

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТОРМОЖЕНИЯ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЕЩЕСТВЕ

В. С. Ремизович, Д. Б. Рогожкин, М. И. Рязанов

Московский инженерно-физический институт, Москва

Изложены результаты аналитической теории прохождения пучка быстрых тяжелых заряженных частиц (мюонов, протонов и др.) через вещество, учитывающей одновременно как систематические потери энергии, так и флуктуации потерь из-за вероятностного характера передачи энергии в ионизационных столкновениях и искривления траектории частиц при многократном кулоновском рассеянии.

Подробно рассмотрены флуктуации потерь энергии и пробегов частиц в толстых слоях вещества, где влияние упругого кулоновского рассеяния на разброс частиц по энергиям проявляется наиболее сильно. Проанализировано распределение остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество и поперечному смещению от оси пучка. Приведены также соотношения для средних пробегов и средней глубины проникновения в вещество в зависимости от направления движения частиц и их смещения относительно оси пучка.

The paper reviews the analytical results of the fast charged particles narrow beam penetration through matter. Two important factors — energy loss straggling in inelastic collisions and deviation of particle tracks from a straight-line path due to multiple Coulomb scattering — are taken into account.

The case of deep penetration is analyzed in detail. The energy loss straggling and range distribution are considered. Particle energy loss and range dependences on the transverse displacement and scattering angle are discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Круг научных и практических задач, в которых сталкиваются с необходимостью описания прохождения быстрых заряженных частиц через вещество, чрезвычайно широк: анализ экспериментов, связанных с измерением распределений потерь энергии и пробегов заряженных частиц [1], в частности, определение из эксперимента основных параметров взаимодействия частиц с веществом (например, среднего потенциала ионизации [2—9]); исследование эффектов воздействия ионизирующих излучений в радиационной физике и радиобиологии [10]; расчет детекторов заряженных частиц [11—14]; прохождение космических лучей через атмосферу и под землей [15]; расчет эффективности мишеней в ядерно-физическом эксперименте [16].

Каждая из перечисленных задач обладает своей определенной спецификой, связанной либо с геометрией эксперимента, либо с конкретной областью энергий частиц, либо с характером исследуемых

процессов (спектры частиц, энерговыделение и т. д.). Однако все эти задачи обладают и общими чертами: в них, как правило, требуется информация об энергетическом, угловом и пространственном распределении проходящих в веществе частиц пучка.

Будем рассматривать быстрые тяжелые заряженные частицы ($v \gg v_{\text{ат}}$, $m \gg m_e$, где v — скорость падающих частиц; $v_{\text{ат}}$ — характерная скорость атомных электронов; m — масса частицы; m_e — масса электрона) не сверхвысоких энергий $T \ll (m/m_e) mc^2$ (T — кинетическая энергия частицы, МэВ; c — скорость света, наряду с обычными единицами, МэВ, ниже используются также единицы mc^2 , $E = T/mc^2$). К тяжелым относятся все заряженные частицы, кроме электронов и позитронов, — протоны, мюоны, π -мезоны и др.

В указанной области энергий прохождение частиц через вещество сопровождается потерями энергии на ионизацию и многократным кулоновским рассеянием на малые углы [15, 17—19]. Кроме этого, возможен распад исходных частиц, рождение новых частиц и ядерные взаимодействия (упругие и неупругие) при столкновениях частиц с ядрами атомов вещества [15, 19]. Потери на тормозное излучение, рождение пар и т. д. в рассматриваемой области энергий несущественны [15, 19].

Если совсем отвлечься от ядерного взаимодействия, то распределение проходящих частиц в веществе определяется только многократным кулоновским рассеянием и потерями на ионизацию [15, 17—19]*.

В силу того что при прохождении в веществе быстрых тяжелых частиц многократное упругое рассеяние носит сильно анизотропный характер, а флуктуации потерь энергии при неупругих столкновениях с атомами невелики, торможение частиц в первом приближении можно описать в модели «непрерывного замедления» [17], рассматривая движение частиц как прямолинейное и учитывая только систематические потери. Для более детальной информации о пространственно-угловом и энергетическом распределении частиц необходимо учитывать флуктуации энергетических потерь в неупругих столкновениях и многократное упругое рассеяние.

На рис. 1 условно изображена траектория частицы в веществе.

Флуктуации энергии частицы в точке r обусловлены двумя причинами. Во-первых, неопределенность в энергии возникает из-за вероятностного характера потерь энергии в неупругих столкновениях и имеет место даже при фиксированной длине траектории S . Во-вторых, в точку r частица может попасть различными пространственны-

* Для мюонов это справедливо всегда. Что касается сильновзаимодействующих частиц, то при не очень больших энергиях, когда полный пробег частиц в веществе не намного превышает длину ядерного взаимодействия, многие важные измеряемые в эксперименте величины определяются не испытавшими ядерных столкновений частицами [7—9, 19, 20]. Для них влияние сильного взаимодействия сводится к экспоненциальному ослаблению. Для протонов, например, такая ситуация имеет место до нескольких сот мегаэлектрон-вольт [7—9, 19, 20].

ми траекториями, пройдя пути разной длины и потеряв при этом различную энергию. В этом случае разброс по энергиям возникает даже в приближении непрерывного замедления и связан с флуктуациями длин путей частиц при многократном упругом рассеянии. Оба описанных процесса, в общем случае, одинаково важны и должны учитываться одновременно.

Однако несмотря на то, что исследования прохождения быстрых заряженных частиц ведутся уже не одно десятилетие, до недавнего времени последовательная аналитическая теория, включающая описание распределения частиц по энергиям с одновременным учетом перечисленных выше факторов, отсутствовала [6, 17, 21]. Основная трудность при аналитическом вычислении энергетического спектра была связана с учетом влияния многократного упругого рассеяния на распределение потерь энергии, т. е. с определением разброса частиц по пройденным путям.

С начала 60-х годов для решения этой задачи стали применять численные расчеты методом Монте-Карло с той или иной схемой группировки столкновений [5—8, 22—24]. Метод Монте-Карло, несмотря на свои преимущества, является весьма трудоемким и требует больших затрат машинного времени. Особенно это относится к расчетам с удовлетворительной статистической точностью дифференциальных распределений, например, энергетического спектра или распределения остановившихся частиц. Поэтому там, где это возможно, предпочтение отдается аналитическим результатам [4, 6, 9, 24, 25].

До сих пор в большинстве работ по прохождению тяжелых заряженных частиц через вещество (например, [9, 24, 25]) использовались достижения аналитической теории, подытоженные в [26]. В то же время с момента появления обзора [26] был получен ряд результатов [27—32], существенно расширивших возможности аналитического описания торможения частиц в веществе. В частности, удалось аналитически решить задачу о влиянии многократного упругого рассеяния на распределение потерь энергии частиц [30—32].

Ниже изложена аналитическая теория прохождения пучка быстрых тяжелых заряженных частиц через вещество с одновременным учетом систематического торможения, флуктуаций энергетических потерь при неупругих столкновениях частиц с атомами и искривления траектории из-за многократного кулоновского рассеяния. Особенно подробно рассмотрены флуктуации потерь энергии и пробегов частиц в толстых слоях вещества, когда влиянием упругого рассеяния на распределение энергетических потерь пренебрегать нельзя.



Рис. 1. Траектория частицы в веществе

1. ПРОСТРАНСТВЕННО-УГЛОВОЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ПУЧКА БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Для определения пространственного, углового и энергетического распределения частиц в пучке необходимо решить кинетическое уравнение Больцмана (уравнение переноса) для плотности потока частиц $N(\mathbf{r}, \Omega, T)$ в точке \mathbf{r} , движущихся в направлении Ω и имеющих энергию T [17]:

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} N(\mathbf{r}, \Omega, T) = \hat{I}_{\text{упр}} + \hat{I}_{\text{неупр}}, \quad (1)$$

где $\hat{I}_{\text{упр}}$ и $\hat{I}_{\text{неупр}}$ — интегралы упругих и неупругих столкновений соответственно [17]:

$$\hat{I}_{\text{упр}} = -W_{\text{упр}}(T) N(\mathbf{r}, \Omega, T) + \int_{4\pi} d\Omega' W_{\text{упр}}(T|\Omega' \rightarrow \Omega) N(\mathbf{r}, \Omega', T); \quad (2)$$

$$\hat{I}_{\text{неупр}} = -W_{\text{неупр}}(T) N(\mathbf{r}, \Omega, T) + \int_{\bar{T}}^{\infty} dT' W_{\text{неупр}}(T' \rightarrow T) N(\mathbf{r}, \Omega, T'); \quad (3)$$

$W_{\text{упр}}$ и $W_{\text{неупр}}$ — вероятности упругого и неупругого столкновений на единице пути.

При падении на среду по нормали к поверхности бесконечно узкого мононаправленного и моноэнергетического пучка частиц (рис. 2),

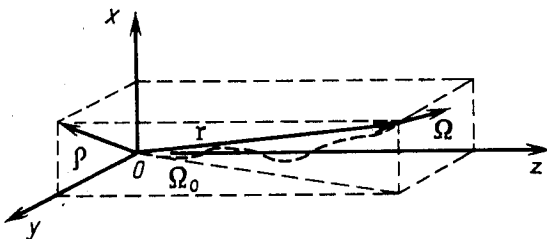


Рис. 2. Условное изображение бесконечно узкого пучка частиц, падающего по нормали к поверхности вещества

в пренебрежении отражением, граничное условие к уравнению (1) имеет вид [17]:

$$N(z=0; \rho, \Omega, T) = N_0 \delta(\rho) \delta(\Omega - \Omega_0) \delta(T - T_0), \quad (4)$$

где N_0 — поток падающих частиц; T_0 — их кинетическая энергия; Ω_0 — единичный вектор, направленный вдоль скорости падающих частиц; ось z направлена по Ω_0 ; плоскость XY совпадает с поверхностью

среды; начало координат совмещено с точкой влета пучка в среду; $\rho = (x, y)$.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (4), определяет функцию Грина уравнения переноса и позволяет вычислить пространственное, угловое и энергетическое распределение частиц при падении на поверхность вещества пучка с произвольными поперечными размерами, угловым спектром и распределением по энергии. Для того чтобы можно было пренебречь отражением, характерные углы падения частиц на поверхность не должны быть близки к $\pi/2$ (исключается случай скользящего падения) [33].

В общем виде, без использования каких-либо упрощающих предположений, решить уравнение (1)—(3) аналитически не удастся. Возможность решения этого уравнения базируется на привлечении ряда физически обоснованных допущений, учитывающих особенности упругих и неупругих взаимодействий быстрых тяжелых заряженных частиц с веществом.

Энергетическое распределение частиц при ионизационном торможении в веществе без учета упругого рассеяния. Если полностью пренебречь упругим рассеянием (приближение «прямо-вперед» [17]), уравнение переноса (1)—(4) примет вид:

$$\frac{\partial N(z, T)}{\partial z} = \hat{I}_{\text{неупр}}; \quad N(z=0; T) = N_0 \delta(T - T_0). \quad (5)$$

Вычисление распределения частиц по энергиям в приближении (5) важно не только как подготовительный этап к решению уравнения переноса с одновременным учетом упругих и неупругих столкновений, но и представляет самостоятельный интерес. Дело в том, что $N(z, T)$ непосредственно описывает энергетический спектр быстрых заряженных частиц в ситуациях, когда роль искривления траектории частиц из-за упругого рассеяния невелика, — в не очень толстых слоях вещества [$z \ll R_0 (m/m_e)^{1/3} Z^{-2/3}$, где R_0 — полный пробег частиц [17], Z — порядковый номер атомов вещества], а в легких средах ($Z \ll \sqrt{m/m_e}$) вообще на любых глубинах.

Ниже дан обзор основных результатов, полученных при решении уравнения (5), выяснено соответствие между ними и указана область применимости каждого из них.

Для преобразования интеграла неупругих столкновений учтем, что при ионизационном торможении быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе максимальная энергия $\epsilon_{\text{макс}}(T)$, которая может быть передана частицей с энергией T атомному электрону в процессе столкновения, невелика,

$$\epsilon_{\text{макс}}(T) \simeq 2 \left(\frac{m_e}{m} \right) \frac{T}{mc^2} (2mc^2 + T) \ll T, \quad (6)$$

и представим $I_{\text{неупр}}$ в виде ряда по передаваемой энергии:

$$I_{\text{неупр}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}(T)} \varepsilon^k d\varepsilon \frac{\partial^k}{\partial T^k} \{W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon) N(r, \Omega, T)\}, \quad (7)$$

где $W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)$ — вероятность того, что частица с энергией T потеряет на единице пути энергию ε .

Если в разложении (7) ограничиться только одним слагаемым, то получим интеграл неупругих столкновений в приближении непрерывного замедления [17]. В этом приближении учитываются только систематические потери энергии, которые характеризуются тормозной способностью среды $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon}(T) = \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}(T)} \varepsilon d\varepsilon W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon). \quad (8)$$

Значение $\bar{\varepsilon}$ (в единицах mc^2) для быстрых заряженных частиц определяется формулой Бете — Блоха [15, 17, 19, 34]:

$$\bar{\varepsilon}(E) = 4\pi n_0 Z z^2 r_e^2 \frac{m_e}{m} \frac{(1+E)^2}{E(2+E)} L_{\text{ион}}(E), \quad (9)$$

где $r_e = e^2/m_e c^2$ — классический радиус электрона; ze — заряд частицы; n_0 — число атомов вещества в единице объема; $L_{\text{ион}}$ — ионизационный логарифм:

$$L_{\text{ион}}(E) = \ln \frac{|2E(2+E)m_e c^2}{I(Z)} - \frac{E(2+E)}{(1+E)^2} - \frac{1}{Z} \sum_{K,L,\dots} C_i - \delta, \quad (10)$$

$I(Z)$ — средний потенциал ионизации атомов среды, C_i — поправки, учитывающие связь электронов на K, L, \dots -оболочках атомов, δ — поправка на эффект плотности.

Значение ионизационного потенциала вычислить из первых принципов, как правило, не удастся и $I(Z)$ определяют из эксперимента. Ионизационные потенциалы различных веществ приведены в [34]. Поправки на связь электронов в атоме рассчитывались в [35, 36]; они важны в нерелятивистской области энергий. Вклад эффекта плотности в тормозную способность среды детально рассмотрен в работах Стернхаймера и др. [37—40].

Для определения тормозной способности $\bar{\varepsilon}$ в различных диапазонах энергий частиц имеются подробные таблицы и аппроксимационные соотношения [34]. Часто в заданном интервале энергий для $L_{\text{ион}}$ используют приближение

$$L_{\text{ион}} \approx \ln \frac{2E(2+E)m_e c^2}{I_{\text{adj}}(Z)}, \quad (11)$$

где $I_{\text{adj}}(Z)$ — подгоночное значение ионизационного потенциала, при котором достигается наилучшее согласие с экспериментом [41].

Значения $I_{adj}(Z)$ для ряда веществ и диапазонов энергий приведены в [41].

В приближении непрерывного замедления уравнение переноса имеет вид [17]:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z, T) \}. \quad (12)$$

Его решение определяется выражением

$$N(z, T) = \frac{N_0}{\varepsilon(T)} \delta[R_0 - R(T) - z]. \quad (13)$$

Здесь $R(T)$ и R_0 — соответственно остаточный и полный пробег частиц в веществе:

$$R(T) = \int_0^T dT' / \bar{\varepsilon}(T'); \quad R_0 = R(T = T_0). \quad (14)$$

Соотношение пробег — энергия является одной из важнейших измеряемых и используемых на практике величин, которые характеризуют торможение заряженных частиц в веществе [1]. Для него на основе расчетов и обобщения экспериментальных данных составлены подробные таблицы [19, 34] и предложен ряд приближенных формул [15, 17, 34]. Считая $L_{ион}$ плавной функцией энергии, с точностью порядка нескольких процентов для соотношения пробег — энергия легко найти

$$R(E) = [4\pi n_0 Z z^2 r_e^2 L_{ион}(E_*)]^{-1} \frac{m}{m_e} \frac{E^2}{1+E}, \quad (15)$$

где $E_* = \frac{1+E}{E} \left[\frac{2+E}{2} - \frac{1}{E} \ln(1+E) \right] - 1$.

Из (15) следует, что для нерелятивистских частиц ($E \ll 1$)

$$R(E) \simeq [4\pi n_0 Z z^2 r_e^2 L_{ион}]^{-1} \frac{m}{m_e} E^2, \quad (16)$$

а в области ультрарелятивистских энергий ($E \gg 1$)

$$R(E) \approx [4\pi n_0 Z z^2 r_e^2 L_{ион}]^{-1} \frac{m}{m_e} E. \quad (17)$$

Для того чтобы включить в рассмотрение флуктуации энергетических потерь, вызванные вероятностным характером процесса неупругих столкновений частиц с атомами вещества, необходимо сохранить в разложении (7), по крайней мере, еще одно слагаемое. Это соответствует приближению Фоккера — Планка или диффузионному приближению по энергии [17]. В толстых слоях вещества интеграл неупругих столкновений, записанный в диффузионном приближении, описывает торможение быстрых тяжелых заряженных частиц с достаточно высокой точностью [6, 27] и в большинстве случаев ограничиваются именно этим приближением. Однако в тон-

ких слоях при вычислении энергетического спектра частиц в разложении (7) нужно учитывать много слагаемых [17], и приближение Фоккера — Планка оказывается недостаточным.

