

ФИНСЛЕРОВА МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Г. Ю. Богословский

Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

Работа посвящена построению жизнеспособной модели локально-анизотропного, т.е. финслерова, пространства-времени, и обобщению на ее основе релятивистской теории гравитации. Рассмотрены аргументы в пользу модели. Исходя из физических соображений восстановлен конкретный вид финслеровой метрики, и в рамках принципа соответствия разработан расчетный аппарат теории. Предложенный подход ориентирован на развитие единых калибровочных теорий всех фундаментальных взаимодействий. Большое внимание уделено изучению нетривиальных физических проявлений локальной анизотропии пространства и возможности ее экспериментального обнаружения.

The work is devoted to the construction of a viable model of locally anisotropic, i.e. Finslerian, space-time and to the generalization, on this basis, of the relativistic theory of gravitation. Arguments in favour of this model are considered. From physical considerations the concrete form of the Finslerian metric has been reconstructed and a formalism of the theory has been developed within the framework of the correspondence principle. The approach suggested is aimed at developing unified gauge theories of all fundamental interactions. Much attention is given to the nontrivial physical manifestations of local space anisotropy and to the possibility of its experimental detection.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, еще Риман [1] обратил внимание на существование пространств, метрика которых не сводится к квадратичной форме дифференциалов координат. Впоследствии такие пространства, являющиеся естественным обобщением римановых пространств, получили название пространств Финслера. Несмотря на то, что разработка математической теории [2,3] финслеровых пространств была в основном завершена к концу 50-х годов и с этого времени постепенно стало расти число публикаций, посвященных применению идей и методов финслеровой геометрии в теоретической физике [4—23], особую актуальность и результативность соответствующие исследования приобрели лишь в последние годы в связи с созданием и развитием единых калибровочных теорий всех фундаментальных взаимодействий.

В свете недавних работ [24,25] очень перспективным представляется использование финслеровой геометрии и в квантовой теории метрических пространств.

Исторически сложились два альтернативных подхода к теории финслеровых пространств — подходы Картана [26] и Буземана [27]. В рамках подхода Картана финслеров метрический тензор универсально метризует все касательное расслоение. Одновременно сохраняется лемма Риччи, что открывает возможность для применения мощного аппарата финслеровой дифференциальной геометрии в теориях типа Калуцы — Клейна. Вместе с тем зависимость метрического тензора не только от точек основного многообразия, но и от геометрических объектов, вообще говоря, произвольной природы, существенно осложняет физическую интерпретацию картановских финслеровых метрик. Поэтому заранее не ясно, является ли использование подобных метрик чисто формальным приемом [28], или же реальное пространство действительно обладает финслеровой геометрией. В последнем случае можно ожидать, что ее применение обеспечит решение по крайней мере некоторых проблем, свойственных единым калибровочным теориям.

При исследовании данного вопроса важную роль сыграл подход Буземана к теории финслеровых пространств. Его подход отличает то, что в качестве естественной локальной метрики финслерова пространства рассматривается метрика плоского анизотропного пространства. Разумеется, построение конкретной, физически осмысленной модели такого пространства-времени не может быть осуществлено исходя из одних только общих соображений. Для этого необходимы дополнительные идеи, и, чтобы их изложить, целесообразно обратиться к ситуации, сложившейся в физике космических лучей сверхвысоких энергий.

Вскоре после открытия реликтового излучения, заполняющего Вселенную, появились теоретические работы [29,30], в которых предсказывалось обрезание энергетического спектра первичных космических протонов. Согласно расчетам, эффект обрезания спектра, обусловленный интенсивным фоторождением пионов, должен наступать при энергии протонов $\sim 5 \cdot 10^{19}$ эВ. Однако в результате измерения характеристик широких атмосферных ливней уже в начале 70-х годов возникло [31] и до сих пор остается в силе [32,33] серьезное подозрение, что это предсказание теории не отвечает истинному поведению энергетического спектра протонов. Наметившееся расхождение между теорией и экспериментом, с одной стороны, стимулировало развитие экспериментальной методики [34], предназначенной для детального изучения космических лучей с энергией до $10^{20} - 10^{21}$ эВ, а с другой — поставило перед теорией относи-

тельности ряд фундаментальных проблем, и прежде всего вопрос [31,35] о нарушении преобразований Лоренца при лоренц-факторах $\gamma \geq 5 \cdot 10^{10}$.

Действительно, расчет точки обрезания спектра космических протонов сверхвысоких энергий существенно опирается на преобразование Лоренца из «земной» системы отсчета в систему покоя протона; но относительная скорость этих систем невероятно близка к скорости света, и совсем не очевидно, что обычные релятивистские соотношения, проверенные экспериментально для сравнительно небольших значений лоренц-факторов, продолжают работать вплоть до скоростей, столь близких к скорости света, тем более, что последняя является «особой точкой» релятивистских формул. Изложенные соображения подкрепляются также общим положением [36], согласно которому любая работающая модель и, в частности, модель псевдоевклидова пространства-времени с ее группой Лоренца априори должна иметь ограниченную область применения.

Ясно, что утверждение о нарушении преобразований Лоренца при скоростях, крайне близких к скорости света, эквивалентно утверждению о существовании в природе других, обобщенных преобразований Лоренца, правильно связывающих координаты событий при любых значениях лоренц-фактора. Столь же ясно и то, что соответствующая ревизия преобразований Лоренца — дело далеко не тривиальное. Приводя к новым представлениям о свойствах пространства-времени, она влечет за собой реконструкцию всего аппарата релятивистской теории и допустима лишь при одном условии — соблюдении принципа соответствия с обычной теорией. Если такой принцип выполнен, то в конструктивном плане требование [37] строгой локальной изотропии трехмерного пространства становится не обязательным. На этом пути как раз и удастся достичь физически содержательного обобщения [38] релятивистской теории, учитывающего локальную анизотропию пространства-времени.

1. МЕТРИКА И ГРУППА ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОГО АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА СОБЫТИЙ

Чтобы естественно прийти к анизотропному пространству событий, сделаем следующие наблюдения, ограничиваясь для большей наглядности пространством двух измерений. Напишем преобразования Лоренца:

$$x'_0 = x_0 \operatorname{ch} \alpha - x \operatorname{sh} \alpha, \quad x' = -x_0 \operatorname{sh} \alpha + x \operatorname{ch} \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = v/c \quad (1)$$

и постараемся их обобщить таким образом, чтобы новые преобразования, оставаясь линейными, составляли группу, а также обеспечивали инва-

риантность волнового уравнения $(\partial^2/\partial x_0^2 - \partial^2/\partial x^2)\varphi = 0$. Линейность необходима для однородности пространства-времени, групповое свойство необходимо по самому смыслу искомых преобразований, а инвариантность волнового уравнения требуем на основании результатов опытов Майкельсона. Легко видеть, что всем этим требованиям удовлетворяют преобразования

$$x'_0 = e^{-r\alpha}(x_0 \operatorname{ch} \alpha - x \operatorname{sh} \alpha), \quad x' = e^{-r\alpha}(-x_0 \operatorname{sh} \alpha + x \operatorname{ch} \alpha), \quad (2)$$

где r — безразмерный параметр масштабного преобразования.

Так как по-прежнему $\operatorname{th} \alpha = v/c$, то (2) можно записать в виде

$$x'_0 = \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{r/2} \frac{x_0 - (v/c)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{r/2} \frac{x - (v/c)x_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3)$$

При достаточно малом r , в силу свойства степенной функции $[(1 - v/c)/(1 + v/c)]^{r/2}$, преобразования (3) заметно отличны от преобразований Лоренца, лишь когда относительная скорость инерциальных систем очень близка к скорости света.

Известно, что преобразования Лоренца (1) оставляют инвариантной псевдоевклидову метрику пространства событий $ds^2 = dx_0^2 - dx^2$. Возникает вопрос: какова метрика пространства событий, инвариантного относительно преобразований (2), т.е. каков дифференциальный инвариант этих преобразований? Чтобы ответить на этот вопрос, перепишем (2) в инфинитезимальной форме

$$dx_0 = (-rx_0 - x) d\alpha, \quad dx = (-rx - x_0) d\alpha. \quad (4)$$

Из (4) следует, что функция $f(x_0, x)$, инвариантная относительно преобразований (2), удовлетворяет уравнению

$$(rx_0 + x) \frac{\partial f}{\partial x_0} + (rx + x_0) \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Решая (5) с условием $f|_{r=0} = x_0^2 - x^2$, находим

$$f = \left(\frac{x_0 - x}{x_0 + x} \right)^r (x_0^2 - x^2). \quad (6)$$

Так как преобразования (2) линейны, дифференциалы координат преобразуются как сами координаты. Поэтому для дифференциального инварианта имеем выражение, аналогичное (6):

$$ds = \left(\frac{dx_0 - dx}{dx_0 + dx} \right)^{r/2} \sqrt{dx_0^2 - dx^2}$$

или

$$ds = \left(\frac{(dx_0 - dx)^2}{dx_0^2 - dx^2} \right)^{r/2} \sqrt{dx_0^2 - dx^2}. \quad (7)$$

Формула (7) определяет метрику пространства событий, инвариантного относительно преобразований (2) и пространственно-временных трансляций. Таким образом, мы пришли здесь к плоскому пространству, в котором норма вектора X представляется выражением:

$$\|X\| = \left(\frac{(v_i X^i)^2}{X_j X^j} \right)^{r/2} \sqrt{X_k X^k}, \quad (8)$$

где $X_0 = X^0$, $X_1 = -X^1$, $v_0 = v^0 = 1$, $v_1 = -v^1 = -1$.

Как видно из формулы (8), величина вектора определяется не только его псевдоевклидовой длиной, но и его ориентацией относительно выделенного направления, фиксируемого нуль-вектором v^i .

Формула (7), записанная в виде (8), непосредственно обобщается на случай четырех измерений:

$$ds = \left(\frac{(v_i dx^i)^2}{dx_j dx^j} \right)^{r/2} \sqrt{dx_k dx^k}, \quad (9)$$

где $v^i = \{1, \vec{v}\}$ — четырехмерный нуль-вектор вдоль выделенного направления в пространстве-времени ($v_i v^i = 0 = 1 - \vec{v}^2$), а единичный вектор \vec{v} указывает выделенное направление в 3-пространстве. Раскрывая (9), получаем искомое выражение для интервала:

$$ds = \left(\frac{(dx_0 - \vec{v} d\vec{x})^2}{dx_0^2 - d\vec{x}^2} \right)^{r/2} \sqrt{dx_0^2 - d\vec{x}^2}. \quad (10)$$

Представляя собой конкретную однородную функцию дифференциалов координат первой степени однородности, данная метрика относится к типу финслеровых метрик. Она обобщает метрику Минковского и описывает плоское анизотропное пространство событий. В рамках модели плоского пространства величина анизотропии определяется параметром r . При $r = 0$ зависимость метрики (10) от \vec{v} исчезает, и данная метрика сводится к метрике пространства Минковского. По существу, формула

(10) описывает целый класс плоских пространств, каждое из которых характеризуется своим значением параметров r , \vec{v} и допускает свою собственную 8-параметрическую группу движений. Помимо 1-параметрической подгруппы вращений вокруг выделенного направления \vec{v} и 4-параметрической подгруппы пространственно-временных трансляций, полная группа движений анизотропного пространства (10) содержит 3-параметрическую подгруппу обобщенных преобразований Лоренца:

$$x'^i = D(\vec{v}, \vec{v}) R_j^i(\vec{v}, \vec{v}) L_k^j(\vec{v}) x^k. \quad (11)$$

Преобразования, обратные (11), имеют вид:

$$x^k = D^{-1}(\vec{v}, \vec{v}) L_i^{-1k}(\vec{v}) R_j^{-1i}(\vec{v}, \vec{v}) x'^j, \quad (12)$$

где \vec{v} — относительная скорость систем отсчета, $L_k^j(\vec{v})$ — обычный лоренцев буст, $R_j^i(\vec{v}, \vec{v})$ — доворот пространственных осей на угол

$$\varphi = \arccos \left(1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}) [\vec{v} \vec{v}]^2}{(1 - \vec{v} \vec{v}/c) \vec{v}^2} \right) \quad (13)$$

вокруг вектора $[\vec{v}, \vec{v}]$, а $D(\vec{v}, \vec{v})$ — дилатационное преобразование пространства-времени:

$$D(\vec{v}, \vec{v}) = \left(\frac{1 - \vec{v} \vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^r. \quad (14)$$

Главное, в чем преобразования (11) отличаются от обычных преобразований Лоренца — это дополнительные масштабные преобразования D . Как бы мала ни была анизотропия (параметр r), дилатация D может стать заметно отличной от единицы, если относительная скорость систем отсчета достаточно приблизится к скорости света. При $r = 0$ из (14) следует $D = 1$ и преобразования (11) сводятся к преобразованиям Лоренца с доворотом осей (3-параметрическая некомпактная подгруппа группы Лоренца). Этот доворот устроен таким образом, что если в одной системе отсчета луч света имеет направление \vec{v} , то такое же направление он будет иметь и во всех рассматриваемых инерциальных системах. Поэтому при $r = 0$, когда все направления эквивалентны, \vec{v} не имеет физического смысла и служит для релятивистски-инвариантной калибровки ориентаций пространственных осей инерциальных систем отсчета. При $r \neq 0$ обобщенные преобразования Лоренца (11) имеют смысл преобразований релятивистской симметрии анизотропного пространства событий (10). Эти преобразования составляют 3-параметрическую группу, изоморф-

ную указанной подгруппе группы Лоренца, и индуцируют обычный релятивистский закон сложения 3-скоростей.

Дальнейшее развитие представлений об анизотропии пространства-времени основано на исследовании ее нетривиальных физических проявлений. Важную конструктивную роль при этом играет принцип относительности, распространенный на анизотропное пространство-время.

2. МЕХАНИКА И ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА

Рассмотрим обобщенные преобразования Лоренца, связывающие галилеевы координаты событий в физически эквивалентных инерциальных системах отсчета. Учитывая (11), (12), запишем эти преобразования:

$$x'^i = D \Lambda_k^i x^k = \mathcal{L}_k^i x^k, \quad (15)$$

$$x^k = D^{-1} \Lambda_j^{-1k} x'^j = \mathcal{L}_j^{-1k} x'^j, \quad (16)$$

где $\Lambda_k^i = R_i^j L_k^j$ — матрицы из собственной однородной группы Лоренца, D — дилатации, индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Четырехмерным относительным тензором веса N и ранга $(n + y)$ называется линейный геометрический объект, имеющий $4^{(n+y)}$ компонент и преобразующийся по закону

$$T'_{j_1 \dots j_y}{}^{i_1 \dots i_n} = J^N \mathcal{L}_{k_1}^{i_1} \dots \mathcal{L}_{k_n}^{i_n} \mathcal{L}_{j_1}^{-1s_1} \dots \mathcal{L}_{j_y}^{-1s_y} T_{s_1 \dots s_y}{}^{k_1 \dots k_n}, \quad (17)$$

где J — якобиан преобразования (16):

$$J = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \right| = |\mathcal{L}_j^{-1k}| = |D^{-1} \Lambda_j^{-1k}| = D^{-4}. \quad (18)$$

Здесь мы учли, что $|\Lambda_j^{-1k}| = 1$. Вместо термина «относительный тензор» мы будем пользоваться более привычным термином «тензорная плотность». Таким образом, в формуле (17) $T_{s_1 \dots s_y}{}^{k_1 \dots k_n}$ — 4-тензорная плотность ранга $(n + y)$ и веса N . Обычный тензор — это тензорная плотность веса 0. Преобразования (17) образуют представление группы движений анизотропного пространства (10). Появление геометрических объектов типа

тензорных плотностей является естественным следствием неунимодулярности матриц ϱ_k^i , осуществляющих движения этого пространства. (В псевдоевклидовом пространстве $D = 1, J = 1$ матрицы унимодулярны, и различие между тензорными плотностями и тензорами исчезает.)

Установим свойства некоторых геометрических объектов. Пусть компоненты объекта g_{ik} имеют одинаковый вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

во всех системах, связанных преобразованиями (15). Тогда с помощью (18) можно написать

$$g'_{ik} = D^2 D^{-2} \Lambda_i^{-1l} \Lambda_k^{-1m} g_{lm} = J^{-1/2} \varrho_i^{-1l} \varrho_k^{-1m} g_{lm}. \quad (20)$$

Сравнивая (20) с определением (17), заключаем, что g_{ik} — ковариантная тензорная плотность веса $-1/2$. Аналогично доказывается, что объект g^{jk} , имеющий всегда одинаковый вид (19), является контравариантной тензорной плотностью веса $1/2$; тогда ясно, что $g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l$ — единичный тензор. g_{ik} и g^{jk} служат для опускания и поднятия индексов. При этом, однако, происходит изменение веса. Возьмем, например, контравариантный вектор dx^i и опустим индекс. В результате получим $dx_i = g_{ik} dx^k$, т.е. ковариантную векторную плотность веса $-1/2$. Величина $dx_i dx^i$ — скалярная плотность веса $-1/2$. Рассмотрим объект ν^i , указывающий выделенное направление в пространстве-времени. Его компоненты $\nu^0 = 1, \vec{\nu}$ имеют одинаковые значения во всех физически эквивалентных инерциальных системах отсчета, причем $\vec{\nu}^2 = 1$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\nu^i = \nu^i = D^{-(1+r)/r} D \Lambda_k^i \nu^k = J^{(1+r)/(4r)} \varrho_k^i \nu^k, \quad (21)$$

т.е. ν^i — контравариантная векторная плотность веса $(1+r)/(4r)$. Тогда ν_i — ковариантная векторная плотность веса $(1-r)/(4r)$, а $\nu_i \nu^i$ — равная нулю скалярная плотность веса $1/(2r)$. Наконец, $\nu_i dx^i$ — скалярная плот-

ность веса $(1-r)/(4r)$. Проведенное рассмотрение позволяет легко увидеть, что метрика плоского анизотропного пространства-времени

$$ds^2 = F^2(dx) = \left(\frac{(v_i dx^i)^2}{dx_j dx^j} \right)^r dx_k dx^k \quad (22)$$

является скалярной плотностью нулевого веса, т.е. — инвариантом.

