«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА», 1988, ТОМ 19, ВЫП. 5

УДК 531.51

ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. О. Соловьев

Институт физики высоких энергий, Серпухов

С единой точки зрения излагается и сопоставляется канонический формализм общей теории относительности (ОТО) и релятивистской теории гравитации (РТГ). Приводятся необходимые сведения из теории систем со связями, геометрии гиперповерхностей и их однопараметрических семейств. Особое внимание уделяется задаче нахождения поверхностных интегралов, необходимых для переопределения гамильтониана в случае асимптотически плоского пространства-времени. Показано, что основным различием между РТГ и ОТО является присутствие в РТГ пространства Минковского, что позволяет говорить о локализации энергии-импульса гравитационного поля в этой теории, а также приводит к более естественной реализации алгебры диффеоморфизмов пространства-времени.

The canonical formalism of General Relativity Theory (GRT) and of Relativistic Theory of Gravitation (RTG) are considered and comprehended from the same viewpoint. The required preliminary information from the theory of constrained systems, hypersurfaces and their one-parametrical families geometry are presented. Special attention is given to the problem of finding surface integrals that are necessary to include in asymptotically flat space-time Hamiltonian. The existence of the Minkowski space in the RTG is shown to be the fundamental difference between RTG and GRT. It allows one to speak about the localization of the energy-momentum of the gravitational field in this theory. It also gives more straightforward realization of the space-time diffeomorphisms algebra.

ВВЕДЕНИЕ

Канонический формализм занимает особое место среди методов теоретической физики как наиболее общий подход к описанию самых разных объектов — от частиц и струн до калибровочных полей и геометрии пространства в целом. В частности, выражение на языке гамильтонова формализма существенно прояснило внутреннюю структуру общей теории относительности (проблема начальных условий, степени свободы, связи и т. п.) и позволило развивать новые подходы к ее квантованию.

В этой работе мы изложим результаты, относящиеся в основном к двум вопросам: построению гамильтонова формализма релятивистской теории гравитации (РТГ) [1] и нахождению поверхностных интегралов в гамильтониане. С единой точки зрения будет рассмотрен и сопоставлен канонический формализм для двух теорий гравитации: РТГ и ОТО (общей теории относительности). Для удобства изложения в статью включены необходимые сведения из механики систем со связями, геометрии гиперповерхностей и их однопараметрических семейств.

Основное различие между рассматриваемыми теориями заключается в «скрытом» присутствии в РТГ пространства Минковского. Хотя все приборы чувствуют только риманову метрику и все свободные частицы движутся по ее геодезическим, метрика пространства Минковского определяется однозначно при соответствующих начальных и граничных условиях. Это означает однозначную локализацию энергии-импульса гравитационного поля. Следовательно, появляется возможность говорить об энергии-импульсе, заключенном в некотором объеме пространства, о потоке энергии-импульса через границу этого объема и т. д. Что касается ОТО, то в этой теории принципиально невозможно однозначно ввести плоский фон без нарушения общекоординатной инвариантности. Факт этот слишком хорошо известен, чтобы подробно на нем останавливаться.

Представляется также немаловажной возможность непосредственной реализации в каноническом формализме РТГ алгебры диффеоморфизмов пространства-времени. Аналогичная задача в ОТО требует введения вспомогательной структуры из четырех функций на пространственно-временном многообразии и четырех новых связей, что делается формально, без какой-либо физической интерпретации. В РТГ такой структурой, определенной единственным образом, является физическое пространство Минковского.

1. КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Теории, в которых имеется инвариантность относительно преобразований, зависящих от произвольных функций времени, требуют в гамильтоновом подходе использования метода Дирака для систем со связями. Общность этого метода такова, что позволяет применять его к описанию как калибровочно-инвариантных, так и общековариантных теорий поля, а также релятивистской частицы, струны и т. д. Релятивистская теория гравитации, как и ОТО, обладает общекоординатной инвариантностью, которая находит свое отражение в наличии связей в гамильтониане.

Исторически первым примером теории поля, каноническое квантование которой вызвало затруднения, была электродинамика Максвелла. Причины этих затруднений проявляются уже в классической теории при попытке привести ее к гамильтонову виду. Для действия

$$I = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}d^4x$$

канонические импульсы, сопряженные A_μ,

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\mu,0}}$$

определяются формулами:

$$\pi^0 = 0, \ \pi^i = A_{i,0} - A_{0,i}$$

и, следовательно, не все скорости $A_{\mu,0}$ удается выразить через импульсы, как того требует стандартный гамильтонов подход. [Мы используем сигнатуру метрики $(-,+,+,+)$, греческие индексы принимают значения от 0 до 3, латинские — от 1 до 3, по повторяющимся индексам производится суммирование.] Компонента A_0 играет особую роль и не является динамической переменной, она должна войти в формализм в качестве произвольной функции.

Обобщение канонического подхода, допускающее в уравнениях движения произвольные функции времени и позволившее распространить его на широкий класс теорий (иногда их все абстрактно называют «калибровочными»), было сделано в начале 50-х годов в работах Дирака [2]. Изложим схему * метода, пользуясь для простоты системой с конечным числом степеней свободы.

Лагранжиан

$$L(q_i, \dot{q}_i), \ i = 1, \ \ldots, \ N,$$

может приводить к сингулярной матрице

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j} \right\|,$$

что как раз и означает, как в рассмотренном выше примере, невозможность однозначно разрешить соотношения

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i}$$

относительно скоростей $\dot{q}_i$.

Если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\|$ равен M $(M < N)$ и, например, без ограничения общности, $\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \right| \neq 0$, то можно разрешить соотношения

$$p_a = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_a}$$

относительно скоростей $\dot{q}_a$:

$$\dot{q}_a = \dot{q}_a(q_i, \ p_b, \ \dot{q}_\alpha),$$

* Для более подробного изучения следует обратиться, например, к работам [28, 29].

где $a,\ b = 1, \ldots, M;\ i,\ j = 1, \ldots, N;\ \alpha,\ \beta = M + 1, \ldots, N$. Остальные $N - M$ равенств

$$p_\alpha = \frac{\partial L(q, \dot q)}{\partial \dot q_\alpha}$$

после подстановки в них $\dot q_a\,(q_i, p_b, \dot q_\alpha)$ не будут, как можно проверить, содержать скоростей вовсе. Придав им вид

$$\varphi_\alpha\,(q_i,\ p_i) = 0,$$

назовем их «первичными» связями, наложенными на канонические переменные $(q_i,\ p_i)$. После этого строится гамильтониан

$$H\,(q_i,\ p_i) = \sum_{a=1}^{M} p_a \dot q_a\,(q_i,\ p_b,\ \dot q_\alpha) + \sum_{\alpha=M+1}^{N} \frac{\partial L\,(q_i,\ \dot q_a\,(q_i,\ p_b,\ \dot q_\beta),\ \dot q_\alpha)}{\partial \dot q_\alpha} \dot q_\alpha - \\ - L\,(q_i,\ \dot q_a\,(q_i,\ p_b,\ \dot q_\alpha),\ \dot q_\alpha) + \sum_{\alpha=M+1}^{N} \lambda_\alpha \varphi_\alpha\,(q_i,\ p_i),$$

который, как и связи, не будет зависеть от скоростей $\dot q_\alpha$. Здесь λ_α — лагранжевы множители, служащие для учета первичных связей.

Гамильтоновы уравнения

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

для записи которых будем использовать скобки Пуассона

$$\{f,\ g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right),$$

$$\dot q_i = \{q_i,\ H\}, \quad \dot p_i = \{p_i,\ H\},$$

оказываются вместе с уравнениями связей

$$\varphi_\alpha = 0,$$

эквивалентными лагранжевым уравнениям движения. Условия совместности уравнений связи с гамильтоновыми уравнениями имеют вид

$$\dot\varphi_\alpha = 0 \tag{1}$$

после учета связей. Заметим, что связи всегда учитываются лишь после вычисления скобок Пуассона и поэтому называются равными нулю «в слабом смысле», что обозначается следующим образом:

$$\varphi_\alpha \approx 0.$$

Таким образом, условия (1) можно представить в виде

$$\{\varphi_\alpha,\ H\} \approx 0. \tag{2}$$

«В сильном смысле» при вычислении $\{\varphi_\alpha, H\}$ можно получить различные результаты:

а) $\{\varphi_\alpha, H\} = 0$;

б) $\{\varphi_\alpha, H\} = \sum\limits_{\beta=M+1}^{N} C_{\alpha\beta}(q, p)\varphi_\beta$;

в) $\{\varphi_\alpha, H\} = \psi_\alpha(q, p)$;

г) $\{\varphi_\alpha, H\} = f_\alpha(q, p) + \sum\limits_{\beta=M+1}^{N} \lambda_\beta g_\beta(q, p)$.

В случаях а) и б) требование (2) удовлетворяется автоматически, в случае в) необходимо наложить новую, «вторичную», связь

$$\psi_\alpha(q, p) \approx 0,$$

в случае г) можно выразить один из лагранжевых множителей через остальные лагранжевы множители и канонические переменные. Очевидно если имеется больше одной первичной связи ($N - M > 1$), то возможно появление нескольких вторичных связей и (или) исключение нескольких лагранжевых множителей.

Для вторичных связей нужно вновь проверить их согласованность с уравнениями движения, т. е. проверить выполнение требования

$$\{\psi_\alpha, H\} \approx 0.$$

Если возникнут новые вторичные связи, то процедура повторяется еще раз и т.д. Отметим, что если в этом процессе мы придем к противоречию, то это означает, что исходный лагранжиан дает противоречивые лагранжевы уравнения.

Практически 1—2—3 шага дают все связи, т. е. удается найти все множество независимых связей, сохраняющихся во времени, и исключить часть лагранжевых множителей. Оставшиеся лагранжевы множители будут произвольными функциями времени.

Кроме классификации связей как первичных (обязательно включаемых в гамильтониан) и вторичных, вводится понятие о связях I и II рода. По определению, скобки Пуассона связи I рода со всеми связями обращаются в нуль в слабом смысле, в противном случае связь является связью II рода.

Отметим, что в подходе Дирака [2] вторичные связи I рода можно добавлять к гамильтониану с произвольными новыми лагранжевыми множителями, в остальном действуя прежним методом. Физическое содержание теории при этом в известных нам случаях не изменяется, хотя гамильтоновы уравнения содержат больше произвольных функций, чем исходные лагранжевы уравнения.

Часто возникает потребность уменьшить число произвольных функций в гамильтониане или исключить их полностью. Это достигается обычно наложением дополнительных («калибровочных») условий на канонические переменные. Например, пусть имеется K связей I рода (не различая первичные и вторичные): $\varphi_\alpha \approx 0$, $\{\varphi_\alpha, \varphi_\beta\} \approx 0$,

$\{\varphi_\alpha, H_0\} \approx 0$, $H = H_0(q, p) + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \varphi_\alpha$. Наложим K условий

$$\chi_\alpha(q_i, p_i) = 0,$$

причем

$$\det |\{\varphi_\alpha, \chi_\beta\}| \neq 0,$$

и для простоты

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx 0,$$

Тогда, добавляя новые связи к гамильтониану

$$H' = H_0 + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \varphi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{K} \mu_\beta \chi_\beta,$$

найдем условия сохранения связей во времени:

$$\{\varphi_\alpha, H'\} \approx \sum_{\beta=1}^{K} \mu_\beta \{\varphi_\alpha, \chi_\beta\} = 0,$$

$$\{\chi_\beta, H'\} \approx \{\chi_\beta, H_0\} + \sum_{\alpha=1}^{K} \lambda_\alpha \{\chi_\beta, \varphi_\alpha\} = 0,$$

что дает

$$\mu_\beta = 0,$$

$$\lambda_\alpha = -\sum_{\beta=1}^{K} \|\{\chi_\beta, \varphi_\alpha\}\|^{-1} \{\chi_\beta, H_0\}.$$

Это означает, что можно считать связи φ_α, χ_β равными нулю в сильном смысле, если одновременно изменить определение скобок Пуассона (ввести скобки Дирака):

$$\{f, g\} \to \{f, g\}_D = \{f, g\} - \sum_{\mu,\nu=1}^{2K} \{f, \psi_\mu\} \|\{\varphi_\mu, \psi_\nu\}\|^{-1} \{\varphi_\nu, g\},$$

где

$$\psi_\mu = \begin{cases} \varphi_\mu, & \mu = 1, \ldots, K, \\ \chi_{\mu-K}, & \mu = K+1, \ldots, 2K. \end{cases}$$

Уравнения движения тогда принимают вид

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_0\}_D, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H_0\}_D.$$

Покажем, как общий метод прилагается к случаю электродинамики. Первичной связью является

$$\pi^0 \approx 0,$$

плотность гамильтониана получаем из

$$\mathcal{H} = \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L} + \lambda \pi^0,$$

исключая скорости $\dot{A}_i$ согласно

$$\dot{A}_i = \pi^i + A_{0,i},$$

что дает

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\pi^i\pi^i+\frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}+\pi^iA_{0,i}+\lambda\pi^0.$$

Условие сохранения во времени первичной связи приводит к вторичной связи

$$\pi^i_{,i}\approx 0,$$

других вторичных связей не возникает, поскольку

$$\{\pi^i_{,i},\ H\}=0.$$

Скобка Пуассона определяется формулой

$$\{F,\ G\}=\int\left(\frac{\delta F}{\delta A_\mu}\frac{\delta G}{\delta\pi^\mu}-\frac{\delta F}{\delta\pi^\mu}\frac{\delta G}{\delta A_\mu}\right)d^3x.$$

Опуская дивергенцию, плотность гамильтониана можно записать в виде

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\pi^i\pi^i+\frac{1}{2}B^iB^i-A_0\pi^i_{,i}+\lambda\pi^0,$$

где $B^i=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}$, и видно, что A_0 играет роль лагранжева множителя. Естественно поэтому исключить $(A_0,\ \pi^0)$ из числа канонических переменных. Для этого наложим условие

$$A_0-\mu\approx 0,$$

где $\mu(x)$ — функция, т. е. скобки Пуассона ее всегда равны нулю. Тогда

$$\{A_0-\mu,\ H\}=\lambda,$$

т.е. необходимо принять $\lambda=0$ в гамильтониане

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}(\pi^i\pi^i+B^iB^i)-\mu\pi^i_{,i}.$$

Скобки Дирака получаются простым исключением варьирования по A_0, π^0 :

$$\{F,\ G\}_D=\int\left(\frac{\delta F}{\delta A_i}\frac{\delta G}{\delta\pi^i}-\frac{\delta F}{\delta\pi^i}\frac{\delta G}{\delta A_i}\right)d^3x.$$

Отметим, что в гамильтониане осталась связь I рода. Это позволяет наложить еще калибровку, например, кулоновскую, но для иллюстрации формализма нам достаточно изложенного выше.