В работе [29] был развит метод приближенного решения уравнения переноса, который позволяет обобщить известные результаты для тонких [42—44] и толстых [27, 28, 45—47] слоев вещества. В [29] использовано то обстоятельство, что в подавляющей области глубин энергетический спектр тяжелых частиц имеет резко выраженный максимум при $T = T_{н.в}(z)^*$, а $\varepsilon_{\max}(T)$ и $W_{\text{неупр}}(T | \varepsilon)$ являются плавными функциями энергии, и приближенно положено

$$\varepsilon_{\max}(T) \simeq \varepsilon_{\max}(T_{н.в}(z)); \quad (18)$$

$$W_{\text{неупр}}(T | \varepsilon) \simeq W_{\text{неупр}}(T_{н.в}(z) | \varepsilon). \quad (19)$$

Допущение (18), (19) позволяет представить интеграл неупругих столкновений (7) в виде

$$\hat{J}_{\text{неупр}} \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\overline{\varepsilon^k(z)}}{[\overline{\varepsilon}(z)]^k} \frac{\partial^k}{\partial R^k} N, \quad (20)$$

где

$$\overline{\varepsilon^k(z)} = \int_0^{\varepsilon_{\max}(T_{н.в}(z))} \varepsilon^k W_{\text{неупр}}(T_{н.в}(z) | \varepsilon) d\varepsilon. \quad (21)$$

После этого аналитическое решение уравнения переноса (5) найти нетрудно:

$$\begin{aligned} N(z, T) = & \frac{N_0}{\varepsilon(T)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[-i\omega(R(T) - R_0 + z)] \times \\ & \times \exp\left\{-\int_{T_{н.в}(z)}^{T_0} \frac{dT'}{\varepsilon(T')} \int_0^{\varepsilon_{\max}(T')} d\varepsilon W_{\text{неупр}}(T' | \varepsilon) \times \right. \\ & \left. \times \left[1 - e^{-i\omega \frac{\varepsilon}{\varepsilon(T')}} - i\omega \frac{\varepsilon}{\varepsilon(T')}\right]\right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Выражение (22) описывает энергетический спектр частиц в веществе без учета упругого рассеяния.

* В первом приближении $T_{н.в}(z) \simeq T_{н.в}(z)$, где $T_{н.в}(z)$ — энергия частиц на глубине z в приближении непрерывного замедления:

$$R[T_{н.в}(z)] = R_0 - z; \quad z = \int_{T_{н.в}(z)}^{T_0} \frac{dT'}{\varepsilon(T')}.$$

На небольших глубинах

$$z \ll \overline{\varepsilon^2}_{\text{макс}} / \varepsilon^2 \quad (23)$$

ширина энергетического спектра сравнима с максимальной энергией, теряемой частицей в одном столкновении. В этом случае вычислить интеграл (22) аналитически не удастся и необходимо использовать численное интегрирование на ЭВМ.

Значение входящего в неравенство (23) среднего квадрата энергии (в единицах mc^2), теряемой частицей на единице пути, при ионизационном торможении в среде определяется соотношением [6, 17, 19, 43, 44, 48]:

$$\overline{\varepsilon^2}(E) = 4\pi n_0 Z z^2 r_e^2 \left(\frac{m_e}{m}\right)^2 (1+E)^2 K(E). \quad (24)$$

Коэффициент $K(E)$ в (24) учитывает эффекты связи электронов в атоме, если электроны рассматривать как свободные, $K(E) = 1$. В области нерелятивистских энергий частиц пренебрегать эффектами связи, вообще говоря, нельзя и для вычисления $K(E)$ необходимо проводить соответствующий квантовомеханический расчет [19, 43, 44, 48].

Используя выражения (9), (15) и (24), неравенство (23) можно переписать в виде

$$z \ll \left[4 \frac{m_e}{m} \frac{(2+E_0)^2}{1+E_0} \frac{L_{\text{ион}}}{K} \right] R_0. \quad (25)$$

Отсюда следует, в частности, что в области нерелятивистских энергий ($E_0 \simeq 0,1$) для мюонов в Al $z \ll 0,6 R_0$, в Pb $z \ll 0,4 R_0$, для протонов в Al $z \ll 0,07 R_0$, в Pb $z \ll 0,05 R_0$.

В пределе малых потерь энергии

$$z \ll R_0, \quad (26)$$

полагая в выражении (22)

$$R_0 - R(T) \simeq \frac{T_0 - T}{\varepsilon(T_0)}, \quad (27)$$

приходим к известному результату Вавилова [42]:

$$N(z, T) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \\ \times \exp \left\{ i\omega(T_0 - T) - z \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}(T_0)} d\varepsilon W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon) (1 - e^{-i\omega\varepsilon}) \right\}. \quad (28)$$

Распределение (28) для различных приближенных значений $W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon)$ рассматривалось в [42—44]. В модели свободных электронов спектр (28) протабулирован в [49].

В достаточно толстых слоях вещества,

$$z \gg \varepsilon_{\text{макс}}^2 / \bar{\varepsilon}^2, \quad (29)$$

эффективные значения ω в (22) невелики, и входящую под знак интеграла экспоненту $\exp(-i\omega\varepsilon/\bar{\varepsilon}(T))$ можно разложить в ряд, ограничившись небольшим числом слагаемых. Это дает возможность выполнить обратное преобразование Фурье в (22) аналитически и представить спектр $N(z, T)$ в виде, удобном для практических расчетов.

Если разложить экспоненту с точностью до линейного по ω слагаемого, получим результат модели непрерывного замедления (13). Это приближение качественно правильно характеризует процесс торможения частиц на больших глубинах, когда средние потери энергии значительно превосходят флуктуации потерь [27].

Для того чтобы учесть флуктуации энергетических потерь, необходимо удерживать, как минимум, еще одно слагаемое в разложении $\exp(-i\omega\varepsilon/\bar{\varepsilon}(T))$ в ряд по ω . В результате получаем

$$N(z, T) = \frac{N_0}{\bar{\varepsilon}(T) \sqrt{2\pi\sigma^2(z)}} \exp\left\{-\frac{[R_0 - R(T) - z]^2}{2\sigma^2(z)}\right\}, \quad (30)$$

где

$$\sigma^2(z) = \int_0^z dz' \frac{\bar{\varepsilon}^2(z')}{[\bar{\varepsilon}(z')]^2} \approx \int_{T_{\text{н.в}}(z)}^{T_0} dT \frac{\bar{\varepsilon}^2(T)}{[\bar{\varepsilon}(T)]^3} \quad (31)$$

— дисперсия распределения по пробегам. Используя выражения (9) и (24), для $\sigma^2(z)$ имеем

$$\sigma^2(z) = (4\pi n_0 Z z^2 r_c^2)^{-2} \int_{E_{\text{н.в}}(z)}^{E_0} dE \frac{[(1+E)^2 - 1]^3}{(1+E)^4 L_{\text{ион}}^3(E)} K(E). \quad (32)$$

Если пренебречь зависимостью ионизационного логарифма от энергии и положить $K(E) = 1$, то из (32) следует [17]:

$$\sigma^2(z) = R_0^2 \sigma^2(\xi);$$

$$\sigma^2(\xi) = \begin{cases} [1 - (1 - \xi)^2]/2\nu, & E_0 \ll 1, \\ [1 - (1 - \xi)^3]/3\nu, & E_0 \gg 1, \end{cases} \quad (33)$$

где глубина z измеряется в единицах полного пробега R_0 ($\xi = z/R_0$) и введен безразмерный параметр ν

$$\nu = \frac{[\bar{\varepsilon}(E_0)]^2}{\bar{\varepsilon}^2(E_0)} R_0 = \frac{m}{m_e} \frac{1 + E_0}{(2 + E_0)^2} L_{\text{ион}}, \quad (34)$$

который характеризует флуктуации энергетических потерь частиц за счет вероятностного характера неупругих столкновений [$\nu \sim R_0 / \sqrt{\langle(\delta R_0)^2\rangle}$; $\sqrt{\langle(\delta R_0)^2\rangle}$ — среднеквадратичная флуктуация

пробега]. Чем больше v , тем меньше флуктуации и уже функция распределения $N(z, T)$. Приближению непрерывного замедления соответствует предельный переход $v \rightarrow \infty$. Для быстрых тяжелых частиц параметр v велик. Так, для протонов с энергией 10—100 МэВ ($E_0 \approx 0,01 \div 0,1$) значения v лежат в пределах $2300 \leq v \leq 3400$ для Al и $1400 \leq v \leq 2500$ для Pb. Для мюонов и пионов соответствующие значения v примерно на порядок меньше.

Спектр (30), (31) соответствует «самосогласованному» гауссову приближению при решении уравнения переноса с интегралом неупругих столкновений в приближении Фоккера — Планка [17]. По-видимому, впервые выражение (30) было предложено Бергером и Сельтзером [6] как обобщение результата Бора, полученного для распределения остановившихся частиц [50]. Более строго, решением уравнения переноса, энергетический спектр (30) был найден в [27].

Для оценки точности приближения Фоккера — Планка и более детального вычисления энергетического спектра частиц в разложении экспоненты в ряд по ω нужно сохранить еще один член [29, 33]. Тогда получаем [27, 29, 33]:

$$\begin{aligned}
 N(z, T) = & \frac{N_0}{\bar{\epsilon}(T)} \left(\frac{2}{\zeta^3(z)} \right)^{1/3} \text{Ai} \left[- \left(\frac{2}{\zeta^3(z)} \right)^{1/3} \times \right. \\
 & \times \left(R_0 - R(T) - z + \frac{1}{2} \frac{\sigma^4(z)}{\zeta^3(z)} \right) \left. \right] \times \\
 & \times \exp \left\{ \frac{\sigma^2(z)}{\zeta^3(z)} \left[R_0 - R(T) - z + \frac{1}{3} \frac{\sigma^4(z)}{\zeta^3(z)} \right] \right\}, \quad (35)
 \end{aligned}$$

где

$$\zeta^3(z) = \int_0^z dz' \frac{\overline{\epsilon^3(z')}}{[\overline{\epsilon(z')}]^3} \simeq \int_{T_{H,B}(z)}^{T_0} dT \frac{\overline{\epsilon^3(T)}}{[\overline{\epsilon(T)}]^4}, \quad (36)$$

$\text{Ai}(x)$ — функция Эйри [51].

Энергетический спектр (35) впервые вычислил Пэйн [27], решая уравнение переноса (5) методом моментов.

Распределение (35) в переменной пробега отличается от гауссова, оно несколько асимметрично — наиболее вероятный пробег не совпадает со средним (рис. 3). Однако с увеличением глубины z эти отличия быстро уменьшаются (рис. 3).

В толстых слоях вещества ($z > \epsilon_{\text{макс}}^2 / \bar{\epsilon}^2$) поправки к распределению (30) незначительны (табл. 1) и в практических вычислениях ими, как правило, пренебрегают [27].

Вернемся теперь к приближению Фоккера — Планка для интеграла неупругих столкновений и несколько подробнее остановимся

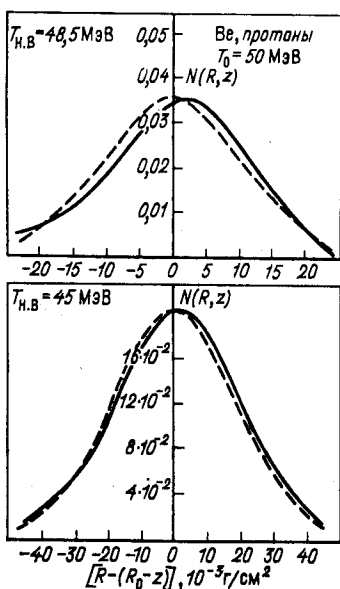


Рис. 3. Изменение энергетического спектра с ростом толщины слоя вещества [27]: сплошная кривая — расчет на основе соотношения (35); штриховая — гауссовское распределение (30)

на полученных в этом приближении результатах. Учитывая, что к настоящему моменту их предложено немало [27, 28, 45—47, 52], укажем соответствие между этими результатами и область применимости каждого из них.

1. Распределение Бора [52]:

$$N(z, T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_B^2(z)}} \times \exp\left\{-\frac{[T - T_{н.в.}(z)]^2}{2\sigma_B^2(z)}\right\}, \quad (37)$$

где

$$\sigma_B^2(z) = \int_0^z dz' \bar{\epsilon}^2(z') \simeq \int_{T_{н.в.}(z)}^{T_0} dT \frac{\bar{\epsilon}^2(T)}{\bar{\epsilon}(T)} \quad (38)$$

физически оправдано в двух случаях. Во-первых, для частиц ультра-релятивистских энергий, когда $\bar{\epsilon}(T) \simeq \text{const}$. Во-вторых, в случае, когда одновременно выполнены неравенства (26) и (29), т. е. когда с одной стороны потери энергии малы, а с другой — ширина спектра превышает максимальную энергию, теряемую частицей в одном столкновении.

2. Результат Симона [45]:

$$N(z, T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_C^2(z)}} \exp\left\{-\frac{[T - T_{н.в.}(z)]^2}{2\sigma_C^2(z)}\right\}, \quad (39)$$

где

$$\sigma_C^2(z) = [\bar{\epsilon}(z)]^2 \int_0^z dz' \frac{\bar{\epsilon}^2(z')}{[\bar{\epsilon}(z')]^2} \simeq [\bar{\epsilon}(T_{н.в.}(z))]^2 \int_{T_{н.в.}(z)}^{T_0} dT \frac{\bar{\epsilon}^2(T)}{[\bar{\epsilon}(T)]^3} \quad (40)$$

вытекает непосредственно из соотношения (30), если T не очень отличается от $T_{н.в.}(z)$ и можно положить

$$R_0 - R(T) - z \simeq \frac{1}{\bar{\epsilon}(T_{н.в.}(z))} [T - T_{н.в.}(z)]. \quad (41)$$

3. В работах [46, 47] уравнение (5) с интегралом столкновений в приближении Фоккера — Планка решалось методом прямого

Таблица 1. Значения поправок к гауссову распределению по остаточным пробегам [6] Pb, протоны, $T_0 = 340$ МэВ

$\frac{R - (R_0 - z)}{\sqrt{\sigma^2(z)}}$	$T_{н.в.}$ МэВ				
	338	332	308	276	1
-1	0,83	0,91	0,95	0,97	0,98
-0,8	0,83	0,91	0,95	0,97	0,98
-0,6	0,84	0,92	0,96	0,97	0,98
-0,4	0,86	0,94	0,97	0,98	0,99
-0,2	0,90	0,96	0,98	0,99	0,99
0	0,95	0,99	1,00	1,00	1,00
0,2	1,01	1,02	1,01	1,01	1,01
0,4	1,09	1,05	1,03	1,02	1,01
0,6	1,17	1,08	1,04	1,03	1,02
0,8	1,25	1,10	1,05	1,03	1,02
1,0	1,31	1,13	1,06	1,04	1,02

численного интегрирования. Как показывает сравнение [53], данные численного расчета практически не отличаются от результатов вычислений по формуле (30) и тем самым доказывают справедливость процедуры (18), (19) (по крайней мере, при решении уравнения переноса в диффузионном приближении).

4. В области нерелятивистских энергий $\bar{\epsilon}^2 \simeq \text{const}$ и, если вдобавок пренебречь зависимостью ионизационного логарифма от энергии, уравнение переноса, записанное в приближении Фоккера — Планка, удается аналитически решить точно [28]:

$$N(z, T) = N_0 \frac{4\nu}{T_0} \frac{R_0}{z} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-(2\nu - \frac{1}{2})} I_{2\nu + \frac{1}{2}} \left(4\nu \frac{R_0}{z} \frac{T}{T_0}\right) \times \exp \left[-2\nu \frac{R_0}{z} \left(1 + \frac{T^2}{T_0^2}\right) \right]. \tag{42}$$

Здесь $I_{2\nu + \frac{1}{2}}$ — модифицированная функция Бесселя [51]; безразмерный параметр ν определяется равенством (34)*.

На глубинах, где еще не происходит остановки частиц, ($0 \leq z \leq R_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$), распределение (42) очень хорошо согласуется с результатом (39) [если, конечно, в (39) положить $\bar{\epsilon}^2 = \text{const}$ и $L_{\text{ион}} \simeq \text{const}$]. По сравнению с (39) соотношение (42) обладает тем преимуществом, что позволяет проследить изменение энергетического спектра и в той области глубин, где происходит остановка частиц и где формула (39) уже неприменима.

* В [28] исправлена допущенная в [54] неточность. Индекс функции Бесселя в решении [54] нужно увеличить на единицу.

В легких средах ($Z < \sqrt{m/m_e}$) влияние упругого рассеяния на разброс частиц по энергиям мало, и полученные выше результаты готовы для непосредственного сравнения с экспериментом.

Таблица 2. Значения ширины энергетического спектра α -частиц ($T_0 = 5,3$ МэВ) в воздухе на различных глубинах по данным эксперимента [55] и расчета по формуле (39) [27]

z , см	$\delta T_{\text{эксп}}$, кэВ	$\delta T_{\text{теор}} = \sqrt{2\sigma_C^2}$, кэВ
0,833	32	31,0
1,388	43	41,4
1,943	54	51,9
2,554	70	68,6
2,998	92	89,0
3,276	109	113,0
3,526	122	127

В табл. 2 приведены данные эксперимента [55] и расчета по формуле (39) ширины энергетического спектра протонов с начальной энергией 5,3 МэВ в воздухе [27]. Небольшие различия экспериментальных и теоретических результатов находятся в пределах точности соотношения (39).

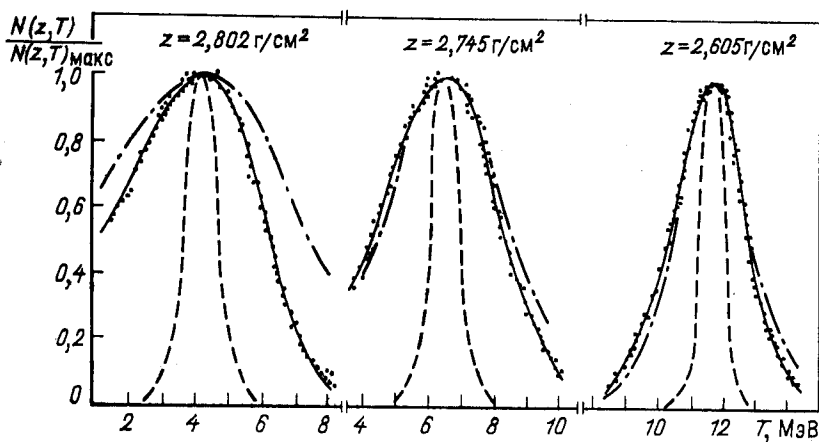


Рис. 4. Энергетический спектр протонов с начальной энергией $T_0 = 49,1$ МэВ в Al по данным эксперимента и расчета по формулам (30) (сплошная кривая), (37) (штриховая) и (39) (штрихпунктирная) [53]

На рис. 4 показаны результаты эксперимента [53] и расчета энергетического спектра на основе соотношений (30), (37) и (39) соответственно. Как следует из рисунка, во всем исследованном в [53] диа-

пазоне потерь энергии экспериментальные данные прекрасно описываются распределением (30). При небольших $T - T_{н.в}(z)$ хорошее согласие с экспериментом дает также и выражение (39).