Исходя из соображений релятивистской инвариантности и минимальности на прямой мировой линии, запишем действие для свободной частицы в плоском анизотропном пространстве в следующем виде:

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (23)$$

где ds — метрика (22). Чтобы убедиться, что формула (23) корректно определяет действие для свободной частицы, необходимо доказать, что интеграл

$$\int_a^b ds = c \int_a^b dt \quad (24)$$

достигает максимума и, следовательно, S — минимума на прямой мировой линии, соединяющей точки « a » и « b ». Так как метрика (22) плоского анизотропного пространства событий инвариантна относительно трансляций и обобщенных преобразований Лоренца, достаточно иметь доказательство для системы отсчета, в которой мировая точка « a » обладает координатами $(0,0,0,0)$, а точка « b » — координатами $(ct,0,0,0)$. В этом случае прямая мировая линия, соединяющая точки « a » и « b », лежит на оси времени и является мировой линией часов, покоящихся в начале прямоугольной системы координат, а

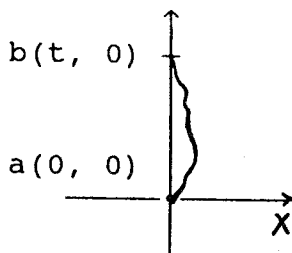


Рис.1

интеграл $\int_a^b dt$, взятый по прямой линии, есть $\int_0^t dt = t$, т.е. равен времени,

которое показывают покоящиеся часы. Рассмотрим, наряду с покоящимися, еще и другие часы, которые в момент времени $t = 0$ стартуют из начала прямоугольной системы координат и, совершив неравномерное движение по замкнутому пути, возвращаются к моменту времени t (по неподвижным часам) в исходную точку. Интеграл $\int_a^b dt$, взятый по кривой

мировой линии (см. рис.1) пропутешествовавших часов, равен, очевидно,

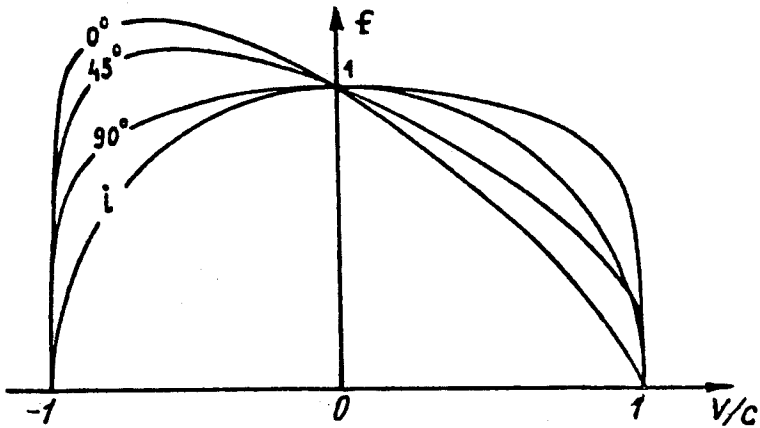


Рис.2. Графики функции $f(\vec{v})$ при $r = 0,63$ и углах 0° , 45° и 90° между \vec{v} и \vec{i} . Полуокружность « i » отвечает изотропному пространству Минковского: $r = 0, f(\vec{v}) = \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \leq 1$ и $\tau(0) < t$

времени $\tau(r)$, показываемому этими часами в момент возвращения. Согласно (22), интервал $d\tau$ собственного времени часов, летящих со скоростью \vec{v} , связан с соответствующим интервалом времени dt покоящихся часов формулой

$$d\tau = \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^r \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} dt. \quad (25)$$

Таким образом,

$$\tau(r) = \int_a^b d\tau = \int_0^t \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^r \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} dt, \quad (26)$$

т.е. время, которое показывают возвратившиеся часы, зависит от величины анизотропии пространства как от параметра. Поскольку при определенных значениях скорости \vec{v} подынтегральная функция $f(\vec{v})$ в (26) больше единицы (см. рис.2), то на соответствующих участках своего пути летящие часы опережают покоящиеся. Однако, вернувшись в исходную точку, они обязательно окажутся отставшими, т.е. $\tau(r) < t$. Справедливость этого утверждения при $|r| < 1$ строго доказана в [39]. Таким образом, в плоском анизотропном пространстве-времени с $|r| < 1$ интеграл

$\int_a^b ds$ максимален, а действие (23) минимально на прямой мировой линии, соединяющей точки « a » и « b ».

Определение (23) приводит к следующему выражению для вариации действия:

$$\delta S = -mc \int_a^b u_i d\delta x^i, \quad (27)$$

где

$$u_i = \left(\frac{v_l dx^l}{\sqrt{dx_j dx^j}} \right)^r \left((1-r) \frac{dx_i}{\sqrt{dx_k dx^k}} + r \frac{v_i \sqrt{dx_m dx^m}}{v_n dx^n} \right). \quad (28)$$

Ковариантный 4-вектор u_i мы назовем динамической 4-скоростью, в отличие от контравариантной кинематической 4-скорости $v^i = dx^i/ds$.

Найдем связь между u_i и v^i . С этой целью заметим, что F^2 в правой части (22) — однородная функция дифференциалов dx^i второй степени однородности. Используя теорему Эйлера, получаем

$$F^2 = \frac{1}{2} [\partial^2 F^2 / \partial(dx^i) \partial(dx^j)] dx^i dx^j \text{ и } ds^2 = M_{ij} dx^i dx^j.$$

Тензор $M_{ij} = \frac{1}{2} [\partial^2 F^2 / \partial(dx^i) \partial(dx^j)]$ называется метрическим тензором анизотропного пространства (22). Вычисление дает для него выражение

$$M_{ij} = \left(\frac{(v_l dx^l)^2}{dx_m dx^m} \right)^r \left\{ \frac{r(2r-1)v_i v_j (dx_k dx^k)}{(v_n dx^n)^2} + \frac{2r(1-r)(v_i dx_j + v_j dx_i)}{v_p dx^p} + \frac{-2r(1-r) dx_i dx_j + (1-r)(dx_a dx^a) g_{ij}}{dx_b dx^b} \right\}. \quad (29)$$

Проверкой убеждаемся, что

$$u_i = M_{ij} v^j. \quad (30)$$

Если варьировать траекторию при условии $(\delta x^i)|_a = (\delta x^i)|_b = 0$, то принцип наименьшего действия дает $u_i = \text{const}$ — прямолинейное движение по инерции. Если варьировать координаты точки « b » при условии $u_i = \text{const}$, то получим, что

$$m c u_i = -\partial S / \partial x^i. \quad (31)$$

Четырехимпульсом ($p^0 = E/c$, \vec{p}) называется, как известно, объект

$$p^i = -g^{ik} \partial S / \partial x^k = m c g^{ik} u_k. \quad (32)$$

Поскольку g^{ik} — тензорная плотность веса 1/2, а u_k — вектор, то ясно, что 4-импульс p^i преобразуется как контравариантная векторная плотность веса 1/2, т.е.

$$p'^i = J^{1/2} \mathcal{L}_k^i p^k = D^{-1} \Lambda_k^i p^k = D^{-1} R_l^i L_k^l p^k. \quad (33)$$

Таким образом масштабное преобразование импульсов обратнo масштабному преобразованию координат (ср. (15)).

Полученные соотношения легко записать в трехмерной форме. Используя (23) и (22), находим релятивистскую функцию Лагранжа для свободной частицы в плоском анизотропном пространстве:

$$L = -m c^2 \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^r \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}. \quad (34)$$

Соответственно полная кинетическая энергия частицы, включающая энергию покоя $m c^2$, определяется выражением

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^r \left(1 - r + r \frac{1 - \vec{v}^2/c^2}{1 - \vec{v}\vec{v}/c} \right), \quad (35)$$

а ее импульс, включающий импульс покоя $r m c \vec{v}$, выражением

$$p = \frac{m c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^r \left((1 - r) \vec{v}/c + r \vec{v} \frac{1 - \vec{v}^2/c^2}{1 - \vec{v}\vec{v}/c} \right). \quad (36)$$

Энергия и импульс удовлетворяют соотношению

$$\left[\frac{(E/c - \vec{p}\vec{v})^2}{E^2/c^2 - p^2} \right]^{-r} (E^2/c^2 - p^2) = m^2 c^2 (1 - r)^{(1-r)} (1 + r)^{(1+r)}, \quad (37)$$

которое является инвариантом преобразований (33). Из (35) и (36) следует, что скорость \vec{v} частицы, имеющей импульс \vec{p} и энергию E , определяется формулой

$$\vec{v} = \frac{c^2(1+r)(E - c\vec{p}\vec{v})\vec{p} - cr(E^2 - c^2 p^2)\vec{v}}{(1+r)(E - c\vec{p}\vec{v})E - r(E^2 - c^2 p^2)}. \quad (38)$$

До тех пор пока мы имеем дело с плоским анизотропным пространством, т.е. считаем r и \vec{v} константами, из приведенных формул следует, что так же, как в пространстве Минковского, массивные частицы не могут двигаться со скоростью света; однако существуют частицы, всегда распространяющиеся со скоростью света. Для них $m = 0$ и $|\vec{p}| = E/c$, т.е. энергия не зависит от направления импульса. Энергия же любой массивной частицы, вследствие (37), зависит не только от величины, но еще и от направления ее импульса. Как видно из формулы (36), направление импульса не совпадает с направлением скорости частицы. Когда скорость частицы приближается к скорости света, угол между импульсом и скоростью стремится к нулю.

По сравнению с аналогичными формулами СТО формулы (35) — (38) являются более сложными из-за параметрической зависимости соответствующих величин от r и \vec{v} . Но именно эта зависимость делает их более содержательными. Рассматривая, в частности, зависимость E и \vec{p} от r , можно показать, что эти величины имеют конечный предел при $r \rightarrow 1$ и $|\vec{v}|c \rightarrow 1$, т.е. массивная частица может достичь скорости света, попав в точку пространства, в которой $r = 1$.

Релятивистское уравнение Гамильтона — Якоби, которое описывает свободную частицу в плоском анизотропном пространстве, получается подстановкой производных $E = -\partial S/\partial t$, $\vec{p} = \partial S/\partial \vec{x}$ в (37) и имеет вид

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \right)^2}{\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \right)^2} \right]^{-r} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \vec{x}} \right)^2 \right] =$$

$$= m^2 c^2 (1-r)^{(1-r)} (1+r)^{(1+r)}. \quad (39)$$

Нерелятивистское движение описывается нерелятивистской функцией Лагранжа или нерелятивистским уравнением Гамильтона — Якоби, которые получаются из релятивистских выражений (34) или (39) путем соответствующего предельного перехода ($v/c \rightarrow 0$ или $c \rightarrow \infty$). Осуществляя этот предельный переход, нужно иметь в виду, что в функции Лагранжа появятся слагаемые $-mc^2 + rmc \vec{v} \vec{v}$, являющиеся полной производной по времени. Эти слагаемые не отражаются на уравнениях движения и могут быть опущены. Соответственно в действии S необходимо выделить слагаемые, которые дают энергию покоя mc^2 и импульс покоя $rmc \vec{v}$, т.е. ввести новое действие S' , так что

$$S = S' - mc^2 t + rmc \vec{v} \vec{x}. \quad (40)$$

Подставляя, например, (40) в (39) и переходя к пределу $c \rightarrow \infty$, мы находим нерелятивистское уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{1}{2} m^{-1\alpha\beta} \frac{\partial S'}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S'}{\partial x^\beta} = 0. \quad (41)$$

3-тензор $m^{-1\alpha\beta}$ определяется выражением

$$m^{-1\alpha\beta} = \frac{1}{m(1-r^2)} [(1+r) \delta^{\alpha\beta} - r v^\alpha v^\beta], \quad (42)$$

где v^α — единичный вектор.

Так как $T = -\partial S'/\partial t$ является кинетической энергией частицы, а $p_\alpha = \partial S'/\partial x^\alpha$ — ее импульсом, то выражение (41) эквивалентно выражению

$$T = \frac{1}{2} m^{-1\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \quad (43)$$

Нерелятивистская функция Лагранжа, полученная из (34) путем предельного перехода $v/c \rightarrow 0$, имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta, \quad (44)$$

где

$$m_{\alpha\beta} = m(1-r) (\delta_{\alpha\beta} + r v_\alpha v_\beta) \quad (45)$$

является 3-тензором. Следовательно,

$$p_\alpha = m_{\alpha\beta} v^\beta, \quad (46)$$

$$F_\alpha = m_{\alpha\beta} a^\beta. \quad (47)$$

Из определений (42) и (45) следует, что $m_{\alpha\beta} m^{-1\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$. Используя $m^{-1\alpha\beta}$, формулы (46) и (47) можно записать в виде

$$v^\alpha = m^{-1\alpha\beta} p_\beta, \quad (48)$$

$$a^\alpha = m^{-1\alpha\beta} F_\beta. \quad (49)$$

Уравнения движения (49) лежат в основе нерелятивистской механики в анизотропном пространстве. Они обобщают уравнения Ньютона и переходят в них, когда анизотропия стремится к нулю ($r \rightarrow 0$). Согласно уравнениям (49), движение нерелятивистской частицы в анизотропном пространстве происходит аналогично движению квазичастицы в кристалле.

Если силовое поле F_β в (49) потенциально, то интегралом движения является сумма кинетической (43) и потенциальной энергий. Кроме того, очевидно, что скорость свободной частицы постоянна. Поэтому понятие инерциальной системы отсчета сохраняется и для анизотропного пространства.

Нерелятивистские уравнения движения (47), полученные в рамках теории анизотропного пространства, совместны с общей идеей Маха о том, что инертность зависит от направления ускорения. Принцип Маха также предполагает одинаковый (универсальный) характер такой зависимости для всех частиц, находящихся в одинаковых состояниях [40], поскольку они «видят» одинаковое распределение внешней материи. Нерелятивистский тензор массы (45) и релятивистский тензор массы, найденный в работе [41], имеют как раз такие свойства. Действительно, эффективная инертность частицы, определяемая тензором массы (45), определяется массой покоя m конкретной частицы и общим для всех частиц тензорным фактором $(1 - r)(\delta_{\alpha\beta} + r\nu_\alpha \nu_\beta)$, который зависит от величины локальной анизотропии r и локально выделенного направления ν_α в 3-пространстве.

Таким образом, связывая в рамках теории локально-анизотропного пространства-времени эффективную инертность частицы с величиной анизотропии пространства и выделенным направлением в нем, мы с помощью принципа Маха приходим к заключению, что локальные значения величин r и ν_α зависят от распределения и движения внешней материи.

Хотя эксперименты (см. обзор [46]) по поиску анизотропии инертности не привели к ее обнаружению, это вовсе не значит, что локальная анизотропия пространства на поверхности Земли пренебрежимо мала. В работе [39] мы обратили внимание на тот факт, что методика этих экспериментов не позволяет правильно оценить величину анизотропии, т.е. они попросту не годятся в качестве поисковых экспериментов. Для этой цели наиболее подходят эксперименты кинематического типа (например, эксперимент, предложенный в [14] и основанный на использовании эффекта Доплера в анизотропном пространстве).

Перейдем теперь к электродинамике. Установим прежде всего закон преобразования 4-тока $j^i = (c\rho, \rho \vec{v})$. Чтобы достичь этой цели, необходимо знать как преобразуется 4-объем:

$$d^3x' dx'^0 = \left| \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \right| d^3x dx^0 = J^{-1} d^3x dx^0,$$

т.е. 4-объем является скалярной плотностью веса -1 . Теперь из тождества $cde dx^i = cp(dx^i/dx^0)d^3x dx^0$ ясно, что $j^i = cp dx^i/dx^0$ — контравариантная векторная плотность веса 1 .

Воспользуемся законом преобразования j^i и перейдем из собственной системы в систему отсчета, в которой элемент заряда летит со скоростью \vec{v} . Тогда получим закон преобразования плотности заряда

$$\rho = \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^{3r} \frac{\tilde{\rho}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}, \quad (50)$$

и, как следствие,

$$d^3x = \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^{-3r} \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} d^3\tilde{x}. \quad (51)$$

Здесь буквы с тильдой относятся к собственной системе. Формула (51) дает релятивистское изменение объема.

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле в анизотропном пространстве (обобщенные уравнения Лоренца) можно найти с помощью принципа наименьшего действия. Исходя из релятивистской инвариантности и соответствия с обычной теорией, напомним действие для заряда в поле в виде

$$S = \int_a^b \left(-mcds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right), \quad (52)$$

где ds дается формулой (22), A_i — ковариантный вектор (4-потенциал).

Вычисления приводят к уравнениям

$$mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} F_{ik} v^k = 0. \quad (53)$$

Здесь u_i — динамическая 4-скорость (28), а $v^k = dx^k/ds$ — кинематическая. F_{ik} — обычный тензор поля. Поднимая индексы в уравнениях (53) с помощью тензорной плотности g^{ik} веса $1/2$, получаем

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} v_k, \quad (54)$$

где F^{ik} — контравариантная тензорная плотность веса 1 . Первая пара уравнений Максвелла $e^{iklm} \partial F_{lm} / \partial x^k = 0$ — релятивистски-инвариантна, т.к. слева стоит свертка совершенно антисимметричной единичной тен-

зорной плотности e^{iklm} веса 1 с тензором $\partial F_{lm}/\partial x^k$, т.е. контравариантная векторная плотность веса 1. Легко видеть, что стандартное выражение действия для поля релятивистски-инвариантно. Однако эта инвариантность по-другому обеспечивается. В обычной теории $F_{ik}F^{ik}$ — инвариант, $d^3x dx^0$ — инвариант. У нас $F_{ik}F^{ik}$ — скалярная плотность веса 1, $d^3x dx^0$ — скалярная плотность веса -1. Поэтому $F_{ik}F^{ik}d^3x dx^0$ — скалярная плотность веса 0, т.е. инвариант. В результате вторая пара уравнений Максвелла $\partial F^{ik}/\partial x^k = -(4\pi/c)j^i$ также удовлетворяет принципу релятивистской инвариантности в анизотропном пространстве (справа и слева в уравнениях стоят векторные плотности веса 1). 4-дивергенция 4-тока $\partial j^i/\partial x^i$ — скалярная плотность веса 1 и уравнение непрерывности $\partial j^i/\partial x^i = 0$ для тока в анизотропном пространстве релятивистски-инвариантно. 4-дивергенция $\partial A^i/\partial x^i$ — скалярная плотность веса 1/2 и, следовательно, условие Лоренца $\partial A^i/\partial x^i = 0$ релятивистски-инвариантно.

Таким образом, в анизотропном пространстве существует электродинамика, определяемая уравнениями Максвелла. Однако принцип релятивистской инвариантности приводит к тому, что электродинамические величины преобразуются от одной инерциальной системы к другой по новому закону. Например,

$$j^i = J \mathcal{L}_k^i j^k = D^{-3} \Lambda_k^i j^k = \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^{-3r} \Lambda_k^i j^k, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} F'_{ik} &= \mathcal{L}_i^{-1p} \mathcal{L}_k^{-1m} F_{pm} = D^{-2} \Lambda_i^{-1p} \Lambda_k^{-1m} F_{pm} = \\ &= \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^{-2r} \Lambda_i^{-1p} \Lambda_k^{-1m} F_{pm}, \end{aligned} \quad (56)$$

$$F'_{ik} F'^{ik} = \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^{-4r} F_{ik} F^{ik}, \quad (57)$$

$$e^{iklm} F'_{ik} F'_{lm} = \left(\frac{1 - \vec{v}\vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^{-4r} e^{iklm} F_{ik} F_{lm}, \quad (58)$$

$$\frac{F_{ik} F^{ik}}{e^{jpst} F_{jp} F_{st}} = \text{inv.}, \quad (59)$$

где \vec{v} — скорость штрихованной системы, Λ_k^i — матрицы из собственной однородной группы Лоренца.

Здесь уместно обратить внимание на то, что линейные однородные преобразования (15), принадлежащие группе релятивистской симметрии плоского анизотропного пространства событий, составляют 3-параметрическую подгруппу 15-параметрической конформной группы. Конформная инвариантность уравнений Максвелла была открыта в 1910 г. Бэйтманом и Куннингэмом [42, 43].

Теперь, в рамках теории плоского анизотропного пространства-времени, мы выведем точную формулу для эффекта Доплера. Так как фаза плоской волны

$$k^0 x^0 - \vec{k} \vec{x} = g_{ik} k^i x^k = k_k x^k, \quad (60)$$

где $k^i = (\omega/c, \vec{k})$, должна быть релятивистским инвариантом, то необходимо, чтобы k_i являлся ковариантным волновым 4-вектором и, следовательно, $k^i = g^{ij} k_j$ — контравариантной векторной плотностью веса 1/2. Таким образом,

$$k'^i = J^{1/2} \mathcal{Q}_j^i k^j = D^{-1} \Lambda_j^i k^j, \quad (61)$$

что полностью соответствует преобразованию (ср. (33)) 4-импульса.