2. ГЕОМЕТРИЯ ВЛОЖЕНИЙ И МНОГОВРЕМЕННОЙ ФОРМАЛИЗМ

Гамильтонов подход рассматривает любую теорию с точки зрения динамики, т. е. развития системы во времени. Общая координатная инвариантность требует произвола в уравнениях движения, и этот произвол характеризуется четырьмя функциями. Динамику, тесно связанную с геометрией, удобно описывать, опираясь на результаты геометрии гиперповерхностей в четырехмерном пространстве-времени.

Надо отметить, что в ОТО канонический формализм не сразу был построен в общековариантном виде и из этого даже пытались делать физические выводы [3]. Но благодаря работам Кухаржа [4] формализм для ОТО оказался в конце концов адекватным исходным принципам теории.

Рассмотрим гиперповерхность $\mathfrak{m}$ с координатной системой $\{x^a\}$ ($a = 1, 2, 3$) в четырехмерном многообразии $\mathfrak{M}$ с координатами $\{X^\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$:

$$X^\alpha = \mathrm{e}^\alpha (x^a).$$

Гиперповерхность сама по себе не изменяется при преобразованиях координат в $\mathfrak{m}$ или в $\mathfrak{M}$:

$$x'^b \to x^a = x^a (x'^\beta),$$
$$X'^\beta \to X^\alpha = X^\alpha (X'^\beta),$$

3-векторы в точке x гиперповерхности $\mathfrak{m}$ [векторы касательного пространства $T_x(\mathfrak{m})$] при вложении отображаются в 4-векторы в точке $X(x)$ многообразия $\mathfrak{M}$ [т.е. в векторы касательного пространства $T_{X(x)}(\mathfrak{M})$]. Например, величины

$$e_a^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^a}$$

являются векторами в $T_{X(x)}(\mathfrak{M})$ и ковекторами в $T_x(\mathfrak{m})$, так как закон их преобразования

$$e_{a'}^{\alpha'} = \frac{\partial X^{\alpha'}}{\partial X^\beta} \left(\frac{\partial X^\beta}{\partial x^b} \right) \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} = \frac{\partial X^{\alpha'}}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} e_b^\beta .$$

Если многообразие $\mathfrak{M}$ было римановым (в широком смысле, т. е. без требования положительности сигнатуры метрики) пространством с метрикой $g_{\mu\nu}$, то на гиперповерхности $\mathfrak{m}$ индуцируется метрика (первая фундаментальная форма)

$$\gamma_{ab}(x^c) = g_{\alpha\beta}(X^\mu (x^c))\, e_a^\alpha e_b^\beta.$$

Здесь нас будут интересовать пространственноподобные гиперповерхности в пространстве-времени, т. е. сигнатура γ_{ab}: $(+, +, +)$.

Используя γ_{ab} и $g_{\mu\nu}$, можно поднимать и опускать соответствующие индексы, например:

$$e_{\alpha a} = g_{\alpha\beta} e_a^\beta, \quad e^{\alpha a} = \gamma^{ab} e_b^\alpha, \quad e_\alpha^a = g_{\alpha\beta} e_b^\beta \gamma^{ab}.$$

Нормаль к гиперповерхности, очевидно, определяется из условий ортогональности к базису касательных к $\mathfrak{m}$ векторов $\{e_a^\alpha\}$:

$$n_\alpha e_a^\alpha = 0,$$

будем выбирать ее единичной,

$$g^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta = -1.$$

Четверка векторов $\{n^\alpha, e_a^\alpha\}$ может служить базисом для разложения тензоров из $\mathfrak{M}$, например,

$$\lambda^\alpha = \lambda^\perp n^\alpha + \lambda^a e_a^\alpha,$$

где

$$\lambda^\perp = -\lambda^\alpha n_\alpha; \ \lambda^a = \lambda^\alpha e_\alpha^a,$$

или

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\perp\perp} n_\alpha n_\beta + \lambda_{a\perp} e_\alpha^a n_\beta + \lambda_{\perp b} n_\alpha e_\beta^b + \lambda_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b,$$

где

$$\lambda_{\perp\perp} = \lambda_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta; \ \lambda_{a\perp} = -\lambda_{\alpha\beta} e_a^\alpha n^\beta;$$

$$\lambda_{\perp b} = -\lambda_{\alpha\beta} n^\alpha e_b^\beta; \ \lambda_{ab} = \lambda_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta.$$

Очевидно, знак (—) появляется там, где имеется нечетное число проекций на нормаль, символ $\perp$ может стоять и вверху, и внизу, а латинский индекс поднимается и опускается с помощью γ_{ab}. Для метрического тензора получаем

$$g_{\alpha\beta} = -n_\alpha n_\beta + \gamma_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b.$$

Из пространства $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{m}$ индуцируется аффинная связность (ковариантная производная): вектор λ^a из $T_x(\mathfrak{m})$ преобразуем в соответствующий вектор $T_{X(x)}(\mathfrak{M})$:

$$\lambda^a = \lambda^\alpha e_a^\alpha,$$

найдем ковариантную производную в $\mathfrak{M}$ и спроектируем тензор $\lambda^\alpha_{;\beta}$ на гиперповерхность, т. е.

$$\lambda^a_{|b} = (\lambda^c e_c^\alpha)_{;\beta}\, e_b^\beta e_\alpha^a,$$

где вертикальная черта обозначает индуцированную ковариантную производную. В интересующем нас случае связность в $\mathfrak{M}$ является римановой, т.е. отсутствует кручение, и метрика ковариантно постоянна. Тогда нетрудно показать, что индуцированная ковариантная производная также задает риманову связность γ^c_{ab}, и она определяется обычным образом через метрику γ_{ab}:

$$\gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}\gamma^{cd}(\gamma_{da,b} + \gamma_{db,a} - \gamma_{ab,d}).$$

Ковариантная производная вектора нормали $n_{\alpha;\beta} e_b^\beta$, взятая вдоль гиперповерхности, характеризует искривление этой гиперповерхности по отношению к объемлющему пространству $\mathfrak{M}$. Поскольку

$$n^\alpha n_\alpha = -1,$$

то

$$n^\alpha n_{\alpha;\beta} = 0,$$

и тензор внешней кривизны (вторая фундаментальная форма) задается в виде

$$K_{ab} = -n_{\alpha;\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}$$

или

$$K_{ab} = n_{\alpha}e^{\alpha}_{a;\beta}e^{\beta}_{b} \equiv n_{\alpha}e^{\alpha}_{a;b}.$$

Нетрудно проверить, что $K_{ab} = K_{ba}$. Можно также вывести соотношение Гаусса — Вейнгартена [5]

$$e^{\alpha}_{a;b} = -n^{\alpha}K_{ab} + e^{\alpha}_{c}\gamma^{c}_{ab}.$$

По определению тензора кривизны

$$\varphi_{\alpha;\beta\gamma} - \varphi_{\alpha;\gamma\beta} = R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}\varphi_{\delta}, \tag{3}$$

проектируя это равенство на гиперповерхность, получаем

$$\varphi_{a;bc} - \varphi_{a;cb} = R_{dabc}\varphi^{d} - R_{\perp abc}\varphi^{\perp}. \tag{4}$$

В левой части выразим проекции ковариантной производной объемлющего пространства $\mathfrak{M}$ через внутреннюю ковариантную производную в $\mathfrak{m}$ и тензор K_{ab}. Для этого заметим, что разница между $\varphi_{a;b}$ и $\varphi_{a|b}$ состоит в том, что в последнем случае нормальная составляющая вектора φ^{α} «отрезается» с самого начала, а в первом — параллельно переносится весь вектор и лишь после этого отрезаются нормальные компоненты:

$$\varphi_{a;b} = \varphi_{\alpha;\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} = (\varphi_{d}e^{d}_{\alpha} + \varphi_{\perp}n_{\alpha})_{;\beta}\,e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} =$$
$$= \varphi_{a|b} + \varphi_{\perp}n_{\alpha;\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} = \varphi_{a|b} - \varphi_{\perp}K_{ab}.$$

Аналогично получаем

$$\varphi_{ab;c} = \varphi_{ab|c} - \varphi_{\perp b}K_{ac} - \varphi_{a\perp}K_{bc},$$

что вместе с предыдущим равенством дает

$$\varphi_{a;bc} = \varphi_{a;b|c} - \varphi_{\perp;b}K_{ac} - \varphi_{a;\perp}K_{bc}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\varphi_{\perp;b} = \varphi_{\perp|b} - \varphi^{d}K_{db}.$$

Подставляя найденные формулы в (2), получаем

$$(\tilde{R}_{dabc} + K_{ac}K_{db} - K_{ab}K_{dc})\,\varphi^{d} +$$
$$+ (K_{ac|b} - K_{ab|c})\,\varphi^{\perp} = R_{dabc}\,\varphi^{d} - R_{\perp abc}\varphi^{\perp},$$

откуда следует в силу независимости $\varphi^{\perp}$ и φ^{d}:

$$R_{dabc} = \tilde{R}_{dabc} + K_{ac}K_{db} - K_{ab}K_{dc}, \tag{5}$$
$$R_{\perp abc} = K_{ab|c} - K_{ac|b}, \tag{6}$$

где $\tilde{R}_{dabc}$ — тензор Римана 3-геометрии в $\mathfrak{m}$. Это соотношения Гаусса — Петерсона — Кодацци [5]. Сворачивая их левые части с γ^{ab}, получаем, например,

$$\gamma^{ac}\gamma^{dd}R_{dabc} = R + 2R_{\perp\perp} \qquad 2G_{\perp\perp},$$

где

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R.$$

В результате из (5) и (6) можно выразить четыре компоненты $G_{\mu\nu}$:

$$2G_{\perp\perp} = \widetilde{R} + K^2 - \mathrm{Sp}\, K^2, \quad G_{\perp b} = K^a_{b|a} - K_{|b},$$
$$K = \gamma^{ab}K_{ab}, \quad \mathrm{Sp}\ K^2 = K_{ab}K^{ab},$$

что, в свою очередь, позволит выразить четыре независимые линейные комбинации уравнений ОТО через новые переменные γ_{ab}, K_{ab}.

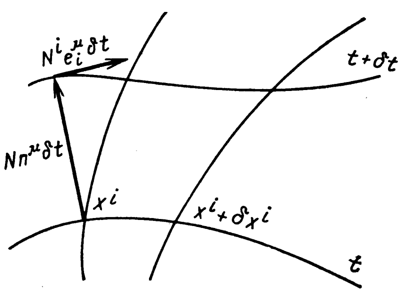
Выделение параметра времени t означает представление $\mathfrak{M}$ в виде однопараметрического семейства пространственноподобных гиперповерхностей

$$X^\alpha = e^\alpha(t,\ x^a).$$

Если такое семейство задано, то задано векторное поле

$$N^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial t} \equiv \dot{e}^\alpha$$

в пространстве-времени. Для бесконечно малого δt вектор $N^\alpha_{\delta t}$ соединяет точки с одинаковыми значениями внутренних координат $\{x^a\}$ на соседних гиперповерхностях t и $t + \delta t$ (рис. 1).



Компоненты разложения 4-вектора $N^\mu = \dot{e}^\mu$ по базису (n, e): N^i— функция смещения, N — вектор сдвига

Разложив N^α по базису $\{n^\alpha,\ e^\alpha_a\}$, получим

$$N^\alpha = Nn^\alpha + N^a e^\alpha_a, \quad N = -N^\alpha n_\alpha, \quad N^a = N^\alpha e^a_\alpha,$$

следуя Арновитту, Дезеру и Мизнеру [6], обычно называют N функцией смещения, N^a — вектором сдвига.

Дифференцирование тензоров по времени означает теперь ковариантное дифференцирование по направлению «векторного поля» N^α:

$$\dot{M}^\alpha \equiv \frac{\nabla}{\partial t} M^\alpha = M^\alpha_{;\beta}N^\beta = \frac{\partial M^\alpha}{\partial t} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}M^\beta N^\gamma.$$

Следует, однако, помнить, что другой выбор времени означает выбор другого векторного поля. Такое ковариантное дифференцирование определено для M^α, являющихся как истинными векторными полями, так и зависящими от выбора времени. Получим формулы, задающие изменение базиса $\{n^\alpha,\ e^\alpha_a\}$ при переходе к гиперповерхности $t + \delta t$.

Очевидно, n^α и e^α_a не являются обычными векторными полями в пространстве-времени, а связаны с выбором гиперповерхности. С помощью коэффициентов аффинной связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ перенесем параллельно векторы базиса из точки $\{x^a\}$ гиперповерхности $t+\delta t$ в точку $\{x^a\}$ гиперповерхности t, вычтем их, разделим δn^α, δe^α_a на δt и получим $\frac{\nabla n^\alpha}{\partial t}$ и $\frac{\nabla e^\alpha_a}{\partial t}$. Например:

$$\frac{\nabla e^\alpha_a}{\partial t}=N^\beta\left(e^\alpha_{a.\beta}+\Gamma^\alpha_{\beta\mu}e^\mu_a\right)=\frac{\partial^2X^\alpha}{\partial t\,\partial x^a}+\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial t}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^a}=$$
$$=N^\alpha_{;\mu}e^\mu_a=\frac{\nabla N^\alpha}{\partial x^a}=(N_{|a}-K_{ab}N^b)\,n^\alpha+(N^b_{|a}-NK^b_a)\,e^\alpha_b, \tag{7}$$

аналогично получается

$$\frac{\nabla n^\alpha}{\partial t}=(N_{|a}-K_{ab}N^b)\,e^{\alpha a}. \tag{8}$$

Индуцированная метрика γ_{ab}, в отличие от $g_{\mu\nu}$, не является ковариантно постоянной:

$$\frac{\nabla}{\partial t}\gamma_{ab}=g_{\alpha\beta}\frac{\nabla}{\partial t}(e^\alpha_ae^\beta_b)=N_{a|b}+N_{b|a}-2NK_{ab}; \tag{9}$$

$$\frac{\nabla}{\partial t}\sqrt{\gamma}=\sqrt{\gamma}\,(-KN+N^a_{|a}); \tag{10}$$

$$\frac{\nabla}{\partial t}\gamma^{ab}=-N^{a|b}-N^{b|a}+2NK^{ab}. \tag{11}$$

В отличие от обычной ковариантной производной по направлению векторного поля N_α в формулах (7) — (11) появляются производные от N и N^a.