Энергетический спектр при прохождении пучка частиц через толстые слои вещества с одновременным учетом вероятностного характера неупругих столкновений и искривления траектории из-за упругого рассеяния. Как указано во введении, при определении разброса частиц по энергиям, помимо флуктуаций энергетических потерь при неупругих столкновениях, в общем случае необходимо учитывать искривление траектории из-за многократного кулоновского рассеяния.

Впервые вопрос о влиянии упругого рассеяния на флуктуации потерь энергии был рассмотрен И. Я. Померанчуком [56]. Он определил значения среднего пути и дисперсии путей частиц в слое вещества заданной толщины. Для среднего пути, например в [56] было получено соотношение

$$\langle S \rangle_z = z + \frac{1}{2} \int_0^z \langle \theta^2 \rangle_{z'} dz' \quad (43)$$

где $\langle \theta^2 \rangle_z$ — значение среднего квадрата угла рассеяния частицы в слое вещества толщиной z .

Используя соотношение (43), для разброса по энергиям из-за упругого рассеяния нетрудно получить оценку:

$$(\delta T)_{\text{упр}} \sim \bar{\varepsilon} \langle \theta_s^2 \rangle z^2,$$

где $\langle \theta_s^2 \rangle$ — средний квадрат угла рассеяния частицы на единице пути.

Флуктуации потерь энергии при неупругих столкновениях, в свою очередь, приводят к разбросу $(\delta T)_{\text{неупр}} \sim \sqrt{\bar{\varepsilon}^2 z}$. Учитывая, что для быстрых тяжелых заряженных частиц $\bar{\varepsilon}^2 / (\bar{\varepsilon})^2 \sim m_e / m R_0$, а $\langle \theta_s^2 \rangle R_0 \sim m_e / m Z$, имеем

$$\frac{(\delta T)_{\text{упр}}}{(\delta T)_{\text{неупр}}} \sim \frac{\bar{\varepsilon} \langle \theta_s^2 \rangle z^2}{\sqrt{\bar{\varepsilon}^2 z}} \sim Z \sqrt{\frac{m_e}{m}} \left(\frac{z}{R_0} \right)^{3/2}. \quad (44)$$

Таким образом, роль многократного упругого рассеяния в формировании энергетического спектра частиц с увеличением глубины возрастает и особенно важна при прохождении не очень тяжелых частиц (мюонов, пионов) через толстые слои $\left(\frac{z}{R_0} \gg Z^{-2/3} \left(\frac{m}{m_e} \right)^{1/3} \right)$ веществ с большими Z . В частности, упругое рассеяние необходимо учитывать в расчетах распределения потерь энергии и энерговыделения (кривой Брэгга) [2, 3, 6—10, 24, 25], разброса остановившихся частиц [5, 57, 58]. Следует также отметить, что многократное упругое рассеяние является причиной зависимости потерь энергии от угла рассеяния частиц [59] и смещения их относительно оси пучка [40].

Задача о вычислении не только среднего пути и дисперсии путей, но и самого распределения частиц по пройденным путям впервые была поставлена Янгом [60]. В [60] рассматривался вопрос об определении распределения частиц по пути при прохождении узкого пучка через плоский слой вещества. При этом предполагалось, что потери энергии не оказывают влияние на упругое рассеяние (средний квадрат угла рассеяния на единице пути $\langle \theta_s^2 \rangle = \text{const}$). В [60] было дано формальное решение соответствующего уравнения переноса в виде произведения рядов по полиномам Эрмита. Громоздкость полученного решения делала его практическое использование весьма сложным, и поэтому окончательные довольно простые выражения для распределений по путям Янг представил только для двух простейших случаев, относящихся к геометрии широкого пучка, — для частиц, движущихся в первоначальном направлении, и относительно к направлению движения частиц. Исходное предположение работы [60] $\langle \theta_s^2 \rangle = \text{const}$ ограничивало применимость распределения Янга областью тонких слоев вещества, где, как показано выше, роль многократного упругого рассеяния незначительна.

Обобщение результата Янга с учетом зависимости $\langle \theta_s^2 \rangle$ от энергии частиц было выполнено в работах Спенсера и Койна [61], Бергера и Сельтзера [6].

Спенсер и Койн [61] нашли распределение частиц по путям для случая широкого пучка. Однако отсутствие в [61] более или менее удобных для расчетов аналитических соотношений привело к тому, что при проведении практических вычислений решение Спенсера и Койна в дальнейшем не использовалось.

Напротив, результат Бергера и Сельтзера [6], хотя и получен не строго, приобрел широкую известность и до последнего времени был, пожалуй, единственным аналитическим результатом, используемым в практических расчетах [6, 9, 24, 25] для учета влияния многократного упругого рассеяния на распределение потерь энергии частиц в толстых слоях вещества. В работе [6] распределение Янга [60] было перенормировано на основе формулы (43) для среднего пути, в которой значение $\langle \theta^2 \rangle_z$ вычислялось с учетом зависимости сечения упругого рассеяния от энергии частицы. Такая процедура является простой и логичной, но не гарантирует правильного описания распределения в целом. В частности, как показывает сравнение с численными расчетами методом Монте-Карло [6, 22], модифицированная Бергером и Сельтзером формула Янга завышает дисперсию распределения по путям. В этом нетрудно также убедиться, воспользовавшись выражением для дисперсии путей частиц, полученным в работе И. Я. Померанчука [56].

Следует отметить, что метод решения уравнения переноса, аналогичный развитому в [61], был использован в работе [62], для вычисления распределения частиц по пройденным путям в неоднородном веществе (предполагалось, что зависимость $\langle \theta_s^2 \rangle$ от глубины обусловлена неоднородностью среды).

В последние годы авторам настоящего обзора удалось до конца решить задачу Янга, т. е. найти распределение частиц по пройденным путям при прохождении узкого пучка через вещество с учетом зависимости $\langle \theta_s^2 \rangle$ от энергии. Это, в свою очередь, позволило развить последовательную аналитическую теорию прохождения пучка частиц в толстых слоях вещества с одновременным учетом флуктуаций потерь энергии из-за вероятностного характера неупругих столкновений и многократного упругого рассеяния [30—32].

Ниже изложены основные результаты этой теории.

Особенность кулоновского рассеяния быстрых тяжелых заряженных частиц на атомах вещества заключается в том, что при энергиях $T \gtrsim 4 \cdot 10^4 \left(\frac{m_e}{m}\right)^2 A^{-2/3} mc^2$ (A — атомный номер вещества) длина волны частицы λ становится меньше характерного размера $r_{\text{яд}}$ ядра атома, и при углах отклонения $\theta \gtrsim \lambda/r_{\text{яд}}$ ($r_{\text{яд}} \simeq 0,45 A^{1/3} r_e$, r_e — классический радиус электрона [15]) в сечении упругого рассеяния необходимо учитывать ядерный формфактор [15]. Он описывает подавление рассеяния на углы $\theta \gtrsim \lambda/r_{\text{яд}}$.

Это позволяет использовать для интеграла упругих столкновений диффузионное приближение [17]:

$$\hat{I}_{\text{упр}} = \frac{1}{4} \langle \theta_s^2(T) \rangle \Delta_{\Omega} N(\mathbf{r}, \Omega, T), \quad (45)$$

где Δ_{Ω} — угловая часть лапласиана в сферических координатах:

$$\Delta_{\Omega} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad (46)$$

$\Omega = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, $\langle \theta_s^2(T) \rangle$ — средний квадрат угла рассеяния частицы с энергией T на единице пути [17]:

$$\langle \theta_s^2(E) \rangle = 16\pi n_0 Z(Z+1) z^2 r_e^2 \frac{m_e}{m} \frac{(1+E)^2}{E^2(2+E)^2} L_k, \quad (47)$$

Z — порядковый номер атомов вещества; ze — заряд частицы; n_0 — число атомов среды в единице объема; L_k — кулоновский логарифм [15], $L_k = \ln [210 (AZ)^{-1/6}]$.

Приближение (45) в целом правильно описывает угловой спектр быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе и оказывается особенно плодотворным при решении задачи о влиянии упругого рассеяния на распределение энергетических потерь [17, 30—32, 60—62].

Как следует из предыдущего подраздела, разброс частиц по энергиям удобно рассматривать в переменной

$$u = R_0 - R(T) - z = \int_T^{T_{\text{н.з}}(z)} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')}, \quad (48)$$

где $T_{\text{н.з}}(z)$ — энергия частиц на глубине z в приближении непрерывного замедления.

В толстых слоях вещества средние потери энергии быстрых тяжелых заряженных частиц значительно превосходят флуктуации потерь и заранее очевидно, что $u_{эф} \ll R_0 - R(T)$. Поэтому можно воспользоваться приближением (20), (21) для интеграла неупругих столкновений, а также, аналогично (18), (19), положить

$$\langle \theta_s^2(T) \rangle \simeq \langle \theta_s^2 [T_{н.в.}(z)] \rangle \equiv \langle \theta_s^2(z) \rangle. \quad (49)$$

После проведенных преобразований уравнение (1) и граничное условие (4) примут вид

$$\Omega \frac{\partial N}{\partial r} + (1 - \Omega_z) \frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\langle \theta_s^2(z) \rangle}{4} \Delta_\Omega N + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\bar{\varepsilon}^k(z)}{[\bar{\varepsilon}(z)]^k} \frac{\partial^k N}{\partial u^k}, \quad (50)$$

$$N(z=0, \rho, \Omega, u) = N_0 \delta(\rho) \delta(\Omega - \Omega_0) \delta(u). \quad (51)$$

Плотность потока $N(\mathbf{r}, \Omega, u)$ связана с $N(\mathbf{r}, \Omega, T)$ соотношением

$$N(\mathbf{r}, \Omega, u) = \bar{\varepsilon}(T) N(\mathbf{r}, \Omega, T). \quad (52)$$

Поскольку при рассеянии быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе угол отклонения от направления первоначального движения на всем пробеге (по крайней мере там, где частицы можно считать быстрыми) мал ($\langle \theta_s^2 \rangle R_0 \ll 1$), для дальнейшего преобразования уравнения (50) можно провести малоугловое разложение его коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \sin \theta \cos \varphi \simeq \theta \cos \varphi = \theta_x; \\ \Omega_y &= \sin \theta \sin \varphi \simeq \theta \sin \varphi = \theta_y; \\ \Omega_z &= \cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2 = 1 - (\theta_x^2 + \theta_y^2)/2; \\ \Delta_\Omega &\simeq \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где θ_x и θ_y — углы между вектором Ω (направлением движения частицы) и плоскостями YZ и XZ соответственно (рис. 5).

Оставляя в коэффициентах уравнения (50) только первые неисчезающие слагаемые, приведем уравнение переноса (50) и граничное условие (51) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial z} + \theta_x \frac{\partial N}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \frac{\partial N}{\partial u} = \\ & = \frac{\langle \theta_s^2(z) \rangle}{4} \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \theta_y^2} \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\bar{\varepsilon}^k(z)}{[\bar{\varepsilon}(z)]^k} \frac{\partial^k N}{\partial u^k}; \end{aligned} \quad (54)$$

$$N(z=0, x, y, \theta_x, \theta_y, u) = N_0 \delta(x) \delta(y) \delta(\theta_x) \delta(\theta_y) \delta(u). \quad (55)$$

Из уравнения переноса, записанного в форме (50), становится ясно, в чем состоит некорректность стандартного малоуглового приближения [17, 18]. Даже при рассеянии частиц на малые углы заменять $\cos \theta$ на единицу можно только в первом слагаемом левой части уравнения (50). Что касается второго слагаемого, то здесь нужно удержать два члена разложения $\cos \theta$ в ряд по θ , поскольку значение производной $\partial N / \partial u$ велико. Это слагаемое учитывает влияние искривления траектории частиц при многократном упругом рассеянии на их распределение по энергии.

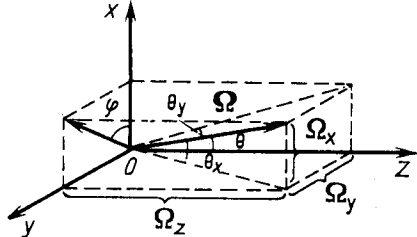


Рис. 5. К выводу соотношений (53)

Уравнение переноса (54) с граничным условием (55) описывает прохождение пучка быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе с учетом систематического торможения, флуктуаций путей частиц при многократном упругом рассеянии и вероятностного характера потерь энергии в неупругих столкновениях. Это уравнение удастся решить аналитически в общем виде, без использования каких-либо новых дополнительных приближений.

Для решения уравнения переноса (54) с граничным условием (55) можно воспользоваться преобразованием Фурье по переменной u :

$$N_\omega(z, x, y, \theta_x, \theta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-i\omega u} N(z, x, y, \theta_x, \theta_y, u).$$

В результате этого преобразования получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_\omega}{\partial z} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} i\omega N_\omega + \theta_x \frac{\partial N_\omega}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial N_\omega}{\partial y} = \\ & = \frac{\langle \theta_s^2(z) \rangle}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_y^2} \right) N_\omega + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \frac{\bar{\varepsilon}^k(z)}{[\bar{\varepsilon}(z)]^k} N_\omega; \end{aligned} \quad (56)$$

$$N_\omega(z=0, x, y, \theta_x, \theta_y) = N_0 \delta(x) \delta(y) \delta(\theta_x) \delta(\theta_y). \quad (57)$$

Решение $N_\omega(z, x, y, \theta_x, \theta_y)$ имеет вид

$$N_\omega(z, x, y, \theta_x, \theta_y) = N_0 F_\omega(z, x, y, \theta_x, \theta_y) \exp[-\tau(\omega, z)], \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} \tau(\omega, z) &= - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \int_0^z \frac{\bar{\varepsilon}^k(z')}{[\bar{\varepsilon}(z')]^k} dz' \simeq \\ &\simeq \int_{T_{H.B}(z)}^{T_0} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} \int_0^{\varepsilon_{\text{макс}}(T')} d\varepsilon W_{\text{неупр}}(T'|\varepsilon) \left[1 - \frac{i\omega\varepsilon}{\varepsilon(T')} - e^{-\frac{i\omega\varepsilon}{\varepsilon(T')}} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Входящая сюда функция $F_\omega(z, x, y, \theta_x, \theta_y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_\omega}{\partial z} + \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} i\omega F_\omega + \theta_x \frac{\partial F_\omega}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial F_\omega}{\partial y} = \frac{1}{4} \langle \theta_s^2(z) \rangle \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_y^2} \right) F_\omega \quad (60)$$

с граничным условием

$$F_\omega(z=0, x, y, \theta_x, \theta_y) = \delta(x) \delta(y) \delta(\theta_x) \delta(\theta_y). \quad (61)$$

Уравнение (60) совпадает с фурье-образом исходного уравнения переноса (54), если в последнем пренебречь вероятностным характером неупругих столкновений, и описывает процесс торможения частиц в среде только с учетом систематических потерь и флуктуаций путей при многократном упругом рассеянии.

С физической точки зрения причина того, что решение имеет вид (58), связана с тем, что определяющие энергетический разброс частиц факторы — вероятностный характер передачи энергии при неупругом столкновении частиц с атомами вещества и флуктуации длины пути при многократном упругом рассеянии (т. е. искривление траектории) — квазинезависимы. Последнее является следствием относительной малости флуктуаций, обусловленных каждым из этих процессов.

Решение уравнения (60) с дополнительным условием (61) имеет вид

$$F_\omega(z, \rho, \theta) = \frac{1}{\pi^2 A_0(\omega, z) D^2(\omega, z)} \times \\ \times \exp \left[- \frac{\rho^2 A_1(\omega, z) - 2\rho\theta A_2(\omega, z) + \theta^2 A_3(\omega, z)}{D^2(\omega, z)} \right], \quad (62)$$

где

$$A_1(\omega, z) = \frac{2}{i\omega} \frac{d}{dz} \ln A_0(\omega, z); \quad (63)$$

$$A_2(\omega, z) = \frac{2}{i\omega} \left[1 - \frac{1}{A_0(\omega, z)} \right]; \quad (64)$$

$$A_3(\omega, z) = \frac{2}{i\omega} \int_0^z dz' \left[1 - \frac{1}{A_0^2(\omega, z')} \right]; \quad (65)$$

$$D^2(\omega, z) = A_1(\omega, z) A_3(\omega, z) - A_2^2(\omega, z); \quad (66)$$

$$\rho = (x, y); \quad \theta = (\theta_x, \theta_y). \quad (67)$$

Функция $A_0(\omega, z)$, через которую выражается $F_\omega(z, \rho, \theta)$, определяется из уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} A_0 - \frac{1}{2} i\omega \langle \theta_s^2(z) \rangle A_0 &= 0, \\ A_0(z=0) &= 1, \quad A_0'(z=0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Таким образом, задача о вычислении пространственного, углового и энергетического распределения частиц в узком пучке, т. е. функции шести переменных $N(z, \rho, \theta, u)$, сводится к значительно более простой задаче об определении функции $A_0(\omega, z)$ всего одной переменной z (ω — параметр) из уравнения (68). Это уравнение по виду совпадает с одномерным стационарным уравнением Шредингера. Решение уравнения (68) обсуждается ниже (см. п. а).