Используя явный вид D , $\Lambda_j^i = R_i^l L_j^l$ (см. формулы (11)–(14)) и учитывая, что $|\vec{k}| = k^0 = \omega/c$, находим

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}{1 - \vec{v} \vec{e}/c} \left(\frac{1 - \vec{v} \vec{v}/c}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \right)^r. \quad (62)$$

Это и есть точная релятивистская формула для эффекта Доплера в локально-анизотропном пространстве. При стремлении анизотропии к нулю ($r \rightarrow 0$) она переходит в классическую формулу специальной теории относительности. В формуле (62) \vec{v} — скорость летящей системы отсчета, ω' — частота луча в этой системе, ω и \vec{e} — частота и направление луча в исходной системе отсчета, \vec{v} — единичный вектор вдоль выделенного направления в исходной системе отсчета. Мы видим, что эффект Доплера в локально-анизотропном пространстве, как этого и следовало ожидать, оказался чувствительным к ориентации экспериментальной установки (зафиксировав ω' , $|\vec{v}|$ и $\vec{v} \vec{e}$, получаем зависимость ω от угла между \vec{v} и \vec{v}). На этом и основана принципиальная возможность обнаружения анизотропии пространства путем измерения эффекта Доплера; реальная же возможность ограничивается величиной искомой анизотропии ($r \ll 1$),

степенью монохроматичности источника и разрешающей способностью приемника. Подходящие характеристики в этом отношении имеет комбинация мессбауэровского источника и резонансного поглотителя.

Прежде чем делать оценки, поучительно сравнить с точностью до второго порядка по скоростям доплеровский сдвиг частот $\Delta\omega/\omega = (\omega_a - \omega_s)/\omega_s$, предсказываемый дорелятивистской теорией абсолютно-го эфира, специальной теорией относительности и развитой в настоящей работе специальной релятивистской теорией локально-анизотропного пространства-времени. Соответствующие формулы имеют вид

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^{\text{pre-rel}} = \frac{\vec{e}\vec{u}}{c} + \left(\frac{\vec{e}\vec{u}}{c}\right) \left(\frac{\vec{e}\vec{v}_s}{c}\right) - \frac{\vec{w}\vec{u}}{c^2}, \quad (63)$$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^{\text{rel}} = \frac{\vec{e}\vec{u}}{c} + \left(\frac{\vec{e}\vec{u}}{c}\right) \left(\frac{\vec{e}\vec{v}_s}{c}\right) + \frac{1}{2c^2}(v_a^2 - v_s^2), \quad (64)$$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^{\text{anis-rel}} = \frac{\vec{e}\vec{u}}{c} + \left(\frac{\vec{e}\vec{u}}{c}\right) \left(\frac{\vec{e}\vec{v}_s}{c}\right) + \frac{1}{2c^2}(v_a^2 - v_s^2) - \frac{rc\vec{v}\vec{u}}{c^2}. \quad (65)$$

В формулах (63)—(65) \vec{v}_s и \vec{v}_a — скорости источника и поглотителя относительно лаборатории, $\vec{u} = \vec{v}_s - \vec{v}_a$, \vec{e} — единичный вектор вдоль луча в лабораторной системе, \vec{w} — скорость эфирного ветра относительно лаборатории, \vec{v} — единичный вектор вдоль выделенного направления в лабораторной системе, r — параметр анизотропии, ω_a — частота, с которой поглотитель видит собственную частоту ω_s , выходящую из источника. Формулы (63) и (64) заимствованы из работы [44], а (65) выведена нами, исходя из (62); при этом учитывалось, что $r \ll 1$.

Таким образом, формулы (63)—(65) дают, вообще говоря, различные предсказания для зависимости $\Delta\omega/\omega$ от скоростей источника и поглотителя. Как было отмечено в [44], если источник и поглотитель закреплены на определенных расстояниях от центра быстро вращающегося ротора, то \vec{u} перпендикулярно \vec{e} для всех лучей, связывающих источник и поглотитель. Для таких экспериментов сравниваемые теории дают следующие предсказания:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^{\text{pre-rel}} = -\frac{\vec{w}\vec{u}}{c^2}, \quad (66)$$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^{\text{rel}} = \frac{1}{2c^2}(v_a^2 - v_s^2), \quad (67)$$

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^{\text{anis-rel}} = \frac{1}{2c^2}(v_a^2 - v_s^2) - \frac{rc \vec{v} \vec{u}}{c^2}. \quad (68)$$

В формуле (68) мы не случайно оставили c в числителе последнего члена. Сравнивая этот член с (66), мы можем назвать $rc \vec{v}$ скоростью «эфирного ветра». Таким образом, специальная релятивистская теория анизотропного пространства в некотором смысле возрождает понятие эфирного ветра, но уже в рамках строгого релятивизма и на прочной математической основе.

Обсуждая в работе [44] различные эксперименты, в которых наиболее точно и непосредственно может быть проверен принцип относительности Эйнштейна, Меллер предложил исследовать относительный сдвиг частот между источником и поглотителем, помещенными на одинаковых расстояниях от центра ротора. При этом предполагалось (в соответствии с формулами (66), (67) для $v_a = v_s$), что либо удастся обнаружить очень малый эфирный ветер в дорелятивистском его понимании, либо, в случае нулевого результата, эксперимент, дав верхний предел на скорость эфирного ветра, станет наиболее прямой и точной проверкой специального принципа относительности Эйнштейна. На фоне подтвержденной огромным количеством фактов теории относительности дорелятивистская теория гипотетического абсолютного эфира и представление об эфирном ветре кажутся настолько изжившими себя, что вряд ли кто-нибудь, приступая к эксперименту по проверке принципа относительности, верил в то, что удастся обнаружить эфирный ветер. Теперь, после построения последовательной релятивистской теории анизотропного пространства-времени, подобные эксперименты приобретают новый, активный смысл. Их задача — открыть локальную анизотропию, а при нулевом результате — дать верхний предел на возможную анизотропию, т.е. выяснить, до какой степени справедливо представление о локальной изотропии пространства и времени, лежащее в основе обычной СТО. Если с этой точки зрения рассматривать эксперимент [45], в котором искали доплеровский сдвиг частоты между мессбауэровским источником и резонансным поглотителем, закрепленными на противоположных концах ротора, то можно получить оценку на анизотропию. Действительно, соответственно постановке эксперимента [45], $v_a = v_s$, и формула (68) дает $(\Delta\omega/\omega)^{\text{anis-rel}} = rc \vec{v}(\vec{v}_a - \vec{v}_s)/c^2$, что с точностью до обозначения $rc \vec{v} = \vec{w}$ представляет величину, искавшуюся в эксперименте. В результате имеем $r = (1,3 \pm 2,4) \cdot 10^{-8}$.

И, наконец, посмотрим, каковы вообще предельные возможности мессбауэровской техники в отношении обнаружения локальной анизо-

тропии пространства. Так как максимальный относительный частотный сдвиг вследствие анизотропии равен $2rv/c$, то при $v/c \approx 10^{-5}$ и экспериментальном разрешении $\sim 10^{-16}$ получаем $r \approx 5 \cdot 10^{-12}$.

3. МЕТРИКА ИСКРИВЛЕННОГО ЛОКАЛЬНО-АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ. СОБСТВЕННОЕ (ЛОКАЛЬНОЕ) ВРЕМЯ, 3-ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ И СИНХРОНИЗАЦИЯ ЧАСОВ

Центральное место в теории анизотропного пространства-времени занимает проблема происхождения анизотропии. Решение этой проблемы требует соответствующего обобщения исходной финслеровой модели (10) плоского пространства событий — обобщения, при котором, наряду с кривизной, финслерово пространство приобретает локальную, изменяющуюся от точки к точке, анизотропию. Именно в рамках такой более общей модели появляется возможность рассматривать материю в качестве источника не только кривизны, но и поля локальной анизотропии. Обобщенную модель пространства-времени представляет следующая финслерова метрика:

$$ds = \left[\frac{(v_i dx^i)^2}{g_{ik} dx^i dx^k} \right]^{r/2} \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}. \quad (69)$$

Помимо риманова метрического тензора g_{ik} , связанного с гравитационным полем, данная метрика зависит от двух дополнительных полей — скалярного поля r , определяющего величину локальной анизотропии, и нуль-векторного поля v_i , указывающего локально выделенные направления в пространстве-времени.

В каждой точке пространства-времени (69) плоские касательные пространства (10) имеют (в противоположность риманову случаю) свою собственную геометрию, т.е. в каждой точке они имеют свои собственные значения параметров r и \vec{v} , определяющих анизотропию. Эти значения являются ни чем иным, как значениями полей $r(x)$ и $v_i(x)$ в соответствующих пространственно-временных точках (см. рис.3).

Выше уже отмечалось, что источником полей $g_{ik}(x)$, $r(x)$, $v_i(x)$ служит распределенная материя. Поэтому, ввиду (45) и в согласии с принципом Маха, инертность тела и инерциальные силы, возникающие при его уско-

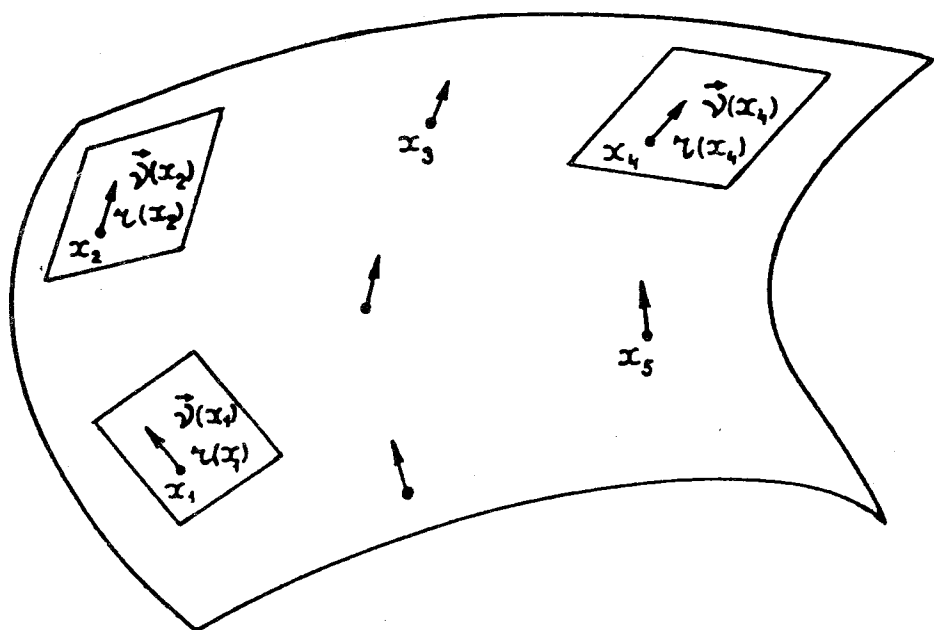


Рис.3. Искривленное финслерово пространство (69) и плоские касательные пространства (10)

рении, зависят от локализации тела, а в конечном счете — от распределения и движения внешней материи.

Комплекс взаимодействующих полей g_{ik} , r , v_i образует вместе с материей единую динамическую систему, количественное описание которой входит в задачу общей релятивистской теории локально-анизотропного пространства-времени и гравитации или, короче, финслеровой теории гравитации. Естественно, что с точки зрения этой теории все соотношения, полученные ранее в модели плоского анизотропного пространства событий, носят локальный характер.

Теперь нужно выяснить, каким образом разность координат двух событий в пространстве событий (69) связана с наблюдаемыми (локальным временем, 3-пространственным расстоянием), как может быть установлена одновременность двух событий, происходящих в различных точках, и как может быть осуществлена синхронизация часов. Ответы на все эти вопросы удастся получить с помощью процедуры обмена световыми сигналами между двумя точками (см. [15]). Здесь мы приведем только окончательные формулы.

Интервал $d\tau$ собственного времени, измеренный наблюдателем, покоящимся в точке с пространственными координатами x^α , связан с промежутком координатного времени dx^0 соотношением

$$d\tau = \frac{1}{c} \left(\frac{v_0^2}{g_{00}} \right)^{r/2} \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (70)$$

3-пространственное расстояние между двумя точками определяется формулой

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (71)$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = \left(\frac{v_0^2}{g_{00}} \right)^r \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \right). \quad (72)$$

Наконец, промежуток координатного времени между двумя событиями, одновременно происходящими в соседних точках, выражается формулой

$$\Delta x^0 = -g_{0\alpha} dx^\alpha / g_{00}. \quad (73)$$

4. ГАМИЛЬТОНОВЫ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНОГО ТЕЛА И УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА

Действие для пробного тела в локально-анизотропном пространстве естественно определить с помощью интеграла

$$S = -mc \int_a^b ds, \quad (74)$$

где ds имеет вид (69). Формула (74) обобщает известное выражение действия для пробного тела во внешнем гравитационном поле $g_{ik}(x)$ и устанавливает конкретный вид взаимодействия тела с внешним скалярным $r(x)$ и нуль-векторным $v_i(x)$ полями, задающими локальную анизотропию пространства-времени. Таким образом, движение пробного тела во внешних полях g_{ik} , r , v_i должно определяться из принципа наименьшего

действия $\delta S = -mc\delta \int_a^b ds = 0$. При этом мировые линии пробного тела

являются универсальными кривыми (геодезическими финслерова пространства (69)).

Вычислим вариацию действия (74). Имеем

$$\delta S = -m c u_l \delta x^l \Big|_a^b + m c \int_a^b \left\{ \frac{d u_l}{d s} - \left[\frac{\partial r}{\partial x^l} \ln \left(\frac{v_i dx^i}{\sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}} \right) + r \frac{\partial v_i}{\partial x^l} \frac{dx^i}{v_k dx^k} + \frac{1-r}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^i dx^k}{g_{jn} dx^j dx^n} \right] \right\} \delta x^l ds. \quad (75)$$

В этом выражении

$$u_l = \left[\frac{v_i dx^i}{\sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}} \right]^r \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k} \left[(1-r) \frac{g_{lj} dx^j}{g_{ik} dx^i dx^k} + r \frac{v_l}{v_i dx^i} \right]. \quad (76)$$

Если мы варьируем траекторию при условии $(\delta x^l)|_a = (\delta x^l)|_b = 0$, то принцип наименьшего действия дает, согласно (75), уравнения движения или геодезических:

$$\frac{d u_l}{d s} = \frac{\partial r}{\partial x^l} \ln \frac{v_i v^i}{\sqrt{v_k v^k}} + r \frac{\partial v_i}{\partial x^l} \frac{v^i}{v_k v^k} - \frac{1-r}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{v^i v^k}{v_n v^n}. \quad (77)$$

Ясно, что в качестве параметра на геодезической выбрана ее длина и введено обозначение $v^i = dx^i/ds$ для кинематической 4-скорости. Тогда из определения (69) следует, что

$$\left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{v_k v^k}} \right)^r \sqrt{v_l v^l} = 1. \quad (78)$$

При этом условии выражение (76) принимает вид

$$u_l = (1-r) \frac{v_l}{v_k v^k} + r \frac{v_l}{v_k v^k}. \quad (79)$$

u_l разумно назвать динамической 4-скоростью, т.к. благодаря (75) она связана с 4-импульсом p_l формулой

$$p_l = m c u_l = -\partial S / \partial x^l. \quad (80)$$

Уравнения (77), в которых u_l задается формулой (79), представляют собой четыре уравнения второго порядка на $x^i(s)$ и являются уравнениями

Эйлера — Лагранжа для данной вариационной задачи. Очевидно, что (78) сохраняется в силу этих уравнений.

Перейдем теперь в уравнениях (77) — (79) от динамических переменных (x^i, v^j) к переменным (x^i, u_j) . Учитывая, что поле v_i — нуль-векторное, т.е. $v_i v^i = 0$, из (79) получаем

$$v^i = (1+r) \frac{u^i}{u_l u^l} - r \frac{v^i}{v_k u^k}. \quad (81)$$

Подставляя (81) в (77), записываем уравнения движения в виде восьми уравнений первого порядка на величины (x^i, u_j) :

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial x^i} \ln \frac{(1+r)(v^k u_k)^2}{(1-r)(g^{lm} u_l u_m)} + \frac{\partial v^p}{\partial x^i} \frac{2ru_p}{v^k u_k} - \frac{\partial g^{nl}}{\partial x^i} \frac{(1+r)u_n u_l}{g^{jk} u_j u_k} \right\}, \quad (82)$$

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{(1+r)g^{jk} u_k}{g^{lm} u_l u_m} - \frac{rv^i}{v^k u_k}. \quad (83)$$

Из (78), с учетом (81), следует, что

$$H(x^i, u_j) \stackrel{\text{def}}{=} (1-r)^{-(1-r)/2} (1+r)^{-(1+r)/2} \left(\frac{u_l v^l}{\sqrt{u_k u^k}} \right)^{-r} \sqrt{u_l u^l} = 1. \quad (84)$$

Выражение (84) сохраняется в силу (82), (83). Уравнения (82) и (83) представляют собой уравнения Гамильтона и могут быть записаны в стандартном виде

$$\frac{du_i}{ds} = - \frac{\partial H}{\partial x^i}; \quad \frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial u_i} \quad (85)$$

с функцией Гамильтона $H(x^i, u_j)$, определяемой формулой (84). Из (82) видно, что при движении в статических полях g_{ik} , r , v_i сохраняется полная энергия частицы $\mathcal{E} = mc^2 u_0$.

Используя равенство (80), подставим $-(1/mc) (\partial S / \partial x^l)$ вместо u_l в (84). В результате получим уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\left[\frac{(v^l \partial S / \partial x^l)^2}{g^{kj} (\partial S / \partial x^k) (\partial S / \partial x^j)} \right]^{-r} g^{kj} \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{\partial S}{\partial x^j} = m^2 c^2 (1+r)^{(1+r)} (1-r)^{(1-r)}. \quad (86)$$

Уравнение для эйконала Ψ имеет, очевидно, вид

$$g^{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} = 0, \quad (87)$$

т.е. определяется лишь полем $g_{ik}(x)$.

5. ДЕЙСТВИЕ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Рассмотрим прежде всего действие для пылевидной материи, частицы которой не взаимодействуют. Тогда очевидно, что

$$S_M = - \sum m \int ds. \quad (88)$$

Здесь ds дается формулой (69), а сумма берется по всем частицам; скорость света положена равной единице.