Можно разделить нормальные δ_N и тангенциальные $\delta_{\tilde N}$ деформации базиса:

$$\delta_Nn^\alpha=N_{|a}e^{\alpha a},\quad \delta_{\tilde N}n^\alpha=-N^bK_{ab}e^{\alpha a},$$
$$\delta_Ne^\alpha_a=N_{|a}n^\alpha-NK^b_ae^\alpha_b,\quad \delta_{\tilde N}e^\alpha_a=-N^bK_{ab}n^\alpha+N^b_{|a}e^\alpha_b.$$

Для метрики

$$\delta_N\gamma_{ab}=-2NK_{ab},\quad \delta_{\tilde N}\gamma_{ab}=L_{\tilde N}\gamma_{ab},$$

где $L_{\tilde N}$—производная Ли.

Получим теперь формулы для ковариантных производных от проекций тензоров, например:

$$\delta_N\varphi_\perp=Nn^\alpha(-\varphi_\beta n^\beta)_{|\alpha}=-Nn^\alpha n^\beta\varphi_{\beta;\alpha}-\varphi_\beta\delta_Nn^\beta=-N\varphi_{\perp;\perp}-N_{|a}\varphi^a,$$

а также

$$\delta_N\varphi_a=-N\varphi_{a;\perp}-\varphi_\perp N_{|a}-NK^b_a\varphi_b.$$

Это позволяет выразить $\varphi_{\perp;\perp}$ и $\varphi_{a;\perp}$ через пространственную ковариантную производную и производную по нормальному направлению

$$\varphi_{\perp;\perp} N = -\delta_N \varphi_\perp - \varphi^a N_{|a}, \tag{12}$$

$$\varphi_{a;\perp} N = -\delta_N \varphi_a - \varphi_\perp N_{|a} - \varphi_b K^b_a N. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в справедливости формул

$$\varphi_{\perp\perp;\perp} N = -\delta_N \varphi_{\perp\perp} - \varphi^d{}_\perp N_{|d} - \varphi_\perp{}^d N_{|d}; \tag{14}$$

$$\varphi_{a\perp;\perp} N = -\delta_N \varphi_{a\perp} - K_{ad}\varphi^d{}_\perp N - \varphi_{\perp\perp} N_{|a} - \varphi_a{}^d N_{|d}; \tag{15}$$

$$\varphi_{\perp b;\perp} N = -\delta_N \varphi_{\perp b} - K_{bd}\varphi_\perp{}^d N - \varphi_{\perp\perp} N_{|b} - \varphi^d{}_b N_{|d}; \tag{16}$$

$$\varphi_{ab;\perp} N = -\delta_N \varphi_{ab} - K_{bd}\varphi_a{}^d N - K_{ad}\varphi^d{}_b N - \varphi_{a\perp} N_{|b} - \varphi_{\perp b} N_{|a}, \tag{17}$$

которые будут использоваться в дальнейшем.

В силу свойств тензора Римана, кроме найденных выше (5) и (6) компонент R_{dabc} и $R_{\perp abc}$, отличными от нуля и независимыми являются лишь $R_{a\perp b\perp}$. Как и раньше, из (3) получаем

$$\varphi^a R_{a\perp b\perp} = \varphi_{\perp;b\perp} - \varphi_{\perp;\perp b}.$$

Домножая на N и пользуясь формулами (12) — (17), можно получить в результате стандартных вычислений

$$N R_{a\perp b\perp} = \delta_N K_{ab} + N K^c_a K_{cb} + N_{|ab}.$$

Это позволяет выразить оставшиеся компоненты G_{ab}:

$$G_{ab} = R^d_{adb} - R^\perp_{a\perp b} - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\left(R^{cd}_{cd} - 2R^{\perp d}_{\perp d}\right),$$

и, подставляя сюда выражения для компонент тензора Римана, получаем

$$NG_{ab} = N\widetilde{G}_{ab} - (N_{|ab} - \gamma_{ab} N^{|c}_{|c}) - \delta_N (K_{ab} - \gamma_{ab} K) -$$
$$- N\left[\frac{1}{2}\gamma_{ab}(K^2 + \mathrm{Sp}\, K^2) - 3KK_{ab} + 2K^c_a K_{cb}\right], \tag{18}$$

где

$$\widetilde{G}_{ab} = \widetilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\widetilde{R};\quad \widetilde{R} = \gamma^{ab}\widetilde{R}_{ab};$$

$\widetilde{R}_{ab}$ — тензор Риччи внутренней геометрии гиперповерхности. Таким образом, все компоненты тензора Эйнштейна — $G_{\mu\nu}$ в базисе $\{n^\alpha, e^\alpha_a\}$ могут быть выражены через переменные гиперповерхности γ_{ab}, K_{ab}, производные от них по нормали δ_N (или по времени $\frac{\nabla}{\partial t} = \delta_{\widetilde{N}} = \delta_N + L_{\widetilde{N}}$), а также четыре функции N и N^a.

3. КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ОТО

При построении гамильтонова формализма ОТО были развиты методы и получены результаты, которые имеют значение не только для ОТО, но и для других теорий гравитации, что будет видно из последующих разделов.

Действие для гравитационного поля в ОТО

$$I=\int \sqrt{-g}\,R d^4x$$

можно переписать в удобном для канонического подхода виде, воспользовавшись результатами разд. 2. Будем считать, что пространство-время (или та его часть, которая нас интересует) представляется в виде однопараметрического семейства пространственноподобных гиперповерхностей

$$X^\alpha = e^\alpha(t,\ x^a),$$

тогда

$$\sqrt{-g}\,R=\sqrt{-g}\,(-2\gamma^{ab}R_{a\perp b\perp}+\gamma^{ab}\gamma^{cd}R_{cadb})=$$
$$=-2\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ab}\delta_N K_{ab}-2\sqrt{\gamma}\,N^{|a}_{|a}+\sqrt{\gamma}\,(\tilde{R}+K^2-3\operatorname{Sp}K^2).$$

Преобразуем первое слагаемое

$$-2\sqrt{\gamma}\,\gamma^{ab}\delta_N K_{ab}=\delta_N(-2\sqrt{\gamma}\,K)+2N\sqrt{\gamma}\,(2\operatorname{Sp}K^2-K^2)$$

и перейдем от производной по нормальному направлению δ_N к производной по времени $\delta_{\hat{N}}$:

$$\delta_N(-2\sqrt{\gamma}\,K)=\delta_{\hat{N}}(-2\sqrt{\gamma}\,K)-L_{\tilde{N}}(-2\sqrt{\gamma}\,K)=$$
$$=(-2\sqrt{\gamma}\,K)_{,0}+(2\sqrt{\gamma}\,N^aK)_{,a}.$$

Тогда действие I принимает вид

$$I=\int d^4x\,[N\sqrt{\gamma}\,(\tilde{R}-K^2+\operatorname{Sp}K^2)+$$
$$+(-2\sqrt{\gamma}\,K)_{,0}+(2\sqrt{\gamma}\,N^aK-2\sqrt{\gamma}\,N^{|a})_{,a}],$$

из которого видно, что за исключением первого все слагаемые в лагранжевой плотности являются поверхностными членами. Согласно обычному подходу существенная для динамики часть действия имеет вид

$$I'=\int N\sqrt{\gamma}\,(\tilde{R}-K^2+\operatorname{Sp}K^2)\,d^4x, \tag{19}$$

а полная производная по времени и пространственная дивергенция не дают вклада при получении уравнений движения. Кроме того, присутствие полной производной по времени можно понимать как присутствие вторых производных по времени от метрики γ_{ab}, что осложняет построение канонического формализма. В следующем разделе будет специально рассмотрен случай, когда трехмерные дивергенции играют существенную роль.

Итак, исходя из (19) определим импульсы, сопряженные переменным γ_{ij} (иногда вместо них выбирают $\gamma\gamma^{ij}$ [7]):

$$\pi^{ij}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma_{ij,0}}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K_{mn}}\frac{\partial K_{mn}}{\partial\gamma_{ij,0}}=-\sqrt{\gamma}\,(K^{ij}-\gamma^{ij}K).$$

Можно выразить через них скорости:

$$\dot{\gamma}_{il} = N_{i|j} + N_{j|i} + \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{ij} - \gamma_{ij} \frac{\pi}{2} \right).$$

Кроме γ_{ij} в лагранжеву плотность входят переменные N и N^a. Сопряженные к ним импульсы равны нулю, т.е. появляются первичные связи

$$\pi_\perp \approx 0, \quad \pi_a \approx 0.$$

Преобразование Лежандра с учетом первичных связей приводит к гамильтониану

$$H = \int d^3x \, (N\mathscr{H} + N^a \mathscr{H}_a + \lambda^\perp \pi_\perp + \lambda^a \pi_a)$$

с точностью до поверхностных интегралов. Здесь

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\gamma \tilde{R} + \frac{\pi^2}{2} - \operatorname{Sp} \pi^2 \right), \quad \mathscr{H}_a = -2\pi^b_{a|b}.$$

Сохранение первичных связей во времени требует наложения вторичных связей

$$\mathscr{H} \approx 0, \quad \mathscr{H}_a \approx 0.$$

С помощью стандартных скобок Пуассона

$$\{\gamma_{ij}(x), \ \pi^{kl}(y)\} = \frac{1}{2} (\delta^k_i \delta^l_j + \delta^l_i \delta^k_j)\, \delta(x, \ y);$$

$$\{N(x), \ \pi_\perp(y)\} = \delta(x, \ y);$$

$$\{N^a(x), \ \pi_b(y)\} = \delta^a_b \delta(x, \ y),$$

где остальные скобки равны нулю, запишем уравнения движения

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\gamma}_{ij} = \{\gamma_{ij}, \ H\} = N_{i|j} + N_{j|i} + \frac{2N}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi_{ij} - \gamma_{ij} \frac{\pi}{2} \right); \\
&\dot{\pi}^{ij} = \{\pi^{ij}, \ H\} = -N\sqrt{\gamma} \left(\tilde{R}^{ij} - \frac{1}{2} \gamma^{ij} \tilde{R} \right) + \\
&+ \sqrt{\gamma} (N^{|ij} - \gamma^{ij} N^{|m}_{|m}) + \frac{N}{\sqrt{\gamma}} (\pi \pi^{ij} - 2\pi^{ik} \pi^j_k) - \\
&- \frac{\gamma^{ij}}{2} \frac{N}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\pi^2}{2} - \operatorname{Sp} \pi^2 \right) + (\pi^{ij} N^m)_{|m} - \pi^{ik} N^j_{|k} - \pi^{kj} N^i_{|k}, \\
&\dot{N} = \lambda, \quad \dot{N}^a = \lambda^a, \quad \dot{\pi}_\perp = 0, \quad \dot{\pi}_a = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Поскольку динамика для переменных $(N, \pi_\perp)$, (N^a, π_a) тривиальна, то ясно, что N, N^a являются просто лагранжевыми множителями, служащими для включения связей H, H_a в гамильтониан

$$H = \int (N\mathscr{H} + N^a \mathscr{H}_a) \, d^3x, \tag{21}$$

исключение этих переменных производится так же, как в разд. 1, в результате скобки Пуассона будут иметь вид

$$\{F,\ G\}=\int\left(\frac{\delta F}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{ij}}-\frac{\delta F}{\delta\pi^{ij}}\frac{\delta G}{\delta\gamma_{ij}}\right)d^3x. \qquad (22)$$

Канонические уравнения для γ_{ij} и π^{ij}, как нетрудно проверить, эквивалентны шести лагранжевым уравнениям ОТО [см. (18)]. Остальные четыре лагранжевых уравнения эквивалентны связям. Заметим, что других связей в ОТО не возникает, поскольку имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\{\mathcal{H}_i(x),\ \mathcal{H}_k(y)\}=\mathcal{H}_i(y)\,\delta_{,k}(x,\ y)+\mathcal{H}_k(x)\,\delta_{,i}(x,\ y);\\&\{\mathcal{H}_i(x),\ \mathcal{H}(y)\}=\mathcal{H}(x)\,\delta_{,i}(x,\ y);\\&\{\mathcal{H}(x),\ \mathcal{H}(y)\}=[\gamma^{ik}(x)\,\mathcal{H}_k(x)+\gamma^{ik}(y)\,\mathcal{H}_k(y)]\,\delta_{,i}(x,\ y).\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

Все четыре связи, таким образом, являются связями I рода.

С точки зрения уравнений движения гамильтонов формализм ОТО эквивалентен лагранжеву формализму. Но преимущества гамильтонова подхода проявляются в следующем.

Во-первых, с его помощью решается проблема начальных условий (задача Коши). Задав на произвольной пространственноподобной гиперповерхности величины $\gamma_{ij}(x)$, $\pi^{ij}(x)$ с тем лишь условием, чтобы они удовлетворяли уравнениям связи, и задав четыре произвольные функции N, N^a от координат и времени, можно, решая уравнения, вычислить канонические переменные на другой заданной гиперповерхности.

Во-вторых, решается вопрос о числе степеней свободы гравитационного поля в ОТО. На 12 переменных γ_{ij}, π^{ij} наложено четыре связи I рода. Это позволяет наложить дополнительно четыре калибровочных условия и найти из условий их сохранения четыре лагранжевых множителя. Остается 12—4 (калибровки) — 4 (связи) = 4 независимые переменные или две степени свободы на точку пространства.

В-третьих, гамильтонов формализм есть первый шаг в направлении к каноническому квантованию.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ В ОТО

Особая роль гравитации в природе заключается в том, что гравитационные силы доминируют на больших расстояниях. Хотя существует и другая дальнодействующая сила — кулоновская, но электрические заряды обычно бывают взаимно скомпенсированы. В связи с этим понятие изолированной системы, которое свободно применяется во многих других областях физики, в гравитации ввести не так просто.