Если функция $A_0(\omega, z)$ определена, то, подставив (62) в (58) и выполнив обратное преобразование Фурье, получим окончательное выражение для плотности потока частиц:

$$N(z, \rho, \theta, u) = \frac{N_0}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{A_0(\omega, z) D^2(\omega, z)} \times \\ \times \exp \left[i\omega u - \tau(\omega, z) - \frac{\rho^2 A_1(\omega, z) - 2\rho\theta A_2(\omega, z) + \theta^2 A_3(\omega, z)}{D^2(\omega, z)} \right]; \quad (69)$$

$$u = \int_T^{T_{H.3}(z)} dT' / \bar{\epsilon}(T') \simeq [4\pi n_0 Z z^2 r_e^2 L_{\text{ион}}(E_{H.3})]^{-1} \times \\ \times \frac{m}{m_e} \left[\frac{E_{H.3}^2(z)}{1 + E_{H.3}(z)} - \frac{E^2}{1 + E} \right]. \quad (70)$$

Соотношение (69) можно также представить в виде

$$N(z, \rho, \theta, u) = N_0 \int_0^{\infty} du' F(z, \rho, \theta, u') H(z, u - u'), \quad (71)$$

где

$$F(z, \rho, \theta, u) = \frac{1}{2\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{A_0(\omega, z) D^2(\omega, z)} \times \\ \times \exp \left[i\omega u - \frac{\rho^2 A_1(\omega, z) - 2\rho\theta A_2(\omega, z) + \theta^2 A_3(\omega, z)}{D^2(\omega, z)} \right] \quad (72)$$

— распределение частиц по пройденным путям, углам и пространственным координатам с учетом искривления траектории при многократном упругом рассеянии;

$$H(z, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp [i\omega u - \tau(\omega, z)] \quad (73)$$

— распределение частиц по пробегам (энергиям), обусловленное флуктуациями энергетических потерь в неупругих столкновениях.

Если пренебречь флуктуациями потерь энергии в неупругих столкновениях [$\tau(\omega, z) = 0$; $H(z, u) = \delta(u)$], спектр частиц (71)

сведется к распределению (72). В этом приближении $u = S - z$, где $S = R_0 - R(T)$ — путь частицы в веществе, пройдя который, она замедляется до энергии T .

Выражение (69) [или (71) — (73)] определяет пространственное, угловое и энергетическое распределение быстрых заряженных частиц в узком пучке с одновременным учетом систематического торможения и вероятностного характера упругих и неупругих столкновений частиц с атомами среды*.

Распределение (69) является наиболее общим из полученных ранее соотношений [17, 27, 29, 60—63], описывающих торможение быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе, и включает упомянутые результаты как частные случаи. Например, если ограничиться случаем чисто упругого рассеяния и не учитывать искривление траектории при многократном упругом рассеянии, то из (69) следует распределение Ферми [17]. Если в дополнение к этому учесть систематические потери энергии, то придем к результату [63]. Кроме того, интегрируя (69) по поперечным координатам, получаем все известные ранее результаты, относящиеся к случаю широкого пучка, в которых учтены либо только флуктуации потерь в неупругих столкновениях [17, 27, 29], либо только искривление траектории при многократном упругом рассеянии [61, 62], а также оба эти процесса одновременно [17]. Если сделать те же приближения, что и в [60], т. е. не учитывать вероятностный характер неупругих столкновений и положить $\langle \theta_s^2 \rangle = \text{const}$, то из соотношения (69) следует простое выражение для спектра узкого пучка частиц, которое полностью совпадет с известным результатом Янга [60], если в полученном им решении провести суммирование соответствующих рядов**.

а. *Распределение частиц по путям, пройденным в слое вещества заданной толщины.* Для исследования распределения (72), описывающего флуктуации путей частиц при многократном упругом рассеянии в веществе, наряду с обычными удобно использовать безразмерные переменные

$$\xi = z/R_0; \quad s = S/R_0; \quad (74)$$

$$\xi_{\perp} = \rho/R_0 \sqrt{\gamma}; \quad \psi = \theta/\sqrt{\gamma}. \quad (75)$$

* Результат (69) можно использовать для описания торможения частиц не только в однородных, но и в неоднородных средах. Соответствующие изменения, связанные с неоднородностью вещества, отражаются лишь на формулах для $\langle \theta_s^2(z) \rangle$ и $\bar{e}^k(z)$.

** При условии, что исходное уравнение работы Янга [60] записано правильно.

В [60] допущена неточность: вместо слагаемого $\frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \frac{\partial N}{\partial u}$ написано $\left(\frac{\theta_x^2}{2} \frac{\partial}{\partial u_x} + \frac{\theta_y^2}{2} \frac{\partial}{\partial u_y} \right) N$.

Выражение для $F(z, \rho, \theta, S - z)$ в новых переменных имеет вид $F(z, \rho, \theta, S - z) d^2\rho d^2\theta d(S - z) = F(\xi, \xi_{\perp}, \psi, s - \xi) d^2\xi_{\perp} d^2\psi d(s - \xi);$

$$F(\xi, \xi_{\perp}, \psi, s - \xi) = \frac{1}{2\pi^3\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{A_0(\omega, \xi) D^2(\omega, \xi)} \times \\ \times \exp \left[i\omega \frac{s - \xi}{\gamma} - \frac{\xi_{\perp}^2 A_1(\omega, \xi) - 2\xi_{\perp} \psi A_2(\omega, \xi) + \psi^2 A_3(\omega, \xi)}{D^2(\omega, \xi)} \right]. \quad (76)$$

Безразмерный параметр γ , входящий в (75) и (76), равен отношению полного пробега частиц к транспортной длине упругого рассеяния:

$$\gamma = \frac{1}{2} R_0 \langle \theta_s^2(T_0) \rangle = \frac{R_0}{l_{\text{ТР}}(T_0)} \quad (77)$$

и характеризует влияние искривления траектории на распределение частиц в веществе. Используя (15) и (47), для параметра γ можно получить:

$$\gamma = 2 \frac{m_e}{m} (Z + 1) \frac{L_k}{L_{\text{ион}}} \frac{1 + E_0}{(2 + E_0)^2}. \quad (78)$$

Как видно из этого соотношения, величина γ возрастает с уменьшением массы частиц и увеличением порядкового номера вещества рассеивателя. Например, для протонов с энергией 100 МэВ ($E_0 \simeq 0,1$) $\gamma \simeq 2 \cdot 10^{-3}$ в Al и $\gamma \simeq 1,6 \cdot 10^{-2}$ в Pb. Для мюонов той же энергии ($E_0 \simeq 1$) $\gamma \simeq 1,3 \cdot 10^{-2}$ и $\gamma \simeq 0,8 \cdot 10^{-1}$ соответственно.

В новых переменных уравнение (68) для функции A_0 примет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} A_0 - i\omega \Lambda^2(\xi) A_0 &= 0; \\ A_0(\xi = 0) = 1; \quad A'_0(\xi = 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где

$$\Lambda^2(\xi) = \frac{\langle \theta_s^2 [T_{\text{н.в}}(z)] \rangle}{\langle \theta_s^2(T_0) \rangle}. \quad (80)$$

Уравнение (79) является дифференциальным уравнением второго порядка, и его точное решение не может быть получено аналитически при произвольном виде функции $\Lambda^2(\xi)$. Однако, если пренебречь зависимостью ионизационного логарифма от энергии, уравнение (79) удастся решить точно.

Введем вместо безразмерной глубины ξ новую переменную t , которая связана с ξ соотношением [30, 31]

$$t(\xi) = \text{ch} \ln [1 + E_{\text{н.в}}(\xi)]. \quad (81)$$

Если теперь пренебречь зависимостью ионизационного логарифма от энергии, то с учетом (9) и (47) уравнение (79) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} (t^2 - 1) \frac{d^2}{dt^2} A_0 - i\omega b^2 A_0 &= 0; \\ A_0(t = t_0) &= 1; \quad A_0'(t = t_0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

где

$$t_0 = t(\xi = 0) = \text{ch} \ln(1 + E_0); \quad b = 1 + 2/E_0. \quad (83)$$

Решение уравнения (82) определяется выражением [30, 31]:

$$A_0(t, t_0, \omega) = \sqrt{t^2 - 1} [P_\mu^1(t) Q_\mu(t_0) - P_\mu(t_0) Q_\mu^1(t)], \quad (84)$$

где $P_\mu^\alpha(t)$, $Q_\mu^\alpha(t)$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода ($t \geq 1$) [51, 64]. Степень μ равна

$$\mu(\omega) = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + 4i\omega b^2} - 1]. \quad (85)$$

Величина $E_{н.з}(\xi)$ в (81) в приближении непрерывного замедления при $L_{\text{ион}} = \text{const}$ имеет вид

$$E_{н.з}(\xi) = E_0 \frac{\sqrt{1 - \xi}}{1 + b} (\sqrt{1 - \xi} + \sqrt{b^2 - \xi}). \quad (86)$$

Если не пренебрегать зависимостью ионизационного логарифма от энергии, то уравнение (68) для функции A_0 выглядит следующим образом:

$$(t^2 - 1) L_{\text{ион}}(t) \frac{d}{dt} L_{\text{ион}}(t) \frac{d}{dt} A_0 - i\omega \frac{(Z+1) L_h}{2\pi n_0 Z z^2 r_e^2} A_0 = 0. \quad (87)$$

Это уравнение аналитически не может быть решено точно, однако для его исследования можно воспользоваться квазиклассическим приближением [65]. В этом приближении для функции A_0 получаем *

$$\begin{aligned} A_0(t, t_0, \omega) &\simeq \sqrt[4]{\frac{i^2 - 1}{t_0^2 - 1}} [i\omega \varphi(t) \varphi(t_0)]^{1/2} \times \\ &\times \left\{ I_{-\frac{n+1}{n+2}} [\sqrt{i\omega} \varphi(t_0)] K_{\frac{1}{n+2}} [\sqrt{i\omega} \varphi(t)] + \right. \\ &\left. + K_{-\frac{n+1}{n+2}} [\sqrt{i\omega} \varphi(t_0)] I_{\frac{1}{n+2}} [\sqrt{i\omega} \varphi(t)] \right\}, \end{aligned} \quad (88)$$

где

$$\varphi(t) = \left[\frac{(Z+1) L_h}{2\pi n_0 Z z^2 r_e^2} \right]^{1/2} \int_1^t \frac{dt'}{\sqrt{t'^2 - 1} L_{\text{ион}}(t')}; \quad (89)$$

* Решение (88) соответствует квазиклассическому приближению для уравнения вида $f'' + x^n \varphi(x) f = 0$, где $\varphi(x)$ — плавная функция аргумента x [65].

$I_\alpha(x)$ и $K_\alpha(x)$ — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда соответственно [51, 64].

В дальнейших рассуждениях, чтобы излишне не загромождать изложение непринципиальными деталями, будем опускать зависимость ионизационного логарифма от энергии. В конечные формулы на основе решения (88), (89) будут внесены соответствующие изменения, позволяющие учесть энергетическую зависимость $L_{\text{ион}}$.

Выражение (84) для функции A_0 позволяет по формулам (63) — (66) определить коэффициенты A_n ($n = 1, 2, 3$) и D^2 и затем, используя соотношения (69) или (71) — (73), получить полное распределение частиц в узком пучке по углам, поперечному смещению от оси пучка и энергиям во всем диапазоне глубин и энергий, где торможение обусловлено ионизационными потерями.

Рассмотрим сначала разброс частиц по пройденным путям, безотносительно к направлению их движения и отклонению от оси пучка.

Интегрируя соотношение (76) по углам и поперечным координатам (расстоянию от оси пучка), с учетом (84) — (86) получаем

$$F(\xi, s - \xi) = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{b^2 - 1}{\sqrt{(b^2 - \xi)(1 - \xi)}} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp\left[\frac{i\omega}{\gamma}(s - \xi)\right]}{P_{\mu(\omega)}^1(t) Q_{\mu(\omega)}(t_0) - P_{\mu(\omega)}(t_0) Q_{\mu(\omega)}^1(t)}. \quad (90)$$

Это выражение справедливо для весьма широкого интервала энергий падающих частиц, который охватывает нерелятивистские ($E_0 \ll 1$), релятивистские ($E_0 \sim 1$) и ультрарелятивистские ($1 \ll E_0 \ll m/m_e$) энергии.

Отметим, что функция $F(\xi, s - \xi)$ удовлетворяет равенству

$$\int ds F(\xi, s - \xi) = 1, \quad (91)$$

которое отражает сохранение полного потока в области глубин, где еще не происходит остановки частиц.

В общем виде интеграл (90) точно вычислить не удастся. Однако в ряде предельных случаев выражение (90) упрощается, и распределение $F(\xi, s - \xi)$ можно представить в виде быстро сходящихся рядов [30]. Кроме этого, для функции $F(\xi, s - \xi)$ оказывается возможным получить очень простую приближенную формулу, справедливую при любых начальных энергиях падающих частиц [30].

1. Формула Янга (распределение частиц по путям в случае $\langle \theta_s^2 \rangle = \text{const}$) [17, 60].

Рассмотрим сначала простейший случай, когда можно пренебречь зависимостью $\langle \theta_s^2 \rangle$ от энергии частиц [в уравнении (79) $\Lambda^2 = 1$] [17, 60]. Это всегда оправданно в области малых глубин ($\xi \ll 1$). Кроме того, на этом простом примере удается легко выявить основ-

ные закономерности распределения частиц по пройденным путям, которые наблюдаются и в общем случае, когда учитывается зависимость $\langle \theta_s^2 \rangle$ от энергии.

Полагая в уравнении (79) $\Lambda^2 = 1$, находим

$$A_0(\omega, \xi) = \text{ch}(\xi \sqrt{i\omega}). \quad (92)$$

Отсюда следует, что

$$F(\xi, s - \xi) = \frac{1}{\gamma \xi^2} \Phi\left(\frac{s - \xi}{\gamma \xi^2}\right), \quad (93)$$

где

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp \frac{e^{p\lambda}}{\text{ch} \sqrt{p}}; \quad \int_0^{\infty} d\lambda \Phi(\lambda) = 1. \quad (94)$$

Функция Φ имеет резко выраженный максимум при $\lambda_0 \simeq 1/6$ и сильно асимметрична: при $\lambda < \lambda_0$ она очень быстро убывает, в то время как в области больших λ она имеет длинный вытянутый «хвост» (рис. 6).

Вычисляя интеграл (94), нетрудно получить два представления функции $\Phi(\lambda)$ в виде рядов:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{3/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \exp\left[-\frac{(2k+1)^2}{4\lambda}\right]; \quad (95)$$

$$\Phi(\lambda) = \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \exp\left[-\frac{\pi^2}{4} (2k+1)^2 \lambda\right]. \quad (96)$$

Первое слагаемое ряда (95) точно описывает поведение функции Φ в области сравнительно малых λ ($\lambda \lesssim 0,3 \div 0,4$). Существенно, что в эту область попадает значение λ_0 , в котором функция имеет максимум. Особенность представления $\Phi(\lambda)$ в виде (96) состоит в том, что уже первый член этого ряда хорошо описывает поведение функции Φ при относительно больших λ ($\lambda \gtrsim 0,3 \div 0,4$). Во всем интервале значений λ с погрешностью не более 1% функцию $\Phi(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi} \lambda^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}\right), & 0 \leq \lambda \leq 0,3; \\ \pi \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} \lambda\right), & \lambda \geq 0,3. \end{cases} \quad (97)$$

Отметим, что $\langle \lambda \rangle = 1/2$, $\langle \lambda^2 \rangle = 5/12$.

2. Нерелятивистские частицы ($E_0 \ll 1$).

В этом случае $t \simeq \text{ch} E_{\text{н.в.}}(\xi)$, $t_0 \simeq \text{ch} E_0$, $E_{\text{н.в.}}(\xi) = \sqrt{1 - \xi}$, а параметр b велик: $b \simeq 2/E_0 \gg 1$. Поскольку распределение

$F(\xi, s - \xi)$ существенно отлично от нуля при $s - \xi \lesssim \gamma$, то основной вклад в (90) дает область $|\omega_{эф}| \sim 1$, в которой $\mu \gg 1$, так как $b \gg 1$. Поэтому при вычислении интеграла (90) можно воспользоваться известным асимптотическим представлением функций Лежандра при большом значении степени [51, 64]. После этого интеграл (90) вычисляется точно с помощью теории вычетов, и выражение для $F(\xi, s - \xi)$ можно представить в виде быстро сходящегося ряда [30].

3. Ультрарелятивистские частицы ($1 \ll \ll E_0 \ll m/m_e$).

Во всей области глубин, где частицы еще остаются ультрарелятивистскими ($1 - \xi \gg 1/E_0$), $t \simeq E_{н.з}(\xi)/2$, $t_0 \simeq E_0/2$, $E_{н.з}(\xi) = E_0(1 - \xi)$, а значение параметра b близко к единице: $b - 1 = = 2/E_0 \ll 1$. Область эффективных значений ω в (90), $|\omega_{эф}| \sim 1$, такова, что $\mu \sim 1$, в то время как $t, t_0 \gg 1$. Это позволяет воспользоваться асимптотическим представлением функций Лежандра при большом значении аргумента [51, 64]. После этого, как и в случае частиц нерелятивистских энергий, интеграл (90) вычисляется с помощью теории вычетов, и распределение по пройденным путям удается представить в виде быстро сходящегося ряда [30].

4. Вычисление распределения по путям в общем случае.

Если вычисление распределения по пройденному пути в предельных случаях нерелятивистских и ультрарелятивистских энергий можно было провести непосредственно на основе формулы (84) для функции $A_0(\omega, \xi)$, то в области релятивистских энергий ($E_0 \sim 1$) интеграл (90) вычислить точно не удается.

Однако есть два способа, которые позволяют с хорошей точностью вычислять распределение частиц по пройденным путям при любых энергиях падающих частиц.

Первый способ был впервые предложен Бергером и Сельтзером [6] и в дальнейшем использовался во многих работах [9, 17, 24, 25]. Он не отличается строгостью, но очень прост и нагляден.

Этот способ состоит в том, что распределение Янга (93) модифицируется так, чтобы при вычислении среднего пути частиц $\langle S \rangle_z$ в слое вещества толщиной z результат совпадал бы с выражением (43). Уточненное таким образом распределение Янга имеет вид

$$F(z, S - z) = \frac{1}{2 \langle S - z \rangle_z} \Phi \left(\frac{S - z}{2 \langle S - z \rangle_z} \right), \quad (98)$$

где функция $\Phi(\lambda)$ определяется формулой (94), а значение $\langle S - z \rangle_z \equiv \equiv \langle S \rangle_z - z$ выражением (43).

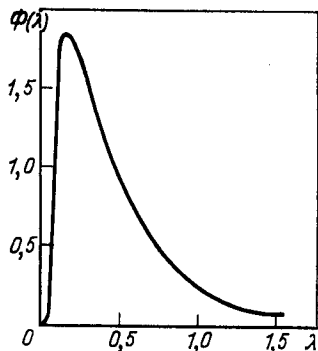


Рис. 6. График функции $\Phi(\lambda)$.

