

НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВК. ТЕОРИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ¹

Ф.В.Ткачев

Институт ядерных исследований РАН, Москва

Анализируется математическая задача о построении асимптотических разложений многопетлевых фейнмановских диаграмм по массам и внешним импульсам, являющаяся центральной в пертурбативной квантовой теории поля. Дается обзор теории асимптотической операции — наиболее мощного инструмента решения этой задачи. Объясняется ее связь со стандартными методами (теория БПХЦ, метод главного логарифмического приближения и т.п.). Обсуждается проблема изучения неевклидовых асимптотических режимов и указываются пути ее полного решения.

The mathematical problem of construction of asymptotic expansions of multiloop Feynman diagrams in masses and external momenta is analyzed, which is central in applied perturbative Quantum Field Theory. A review of the theory of asymptotic operation is given, which is the most powerful instrument for solving the problem. Its connection with the standard methods (BPHZ, the leading logarithmic approximation etc.) is explained. The problem of studying non-Euclidean asymptotic regimes is discussed and ways of solving it are pointed out.

Главная цель обзора — объяснить, что такое асимптотическая операция (*As-операция*), и как она используется в приложениях, связанных с исследованием и расчетами радиационных поправок в рамках прикладной пертурбативной квантовой теории поля.

¹Обработка докладов, прочитанных на Совещании по физике SSC (Мадисон, апрель 1992), VII Совещании по физике высоких энергий (Сочи, октябрь 1992), Совещании по новым вычислительным методам в пертурбативной КХД (Цюрих, декабрь 1992), в ОИЯИ (Дубна), ИТЭФ (Москва), НИИЯФ МГУ (Москва), ИФВЭ (Протвино), в национальных лабораториях США FERMILAB, SEBAF, Argonne, и в университетах штатов Оклахома, Пенсильвания, Нью-Йорк (Стони Брук), а также МакГилл (Канада). Работа выполнена при финансовой поддержке коллаборации CTEQ/TNRLC.

Прежде всего, отношение теории As -операции к физике элементарных частиц можно пояснить с помощью следующей аналогии (см. табл. 1). Другими словами, в теории As -операции рассматриваются математические (вычислительные) вопросы прикладной пертурбативной квантовой теории поля, которая представляет собой формализм современной физики высоких энергий. С другой стороны, теория As -операции может рассматриваться как новая прикладная ветвь теории обобщенных функций, отличающаяся специфическими постановками математических задач. Поскольку в пертурбативной КТП все амплитуды выражаются в явном виде через диаграммы Фейнмана, ситуация здесь в определенном смысле проще, чем в классической механике. Однако теория As -операции достаточно трудна и важна.

Таблица 1

Классическая физика	Физика высоких энергий
Механика Ньютона	Пертурбативная КТП
Теория гамильтоновых систем	Теория As -операции
Общая теория дифференциальных уравнений	Теория распределений (обобщенных функций)

В обзоре сделана попытка ответить на следующие вопросы:

- В чем состоит задача и в чем ее специфика?
- Что такое As -операция?
- Что нужно сделать для распространения теории на неевклидовы асимптотические режимы?

В ЧЕМ СОСТОИТ ЗАДАЧА?

Ответ на этот вопрос будет довольно длинным, поскольку время, потраченное на то, чтобы точно понять задачу, потрачено хорошо — имеется более чем достаточно примеров того, как вредно преждевременно переходить к вычислениям, доказательствам, написанию статей и проч. Именно рассмотрение с новой точки зрения хотя и старой, но тонкой и сложной задачи об асимптотическом разложении фейнмановских диаграмм по массам и внешним импульсам лежит в основании теории As -операции.

1. Фейнмановские диаграммы остаются главным источником количественной динамической информации в физике высоких энергий, и это обстоятельство вряд ли скоро изменится (см., например, материалы любой конференции по программам новых суперускорителей).

2. Многопетлевые диаграммы необходимо вычислять по следующим причинам: некоторые эффекты целиком возникают из радиационных (петлевых) поправок; учет высших поправок в КХД уменьшает неопределенность, связанную с обрыванием ряда теории возмущений [93,104].

3. Вычислительная сложность многопетлевых диаграмм увеличивается с ростом числа независимых переменных интегрирования в диаграмме и количеством независимых внешних безразмерных параметров (см. табл.2).

Таблица 2

Сложность интегрирования	Количество параметров, с которыми возможна эффективная работа
древесное приближение	произвольное сечение
1 петля	много
2 петли	несколько (обычно один-два)
3 петли (4 PГ)	нуль (один размерный параметр)
4 петли (5 PГ) (рекорд)	нуль
более 4 петель	?!

В евклидовых задачах сложность интегрирования совпадает с числом петель l , если требуется вычислять конечные части l -петлевых диаграмм. В случае вычисления β -функции и других ренормгрупповых функций требуются лишь бесконечные части диаграмм, так что сложность равна числу петель минус 1. В неевклидовых задачах число петель нужно удваивать, так как здесь выделяется времениподобная компонента, интегрирование по которой проводится отдельно от пространственноподобных. Такая мера сложности соответствует максимальной глубине иерархии сингулярных многообразий подынтегрального выражения.

На древесном уровне любая амплитуда может быть вычислена как рациональная функция кинематических переменных. Следует учитывать, однако, что зачастую требуется делать интеграции по фазовому пространству, которые ничем не лучше в плане вычислительной сложности, чем «настоящие» петли. На однопетлевом уровне в ряде случаев

можно работать с несколькими параметрами, даже если ответы в самом общем случае будут весьма громоздкими [24, 73]. На двухпетлевом уровне лишь небольшое число задач с одним, самое большее двумя, параметрами поддается решению (ср. недавние вычисления лейденской группы [76]). На трехпетлевом уровне, похоже, только задачи без безразмерных параметров допускают систематическое решение аналитическими методами. Один пример — задача расчета $g_e - 2$ в КЭД [86]. Другой пример — безмассовые интегралы пропагаторного типа, допускающие систематическое эффективное вычисление в трехпетлевом приближении [29, 32]. Имеется два типа задач, которые сводятся к таким интегралам: вычисление коэффициентных функций вильсоновского операторного разложения на малых расстояниях (главное применение — к глубоконепругому лептон-адронному рассеянию; см., например, [85]), а также вычисление 4-петлевых РГ-функций (см. [23, 89]). Эффективное уменьшение числа петель имеет место благодаря приему, описанному в [15, 20, 22, 28], который удерживает лишь ведущие члены разложения по импульсам и массам соответствующих диаграмм (ср. ниже обсуждение приложений евклидовой асимптотической операции). В третьем классе задач (связанном с уже упоминавшимися) имеют дело с интегралами с массами [102].