Моделью изолированной (или островной) системы в ОТО служит асимптотически плоское пространство-время. Однако в настоящее время имеется несколько различных определений этого понятия [8]. Представляет интерес и рассмотрение взаимодействия двух изолированных систем, хотя бы в рамках приближенных методов, но пока, насколько нам известно, этого никому не удавалось сделать достаточно последовательно.

В каноническом формализме ОТО при рассмотрении некомпактных пространственных геометрий (простейший пример — асимптотически плоское пространство-время) гамильтониан может отличаться от линейной комбинации связей (21) на поверхностные интегралы. Для их получения предлагались различные методы, но не все из них были корректными. Наше изложение будет основано на работе [9], представляющей собой развитие подхода Редже и Тейтельбойма [10].

Связи в гамильтоновом формализме ОТО являются генераторами бесконечно малых преобразований, например, H_k генерирует преобразование координат на гиперповерхности:

$$\left\{\gamma_{ij}(x),\ \int \lambda^k \mathcal{H}_k\, d^3y\right\} = \lambda_{i|j} + \lambda_{j|i},$$

$$\left\{\pi^{ij}(x),\ \int \lambda^k \mathcal{H}_k\, d^3y\right\} = (\pi^{ij}\lambda^k)_{|k} - \pi^{ik}\lambda^j_{|k} - \pi^{jk}\lambda^i_{|k}.$$

В то же время H является генератором перехода на новую гиперповерхность. Для гамильтониана из (23) можно получить соотношение

$$\{H(\lambda,\ \lambda^i),\ H(\beta,\ \beta^j)\} = H(\alpha,\ \alpha^k), \tag{24}$$

где

$$\alpha = \lambda^i \beta_{,i} - \beta^i \lambda_{,i};$$

$$\alpha^k = \gamma^{ki}(\lambda\beta_{,i} - \beta\lambda_{,i}) + \lambda^j \beta^k_{,j} - \beta^j \lambda^k_{,j}.$$

Для полноты изложения отметим, что поскольку в α^k входит, кроме параметров λ, β, λ^i, β^j, каноническая переменная $\gamma^{ik}(x)$, генерируемые гамильтонианом бесконечно малые преобразования не образуют алгебры группы в строгом математическом смысле. Обсуждение этого вопроса можно найти в [11]. В разд. 6 мы покажем, каким образом достигается реализация алгебры группы диффеоморфизмов в РТГ.

До сих пор здесь рассматривались генераторы преобразований, не затрагивающих границу области интегрирования, и их коммутаторы. При этом очевидно, что добавление к связям каких-либо дивергенциальных членов никак не сказывалось, т.е. генераторы были определены пока лишь с точностью до поверхностных интегралов. Перейдем теперь к случаю функций λ, λ^i, β, β^j, отличных от нуля на границе.

Определение скобок Пуассона (22) позволяет формально вычислить их вместе со всеми поверхностными членами исходя из еще не переопределенного генератора (21), точнее, из его вариационных производных (20):

$$\{H(\lambda,\ \lambda^i),\ H(\beta,\ \beta^j)\}_f = H(\alpha,\ \alpha^k) + \oint 2\pi^j_k\alpha^k\, dS_j +$$
$$+ \oint \mathscr{H}(\lambda\beta^j - \beta\lambda^j)\, dS_j - \oint \pi^{km}[(\beta_{k|m} + \beta_{m|k})\lambda^j - (\lambda_{k|m} + \lambda_{m|k})\beta^j]\, dS_j +$$
$$+ \oint 2\sqrt{\gamma}\, R^j_i(\lambda\beta^i - \beta\lambda^i)\, dS_j + \oint 2\sqrt{\gamma}\,(\gamma^{im}\gamma^{jn} - \gamma^{ij}\gamma^{mn}) \times$$
$$\times (\lambda_i\beta_{|mn} - \beta_i\lambda_{|mn})\, dS_j. \tag{25}$$

Символ f у скобок Пуассона должен напомнить о формальности их вычисления, поскольку левая часть (25) пока не определена в смысле вариационного принципа Редже — Тейтельбойма. В работе [10] было показано, что вариация гамильтониана (21) при варьировании канонических переменных имеет вид

$$\delta H = \int d^3x \left(\frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} + \frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}}\delta\pi^{ij}\right) -$$
$$- \oint \sqrt{\gamma}\,(\gamma^{ik}\gamma^{jl} - \gamma^{ij}\gamma^{kl})(N\delta\gamma_{ij|k} - N_{,k}\delta\gamma_{ij})\,\delta S_l -$$
$$- \oint [2N_k\delta\pi^{kl} + (2N^k\pi^{jl} - N^l\pi^{jk})\,\delta\gamma_{ik}]\, dS_l. \tag{26}$$

Приняв асимптотические условия на пространственной бесконечности

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_{ij} - \delta_{ij} \equiv \Phi_{ij} = O^+(r^{-1}) + O^-(r^{-2});\\ &\pi^{ij} = O^-(r^{-2}) + O^+(r^{-3});\\ &N = A_kx^k + a + O^-(1) + O^+(r^{-1});\\ &N^i = A^i_kx^k + a^i + O^-(1) + O^+(r^{-1}),\ A^i_k = A_{ik} = -A_{ki},\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

и требуя, чтобы вариация гамильтониана имела стандартный вид, т.е. не содержала поверхностных интегралов при всех $\delta\gamma_{ij}$, $\delta\pi^{ij}$, согласованных с (27), Редже и Тейтельбойм пришли к выводу о необходимости изменения гамильтониана на поверхностный член

$$H \to H + P^0a - P^ia^i + M^kA_k + \frac{1}{2}M^{ik}A_{ik}, \tag{28}$$

где

$$P^0 = \oint (\Phi_{ij,i} - \Phi_{ii,j})\, dS_j;\quad P^i = -\oint 2\pi^{ij}dS_j;$$
$$M^k = \oint [x^k(\Phi_{ij,i} - \Phi_{ii,j}) - \Phi_{kj} + \delta_{kj}\Phi_{ii}]\, dS_j;$$
$$M^{ik} = 2\oint (x^k\pi^{ij} - x^i\pi^{kj})\, dS_j.$$

Метод нахождения поверхностных членов в гамильтониане [9], который мы изложим здесь, позволяет использовать более общие граничные условия, чем (27), и, что более важно, сформулировать их независимым от выбора системы координат на гиперповерхности образом. Будем исходить из поверхностных интегралов в правой части (25) и искать такие условия на бесконечности, при которых эти поверхностные интегралы содержали бы только параметры α, α^k, а не какие-либо другие комбинации λ, β, λ^i, β^j. Тогда в правой части (23) мы получим новый генератор

$$H \to H + \oint,$$

для которого должно выполняться соотношение (24).

Для решения этой задачи нам придется ввести вдобавок к индуцированной метрике γ_{ij} нефизическую плоскую метрику h_{ij}, что вместе с требованием убывания инварианта внешней кривизны означает вынужденное введение метрики Минковского (биметризм) в ОТО. Как будет показано в разд. 7, в РТГ такая проблема не возникает, поскольку имеется физическое пространство Минковского. В ОТО, за исключением главной асимптотики, плоская метрика задается абсолютно произвольно.

Предположим, что на гиперповерхности можно ввести такую «фоновую» (нефизическую) плоскую метрику $h_{ij}(x)$, что имеет смысл разложение подынтегральных выражений в поверхностных членах (25) по степеням $\Phi_{ij} = \gamma_{ij} - h_{ij}$. При этом выберем параметры λ, β, λ^i, β^j, удовлетворяющие

$$\lambda_{i;j} + \lambda_{j;i} = 0 = \beta_{i;j} + \beta_{j;i}; \lambda_{;ij} = 0 = \beta_{;ij}, \tag{29}$$

т.е. возьмем проекции параметров алгебры Пуанкаре на гиперплоскость метрикой h_{ij}. В этом разделе точка с запятой обозначает ковариантную производную, связанную с h_{ij}. Жонглирование индексами также будем производить с помощью h_{ij}.

Тогда при подстановке разложения по степеням Φ_{ij} в поверхностные интегралы (25) оказывается, что члены нулевого по Φ_{ij}, π^{ij} порядка отсутствуют, а линейные имеют вид

$$\oint 2\pi^j_k \bar{\alpha}^k \, dS_j + \oint \sqrt{h}\,(h^{im}h^{jn} - h^{ij}h^{mn})\,(\Phi_{mn;i}\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{,i}\Phi_{mn})\, dS_j,$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^k$ вычисляются по формулам (24), но вместо $\gamma^{ik}(x)$ следует подставить $h^{ik}(x)$. Разумеется, для $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^k$ вновь выполняются условия (29). В результате мы видим, что линейный вклад в поверхностные интегралы (25) содержит только $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^k$, что и требуется для реализации алгебры Пуанкаре. В квадратичном порядке разложения, как и в полном выражении для поверхностных интегралов, не удается удовлетворить этому необходимому для существования алгебры требованию.

Можно, таким образом, сформулировать критерий реализации алгебры Пуанкаре в каноническом формализме ОТО для решений уравнений ОТО. Потребуем, чтобы пространство-время с евклидовой топологией и метрикой, удовлетворяющей уравнениям ОТО, содержало пространственноподобные гиперповерхности с начальными данными γ_{ij}, π^{ij}, такие, что на них можно задать фоновую плоскую метрику h_{ij}, удовлетворив при этом трем условиям:

1) внешняя кривизна гиперповерхностей стремится к нулю на пространственной бесконечности, причем существует $\mu > 0$, такое, что

$$\operatorname{Sp} K^2 \equiv \frac{1}{\gamma}\left(\operatorname{Sp}\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = O^+(r^{-3-\mu}) + O^-(r^{-4-\mu}); \tag{30}$$

2) поверхностные интегралы в (25) линеаризуются по $\Phi_{ij} = \gamma_{ij} - h_{ij}$ и π^{ij} при параметрах $\bar\lambda$, $\bar\beta$, $\bar\lambda^i$, $\bar\beta^j$, задающих бесконечно малые преобразования группы Пуанкаре, т. е.

$$\{H_0(\bar\lambda, \bar\lambda^i), H_0(\bar\beta, \bar\beta^j)\}_f = H_0(\bar\alpha, \alpha^k) + \\ + \oint 2\pi^{jk}\bar\alpha_j\, dS_k + \oint \sqrt{h}\,(h^{im}h^{jn} - h^{ij}h^{mn})(\Phi_{mn;i}\bar\alpha - \bar\alpha_{,i}\Phi_{mn})\, dS_j, \tag{31}$$

где

$$H_0(\bar\lambda, \bar\lambda^i) = \int (\bar\lambda\mathscr{H} + \bar\lambda^i\mathscr{H}_i)\, d^3x;$$

$$\bar\alpha^k = h^{ki}(\bar\lambda\bar\beta_{,i} - \bar\beta\bar\lambda_{,i}) + \bar\lambda^j\bar\beta^k_{,j} - \bar\beta^j\bar\lambda^k_{,j};$$

$$\alpha^k = \gamma^{ki}(\bar\lambda\bar\beta_{,i} - \bar\beta\bar\lambda_{,i}) + \bar\lambda^j\bar\beta^k_{,j} - \bar\beta^j\bar\lambda^k_{,j};$$

3) любые конечные преобразования из группы Пуанкаре, соответствующие движениям гиперплоскости с метрикой h_{ij} в пространстве Минковского, не должны приводить к нарушению условий 1) и 2) при неизменной фоновой метрике.

Для фазового пространства Γ^h требуется, чтобы оно содержало канонические переменные γ_{ij}, π^{ij} на гиперповерхностях с евклидовой топологией, при данном выборе фоновой плоской метрики h_{ij}, удовлетворяющие условиям 1) — 3), причем решение уравнений связи (например, [12], по теории возмущений) не должно выводить за пределы фазового пространства и вариации $\delta\Phi_{ij}$, $\delta\pi^{ij}$ в общем случае должны иметь ту же асимптотику, что и сами функции $\Phi_{ij} = \gamma_{ij} - h_{ij}$, π^{ij}.

Поскольку явный вид h_{ij} в определении фазового пространства Γ^h не фиксируется, а все условия формулируются независимо от выбора системы координат, фазовые пространства Γ^h, соответствующие различным плоским метрикам h_{ij}, эквивалентны с точностью до преобразования координат на гиперповерхности. Поэтому в широком смысле можно понимать под фазовым пространством Γ всю совокупность Γ^h. Будем говорить, что гиперповерхность с данными γ_{ij}, π^{ij} принадлежит фазовому пространству, если существует плоская метрика h_{ij}, такая, что γ_{ij}, π^{ij} принадлежит Γ^h. Это свойство принадлежности Γ может, по нашему мнению, использоваться в качестве определения асимптотически плоского пространства-времени в ОТО.

Можно показать, что данный критерий асимптотической плоскостности пространства-времени приводит к нескольким следствиям.

1. На фазовом пространстве Γ^h переопределенные генераторы

$$H^h(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i) = H_0(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i) + \oint 2\pi^{jk}\bar{\lambda}_k dS_j +$$
$$+ \oint \sqrt{h}\,(h^{im}h^{jn} - h^{ij}h^{mn})\,(\Phi_{mn;i}\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_{,i}\Phi_{mn})\,dS_j \qquad (32)$$

удовлетворяют вариационному принципу Редже — Тейтельбойма [10] и поэтому формальную запись скобок Пуассона в (31) можно заменить обычной:

$$\{H_0(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i),\ H_0(\bar{\beta}, \bar{\beta}^j)\}_f = \{H^h(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i),\ H^h(\bar{\beta}, \bar{\beta}^j)\} \approx H^h(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^k),$$

где последнее равенство выполняется в слабом смысле.

2. На фазовом пространстве реализуется более обширная группа G, имеющая структуру полупрямого произведения $G = G_0 \circledS G_P$, где G_P — группа Пуанкаре, а G_0 — группа преобразований, не проявляющихся в поверхностных интегралах.

3. Замена фоновой метрики h_{ij} на любую другую плоскую фоновую метрику $\tilde{h}_{ij}$, которая может быть получена преобразованием пространственных координат из группы G_0 при неизменных γ_{ij}, π^{ij}, не изменяет численных значений генераторов на решениях уравнений связи. В то же время изменение метрики путем преобразования пространственных координат не принадлежащего G_0 приводит к выходу за пределы фазового пространства.