Сравнение с результатами [30] показывает, что распределение (98) завывает значение дисперсии путей частиц в толстых слоях вещества [для нерелятивистских частиц, например, на 10—30%].

Второй способ [30] основан на следующих соображениях.

В случае, когда разность между пройденным частицей путем и глубиной ее проникновения в среду невелика, в интеграл (90) основной вклад дает область $|\omega_{эфф}| \gg 1$. Поэтому для вычисления распределения $F(\xi, s - \xi)$ достаточно знать значение функции $A_0(\omega, \xi)$ лишь при больших ω . С этой целью воспользуемся асимптотическим представлением функций Лежандра при больших значениях степени [51, 64]:

$$P_\mu^\alpha [\text{ch ln}(1 + E)] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{sh ln}(1 + E)}} \times \\ \times \left[\frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1 + \mu - \alpha)} e^{(\mu + \frac{1}{2}) \ln(1 + E)} + \frac{\Gamma\left(-\mu - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-\mu - \alpha)} e^{-(\mu + \frac{1}{2}) \ln(1 + E)} \right]; \quad (99)$$

$$Q_\mu^\alpha [\text{ch ln}(1 + E)] \simeq \\ \simeq e^{i\pi\alpha} \frac{\Gamma(1 + \mu + \alpha)}{\Gamma(\mu + 3/2)} \sqrt{\frac{\pi}{2 \text{sh ln}(1 + E)}} e^{-(\mu + \frac{1}{2}) \ln(1 + E)}. \quad (100)$$

Это фактически эквивалентно квазиклассическому приближению (88) с $n = 0$. Подставляя (99), (100) в (90), после несложных вычислений получаем [30]:

$$F(\xi, s - \xi) \simeq \frac{\sqrt[4]{\Lambda^2(\xi)}}{\gamma b^2 \ln^2 \frac{1 + E_0}{1 + E_{н.в}(\xi)}} e^{-\frac{s - \xi}{4\gamma b^2}} \Phi(\lambda). \quad (101)$$

Здесь $\Phi(\lambda)$ определяется выражением (94), а

$$\lambda = \frac{s - \xi}{\gamma b^2 \ln^2 \frac{1 + E_0}{1 + E_{н.в}(\xi)}} \equiv \frac{S - z}{\kappa(z)}, \quad (102)$$

где введено обозначение

$$\kappa(z) = \gamma R_0 b^2 \ln^2 \frac{1 + E_0}{1 + E_{н.в}(z)}. \quad (103)$$

Соотношение (101) хорошо описывает распределение по пройденным путям в области, которая включает точку максимума функции F . Поэтому для значения наиболее вероятного пути, проходимого частицей в слое вещества толщиной ξ , находим [30]:

$$s_{н.в}(\xi) \simeq \xi + \frac{1}{6} \gamma b^2 \ln^2 \frac{1 + E_0}{1 + E_{н.в}(\xi)}. \quad (104)$$

В частных случаях частиц нерелятивистских и ультрарелятивистских энергий, а также на малых глубинах ($\xi \ll 1$) из выражения (104) следуют известные результаты [17, 30].

При больших λ приближенное выражение (101) дает завышенные значения. Следствием этого является нарушение условия нормировки (91).

Представляет интерес получить на основе результата (101) выражение для распределения частиц по пройденным путям, которое не только бы правильно описывало поведение функции распределения вблизи максимума, но и не нарушало условие сохранения полного потока частиц (91).

Как показывает анализ, для выполнения указанных требований разумно записать $F(\xi, s - \xi)$ в виде

$$F(\xi, s - \xi) = \frac{\sqrt[4]{\Lambda^2(\xi)}}{\gamma b^2 \ln^2 \frac{1 + E_0}{1 + E_{н.в}(\xi)}} e^{-\delta(\xi)\lambda} \Phi(\lambda), \quad (105)$$

т. е. положить

$$A_0(\omega, \xi) = \frac{1}{\sqrt[4]{\Lambda^2(\xi)}} \operatorname{ch} \sqrt{i\omega b^2 \ln^2 \frac{1 + E_0}{1 + E_{н.в}(\xi)} + \delta(\xi)} \quad (106)$$

и определить неизвестную функцию $\delta(\xi)$ из условия нормировки (91) [$A_0(\omega = 0, \xi) = 1$]. В результате выполнения этой процедуры получаем

$$\delta(\xi) = \ln^2 \left[\sqrt[4]{\Lambda^2(\xi)} + \sqrt{\sqrt{\Lambda^2(\xi)} - 1} \right]. \quad (107)$$

Таким образом, приближенное выражение для распределения частиц произвольных энергий по путям имеет вид [30]:

$$F(z, S - z) = \frac{\sqrt[4]{\Lambda^2(z)}}{\kappa(z)} \Phi\left(\frac{S - z}{\kappa(z)}\right) \times \\ \times \exp \left\{ -(S - z) \frac{\ln^2 \left[\sqrt[4]{\Lambda^2(z)} + \sqrt{\sqrt{\Lambda^2(z)} - 1} \right]}{\kappa(z)} \right\}. \quad (108)$$

Непосредственное сравнение результатов вычислений, выполненных для частиц нерелятивистских и ультрарелятивистских энергий по общей формуле (108) и на основе точных выражений, приведенных в [30], показывает, что точность соотношения (108) достаточно высока. Например, погрешность расчета $F(z, S - z)$ по формуле (108) на глубине $z/R_0 = 0,7$ не превышает 2%. Погрешность аналогичного расчета по формуле (98) заметно больше.

Важно отметить, что способ получения результата (108), вообще говоря, не связан с пренебрежением зависимостью ионизационного логарифма от энергии частиц. Принимая во внимание (89), с учетом зависимости $L_{\text{ион}}$ от энергии находим

$$\kappa(z) = \frac{(Z+1)L_h}{2\pi n_0 Z z^2 r_e^2} \left[\int_{E_{н.в}(z)}^{E_0} \frac{dE}{(1+E)L_{\text{ион}}(E)} \right]^2. \quad (109)$$

С ростом глубины точность результата (108) постепенно уменьшается. Поэтому для детальных расчетов при $1 - \xi \ll 1$ лучше использовать вариант квазиклассического решения с $n = -1$, который учитывает особенность $\Lambda^2 \sim 1/(1 - \xi)$. В этом случае для распределения по путям можно получить

$$F(z, S-z) = \sqrt[4]{\frac{i_0^2-1}{i^2-1}} [\varphi(t) \varphi(t_0)]^{-1/2} e^{-(S-z)\delta} \times \\ \times \sum_{h=1}^{\infty} q_h \frac{J_0(q_h) J_1[q_h \varphi(t)/\varphi(t_0)]}{J_0^2(q_h) - J_1^2[q_h \varphi(t)/\varphi(t_0)]} \exp\left[-q_h^2 \frac{S-z}{\varphi^2(t_0)}\right], \quad (110)$$

где q_h — корни уравнения

$$J_0(q_h) N_1\left(q_h \frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}\right) = J_1\left(q_h \frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}\right) N_0(q_h); \quad (111)$$

$J_\alpha(x)$, $N_\alpha(x)$ — функции Бесселя и Неймана соответственно [51, 64]; значение параметра δ определяется из уравнения

$$\sqrt{\delta} \sqrt[4]{\frac{i^2-1}{i_0^2-1}} [\varphi(t) \varphi(t_0)]^{1/2} \times \\ \times [I_0(\sqrt{\delta} \varphi(t_0)) K_1(\sqrt{\delta} \varphi(t)) + K_0(\sqrt{\delta} \varphi(t_0)) I_1(\sqrt{\delta} \varphi(t))] = 1. \quad (112)$$

Процедура, аналогичная приведенной выше, рассмотрена также в разд. 2 при вычислении распределения остановившихся частиц.

Изложенный метод приближенного вычисления распределения частиц по пройденным путям справедлив для любой (достаточно плавной) зависимости среднего квадрата угла рассеяния от глубины и может быть использован также при описании прохождения частиц в неоднородных средах.

б. Энергетический спектр в толстых слоях вещества безотносительно к направлению движения частиц и их смещению от оси пучка.

Результаты п. а позволяют на основе общего выражения (69) провести уже конкретные вычисления пространственного, углового и энергетического распределения частиц в пучке. Рассмотрим сначала энергетический спектр частиц безотносительно к направлению их движения и расстоянию от оси пучка.

Интегрируя соотношение (69) по углам и поперечным координатам, получаем для энергетического распределения частиц следующее выражение:

$$N(z, \omega) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega u - \tau(\omega, z)}}{A_0(\omega, z)}, \quad (113)$$

где функции $\tau(\omega, z)$ и $A_0(\omega, z)$ определяются формулами (59) и (84) [или (106)] соответственно.

На небольших глубинах ($z \ll \frac{e^2_{\text{макс}}}{e^2}$) роль искривления траектории в формировании энергетического спектра быстрых тяжелых частиц

всегда незначительна и разброс по энергиям полностью определяется вероятностным характером неупругих столкновений [17, 27, 29, 42—44, 49].

Напротив, в толстых слоях вещества распределение частиц формируется под действием, вообще говоря, уже двух процессов: флуктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях с атомами среды и флуктуаций путей частиц из-за искривления траектории при многократном упругом рассеянии. При этом, в зависимости от энергии частиц, их массы и порядкового номера Z атомов вещества, относительная роль каждого из перечисленных процессов может быть различна. Поэтому на больших глубинах в общем случае вероятностный характер передачи энергии при неупругом столкновении и искривление траектории необходимо учитывать одновременно.

Флуктуации потерь энергии в неупругих столкновениях будем рассматривать на основе самосогласованного гауссова приближения [17]: $\tau(\omega, z) = \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2$, σ^2 определяется соотношениями (31),

(32). На больших глубинах в средах с порядковым номером $Z \gg \gg (m/m_e)^{1/3}$ более точный учет вероятностного характера неупругих столкновений [т. е. сохранение в выражении для $\tau(\omega, z)$ слагаемого, пропорционального ω^3] вообще не имеет смысла. Это связано с тем, что в таких средах флуктуации энергетических потерь из-за многократного упругого рассеяния более важны, чем недиффузионность (т. е. отличие от нуля $\bar{\epsilon}^3$) процесса потерь энергии при неупругих столкновениях.

С учетом сказанного соотношение (113) можно переписать в виде

$$N(z, u) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp\left[i\omega u - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2(z)\right]}{A_0(\omega, z)}. \quad (114)$$

Если в (114) пренебречь вероятностным характером неупругих столкновений $\nu \rightarrow \infty$, то приходим к выражению (90). В этом случае разброс частиц по энергиям обусловлен только непрямолинейностью их движения при многократном упругом рассеянии.

Наоборот, если не принимать во внимание упругое рассеяние ($\nu \rightarrow 0$), то из (114) следует результат самосогласованного гауссова приближения (30).

В общем случае (при произвольном соотношении γ и ν), объединяя результаты предыдущего раздела [(98) или (108)] с (30), для энергетического спектра частиц получаем следующее выражение:

$$N(z, u) = N_0 \exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2(z)}\right] \times \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp[\eta_k^2(z, u)] \{1 - \operatorname{erf}[\eta_k(z, u)]\}, \quad (115)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятностей [51].

Если вклад упругого рассеяния в разброс частиц по энергиям учитывать на основе результата (108), то значения a_k и $\eta_k(z, u)$ определяются соотношениями:

$$a_k = \frac{\pi}{2} (-1)^{k-1} (2k-1) \frac{\sqrt[4]{\Lambda^2}}{\kappa}; \quad (116)$$

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} \left[\frac{1}{\kappa} \left(\frac{\pi^2}{4} (2k-1)^2 + \delta \right) - \frac{u}{\sigma^2} \right], \quad (117)$$

а если использовать модифицированное распределение Янга (98), то

$$a_k = \frac{\pi}{4 \langle S-z \rangle_z} (-1)^{k-1} (2k-1); \quad (118)$$

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2}} \left[\frac{\pi^2 (2k-1)^2}{8 \langle S-z \rangle_z} - \frac{u}{\sigma^2} \right]. \quad (119)$$

Первое слагаемое ряда (115) описывает низкоэнергетическую часть спектра частиц, отвечающую относительно большим потерям энергии. В эту область спектра попадают в основном сильно рассеянные частицы, прошедшие относительно большой путь и, вследствие этого, потерявшие большую энергию, чем частицы, почти не отклонившиеся от направления первоначального движения.

При вычислении энергетического спектра в области относительно малых потерь энергии в сумме (115) необходимо сохранять значительное число слагаемых и пользоваться представлением (115) не очень удобно. В этом случае, используя асимптотическое выражение для интеграла вероятностей

$$\text{erf}(x) \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi} x} \exp(-x^2)$$

и учитывая соотношение

$$\frac{1}{\text{ch } x} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)}{\frac{\pi^2}{4} (2k-1)^2 + x^2}, \quad (120)$$

энергетический спектр (115)–(117) можно представить в виде

$$N(z, u) = N_0 \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \left\{ \frac{\sqrt[4]{\Lambda^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \text{ch} \sqrt{\delta - \frac{\kappa u}{\sigma^2}}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\exp(\eta_k^2) (1 - \text{erf}(\eta_k)) - \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta_k} \right] \right\}. \quad (121)$$

Аналогичное соотношение можно записать и для случая (118), (119).

При $|u| \gg \sigma^2/\kappa$ ($u < 0$) из выражения (121) следует

$$N(z, u) \simeq N_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \sqrt[4]{\Lambda^2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2} - \sqrt{\frac{\kappa|u|}{\sigma^2}}\right). \quad (122)$$

Два-три слагаемых представлений (115) и (121) позволяют вычислить спектр $N(z, u)$ во всей области изменения переменной u .

Итак, энергетический спектр быстрых тяжелых заряженных частиц в глубине вещества удается описать достаточно простыми аналитическими выражениями (115) — (119) и (121), которые справедливы для любых энергий падающих на поверхность вещества частиц. Указанные выражения определяют распределение частиц по энергиям в большом диапазоне глубин, который ограничен, с одной стороны, областью тонких слоев, где энергетический разброс частиц сравним с максимальной энергией, передаваемой в одном неупругом столкновении, а с другой, областью глубин, где происходит остановка частиц из-за торможения, и энергетический спектр уже не имеет резко выраженного максимума.

Сохранение полного потока частиц в рассматриваемом интервале глубин $\left(1 - \xi \gg \max\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{v}}\right)\right)$ отражено в условии нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} du N(z, u) = 1, \quad (123)$$

которому удовлетворяют распределения (115) и (121).

Вклад флуктуаций энергетических потерь при неупругих столкновениях и флуктуаций потерь из-за искривления траектории при многократном упругом рассеянии в распределение частиц по энергиям характеризуется величинами $\sqrt{\sigma^2(z)}$ и $\kappa(z)$ соответственно. В зависимости от отношения этих величин определяющим будет тот или иной процесс.

Роль многократного упругого рассеяния в формировании разброса частиц по энергиям с увеличением глубины возрастает: $\kappa(z)/\sqrt{\sigma^2(z)} \gg \gamma\sqrt{v}(z/R_0)^{3/2}$. В связи с этим учет искривления траектории особенно важен при вычислении распределения остановившихся частиц.

в. *Зависимость энергетических потерь от смещения частиц относительно оси пучка и направления их движения.* Выше был рассмотрен чисто энергетический спектр частиц безотносительно к их положению в пространстве и направлению движения. Однако особый интерес представляет исследование разброса частиц по энергиям в зависимости от их смещения относительно оси пучка и угла рассеяния или, что то же самое, пространственного и углового распределений частиц заданной энергии.

Анализ этого вопроса тем более важен, что до сих пор подобную информацию о распределении частиц в веществе удавалось получать только на основе трудоемких расчетов методом Монте-Карло [6, 10].

Что касается аналитических результатов, то они исчерпываются исследованием углового спектра и получены либо без учета флуктуаций потерь энергии в неупругих столкновениях [61], либо в пренебрежении искривлением траектории при многократном упругом рассеянии [28]. Особенности пространственного распределения частиц заданной энергии вообще нигде не рассматривались.

Проинтегрировав соотношение (69) по поперечному смещению относительно оси пучка или по углам, получим выражения соответственно для углового и энергетического распределения и пространственно-энергетического спектра прошедших слоев вещества частиц:

$$N(z, \theta, u) = -\frac{N_0}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial(\theta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp\left[i\omega u - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2(z) - \theta^2/A_1(\omega, z)\right]}{A_0(\omega, z)}; \quad (124)$$

$$N(z, \rho, u) = -\frac{N_0}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial(\rho^2)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp\left[i\omega u - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2(z) - \rho^2/A_3(\omega, z)\right]}{A_0(\omega, z)}, \quad (125)$$

где A_1 и A_3 определяются соответственно (63) и (65).

В области относительно небольших потерь энергии интегралы (124), (125) сводятся к простым аналитическим выражениям.