Наконец, есть два примера вычислений 4-петлевой сложности: впечатляющий численный расчет $g_e - 2$ в КЭД [42], который нуждается еще в повышении точности, а также 5-петлевой ренормгрупповой расчет β -функций и аномальных размерностей в скалярной модели $\varphi_{D=4}^4$ [46]. Последнее вычисление было сделано с помощью различных аналитических приемов, а также численного суммирования в одной из диаграмм (затем вычисленной и аналитически [43]); оно имеет интересное применение к теории фазовых переходов [25, 51] (вычисление критических показателей методом ϵ -разложения Вильсона — Фишера). Интересно, что из-за несколько медленной сходимости просуммированного ряда для одного из показателей (η) было бы полезно вычислить даже 6-петлевую поправку к аномальной размерности волновой функции. Такое вычисление не кажется невозможным, если применять как аналитические, так и численные методы (имеется не так много диаграмм, и большинство из них тривиальны), но все-таки чрезвычайно громоздко.

4. Ясно, что единственный способ обеспечить реальную возможность продвижения в высокие порядки теории возмущений — это редукция числа независимых параметров. Такая редукция может быть достигнута, если использовать наличие больших/малых параметров (иногда неочевидным образом — примеры приведены ниже) и выполнить

асимптотическое разложение по ним. Таким способом можно заменить исходную сложную функцию рядом по степеням и логарифмам параметров разложения. Коэффициенты получающихся рядов суть более простые функции (с меньшим числом независимых параметров) по сравнению с исходной, и таким образом достигаемые вычислительные преимущества зачастую велики, даже если число таких более простых функций оказывается внушительным: «настоящая» сложность заменяется «просто» громоздкостью большого объема алгебры.

5. Наконец, задача об асимптотических разложениях фейнмановских диаграмм содержит два логических уровня. Это объясняется тем, что физические величины представляются суммами по всей совокупности соответствующих диаграмм, которая к тому же имеет иерархическую структуру. Иерархичность структуры ряда теории возмущений проявляется в существовании структурных уравнений (например, уравнений ренормгруппы [53]), позволяющих суммировать поправки. При определенных условиях асимптотически разложения также наследуют такого рода структуру, так что появляется возможность суммировать высшие поправки с помощью какого-либо аналога уравнений ренормгруппы (например, уравнений Липатова — Альтарелли — Паризи, Кураева — Липатова — Фаина [18, 105] и т.п.). Для вывода таких уравнений требуется знание глобальной структуры разложений для ряда теории возмущений в целом.

На *низшем уровне* задачи о разложениях в пертурбативной КТП имеют дело с разложениями отдельных диаграмм. Задача на этом уровне имеет *аналитическую* природу.

На *высшем уровне* имеют дело с определенными глобально (т.е. в терминах полных наборов фейнмановских диаграмм) амплитудами или функциями Грина. Их разложения следует преобразовать к глобальной форме (типа операторного разложения), которая допускала бы непертурбативную интерпретацию и вывод структурных уравнений. Переход с уровня отдельных диаграмм на глобальный уровень² имеет *комбинаторный* характер и сравнительно нетруден, если на нижнем уровне было найдено решение правильного типа.

«Правильные» решения — это те, которые, во-первых, удовлетворяют условию совершенной факторизации (см. [39, 40, 106] и обсуждение далее в обзоре). Во-вторых, разложения диаграмм должны быть составлены из таких «кусков» исходных диаграмм, которые представляли бы собой целостные объекты, снова имеющие вид многопетлевых диаграмм, с

²Такой переход называют факторизацией или экспоненцированием; лучший термин, видимо, *глобализация*.

тем чтобы их можно было — после комбинаторной перегруппировки «кусков», происходящих от разных исходных диаграмм, — сложить в объекты типа матричных элементов некоторых составных операторов. Именно указанное обстоятельство вносит специфику в задачу об асимптотических разложениях в прикладной КТП по сравнению с общей математической задачей.

Замечательным оказывается тот факт, что такие «правильные» решения естественно описываются лишь на языке теории обобщенных функций³ (см. подробнее ниже), в то время как в старых подходах работают в рамках обычного интегрального исчисления. Это объясняет, почему в рамках старых подходов (БПХЦ и т.п.) не удалось получить практически полезных результатов⁴.

Суммируем:

Центральная математическая задача в пертурбативной КТП — получение явных выражений для асимптотических разложений многопетлевых диаграмм по массам и внешним импульсам, удовлетворяющих известным дополнительным требованиям (условие совершенной факторизации).

Эта задача остается нерешенной в полном объеме несмотря на усилия десятков теоретиков в течение около 40 лет и наличие ряда частичных результатов. Пафос обзора состоит в том, что теория A_3 -операции дает в настоящее время реальную надежду на принципиальный прогресс в направлении полного решения задачи уже в близком будущем.

Прежде чем объяснять, на чем основана эта надежда, следует представить несколько примеров конкретных физических задач, в которых возникают асимптотические разложения фейнмановских диаграмм. Это представляется необходимым, так как, с одной стороны, в феномено-

³Здесь имеется прямая аналогия с задачей классической геометрии об измерении диагонали квадрата, решение которой также выражается в терминах некоторых «обобщенных» объектов — иррациональных чисел. Заметим, что открытие таких обобщенных решений сопровождается, как правило, путаницей, неприятием и прочими эмоциями со стороны приверженцев старых методов. Теория асимптотической операции не является здесь исключением.

⁴Впрочем, поскольку любое выражение с обобщенными функциями может быть переписано в терминах обычных интегралов, старые методы могут применяться для верификации результатов — *при условии, что эти результаты уже найдены каким-либо другим более адекватным способом*. Впрочем, такая верификация реально возможна лишь в простых случаях ввиду ее чрезвычайной громоздкости. Даже в случае евклидовых асимптотических режимов провести ее полностью в явном виде оказалось практически невозможным (см. обсуждение ниже). В любом случае практическая (научная) ценность таких верификаций крайне невелика.

логических работах не всегда точно описываются асимптотические режимы, малые и большие параметры в задаче и т.п., и зачастую не осознается, что, в принципе, для любого асимптотического режима имеется аналог операторного разложения — даже если форма последнего отлична от стандартного вильсоновского разложения с локальными операторами.