Поскольку все поверхностные интегралы в (25) явно инвариантны при заменах пространственных координат, то доказательства всех приведенных выше утверждений можно проводить в любой системе координат. Наиболее просто это сделать в декартовых координатах. Поверхностные члены в (32) сводятся к известным из работы [10] выражениям (26). Гамильтониан (32) можно переписать в виде

$$H^h(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i) = \int [\bar{\lambda}(\mathscr{H} - \mathscr{H}^L) + \lambda^i(\mathscr{H}_i - \mathscr{H}_i^L)]\,d^3x.$$

Предполагая возможность разного порядка убывания для четных и нечетных функций, а также считая, что каждое дифференцирование понижает порядок на r^{-1} («координатные волны» исключаются) и меняет четность, получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{ij} \equiv \gamma_{ij} - \delta_{ij} = O^+(r^{-\varepsilon}) + O^-(r^{-\delta});\\
&\pi^{ij} = O^-(r^{-1-\varepsilon}) + O^+(r^{-1-\delta});\\
&\mathscr{H} - \mathscr{H}^L = O^+(r^{-2-2\varepsilon}) + O^+(r^{-2-2\delta}) + O^-(r^{-2-\varepsilon-\delta}) = \mathscr{H}_i - \mathscr{H}_i^L.
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Интеграл для H^h сходится при $\varepsilon > 1/2$, $\delta > 1/2$, $\varepsilon + \delta > 2$. Требование включения в фазовое пространство решений уравнений связи дает условие $\varepsilon \leqslant 1$, требование пуанкаре-инвариантности granичных условий: $|\varepsilon - \delta| \leqslant 1$. Объединяя все эти условия, получаем

$$\frac{1}{2} < \varepsilon \leqslant 1, \quad 2 - \varepsilon < \delta \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{34}$$

Оказывается, что эти же самые условия требуются и для сходимости интеграла симплектической формы, рассмотренного в [12], где предлагается частный выбор параметров $\varepsilon = 1$, $\delta > 1$. Отметим также, что конечность гамильтониана может достигаться и при $\varepsilon = 1/2$, если асимптотически главные члены возникают за счет преобразования координат, но преобразования Лоренца приводят в результате к «слишком искривленной» гиперповерхности, т. е. нарушается условие (30).

В то же время граничные условия, используемые в обзоре [13], $\varepsilon = \delta = 1$, не обеспечивают сходимости ни генератора (32), ни симплектической формы. С другой стороны, эти условия запрещают вполне допустимый, с нашей точки зрения, выбор параметров с $1/2 < \varepsilon < 1$. В тех работах [14], где рассматриваются только генераторы трансляций, оказывается возможным принять $\varepsilon = \delta > \frac{1}{2}$.

Нетрудно убедиться, что найденные условия (33), (34) обеспечивают линеаризацию поверхностных интегралов в (25) и, таким образом, эквивалентны нашему определению фазового пространства при выборе фоновой метрики в декартовых координатах.

После этого следствия 1) — 3) нетрудно доказать, как это было сделано в [9].

5. КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ РТГ

Исходя из известных [1] уравнений РТГ, покажем, как строится гамильтонов формализм для этой теории, следуя [15]. Построение требует, с нашей точки зрения, квадратичного включения связей в лагранжиан, поскольку линейное включение приводит к трудностям. В итоге мы получим гамильтониан как линейную комбинацию восьми связей I рода.

Коренное отличие РТГ от ОТО состоит в том, что эта теория построена на основе пространства-времени Минковского, а риманова геометрия возникает здесь эффективно, в результате действия физических гравитационных полей. В теории имеются, таким образом, две метрики: $h_{\mu\nu}$ — метрика пространства Минковского и $g_{\mu\nu}$ — метрика эффективного риманова пространства. Интервалы между двумя одними и теми же событиями $ds^2_{(1)} = h_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ и $ds^2_{(2)} = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ могут, в принципе, иметь разные знаки. Это означает, что пространственноподобная в метрике $h_{\mu\nu}$ гиперповерхность может не являться таковой в метрике $g_{\mu\nu}$. Мы будем предполагать, что все же существуют гиперповерхности, пространственноподобные по отношению к обеим метрикам. На них и будет строиться гамильтонов формализм.

Как сказано в разд. 2, для (3 + 1)-разложения тензоров необходимо воспользоваться базисом $\{n^\alpha, e^\alpha_a\}$, связанным с выбранной гиперповерхностью. Для двух метрик $h_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$ имеем два различных базиса:

$$\{n^\alpha, e^\alpha_a\}; \ \{\bar{n}^\alpha, \bar{e}^\alpha_a\};$$

$$h_{\alpha\beta} n^\alpha e^\beta_a = 0; \ g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{e}^\beta_a = 0;$$

$$h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1; \ g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta = -1,$$

между которыми можно установить соотношения

$$e^\alpha_a = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^a} = \bar{e}^\alpha_a, \quad \bar{n}^\alpha = \sqrt{-g^{\perp\perp}}\, n^\alpha - \frac{g^{a\perp}}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}} e^\alpha_a.$$

Тогда, например, компоненты $N^\alpha = \partial X^\alpha/\partial t$ в разных базисах будут связаны формулами

$$\bar{N} = -\frac{N}{f_{\perp\perp}} \sqrt{\frac{\gamma}{h}}, \quad \bar{N}^a = N^a - N \frac{f^{\perp a}}{f^{\perp\perp}},$$

где $f^{\mu\nu} = \sqrt{\frac{-g}{-{}^{(4)}h}}\, g^{\mu\nu}$; $\qquad \sqrt{-{}^{(4)}h} = \sqrt{-\det|h_{\mu\nu}|}$; $\qquad \sqrt{h} = \sqrt{\det|h_{ij}|}$. Поскольку исходным в РТГ является пространство Минковского, будем пользоваться в основном базисом $\{n^\alpha, e^\alpha_a\}$, хотя изучение динамики с точки зрения эффективного риманова пространства также допустимо.

Лагранжеву плотность РТГ [1] предлагалось выбрать в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} (\Delta\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \Delta\Gamma^\gamma_{\beta\delta} - \Delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Delta\Gamma^\delta_{\gamma\delta}) + \lambda_\mu (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})_{;\nu} + \mathcal{L}_M. \quad (35)$$

Проведенный там анализ показал, что такой выбор приводит к уравнениям РТГ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}; \quad (36а)$$

$$(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu})_{;\nu} = 0, \quad (36б)$$

где точка с запятой означает ковариантную производную, определенную метрикой $h_{\mu\nu}$, и

$$\Delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \equiv \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (g_{\delta\alpha;\beta} + g_{\delta\beta;\alpha} - g_{\alpha\beta;\delta}).$$

Можно попытаться построить гамильтониан, исходя из (35). Для этого нужно выполнить (3 + 1)-разложения тензорных величин, входящих в $\mathcal{L}$, выбрать исходные переменные и найти сопряженные к ним импульсы.

Однако, если действовать «в лоб», не пользуясь подсказками римановой геометрии вложений, вычисления оказываются непомерно длинными. Это проявляется уже в ОТО при использовании сходного лагранжиана. Поэтому следует сначала привести $\mathscr{L}$ к наиболее простому с точки зрения геометрии виду:

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\,R + \lambda_\mu (\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})_{;\nu} + \mathscr{L}_M - \\ - (\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\Delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \sqrt{-g}\,g^{\mu\alpha}\Delta\Gamma^\beta_{\mu\beta})_{;\alpha},$$

где последнее слагаемое является 4-дивергенцией и интеграл от него сводится к поверхностному.

Теперь можно воспользоваться формулой для (3 + 1)-разложения величины $\sqrt{-g}R$, полученной в разд. 3 на основе базиса $\{\overline{n}^\alpha, \overline{e}^\alpha_a\}$, связанного с $g_{\mu\nu}$:

$$\mathscr{L} = \overline{N}\sqrt{\gamma}\,(\widetilde{R} - \overline{K}^2 + \mathrm{Sp}\,\overline{K}^2) + \lambda_\mu (\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})_{;\nu} + \mathscr{L}_M + (-2\sqrt{\gamma}\overline{K})_{,0} + \\ + (2\sqrt{\gamma}\,\overline{N}^a\overline{K} - 2\sqrt{\gamma}\overline{N}_{,b}\gamma^{ab})_{,a} - (\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\Delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \sqrt{-g}\,g^{\mu\alpha}\Delta\Gamma^\beta_{\mu\beta})_{,\alpha}.$$

Здесь в первой строке стоят существенные для динамики слагаемые, а ниже — поверхностные члены, которые можно игнорировать.

Выполним (3 + 1)-разложение второго слагаемого в $\mathscr{L}$. Воспользуемся известными формулами

$$\sqrt{-{}^{(4)}h} = N\sqrt{h},$$

$$\lambda_\mu f^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \lambda_\perp f_{\perp\perp;\perp} - \lambda_a f^{a\perp}{}_{;\perp} - \lambda_\perp f^{\perp a}{}_{;a} + \lambda_a f^{ab}{}_{;b},$$

а также формулами (14) — (17) и получим

$$\sqrt{-{}^{(4)}h}\,\lambda_\mu f^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \sqrt{h}\,[\lambda_\perp(-f_{\perp\perp,0} + f_{\perp\perp|a}N^a - 2f^{\perp a}N_{,a} - Nf^{\perp a}{}_{|a} + \\ + NKf_{\perp\perp} + NK_{ab}f^{ab}) + \lambda^a(f_{\perp a,0} - f_{\perp a|b}N^b - f_{\perp b}N^b{}_{|a} + f^d_a N_{,d} + \\ + f_{\perp\perp}N_{,a} + Nf^b_{a|b} - NKf_{\perp a})] \equiv \\ \equiv \sqrt{h}\,[-\lambda_\perp(f_{\perp\perp,0} + \chi_\perp) + \lambda^a(f_{\perp a,0} + \chi_a)].$$

Отсюда видно, что в этом члене появляются производные по времени только от $f_{\perp\perp}$, $f_{\perp a}$.

В разд. 3 было показано, что обычный выбор переменных в ОТО — индуцированная метрика γ_{ij} (или $\gamma\gamma^{ij}$) и сопряженные импульсы $\pi^{ij} = -\sqrt{\gamma}\,(\overline{K}^{ij} - \gamma^{ij}\overline{K})$, а $\overline{N}$, $\overline{N}^a$ оказываются лагранжевыми множителями. Канонические импульсы не изменяются при добавлении лагранжиана материи $\mathscr{L}_M$, если в него не входят производные от метрики, т.е. взаимодействие с гравитацией минимально. Естественно поэтому в РТГ сохранить в качестве канонических координат γ_{ij} (тогда для сопряженных импульсов получатся старые формулы), дополнив их переменными $f_{\perp\perp}$, $f_{\perp a}$. Оставшиеся величины f^{ab} удается выразить через независимые переменные

$$f^{ab} = \frac{f^{\perp a}f^{\perp b} - \dfrac{\gamma\gamma^{ab}}{h}}{f_{\perp\perp}}.$$

Отметим, что производные по времени от γ_{ij}, $f_{\perp\perp}$, $f_{\perp a}$ определяются согласно результатам разд. 2 как ковариантные производные по направлению N^α:

$$\delta_{\hat{N}}\gamma_{ij} = \gamma_{ij,0},$$

однако

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu}e^\mu_i e^\nu_j,$$

так же как $f_{\perp\perp}$, $f_{\perp a}$ являются скалярами по отношению к преобразованиям 4-координат $\{X^\alpha\}$, и поэтому их ковариантные производные совпадают с обычными, а следовательно, не зависят от выбора метрики $h_{\mu\nu}$ или $g_{\mu\nu}$.

Однако при выборе $\mathscr{L}$ в виде (35) возникают трудности при переходе к гамильтонову формализму, поскольку для сопряженных импульсов получаем (здесь удобно изменить обозначения $\sqrt{h}\lambda^\perp \to \lambda^\perp$, $\sqrt{h}\lambda^a \to \lambda^a$)

$$\pi^\perp = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial f_{\perp\perp,0}} = -\lambda^\perp, \quad \pi^a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial f_{\perp a,0}} = \lambda^a.$$

Это означает появление первичных связей

$$\pi^\perp + \lambda^\perp \approx 0, \quad \pi^a - \lambda^a \approx 0, \tag{37}$$

в которые входят лагранжевы множители $\lambda^\perp$, λ^a, т.е. их нельзя понимать как связи на канонические переменные, для которых применим метод Дирака.

Можно попытаться считать $\lambda_\perp$ и λ^a также каноническими переменными, а не лагранжевыми множителями. Тогда, кроме связей (37), появятся новые связи

$$\Pi_\perp \approx 0, \quad \Pi_a \approx 0, \tag{38}$$

где $\Pi_\perp$, Π_a — импульсы, сопряженные $\lambda^\perp$, λ^a.

Выполняя преобразование Лежандра и добавляя первичные связи (37), (38) с произвольными множителями, получаем гамильтониан

$$H = \int d^3x\,[\overline{N}\overline{\mathscr{H}} + \overline{N}^a\overline{\mathscr{H}}_a + \lambda_\perp\chi_\perp - \lambda^a\chi_a +$$
$$+ \mu_\perp(\pi^\perp + \lambda^\perp) + \mu_a(\pi^a - \lambda^a) + \nu^\perp\Pi_\perp + \nu^a\Pi_a]$$

с точностью до поверхностных членов.