Переходя от дискретного к непрерывному распределению массы покоя, введем величину ее плотности

$$\rho(x) = \frac{dm}{[(v_0^2/g_{00})^{3r/2} \sqrt{-g/g_{00}} d^3x]}. \quad (89)$$

Выражение, стоящее в знаменателе этой формулы, определяет, согласно (71), (72), элемент объема 3-пространства. Наряду с $\rho(x)$ рассмотрим еще $\tilde{\rho}(x) = dm/d^3x$, т.е. координатную плотность массы покоя. Заменяя теперь в (88) сумму по частицам интегралом по объему, имеем

$$S_M = - \int \tilde{\rho}(x) \frac{ds}{dx^0} d^4x = - \int \frac{\rho(x)}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{v_0^2}{g_{00}} \right)^{3r/2} \frac{ds}{dx^0} \sqrt{-g} d^4x. \quad (90)$$

Так как S_M является скаляром, то скаляром является и выражение

$$\frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{v_0^2}{g_{00}} \right)^{3r/2} \left(\frac{ds}{dx^0} \right)$$

в последнем интеграле. Эту величину можно записать в виде явной скалярной функции состояния, если ввести инвариантную плотность $\rho^*(x)$, представляющую собой $\rho(x)$ в сопутствующей системе отсчета. В результате

$$\frac{\rho(x)}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{v_0^2}{g_{00}} \right)^{3r/2} \frac{ds}{dx^0} = \rho^*(x) \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} \quad (91)$$

и действие для пылевидной материи в локально-анизотропном пространстве принимает вид

$$S_M = - \int \rho^* \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} \sqrt{-g} d^4 x. \quad (92)$$

Сравнение (92) и первого интеграла (90) приводит к важному для дальнейшего соотношению

$$\rho^* \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} \sqrt{-g} = \rho \frac{ds}{dx^0}. \quad (93)$$

С помощью (93) легко показать, что стандартное уравнение неразрывности $\partial(\rho dx^i/dx^0)/\partial x^i = 0$, которому должно удовлетворять движение пылевидной материи, означает обращение в нуль ковариантной дивергенции 4-вектора плотности тока массы покоя

$$j^n = \rho^* \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} v^n. \quad (94)$$

Рассмотрим теперь упругую жидкость, обладающую потенциальной энергией сжатия. Полную инвариантную плотность массы покоя жидкости обозначим μ^* . Она является функцией от давления и включает в себя потенциальную энергию сжатия. Интеграл действия для жидкости в локально-анизотропном пространстве получается путем прямого обобщения выражения (92) для пылевидной материи. Таким образом, находим

$$S_M = - \int \mu^* \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} \sqrt{-g} d^4 x. \quad (95)$$

Для описания движения сжимаемой жидкости введем, следуя [47], новую величину ρ^* , определив ее посредством дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho^*}{\rho^*} = \frac{d\mu^*}{\mu^* + p} \quad (96)$$

и условия $\rho^* = \mu^*$ при $p = 0$. Использование ρ^* оправдано тем, что соответствующий ей ток (94) будет в силу уравнений движения удовлетворять закону сохранения.

Запишем вариацию $\delta S_M = \int (1/\sqrt{-g}) (\delta S_M/\delta x^k) \delta x^k(x) \sqrt{-g} d^4x$ действия (95), возникающую вследствие вариации $\delta x^k(x)$ движения жидкости, и вычислим вариационную производную $(1/\sqrt{-g}) (\delta S_M/\delta x^k)$. Так как вариация $\delta\mu^*$ связана с вариацией $\delta\rho^*$ соотношением (96), то для вычисления δS_M нам необходимо найти $\delta\rho^*$ и δv^i . С этой целью запишем соотношение (93) и $v^i = dx^i/ds$ через лагранжевы переменные $x^i = x^i(x^j)$. Для данной частицы жидкости ее пространственные координаты x^α фиксированы. Поэтому $dx^i = (\partial x^i/\partial x^0) dx^0$ и, следовательно,

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^0} / \left\{ \left[\left(v_j \frac{\partial x^j}{\partial x^0} \right)^2 / \left(g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^0} \frac{\partial x^k}{\partial x^0} \right) \right]^{r/2} \sqrt{g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^0} \frac{\partial x^k}{\partial x^0}} \right\}, \quad (97)$$

$$\rho^* \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} \sqrt{-g} J =$$

$$\underset{\sim}{\rho^*} (x^\alpha) \left\{ \left[\left(v_j \frac{\partial x^j}{\partial x^0} \right)^2 / \left(g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^0} \frac{\partial x^k}{\partial x^0} \right) \right]^{r/2} \sqrt{g_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^0} \frac{\partial x^k}{\partial x^0}} \right\}, \quad (98)$$

где J — абсолютное значение якобиана $D(x)/D(x^*)$.

Исходя из (97) и (98), находим

$$\begin{aligned} \delta\rho^* = & -(\rho^* \delta x^k)_{;k} + \rho^* v^i \left[\frac{(1+3r)v_k}{v_n v^n} - \frac{3r v_k}{v_n v^n} \right] (\delta x^k)_{;i} - \\ & - 3\rho^* \left(\frac{r v^i v_{i;k}}{v_n v^n} + r_{;k} \ln \frac{v_n v^n}{\sqrt{v_n v^n}} \right) \delta x^k, \end{aligned} \quad (99)$$

$$\delta v^i = (\delta_k^i - v^i u_k) v^n (\delta x^k)_{;n} - \left[v_{;k}^i + v^i \left(\frac{r v^n v_{n;k}}{v_n v^n} + r_{;k} \ln \frac{v_n v^n}{\sqrt{v_n v^n}} \right) \right] \delta x^k, \quad (100)$$

где u_k — динамическая 4-скорость (79).

Соотношения (96), (99), (100) позволяют вычислить вариацию функционала (95) и, таким образом, получить явное выражение для вариационной производной и уравнений $(1/\sqrt{-g}) (\delta S_M / \delta x^k) = 0$ движения жидкости. Следствием свертки этих уравнений с v^k является закон сохранения: $j_{;n}^n = 0$, где j^n определяется формулой (94). Поэтому величина ρ^* , введенная с помощью (96), должна интерпретироваться как инвариантная плотность той части массы покоя, которая при движении не меняется.

В итоге уравнения релятивистской гидродинамики в локально-анизотропном пространстве принимают вид

$$\begin{aligned} & (\dot{\mu} + p) \left[\frac{Du_i}{ds} - r \frac{v_{;i}^k u_k}{v^n u_n} - \frac{r_{;i}}{2} \ln \frac{(1+r)(v^n u_n)^2}{(1-r)(u^n u_n)} \right] + u_i \frac{dp}{ds} - \\ & - p_{;i} - 4rpv^k \left[\left(\frac{v_i}{v_n v^n} - \frac{v_i}{v_n v^n} \right)_{;k} - \left(\frac{v_k}{v_n v^n} - \frac{v_k}{v_n v^n} \right)_{;i} \right] - \\ & - 4\rho^* \left(\frac{v_i}{v_n v^n} - \frac{v_i}{v_n v^n} \right) \frac{d(rp/\rho^*)}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (101)$$

$$\left[\rho^* \left(\frac{v_k v^k}{\sqrt{v_k v^k}} \right)^{4r} v^n \right]_{;n} = 0, \quad (102)$$

причем свертка (101) с v^i тождественно равна нулю. В этих уравнениях D обозначает риманов ковариантный дифференциал, а символ «;» — риманову ковариантную производную, p — давление.

Для пылевидной материи $p = 0$ и (101) сводятся к уравнениям геодезического движения (82), записанным в ковариантной форме. В предельном случае $r = 0$ (101) и (102) переходят в известные уравнения общей теории относительности.

6. ЛОКАЛЬНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ. ОБОБЩЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ГИЛЬБЕРТА — ФОКА И КООРДИНАТНЫХ УСЛОВИЙ ДЕ-ДОНДЕРА ДЛЯ ФИНСЛЕРОВА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Замечательным свойством финслеровой метрики (69) является ее инвариантность относительно совместных локальных конформных преобразований поля g_{ik} и масштабных преобразований поля v_i :

$$g_{ik} \rightarrow \tilde{g}_{ik} = e^{2\sigma(x)} g_{ik}, \quad (103)$$

$$v_i \rightarrow \tilde{v}_i = e^{\frac{r-1}{r}\sigma(x)} v_i, \quad (104)$$

где $\sigma(x)$ — произвольная функция.

Благодаря отмеченной инвариантности, величина собственного времени (70), 3-пространственная геометрия (71), уравнение эйконала (87), уравнения движения пробных тел (82), (83), (86) и, наконец, уравнения движения жидкости (101), (102) также обладают свойством инвариантности относительно (103), (104). Все это наводит на мысль, что поля, связанные преобразованиями (103), (104), описывают одну и ту же физическую ситуацию, а сами преобразования (103), (104) имеют смысл локальных калибровочных преобразований. Обнаруженная здесь локальная калибровочная инвариантность играет ключевую роль при обобщении формализма эйнштейновской теории гравитации с учетом финслеровой структуры пространства-времени.

Как известно [47], в случае, когда материя представлена сжимаемой жидкостью (а именно такой случай здесь и рассматривается), уравнения Эйнштейна вытекают из вариационного принципа Гильберта — Фока:

$\delta S = -\delta \int (R/2 + \mu^*) \sqrt{-g} d^4x = 0$. Наша задача состоит прежде всего в построении обобщенного вариационного принципа, позволяющего получить динамические уравнения для более сложной системы, включающей в себя, помимо жидкости и поля g_{ik} , еще поля r , v_i , характеризующие локальную анизотропию пространства-времени. При этом, как уже было сказано, мы будем руководствоваться требованием локальной калибровочной инвариантности.

Опыт работы с калибровочными теориями подсказывает, что для формулировки вариационного принципа, инвариантного относительно локальных преобразований (103), (104), динамическую систему, состоящую из полей g_{ik} , v_i , r и сжимаемой жидкости, необходимо дополнить

двумя абелевыми векторными калибровочными полями A_i и B_i . Градиентные преобразования полей A_i и B_i , сопровождающие преобразования (103), (104), имеют вид

$$A_i \rightarrow \tilde{A}_i = A_i + a\sigma_{;i}, \quad (105)$$

$$B_i \rightarrow \tilde{B}_i = B_i + b \left(\frac{r-1}{r} \sigma \right)_{;i}. \quad (106)$$

Попутно отметим, что калибровочное поле A_i (правда, обозначенное другим символом) впервые было введено в работах Вейля [48, 49]. Однако предложенная им интерпретация A_i как электромагнитного поля теряет свой смысл после наложения калибровочного условия, превращающего A_i в массивное векторное поле и сводящего уравнения вейлевой теории к уравнениям Эйнштейна с Λ -членом и тензором энергии-импульса, отвечающим этому массивному полю. Уместно также отметить, что все соотношения, представленные в разд. 6 и 7, записаны в рационализированной геометрической системе единиц. В такой системе действие выражается в единицах $c^3\eta/(8\pi k)$ и имеет размерность см^2 . Здесь c — скорость света, η — константа перенормировки гравитационной постоянной, k — наблюдаемая ньютонова гравитационная постоянная.

Для динамической системы, состоящей из полей g_{ik} , r , v_i , A_i , B_i и сжимаемой жидкости, функционал, инвариантный относительно совместных преобразований (103)–(106), оказывается следующим:

$$\begin{aligned} S = \int \left\{ -\frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right)^{2r} [\psi(r)W - \varphi(r) r_{;i} r^{;i}] - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} f(r) \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right)^{2(r-1)} \mathfrak{N}_{ik} \mathfrak{N}^{ik} + \frac{\lambda^2}{2} f(r) \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right)^{2(2r-1)} v_i v^i - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (F_{ik} F^{ik} + \mathfrak{F}_{ik} \mathfrak{F}^{ik}) - \mu \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{v_k v^k}} \right)^{4r} \right\} \sqrt{-g} d^4x, \quad (107) \end{aligned}$$

где $\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right) = (v_k r^{;k} / \sqrt{-r_{;i} r^{;i}})$, $\psi(r)$, $\varphi(r)$, $f(r)$ — функции от поля r ,

явный вид которых будет представлен в разд. 8; $W = R + \frac{6}{a} A_{;m}^m - \frac{6}{a^2} A_m A^m$

— скаляр Вейля; $\mathfrak{N}_{ik} = v_{k;i} - v_{i;k} - \frac{1}{b} (v_k B_i - v_i B_k)$; a и b — константы;

$\lambda^2 = \lambda^2(x)$ — множитель Лагранжа; $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$; $\mathcal{F}_{ik} = B_{k;i} - B_{i;k}$; μ^* — полная инвариантная плотность массы покоя жидкости; v^i — поле скоростей жидкости. В принципе лагранжиан, отвечающий функционалу (107), мог бы быть дополнен членами вида $\sim A_i j^i$ и $\sim B_i j^i$, где j^i — ток, удовлетворяющий закону сохранения (102). Тогда полям A_i и B_i можно было бы придать смысл переносчиков «пятой силы». Однако, руководствуясь соображениями максимальной простоты, мы ограничимся здесь выражением (107).

С помощью поля A_i Вейлем [48, 49] была введена связность

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i - \frac{1}{a} \left(\delta_k^i A_l + \delta_l^i A_k - A^i g_{kl} \right), \quad (108)$$

которая, отличаясь от римановой связности Γ_{kl}^i тензорными добавками, остается инвариантной при преобразованиях (103), (105). Определение (108) позволяет так обобщить координатные условия де-Дондера [50], чтобы обеспечить их инвариантность относительно преобразований (103), (105). В результате, вместо условий $g^{kl} \Gamma_{kl}^i = 0$, мы будем иметь инвариантные относительно (103), (105) условия:

$$g^{kl} \Gamma_{kl}^i = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{ik})}{\partial X^k} + \frac{2}{a} A^i = 0. \quad (109)$$

Поскольку общекоординатные преобразования величин Γ_{kl}^i и Γ_{kl}^i совпадают, то, как легко заметить, для перехода от произвольных координат x^l к координатам X^k , в которых выполняется условие (109), нужно решить уравнение

$$\square X^k - \frac{2}{a} A^l \frac{\partial X^k}{\partial x^l} = 0, \quad (110)$$

где \square — риманов ковариантный оператор Д'Аламбера.

Динамическую систему, описываемую функционалом (107), можно сузить, выбрав поле A_i как чисто калибровочное поле. При этом оно выражается в виде градиента от скаляра, составленного из полей g_{ik} , r , v_i :

$$A^i = - \frac{a}{2} (\ln [\dots])^{,i}. \quad (111)$$

Здесь и ниже мы используем обозначение $[\dots] = \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{2r} \psi(r)$. Подставляя (111) в (107) и отбрасывая член, содержащий ковариантную дивергенцию, получаем искомый обобщенный вариационный принцип:

$$\begin{aligned}
 \delta S = \delta \int & \left\{ -\frac{1}{2} [\dots] R - \frac{3}{4} [\dots]^{-1} [\dots]_{;i} [\dots]^{;i} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{2r} \varphi r_{;i} r^{;i} - \frac{1}{4} f \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{2r-2} \mathcal{N}_{ik} \mathcal{N}^{ik} + \\
 & \left. + \frac{\lambda^2}{2} f \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{4r-2} v_i v^i - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{ik} \mathcal{G}^{ik} - \mu \left(\frac{v_i v^i}{\sqrt{v_k v^k}} \right)^{4r} \right\} \sqrt{-g} d^4 x = 0. \quad (112)
 \end{aligned}$$

Данный вариационный принцип приводит к системе ковариантных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{jk}} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta r} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta v_i} = 0, \\
 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta B_i} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta x^i} = 0, \quad v_i v^i = 0.
 \end{aligned}$$

Эта система описывает самосогласованную динамику финслерова пространства-времени (69), калибровочного поля B_i и сжимаемой жидкости.

Уравнения, составляющие указанную систему, равно как и обобщенные координатные условия

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{jk})}{\partial x^k} + (\ln [\dots])^{;i} = 0, \quad (113)$$

или

$$\square X^k + (\ln [\dots])^{;i} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} = 0, \quad (114)$$

инвариантны относительно совместных локальных калибровочных преобразований (103), (104), (106).

Найдем теперь калибровочно-инвариантное выражение для полного тензора энергии-импульса.

7. КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Запишем в явном виде тензорное полевое уравнение, полученное с помощью вариационного принципа (112). Имеем:

$$- [\dots] (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}) + [\dots]_{;i;k} - [\dots]_{;n}^n g_{ik} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{2r} \varphi(r; {}_i r; {}_k - \frac{1}{2} r; {}_n r; {}^n g_{ik}) - \\
& - \frac{3}{2} [\dots]^{-1} [\dots]_{,i} [\dots]_{,k} - \frac{1}{2} [\dots]_{,n} [\dots]^{,n} g_{ik} - \\
& - \mathfrak{F}_{il} \mathfrak{F}_k^l + \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{lm} \mathfrak{F}^{lm} g_{ik} + \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{2r-2} f (- \mathfrak{N}_{il} \mathfrak{N}_k^l + \frac{1}{4} \mathfrak{N}_{lm} \mathfrak{N}^{lm} g_{ik}) + \\
& + \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{4r-2} \mathfrak{A}^2 v_i v_k + \left[\frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} \dots \\ \dots \end{smallmatrix} \right)^{2r-2} f \mathfrak{N}_{lm} \mathfrak{N}^{lm} + \right. \\
& \left. + r(\mu^* - 3p) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \right] \left[\frac{v_i r; {}_k + v_k r; {}_i}{v^n r; {}_n} - \frac{r; {}_i r; {}_k}{r^n r; {}_n} \right] + \\
& + \left\{ [(1-r)\mu^* + (1+3r)p] \frac{v_i v_k}{v^n v_n} - p g_{ik} \right\} \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v_n}} \right)^{4r} = 0, \quad (115)
\end{aligned}$$

где p — давление.

До сих пор на пространственно-временном многообразии мы рассматривали две метрики — риманову, определяемую метрическим тензором g_{ik} , и финслерову, характеризующуюся метрической функцией (69). Введем теперь фоновое пространство Минковского, задав на том же многообразии соответствующий метрический тензор \bar{g}_{ik} . Чтобы лучше ориентироваться в дальнейших выкладках, отметим, что в рамках биметрического подхода к эйнштейновской теории гравитации гармонические координаты риманова пространства обычно рассматриваются в качестве ортогональных галилеевых координат фонового пространства Минковского. При этом локализация энергии-импульса гравитационного поля достигается путем замены в псевдотензоре Ландау — Лифшица [51] римановой связности Γ_{kl}^i на риманов тензор аффинной деформации $P_{kl}^i = \bar{\Gamma}_{kl}^i - \Gamma_{kl}^i$, где $\bar{\Gamma}_{kl}^i$ — координатная (фоновая) связность Минковского. Возникающий в результате такой процедуры тензор энергии-импульса совпадает с псевдотензором лишь в гармонических координатах, для которых по определению $\bar{\Gamma}_{kl}^i = 0$. Корректное математическое исследование проблемы локализации энергии-импульса гравитационного поля содержится в работах [52,53]. Там же можно найти ссылки на первоисточники.

С учетом финслеровой структуры пространства-времени локализация энергии-импульса должна быть осуществлена калибровочно-инвариантным образом. Чтобы достичь этой цели, обратимся к уравнению (115). При калибровочном преобразовании (103), (104), (106) левая часть уравнения (115) преобразуется с помощью фактора $e^{-2\sigma(x)}$. Легко проверить, что, подняв индексы в этом уравнении с помощью g^{jk} и умножив его на $[\cdot \cdot \cdot](-g)/(-\bar{g})$, где \bar{g} — определитель метрического тензора фонового пространства Минковского, мы получим эквивалентное тензорное уравнение, но уже с калибровочно-инвариантной левой частью. Для такого уравнения справедливо представление:

$$-\textcircled{h}{}^{ikl}{}_{|l} + \textcircled{\mathcal{F}}{}^{ik} = 0. \tag{116}$$

Антисимметричный по индексам k, l калибровочно-инвариантный (что отмечено кружком) тензор $\textcircled{h}{}^{ikl}$ определяется формулой:

$$\textcircled{h}{}^{ikl} = \mathcal{A}{}^{iklm}{}_{|m}, \tag{117}$$

$$\mathcal{A}{}^{iklm} = \frac{1}{2} \frac{(-g)}{(-\bar{g})} [\cdot \cdot \cdot]^2 (g^{jk} g^{lm} - g^{jl} g^{km}). \tag{118}$$

Здесь и ниже прямой вертикальной чертой обозначается ковариантная производная по метрике Минковского.