С другой стороны, специалисты по математической физике обычно ограничиваются небольшим числом канонических задач, где возможно «строгое» решение, например, задачей доказательства того, что разложения идут по степеням и логарифмам малого параметра или доказательства операторного разложения на малых расстояниях или на световом конусе⁵. К сожалению, строгость сама по себе «за пределами студенческих работ не имеет первостепенного значения и при наличии настоящей идеи всегда может быть внесена любым компетентным профессионалом» [3]. Это замечание принадлежит первоклассному «чистому» математику и касается «чистой» математики, изучающей «чистые» модели и примеры. В реальной жизни практические задачи в большинстве своем настолько громоздки, что полностью формализованные доказательства, которые были бы реально доступны для всеобщего обозрения теоретическому сообществу, остаются благим пожеланием. В такой ситуации термин «строгость» приобретает мифологическое содержание и зачастую употребляется с целью самодифференциации, являясь признаком отсутствия реальных идей и результатов. Результаты нас интересуют прежде всего *правильные* — неважно, сопровождающиеся вполне формализованными доказательствами или нет, а формализмы — к таковым новым результатам приводящие. Правильность же гарантируется не «строгостью», а глубоким и точным пониманием аналитической сущности изучаемых объектов и структуры задачи, адекватно отраженным в методах, используемых для нахождения решений.

ПРИМЕРЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Прежде всего, асимптотические режимы могут быть разделены на евклидовы и неевклидовы. Евклидовы режимы возникают в задачах, допускающих виков поворот импульсов интегрирования, так что все диаграммы становятся чисто евклидовыми. Класс евклидовых режимов включает два типичных случая: хорошо известный вильсоновский режим ма-

⁵К слову, феноменологически осмысленные задачи всегда формулируются на языке импульсного представления, так что буквальное понимание слов «малые расстояния» и т.п. без конкретного анализа реальной вычислительной практики приводит лишь к доказыванию бесполезных теорем.

лых расстояний, а также режим тяжелой массы, когда рассматриваются низкоэнергетические амплитуды, включающие только легкие поля (например, эффективные низкоэнергетические лагранжианы слабых взаимодействий легких кварков [16,17]). Имеются и смешанные случаи. Первое, более или менее полное феноменологически осмысленное решение задачи об асимптотических разложениях для общих евклидовых режимов было дано теорией евклидовой As -операции ([106] и ссылки там). Фраза «феноменологически осмысленное» переводится в техническое требование *совершенной факторизации*, которому должны удовлетворять разложения. Это требование будет обсуждаться ниже.

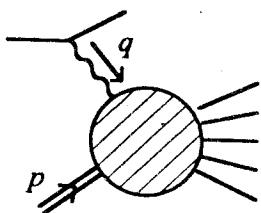


Рис. 1

Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах хорошо известно (рис.1; см., например, обзор [41]). Сечение параметризуется формфакторами, которые являются функциями $F(x, Q^2)$ от двух кинематических переменных: безразмерной бьеркеновской переменной x и переданного импульса $Q^2 = -q^2$. Стандартный асимптотический режим соответствует $Q^2 \rightarrow +\infty$ при фиксированном x :

$$F(x, Q^2) \xrightarrow[Q^2 \rightarrow +\infty]{x \text{ fixed}} F_{\text{LAP}}(x, Q^2) \times (1 + O(Q^{-2})). \quad (1)$$

Ведущий член зависит от Q^2 логарифмически, а функция F_{LAP} удовлетворяет интегродифференциальному уравнению, известному как уравнение Липатова — Альтарелли — Паризи (ЛАП). «Твистовые» поправки (т.е. поправки порядка $O(Q^{-2})$) удовлетворяют аналогичным уравнениям. Это редкий случай, когда структура твистовых поправок известна, что объясняется прямой связью задачи с хорошо изученным операторным разложением на малых расстояниях (через моменты структурных функций).

Соответствующий асимптотический режим можно описать, сказав, что p стремится к светоподобному значению:

$$p \rightarrow \tilde{p}, \quad \tilde{p}^2 = 0, \quad q \text{ фиксировано, } q^2 < 0, \quad m_i = O(p - \tilde{p}). \quad (2)$$

Массы исчезают с той же скоростью, с которой p приближается к своему светоподобному предельному значению. (В координатном представлении это соответствует пределу светового конуса [44].)

Обратим внимание на то, что p стремится к вектору, компоненты которого отличны от нуля, хотя лоренцев квадрат равен нулю. Это характерная черта неевклидовых режимов.

Альтернативно можно рассматривать моменты структурных функций:

$$\int_0^1 dx x^n F(x, Q^2) \xrightarrow[Q^2 \rightarrow +\infty]{x \text{ fixed}} C_n(Q^2) \times M_n \times (1 + O(Q^{-2})). \quad (3)$$

Этот асимптотический режим по существу евклидов. Коэффициентные функции $C_n(Q^2)$ суть фурье-преобразования коэффициентов вильсоновского операторного разложения.

Два асимптотических режима не эквивалентны. Выражением этого обстоятельства является тот факт, что задача восстановления структурных функций по их моментам является в математическом смысле некорректной: такое восстановление возможно, только если *все* моменты известны точно (как при восстановлении однопетлевых ядер уравнений ЛАП из аномальных размерностей операторов вильсоновского разложения), или если используется дополнительная информация вместе со значениями нескольких низших моментов.

Проблема малых x и реджевский предел (см. обзор 105). Здесь рассматриваются структурные функции глубоконеупругого рассеяния при малых x , где амплитуда, как ожидается, наиболее чувствительна к взаимодействию глюонов:

$$F(x, Q^2) \text{ для } x \rightarrow 0 \text{ при фиксированном } Q^2, \quad (4)$$

что эквивалентно изучению реджевского предела:

$$s = (p + q)^2 \gg Q^2, p^2, m_i^2. \quad (5)$$

По оптической теореме это связано с амплитудой упругого процесса:

$$F(s, t, u, m_i^2) \underset{s \rightarrow +\infty}{\approx} F(s) \times \dots \times (1 + O(s^{-1})). \quad (6)$$

Задача здесь состоит в том, чтобы определить зависимость от s , т.е. вид $f(s)$. Точками обозначен множитель, не содержащий s .