Используя асимптотические представления функций A_0 , A_1 и A_3 при больших ω :

$$\begin{aligned} A_0(\omega, z) &\simeq \frac{1}{2\sqrt[4]{\Lambda^2(z)}} \exp\sqrt{i\omega\kappa(z)}; \\ A_1(\omega, z) &\simeq \frac{2}{\sqrt{i\omega}} \left(\sqrt{\frac{\langle\theta_s^2(z)\rangle}{2}} - \frac{1}{4\sqrt{i\omega}} \frac{d}{dz} \ln\langle\theta_s^2(z)\rangle \right); \\ A_3(\omega, z) &\simeq \frac{2z}{i\omega} \end{aligned} \quad (126)$$

и вычисляя интегралы (124), (125) методом перевала, находим

$$\begin{aligned} N(z, \theta, u) &\simeq \frac{N_0}{\pi\sqrt{2\langle\theta_s^2\rangle}} \left(\frac{2\sqrt{\Lambda^2}}{\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{\kappa+\theta^2/\sqrt{2\langle\theta_s^2\rangle}}}{4\sigma^2}\right)^{1/3} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{\theta^2}{4\langle\theta_s^2\rangle} \frac{d}{dz} \ln\langle\theta_s^2\rangle\right) h\left\{\frac{u}{[(\sqrt{\kappa+\theta^2/\sqrt{2\langle\theta_s^2\rangle}})^2\sigma^2]^{1/3}}\right\} \times \\ &\times f\left\{\frac{(\sqrt{\kappa+\theta^2/\sqrt{2\langle\theta_s^2\rangle}})^2}{\sqrt{\sigma^2}}; \frac{u}{[(\sqrt{\kappa+\theta^2/\sqrt{2\langle\theta_s^2\rangle}})^2\sigma^2]^{1/3}}\right\}; \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} N(z, \rho, u) &\simeq \frac{N_0}{2\pi z} \left(\frac{2\sqrt{\Lambda^2}}{\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \left(\frac{\kappa}{16\sigma^4}\right)^{1/3} h^2\left[\frac{u-\rho^2/2z}{(\kappa\sigma^2)^{1/3}}\right] \times \\ &\times f\left[\frac{\kappa}{\sqrt{\sigma^2}}; \frac{u-\rho^2/2z}{(\kappa\sigma^2)^{1/3}}\right]. \end{aligned} \quad (128)$$

Аналогично (127), (128) нетрудно получить соотношения для средних квадратов соответственно угла рассеяния и поперечного смещения относительно оси пучка:

$$\langle \theta^2 \rangle_{z, u} \simeq \sqrt{2 \langle \theta_s^2(z) \rangle} \left(\frac{16\sigma^4}{\kappa} \right)^{1/6} h^{-1} \left\{ \frac{u}{[\kappa(z) \sigma^2(z)]^{1/3}} \right\}; \quad (129)$$

$$\langle \rho^2 \rangle_{z, u} \simeq 2z \left(\frac{16\sigma^4}{\kappa} \right)^{1/3} h^{-2} \left\{ \frac{u}{[\kappa(z) \sigma^2(z)]^{1/3}} \right\}. \quad (130)$$

Функции $f(x; y)$ и $h(y)$ в (127) — (130) определяются формулами:

$$f(x; y) = [1 + h^{-3}(y)]^{-1/2} \exp[-x^{2/3}g(y)]; \quad (131)$$

$$h(y) = \left[\left(1 + \sqrt{1 + \frac{16}{27}y^3} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16}{27}y^3} \right)^{1/3} \right]; \quad (132)$$

$$g(y) = 3 \cdot 2^{-8/3}h(y) - 2^{-7/3}yh^2(y). \quad (133)$$

Как следует из выражений (129), (130), угловой и пространственный разброс частиц с уменьшением потерянной энергии также уменьшается:

$$\langle \theta^2 \rangle_{z, u} \simeq \sqrt{2 \langle \theta_s^2(z) \rangle} \left(\frac{\sigma^2}{|u|} \right)^{1/2}, \quad \langle \rho^2 \rangle_{z, u} \simeq 2z \left(\frac{\sigma^2}{|u|} \right) \\ (u < 0, |u| \gg (\kappa\sigma^2)^{1/3}).$$

Эта особенность распределения прошедших слой вещества частиц (своего рода «фокусировка») обусловлена тем, что сильно рассеянные и отклонившиеся от оси пучка частицы проходят в веществе больший путь и теряют большую энергию, нежели частицы, двигавшиеся в основном прямо-вперед (т. е. рассеянные под очень малыми углами и практически не отклонившиеся от оси пучка). Вследствие этого в высокоэнергетическую часть спектра попадают, главным образом, частицы, не сильно отклонившиеся от направления первоначального движения и мало сместившиеся относительно оси пучка. На рис. 7 изображена зависимость среднего квадрата угла рассеяния частиц, прошедших слой вещества заданной толщины, от их энергии. Так как с увеличением толщины слоя энергетический разброс частиц растет, то зависимость $\langle \theta^2 \rangle_{z, u}$ от энергии становится все более плав-

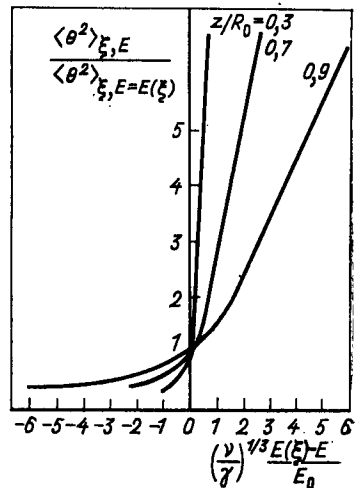


Рис. 7. Зависимость углового разброса нерелятивистских частиц ($E_0 \ll 1$), прошедших слой вещества толщиной z , от их энергии

ной. Точно такие же особенности углового спектра наблюдаются и в эксперименте [59].

Отметим, что если в соотношении (127) пренебречь вероятностным характером неупругих столкновений ($\sigma^2 \rightarrow 0$), то придем к результату [61].

Выражения (127), (128) свидетельствуют о том, что с увеличением расстояния от оси пучка и угла отклонения частиц от направления первоначального движения энергетический спектр смещается в область больших потерь энергии и уширяется.

Отмеченная специфика энергетического спектра подтверждается также выражениями для средних пробегов.

Исходя непосредственно из общих соотношений (124), (125) и уравнения (68), можно получить выражения для средних остаточных пробегов частиц, прошедших слой вещества толщиной z и отклонившихся на расстояние ρ от оси пучка или движущихся под углом θ к направлению первоначального движения. Для этого нет необходимости решать уравнение (68), а достаточно определить лишь значения производных $\frac{\partial A_0}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}$ и $\frac{\partial^2 A_0}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=0}$. В результате несложных вычислений получаем:

$$\langle R \rangle_{z, \rho} = R_0 - z - \frac{1}{2} \int_0^z (z - z') \langle \theta_s^2(z') \rangle dz' - \\ - \frac{1}{2} \frac{\int_0^z dz' \left[\int_0^{z'} dz'' (z - z'') \langle \theta_s^2(z'') \rangle \right]^2}{\left[\int_0^z dz' (z - z')^2 \langle \theta_s^2(z') \rangle \right]^2} \left[\rho^2 - \int_0^z dz' (z - z')^2 \langle \theta_s^2(z') \rangle \right]; \quad (134)$$

$$\langle R \rangle_{z, \theta} = R_0 - z - \frac{1}{2} \int_0^z (z - z') \langle \theta_s^2(z') \rangle dz' - \\ - \frac{1}{2} \frac{\int_0^z dz' \left[\int_0^{z'} dz'' \langle \theta_s^2(z'') \rangle \right]^2}{\left[\int_0^z dz' \langle \theta_s^2(z') \rangle \right]^2} \left[\theta^2 - \int_0^z dz' \langle \theta_s^2(z') \rangle \right]. \quad (135)$$

Из (134), (135) вытекает, что с ростом ρ и θ энергетический спектр смещается в сторону больших потерь энергии (меньших остаточных пробегов). При этом если $\rho^2 < \langle \rho^2 \rangle_z = \int_0^z dz' (z - z')^2 \langle \theta_s^2(z') \rangle$,

$\langle \rho^2 \rangle_z$ — средний квадрат поперечного смещения частиц на глубине z безотносительно к их энергии [17], то средний остаточный пробег

$\langle R \rangle_{z,\rho}$ больше, чем средний пробег частиц на глубине z безотносительно к их положению в пространстве

$$\langle R \rangle_z = R_0 - z - \frac{1}{2} \int_0^z (z - z') \langle \theta_s^2(z') \rangle dz'.$$

Если же $\rho^2 > \langle \rho^2 \rangle_z$, то $\langle R \rangle_{z,\rho} < \langle R \rangle_z$. То же самое можно сказать и об изменении энергетического спектра с увеличением угла θ .

Отметим, что для значения дисперсии пробегов $\langle (R - \langle R \rangle_z)^2 \rangle_z$ из (113) и (68) следует формула, полностью совпадающая с известным результатом И. Я. Померанчука [56]:

$$\langle (R - \langle R_z \rangle)^2 \rangle_z = \frac{1}{2} \int_0^z (z - z') \left[\int_0^{z'} dz'' \langle \theta_s^2(z'') \rangle \right]^2 dz' + \sigma^2(z). \quad (136)$$

Для полного пространственно-углового и энергетического распределения (69) без особого труда можно получить соотношения, аналогичные (127) — (130), а также вычислить значение среднего пробега $\langle R \rangle_{z,\rho,\theta}$. Кроме того, следуя изложенной выше процедуре, нетрудно определить значения средних пробегов частиц и дисперсий пробегов при различных пространственных и угловых параметрах пучка и детектора. Соответствующие выражения, однако, достаточно громоздки и поэтому не приводятся.

В заключение подчеркнем, что все указанные выше особенности пространственного и углового распределений частиц обусловлены совместным действием многократного упругого рассеяния и потерь энергии, которое учитывается в исходном уравнении (54) слагаемым $\frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2} \frac{\partial N}{\partial u}$. Если этим слагаемым пренебречь, то процесс потерь энергии оказывается независимым от многократного упругого рассеяния. При этом энергетическое и пространственно-угловое распределения практически разделяются, и все возникающие в угловом спектре частиц особенности связаны лишь с относительно плавной зависимостью $\langle \theta_s^2 \rangle$ от энергии частиц [28].

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАНОВИВШИХСЯ ЧАСТИЦ

Выражения (69), (71) — (73), (113) — (115), (121), (124) и (125) описывают распределение частиц по пробегам (энергиям) в широкой области глубин z , где почти нет остановки частиц и энергетический спектр имеет резко выраженный максимум. Остановка частиц происходит в основном на малом конечном участке пути, длина которого $\delta z \sim R_0 \max \left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{v}} \right)$ составляет лишь незначительную часть полного пробега [17]. Указанное обстоятельство позволяет при вычислении распределения остановившихся частиц воспользоваться полученным выше соотношением для энергетического спектра.

Поскольку значения γ и $1/\sqrt{v}$ малы, то заранее очевидно, что весь разброс частиц по пробегаем формируется на глубинах $R_0 - z \gg \gg R_0 \max\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{v}}\right)$ и при $z \sim R_0 - R_0 \max\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{v}}\right)$ уже настолько велик, что флуктуации на участке $\delta z \sim R_0 \max\left(\gamma, \frac{1}{\sqrt{v}}\right)$ его практически не меняют. Поэтому распределение остановившихся частиц можно определить экстраполяцией выражения (125) в $R(T) = 0$.

Следуя описанному способу, из (125) нетрудно получить полное пространственное распределение остановившихся частиц $W(z, \rho, T_0)$ [32] [$W(z, \rho, T_0) d^2\rho dz$ — вероятность того, что частица с начальной энергией T_0 «застрянет» в элементе объема $2\pi\rho d\rho dz$ на глубине z на расстоянии ρ от оси пучка]:

$$W(z, \rho, T_0) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial(\rho^2)} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp\left[i\omega(R_0 - z) - \frac{\rho^2}{A_0(\omega, R_0)} - \tau(\omega, R_0)\right]}{A_0(\omega, R_0)}. \quad (137)$$

Функция $\tau(\omega, R_0)$ в (137) определяется выражением

$$\tau(\omega, R_0) \equiv \tau(\omega, T_0) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \int_0^{T_0} dT \frac{\bar{\epsilon}^k(T)}{[\bar{\epsilon}(T)]^{k+1}}. \quad (138)$$

Если ограничиться приближением Фоккера — Планка, то

$$\tau(\omega, T_0) = \frac{1}{2} \omega^2 \sigma_0^2; \quad \sigma_0^2 = \int_0^{T_0} dT \frac{\bar{\epsilon}^2(T)}{[\bar{\epsilon}(T)]^3}. \quad (139)$$

Распределение (137) удовлетворяет условию нормировки

$$\int 2\pi\rho d\rho dz W(z, \rho, T_0) = 1. \quad (140)$$

Интегрируя соотношение (137) по поперечному смещению от оси пучка, находим распределение остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество [31]:

$$\begin{aligned} W(z, T_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp[i\omega(R_0 - z) - \tau(\omega, R_0)]}{A_0(\omega, R_0)} = \\ &= \int_0^{R_0} dz' W_{\text{неупр}}(z + R_0 - z', R_0) W_{\text{упр}}(z', R_0), \end{aligned} \quad (141)$$

где

$$W_{\text{неупр}}(z, R_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega(R_0 - z) - \tau(\omega, R_0)]; \quad (142)$$

$$W_{\text{упр}}(z, R_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp[i\omega(R_0 - z)]}{A_0(\omega, R_0)}. \quad (143)$$

Пренебрегая зависимостью $L_{\text{ион}}$ от энергии, $W_{\text{упр}}$ можно представить в виде [31]:

$$W_{\text{упр}}(z, E_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp[i\omega(R_0 - z)]}{P_{\mu(\omega\gamma R_0)}[\text{ch} \ln(1 + E_0)]}. \quad (144)$$

Значение степени $\mu(\omega)$ определяется по формуле (85).

Выражения (137), (141) описывают распределение остановившихся частиц для очень широкого диапазона энергий падающих частиц, ограниченного снизу энергиями, соответствующими скоростям атомных электронов, и сверху областью сверхвысоких энергий ($E_0 \ll \ll m/m_e$).

Если многократное упругое рассеяние не учитывать ($\gamma \rightarrow 0$), то разброс остановившихся частиц по глубине будет обусловлен только вероятностным характером передачи энергии при неупругих столкновениях, а W сведется к $W_{\text{неупр}}$. Для тяжелых заряженных частиц с хорошей точностью работает приближение (139), которое приводит к известной формуле Бора [50]:

$$W_{\text{неупр}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(R_0 - z)^2}{2\sigma_0^2}}. \quad (145)$$

Поправки к выражению (145) можно легко оценить, используя распределение (35)*. В нерелятивистской области энергий они малы; учет поправок к (145) имеет смысл только для относительно легких частиц (мюоны, пионы) в легких средах. В ультрарелятивистской области с увеличением энергии точность формулы Бора несколько уменьшается [29]. В последующих вычислениях для $\tau(\omega, T_0)$ используется приближение (139).

Проанализируем теперь распределение (141) при различных начальных энергиях падающих частиц.

В случае нерелятивистских энергий ($E_0 \ll 1$), используя асимптотическое представление функций Лежандра первого рода при большом значении μ , получаем

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp\left[i\omega(R_0 - z) - \frac{\omega^2\sigma_0^2}{2}\right]}{I_0(2\sqrt{i\omega\gamma R_0})}. \quad (146)$$

Распределение (146) можно представить в виде ряда [31]:

$$W(z) = \frac{1}{4\gamma R_0} \exp\left[-\frac{(R_0 - z)^2}{2\sigma_0^2}\right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k!}{J_1(q_k)} \times \\ \times \exp[\eta_k^2(z)] \{1 - \text{erf}[\eta_k(z)]\}, \quad (147)$$

* Впервые поправки к (145) были рассчитаны для нерелятивистских частиц Льюисом на основе решения уравнения переноса методом моментов [66].

где

$$\eta_k(z) = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{2}} \left(\frac{q_k^2}{4\gamma R_0} - \frac{R_0 - z}{\sigma_0^2} \right); \quad (148)$$

q_k — нули функции Бесселя нулевого порядка [51].

На больших глубинах ($z - R_0 \gg \frac{R_0}{\sqrt{\nu}} \left(1 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\nu}}\right)$) сходимость ряда (147) недостаточно быстрая, и пользоваться непосредственно представлением (147) не очень удобно. В этом случае, учитывая асимптотическое выражение для интеграла вероятностей и формулу [64]

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{(q_k^2 - x^2) J_1(q_k)} = \frac{1}{J_0(x)},$$

соотношение (147) можно преобразовать к виду

$$W(z) = \frac{1}{4\gamma R_0} \exp\left[-\frac{(R_0 - z)^2}{2\sigma_0^2}\right] \left\{ \frac{4\gamma R_0}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2} I_0\left(\sqrt{\frac{4\gamma R_0(R_0 - z)}{\sigma_0^2}}\right)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{J_1(q_k)} \left[\exp \eta_k^2 (1 - \operatorname{erf} \eta_k) - \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta_k} \right] \right\}. \quad (149)$$

Для быстрых тяжелых заряженных частиц вклад в распределение остановившихся частиц от флуктуаций потерь энергии в неупругих столкновениях и искривления траектории частиц из-за упругого рассеяния характеризуется величиной

$$\gamma \sqrt{\nu} = 2 \sqrt{\frac{m_e}{m}} (Z + 1) \left[\frac{1 + E_0}{(2 + E_0)^2} \right]^{3/2} \sqrt{\frac{L_h^2}{L_{\text{ион}}}}. \quad (150)$$

Если $\gamma \sqrt{\nu} \gg 1$, то можно не учитывать статистический характер неупругих столкновений. Наоборот, в случае $\gamma \sqrt{\nu} \ll 1$ можно пренебречь искривлением траектории частиц. Когда $\gamma \sqrt{\nu} \sim 1$, вклад обоих процессов в распределение частиц становится одного порядка.

Для нерелятивистских частиц роль обоих вероятностных процессов в формировании распределения остановившихся частиц одинакова, если

$$Z \sim 4 \sqrt{\frac{m}{m_e}} \sqrt{\frac{L_{\text{ион}}}{L_h^2}}. \quad (151)$$

Следовательно, при торможении мюонов нерелятивистских энергий влияние многократного упругого рассеяния на разброс частиц по глубине проникновения в вещество существенно для большинства элементов таблицы Менделеева ($Z \gtrsim 10 \div 20$). При этом в веществах с порядковым номером $Z \gtrsim 50 \div 60$ эффект искривления траектории является главным. Для протонов учет флуктуаций путей ча-

стиц из-за многократного упругого рассеяния важен прежде всего в тяжелых средах ($Z \gtrsim 60 \div 70$).

В случае ультрарелятивистских энергий ($E_0 \gg 1$) величина $\gamma\sqrt{v}$ равна:

$$\gamma\sqrt{v} \simeq 2\sqrt{\frac{m_e}{m}}(Z+1)E_0^{-3/2}\sqrt{\frac{L_h^2}{L_{ион}}} \quad (152)$$

и, в отличие от нерелятивистского случая, сильно зависит от энергии падающих частиц и довольно быстро уменьшается с ростом E_0 . Поэтому даже для мюонов искривление траектории нужно учитывать только в достаточно тяжелых средах ($Z \gtrsim 3E_0^{3/2}$) и при не очень больших энергиях ($E_0 \lesssim 10$).