Проверяя связи на сохранение по времени, получаем условия

$$\dot{\Pi}_\perp = -(\mu_\perp + \chi_\perp) \approx 0;$$
$$\dot{\Pi}_a = \mu_a + \chi_a \approx 0;$$
$$(\pi^\perp + \lambda^\perp)_{,0} = \nu^\perp - \frac{\delta H}{\delta f_{\perp\perp}} \approx 0;$$
$$(\pi^a - \lambda^a)_{,0} = -\nu^a - \frac{\delta H}{\delta f_{\perp a}} \approx 0,$$

из которых находим лагранжевы множители и подставляем в гамильтониан. Переменные $\lambda^{\perp}$, λ^a, $\Pi_{\perp}$, Π_a можно исключить из рассмотрения, при этом скобки Пуассона

$$\{F, G\} = \int \left[\frac{\delta F}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta f_{\perp\perp}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{\perp}} + \frac{\delta F}{\delta f_{\perp a}}\frac{\delta G}{\delta\pi^{a}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta F}{\delta\lambda^{\perp}}\frac{\delta G}{\delta\Pi_{\perp}} + \frac{\delta F}{\delta\lambda^{a}}\frac{\delta G}{\delta\Pi_{a}} - (F \leftrightarrow G)\right] d^3x$$

переопределяются тривиальным образом. Получаем

$$H = \int d^3x\, (\overline{N}\overline{\mathscr{H}} + \overline{N}^a\overline{\mathscr{H}}_a - \pi_{\perp}\chi_{\perp} - \pi^a\chi_a),$$

или с точностью до поверхностных членов

$$H = \int (N\mathscr{H} + N^a\mathscr{H}_a)\, d^3x, \tag{39}$$

где

$$\mathscr{H} = -\frac{1}{f_{\perp\perp}}\sqrt{\frac{\gamma}{h}}\,\overline{\mathscr{H}} - \frac{f^{\perp a}}{f_{\perp\perp}}\overline{\mathscr{H}}_a + (f_{|a}^{\perp a} + Kf_{\perp\perp} + K_{ab}f^{ab})\,\pi^{\perp} +$$
$$+ 2f^{\perp a}\pi_{\perp|a} + (f_{\perp\perp|a} + Kf_{\perp a})\,\pi^a + f_{\perp\perp}\pi^a{}_{|a} + f^{ab}\pi_{a|b};$$
$$\mathscr{H}_a = \overline{\mathscr{H}}_a + f_{\perp\perp|a}\pi^{\perp} + (f_{\perp b|a} - f_{\perp a|b})\,\pi^b - f_{\perp a}\pi^b{}_{|b}.$$

Однако полученный в результате гамильтонов формализм не содержит связей

$$\overline{\mathscr{H}} \approx 0,\ \overline{\mathscr{H}}_a \approx 0,$$

которые следуют из уравнений (36а), и, следовательно, содержит нефизические степени свободы. Аналогичная ситуация рассматривалась в работе [16], где было предложено для компенсации лишних степеней свободы ввести антикоммутирующие переменные.

Другой способ избежать неприятностей заключается в том, чтобы включить условия гармоничности в лагранжиан квадратичным образом, в виде члена

$$-\frac{1}{2}\frac{\lambda_{\mu\nu}}{\sqrt{-h}}(\sqrt{-g}\,g^{\mu\alpha})_{;\alpha}(\sqrt{-g}\,g^{\nu\beta})_{;\beta}.$$

Этот подход и будет здесь рассмотрен. Он аналогичен тому, как учитывают условие Лоренца в электродинамике [17].

Калибровка Лоренца

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0 \quad \text{или} \quad -\dot{A}_0 + A_{i,i} = 0$$

неудобна для стандартного дираковского подхода. В разд. 1 мы видели, что A_0 является скорее лагранжевым множителем, чем канонической переменной. Поэтому возьмем лагранжеву плотность в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{2} (A^{\mu}_{,\mu})^2.$$

Сопряженные импульсы к переменным A_μ:

$$\pi^0 = \lambda (\dot{A}_0 - A_{i,i}), \quad \pi^i = \dot{A}_i - A_{0,i},$$

а сопряженный к λ импульс π_λ, очевидно, равен нулю:

$$\pi_\lambda = 0.$$

Это и будет первичная связь. Гамильтониан имеет вид

$$H = \int d^3x\, (\pi^i \dot{A}_i + \pi^0 \dot{A}_0 - \mathcal{L} + \mu\pi_\lambda) =$$

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\pi^i\pi^i + B^iB^i) + \pi^i A_{0,i} + \pi^0 A_{ii} + \frac{(\pi^0)^2}{2\lambda} + \mu\pi_\lambda\right].$$

Ищем вторичные связи

$$\dot{\pi}_\lambda = \{\pi_\lambda,\ H\} = \frac{(\pi^0)^2}{2\lambda^2} = 0 \Rightarrow \pi^0 \approx 0.$$

Далее

$$\dot{\pi}^0 = \{\pi^0,\ H\} = \pi^i{}_{,i} \approx 0,$$

получаем еще одну вторичную связь, и на этом процесс обрывается. После этого можно исключить переменные (λ, π_λ), наложив, например, условие $\lambda - 1 \approx 0$, тогда с точностью до дивергенций

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\pi^i\pi^i + B^iB^i + (\pi^0)^2] - A_0\pi^i_{,i} + A^i_{,i}\pi^0.$$

Но квадратичный по связи член $(\pi^0)^2$ равен нулю «в сильном смысле», так как не дает вклада в скобки Пуассона, поэтому его можно опустить. В результате

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\pi^i\pi^i + B^iB^i) - A_0\pi^i_{,i} + A^i_{,i}\pi^0.$$

Отличие от стандартного дираковского подхода проявляется в том, что здесь нельзя добавлять к гамильтониану вторичные связи с произвольными множителями, поскольку это нарушало бы условие Лоренца. Эти свойства «неэффективных» связей хорошо известны [18].

В РТГ при выборе $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} (\Delta\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\Delta\Gamma^\gamma_{\beta\delta} - \Delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Delta\Gamma^\delta_{\gamma\delta}) -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\mu\nu}}{\sqrt{-h}} (\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha})_{;\alpha} (\sqrt{-g}\, g^{\nu\beta})_{;\beta} + \mathcal{L}_M$$

сопряженные к γ_{ij}, $f_{\perp\perp}$, $f_{\perp a}$ импульсы взаимно однозначно связаны со скоростями:

$$\pi^{ij} = -\sqrt{\gamma}\,(\overline{K}^{ij} - \gamma^{ij}\overline{K});$$

$$\pi^{\perp} = \frac{\sqrt{-h}}{N}\,[(f_{\perp\perp;\perp} - f_{;b}^{\perp b})\,\lambda_{\perp\perp} + \lambda_{\perp a}(-f_{;\perp}^{\perp a} + f_{;b}^{ab})];$$

$$\pi^{a} = h^{ab}\,\frac{\sqrt{-h}}{N}\,[\lambda_{\perp b}(-f_{\perp\perp;\perp} + f_{;c}^{\perp c}) + \lambda_{bc}(f_{;\perp}^{\perp c} - f_{;d}^{cd})],$$

и соответственно

$$\gamma_{ij,0} = \overline{N}_{i\downarrow j} + \overline{N}_{j\downarrow i} + \frac{2\overline{N}}{\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij} - \gamma_{ij}\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f_{\perp\perp,0} = -\chi_{\perp} - \frac{N^2}{\lambda_{\perp\perp}\sqrt{-h}}\,[\pi^{\perp} - \lambda_{\perp b}B^{bc}(\lambda_{\perp c}\pi_{\perp} + \lambda_{\perp\perp}\pi_{c})];$$

$$f_{\perp a,0} = -\chi_{a} + \frac{N^2}{\sqrt{-h}}\,B_a^c(\lambda_{\perp c}\pi_{\perp} + \lambda_{\perp\perp}\pi_{c}),$$

где B^{bc} — матрица, обратная к $A_{ab} = \lambda_{\perp a}\lambda_{\perp b} - \lambda_{\perp\perp}\lambda_{ab}$, невырожденность которой мы предполагаем. Символ $\downarrow$ обозначает ковариантную производную на гиперповерхности, связанную с γ_{ab}, в отличие от вертикальной черты, обозначающей то же для h_{ab}. Ясно, что $\lambda_{\perp\perp}$, $\lambda_{\perp a}$, λ_{ab} используются в качестве лагранжевых множителей, но удобно сначала считать их каноническими переменными, тогда появляются первичные связи

$$\Pi^{\perp\perp} \approx 0, \quad \Pi^{\perp a} \approx 0, \quad \Pi^{ab} \approx 0,$$

которые нужно с произвольными множителями добавить к гамильтоновой плотности:

$$H = \int d^3x\,\Big\{N\Big(-\frac{1}{f_{\perp\perp}}\sqrt{\frac{\gamma}{h}}\,\overline{\mathscr{H}} - \frac{f^{\perp a}}{f_{\perp\perp}}\overline{\mathscr{H}}_a\Big) +$$
$$+ N^a\overline{\mathscr{H}}_a - \chi_{\perp}\pi^{\perp} - \chi_a\pi^a - \frac{N}{2\lambda_{\perp\perp}\sqrt{h}}\,[(\pi^{\perp})^2 -$$
$$-B^{ab}(\lambda_{\perp a}\pi_{\perp} + \lambda_{\perp\perp}\pi_a)(\lambda_{\perp b}\pi_{\perp} + \lambda_{\perp\perp}\pi_b)] + \alpha_{\perp\perp}\Pi^{\perp\perp} + \alpha_{\perp a}\Pi^{\perp a} + \alpha_{ab}\Pi^{ab}\Big\}.$$

Проверка первичных связей на сохранение во времени приводит к вторичным связям

$$\pi^{\perp} \approx 0, \quad \pi^{a} \approx 0,$$

в свою очередь, для их сохранения необходимо

$$\overline{\mathscr{H}} \approx 0, \quad \overline{\mathscr{H}}_a \approx 0,$$

на этом процедура отыскания новых связей обрывается. В отличие от обычного дираковского подхода мы не можем добавлять вторичные связи с произвольными множителями к гамильтониану — это нарушило бы условие гармоничности. Ясно, что квадратичные по связям члены в гамильтониане не скажутся на уравнениях движения, и их роль заключается лишь в последовательном учете всех связей, после этого их можно опустить. Аналогично рассмотренным ранее примерам исключаются переменные $\lambda_{\mu\nu}$, $\Pi^{\mu\nu}$, уравнения движения для которых тривиальны:

$$\dot{\Pi}^{\mu\nu}=0,\;\; \dot{\lambda}_{\mu\nu}=\alpha_{\mu\nu}.$$

Мы приходим к тому же самому виду гамильтониана, что и в (39), но теперь получены и все уравнения связи:

$$H=\int (N\mathscr{H}+N^a\mathscr{H}_a)\,d^3x,$$

$$\overline{\mathscr{H}}\approx 0,\;\; \overline{\mathscr{H}}_a\approx 0,\;\; \pi_\perp\approx 0,\;\; \pi^a\approx 0.$$

Канонические уравнения имеют вид

$$\dot{f}_{\perp\perp}=\{f_{\perp\perp},\, H\}=-\chi_\perp,\;\; \dot{\gamma}_{ij}=\{\gamma_{ij},\, H\},$$

$$\dot{f}_{\perp a}=\{f_{\perp a},\, H\}=-\chi_a,\;\; \dot{\pi}^{ij}=\{\pi^{ij},\, H\},$$

причем уравнение для γ_{ij}, π^{ij} совпадают с полученными в ОТО (20), надо только заменить $N\to\overline{N}$, $N^a\to\overline{N}^a$, $\mid\;\to\;\downarrow$, чтобы привести обозначения в соответствие с обозначениями этого раздела.

Таким образом, мы построили гамильтонов формализм РТГ, содержащий восемь связей I рода, четыре из которых совпадают с известными связями ОТО, а другие четыре связаны с условиями гармоничности.

6. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГЕБРЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В РТГ

В этом разделе мы используем метод реализации алгебры диффеоморфизмов в параметризованных теориях поля [19] для демонстрации общековариантной инвариантности канонического формализма РТГ.

В гамильтониане (39) величины N, N^a должны быть заданными функциями пространственно-временных координат. Многовременной формализм, идея которого изложена в разд. 2 и применение к ОТО — в разд. 3, требует произвольности этих функций. Для этого в параметризованных теориях поля [4] (т.е. обладающих координатной инвариантностью и фиксированной геометрией пространства-времени) вводятся новые канонические переменные $X^\alpha=e^\alpha\,(x^\alpha)$ и сопряженные импульсы $p_\alpha\,(x^a)$:

$$\{e^\alpha(x),\;p_\beta(y)\}=\delta^\alpha_\beta\delta\,(x,\,y).$$

Действие РТГ имело у нас вид

$$\gamma=\int d^4x\,(\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij}+\pi^{\perp}\dot{f}_{\perp\perp}+\pi^a\dot{f}_{\perp a}-N\mathscr{H}-N^a\mathscr{H}_a),$$

где

$$N=-N^{\alpha}n_{\alpha}=-\dot{e}^{\alpha}n_{\alpha},\quad N^a=N^{\alpha}e^a_{\alpha}=\dot{e}^{\alpha}e^a_{\alpha}.$$

Тогда

$$p_{\alpha}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{e}^{\alpha}}=n_{\alpha}\mathscr{H}-e^a_{\alpha}\mathscr{H}_a,$$

и поскольку в правой части отсутствуют скорости $\dot{e}^{\alpha}$, то эти соотношения являются первичными связями

$$p_{\alpha}+H_{\alpha}\approx 0,$$

где

$$H_{\alpha}=-n_{\alpha}\mathscr{H}+e^a_{\alpha}\mathscr{H}_a.$$

В расширенном фазовом пространстве $(\gamma_{ij},\ \pi^{ij})$, $(f_{\perp\perp},\ \pi^{\perp})$, $(f_{\perp a},\ \pi^a)$, $(e^{\alpha},\ p_{\alpha})$ скобки Пуассона даются формулой

$$\{H_1,\ H_2\}=\int\Big[\frac{\delta H_1}{\delta e^{\alpha}}\frac{\delta H_2}{\delta p_{\alpha}}+\frac{\delta H_1}{\delta f_{\perp\perp}}\frac{\delta H_2}{\delta\pi^{\perp}}+\frac{\delta H_1}{\delta f_{\perp a}}\frac{\delta H_2}{\delta\pi^a}+\frac{\delta H_1}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta H_2}{\delta\pi^{ij}}-(1\leftrightarrow 2)\Big]\,d^3x, \tag{40}$$

а гамильтониан будет иметь вид

$$H=\int d^3x\,[\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij}+\pi^{\perp}\dot{f}_{\perp\perp}+\pi^a\dot{f}_{\perp a}+p_{\alpha}\dot{e}^{\alpha}-\mathscr{L}+\lambda^{\alpha}(p_{\alpha}+H_{\alpha})]=$$
$$=\int d^3x\lambda^{\alpha}(p_{\alpha}+H_{\alpha})=\int d^3x\,[\lambda^{\perp}(p+\mathscr{H})+\lambda^a(p_a+\mathscr{H}_a)], \tag{41}$$

где λ^{α} — новые лагранжевы множители, $p=n^{\alpha}p_{\alpha}$. Ниже будет показано, что новых связей здесь не возникает.