Реджевский предел изучался в связи с теорией дисперсионных соотношений и различными ограничениями на сечения, начиная с 50-х годов. Имеющийся в рамках пертурбативной КТП теоретический результат известен как уравнение Кураева — Липатова — Фадиной (КЛФ) (см.,

например, [18]). Это уравнение выводится с помощью так называемой техники главного логарифмического приближения [2,72], и полное понимание вывода остается привилегией узкого круга специалистов. Более того, уравнение КЛФ является аналогом лишь однопетлевого приближения для ренормгруппового уравнения для коэффициентных функций вильсоновского операторного разложения, и неизвестно, как его нужно модифицировать, чтобы выйти за рамки главного логарифмического приближения. Вопрос весьма важен, поскольку приближение ведущих логарифмов далеко не всегда работает удовлетворительно при доступных энергиях⁶. Следует также отметить, что в школе главного логарифмического приближения накоплен значительный теоретический опыт, остающийся труднодоступным для непосвященных.

Партонная модель с учетом КХД (см., например, обзор [41]) представляет собой набор рецептов, имеющих целью дать описание структуры ведущих степенных членов в асимптотических разложениях амплитуд для некоторого класса инклюзивных процессов для определенного класса асимптотических режимов. Теоретические результаты, на которых основана модель, известны как *теоремы о факторизации* [69]. Они выведены, как правило, лишь для ведущих степенных членов, и их статус, как подчеркивается и в [69], еще не может быть признан удовлетворительным из-за пробелов в выводе. Например, доказательство малости остаточного члена разложения технически весьма похоже на вычисление следующей поправки, а о степенных (твистовых) поправках в задачах типа судаковского формфактора практически ничего не известно. Здесь до сих пор не хватало эффективного формализма для работы как с аналитическими, так и комбинаторными аспектами задачи. Для евклидовых режимов пример подобного формализма дает теория евклидовой As -операции.

Например, в рамках КХД, следуя [26], рассмотрим процесс $H_1 + H_2 \rightarrow H_3 + X$, где X обозначает инклюзивное состояние (рис.2). Здесь имеется три независимые кинематические переменные: мандельстамовские переменные S , T и инвариантная масса инклюзивного состояния M_X^2 . Переменная U определяется из соотношения

$$S + T + U = M_X^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad (7)$$

⁶Автор признателен Л.Франкфурту за обсуждение этого вопроса.

где m_j^2 суть массы трех частиц. Имеются также легкие параметры типа масс кварков, которые явно не указаны. Обычно такие процессы рассматриваются в режиме $S, T, M_X^2 \gg m_j^2$, который соответствует стандартной партонной модели с учетом КХД. Тогда сечение представляется сверткой сечения «жесткого партонного подпроцесса» и партонных распределений, аналогичных распределениям $F_{LAP}(x, Q^2)$, возникшим при изучении глубоконеупругого рассеяния и удовлетворяющим тем же интегродифференциальным уравнениям. Существенная динамическая информация сконцентрирована в жестком сечении, которое является аналогом коэффициентных функций вильсоновского разложения. В настоящем случае оно зависит от двух безразмерных параметров (S обычно выделяется из выражений скейлингом).

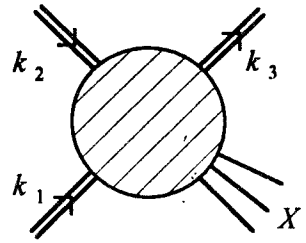


Рис. 2

Пример «скрытого» малого параметра. Вычисление жесткого сечения в предыдущем примере довольно громоздко уже на однопетлевом уровне [26]. Однако можно рассмотреть квазиупругий асимптотический режим $S, T \gg m_i^2, M_X^2$, и тогда нужно иметь дело лишь с одним независимым безразмерным параметром. (На практике работают с вариантом режима, соответствующим $S, T \gg M_X^2 \gg m_i^2$.) Такая модификация асимптотического режима мотивируется следующим обстоятельством. Как уже отмечалось, формула партонной модели для сечения содержит свертку жесткого сечения и партонных распределений $F_i(x, Q^2)$, которые имеют степенное поведение вида $(1 - x)^n$ при $x = 1$. Оказывается, что область, где это подавление не срабатывает, соответствует квазиупругому режиму; более того, вклады, доминирующие в квазиупругом режиме, усилены сингулярностями (см., например, [91] и ссылки там). Оказывается, что вычисление однопетлевых поправок тогда становится несравненно проще, в то время как аппроксимация, основанная на удержании лишь ведущих членов, работает удивительно хорошо (с численной точностью 5%) вплоть до $x_T \geq 0,2$ [91]. Это означает, что задача содержит эффективный скрытый малый параметр M_X^2/S . Заметим, что «малый» параметр не обязательно численно мал; важно лишь, что по такому параметру производится разложение, и что разложение работает с нужной точностью для значений параметра, представляющих интерес.

Общей теории квазиупругого режима нет; имеются только некоторые результаты в главном логарифмическом приближении (см., например, [92]). Заметим, что в области малых x партонная модель не может работать в любом случае. С другой стороны, квазиупругий режим ничем в принципе не хуже, чем стандартный режим, соответствующий партонной модели.

В задаче о судаковском формфакторе [2] рассматривается поведение формфакторов электрона, кварка и других элементарных полей при больших переданных импульсах (рис.3).

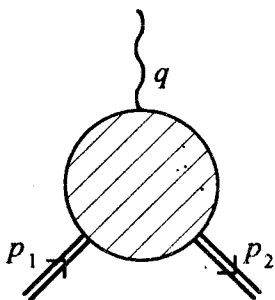


Рис. 3

Результаты для ведущего степенного члена описаны в [59,70]. Интересный факт состоит в том, что здесь появляются новые типы операторов (струнные операторы [100]), в то время как в обычном вильсоновском операторном разложении на малых расстояниях участвуют только локальные операторы. Струнные операторы появляются также и в других задачах [100]⁷.

Заметим, что судаковский формфактор убывает при больших Q^2 — эффект, известный как *судаковское подавление*. Важность задачи о судаковском формфакторе обусловлена старой гипотезой (см., например, [30]), что судаков-

ское подавление может для некоторых асимптотических режимов играть роль, подобную роли асимптотической свободы (ср. недавнюю работу [96]). Этот вопрос остается непроясненным.

Асимптотический режим здесь может быть описан следующим образом:

$$p_{1,2} \rightarrow \tilde{p}_{1,2}, \quad (8)$$

где $\tilde{p}_{1,2}^2 = 0$, при фиксированном q и все $t = O(p - \tilde{p})$ (ср. уравнение (2)).