В области ультрарелятивистских энергий $\gamma\sqrt{v} \ll 1$ в средах с любыми Z , и основной вклад в интеграл (141) дают относительно

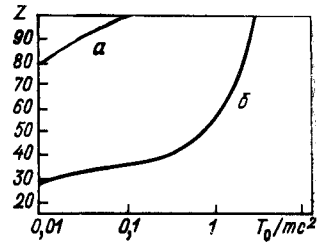


Рис. 8. Диаграмма $\gamma\sqrt{v} = 1$:
 а — протоны ($m/m_e \simeq 1836$); б — мюоны ($m/m_e \simeq 207$)

малые ω , такие, что $|\gamma R_0 \omega_{вф}| \ll 1$. Это обстоятельство позволяет представить степень μ в виде $\mu \simeq i\omega\gamma R_0 + \omega^2\gamma^2 R_0^2$ и, учитывая асимптотическое соотношение для функции Лежандра первого рода при большом значении аргумента [64]

$$P_\mu(t) \simeq \frac{(2i)^\mu \Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\mu+1)} \left(\text{Re } \mu > -\frac{1}{2} \right),$$

найти

$$W(z) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_0^2 + 2\gamma^2 R_0^2 \ln E_0)}} \exp \left[-\frac{(R_0 - z - \gamma R_0 \ln E_0)^2}{2(\sigma_0^2 + 2\gamma^2 R_0^2 \ln E_0)} \right]. \quad (153)$$

Таким образом, в области ультрарелятивистских энергий учет многократного упругого рассеяния приводит, прежде всего, к уменьшению средней глубины проникновения частиц в среду. Однако вид самого распределения является гауссовым, что соответствует определяющей роли флуктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях в формировании разброса остановившихся частиц по глубине.

На рис. 8 представлена диаграмма, показывающая, какой из вероятностных процессов будет давать преобладающий вклад в распределение остановившихся частиц (протонов и мюонов) по глубине проникновения в вещество с порядковым номером Z в зависимости от начальной энергии частиц T_0 . В областях, лежащих над кривыми,

влияние многократного упругого рассеяния на разброс частиц является определяющим.

В области промежуточных энергий ($E_0 \sim 1$), где результаты (147) — (149), (153) не применимы, для вычисления распределения $W(z)$ удобно воспользоваться квазиклассическим решением (88), (89) уравнения (68). Однако если при вычислении энергетического спектра (88) достаточно было ограничиться случаем $n = 0$, то теперь необходимо использовать решение с $n = -1$. Дело в том, что такое решение более точно описывает упругое рассеяние в области больших потерь энергии, когда $\Lambda^2(z) \sim (1 - z/R_0)^{-1}$. Используя (88) с $n = -1$, для $A_0(\omega, R_0)$ находим:

$$A_0(\omega, R_0) \simeq \sqrt{\frac{\text{sh} \ln(1+E_0)}{\text{sh} \ln(1+E_0)}} I_0(\sqrt{i\omega\kappa_0}), \quad (154)$$

где $\kappa_0 \equiv \kappa(z = R_0)$ определяется выражением*

$$\kappa_0 = \gamma R_0 b^2 \ln^2(1 + E_0). \quad (155)$$

Квазиклассическое приближенное решение (154) хорошо работает при достаточно больших ω : асимптотики (154) и точного решения (84) (при $t = 1$) совпадают. Кроме этого, квазиклассическое решение вообще не отличается от точного для нерелятивистских энергий ($E_0 \ll 1$). Однако в области малых ω , соответствующих хвосту распределения, выражение (154) приводит к завышенным значениям $W(z)$ для $E_0 \geq 1$. Для устранения этого недостатка можно поступить так же, как и при вычислении распределений (108), (110): представить функцию $A_0(\omega, R_0)$ в виде

$$A_0(\omega, R_0) = \sqrt{\frac{\ln(1+E_0)}{\text{sh} \ln(1+E_0)}} I_0(\sqrt{i\omega\kappa_0 + \delta_0}) \quad (156)$$

и определить значение $\delta_0 = \delta(E_0)$ из условия нормировки (140). В результате получаем

$$I_0(\sqrt{\delta_0}) = \left[\frac{\text{sh} \ln(1+E_0)}{\ln(1+E_0)} \right]^{1/2}. \quad (157)$$

Из этого уравнения следует, что для нерелятивистских частиц, естественно, $\delta_0 = 0$, а для частиц ультрарелятивистских энергий

$$\delta_0 \simeq \left[\frac{1}{2} \ln(1+E_0) + \frac{1}{4} \right]^2.$$

В пределе $\gamma\sqrt{v} \ll 1$ (156) с учетом последнего соотношения приводит к выражению (153).

* С учетом зависимости ионизационного логарифма от энергии

$$\kappa_0 = \varphi^2(t_0) = \frac{(Z+1)L_R}{2\pi n_0 Z z^2 r_e^2} \left[\int_0^{E_0} \frac{dE}{(1+E)L_{\text{ион}}(E)} \right]^2.$$

Используя формулу (156), распределение остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество при произвольной энергии падающих частиц можно записать следующим образом:

$$W(z) = \frac{1}{\kappa_0} \sqrt{\frac{\text{sh} \ln(1+E_0)}{\ln(1+E_0)}} \exp\left[-\frac{(R_0-z)^2}{2\sigma_0^2}\right] \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{J_1(q_k)} \exp[\eta_k^2(z, R_0)] \{1 - \text{erf}[\eta_k(z, R_0)]\}, \quad (158)$$

где q_k — нули функции Бесселя нулевого порядка;

$$\eta_k(z, R_0) = \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{2}} \left(\frac{q_k^2 + \delta_0}{\kappa_0} - \frac{R_0 - z}{\sigma_0^2} \right). \quad (159)$$

Полученное выражение описывает разброс остановившихся частиц по глубине за счет многократного кулоновского рассеяния и флуктуаций энергетических потерь в неупругих столкновениях с атомами во всей области энергий падающих частиц, где указанные процессы являются доминирующими. В случаях нерелятивистских и ультра-релятивистских энергий из (158) следуют уже полученные ранее соотношения [(147) и (153) соответственно].

На больших глубинах ($z - R_0 \gg \frac{R_0}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}\right)$), где ряд (158) сходится недостаточно быстро, его легко преобразовать к виду, аналогичному (149).

В области $R_0 - z \ll \gamma R_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma}}\right)$, воспользовавшись асимптотическим значением функции A_0 при больших ω , для распределения $W(z)$ можно получить

$$W(z) \simeq \left(\frac{\kappa_0}{2\sigma_0^2}\right)^{1/3} \left(\frac{\text{sh} \ln(1+E_0)}{\ln(1+E_0)}\right)^{1/2} \times \\ \times \exp\left[-\frac{R_0 - z - (\sigma_0^2/2\kappa_0)\delta_0}{\kappa_0}\right] \times \\ \times f\left[\frac{\kappa_0}{\sqrt{\sigma_0^2}}; \frac{R_0 - z - (\sigma_0^2/\kappa_0)\delta_0}{(\kappa_0\sigma_0^2)^{1/3}}\right] h^{1/2}\left[\frac{R_0 - z - (\sigma_0^2/\kappa_0)\delta_0}{(\kappa_0\sigma_0^2)^{1/3}}\right], \quad (160)$$

где функции $f(x; y)$ и $h(y)$ определены соотношениями (131) — (133).

Если в выражении (160) положить $\sigma_0^2 = 0$, т. е. пренебречь вероятностным характером неупругих столкновений, то в нерелятивистском случае приходим к равенству

$$W_{\text{упр}}(z) \simeq \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_0}{R_0 - z}\right)^2 e^{-\frac{1}{4} \frac{\kappa_0}{(R_0 - z)}}, \quad (161)$$

которое уточняет известный результат Спенсера [67] (в [67] неправильно вычислен предэкспоненциальный фактор).

Приближенную формулу (160) удобно использовать в случае $\gamma\sqrt{v} \gg 1$, т. е. когда важна роль флуктуаций путей частиц из-за многократного рассеяния. На рис. 9 представлено распределение остановившихся мюонов с начальной энергией $E_0 = 1$ ($T_0 = 105,7$ МэВ) в свинце ($\gamma\sqrt{v} \simeq 2$). Как видно из рисунка, соотношение (160) хорошо работает в области относительно больших глубин, включая наиболее вероятную глубину проникновения частиц в вещество.

До недавнего времени единственным серьезным аналитическим результатом, позволяющим вычислять вклад упругого рассеяния в разброс остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество, было модифицированное Бергером и Сельтзером с учетом потерь энергии распределение Янга [6] (см. также [17, 24, 25]). Для того чтобы получить распределение остановившихся частиц на основе модифицированной формулы Янга, нужно подставить в (143) функцию A_0 вида

$$A_0(\omega, R_0) = \text{ch} \sqrt{2i\omega \langle R_0 - z \rangle}, \quad (162)$$

где $\langle R_0 - z \rangle$ определяется по формуле И. Я. Померанчука [56]:

$$\langle R_0 - z \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{R_0} (R_0 - z) \langle \theta_s^2(z) \rangle dz \quad (163)$$

или Льюиса [6, 68] *:

$$\langle R_0 - z \rangle = \int_0^{R_0} dz \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^z \langle \theta_s^2(z') \rangle dz' \right) \right]. \quad (164)$$

Можно также в (98) просто положить $R(T) = 0$ ($S = R_0$).

Хотя модифицированный спектр Янга правильно описывает первый момент распределения, т. е. $\langle R_0 - z \rangle$ (настолько правильно, насколько точны соотношения Померанчука и Льюиса), вид самого распределения $W_{\text{упр}}$ он воспроизводит лишь приближенно (рис. 10). Сравнение показывает, что использование функции (162) завышает дисперсию распределения $W_{\text{упр}}(z)$. Например, в области нерелятивистских энергий выражение (144) и вычисления И. Я. Померанчука [56] дают $\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma^2 R_0^2$, в то время как модифицированное на основе (162), (163) распределение Янга — $\langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle = \frac{2}{3} \gamma^2 R_0^2$. Таким образом, вклад упругого рассеяния в дисперсию распределения остановившихся частиц по глубине результат Бергера

* Вычисления [6] дают завышенные значения $\langle R_0 - z \rangle$. Это связано с тем что использованное в [6] соотношение для $\langle \theta_s^2 \rangle$ впервые было получено для электронов, а не для тяжелых частиц, и не учитывает конечности размеров ядра атома.

и Сельтзера переоценивает в 1,3 раза. Сказанное подтверждается также и сравнением с данными численных расчетов методом Монте-Карло [6].

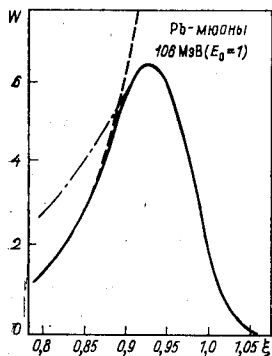


Рис. 9. Распределение остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество (сплошная кривая); штриховая — результат расчета на основе первого слагаемого ряда (158); штрихпунктирная — результат расчета по формуле (160)

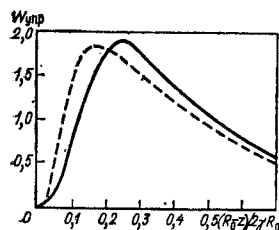


Рис. 10. Распределение $W_{\text{упр}}(z)$ для нерелятивистских частиц:

сплошная кривая — результат расчета по формуле (144); штриховая — модифицированное на основе формулы Померанчука распределение Янга

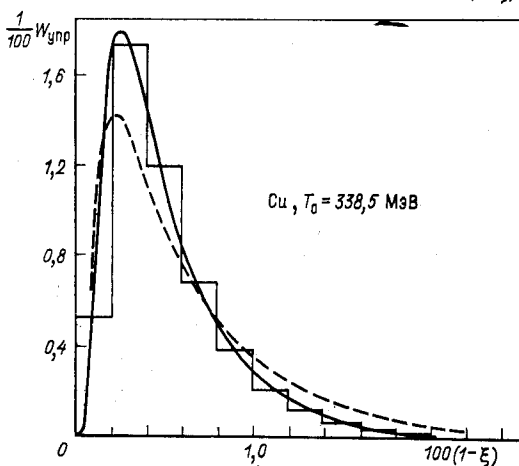
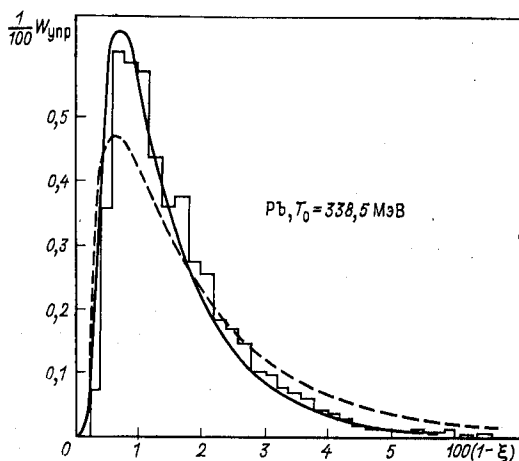


Рис. 11. Распределение частиц по глубине проникновения в вещество $W_{\text{упр}}(z)$ по данным численного моделирования на ЭВМ [6] и расчета на основе соотношений (143), (156) (сплошная кривая), (143), (162), (164) [6] (штриховая кривая)

На рис. 11 представлены распределения частиц по глубине, вычисленные без учета флуктуаций потерь в неупругих столкновениях на основе соотношений (143), (156), модифицированного распределе-

ния Янга (143), (162), (164) [6] и данных численного моделирования на ЭВМ [6]. Видно, что результат (143), (156) согласуется с расчетами методом Монте-Карло значительно лучше, нежели распределение Янга.

В ситуации, когда роль упругого рассеяния заметна (среды с большими Z , не очень тяжелые частицы — мюоны, пионы), использование модифицированной формулы Янга приводит к погрешности в определении значения разброса остановившихся частиц по глубине порядка 10—20%.

Выше был рассмотрен разброс остановившихся частиц только по глубине, безотносительно к их поперечному смещению от оси пучка. Остановимся теперь на анализе полного пространственного распределения (137).

Главная особенность пространственного распределения остановившихся частиц в узком пучке обусловлена многократным упругим рассеянием в процессе торможения частиц в среде. Дело в том, что сильно отклонившиеся из-за рассеяния от оси пучка частицы проходят в слое вещества заданной толщины больший путь, нежели частицы, двигавшиеся вдоль оси. Поэтому они теряют большую энергию и останавливаются на меньших глубинах. В результате на значительные глубины с большей вероятностью проникают частицы, мало отклонившиеся от направления первоначального движения, т. е. двигавшиеся в основном «прямо-вперед». Это приводит к уменьшению разброса частиц по поперечному смещению относительно оси пучка с ростом глубины или, что то же самое, к уменьшению глубины проникновения частиц в вещество с увеличением расстояния от оси пучка.

В области относительно больших глубин $R_0 - z - \frac{\rho^2}{2R_0} \ll \ll \gamma R_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2 v}\right)$, используя для A_0 и A_3 асимптотические представления при больших ω , находим [32]:

$$W(z, \rho) \simeq \frac{1}{\pi R_0} \left(\frac{\kappa_0}{16\sigma_0^4}\right)^{2/3} \left(\frac{\text{sh} \ln(1+E_0)}{|\ln(1+E_0)|}\right)^{1/2} \times \\ \times h^{5/2} \left[\frac{R_0 - z - \rho^2/2R_0}{(\kappa_0 \sigma_0^2)^{1/3}}\right] f\left[\frac{\kappa_0}{\sqrt{\sigma_0^2}}; \frac{R_0 - z - \rho^2/2R_0}{(\kappa_0 \sigma_0^2)^{1/3}}\right]. \quad (165)$$

Выражение (165) позволяет оценить разброс остановившихся частиц по поперечному смещению относительно оси пучка [32]:

$$\langle \rho^2 \rangle_z \simeq 2R_0 \left(\frac{16\sigma_0^4}{\kappa_0}\right)^{1/3} h^{-2} \left[\frac{R_0 - z}{(\kappa_0 \sigma_0^2)^{1/3}}\right]. \quad (166)$$

Как следует из этого соотношения, величина $\langle \rho^2 \rangle_z$ уменьшается с ростом глубины и при $z - R_0 \gg (\kappa_0 \sigma_0^2)^{1/3}$ равна

$$\langle \rho^2 \rangle_z \simeq 2\sigma_0^2/(z - R_0).$$

Подчеркнем, что учет непрямолинейности движения частиц при торможении в веществе приводит к зависимости глубины проникно-

вения частиц от их поперечного смещения относительно оси пучка: сильно отклонившиеся от оси пучка частицы останавливаются на меньших глубинах. Если искривление траектории во внимание не принимать, то такая зависимость пропадает [17].

Способ вычисления средних, изложенный в п. в, позволяет найти зависимость средней глубины проникновения частицы в вещество от ее смещения относительно оси пучка:

$$\langle z \rangle_{\rho} = R_0 - \frac{1}{2} \int_0^{R_0} dz (R_0 - z) \langle \theta_s^2(z) \rangle - \\ - \frac{1}{2} \int_0^{R_0} dz \left[\int_0^z dz' (R_0 - z') \langle \theta_s^2(z') \rangle \right]^2 \frac{\rho^2 - \langle \rho^2 \rangle}{\langle \rho^2 \rangle^2}, \quad (167)$$

где $\langle \rho^2 \rangle = \int_0^{R_0} dz (R_0 - z)^2 \langle \theta_s^2(z) \rangle$ — средний квадрат поперечного смещения остановившихся частиц безотносительно к глубине их проникновения в вещество [17].