В силу (116) имеет место интегрируемый дифференциальный закон сохранения

$$\textcircled{\mathcal{F}}{}^{ik}{}_{|k} = 0. \tag{119}$$

Чтобы записать тензор энергии-импульса $\textcircled{\mathcal{F}}{}^{ik}$ всей динамической системы в явном калибровочно-инвариантном виде, воспользуемся формулами (108), (111) и введем вейлев тензор аффинной деформации

$$\begin{aligned} P^i{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\Gamma}^i{}_{kl} - \Gamma^i{}_{kl} &= \bar{\Gamma}^i{}_{kl} - \Gamma^i{}_{kl} - \frac{1}{2[\cdot \cdot \cdot]} (\delta^i{}_k [\cdot \cdot \cdot]{}_{|l} + \\ &+ \delta^i{}_l [\cdot \cdot \cdot]{}_{|k} - g_{kl} [\cdot \cdot \cdot]{}^{ij}), \end{aligned} \tag{120}$$

который является инвариантом калибровочного преобразования (103), (104). В итоге для симметричного тензора $\textcircled{\mathcal{F}}{}^{ik}$ возникает следующая формула:

$$\begin{aligned} \textcircled{\mathcal{F}}{}^{ik} &= \frac{(-g)}{(-\bar{g})} [\cdot \cdot \cdot] \left\{ [\cdot \cdot \cdot]{}^{w_{ik}} + \left(\begin{smallmatrix} \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \end{smallmatrix} \right)^{2r} \varphi(r) (r^{;i} r^{;k} - \frac{1}{2} r_{;n} r^{;n} g^{jk}) - \right. \\ &= \mathcal{F}^i{}_l \mathcal{F}{}^{kl} + \frac{1}{4} \mathcal{F}{}_{lm} \mathcal{F}{}^{lm} g^{jk} + \left(\begin{smallmatrix} \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \end{smallmatrix} \right)^{2r-2} f(r) (-\mathcal{H}^i{}_l \mathcal{H}{}^{kl} + \frac{1}{4} \mathcal{H}{}_{lm} \mathcal{H}{}^{lm} g^{jk}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right)^{4r-2} f(r) \lambda^2 v^i v^k + \left[\frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right)^{2r-2} f(r) \eta_{lm} \eta^{lm} + \right. \\
& \left. + r(\mu^* - 3\rho) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \right] \cdot \left[\frac{v^i r^{i;k} + v^k r^{i;i}}{v^n r_{;n}} - \frac{r^{i;i} r^{i;k}}{r^{i;n} r_{;n}} \right] + \\
& \left. + \left(l(1-r)\mu^* + (1+3r)\rho \right) \left| \frac{v^i v^k}{v^n v_n} - \rho g^{ik} \right| \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v_n}} \right)^{4r} \right\}. \quad (121)
\end{aligned}$$

Входящий сюда тензор l^{ik} выражается через вейлев тензор аффинной деформации (120) точно так же, как псевдотензор Ландау — Лифшица — через риманову связность Γ_{kl}^i .

Для того чтобы получить интегральные законы сохранения в произвольных координатах x^i , введем сначала ортогональные галилеевы координаты X^a фонового пространства Минковского, отождествив их с координатами, удовлетворяющими обобщенным координатным условиям де-Дондера (113), (114). В координатах X^a по определению

$$\bar{g}^{jk} = \text{diag} (1, -1, -1, -1), \quad \bar{\Gamma}_{kl}^i = 0.$$

Теперь так же, как это делал Фок [47], запишем с помощью X^a десять независимых ковариантных векторов:

$$\xi_i^a = \frac{\partial X^a}{\partial x^i}, \quad (122)$$

$$\xi_i^{ab} = X^a \frac{\partial X^b}{\partial x^i} - X^b \frac{\partial X^a}{\partial x^i} = X^a \xi_i^b - X^b \xi_i^a. \quad (123)$$

Каждый из этих векторов удовлетворяет уравнениям Киллинга

$$\xi_{i;l} + \xi_{l;i} = 0. \quad (124)$$

Поэтому для любого такого вектора в силу (119) выполняется равенство:

$$(\xi_i \mathfrak{F}^{ik})_{;k} = 0. \quad (125)$$

Интегрируя (125) по 4-объему, заключенному между любыми двумя бесконечными пространственно-подобными гиперповерхностями и используя теорему Гаусса, получаем

$$\int (\xi_i \mathfrak{F}^{ik})_{;k} \sqrt{-g} d^4x = \int \xi_i \mathfrak{F}^{ik} \sqrt{-g} dS_k = 0. \quad (126)$$

Данное равенство означает, что с каждым вектором Киллинга ξ_i связана своя сохраняющаяся величина $\int \xi_i \textcircled{\mathcal{J}}^{ik} \sqrt{-g} dS_k$, причем интегрирование здесь производится по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство. В частности, подставляя в этот интеграл четыре вектора (122), отвечающие независимым трансляциям пространства Минковского, получаем соответствующие компоненты сохраняющегося полного 4-импульса:

$$p^a = \int \xi_i^a \textcircled{\mathcal{J}}^{ik} \sqrt{-g} dS_k. \quad (127)$$

Аналогично шести векторам (123) соответствуют шесть независимых компонент сохраняющегося полного 4-момента импульса

$$\mathfrak{M}^{ab} = \int \xi_i^{ab} \textcircled{\mathcal{J}}^{ik} \sqrt{-g} dS_k. \quad (128)$$

Если в (127), (128) интегрирование производить по гиперповерхности $x^0 = \text{const}$, то с учетом (122), (123) десять независимых интегралов движения принимают вид:

$$p^a = \int \frac{\partial X^a}{\partial x^i} \textcircled{\mathcal{J}}^{i0} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (129)$$

$$\mathfrak{M}^{ab} = \int \left(X^a \frac{\partial X^b}{\partial x^i} - X^b \frac{\partial X^a}{\partial x^i} \right) \textcircled{\mathcal{J}}^{i0} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (130)$$

В формулах (127), (128) интегрирование по гиперповерхности можно преобразовать в интегрирование по удаленной двумерной поверхности, охватывающей данную гиперповерхность. Для этого необходимо воспользоваться равенствами, вытекающими из соотношений (116)–(118) и из свойств векторов Киллинга (122), (123). Эти равенства имеют вид:

$$\xi_i^a \textcircled{\mathcal{J}}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \sqrt{-g} \xi_i^a \textcircled{h}^{ikl} \right\}, \quad (131)$$

$$\xi_i^{ab} \textcircled{\mathcal{J}}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \sqrt{-g} \left[\xi_i^{ab} \textcircled{h}^{ikl} - \xi_m^a \xi_i^b \textcircled{\lambda}^{iklm} \right] \right\}. \quad (132)$$

Подставляя (131) и (132) соответственно в (127) и (128) и учитывая антисимметрию фигурных скобок по индексам k, l , преобразуем интеграл по гиперповерхности в интеграл по охватывающей ее удаленной двумерной поверхности. В результате получим

$$p^a = \frac{1}{2} \oint \xi_i^a \textcircled{h}^{ikl} \sqrt{-g} df_{kl}^* \quad (133)$$

$$\mathfrak{M}^{ab} = \frac{1}{2} \oint [\xi_i^{ab} \textcircled{h}^{ikl} - \xi_m^a \xi_i^b \textcircled{\lambda}^{iklm}] \sqrt{-g} df_{kl}^* \quad (134)$$

Если в качестве области интегрирования в (127) и в (128) выбрать гиперповерхность $x^0 = \text{const}$, то в (133) и (134) двумерная поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной. На ней df_{kl}^* имеет отличные от нуля только компоненты с одним из индексов k или l , равным нулю. Обозначив, следуя [51], три компоненты $df_{0\alpha}^*$ элемента поверхности через df_α , получаем окончательно [56]:

$$\mathcal{P}^a = \oint \frac{\partial X^a}{\partial x^i} \textcircled{h}^{i0\alpha} \sqrt{-g} df_\alpha, \quad (135)$$

$$\mathfrak{M}^{ab} = \oint \left[\left(X^a \frac{\partial X^b}{\partial x^i} - X^b \frac{\partial X^a}{\partial x^i} \right) \textcircled{h}^{i0\alpha} - \frac{\partial X^a}{\partial x^m} \frac{\partial X^b}{\partial x^i} \textcircled{\lambda}^{i0\alpha m} \right] \sqrt{-g} df_\alpha. \quad (136)$$

Подчеркнем, что составляющие \mathcal{P}^a постоянного вектора и \mathfrak{M}^{ab} — постоянного антисимметричного тензора относятся к галилеевой ортогональной координатной системе X^l фоновое пространства Минковского, а формулы (129), (135) и (130), (136) для их вычисления записаны в произвольной системе координат x^i . Кроме того, \mathcal{P}^a и \mathfrak{M}^{ab} выражаются только через калибровочно-инвариантные величины. Поэтому они не зависят от выбора калибровки полей.

8. СИСТЕМА ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ, КООРДИНАТНЫЕ УСЛОВИЯ И ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В ФИКСИРОВАННОЙ КАЛИБРОВКЕ

Динамические уравнения, вытекающие из вариационного принципа (112), не являются функционально независимыми. Причина этого кроется в том, что соответствующие вариационные производные, в силу общей ковариантности, связаны четырьмя дифференциальными тождествами, а в силу локальной калибровочной инвариантности (103), (104), (106) — еще одним независимым тождеством. Отсюда ясно, что система динамических уравнений разумно неполна. В ее решении имеются четыре степени свободы, соответствующие выбору четырех координат, и одна степень свободы, соответствующая выбору калибровки. Координаты можно выбрать с помощью калибровочно-инвариантных координатных условий (113). После этого остается выбрать калибровочное условие. Наиболее удобной представляется калибровка, в которой

$$v_i r^{;i} = \sqrt{-r_{;i} r^{;i}}. \quad (137)$$

Чтобы окончательно сформулировать теорию, необходимо еще конкретизировать функции $\psi(r)$, $\varphi(r)$, $f(r)$, входящие в вариационный принцип (112). До сих пор на эти функции никаких ограничений не накладывалось. Теперь восполним этот пробел. Прежде всего остановимся на простейшем варианте теории, положив $f(r) = \text{const}$. Далее потребуем, чтобы в статическом центрально-симметричном случае уравнение на поле r сводилось к уравнению Пуассона с источником в виде следа тензора энергии-импульса жидкости. Отсюда однозначно следует, что

$$\psi(r) = 1 - r/\varepsilon, \quad (138)$$

$$\varphi(r) = -\frac{1}{2\xi\varepsilon(1 - r/\varepsilon)}, \quad (139)$$

где ξ — безразмерная константа взаимодействия жидкости (материи) с полем r , а $1/\varepsilon$ — безразмерная константа взаимодействия полей r и g_{ik} . При $\xi = 0$ наша теория сводится к теории Эйнштейна. Численное ограничение на константы ξ и $1/\varepsilon$ будет дано в разд. 10.

Используя систему единиц СГС и учитывая (138), (139), выпишем, наконец, основные соотношения теории в калибровке (137). Полная система полевых уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & -\left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right) \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}\right) - \frac{1}{\varepsilon} \left(r_{;i;k} - r^{;n}_{;n} g_{ik}\right) - \\ & - \frac{\varepsilon + 3\xi}{2\xi\varepsilon(\varepsilon - r)} \left(r_{;i} r_{;k} - \frac{1}{2} r_{;n} r^{;n} g_{ik}\right) - \mathfrak{F}_{il} \mathfrak{F}_k^l + \frac{1}{4} \mathfrak{F}_{lm} \mathfrak{F}^{lm} g_{ik} + \\ & + f \left(-\mathfrak{N}_{il} \mathfrak{N}_k^l + \frac{1}{4} \mathfrak{N}_{lm} \mathfrak{N}^{lm} g_{ik}\right) + f \lambda^2 v_i v_k + \\ & + f \left[\frac{1}{2} \mathfrak{N}_{lm} \mathfrak{N}^{lm} + \frac{8\pi k}{c^4 f \eta} r(\dot{\mu} - 3p) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}}\right)^{4r} \right] \left[\frac{v_i r_{;k} + v_k r_{;i}}{v^n r_{;n}} - \frac{r_{;i} r_{;k}}{r^{;n} r_{;n}} \right] + \\ & + \frac{8\pi k}{c^4 \eta} \left\{ (1 - r) \dot{\mu} + (1 + 3r)p \right\} \frac{v_i v_k}{v_n v^n} - p g_{ik} \left\{ \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}}\right)^{4r} \right\} = 0, \quad (140) \\ & -r_{;k}^{;k} + \frac{\xi f}{2} \mathfrak{N}_{lm} \mathfrak{N}^{lm} - 2\xi f(\varepsilon - r) \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \left[\frac{1}{2} \gamma_{lm} \gamma^{lm} + \frac{8\pi k}{c^4 f \eta} r(\mu^* - 3p) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \right] \left(\frac{r_{;n}{}^k}{r_{;n} r^{;n}} - \frac{v^k}{r_{;n} v^n} \right) \right\}_{;k} +$$

$$+ \frac{8\pi k \xi}{c^4 \eta} (\mu^* - 3p) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \left[1 + (\varepsilon - r) \ln \frac{(v_l v^l)^2}{v_n v^n} \right] = 0, \quad (141)$$

$$\gamma_{;k}{}^{ik} + \frac{1}{b} \gamma^{ik} B_k - \lambda^2 v^i - \left[\frac{1}{2} \gamma_{lm} \gamma^{lm} + \frac{8\pi k}{c^4 f \eta} r(\mu^* - 3p) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \right] \times$$

$$\times \frac{r^i}{\sqrt{-r_{;n} r^{;n}}} + \frac{8\pi k}{c^4 f \eta} r(\mu^* - 3p) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \frac{v^i}{v_l v^l} = 0, \quad (142)$$

$$\mathfrak{J}_{;k}{}^{ik} - \frac{f}{b} \gamma^{ik} v_k = 0, \quad (143)$$

$$v_k v^k = 0. \quad (144)$$

Обратим внимание на то, что калибровочное условие (137) добавлять к этой системе не нужно, т.к. (137) оказывается следствием уравнений (142) — (144). Еще отметим, что в качестве условий совместности полевых уравнений (140) — (144) выступают уравнения гидродинамики (101), (102).

Обобщенные координатные условия де-Дондера записываются в виде [55]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} g^{jk})}{\partial X^k} - \frac{r^i}{\varepsilon - r} = 0, \quad (145)$$

причем переход от произвольных координат x^l к координатам X^i , играющим роль галилеевых координат фонового пространства Минковского, осуществляется путем решения ковариантного уравнения

$$\square X^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^l} \frac{r^l}{\varepsilon - r} = 0. \quad (146)$$

Полный сохраняющийся 4-импульс и 4-момент импульса, умноженные на скорость света, вычисляются с помощью ковариантных формул (129), (135) и (130), (136). Фигурирующие в этих формулах величины $\textcircled{\lambda}^{iklm}$, \textcircled{h}^{ikl} , $\textcircled{\mathfrak{J}}^{ik}$, с учетом (137) — (139), представляются выражениями:

$$\textcircled{\lambda}^{iklm} = \frac{c^4 \eta}{16\pi k} \left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right)^2 \frac{(-g)}{(-\bar{g})} (g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km}), \quad (147)$$

$$\textcircled{h}^{ikl} = \textcircled{\lambda}^{iklm}{}_{lm}, \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\mathcal{F}}^{ik} = & \frac{(-g)}{(-\bar{g})} \left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right) \left\{ \left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right) \eta^w{}_{l ik} - \frac{c^4 \eta}{16\pi k \zeta (\varepsilon - r)} (r^{;i} r^{;k} - \frac{1}{2} r_{;n} r^{;n} g^{jk}) + \right. \\ & + \frac{c^4 \eta}{8\pi k} (-\mathcal{F}^i{}_l \mathcal{F}^{kl} + \frac{1}{4} \mathcal{F}_{lm} \mathcal{F}^{lm} g^{jk}) + \frac{c^4 \eta f}{8\pi k} (-\mathcal{N}^i{}_l \mathcal{N}^{kl} + \frac{1}{4} \mathcal{N}_{lm} \mathcal{N}^{lm} g^{jk} + \lambda^2 v^i v^k) + \\ & + f \left[\frac{c^4 \eta}{16\pi k} \mathcal{N}_{lm} \mathcal{N}^{lm} + \frac{r}{f} (\mu^* - 3p) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \right] \left[\frac{v^i r^{;k} + v^k r^{;i}}{v^n r_{;n}} - \frac{r^{;i} r^{;k}}{r^n r_{;n}} \right] + \\ & \left. + \left([(1-r) \mu^* + (1+3r)p] \frac{v^i v^k}{v_n v^n} - p g^{jk} \right) \left(\frac{v_l v^l}{\sqrt{v_n v^n}} \right)^{4r} \right\}, \quad (149) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} w_{i ik} = & \frac{c^4}{16\pi k} \left\{ (2P_{lm}^w P_{np}^w - P_{lp}^w P_{mn}^w - P_{ln}^w P_{mp}^w) (g^{il} g^{km} - g^{jk} g^{lm}) + \right. \\ & + g^{il} g^{mn} (P_{pl}^k P_{mn}^w + P_{mn}^k P_{lp}^w - P_{np}^k P_{lm}^w - P_{lm}^k P_{np}^w) + \\ & + g^{kl} g^{mn} (P_{lp}^i P_{mn}^w + P_{mn}^i P_{lp}^w - P_{np}^i P_{lm}^w - P_{lm}^i P_{np}^w) + \\ & \left. + g^{lm} g^{np} (P_{ln}^w P_{mp}^k - P_{lm}^w P_{np}^k) \right\}, \quad (150) \end{aligned}$$

причем

$$P_{kl}^w = \bar{\Gamma}_{kl}^i - \Gamma_{kl}^i + \frac{1}{2(\varepsilon - r)} (\delta_k^i r_{;l} + \delta_l^i r_{;k} - g_{kl} r^{;i}).$$

Для координат x^i , совпадающих с X^i , представленные формулы упрощаются, поскольку тогда $-\bar{g} = 1$ и $\bar{\Gamma}_{kl}^i = 0$.

Зависимость константы η от ζ и ε будет найдена в следующем разделе.

9. СТАТИЧЕСКОЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ И ЛОКАЛЬНАЯ АНИЗОТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМЫЕ ЖИДКИМ ШАРОМ

Используя развитый выше формализм, рассмотрим задачу Шварцшильда для финслерова пространства. Эта задача заключается в определении полей g_{ik} , r , v_i , порождаемых идеальным жидким шаром. Данные поля вместе с калибровочным полем B_i и давлением p должны удовлетворять системе полевых уравнений (140)—(144). В соответствии с симметрией задачи используем сферические координаты x^0, x^1, x^2, x^3 (где x^0 — мировое время, x^1 — радиальная координата, x^2 — полярный угол, x^3 — азимутальный угол) и будем искать решение уравнений (140)—(144) в виде

$$g_{ik} = g_{00}(x^1)\delta_i^0 \delta_k^0 + g_{11}(x^1)\delta_i^1 \delta_k^1 + g_{22}(x^1)\delta_i^2 \delta_k^2 + g_{33}(x^1, x^2)\delta_i^3 \delta_k^3, \quad (151)$$

$$r = r(x^1), \quad r_{;i} = r'(x^1)\delta_i^1, \quad (152)$$

$$v_i = v_0(x^1)\delta_i^0 + v_1(x^1)\delta_i^1, \quad (153)$$

$$B_i = B_0(x^1)\delta_i^0 + B_1(x^1)\delta_i^1, \quad (154)$$

$$p = p(x^1), \quad p_{;i} = p'(x^1)\delta_i^1. \quad (155)$$

Кинематическая 4-скорость определяется формулой

$$v^i = dx^i/ds. \quad (156)$$

Поскольку в рассматриваемой системе отсчета жидкость покоится, то для фиксированной ее частицы $dx^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Отсюда

$$ds = (v_0^2/g_{00})^{r/2} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (157)$$

$$v^i = \delta_0^i v^0(x^1) = \delta_0^i dx^0/ds. \quad (158)$$

Таким образом,

$$v^i = \delta_0^i (v_0^2/g_{00})^{-r/2} / \sqrt{g_{00}}. \quad (159)$$

С учетом (151)—(159), уравнения (142)—(144) дают:

$$v_0 = \sqrt{g_{00}}, \quad v_1 = \sqrt{-g_{11}}, \quad (160)$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = b(\ln v_0)', \quad \mathcal{F}_{ik} = 0, \quad (161)$$

т.е. поле B_i оказывается в данном случае чисто калибровочным. Кроме того, для множителя Лагранжа получается выражение

$$\lambda^2 = \frac{8\pi k}{c^4 f \eta} r (\mu^* - 3p). \quad (162)$$

Используя общие формулы (70)—(72), определяющие локальное время и 3-пространственную геометрию, и подставляя в них (151), (160), приходим к выражениям

$$c dt = \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (163)$$

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (164)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \text{diag} (-g_{11}, -g_{22}, -g_{33}). \quad (165)$$

В результате для контравариантного поля v^i имеем

$$v^i = (\sqrt{g^{00}}, -\sqrt{-g^{11}}, 0, 0) = (v^0, v^\alpha). \quad (166)$$

Здесь v^0 является трехмерным скаляром, а компоненты

$$v^\alpha = (-\sqrt{-g^{11}}, 0, 0) \quad (167)$$

представляют собой контравариантные компоненты 3-векторного поля \vec{v} в пространстве с римановой метрикой (164). При этом очевидно, что \vec{v} — единичный вектор ($\vec{v}^2 = \gamma_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 1$), в каждой точке направленный к центру шара и соответственно указывающий локально выделенные направления в 3-пространстве.