Струи в КХД. «Струйный» подход к процессам при высоких энергиях представляет собой значительную новую парадигму в физике элементарных частиц, изобилующую сложными интересными задачами (см., например, обзор [60]). Практически здесь имеют дело с сечениями партонного типа со многими мягкими и коллинеарными сингулярностями. Ниже приведен пример задачи об асимптотическом разложении, сущность которой весьма отлична от рассмотренных выше.

⁷ Автор признателен А.В.Радюшкину за обсуждение этого вопроса.

Проблема «двойного бокса»⁸. Рассмотрим процесс с тремя адронными струями в конечном состоянии. В приближении $O(\bar{\alpha}_s^3)$ имеются трех-партонные вклады двухпетлевой сложности, из которых аналитически вычисляются все, за исключением диаграмм типа «двойной бокс» и их непланарных аналогов (рис.4; природа виртуальных линий — глюонные, кварковые и т.п. — неважна постольку, поскольку они безмассовы). Диаграмма «двойной бокс» есть функция $M^2 > 0$ и трех инвариантных масс пар конеч-

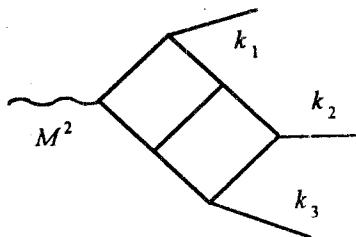


Рис. 4

ных партонов $s_{ij} = (k_i + k_j)^2$, $\{i, j\} = \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}$. Однако, поскольку $s_{12} + s_{23} + s_{31} = M^2$, в задаче имеются только два независимых безразмерных параметра, например:

$$x = s_{12}/M^2 > 0, \quad y = s_{23}/M^2 > 0, \quad x + y < 1. \quad (9)$$

Такая амплитуда имеет инфракрасные сингулярности (максимальная сингулярность ϵ^{-4}). Чтобы обеспечить калибровочно-инвариантное сокращение всех ИК-сингулярностей в полном ответе, нужно использовать размерную регуляризацию (другие практические методы пока не развиты, хотя это и не кажется невозможным). Другое требование состоит в том, что результат будет использоваться для генерирования по методу Монте-Карло $O(10^5)$ событий, так что ответ должен представлять собой эффективный вычислительный алгоритм. Это исключает прямолинейный подход, основанный на параметрических представлениях.

Возможный сценарий систематической работы с такими диаграммами, который применим и во многих других случаях, состоит в их представлении в виде разложений по степеням и логарифмам $x, y, 1 - x, 1 - y$.

Чтобы пояснить этот момент, заметим следующее. Часто неверно считают, что точные выражения для изучаемых интегралов через специальные функции являются тем окончательным ответом, к которому нужно стремиться при аналитическом вычислении. На самом же деле

⁸ Автор признателен Р.К.Эллису и В.Т.Гиле за разъяснение проблемы двойного бокса.

окончательным ответом следует считать асимптотические формулы в сингулярных точках (включая бесконечности) и эффективные численные алгоритмы для регулярных областей. «Явные» же представления через специальные функции полезны лишь постольку, поскольку имеется полная информация о поведении таких функций, позволяющая получать асимптотические формулы и проводить численные расчеты. С другой стороны, гарантированных универсальных методов получения таких явных представлений во всех случаях не существует, и даже когда они есть, они могут оказаться менее полезными, чем хотелось бы. Один пример — выражения через бесконечные многократные ряды по обобщенным гипергеометрическим функциям, получаемые посредством преобразования Меллина (см. [103] и ссылки там). Другой пример — численные расчеты типа описанных в [99], где иногда требуется вычислять дилוגарифмы с точностью 15 знаков, чтобы получить численный ответ с разумной (невысокой) точностью.

Однако, если имеется возможность напрямую и систематически получать асимптотические разложения в сингулярных точках для изучаемых выражений, то в сочетании с численными алгоритмами (использующими, например, фейнмановские параметры) это дает возможность напрямую получать всю необходимую информацию, обходя громоздкий шаг «аналитического вычисления».

В настоящем случае, скажем, разложение по x приводит к ряду, коэффициенты которого оказываются вычислимыми функциями от y . Для получения такого разложения нужно использовать неевклидов вариант техники As -операции. Можно, конечно, также выполнять разложения для асимптотических режимов $0 < x \ll y \ll 1$ и т.д. Так можно получать представления амплитуды в виде разложений по x и y около границ кинематического треугольника (рис.5). Сходимость таких разложений геометрическая, а радиус сходимости определяется сингулярностями функции, локализованными вдоль границ кинематического треугольника. Если сходимость недостаточна быстра около центра треугольника, всегда можно построить простую интерполяционную формулу, используя несколько значений, полученных численно; функция в центральной области аналитична.

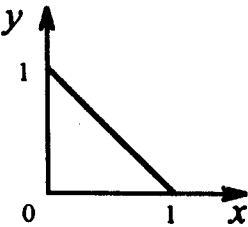


Рис. 5

По вычислительной сложности, измеряемой числом полюсов по $\epsilon = D - 4$, только что описанный сценарий соответствует рекордным пятипетлевым ренормгрупповым (евклидовым) вычислениям работ [46]. Однако неевклидовы усложнения делают задачу существенно более громоздкой, в то время как неабелевость КХД значительно увеличивает

объем алгебры. Тем не менее на данный момент это единственный реалистический сценарий вычисления диаграмм типа двойной бокс.

Имеется замечательный недавний аналитический результат [95] для скалярного двойного бокса, но только для планарного случая; к сожалению, ответ имеется только для 4 измерений, так что нужно взять $k_i^2 > 0$, чтобы регуляризовать ИК-расходимости. Чтобы привести 4-мерные результаты с ненулевыми k_i^2 к нужной форме (размерная регуляризация с $k_i^2 = 0$), можно выполнить разложение для $k_i^2 \rightarrow 0$. (Заметим, что снятие регуляризации для сингулярных произведений похоже на выполнение асимптотического разложения в смысле теории распределений, что подчеркивает фундаментальную роль этого понятия — см. обсуждение ниже.) Представляется маловероятным, что комбинация приемов, подобных использованным в вычислении планарного двойного бокса [95], могла бы привести к успеху и в непланарном случае (ср. [94]). Тогда придется прибегнуть к полному сценарию, описанному выше.