Пренебрегая зависимостью $L_{\text{ион}}$ от энергии ($\Lambda^2(\xi) \simeq \frac{b^2}{(1-\xi)(b^2-\xi)}$), находим

$$\langle z \rangle_{\rho} = R_0 (1 - \gamma \alpha_1) - \alpha_2 \rho^2 / R_0, \quad (168)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= b^2 \left[\ln \frac{b^2}{b^2-1} \left(1 - (b^2-1) \ln \frac{b^2}{b^2-1} \right)^{-1} - 2 \right]; \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} \frac{2 - (b^2-1) \ln \frac{b^2}{b^2-1} \left(2 + \ln \frac{b^2}{b^2-1} \right)}{\left[1 - (b^2-1) \ln \frac{b^2}{b^2-1} \right]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

В частном случае нерелятивистских энергий ($E_0 \ll 1$) из (168) следует

$$\langle z \rangle_{\rho} = R_0 \left(1 - \frac{1}{3} \gamma \right) - \frac{2}{3} \frac{\rho^2}{R_0}. \quad (170)$$

Соотношение (170) фактически есть уравнение поверхности (парабооида вращения), на которой плотность остановившихся частиц при прохождении через вещество узкого пучка максимальна.

3. ВЛИЯНИЕ ЯДЕРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ПРОХОЖДЕНИЕ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ВЕЩЕСТВЕ

Выше при вычислении распределения частиц не учитывалась возможность их распада и ядерного взаимодействия при столкновении с ядрами атомов среды. Такое рассмотрение в исследуемом диа-

пазоне энергий всегда оправданно для описания торможения мюонов в конденсированных средах (в твердых телах и жидкостях распад мюона происходит уже после его остановки [15]) и сильновзаимодействующих частиц (протоны, α -частицы и т. д.) при не очень больших энергиях, когда полный пробег частицы R_0 значительно меньше длины ядерного взаимодействия $l_{\text{яд}}$.

С увеличением энергии падающих частиц пробег R_0 возрастает, в то время как длина $l_{\text{яд}}$ меняется слабо [15, 19]. Это приводит к тому, что, начиная с некоторых энергий (для протонов эта энергия порядка 100 МэВ), большая доля частиц в процессе торможения испытывает ядерное взаимодействие. При этом в веществе, вообще говоря, развивается сложный межъядерный каскадный процесс [20, 69]. Однако, как показано в [7—9, 20], даже в таком случае распределение частиц при $z \sim R_0$ формируется за счет частиц, не испытавших ядерное взаимодействие (для них ядерные столкновения выступают как поглощение [7—9, 19, 25]).

Причину этого понять нетрудно. В отличие от кулоновского рассеяния и ионизационного торможения, при ядерном взаимодействии частица теряет энергию большими порциями и рассеивается на относительно большие углы [15]. Поэтому первичные частицы, испытавшие ядерное столкновение, а также вторичные заряженные частицы (продукты реакций) попадают на заданную глубину с большой потерей энергии и тормозятся в более тонких ($z < R_0$) слоях вещества [7—9, 20, 25, 70].

Наименее чувствительны к наличию ядерного взаимодействия дифференциальные характеристики — энергетический спектр и пространственное распределение остановившихся в области $z \sim R_0$ частиц. При не очень больших энергиях (для протонов до нескольких сот мегаэлектрон-вольт) они формируются не испытавшими ядерного взаимодействия частицами, число которых с глубиной умень-

шается пропорционально $\exp \left[- \int_T^{T_0} dT w_{\text{яд}}(T) / \varepsilon(T) \right]$, где $w_{\text{яд}}(T)$ — вероятность ядерных столкновений на единице пути [15, 19, 70] *. Продукты ядерных взаимодействий влияют, главным образом, на низкоэнергетический «хвост» спектра и, соответственно, на распределение остановившихся частиц при $R_0 - z > R_0 \max(\gamma, 1/\sqrt{\nu})$. Интегральные характеристики, в частности кривая Брэгга, зависят от ядерных столкновений в большей степени [7, 20]. Особенно сильно ядерное взаимодействие влияет на форму кривой Брэгга в области

* Упругое ядерное рассеяние на малые углы ($\theta < \sqrt{\langle \theta^2 \rangle_z}$) можно учесть перенормировкой величины среднего квадрата угла рассеяния на единице пути — $\langle \theta_z^2 \rangle$. При этом $w_{\text{яд}}(T)$ в показателе экспоненты нужно заменить $\tilde{w}_{\text{яд}}(T) = w_{\text{яд}}(T) - w_{\text{упр}}^{(\theta^2)_z, \rho, T}$, где $w_{\text{упр}}^{(\theta^2)_z, \rho, T}$ — сечение упругого ядерного рассеяния на углы $\theta < \sqrt{\langle \theta^2 \rangle_z, \rho, T}$.

$R_0 - z \gg R_0 \max(\gamma, 1/\sqrt{v})$, где, по-видимому, важно учитывать вклад продуктов ядерных реакций [7, 20].

С ростом начальной энергии частиц ядерные столкновения приобретают существенно многократный характер, и испытывавшие сильное взаимодействие частицы влияют не только на низкоэнергетический хвост спектра, но и на все распределение частиц в целом. В итоге для определения энергетического спектра и пространственного распределения остановившихся частиц (не говоря уже о кривой Брэгга) в этой области энергии (для протонов $T_0 \geq 0,5 \div 1$ ГэВ) необходимо проводить расчет уже всего межъядерного каскадного процесса.

В заключение отметим, что если в правую часть уравнения (1) ввести слагаемое $w_{\text{яд}}(T)N$, то полученное уравнение будет описывать движение частиц до ядерного столкновения (или распада) или между последовательными актами ядерного взаимодействия. Для решения этого уравнения применимы методы, рассмотренные в разд. 1. Зная решение уравнения и соответствующие дифференциальные сечения, можно определить начальный спектр частиц, испытывавших однократное ядерное взаимодействие, или начальный спектр вторичных частиц. Для описания движения этих частиц нужно снова воспользоваться исходным уравнением, но уже с соответствующим начальным распределением*. Эту процедуру можно, например, применить для вычисления распределения частиц при прохождении в веществе л-мезонов с учетом их распада ($\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu$) и ядерного взаимодействия (аналогично [10, 58]).

4. ВЫВОДЫ

В настоящей работе изложена аналитическая теория прохождения пучка быстрых тяжелых заряженных частиц через вещество, учитывающая одновременно систематическое торможение и флуктуации потерь энергии из-за вероятностного характера неупругих столкновений и многократного кулоновского рассеяния. Эта теория является наиболее общей среди аналитических результатов, описывающих торможение быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе, и включает известные результаты Бора [50], Ферми [17], Эйджеса [63], Померанчука [56], Янга [60], Вавилова [42], Спенсера и Койна [61], Бергера и Сельтзера [6], Пэйна [27] как соответствующие предельные случаи.

Подробно рассмотрены флуктуации потерь энергии и пробегов частиц в толстых слоях вещества, где влияние упругого рассеяния на распределение частиц по энергиям проявляется наиболее заметно.

Найдено распределение частиц по длинам пройденного в слое вещества пути. Обнаружено хорошее согласие полученных аналити-

* Расчет движения частиц, испытывавших ядерное взаимодействие, а также вторичных частиц, из-за большого разброса в их начальных распределениях, можно, вообще говоря, проводить уже в приближении непрерывного замедления.

ческих результатов с данными численных расчетов методом Монте-Карло. Показано, что модифицированное Бергером и Сельтзером распределение Янга завышает вклад многократного кулоновского рассеяния в дисперсию распределения остановившихся частиц по глубине не менее чем на 30%.

Вычислен энергетический спектр быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе с учетом ионизационных потерь энергии и искривления траектории частиц при многократном рассеянии. Получены также оценки пространственного и углового разброса частиц, прошедших слой вещества заданной толщины, в зависимости от потенциальной энергии.

Дано общее выражение для пространственного распределения остановившихся частиц. В указанном выражении учтены как ионизационные потери, так и многократное упругое рассеяние. Вычислено распределение остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество. Проведен анализ относительной роли флуктуаций пробегов частиц из-за вероятностного характера ионизационных столкновений и из-за кулоновского упругого рассеяния в зависимости от порядкового номера атомов среды, массы и энергии частиц. Рассмотрены особенности распределения частиц по поперечному смещению от оси пучка на больших глубинах. Показано, что одновременное действие ионизационного торможения и многократного кулоновского рассеяния приводит к уменьшению разброса частиц по поперечному смещению относительно оси пучка с ростом глубины проникновения в вещество.

Исходя из общего выражения для распределения частиц по энергиям, координатам и углам предложен простой способ вычисления моментов энергетического спектра частиц и пространственного распределения остановившихся частиц. Приведены соотношения для средних пробегов и средней глубины проникновения в вещество в зависимости от направления движения частиц и их поперечного смещения относительно оси пучка.

Перечисленные результаты применимы во всем диапазоне энергий частиц, где основной вклад в экспериментально измеряемые характеристики прохождения частиц через вещество дают частицы, не испытавшие ядерных столкновений.

Изложенная в настоящей работе аналитическая теория может быть использована для анализа экспериментов по измерению энергетических спектров частиц, распределения потерь энергии и энерговыделения (кривой Брэгга), пространственного распределения остановившихся частиц и зависимости интегрального потока частиц от глубины и смещения относительно оси пучка (кривой трансмиссии), в частности, для определения из эксперимента основных параметров теории взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом [тормозной способности $\bar{\epsilon}$, ионизационного потенциала $I(Z)$, разброса потерь энергии на единице пути $\bar{\epsilon}^2$ и др.].

В свое время расчеты уменьшения глубины проникновения частиц в вещество из-за многократного упругого рассеяния позволили с высокой точностью определить из эксперимента значения тормозной способности $\bar{\epsilon}$ и одного из важнейших параметров взаимодействия заряженных частиц с веществом — среднего потенциала ионизации $I(Z)$ [2—9]. Логическим продолжением этих работ было бы экспериментальное измерение значения $\bar{\epsilon}^2$, в частности получение данных о влиянии на $\bar{\epsilon}^2$ эффекта связи электронов в атоме [21].

Однако до недавнего времени систематические расчеты, дающие представление о вкладе многократного упругого рассеяния в дисперсию распределения частиц по энергиям и пробегам, отсутствовали [19]. Это, в свою очередь, не позволяло извлекать из эксперимента значения $\bar{\epsilon}^2$, по крайней мере настолько точные, чтобы можно было оценить значения поправок на эффект связи электронов в атоме. Сказанное наиболее существенно для сред с большими Z , где, с одной стороны, велика роль упругого рассеяния, а с другой — эффект связи электронов должен быть замечен даже при достаточно больших энергиях частиц [6, 48].

Рассмотренные выше результаты достаточно точно учитывают вклад многократного упругого рассеяния в распределение частиц по энергиям и пробегам и тем самым делают возможным извлечение из эксперимента данных о влиянии эффекта связи электронов в атоме на величину $\bar{\epsilon}^2$. Для этого целесообразнее использовать эксперименты по измерению энергетических спектров и распределений остановившихся частиц, нежели интегральных величин — кривых Брэгга и кривых трансмиссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andersen H. H. Bibliography and index of experimental range and stopping power data. N. Y.: Pergamon Press, 1977.
2. Mather R., Segre E. // Phys. Rev. 1951. Vol. 84. P. 191—193.
3. Зрелов В. П., Столегов Г. Д. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. С. 658—668.
4. Bichsel H., Uehling E. A. // Phys. Rev. 1960. Vol. 119. P. 1670—1680.
5. Barkas W. H., Von Friesen S. // Nuovo cimento. Suppl. 1961. Vol. 19. S. 10. P. 41—62.
6. Berger M. J., Seltzer S. M. // Studies in penetration of charged particles in matter. Washington, D. C., 1964. NAS-NRC publication 1133. P. 69—98.
7. Василевский И. М., Карпов И. И., Прокошкин Ю. Д. // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. С. 2166—2172.
8. Василевский И. М. и др. // Я. Ф. 1968. Т. 9. С. 997—1008.
9. Зрелов В. П. и др. // Я. Ф. 1974. Т. 19. С. 1276—1281.
10. Büche G., Przybilla G. // Nucl. Instrum. and Methods. 1981. Vol. 179. P. 321—341.
11. Kleinknecht K. // Phys. Rep. 1982. Vol. 84. P. 85—161.
12. Асосков В. И. и др. Препринт ФИАН № 214. 1982.
13. Allison W. W. M., Cobb J. H. // Ann. Rev. of nuclear and particle science. 1980. Vol. 30. P. 253—298.
14. Imanishi A. e. a. // Nucl. Instrum. and Methods. 1983. Vol. 207. P. 357—364.

15. Хаякава С. Физика космических лучей. Ч. 1. Ядерно-физический аспект: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
16. Чернышев В. П. и др. Препринт ИТЭФ. М., № 106. 1982.
17. Калашиников Н. П., Ремизович В. С., Рязанов М. И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. М.: Атомиздат, 1980.
18. Scott W. T. // *Rev. Mod. Phys.* 1963. Vol. 35. P. 231—313.
19. Janni J. I. // *Atom. Data and Nucl. Data Tables.* 1982. Vol. 27. P. 147—339.
20. Мус К. Ф. Некоторые вопросы прохождения высокоэнергетических протонов через вещество: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Л., 1975.
21. Fano U. // *Studies in penetration of charged particles in matter.* Washington, D. C., 1964. NAS-NRC publication 1133. P. 281—284
22. Berger M. J. // *Methods in computational physics.* Vol. 1. N.Y.— Lond.: Academic Press, 1963. P. 135—245.
23. Тодорова Г. Препринт ОИЯИ № Е1-83-84. Дубна, 1984.
24. Санников А. В и др. Препринт ИФВЭ 80-42. Серпухов, 1980.
25. Мус К. Ф. Препринт ФТИ-284. Л., 1970.
26. *Studies in penetration of charged particles in matter.* Washington, D. C., 1964. NAS-NRC publication 1133.
27. Payne M. G. // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 185. P. 611—623.
28. Ремизович В. С. // *Атомная энергия*, 1974. Т. 36. С. 394—395.
29. Воинов Б. А., Ремизович В. С. // *Влияние ионизирующих излучений на свойства диэлектриков и полупроводников.* М.: Атомиздат, 1979. С. 49—57.
30. Ремизович В. С., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. И // *Исследование поверхностных и объемных свойств твердых тел по взаимодействию частиц.* М.: Энергоиздат, 1981. С. 25—52.
31. Ремизович В. С., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. И. // *ДАН СССР.* 1982. Т. 262. С. 864—868.
32. Ремизович В. С., Рогозкин Д. Б., Рязанов М. И. // *ДАН СССР.* 1983. Т. 271. С. 860—864.
33. Ремизович В. С., Рязанов М. И., Тилинин И. С. Теория обратного рассеяния быстрых заряженных частиц при наклонном падении на поверхность вещества. *Тексты лекций.* М.: Изд. МИФИ, 1982.
34. Andersen H. N., Ziegler J. F. *Hydrogen stopping powers and ranges in all elements.* N. Y.: Pergamon Press, 1977.
35. Walske M. C. // *Phys. Rev.* 1956. Vol. 101. P. 940—944.
36. Fano U., Turner J. E. // *Studies in penetration of charged particles in matter.* Washington, D. C., 1964. NAS-NRC publication 1133. P. 49—68.
37. Sternheimer R. M. // *Phys. Rev.* 1966. Vol. 145. P. 247—250.
38. Sternheimer R. M. // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 164. P. 349—351.
39. Crispin A., Fowler G. N. // *Rev. Mod. Phys.* 1970. Vol. 42. P. 290—316.
40. Sternheimer R. M., Peierls R. F. // *Phys. Rev.* 1971. Vol. B3. P. 3681—3692.
41. Turner J. E. // *Studies in penetration of charged particles in matter.* Washington, D. C., 1964. NAS-NRC publication 1133. P. 99—102.
42. Вавилов П. В. // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 32. С. 920—923.
43. Шулек П. и др. // *Я. Ф.* 1966. Т. 4. С. 564—566.
44. Bichsel H. // *Phys. Rev.* 1970. Vol. B1. P. 2854—2862.
45. Symon K. R., Ph. D. Thesis. Harvard University, 1948.
46. Tschalär C. // *Nucl. Instrum. and Methods.* 1968. Vol 61. P. 141—156.
47. Tschalär C. // *Nucl. Instrum. and Methods.* 1968. Vol. 64. P. 237—243.
48. Sternheimer R. M. // *Phys. Rev.* 1960. Vol. 117. P. 485—488.
49. Seltzer S. M., Berger M. J. // *Studies in penetration of charged particles in matter.* Washington, D. C., 1964. NAS-NRC publication 1133. P. 187—204.
50. Боп Н. Прохождение атомных частиц через вещество: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
51. *Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.*
52. Bohr N. // *Philos. Mag.* 1915. Vol. 30. P. 581—588.
53. Tschalär C., Maccabee H. D. // *Phys. Rev.* 1970. Vol. B1. P. 2863—2869.

54. Ремизович В. С. // ЖЭТФ. 1972. Т. 63. № 5. С. 1599—1608.
55. Rotondi E., Geiger K. W. // Nucl. Instrum. and Methods. 1966. Vol. 40. P. 192—196.
56. Померанчук И. Я. Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1972.
57. Lagerlund T. D. e. a. // Nucl. Instrum. and Methods. 1974. Vol. 120. P. 521—524.
58. Lagerlund T. D. e. a. // Nucl. Instrum. and Methods. 1975. Vol. 128. P. 525—529.
59. Eckardt J. C. e. a. // Nucl. Instrum. and Methods. 1984. Vol. 230B. P. 168—172.
60. Yang C. N. // Phys. Rev. 1951. Vol. 84. P. 599—600.
61. Spencer L. V., Coyne J. // Phys. Rev. 1962. Vol. 128. P. 2230—2237.
62. Берман Г. П. // ЖТФ. 1975. Т. XLV. С. 440—443.
63. Euges L. // Phys. Rev. 1948. Vol. 74. P. 1534—1535.
64. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I—II. М.: Наука, 1974.
65. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.
66. Lewis H. W. // Phys. Rev. 1952. Vol. 85. P. 20—24.
67. Spencer L. V. // Phys. Rev. 1955. Vol. 98. P. 1597—1615.
68. Lewis H. W. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 526—529.
69. Schirrmeister V., Ranft J. // Nucl. Instrum. and Methods. 1977. Vol. 141. P. 425—428.
70. Renberg P. U. e. a. // Nucl. Instrum. and Methods. 1972. Vol. 104. P. 157—162.