Во-первых, имеют место чисто геометрические соотношения

$$\left.\begin{aligned}&\{p_a(x),\ p_b(y)\}=p_a(y)\,\delta_{,b}(x,\ y)-p_b(x)\,\delta_{,a}(y,\ x);\\&\{p_a(x),\ p(y)\}=p(x)\,\delta_{,a}(x,\ y);\\&\{p(x),\ p(y)\}=h^{ab}(x)\,p_a(x)\,\delta_{,b}(x,\ y)-h^{ab}(y)\,p_a(y)\,\delta_{,b}(y,\ x),\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

иллюстрирующие «неголономность базиса» $\{n^{\alpha},\ e^{\alpha}_a\}$. Соответственно в «голономном» или координатном базисе будем иметь

$$\{p_{\alpha}(x),\ p_{\beta}(y)\}=0.$$

Формулы (42) соответствуют формулам (23) в ОТО.

Во-вторых, можно показать, что в РТГ, как и в других параметризованных теориях поля, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}_a$, построенные из полевых переменных, позволяют получить формулы, совпадающие с (42) при замене

$p \to p + \mathscr{H}$, $p_a \to p_a + \mathscr{H}_a$. $\mathscr{H}_a$ является генератором преобразований координат на гиперповерхности для функционалов от полевых переменных и не зависит от $e^\alpha(x)$. $\mathscr{H}(x)$ преобразуется как плотность скаляра при преобразованиях 3-координат, но генератором служит уже $p_a(x) + \mathscr{H}_a(x)$, поскольку в $\mathscr{H}(x)$ входит зависимость от e^α (через h_{ab}, K_{ab}, Γ^c_{ab}):

$$\left.\begin{aligned}
&\{\mathscr{H}_a(x), \mathscr{H}_b(y)\} = \mathscr{H}_a(y)\,\delta_{,b}(x, y) - \mathscr{H}_b(x)\,\delta_{,a}(y, x);\\
&\{p_a(x) + \mathscr{H}_a(x), \mathscr{H}(y)\} = \mathscr{H}(x)\,\delta_{,a}(x, y);\\
&\{p(x) + \mathscr{H}(x), p(y) + \mathscr{H}(y)\} =\\
&= h^{ab}(x)\,[p_a(x) + \mathscr{H}_a(x)]\,\delta_{,b}(x, y) -\\
&- h^{ab}(y)\,[p_a(y) + \mathscr{H}_a(y)]\,\delta_{,b}(y, x).
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

В случае скалярного поля, рассмотренном в [19], последнее равенство имело более простой вид:

$$\{\mathscr{H}(x), \mathscr{H}(y)\} = h^{ab}(x)\,\mathscr{H}_a(x)\,\delta_{,b}(x, y) - h^{ab}(y)\,\mathscr{H}_a(y)\,\delta_{,b}(y, x),$$

поскольку в $\mathscr{H}(x)$ не входила зависимость от производных метрики, т.е. от K_{ab}, Γ^c_{ab}.

Согласно [19], найдем скобки Пуассона величин $p_\alpha(x)$ и их проекций с функционалами от $e^\alpha(x)$. Например:

$$\left.\begin{aligned}
&\{e^\alpha_a(x), p_\beta(y)\} = \{e^\alpha_{,a}, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta\,\delta_{,a}(x, y);\\
&\{h_{\alpha\beta}(e(x)), p_\gamma(y)\} = h_{\alpha\beta,\gamma}(e(x))\,\delta(x, y);\\
&\{h_{\alpha\beta}(e(x)), p_c(y)\} = \{h_{\alpha\beta}, p_\gamma e^\gamma_c\} = h_{\alpha\beta,c}(x)\,\delta(x, y).
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Из определения индуцированной метрики h_{ab} получаем

$$\begin{aligned}
\{h_{ab}(x), p_\gamma(y)\} &= e_{\gamma a}(x)\,\delta_{,b}(x, y) +\\
&+ e_{\gamma b}(x)\,\delta_{,a}(x, y) + h_{\alpha\beta,\gamma}(e(x))\,e^\alpha_a e^\beta_b\,\delta(x, y),
\end{aligned} \tag{45}$$

а касательная к гиперповерхности проекция этого равенства будет иметь вид

$$\{h_{ab}(x), p_c(y)\} = h_{ca}(x)\,\delta_{,b}(x, y) + h_{cb}(x)\,\delta_{,a}(x, y) + h_{ab,c}\,\delta(x, y). \tag{46}$$

Проекция (45) на нормальное направление дает соотношение

$$\{h_{ab}(x), p(y)\} = -2K_{ab}(x)\,\delta(x, y). \tag{47}$$

Можно также получить скобки Пуассона для необходимых величин e^a_α и n_α:

$$\begin{aligned}
\{e^a_\alpha(x), p_\beta(y)\} &= -[e^a_\beta(x)\,e^b_\alpha(x) + h^{ab}(x)\,n_\beta(x)\,n_\alpha(x)]\,\delta_{,b}(x, y) -\\
&- h_{\mu\nu,\beta}(e(x))\,e^{\mu a} n^\nu n^\alpha\,\delta(x, y);
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\{n_\alpha(x), p_\beta(y)\} &= -e^a_\alpha(x)\,n_\beta(x)\,\delta_{,a}(x, y) -\\
&- \frac{1}{2}\,h_{\mu\nu,\beta}(e(x))\,n^\mu n^\nu n_\alpha\,\delta(x, y).
\end{aligned} \tag{49}$$

Проектируя на касательное направление последнюю формулу получаем

$$\{n_\alpha(x),\ p_b(y)\} = n_{\alpha,b}\delta(x,\ y), \tag{50}$$

т.е. $n_\alpha(x)$ преобразуется как скаляр при заменах координат на гиперповерхности. При вычислениях полезны известные формулы:

$$f(y)\,\delta_{,a}(x,\ y) = f(x)\,\delta_{,a}(x,\ y) + f_{,a}\delta(x,\ y);$$
$$f(y)\,\delta_{,ab}(x,\ y) = f(x)\,\delta_{,ab}(x,\ y) +$$
$$+ f_{,a}(x)\,\delta_{,b}(x,\ y) + f_{,b}(x)\,\delta_{,a}(x,\ y) + f_{,ab}\delta(x,\ y).$$

Кроме формул из работы [19] нам потребовалось также найти

$$\{p_\alpha(x),\ K_{cd}(y)\} = -n_\alpha(y)\,\delta_{,cd}(x,\ y) + n_\alpha(y)\,\Gamma^a_{cd}(y)\,\delta_{,a}(y,\ x) -$$
$$-\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(y)\,n_\beta(y)\,[e^\gamma_c(y)\,\delta_{,d}(y,\ x) + e^\gamma_d(y)\,\delta_{,c}(y,\ x)] + \Big(-\Gamma^\beta_{\mu\nu,\alpha}n_\beta e^\mu_c e^\nu_d +$$
$$+\frac{1}{2}K_{cd}h_{\mu\nu,\alpha}n^\mu n^\nu\Big)\,\delta(x,\ y); \tag{51}$$

$$\{p_\alpha(x),\ \Gamma^c_{ab}(y)\} = -h^{cd}(y)\,e_{\alpha d}(x)\,\delta_{,ab}(y,\ x) -$$
$$-h^{cd}(y)\,[\Gamma^j_{ab}(y)\,(e_{\alpha d}(x)\,\delta_{,j}(x,\ y) +$$
$$+ e_{\alpha j}(x)\,\delta_{,d}(x,\ y)) + n_\alpha(x)\,(K_{ad}(x)\,\delta_{,b}(y,\ x) +$$
$$+ K_{bd}(x)\,\delta_{,a}(y,\ x) - K_{ab}(x)\,\delta_{,d}(y,\ x)) - e_{\alpha i}(x)\,(\Gamma^i_{ad}(x)\,\delta_{,b}(y,\ x) +$$
$$+\Gamma^i_{bd}(x)\,\delta_{,a}(y,\ x) - \Gamma^i_{ab}(x)\,\delta_{,d}(y,\ x))] + (2n_\alpha K^c_j\Gamma^j_{ab} -$$
$$-2e_{\alpha d}h^{ci}\Gamma^j_{ab}\Gamma^d_{ij})\,\delta(x,\ y). \tag{52}$$

Полученные формулы (42) — (52) дают возможность доказать соотношение

$$\{p_\alpha(x) + H_\alpha(x),\ p_\beta(y) + H_\beta(y)\} = 0,$$

которое, согласно [19], позволяет реализовать алгебру диффеоморфизмов пространства-времени. Для этого в отличие от обычного подхода, когда N, N^a считаются не зависящими от канонических переменных, представим векторные поля N^α, M^β в пространстве-времени как функционалы от $e^\alpha(x)$ и вычислим

$$\Big\{\int N^\alpha(p_\alpha + H_\alpha)\,d^3x,\ \int M^\beta(p_\beta + H_\beta)\,d^3y\Big\} =$$
$$= \int\int d^3x d^3y\,[\{N^\alpha(e(x)),\ p_\beta(y)\}\,(p_\alpha + H_\alpha)(x)\,M^\beta(y) + N^\alpha(x)\,M^\beta(y)\times$$
$$\times\{p_\alpha(x) + H_\alpha(x),\ p_\beta(y) + H_\beta(y)\} +$$
$$+\{p_\alpha(x),\ M^\beta(e(y))\}\,N^\alpha(x)\,(p_\beta + H_\beta)(y)] =$$
$$= \int (N^\alpha{}_{,\beta}M^\beta - M^\alpha{}_{,\beta}N^\beta)\,(p_\alpha + H_\alpha)\,d^3x; \tag{53}$$

т. е.

$$\{H(N^{\alpha}), H(M^{\beta})\} = -H([N, M]^{\alpha}),$$

где $[N, M]^{\alpha}$ — коммутатор векторных полей N^{α}, M^{β}. Таким образом, построена реализация (антигомоморфизм) генераторами канонического формализма РТГ алгебры диффеоморфизмов пространства-времени.

Аналогичная задача для ОТО решается в работе [20]. При этом на пространственно-временном многообразии вводятся четыре новые функции $\sigma^{a}(X^{\alpha})$, $\tau(X^{\alpha})$ одновременно с наложением четырех новых связей («пространственно-временных калибровок»):

$$g^{\alpha\beta}\tau_{,\alpha}\tau_{,\beta} = -1;$$

$$g^{\alpha\beta}\tau_{,\alpha}\sigma^{b}_{,\beta} = 0,$$

только это позволяет считать n_{α}, e^{a}_{α} определенными функционалами от переменных γ_{ij}, π^{ij}, e^{α}. Подобная процедура представляется нам весьма искусственной.

7. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЧЛЕНЫ В ГАМИЛЬТОНИАНЕ РТГ

В этом разделе мы построим генераторы алгебры Пуанкаре в РТГ. Гамильтониан (41) не достаточен для этой цели и должен быть дополнен поверхностными интегралами. Метод их нахождения был описан в разд. 4.

Существенное отличие от случая ОТО, рассмотренного в разд. 4, заключается в том, что в РТГ плоская метрика и сохраняющая ее группа Пуанкаре задаются однозначно. Это приводит к локализации плотности энергии-импульса в РТГ.

Сначала укажем на различие в формулах (24) и (53).

Во-первых, в общем случае

$$L^{\nu} = N^{\alpha}M^{\nu}{}_{,\alpha} - M^{\alpha}N^{\nu}{}_{,\alpha} \neq \widetilde{L}^{\nu}, \tag{54}$$

где

$$\widetilde{L}^{\nu} = n^{\nu}(N^{a}M_{,a} - M^{a}N_{,a}) +$$
$$+ e^{\nu}_{a}[h^{ab}(NM_{,b} - MN_{,b}) + N^{b}M^{a}_{,b} - M^{b}N^{a}_{,b}].$$

Равенство, однако, имеет место для интересующего нас случая векторов Киллинга (в РТГ в отличие от ОТО они имеются всегда);

$$N_{\alpha;\beta} + N_{\beta;\alpha} = 0 = M_{\alpha;\beta} + M_{\beta;\alpha}$$

тогда, в частности,

$$N_{\perp;\perp} = 0, \quad N_{a;\perp} = -N_{\perp;a}, \quad N_{a;b} + N_{b;a} = 0, \tag{55}$$

и, например,

$$L_{\perp} = -n_{\gamma}(N^{\alpha}M^{\gamma}{}_{;\alpha} - M^{\alpha}N^{\gamma}{}_{;\alpha}) =$$
$$= -N_{\perp}M_{\perp;\perp} + N^{a}M_{\perp;a} + M_{\perp}N_{\perp;\perp} - M^{a}N_{\perp;a} =$$
$$= N^{a}(M_{\perp|a} - K_{ac}M^{c}) - M^{a}(N_{\perp|a} - K_{ac}N^{c}) = N^{a}M_{,a} - M^{a}N_{,a} = \widetilde{L}_{\perp},$$

где мы воспользовались формулами из разд. 2. Аналогично доказывается равенство тангенциальных проекций.

Во-вторых, в правой части (53) имеется знак минус, которого нет в (24), следствия этого обсуждаются ниже.

Для нахождения поверхностных членов в гамильтониане вычисляем скобки Пуассона (40) с сохранением всех поверхностных интегралов, как это делалось в (25) для ОТО.

Если считать независимыми от канонических переменных величины N, M, N^{a}, M^{b}, то мы получим

$$\{H(N^{\alpha}), H(M^{\beta})\}_{f} = H(\widetilde{L}^{\gamma}) + \oint [\ldots]^{i}\, dS_{i}. \tag{56}$$

Если же считать, что $N^{\alpha} = N^{\alpha}(e(x))$, $M^{\beta} = M^{\beta}(e(x))$,

то
$$\{H(N^{\alpha}), H(M^{\beta})\}_{f} = -H(L^{\gamma}) + \oint [\ldots]^{i}\, dS_{i} -$$
$$- \oint [(NM^{b} - MN^{b})(p + \mathscr{H}) + (N^{a}M^{b} - M^{a}N^{b})(p_{a} + \mathscr{H}_{a})]\, dS_{b}, \tag{57}$$

где

$$L^{\gamma} = [N, M]^{\gamma} \equiv N^{\alpha}M^{\gamma}_{,\alpha} - M^{\alpha}N^{\gamma}_{,\alpha}.$$

Выше было показано, что для векторов Киллинга, т.е. для алгебры Пуанкаре, $\widetilde{L}^{\gamma} = L^{\gamma}$. Получается, что отличные от нуля на решениях РТГ поверхностные интегралы в (56) и (57) имеют одинаковый вид, а линейная комбинация связей входит в объемном интеграле с противоположными знаками. Поэтому только в первом случае мы будем иметь хорошо определенные в смысле Редже — Тейтельбойма [10] вариационные производные.