Наконец, в какой-то момент может потребоваться более тщательный анализ сингулярных граничных областей. Тогда потребуются использовать глобальные результаты типа факторизационных теорем и соответствующих уравнений для таких асимптотических режимов, что представляет собой еще одну вариацию на тему асимптотических разложений.

Имеется еще много других физических проблем, включающих асимптотические разложения фейнмановских диаграмм, для обсуждения которых здесь недостаточно места, например, эффективная низкоэнергетическая теория тяжелых кварков [88] и т.д.

ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ПЕРТУРБАТИВНОЙ КТП

Прежде всего следует описать конкретный асимптотический режим в терминах масс и внешних импульсов вместо скалярных (например, мандельштамовских) кинематических переменных, т.е. определить, какие массы и компоненты импульсов малы по сравнению с прочими. Положим, $Q, M \gg k, m$. По техническим причинам работать с малыми параметрами, по которым проводится разложение, проще, нежели со стремящимися к бесконечности. Из-за однородности амплитуд по размерным параметрам оба способа постановки задачи эквивалентны.

$Q, M \gg k, m$	
Q, M фиксированы	$k, m \rightarrow 0$
большие параметры	малые параметры

Следует подчеркнуть, что выражение $Q, M \gg k, m$, описывающее асимптотический режим, не обязательно выполняется в наивном численном смысле. Оно только означает, что исходная функция будет заменена на разложение по отношению двух масштабов. Радиус численной полезности получающегося разложения может быть довольно большим (ср. примеры выше).

УФ-перенормировка вводит дополнительный размерный параметр $\mu_{\text{ген}}$. Без существенной потери общности можно предположить, что все амплитуды перенормируются в MS-схеме (или любой другой безмассовой схеме перенормировок). Тогда перенормированные диаграммы суть полиномы от $\log \mu_{\text{ген}}$, и несущественно, рассматривается ли $\mu_{\text{ген}}$ как малый или большой параметр. В дальнейшем $\mu_{\text{ген}}$ будет игнорироваться.

Если $A(Q, M, k, m)$ обозначает изучаемую амплитуду (функцию Грина), то требуется найти разложение вида

$$A(Q, M, k, m) \cong \sum_i C_i(Q, M, \mu_{\text{факт}}) D_i(k, m, \mu_{\text{факт}}), \quad (10)$$

где C_i обычно называются «коэффициентными функциями», а D_i — «матричными элементами» (терминология унаследована от вильсоновского операторного разложения на малых расстояниях).

В выражении (10) явно указан еще один параметр — $\mu_{\text{факт}}$, который возникает в процессе факторизации больших и малых параметров:

$$\log(Q^2/m^2) \rightarrow \log(Q^2/\mu_{\text{факт}}^2) + \log(\mu_{\text{факт}}^2/m^2).$$

Он может быть приравнен (или нет) параметру перенормировки.

СОВЕРШЕННАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ

Чрезвычайно важное требование, которое было полностью упущено в старой постановке задачи о разложении, — это совершенная факторизация больших и малых параметров [39]. Оно может быть объяснено следующим образом. Во-первых, C_i должны содержать только вклады, пропорциональные одной и той же степени большого параметра. Во-вторых, они

не должны зависеть от малых параметров k и m . Из-за однородности A такие же утверждения — *mutatis mutandis* — будут справедливы и для D_i . Как следствие, μ_{fact} не может более наивно интерпретироваться как обрезание в импульсном представлении, разделяющее области интегрирования, поскольку использование таких обрезаний приводит к появлению степенных зависимостей от μ_{fact} . Термин «вялое обрезание»⁹ точнее определяет природу μ_{fact} (ср. пример ниже). Его глобальный смысл может быть пояснен следующим образом. Выражения для D_i оказываются матричными элементами некоторых сложных операторов, которые автоматически снабжены подходящей УФ-перенормировкой. Если требование совершенной факторизации удовлетворено, то автоматически оказывается, что такая перенормировка использует одну из безмассовых схем, например, MS-схему, при этом μ_{fact} оказывается параметром перенормировки такой схемы (ср. конструкцию A_s -операции, данную в [97,98]).

Поскольку разложения для пертурбативных функций Грина получают комбинаторной перегруппировкой разложений для отдельных диаграмм, следует уточнить смысл совершенной факторизации на уровне отдельных диаграмм. На этом уровне требование совершенной факторизации означает, что разложения должны идти по чистым степеням и логарифмам, и, на первый взгляд, такое требование может показаться бессодержательным. В самом деле, специалистам по вычислениям многопетлевых диаграмм хорошо известно, что при всей комбинаторной громоздкости аналитическая природа многопетлевых диаграмм довольно проста — они суть интегралы от рациональных функций переменных интегрирования. Вычислительный опыт показывает, что их асимптотические разложения по массам и внешним импульсам, извлеченные из «явных» выражений через специальные функции или разбиением областей интегрирования и т.п., всегда идут по степеням и логарифмам малого параметра. Формальные доказательства этого факта для разных асимптотических режимов были даны в [13,27,31,34,55]¹⁰. Однако суть задачи о

⁹Термин введен А.В.Радюшкиным.

¹⁰Аналитическая идея всех таких доказательств достаточно проста — умножения на рациональные функции и одномерные интегрирования не выводят из класса степенно-логарифмических функций. Главная же трудность состоит в том, чтобы провести более или менее явное сведение задачи к последовательности одномерных интеграций и построить рассуждение для произвольной диаграммы из того или иного достаточно широкого класса. Наиболее четкий способ организации таких рассуждений (приводящий к существенно более сильным результатам) дается теорией A_s -операции и основан на использовании рекурсии в задаче (см. ниже).

разложении многопетлевых диаграмм состоит в том, чтобы расчленил исходный интеграл (до явного вычисления, что представляет собой отдельную задачу со своей спецификой) на «куски» таким образом, чтобы одни «куски» содержали степенно-логарифмическую зависимость от параметра разложения, а другие — от больших параметров. При этом «куски» должны представлять собой целостные объекты, снова имеющие вид многопетлевых диаграмм, с тем чтобы их можно было, после комбинаторной перегруппировки «кусков», происходящих от разных исходных диаграмм, сложить в объекты типа матричных элементов некоторых составных операторов. В цитированных выше работах такого разбиения построить не удалось (да и задача такая, по-видимому, не ставилась). В то же время в работах Циммерманна [10,12], где были построены разложения в операторном виде для режима малых расстояний, «куски» не обладали чисто степенно-логарифмической зависимостью от малого параметра.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую одномерную модель однопетлевого интеграла, зависящего от большого «импульса» Q , малого «импульса» k , а также малой ненулевой массы m :

$$I(Q, k, m) = \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p+k+m} \times \frac{1}{p+Q+m}.$$

Требуется построить разложение этого интеграла при $Q \rightarrow \infty$. Возможны три конструкции.