Теперь, после того как мы нашли поле v^i , нам еще остается найти поля g_{ik} и r . Этой цели служат уравнения (140), (141), которые с учетом выписанных выше соотношений принимают вид:

$$\left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right) \left(R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k\right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(r_{;i}^{;k} - r_{;n}^{;n} \delta_i^k\right) + \frac{\varepsilon + 3\xi}{2\varepsilon\xi(\varepsilon - r)} \left(r_{;i} r^{;k} - \frac{1}{2} r_{;n} r^{;n} \delta_i^k\right) = \frac{8\pi k}{c^4 \eta} [(\mu^* + p) \delta_i^0 \delta_0^k - p \delta_i^k], \quad (168)$$

$$r_{;k}^{;k} = \frac{8\pi k \xi}{c^4 \eta} (\mu^* - 3p). \quad (169)$$

Ниже станет ясно, что

$$\eta = 1 + \frac{\xi/(2\varepsilon)}{\sqrt{1 + \xi/(4\varepsilon)}}. \quad (170)$$

причем $\xi/\varepsilon < 0$.

Рассмотрим сначала изотропные сферические координаты: $x^0, x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. В этих координатах система уравнений (168), (169) допускает точное внешнее решение [57]:

$$r(\rho) = \varepsilon \left[1 - \left(\frac{\rho - \rho_g/4}{\rho + \rho_g/4} \right)^{-\frac{2\zeta k}{\varepsilon \rho_g}} \right], \quad (171)$$

$$g_{ik} = e^{2n(\rho)} \delta_i^0 \delta_k^0 - e^{2l(\rho)} \delta_i^1 \delta_k^1 - \rho^2 e^{2l(\rho)} \delta_i^2 \delta_k^2 - \rho^2 e^{2l(\rho)} \sin^2 \theta \delta_i^3 \delta_k^3, \quad (172)$$

где

$$e^{2n(\rho)} = \left(\frac{\rho - \rho_g/4}{\rho + \rho_g/4} \right)^{2 \left(\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g} + \sqrt{\frac{\zeta k^2}{\varepsilon^2 \rho_g^2} + 1} \right)}, \quad (173)$$

$$e^{2l(\rho)} = \left(1 - \frac{\rho_g^2}{16\rho^2} \right)^2 \left(\frac{\rho + \rho_g/4}{\rho - \rho_g/4} \right)^{2 \left(-\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g} + \sqrt{\frac{\zeta k^2}{\varepsilon^2 \rho_g^2} + 1} \right)}. \quad (174)$$

Отличительной особенностью данного внешнего решения является то, что оно, помимо констант взаимодействия ζ и $1/\varepsilon$, зависит от двух параметров ρ_g и k , характеризующих центральное тело. Предельному значению $\zeta = 0$ отвечает $r(\rho) = 0$. В этом случае локальная анизотропия отсутствует, финслерово пространство вырождается в риманово, а зависимость функций $e^{2n(\rho)}$, $e^{2l(\rho)}$ от дополнительного параметра k исчезает, и они сводятся к функциям, представляющим точное внешнее решение уравнений Эйнштейна.

Для того чтобы выразить параметры ρ_g и k через «радиус» шара ρ_1 и плотность энергии жидкости $\mu^* = \text{const}$, необходимо сшить на поверхности шара внешнее и внутреннее решение системы уравнений (168), (169). К сожалению, точного внутреннего решения этой системы в изотропных координатах найти не удастся. Поэтому мы поступим следующим образом.

В силу заведомой малости константы взаимодействия ζ , представим неизвестное точное решение системы (168), (169) в виде разложений:

$$g_{ik} = g_{ik}^0 + \zeta g_{ik}^1 + \zeta^2 g_{ik}^2 + \dots, \quad (175)$$

$$r = \zeta^1 r + \zeta^2 r + \dots, \quad (176)$$

где индекс над буквами указывает порядок приближения к решению g_{ik}^0 уравнений Эйнштейна. Оказывается, что приближение с точностью до n -го порядка можно найти, если известно решение системы (168), (169) с точностью до $n - 1$ порядка. Для наших целей будет достаточно лишь первого приближения, причем работать мы должны в стандартных сферических координатах. Именно в них известно (см., например, [58]) точное решение Шварцшильда g_{ik}^0 во всем пространстве, а это дает возможность согласованно восстанавливать как внутреннее решение уравнений (168), (169), так и их внешнее решение, оставшееся неизвестным в стандартных координатах.

Итак, запишем сначала риманову метрику в стандартных сферических координатах, используя для обозначения радиальной координаты ту же букву ρ , которой в формулах (171)—(174) обозначалась изотропная радиальная координата

$$ds^2 = g_{00} dx^0{}^2 + g_{\rho\rho} d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (177)$$

Во внешней области шара точное решение уравнений Эйнштейна имеет вид

$$g_{00}^0 = 1 - \rho_g/\rho, \quad g_{\rho\rho}^0 = -1/(1 - \rho_g/\rho). \quad (178)$$

При этом точное внутреннее решение, считое с внешним на поверхности шара $\rho = \rho_1$, представляется в форме

$$g_{00}^0 = \frac{1}{4} [3\sqrt{1 - \rho_g/\rho_1} - \sqrt{1 - (\rho_g/\rho_1)(\rho/\rho_1)^2}]^2, \quad (179)$$

$$g_{\rho\rho}^0 = -\frac{1}{1 - (\rho_g/\rho_1)(\rho/\rho_1)^2}, \quad (180)$$

где ρ_g — гравитационный радиус:

$$\rho_g = \frac{8\pi k \mu \rho_1^3}{3c^4}. \quad (181)$$

Обратимся теперь к уравнениям (168), (169). С точностью до первого порядка по ζ эти уравнения во внешней области дают

$$g_{00}^0 = g_{00}^0 + \zeta g_{00}^1 = 1 - \frac{\rho_g}{\rho} + \frac{\zeta k}{2\varepsilon\rho_g} \left(2 + \frac{k}{\rho_0} - \frac{k + 6\rho_g}{2\rho} \right) \ln \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho} \right), \quad (182)$$

$$g_{\rho\rho}^0 = g_{\rho\rho}^0 + \zeta g_{\rho\rho}^1 = -\frac{1}{1 - \rho_g/\rho} + \frac{\zeta k [1 - k/(2\rho_g)]}{\varepsilon\rho(1 - \rho_g/\rho)^2} \left(1 - \ln \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho}} \right), \quad (183)$$

$$r = \zeta r^1 = \frac{\zeta k}{\rho_g} \ln \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho} \right). \quad (184)$$

Отсюда видно, что параметры ρ_g и k параметризуют как точное внешнее решение (171)—(174), полученное в изотропных координатах, так и приближенное внешнее решение (182)—(184), восстановленное в стандартных координатах.

Чтобы восстановить с точностью до первого порядка по ζ внутреннее решение уравнений (168), (169) в стандартных координатах, нужно в качестве нулевого приближения использовать (179), (180). Возникающая при этом цепочка уравнений на функции r , $g_{\rho\rho}^1$, g_{00}^1 может быть последовательно проинтегрирована, а результат сшит с соответствующими функциями (182)—(184) из внешней области. Здесь мы изложим только часть данной программы и восстановим лишь функцию r . Этого будет достаточно, чтобы найти выражение параметра k через параметры жидкого шара μ^* и ρ_1 .

Во внутренней области для $r(\rho)$ получается уравнение

$$\left(\sqrt{\frac{g_{00}^0(\rho)}{g_{\rho\rho}^0(\rho)}} \rho^2 r' \right)' = \frac{3\rho_g}{\rho_1^3} \left(4 - 3 \sqrt{\frac{g_{00}^0(\rho_1)}{g_{00}^0(\rho)}} \right) \sqrt{-g_{00}^0(\rho) g_{\rho\rho}^0(\rho)} \rho^2, \quad (185)$$

где $g_{00}^0(\rho)$ определяется формулой (179), а $g_{\rho\rho}^0(\rho)$ — формулой (180). Так как в центре шара все направления эквивалентны, то поле локальной анизотропии $r(\rho)$ должно там обращаться в нуль. Поэтому, полагая $r(0) = 0$ и интегрируя с этим условием (185), получаем

$$\begin{aligned}
 r(\rho) = & 4 \ln \left(\frac{3 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}} - \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^2}}{3 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}} - 1} \right) + \\
 & + 9 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}} \int_0^{\left(\sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_1} \frac{\rho}{\rho_1}} \right)} \frac{|1 - F(1, 1; 3/2; x^2)| dx}{x \left(3 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}} - \sqrt{1 - x^2} \right)}, \quad (186)
 \end{aligned}$$

где

$$F(1, 1; \frac{3}{2}; x^2) = 1 + \frac{2}{3} x^2 + \frac{8}{15} x^4 + \frac{16}{35} x^6 + 0(x^8)$$

есть гипергеометрическая функция. Сшивая на поверхности шара, т.е. при $\rho = \rho_1$, функцию (186) с соответствующей функцией (184) из внешней области, приходим к выражению [59]:

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{\rho_g} = & \left\{ 4 \ln \frac{2 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}} - 1} + \right. \\
 & \left. + 9 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}} \int_0^{\sqrt{\rho_g/\rho_1}} \frac{|1 - F(1, 1; 3/2; x^2)| dx}{x \left(3 \sqrt{1 - \frac{\rho_g}{\rho_1}} - \sqrt{1 - x^2} \right)} \right\} / \ln \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_1} \right). \quad (187)
 \end{aligned}$$

Эта точная формула или вытекающая из нее приближенная формула

$$k = \frac{\rho_g}{2} \left[1 - \frac{27}{40} \left(\frac{\rho_g}{\rho_1} \right) + 0 \left(\frac{\rho_g}{\rho_1} \right)^2 \right] \quad (188)$$

определяет, с учетом (181), зависимость параметра k от μ^* и ρ_1 .

Таким образом, по сравнению с эйнштейновской теорией гравитации, в финслеровой теории, в рамках которой отличны от нуля константы взаимодействия ζ и $1/\varepsilon$, внешнее гравитационное поле (172) — (174) не-

сет дополнительную информацию о своем источнике. Эта информация содержится в дополнительном параметре k . Действительно, согласно (187), различным значениям k при фиксированном значении ρ_g отвечают источники, имеющие различные радиусы, при этом чем больше радиус источника, тем больше k . Но интуитивно ясно, что с увеличением радиуса источника в каждой точке внешнего пространства должна увеличиваться вызванная им локальная анизотропия. Если k тому же заметить, что вдали от источника порождаемое им поле локальной анизотропии пространства определяется вытекающей из (171) формулой $r = \zeta k / \rho$, с константой $\zeta < 0$ (см. разд. 10), то станет ясно, что параметр k , характеризующий источник, можно понимать как соответствующий «заряд» источника, отвечающий его взаимодействию с полем локальной анизотропии.

До сих пор в качестве двух независимых физических параметров, характеризующих идеальный жидкий шар, мы рассматривали либо пару параметров $[\mu^*, \rho_1]$, либо пару $[\rho_g, k]$. Напомним, что μ^* — плотность энергии жидкости, ρ_1 — стандартный «радиус» шара, $\rho_g = 8\pi k \mu^* \rho_1^3 / (3c^4)$ — гравитационный радиус шара, k — его «заряд», регулирующий величину поля локальной анизотропии и являющийся функцией от массы шара $M = c^2 \rho_g / (2k)$ и от ρ_1 . Последняя формула правильно определяет массу шара лишь в нулевом порядке по ζ , т.е. когда поле локальной анизотропии выключено. Как известно, в этом случае совпадают такие асимптотические характеристики шара, как его активная гравитационная M_g и инертная M_i массы, причем имеет место равенство $M_g = M_i = c^2 \rho_g / (2k)$. Включение поля анизотропии снимает данное вырождение и позволяет рассматривать M_g и M_i в качестве новой пары независимых параметров, характеризующих центральное тело. Чтобы это продемонстрировать, приведем здесь строгий расчет соответствующих величин, а заодно вычислим и константу перенормировки η . Начнем с вычисления M_g .

Активная гравитационная масса M_g определяется как коэффициент при km/ρ^2 в ньютоновской асимптотике точного выражения для силы, действующей на покоящуюся пробную частицу массы m со стороны комплекса полей (153), (160), (171) — (174). Найдем прежде всего точное выражение для этой силы.

Вообще говоря, контравариантные компоненты 3-силы F^α в 3-пространстве с метрикой (164) вычисляются с помощью трехмерного ковариантного дифференцирования 3-импульса частицы p^α по локальному времени. Так как $g^{\alpha 0} = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), то, согласно (80), $p^\alpha = mcg^{\alpha i}u_i = mcg^{\alpha\beta}u_\beta$, где u_β — компоненты динамической 4-скорости (79). Здесь нас интересует сила, действующая на частицу, которая мгновенно покоится в данной точке поля. При таком условии трехмерная ковариантная производная совпадает с обычной производной. Это дает $F^\alpha = dp^\alpha/d\tau = cdp^\alpha/ds = mc^2d(g^{\alpha\beta}u_\beta)/ds$. Учитывая, что кинематическая 4-скорость v^i покоящейся частицы имеет компоненты $v^i = v^0\delta_0^i$, а также то, что поле $g^{\alpha\beta}$ статично, имеем $d(g^{\alpha\beta}u_\beta)/ds = g^{\alpha\beta}du_\beta/ds$. Таким образом,

$$F^\alpha = mc^2g^{\alpha\beta}\frac{du_\beta}{ds}. \quad (189)$$

Для вычисления du_β/ds воспользуемся уравнением движения (82) и формулами (151), (153), (160), (79), $v^i = \delta_0^i/\sqrt{g_{00}}$. В результате получаем

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{d \ln \sqrt{g_{00}}}{dx^1} \delta_i^1. \quad (190)$$

Благодаря (190), формула (189) приобретает вид

$$F^\alpha = mc^2g^{\alpha 1}d \ln \sqrt{g_{00}}/dx^1,$$

а так как $g^{\alpha 1} = \delta_1^\alpha/g_{11}$, то

$$F^\alpha = \frac{mc^2}{g_{11}} \frac{d \ln \sqrt{g_{00}}}{dx^1} \delta_1^\alpha. \quad (191)$$

Согласно (167), единичный 3-вектор v^α также имеет единственную отличную от нуля радиальную компоненту, причем он направлен к центру. Поэтому v^α удобно использовать в качестве реперного вектора. Тогда с помощью (191), (167) и (165) находим

$$F = \vec{F} \vec{v} = \gamma_{\alpha\beta} F^\alpha v^\beta = \frac{mc^2}{\sqrt{-g_{11}}} \frac{d \ln \sqrt{g_{00}}}{dx^1}. \quad (192)$$

Согласно (172), в изотропных сферических координатах: $g_{00} = e^{2n(\rho)}$, $-g_{11} = e^{2l(\rho)}$, $x^1 = \rho$. Подставляя в (192) вместо g_{00} и $-g_{11}$ соответствующие функции (173) и (174), получаем следующее точное выражение для силы:

$$F = \frac{mc^2 \left(\frac{\zeta}{\varepsilon} k + \sqrt{\frac{\zeta}{\varepsilon} k^2 + \rho_g^2} \right)}{2\rho^2 \left(1 - \frac{\rho_g^2}{16\rho^2} \right)^2} \left(\frac{\rho + \rho_g/4}{\rho - \rho_g/4} \right) \left(\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g} - \sqrt{\frac{\zeta k^2}{\varepsilon \rho_g^2} + 1} \right). \quad (193)$$

Отсюда асимптотически получаем при $\rho \gg \rho_g$

$$F = \frac{mc^2 \left(\frac{\zeta}{\varepsilon} k + \sqrt{\frac{\zeta}{\varepsilon} k^2 + \rho_g^2} \right)}{2\rho^2} = \frac{kmM_g}{\rho^2}, \quad (194)$$

т.е.

$$M_g = \frac{c^2}{2k} \left(\frac{\zeta}{\varepsilon} k + \sqrt{\frac{\zeta}{\varepsilon} k^2 + \rho_g^2} \right). \quad (195)$$

Последнее выражение и определяет активную гравитационную массу шара.