Для реализации алгебры Пуанкаре генераторами канонического формализма РТГ нам потребуется установить асимптотические условия для поведения гравитационного поля на пространственной бесконечности. С физической точки зрения это вытекает из того, что силы гравитации являются дальнодействующими и не экранируются. Поэтому система может считаться изолированной только после удаления ее границ на бесконечность.

Как и в разд. 4, для замыкания алгебры требуется найти такие граничные условия для канонических переменных, при которых поверхностные интегралы в (56) зависели бы только от L, L^{c}, а не от других комбинаций N, M, N^{a}, M^{b}. После этого генераторы переопределяются с помощью добавления полученных поверхностных членов к линейной комбинации связей.

Среди поверхностных интегралов в (56) имеется большая группа слагаемых, содержащих связи: $\pi^{\perp}$, π^i, $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}_i$, $p+\mathscr{H}$, $p_a+\mathscr{H}_a$. Не равные в слабом смысле нулю слагаемые совпадают с точностью до обозначений с соответствующими членами, полученными в ОТО:

$$\oint [\ldots]^i\, dS_i \approx \oint 2\pi^{ij}\gamma_{ik}\,[\gamma^{kl}\,(\overline{N}\overline{M}_{,l}-\overline{M}\overline{N}_{,l})+\overline{N}^l\overline{M}^k_{,l}-\overline{M}^l\overline{N}^k_{,l}]\,dS_j-$$
$$-\oint \pi^{km}\,[(\gamma_{ki}\overline{M}^i_{\downarrow m}+\gamma_{mi}\overline{M}^i_{\downarrow k})\,\overline{N}^j-(\gamma_{ki}\overline{N}^i_{\downarrow m}+\gamma_{mi}\overline{N}^i_{\downarrow k})\,\overline{M}^j]\,dS_j+$$
$$+\oint 2\sqrt{\gamma}\,R_{ik}\gamma^{kj}\,(\overline{N}\overline{M}^i-\overline{M}\overline{N}^i)\,dS_j+$$
$$+\oint 2\sqrt{\gamma}\,(\delta^m_i\gamma^{jn}-\delta^j_i\gamma^{mn})\,(\overline{N}^i\overline{M}_{\downarrow mn}-\overline{M}^i\overline{N}_{\downarrow mn})\,dS_j.$$

Рассмотрение поверхностных членов показывает, что найденные в разд. 4 граничные условия для ОТО, с некоторыми изменениями обеспечивают замыкание алгебры генераторов и в РТГ. Потребуем, чтобы:

1) внешняя кривизна пространственноподобных гиперповерхностей стремилась к нулю на бесконечности, причем существовало бы $\mu > 0$, такое, что

$$\mathrm{Sp}\,K^2 = O^+(r^{-3-\mu}) + O^-(r^{-4-\mu});$$

2) поверхностные интегралы в скобках Пуассона (56), содержащие связи, обращались бы в нуль, а не содержащие связей линеаризовывались бы по переменным $\Phi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}$ и π^{ij} при N^α, M^β, задающих бесконечно малые преобразования группы Пуанкаре, сохраняющей плоскую метрику $h_{\mu\nu}$:

$$\left.\begin{aligned}
&N_{\alpha;\,\beta}+N_{\beta;\,\alpha}=0=M_{\alpha;\,\beta}+M_{\beta;\,\alpha};\\
&\{H(N^\alpha),\,H(M^\beta)\}_f=\hat{H}(L^\gamma);\\
&\hat{H}(L^\gamma)=H(L^\gamma)+\oint 2\pi^{ik}L_i\,dS_k+\\
&+\oint \sqrt{h}\,(h^{im}h^{jn}-h^{ij}h^{mn})\,(\Phi_{mn\,|\,i}L-L_{,i}\Phi_{mn})\,dS_j,
\end{aligned}\right\}\qquad(58)$$

где N, M, N^a, M^b считаются независимыми от канонических переменных;

3) любые конечные преобразования группы Пуанкаре не нарушали бы условий 1 и 2.

Решение уравнений связи также не должно выводить за пределы фазового пространства.

Отметим, что метрика h_{ij} в (58), индуцированная на гиперповерхности, является лишь асимптотически плоской.

Поставленные граничные условия приводят к следствиям:

1. Вновь определенные генераторы $\hat{H}$ удовлетворяют вариационному принципу Редже — Тейтельбойма [10], т. е. при варьировании, сохраняющем граничные условия, не возникает поверхностных интегралов, поэтому формальную запись в (58) можно заменить точной:

$$\{\hat{H}(N^\alpha), \hat{H}(M^\beta)\} = \hat{H}(L^\gamma).$$

2. Соотношение (58) выполняется в слабом смысле и для более широкой группы преобразований, которую мы называли асимптотической группой Пуанкаре $G = G_0 \circledS G_P$. При этом численные значения генераторов $\hat{H}(N^\alpha)$ инвариантны относительно подгруппы G_0 на решениях уравнений РТГ.

3. Численные значения генераторов $\hat{H}(N^\alpha)$ не изменяются также при небольших изменениях формы гиперповерхности на бесконечности, вызванных преобразованиями h_{ij} вследствие замен

$$e^{\mu\prime} = e^\mu + \delta e^\mu,$$

принадлежащих к подгруппе G_0.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам в разд. 4 и проводятся в простейшей — галилеевой — системе координат.

Инвариантная относительно замен координат внутри гиперповерхности одновременности постановка граничных условий является наиболее общей и в РТГ, и в ОТО. Однако в РТГ естественно перейти к более простым условиям на бесконечности для островных систем, поскольку поле $\varphi^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ является физическим и не может убывать медленнее, чем r^{-1}, т.е. на решениях связей примем

$$\left.\begin{aligned} &g_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \equiv \Phi_{\mu\nu} = O^+(r^{-1}) + O^-(r^{-2}) = \varphi_{\mu\nu};\\ &\pi^{ij} = O^-(r^{-2}) + O^+(r^{-3});\\ &N^\alpha = \omega^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha + O^-(1) + O^+(r^{-1}), \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

где каждое дифференцирование изменяет четность на противоположную и порядок убывания на r^{-1}. При этих условиях, а также при простейшем возможном выборе формы гиперповерхностей и внутренней системы координат $h_{ij} = \delta_{ij}$ мы приходим к известным в ОТО формулам (28) для генераторов группы Пуанкаре. В частности, для энергии получаем

$$E = P^0 = \oint (\gamma_{ij,j} - \gamma_{jj,i})\, dS_i. \tag{60}$$

Но важнейшее отличие РТГ от ОТО заключается в том, что в РТГ отсутствует произвол в выборе плоской метрики. Это позволяет однозначно определить плотность энергии-импульса, что невозможно в ОТО. Более того, результаты известных работ [21] по изучению знака величины (60) при граничных условиях, несколько даже более слабых, чем (59), позволяют утверждать, что энергия островных систем в РТГ положительна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы изложили основные идеи и методы построения канонического формализма для теорий гравитации. Две рассмотренные здесь теории, ОТО и РТГ, имеют как сходные черты, так и существенные различия. Основное различие заключается в присутствии в РТГ пространства Минковского как неизменной и однородной арены всех физических событий. Это позволяет обеспечить выполнение фундаментального закона сохранения энергии-импульса. В ОТО отсутствует понятие тензора энергии-импульса для гравитационного поля, что ведет к трактовке энергии как нелокализуемой величины, причем даже такая трактовка требует введения пространства Минковского, хотя бы на пространственной бесконечности.

Это введение метрики Минковского в ОТО всегда неоднозначно, за исключением главных членов в асимптотическом разложении по степеням r^{-1}. Нельзя единственным образом ввести в ОТО плоский фон без использования «предпочтительных систем координат» (что ясно видно как из классических [22], так и из последних работ [23]), т. е. без изменения основных принципов теории. Этот важный факт зачастую игнорируется (как, например, в публикации [24]).

Недавно в работе [25] предложен гамильтонов формализм для полевой трактовки ОТО. Нетрудно видеть, что его основные формулы содержатся и в выполненной одновременно, излагаемой здесь нашей работе [15], посвященной каноническому подходу в РТГ. Для этого следует только опустить в гамильтониане (39) члены, возникающие в силу условий гармоничности. Однако не со всеми выводами [25] мы можем согласиться.

Во-первых, в [25] отмечается сходство, но обходятся вниманием различия между координатными преобразованиями в полевой трактовке ОТО, сохраняющими интервалы, и калибровочными преобразованиями, изменяющими один из интервалов. Так в известном ППН (параметризованный постньютоновский) формализме ОТО [26] (согласно [25], это есть одно из приложений полевой трактовки ОТО) неинвариантности риманова интервала удается избежать только фиксированием ППН-калибровки, т.е. произвольным актом отказа от калибровочной инвариантности.

Во-вторых, при определении поверхностных интегралов в [25], как и в ряде других публикаций [13, 27], отсутствует ковариантная постановка граничных условий. Это означает невозможность однозначно вычислять упомянутые поверхностные интегралы непосредственно в той системе координат, в которой задана риманова метрика, поскольку в общем случае отсутствует критерий разбиения этой метрики на плоский фон и тензорное поле. Такой критерий сформулирован в [25] только для асимптотически лоренцевой системы координат, что не согласуется с утверждением авторов, будто в [25, с. 18] с 3-ковариантные выражения возникают естественно и неизбежно, а не в результате построений, при которых сохраняющиеся интегралы приводятся к ковариантному виду уже после их определения в асимптотически лоренцевой системе координат».

Автор глубоко благодарен А. А. Логунову за стимулирующие обсуждения. Автор также признателен Л. Д. Соловьеву и А. В. Разумову за внимательное прочтение рукописи и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Логунов М. А., Мествиришвили М. А.** Основы релятивистской теории гравитации. М.: Изд-во МГУ, 1985; ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. Вып. 1. **Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Мествиришвили М. А.** Препринт ИФВЭ 87-98, Серпухов, 1987.
2. **Дирак П.** Лекции по квантовой механике: Пер. с англ. М.: Мир, 1968.
3. **Dirac P. A. M.**//Proc. Roy. Soc. A. 1958. Vol. A246. P. 333—343. (Пер.: Новейшие проблемы гравитации/Сб. статей//Под ред. Д. Д. Иваненко. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. С. 139—158).
4. **Kuchař K.**//J. Math. Phys. 1977. Vol. 17. P. 777—791; 792—800; 801—820; Vol. 18. P. 1589—1597.
5. **Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.** Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М.: ГИИЛ, 1948. Т. 2.
6. **Arnowitt R., Deser S., Misner C.**//Gravitation, an Introduction to Current Research./Ed L. Witten. N.Y.—Lond. 1963. P. 227. (Пер.: Эйнштейновский сборник 1967. М. «Наука», 1967, с. 233).
7. **Schwinger J.**//Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 1253—1258. (Пер.: Гравитация и топология. Актуальные проблемы/Сб. статей//Под ред. Д. Д. Иваненко. М.: Мир, 1966. С. 67—83).
8. **Geroch R.**//J. Math. Phys. 1972. Vol. 13. P. 956—968; **Sommers P.**//Ibid. 1978. Vol. 19. P. 549—554; **Ashrekar A., Hansen R. O.**//Ibid. P. 1542—1566; **Persides S.**//Ibid. 1980. Vol. 21. P. 142—151.
9. **Соловьев В. О.**//ТМФ. 1985. Т. 65. С. 400—414.
10. **Regge T., Teitelboim C.**//Ann. of Phys. 1974. Vol. 88. P. 286—318.
11. **Bergmann P. G., Komar A.**//Intern. J. Theor. Phys. 1972. Vol. 5. P. 15—18.
12. **Пухов А. Е.**//Вестн. МГУ. Сер. физ., астрон. 1983. Т. 24, № 3. С. 41—47.
13. **Фаддеев Л. Д.**//УФН. 1982. Т. 136. С. 435—457.
14. **Reula O.**//J. Math. Phys. 1982. Vol. 23. P. 810—814; **Соловьев В. О.** Препринт ИФВЭ 82-18. Серпухов, 1982.
15. **Соловьев В. О.**//Проблемы физики высоких энергий и теории поля. Тр. IX Семинара, Протвино, 7—13 июля 1986. г. М.: Наука, 1987. С. 24—33.
16. **Fradkin E. S., Vilkovisky G. A.** CERN Report TH-2332, 1977.
17. **Sundermeyer K.** Constrained dynamics. Lect. Notes in Phys. Springer. Vol. 169, 1982.
18. **Gotay M. J.**//J. Phys A: Math. Gen. 1983. Vol. 16. P. L141—L145.
19. **Isham C. J., Kuchař K.**//Ann. of Phys. 1985. Vol. 164. P. 288—315.
20. **Isham C. J., Kuchař K.**//Ann. of Phys. 1985. Vol. 164. P. 316.
21. **Schoen R., Yau S. T.**//Comm. Math. Phys. 1979. Vol. 65. P. 45—76; Ibid. 1981. Vol. 79. P. 47—51; **Witten E.**//Ibid. 1981. Vol. 80. P. 381—402.
22. **Фок В. А.** Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961.
23. **Nakanishi N.**//Progr. Theoret. Phys. 1986. Vol. 75. P. 1351—1358.
24. **Зельдович Я. Б., Грищук Л. П.**//УФН. 1986. Т. 149. С. 695—707.

25. **Грищук М. П., Петров А. Н.**//ЖЭТФ. 1987. Т. 92. С. 9—19.
26. **Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.** Гравитация: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. Т. 3.
27. **Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н.** Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1986.
28. **Разумов А. В., Соловьев Л. Д.** Препринты ИФВЭ 86-212, 86-213, 86-214. Серпухов, 1986.
29. **Нестеренко В. В., Червяков А. М.** Препринт ОИЯИ Р2-96-323. Дубна, 1986.