1) Наиболее прямолинейный подход заключается в том, чтобы разбить область интегрирования:

$$\int_0^{+\infty} dp = \int_0^{\mu} dp + \int_{\mu}^{+\infty} dp, \quad (11)$$

и в первой подобласти разложить подынтегральное выражение по $Q \rightarrow \infty$, а во второй — по $k, m \rightarrow 0$. Все интегралы здесь вычисляются, и нетрудно видеть, что в разложении будут только степени и логарифмы параметров, причем будут присутствовать также степени μ , которые сокращаются после приведения подобных из интегралов по двум областям. Последний факт свидетельствует о том, что при таком подходе игнорируются какие-то важные свойства.

2) Стандартное решение, типа полученного в [10], выглядит следующим образом. Сначала выполняется предварительное вычитание:

$$\begin{aligned}
 I(Q, k, m) = & \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{1}{p+k+m} - \frac{1}{p+m} \right] \times \frac{1}{p+Q+m} + \\
 & + \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p+m} \times \frac{1}{p+Q+m}.
 \end{aligned}$$

Теперь в первом члене можно заменить пропагатор, зависящий от Q , на значение, соответствующее асимптотике при больших Q , следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I(Q, k, m) = & \left\{ \frac{1}{Q+m} \right\} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{1}{p+k+m} - \frac{1}{p+m} \right] + \\
 & + \left\{ \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p+m} \times \frac{1}{p+Q+m} \right\} + O(Q^{-2}). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках соответствует перенормированному матричному элементу локального оператора (вычитание при нулевых k по схеме MOM [53]). В фигурные скобки взяты куски, зависящие от Q (соответствующего «малым расстояниям» после преобразования Фурье), но не от k («большие расстояния») — из таких выражений складываются в конечном итоге коэффициентные функции.

Хотя формально задача в постановке Вильсона [8] решена — большие и малые расстояния расфакторизованы, но для феноменологических приложений этого недостаточно по следующим причинам.

Во-первых, физические задачи непосредственно формулируются в импульсном представлении, и корректный асимптотический режим — это $Q \gg k, m$, т.е. масса должна быть малым параметром (если противное специально не оговорено).

Во-вторых, путем явного вычисления интегралов нетрудно убедиться, что выражения для «коэффициентных функций» содержат в асимптотике при больших Q члены, содержащие «твистовые» поправки, т.е. подавленные множителями $O(m/Q)$ по сравнению с ведущей степенью. В асимптотически свободных теориях коэффициенты при таких членах по теории возмущений не вычисляются [40].

В-третьих, наличие достаточно сложной зависимости от m в коэффициентных функциях делает расчеты радиационных поправок к ним практически невозможными.

В-четвертых, метод не дает удовлетворительных результатов для теорий с безмассовыми частицами (например, КХД) — это проявляется в

невозможности положить $m = 0$ в уравнении (12) из-за неинтегрируемой сингулярности при $p = 0$.

Наконец, для неевклидовых режимов, где сингулярности локализованы на нелинейных многообразиях (световой конус), подход с предвычитаниями оказывается крайне негибким. По существу, чтобы выполнить предварительное вычитание, подобное сделанному выше, требуется знать ответ заранее. Это обстоятельство — отсутствие достаточно мощных эвристик для более сложных задач — является решающим для оценки стандартного подхода.

3) Решения для задач такого типа, лишенные перечисленных недостатков, были впервые получены в рамках теории As -операции [39] (см. также [106] и ссылки там). Чтобы только сравнить получающиеся здесь выражения с приведенными выше, ограничимся окончательным ответом, поскольку способ рассуждений, автоматически приводящий к таким выражениям, будет обсуждаться ниже:

$$I(Q, k, m) = \left\{ \frac{1}{Q} \right\}^{\tilde{r}} \int_0^{+\infty} dp \left[\frac{1}{p+k+m} - \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} \right] + \\ + \left\{ \int_0^{+\infty} dp \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} \times \frac{1}{p+Q} \right\} + O(Q^{-2}). \quad (13)$$

Выражение $\left\{ p^{-1} \right\}^{\tilde{r}}$ представляет собой распределение, определяемое с помощью формулы

$$\int_0^{+\infty} dp \left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} \varphi(p) = \int_0^{+\infty} dp \frac{1}{p} \left[\varphi(p) - \theta \left(\frac{p}{\mu_{\text{fact}}} \right) \varphi(0) \right],$$

где $\theta(p/\mu)$ — обрезающая функция, равная 1 при $p \leq \mu$ и 0 при $p \geq \mu$. В более общем случае появляются распределения, обладающие, как и в нашем примере, простыми свойствами скейлинга, что приводит к степенно-логарифмической зависимости от Q [97, 106]. В вышеприведенном примере в этом можно убедиться прямым вычислением.

Вычитание в квадратных скобках уже соответствует перенормировочной схеме типа MS-схемы [97]. Если использовать промежуточную регуляризацию типа размерной, то справедливы представления типа

$$\left\{ \frac{1}{p} \right\}^{\tilde{r}} = \frac{1}{p} + \frac{\text{const}}{\varepsilon} \delta(p),$$

т.е. по сравнению с «голым» выражением, получающимся из исходного с помощью разложения по m , появляются «контрчлены», локализованные в точках сингулярностей. Если использовать такие представления (общие формулы для этого случая выписаны в [97,106,107]), то при вычислениях достаточно иметь дело, пренебрегая простыми членами, содержащими δ -функции, с интегралами без масс. Для коэффициентных функций вильсоновского операторного разложения получаются безмассовые интегралы пропагаторного типа [39,45], а для таких интегралов существует эффективный алгоритм вычисления до трех петель включительно [29,32,38,66,67,84].

Хотя в этом простом примере можно переписать результат так, чтобы избавиться от выражений, содержащих распределения, в более сложных случаях (когда больше импульсов интегрирования) это сделать труднее, и при этом будет потеряна эвристическая связь с выводом. А изучать то, как выводятся новые правильные результаты, в математике не менее и даже более (и гораздо более) важно, чем «строгое доказывать» уже найденные.

