v. B82, p. 272—274.
70. Martin A.— Phys. Lett., 1981, v. B100, p. 511—514.
71. Appelquist T., Carazzone V.— Phys. Rev., 1975, v. D11, p. 2856—2861.
72. Schöberl F. Preprint CERN TH.3287, 1982. 17 p.
73. Richard J. M.— Phys. Lett., 1981, v. B100, p. 515—518.
74. Thomas A. W. Preprint CERN TH.3368 TRI-PP-82-29, 1982. 177 p.
75. Drickey D., Hand L.— Phys. Rev. Lett., 1962, v. 9, p. 521—524; Gani-chot D., Grosselete B.— Nucl. Phys., 1972, v. A178, p. 545—562; Martin F., Arnold R., Chertok B.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1320—1323.
76. Galster S., Klein H., Moritz J. e.a.— Nucl. Phys., 1971, v. B32, p. 221—237; Hanson K., Dunning J. e.a.— Phys. Rev., 1973, v. D8, p. 753—778.
77. Stein P., Binkley M., McAllister R. e.a.— Phys. Rev. Lett., 1966, v. 16, p. 592—594.
78. Price L. E., Dunning J. R., Jr., Goitein M. e.a.— Phys. Rev., 1971, v. D4, p. 45—53.