Вычислим теперь инертную массу шара M_i . Эта величина определяется как \mathcal{P}^0/c , где c — скорость света, \mathcal{P}^0 — нулевая компонента полного 4-импульса шара и порождаемого им поля в системе отсчета, относительно которой шар покоится. Для вычисления компонент \mathcal{P}^a , отвечающих ортогональным галилеевым координатам X^a фоновое пространство Минковского, служат ковариантные формулы (135), (148), (147). Эти формулы существенно упрощаются, если в качестве «произвольных координат» x^i выбрать координаты X^i . Так мы и поступим. Тогда

$$\mathcal{P}^a = \frac{1}{c} \oint \textcircled{h}^{\alpha 0 \alpha} df_{\alpha}, \quad (196)$$

$$\textcircled{h}^{ikl} = \frac{c^4 \eta}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial X^m} \left[\left(1 - \frac{r}{\varepsilon} \right)^2 (-g) (g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km}) \right]. \quad (197)$$

Чтобы воспользоваться формулами (196), (197), нужно знать внешнее гравитационное поле и поле локальной анизотропии в координатах X^i . Ранее, однако, эти поля были найдены в изотропных сферических ко-

ординатах $x^0, x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$. Записывая с помощью (171)—(174) уравнение (146) в изотропных сферических координатах и решая его, получаем

$$X^0 = x^0, \quad (198)$$

$$\begin{cases} X^1 = R(\rho) \sin \theta \cos \varphi, \\ X^2 = R(\rho) \sin \theta \sin \varphi, \\ X^3 = R(\rho) \cos \theta, \end{cases} \quad (199)$$

где

$$R(\rho) = \rho + \frac{\rho_g^2}{16\rho}. \quad (200)$$

Координаты X^0, X^1, X^2, X^3 являются ортогональными галилеевыми координатами фонового пространства Минковского, тогда как X^0, R, θ, φ выступают в роли соответствующих сферических координат. Исходя из решения (171)—(174) полевых уравнений в изотропных сферических координатах и учитывая (198), (200), (160), легко выразить поле r , а также отличные от нуля компоненты полей g_{ik} и v_i в координатах X^0, R, θ, φ . Результат оказывается следующим:

$$r(R) = \varepsilon \left[1 - \frac{\left(\frac{R - \rho_g/2}{R + \rho_g/2} \right)^{-\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g}}}{\left(\frac{R - \rho_g/2}{R + \rho_g/2} \right)^{-\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g}}} \right], \quad (201)$$

$$g_{00} = \mathfrak{B}(R), \quad g_{RR} = -\mathfrak{A}(R), \quad g_{\theta\theta} = -\mathfrak{D}(R) R^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -\mathfrak{D}(R) R^2 \sin^2 \theta; \quad (202)$$

$$v_0 = \sqrt{\mathfrak{B}(R)}, \quad v_R = \sqrt{\mathfrak{A}(R)}, \quad (203)$$

где посредством $\mathfrak{B}(R), \mathfrak{A}(R), \mathfrak{D}(R)$ обозначены метрические функции:

$$\mathfrak{B}(R) = \left(\frac{R - \rho_g/2}{R + \rho_g/2} \right) \left(\frac{\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g} + \sqrt{\frac{\zeta k^2}{\varepsilon \rho_g^2} + 1}}{\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g} - \sqrt{\frac{\zeta k^2}{\varepsilon \rho_g^2} + 1}} \right), \quad (204)$$

$$\mathfrak{A}(R) = \left(\frac{R + \rho_g/2}{R - \rho_g/2} \right) \left(-\frac{\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g} + \sqrt{\frac{\zeta k^2}{\varepsilon \rho_g^2} + 1}}{\frac{\zeta k}{\varepsilon \rho_g} - \sqrt{\frac{\zeta k^2}{\varepsilon \rho_g^2} + 1}} \right), \quad (205)$$

$$\mathfrak{D}(R) = \left(1 - \frac{\rho_g^2}{4R^2}\right) \left(\frac{R + \rho_g/2}{R - \rho_g/2}\right) \left(-\frac{\xi k}{\varepsilon \rho_g} + \sqrt{\frac{\xi k^2}{\varepsilon \rho_g^2} + 1}\right). \quad (206)$$

В пределе $\xi = 0$ данные метрические функции сводятся к функциям, с которыми работал Фок [47].

Для вычисления инертной массы нам остается еще преобразовать тензор g_{ik} от сферических координат X^0, R, θ, φ к прямоугольным координатам X^0, X^α , где $\alpha = 1, 2, 3$. Имея в виду (202) и (199), получаем

$$g_{00} = \mathfrak{B}(R), \quad g_{\alpha 0} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = -\mathfrak{D}(R) \left\{ \delta_{\alpha\beta} + \left[\frac{\mathfrak{G}(R)}{\mathfrak{D}(R)} - 1 \right] n_\alpha n_\beta \right\}, \quad (207)$$

и

$$g^{00} = \frac{1}{\mathfrak{B}(R)}, \quad g^{\alpha 0} = 0, \quad g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{\mathfrak{D}(R)} \left\{ \delta^{\alpha\beta} + \left[\frac{\mathfrak{D}(R)}{\mathfrak{G}(R)} - 1 \right] n^\alpha n^\beta \right\}, \quad (208)$$

где

$$R = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2}, \quad n_\alpha = n^\alpha = X^\alpha / R, \quad \delta_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

$$g = |g_{ik}| = -\mathfrak{G}(R) \mathfrak{B}(R) \mathfrak{D}^2(R).$$

Благодаря (197), (208), очевидно, что

$$\textcircled{h}^{\alpha 0\alpha} = \frac{c^4 \eta}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left[\left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right)^2 (-g) g^{00} g^{\alpha\beta} \right] \delta_0^\alpha. \quad (209)$$

Поэтому, в силу (196), $\vec{\mathcal{P}} = 0$, а

$$M_i = \frac{\mathcal{P}^0}{c} = \frac{c^4 \eta}{16\pi k} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint \frac{\partial}{\partial X^\beta} \left[\left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right)^2 (-g) g^{00} g^{\alpha\beta} \right] df_\alpha. \quad (210)$$

Подставляя сюда (201), (208), (204)—(206) и производя необходимые вычисления, приходим к окончательной формуле, определяющей инертную массу шара:

$$M_i = \eta \frac{c^2}{2k} \sqrt{\frac{\xi}{\varepsilon} k^2 + \rho_g^2}. \quad (211)$$

Из сопоставления формул (195) и (211) видно, что $M_g \neq M_i$ и, следовательно, эти асимптотически измеряемые величины могут служить в ка-

честве двух независимых параметров, характеризующих центральное тело (в данном случае — жидкий шар).

Зафиксируем теперь плотность энергии жидкости μ и будем устремлять «радиус» шара к нулю. Тогда с помощью формул (195), (211), (181), (188) легко показать, что $M_i = O(\rho_1^3)$, $M_g = O(\rho_1^3)$, а

$$\frac{M_i}{M_g} = \frac{\eta \sqrt{1 + \zeta/(4\epsilon)}}{\zeta/(2\epsilon) + \sqrt{1 + \zeta/(4\epsilon)}} [1 + O(\rho_1^2)]. \quad (212)$$

Таким образом, константа перенормировки η , определяемая выражением (170), обеспечивает выполнение условия $\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} M_i/M_g = 1$.

Наконец, отметим, что, согласно оценке, которая будет получена в следующем разделе, $\zeta/\epsilon < 0$. Поэтому $M_i < M_i^0 = c^2 \rho_g/(2k)$, т.е. локальная анизотропия пространства ведет к уменьшению полной энергии системы, и, значит, ее появление энергетически выгодно.

10. ВЛИЯНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРОСТРАНСТВА НА КЛАССИЧЕСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ. ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОНСТАНТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Чтобы найти поправки к классическим гравитационным эффектам, возникающие за счет поля локальной анизотропии пространства, необходимо проинтегрировать приближенные уравнения движения, которые являются постньютоновским пределом уравнений финслеровых геодезических. Хотя в этом приближении уравнения движения несут лишь минимум информации о локальной анизотропии, но его достаточно для оценки констант взаимодействия ζ и $1/\epsilon$.

Рассмотрим сначала финслерову метрику (69) и точные уравнения финслеровых геодезических (82), (83), записав их в галилеевых сферических координатах $x^0 = ct$, $x^R = R$, $x^\theta = \theta$, $x^\varphi = \varphi$ фонового пространства Минковского. Учитывая, что в данных координатах отличные от нуля компоненты полей g_{ik} и ν_i определяются формулами (202), (203), имеем соответственно:

$$ds = \left[\frac{\sqrt{\mathfrak{B}} c dt + \sqrt{\mathfrak{A}} dR}{\sqrt{\mathfrak{B} c^2 dt^2 - \mathfrak{A} dR^2 - \mathfrak{D} R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}} \right]^r \times \\ \times \sqrt{\mathfrak{B} c^2 dt^2 - \mathfrak{A} dR^2 - \mathfrak{D} R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}, \quad (213)$$

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{\delta_i^R}{2} \left\{ r' \ln \frac{(1+r) \mathfrak{D} R^2 \sin^2\theta (u_0 \sqrt{\mathfrak{A}} - u_R \sqrt{\mathfrak{B}})^2}{(1-r) [\mathfrak{D} R^2 \sin^2\theta (u_0^2 \mathfrak{A} - u_R^2 \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} \mathfrak{B} (u_\theta^2 \sin^2\theta + u_\varphi^2)]} - \right. \\ \left. - \frac{r [u_0 \sqrt{\mathfrak{A}} (\ln \mathfrak{B})' - u_R \sqrt{\mathfrak{B}} (\ln \mathfrak{A})']}{u_0 \sqrt{\mathfrak{A}} - u_R \sqrt{\mathfrak{B}}} + \right. \\ \left. + (1+r) \frac{\mathfrak{D} R^2 \sin^2\theta [u_0^2 \mathfrak{A} (\ln \mathfrak{B})' - u_R^2 \mathfrak{B} (\ln \mathfrak{A})'] - \mathfrak{A} \mathfrak{B} [(\ln \mathfrak{D})' + \frac{2}{R} (u_\theta^2 \sin^2\theta + u_\varphi^2)]}{\mathfrak{D} R^2 \sin^2\theta (u_0^2 \mathfrak{A} - u_R^2 \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} \mathfrak{B} (u_\theta^2 \sin^2\theta + u_\varphi^2)} \right\} - \\ - \delta_i^\theta \frac{(1+r) \mathfrak{A} \mathfrak{B} \text{ctg} \theta u_\varphi^2}{\mathfrak{D} R^2 \sin^2\theta (u_0^2 \mathfrak{A} - u_R^2 \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} \mathfrak{B} (u_\theta^2 \sin^2\theta + u_\varphi^2)}; \quad (214)$$

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{(1+r) [\mathfrak{D} R^2 \sin^2\theta (\delta_0^i u_0 \mathfrak{A} - \delta_R^i u_R \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} \mathfrak{B} (\delta_\theta^i u_\theta \sin^2\theta - \delta_\varphi^i u_\varphi)]}{\mathfrak{D} R^2 \sin^2\theta (u_0^2 \mathfrak{A} - u_R^2 \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} \mathfrak{B} (u_\theta^2 \sin^2\theta + u_\varphi^2)} - \\ - \frac{r (\delta_0^i \sqrt{\mathfrak{A}} - \delta_R^i \sqrt{\mathfrak{B}})}{u_0 \sqrt{\mathfrak{A}} - u_R \sqrt{\mathfrak{B}}}. \quad (215)$$

Штрих здесь обозначает производную d/dR ; r — поле (201); \mathfrak{B} , \mathfrak{A} , \mathfrak{D} — метрические функции (204) — (206); u_i — динамическую 4-скорость. Согласно (79), (202), (203)

$$u_i = \frac{(1-r) \left[\mathfrak{B} \frac{dx^0}{ds} \delta_i^0 - \mathfrak{A} \frac{dR}{ds} \delta_i^R - \mathfrak{D} R^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \delta_i^\theta - \sin^2\theta \frac{d\varphi}{ds} \delta_i^\varphi \right) \right]}{\mathfrak{B} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - \mathfrak{A} \left(\frac{dR}{ds} \right)^2 - \mathfrak{D} R^2 \left[\left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right]} + \\ + \frac{r (\sqrt{\mathfrak{B}} \delta_i^0 + \sqrt{\mathfrak{A}} \delta_i^R)}{\sqrt{\mathfrak{B}} \frac{dx^0}{ds} + \sqrt{\mathfrak{A}} \frac{dR}{ds}}. \quad (216)$$

Из уравнений (214) сразу следует, что u_0 и u_φ являются интегралами движения. Определение (80) позволяет выписать соотношения, которые проясняют физический смысл данных интегралов движения:

$$u_0 = -\frac{1}{mc^2} \frac{\partial S}{\partial t} = E = \text{const}, \quad (217)$$

$$u_\varphi = -\frac{1}{mc} \frac{\partial S}{\partial \varphi} = -\frac{J}{c} = \text{const}. \quad (218)$$

Таким образом, $u_0 = E$ — полная энергия частицы в единицах mc^2 , а $-cu_\varphi = J$ — проекция углового момента на полярную ось, отнесенная к массе частицы m .

Благодаря сферической симметрии всех полей, движение частицы происходит в одной «плоскости», проходящей через центр симметрии. При этом описание движения существенно упрощается, если полярная ось выбрана перпендикулярно плоскости движения. Тогда траектории частицы отвечает $\theta = \pi/2$, и мы получаем следующий набор независимых интегралов движения:

$$\frac{(1-r)\mathfrak{B}c \frac{dt}{ds}}{\mathfrak{B}c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \mathfrak{G} \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \mathfrak{D}R^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} + \frac{r\sqrt{\mathfrak{B}}}{\sqrt{\mathfrak{B}}c \frac{dt}{ds} + \sqrt{\mathfrak{G}} \frac{dR}{ds}} = E, \quad (219)$$

$$\frac{(1-r)\mathfrak{D}R^2c \frac{d\varphi}{ds}}{\mathfrak{B}c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \mathfrak{G} \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \mathfrak{D}R^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} = J, \quad (220)$$

$$\left[\frac{\sqrt{\mathfrak{B}}c \frac{dt}{ds} + \sqrt{\mathfrak{G}} \frac{dR}{ds}}{\sqrt{\mathfrak{B}c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \mathfrak{G} \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \mathfrak{D}R^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}} \right]^r \times \\ \times \sqrt{\mathfrak{B}c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \mathfrak{G} \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 - \mathfrak{D}R^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} = 1. \quad (221)$$

Формулы (219), (220) являются следствием соотношений (216)–(218), а (221) — следствием (213).

Система трех дифференциальных уравнений (219)—(221) служит для восстановления функций $R(s)$, $\varphi(s)$, $t(s)$. В пределе, когда константа взаимодействия ζ и, следовательно, поле r равны нулю, полученные уравнения переходят в уравнения, представленные в книге Фока [47]. Это вполне естественно, поскольку в случае $r = 0$ сферические галилеевы координаты фонового пространства Минковского выступают в качестве сферических гармонических координат риманова пространства, т.е. тех координат, которые применялись Фоком.

Используем теперь для параметризации траектории t вместо s . Тогда, исходя из (219)—(221), легко найти систему двух уравнений [54] на функции $R(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}} \frac{\dot{R}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{A}\dot{R}^2}{\mathcal{B}c^2} - \frac{\mathcal{D}R^2\dot{\varphi}^2}{\mathcal{B}c^2}}} \right)^r \times$$

$$\times \left[\frac{1-r}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{A}\dot{R}^2}{\mathcal{B}c^2} - \frac{\mathcal{D}R^2\dot{\varphi}^2}{\mathcal{B}c^2}}} + \frac{r\sqrt{1 - \frac{\mathcal{A}\dot{R}^2}{\mathcal{B}c^2} - \frac{\mathcal{D}R^2\dot{\varphi}^2}{\mathcal{B}c^2}}}{1 + \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}} \frac{\dot{R}}{c}} \right] \sqrt{\mathcal{B}} = E, \quad (222)$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}} \frac{\dot{R}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\mathcal{A}\dot{R}^2}{\mathcal{B}c^2} - \frac{\mathcal{D}R^2\dot{\varphi}^2}{\mathcal{B}c^2}}} \right)^r \frac{(1-r)\mathcal{D}R^2\dot{\varphi}}{\sqrt{\mathcal{B}}\sqrt{1 - \frac{\mathcal{A}\dot{R}^2}{\mathcal{B}c^2} - \frac{\mathcal{D}R^2\dot{\varphi}^2}{\mathcal{B}c^2}}} = J.$$

Здесь точкой обозначена производная d/dt .

Уравнения (222) являются точными и описывают движение частицы как в слабых, так и в сильных полях r , g_{ik} , v_i . Однако в случае слабых полей достаточно рассмотреть постньютоновский предел точных уравнений (222). Для этого используем постньютоновское приближение метрических функций \mathcal{B} , \mathcal{A} , \mathcal{D} , а также приближенное выражение поля r .

В стандартной форме приближенные выражения для функций \mathcal{B} , \mathcal{A} , \mathcal{D} записываются следующим образом:

$$\mathcal{B}(R) = 1 - 2\frac{\mu}{R} + 2\beta\frac{\mu^2}{R^2} + O\left(\frac{\mu^3}{R^3}\right),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(R) &= 1 + 2\gamma \frac{\mu}{R} + O\left(\frac{\mu^2}{R^2}\right), \\ \mathfrak{D}(R) &= 1 + 2\gamma \frac{\mu}{R} + O\left(\frac{\mu^2}{R^2}\right), \end{aligned} \quad (223)$$

где

$$\mu = kM_g/c^2. \quad (224)$$

Конкретные значения стандартных постньютоновских параметров β и γ , отвечающие финслеровой теории гравитации, получаются из сравнения (223) с аналогичными разложениями известных точных выражений (204) — (206). При этом нужно учитывать вытекающее из (224) и (195) равенство:

$$2\mu = \frac{\xi k}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\xi^2 k^2}{\varepsilon} + \rho_g^2}, \quad (225)$$

а также считать (основываясь на заведомой малости $|\xi/\varepsilon|$ и формулах (188), (225)) ρ_g , k , μ величинами одного порядка. В результате

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1 - \frac{\xi k}{\varepsilon \mu}. \quad (226)$$

Что касается поля r , то приближенное выражение для него задается первыми двумя членами разложения известной функции (201):

$$r = - \left(\frac{\xi k}{\mu}\right) \frac{\mu}{R} - \left(\frac{\xi^2 k^2}{2\varepsilon \mu^2}\right) \frac{\mu^2}{R^2} + O\left(\frac{\mu^3}{R^3}\right). \quad (227)$$

Для того, чтобы отделить непосредственный вклад анизотропии в интересующие нас гравитационные эффекты от косвенного, спрятанного в стандартный постньютоновский параметр γ , или иначе, чтобы увидеть, как учет локальной анизотропии модифицирует постньютоновские уравнения движения метрических теорий гравитации, целесообразно осуществлять предельный переход от точных уравнений (222) к соответствующим постньютоновским уравнениям, подставляя в (222) вместо r разложение (227), а вместо метрических функций \mathfrak{B} , \mathfrak{A} , \mathfrak{D} — разложения (223), содержащие стандартные постньютоновские параметры β и γ . Конкретные значения (226) этих параметров необходимо использовать только в окончательных формулах, описывающих гравитационные эффекты. Тогда будет полностью восстановлена зависимость эффектов от величины анизотропии.

Реализуя данную программу, мы в качестве постньютоновского предела точных уравнений (222) получаем следующие приближенные уравнения движения:

$$\frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{kM_g}{R} + \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{3}{8} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2)^2 + (\beta - \frac{1}{2}) \frac{k^2 M_g^2}{R^2} + \right. \\ \left. + \frac{kM_g}{2R} \left[(1 + 2\gamma) \dot{R}^2 + (1 + 2\gamma + \frac{\zeta k}{\mu}) R^2 \dot{\varphi}^2 \right] \right\} = H, \quad (228)$$

$$R^2 \dot{\varphi} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2) + (1 + 2\gamma + \frac{\zeta k}{\mu}) \frac{kM_g}{R} \right] \right\} = J,$$

где $H = (E - 1)c^2$ — новая постоянная, имеющая ясный смысл. Отметим, что в эти уравнения не вошли слагаемые, содержащие второй член разложения (227). Они полностью сократились. Поэтому в разложении (227) можно ограничиться лишь первым членом.

Согласно (228), с точностью до первой релятивистской поправки

$$\dot{R}^2 = -\frac{J^2}{R^2} + \frac{2kM_g}{R} + 2H + \frac{1}{c^2} \left\{ \left(4 + 4\gamma + \frac{\zeta k}{\mu} \right) \frac{J^2 kM_g}{R^3} + \right. \\ \left. + \left[HJ^2 - k^2 M_g^2 (2 + 2\gamma + \beta) \right] \frac{2}{R^2} - (2 + \gamma) \frac{4HkM_g}{R} - 3H^2 \right\}, \quad (229)$$

$$R^2 \dot{\varphi} = J \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(2 + 2\gamma + \frac{\zeta k}{\mu} \right) \frac{kM_g}{R} + H \right] \right\}.$$

Отсюда с той же точностью следует дифференциальное уравнение траектории

$$\left(\frac{d \frac{1}{R}}{d\varphi} \right)^2 = -\frac{1}{R^2} + \frac{2kM_g}{J^2 R} + \frac{2H}{J^2} + \frac{1}{c^2} \left[-\frac{\zeta k}{\mu} \frac{kM_g}{R^3} + \right. \\ \left. + \left(2 + 2\gamma - \beta + \frac{2\zeta k}{\mu} \right) \frac{2k^2 M_g^2}{J^2 R^2} + \left(1 + \gamma + \frac{\zeta k}{\mu} \right) \frac{4HkM_g}{J^2 R} + \frac{H^2}{J^2} \right]. \quad (230)$$

Решение данного уравнения выражается через эллиптические функции Якоби и дает для смещения перигелия формулу

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi\mu}{a(1 - e^2)} \left(2 + 2\gamma - \beta + \frac{\zeta k}{2\mu} \right) / 3, \quad (231)$$

где a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет.

Эта формула демонстрирует непосредственный вклад анизотропии в эффект смещения перигелия. Отличие (231) от стандартной формулы,

возникающей в метрических теориях, целиком обусловлено отличием финслеровых геодезических от римановых. Чтобы полностью восстановить зависимость смещения перигелия от величины анизотропии, нужно еще подставить в (231) конкретные значения (226) постньютоновских параметров β и γ , полученные с учетом анизотропии. Это дает

$$\Delta\varphi = \left[1 + \frac{\xi k}{6\mu} \left(1 - \frac{4}{\varepsilon} \right) \right] \frac{6\pi\mu}{a(1 - e^2)}. \quad (232)$$

Экспериментальные данные, относящиеся к Солнечной системе, накладывают определенное ограничение на фактор, заключенный в квадратных скобки. Следуя [60], примем, что он отличается от единицы не более, чем на 0,005. Отсюда вытекает условие:

$$-5 \leq \frac{10^3 \xi k_{\odot} (\varepsilon - 4)}{\mu_{\odot} 6\varepsilon} \leq 5. \quad (233)$$

Специфическим свойством финслерова пространства (69) является то, что его нулевыми геодезическими служат нулевые геодезические риманова пространства, определяемого метрическим тензором g_{ik} . Это значит, что локальная анизотропия пространства лишь косвенным образом влияет на распространение света и лишь в той мере, в какой поле локальной анизотропии участвует в формировании поля g_{ik} . На постньютоновском уровне вся информация об этом влиянии сосредоточена в стандартном постньютоновском параметре γ , который определяется формулой (226). Согласно данным [60], полученным с помощью активной локации, $\gamma = 1,002 \pm 0,004$. Таким образом, возникает еще одно условие на константы взаимодействия ξ и $1/\varepsilon$:

$$-6 \leq \frac{10^3 \xi k_{\odot}}{\mu_{\odot}} \leq 2. \quad (234)$$

Решением системы неравенств (233), (234) служит внутренняя область фигуры, изображенной на рис.4.

Для численной оценки константы взаимодействия ξ используем в качестве модели Солнца жидкий шар. Тогда, вследствие (188), (225), имеем $k_{\odot}/\mu_{\odot} \approx 2/(\xi/\varepsilon + \sqrt{\xi/\varepsilon + 4})$ и (234) принимает вид: $-3 \cdot 10^{-3} \leq (\xi/\varepsilon)/(\xi/\varepsilon + \sqrt{\xi/\varepsilon + 4}) \leq 10^{-3}$. Отсюда $-6 \cdot 10^{-3} \leq \xi/\varepsilon \leq 2 \cdot 10^{-3}$ и, следовательно, $k_{\odot}/\mu_{\odot} \approx 1$. При этом из рис.4 находим ограничения: $-0,054 \leq \xi \leq 0,038$; $0 \leq 1/\varepsilon \leq 0,25$. Для того чтобы поле r имело положительную плотность энергии, должно еще выполняться условие: $\xi/\varepsilon < 0$. В итоге получаем следующие ограничения на константы взаимодействия:

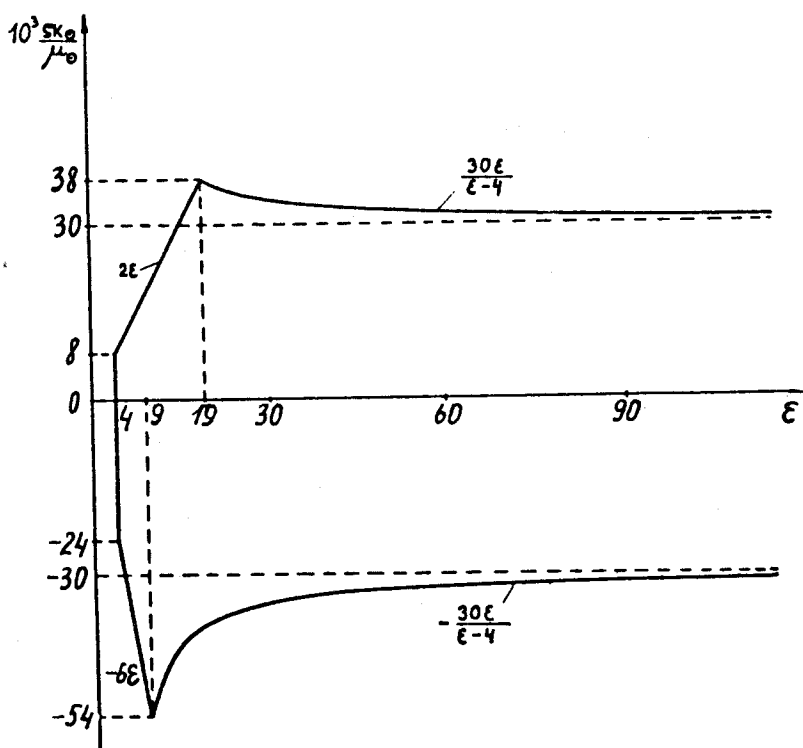


Рис.4

$$-0,054 \leq \zeta < 0; \quad 0 < 1/\epsilon \leq 0,25. \quad (235)$$

Наконец, получим верхнюю оценку величины r_{\oplus}° локальной анизотропии на Земле, считая, что источником поля r является Солнце. Так как $k_{\odot} \approx \mu_{\odot}$, то, используя первый член разложения (227), можно написать: $r_{\oplus}^{\circ} \approx -\zeta \mu_{\odot} / a_{\oplus}$, где среднее расстояние от Земли до Солнца $a_{\oplus} = 149,6 \cdot 10^6$ км, а $\mu_{\odot} = 1,475$ км. Согласно (235), верхняя оценка величины r_{\oplus}° получается при $\zeta = -0,054$. В результате имеем $r_{\oplus}^{\circ} \approx 5 \cdot 10^{-10}$.

Действуя аналогично, получаем верхнюю оценку величины r анизотропии, создаваемой самой Землей на ее поверхности: $r \approx 4 \cdot 10^{-11}$. Анизотропия такой величины, и даже на три порядка меньше, вполне доступна экспериментальному обнаружению.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вообще говоря, локальная анизотропия пространства существенно влияет на характер движения тел в гравитационном поле. Это видно уже из самой структуры уравнений (82), (83), (101). Лишь при движении в слабом поле, когда $r(x) \ll 1$, влияние анизотропии пренебрежимо мало и она проявляет себя только в малых количественных поправках к известным классическим гравитационным эффектам. Если же тело находится в области с большой локальной анизотропией пространства, т.е. там, где $r(x)$ заметно отлично от нуля, в игру вступает тензорная природа эффективной инертности и ее зависимость от локализации тела. Это приводит к возникновению качественно новых эффектов при движении в сильном поле. Примером такого эффекта может служить эффект, возникающий при свободном радиальном падении пробного тела на гравитирующий центр. Его удалось обнаружить с помощью точного решения финслеровой задачи Шварцшильда и уравнений финслеровых геодезических. Исследование показало, что локальная анизотропия пространства, создаваемая гравитирующим центром, радикально изменяет картину падения. Вследствие обращения в нуль эффективной инертной массы (за счет большой анизотропии пространства вблизи гравитационного радиуса), локальная скорость падающего с ускорением пробного тела становится равной скорости света за конечный промежуток как собственного времени, так и времени, измеряемого по часам удаленного наблюдателя. После чего тело быстро останавливается, никогда не достигая гравитационного радиуса, и начинает с ускорением удаляться от центра. Такой характер движения не содержит ничего парадоксального и свидетельствует лишь о том, что в области с достаточно большой анизотропией пространства эффективная масса тела отрицательна. Приведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что финслерова теория гравитации, учитывающая локальную анизотропию пространства-времени, не допускает образования черных дыр, а гравитационное сжатие материи на определенном этапе взрывоподобно сменяется ее расширением.

В связи с выявленными особенностями свободного радиального падения полезно напомнить, что динамические свойства частицы, находящейся в анизотропном пространстве, аналогичны свойствам квази-частицы в кристалле. В обоих случаях эффективная масса является тензорной величиной и, согласно второму закону Ньютона, направление ускорения, вообще говоря, не совпадает с направлением внешней силы. Аналогию между локальной анизотропией пространства и кристаллическим состоянием среды усиливает то обстоятельство, что появление локальной анизотропии энергетически выгодно и может рассматриваться как своеобразный фазовый переход в геометрической структуре пространства-времени — переход от «аморфной» римановой к «упорядоченной» финслеровой структуре. Однако, поскольку основным источником поля локальной анизотропии служит след тензора энергии-импульса полей материи, нарушение локальной анизотропии пространства-времени происходит, по-видимому, не спонтанно, но оказывается вторичным эффектом, вызванным спонтанным нарушением калибровочной симметрии в том или ином варианте объединенной теории, при котором поля приобретают массы, а тензор энергии-импульса — ненулевой след. В результате высокотемпературные фазовые переходы с нарушением калибровочных симметрий сопровождаются соответствующими фазовыми переходами в структуре пространства-времени. При этом геометрические переходы определяют энергетически наиболее выгодные каналы нарушения калибровочных симметрий. Данное обстоятельство делает весьма перспективным применение теории локально-анизотропного пространства-времени в современных космологических моделях.

Касаясь эффектов, возникающих исключительно за счет анизотропии пространства-времени, отметим еще эффект частотной модуляции гармонических колебаний, приходящих в приемник, вращающийся с постоянной скоростью вокруг излучателя монохроматической волны. Как показывают расчеты [14], глубина модуляции пропорциональна величине анизотропии пространства, а использование современных радиофизических методов генерации гармонических колебаний и регистрации малых сигналов позволяет обнаружить анизотропию вплоть до величины $\sim 10^{-13}$. Верхняя же граница локальной анизотропии пространства, создаваемой Солнцем вблизи орбиты Земли, находится на уровне 10^{-10} . Таким образом, согласно приведенным оценкам, постановка данного эксперимента является вполне оправданной. Если фактическое значение анизотропии окажется меньше, чем 10^{-13} , и этот поисковый эксперимент не приведет к успеху, то все равно он будет иметь положительный выход, т.к. в результате будет достигнута рекордная проверка постулата локальной изотропии пространства — фундаментального постулата теории относительности. Однако успешный исход описанного или других

поисковых экспериментов представляется более вероятным, поскольку модель риманова пространства-времени с постоянной, не зависящей от распределения материи локальной изотропией физически не столь привлекательна, как модель финслерова пространства-времени, локальная анизотропия которого образует поле, порождаемое распределенной материей. По существу, только в рамках адекватной финслеровой модели пространства-времени появляется возможность чисто дедуктивным путем реализовать на количественном уровне идею относительности инертных свойств частиц, впервые высказанную Махом, но так и оставшуюся не воплощенной в общей теории относительности.

Среди альтернативных финслеровых теорий гравитации теория, представленная в настоящей работе, на сегодня является единственной достаточно развитой и жизнеспособной теорией. Метрическая функция, положенная в ее основу, определяет новый специальный тип финслерова пространства, не удовлетворяющего слишком жестким условиям теоремы [19]. Необходимо отметить, что, преследуя в качестве главной цели максимально четкое и последовательное изложение оригинальных результатов, мы вынуждены были отказаться от подробного обзора литературы. Поэтому список литературы содержит лишь те работы, результаты которых в той или иной мере использовались автором. Из обширной библиографии по финслеровой геометрии и ее приложениям отметим здесь лишь книги [2,3,18,28]. В них можно найти ссылки на основополагающие работы и детальное описание различных специальных типов финслеровых пространств. Что касается обобщения теории гравитации в русле картановского подхода к финслеровой геометрии, то по большей части соответствующие работы носят формальный характер. Дополнительным аргументам финслерова метрического тензора приписывается роль независимых внутренних переменных, и в духе уравнений Эйнштейна конструируются уравнения для соответствующего тензорного поля. При этом остается неясным физический смысл таких понятий, как внутренняя гравитационная постоянная, внутренний тензор энергии-импульса и т.п. Существует и другой подход к финслеру обобщению теории гравитации. Он основан на концепции риманова пространства, сопрягающегося с финслеровым вдоль конгруэнции кривых, касательных к выделенному векторному полю. Однако используемая в рамках такого подхода специальная финслерова метрика Бервальда — Моора не удовлетворяет принципу соответствия с римановой метрикой, что фактически предопределяет расхождение такой теории с экспериментом.

Чтобы обобщенные для финслерова пространства уравнения гравитационного поля отвечали принципу соответствия и поддавались разумной физической интерпретации, необходимо, чтобы теория содержала малый параметр — константу взаимодействия. При «выключении» взаи-

моделью финслера метрика должна переходить в риманову, а финслера теория гравитации — сводиться к обычной релятивистской теории гравитации. Теория, изложенная в данной работе, находится в согласии с этим требованием, поскольку финслера метрика, лежащая в ее основе, была получена, исходя из физических соображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Риман Б. — Об основаниях геометрии. Казань, физ.-мат. общество. 1893, с.67.
2. Рунд Х. — Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
3. Matsumoto M. — Foundation of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces. Otsu, Kaiseisha Press, 1986.
4. Horvath J.I. — Suppl. Nuovo Cimento, 1958, vol.9, p.444.
5. Takano Y. — Progr. Theor. Phys., 1964, vol.32, p.365.
6. Takano Y. — Progr. Theor. Phys., 1968, vol.40, p.1159.
7. Богословский Г.Ю. — ДАН СССР, 1973, т.213, с.1055.
8. Takano Y. — Lett. Nuovo Cimento, 1974, vol.10, p.747.
9. Ingarden R.S. — Tensor, 1976, vol.30, p.201.
10. Богословский Г.Ю. — Письма в ЖЭТФ, 1976, т.23, с.192.
11. Bogoslovsky G.Yu. — Nuovo Cimento, 1977, vol.40B, p.99.
12. Bogoslovsky G.Yu. — Nuovo Cimento, 1977, vol.40B, p.116; 1978, vol.43B, p.377.
13. Asanov G.S. — Nuovo Cimento, 1979, vol.49B, p.221.
14. Богословский Г.Ю., Панов В.И. — Вестн. Моск. ун-та, сер. физ., астроном., 1979, т.20, с.69.
15. Bogoslovsky G.Yu. — JINR Communication E2-82-779, Dubna, 1982.
16. Богословский Г.Ю. — УФЖ, 1984, т.29, с.17.
17. Bogoslovsky G.Yu. — Hadronic J., 1984, vol.7, p.1078; 1984, vol.7, p.1361.
18. Asanov G.S. — Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories. Dordrecht, D.Reidel, 1985.
19. Tavakol R.K., Van Den Bergh N. — Phys. Lett., 1985, vol.112A, p.23.
20. Богословский Г.Ю. — ДАН СССР, 1986, т.291, с.317.
21. Ikeda S. — Ann. der Physik, 1987, vol.44, p.558.
22. Ikeda S. — Nuovo Cimento, 1987, vol.98B, p.158.
23. Ikeda S. — Tensor N.S., 1987, vol.44, p.157.
24. Isham C.J. — Class. Quantum Grav., 1992, vol.9, p.569.
25. Isham C.J., Kubyshev Y., Renteln P. — Class. Quant. Gravity, 1990, vol.7, p.1053.
26. Cartan E. — Les espaces de Finsler. Paris, Actualites, 79. 1934.
27. Busemann H. — Bull. Amer. Math. Soc., 1950, vol.56, p.5.
28. Асанов Г.С., Пономаренко С.Ф. — Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности. Кишинев: Штиинца, 1989.
29. Зацепин Г.Т., Кузьмин В.А. — Письма в ЖЭТФ, 1966, т.4, с.114.
30. Greisen K. — Phys. Rev. Lett., 1966, vol.16, p.748.
31. Христиансен Г.Б. — Космические лучи сверхвысоких энергий. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974.
32. Лонгейр М. — Астрофизика высоких энергий. М.: Мир, 1984.
33. Christiansen G.B. — 20th Int. Cosmic Ray Conf. Rapp. Talks. M.: Nauka, 1988, p.54.
34. Христиансен Г.Б., Вашкевич В.В., Веденеев О.В. и др. — Изв. АН СССР, сер. физ., 1989, т.53, с.286.

35. Киржниц Д.А., Чечин В.А. — Письма в ЖЭТФ, 1971, т.14, с.261.
36. Седов Л.И. — Тр. Межд. сов. по пробл. квант. теории поля. ОИЯИ Д2-84-366, Дубна, 1984, с.368.
37. Киржниц Д.А., Чечин В.А. — ЯФ, 1972, т.15, с.1051.
38. Богословский Г.Ю. — Общая релятивистская теория локально-анизотропного пространства-времени и гравитации: Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: Физ. ф-т МГУ, 1988; Теория локально-анизотропного пространства-времени. М.: Изд-во МГУ, 1992; Bogoslovsky G.Yu. — *Class.Quantum Grav.*, 1992, vol.9, p.569.
39. Bogoslovsky G.Yu. — *Nuovo Cimento*, 1983, vol.77B, p.181.
40. Dicke R. — *Phys. Rev. Lett.*, 1961, vol.7, p.359.
41. Богословский Г.Ю. — Вестн. МГУ, сер. физ., астрофиз. 1983, т.24, с.70.
42. Bateman H. — *Proc. London Math. Soc.*, 1910, vol.8, p.223.
43. Cunningham E. — *Proc. London Math. Soc.*, 1910, vol.8, p.77.
44. Moller C. — *Proc. Roy. Soc.*, 1962, vol.207A, p.306.
45. Champeney D.C., Isaak G.R., Khan A.M. — *Phys. Lett.*, 1963, vol.7, p.241.
46. Хьюз В. Гравитация и относительность. М.: Мир, 1965, с.202.
47. Фок В.А. — Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИТТЛ, 1955.
48. Weyl H. — *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Physic-Math. Kl.* 1918, p.465.
49. Weyl H. — *Ann. d. Phys.*, 1919, vol.59, p.101.
50. De-Donder Th. — *La Gravifique Einsteinienne*. Paris, Gauthier-Villars, 1921.
51. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Теория поля. М.: Наука, 1973.
52. Черников Н.А. — ЭЧАЯ, 1987, т.18, с.1000; в сб.: Гравитационная энергия и гравитационные волны, ОИЯИ Р2-89-138, Дубна, 1989, с.12.
53. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, с.5.
54. Богословский Г.Ю. — Мат. Всес. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». Ереван: Изд-во ЕГУ, 1988, с.150.
55. Богословский Г.Ю. — Там же, с.152.
56. Богословский Г.Ю. — В сб.: Гравитационная энергия и гравитационные волны. ОИЯИ Р2-89-138, Дубна, 1989, с.45.
57. Богословский Г.Ю. — Тез. Всес. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации». М.: Изд-во ун-та им. П.Лумумбы, 1984, с.295.
58. Толмен Р. — Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974.
59. Bogoslovsky G.Yu. — *Abstr. of Contr. Papers 11th Int. Conf. on Gen. Rel. and Grav.* Stockholm, Akademtryck, 1986, vol.1, p.71.
60. Шапиро И. — Астрофизика, кванты и теория относительности. М.: Мир, 1982, с.215.