Таким образом, можно заключить, что разложения, удовлетворяющие требованию совершенной факторизации, во-первых, можно получить в виде, пригодном для проведения комбинаторной факторизации. Во-вторых, такие разложения наиболее естественно описываются на языке теории обобщенных функций.

Остается заметить следующее. Требование совершенной факторизации чрезвычайно важно как с технической, так и с концептуальной точек зрения. Это обусловлено тем обстоятельством, что такие разложения обладают свойством единственности (см. [106]). Отсюда, в частности, следует, что такие разложения наследуют свойства типа калибровочной инвариантности, унитарности и т.д. от начальной амплитуды упорядоченным образом, автоматически, и нет нужды специально заботиться о том, чтобы окончательные выражения не противоречили, скажем, унитарности. *Единственное, что необходимо обеспечить, — это чтобы разложения шли по степеням и логарифмам параметра разложения.* С другой стороны, логарифмически-степенная природа разложений сохраняется в рекурсивных конструкциях, типичных для теории As -операции, потому что произведение логарифмически-степенных разложений снова будет разложением такого же типа.

ЗАДАЧА О РАЗЛОЖЕНИИ МНОГОПЕТЛЕВЫХ ДИАГРАММ С МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

... пертурбативный вариант вильсоновского разложения на малых расстояниях полностью понят более десяти лет назад.
... Новая теория не нужна.

Рецензент журнала Nuclear Physics B

Не спеши меня понять.

Китайская поговорка

ПОЧЕМУ ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ?

Рассмотрим следующий интеграл, который требуется разложить по $m \rightarrow 0$ (бесконечно малые мнимые добавки в знаменателе для краткости опущены):

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)(p - Q)^2}. \quad (14)$$

Хорошо известная трудность с разложением такого интеграла состоит в том, что зависящий от m пропагатор получает при формальном разложении по m сингулярности, степень которых увеличивается с ростом порядка разложения:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{m^2}{p^4} + O(m^4). \quad (15)$$

Обычный способ обойти эту трудность состоит в разбиении области интегрирования так, чтобы изолировать опасные точки и/или выполнить подходящие вычитания в точке $p = 0$ для множителей, которые не участвуют в разложении по m , чтобы нейтрализовать сингулярности. Эта идея лежит в основе обычных подходов — либо в форме Циммерманна [10], либо в форме техники «главных областей интегрирования» [2,69].

Такой подход сам по себе вполне правилен. Однако в многопетлевом случае количество дополнительных вычитаний увеличивается, и работать с ними становится трудно. Вот почему так называемая лесная формула [10,21] (которая дает замкнутое формальное описание получающегося нагромождения вычитаний для простейшего случая евклидовых разложений) обычно рассматривается как модель решения задачи в общем случае. Однако, как объясняется ниже, ожидаемое расширение теории

As-операции на неевклидов случай было бы неверно рассматривать как построение неевклидова варианта лесной формулы, поскольку последний, возможно, и не существует в форме, доступной для изучения.

Принимая во внимание, что неевклидову лесную формулу не удалось найти в течение более чем двадцати лет, прибегнем к методу пристально-го разглядывания — наиболее мощному из известных методов решения нетривиальных задач.

Прежде всего, трудные задачи не следует рассматривать изолированно, а также нельзя упускать из виду их существенные аспекты. Так, можно вспомнить, что в контексте прикладной КТП рассматривать отдельную диаграмму имеет мало смысла, поскольку здесь имеют дело с бесконечными иерархически (рекурсивно¹¹) организованными наборами таких диаграмм. Более того, имеется много моделей, где возникают сходные интегралы. Например, рассмотрим следующий вариант выражения (14), который отличается от (14) только наличием тяжелой массы:

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)((p - Q)^2 - M^2)}. \quad (16)$$

Можно заметить, что зависящий от m множитель, приводящий к трудностям, здесь тот же, что и в (14), и все различие только в «пассивном» множителе $((p - Q)^2 - M^2)^{-1}$, который гладок в сингулярной точке. Естественно предположить, что точный вид «пассивного» множителя неважен постольку, поскольку он гладок:

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)} \varphi(p), \quad (17)$$

где $\varphi(p)$ есть всюду гладкая функция, убывающая при больших p достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость (чтобы избежать побочных усложнений из-за УФ-расходимостей)¹². Ясно, что как выражение (17), так и его разложение по m — каков бы ни был вид такого разложения — линейны по $\varphi(p)$. Разложить (17) для любых «хороших» $\varphi(p)$ — это в точности то же самое, что разложить пропагатор $(p^2 - m^2)^{-1}$ в смысле теории распределений.

¹¹Напомним, что ряд теории возмущений можно породить итерациями уравнений Дайсона — Швингера.

¹²Здесь следует подчеркнуть, что в исходном интеграле множитель, который мы заменили на пробную функцию, сам пробной функцией не является. Речь здесь идет прежде всего об эвристике, позволяющей сконцентрировать внимание на самом главном моменте задачи. Заметим, что выбор класса пробных функций здесь — дело достаточно произвольное и диктуется исключительно удобством.

Здесь удобно разъяснить, в чем состоит с практической точки зрения разница между разложениями в смысле распределений и формальным тэйлоровским разложением. Ключевой результат здесь — так называемый *принцип продолжения* [33,106] — конструктивное, хотя и абстрактное (впрочем, формально довольно простое) утверждение, подобное классической теореме Хана — Банаха о продолжении функционалов. Принцип продолжения утверждает, что если задан зависящий от m функционал, определенный на линейном пространстве, а также другой функционал, аппроксимирующий первый на подпространстве, то аппроксимирующий функционал может быть расширен на все пространство с сохранением свойства аппроксимации. С практической точки зрения рецепт принципа продолжения состоит, грубо говоря, в добавлении к формальному разложению контрчленов, локализованных в сингулярных точках и поэтому пропорциональных δ -функциям и их производным. Аналогично случаю R -операции в координатном представлении коэффициенты таких контрчленов расходятся, чтобы компенсировать неинтегрируемые сингулярности формального разложения. Однако в отличие от R -операции *конечные части коэффициентов не произвольны*, потому что они должны обеспечить аппроксимационные свойства получающегося разложения в смысле распределений. В действительности, если разложение должно иметь определенный аналитический вид (в нашем случае условие совершенной факторизации требует, чтобы оно содержало только степени и логарифмы параметра разложения), то *коэффициенты контрчленов определяются однозначно*. Практический рецепт определения коэффициентов дается *условиями самосогласованности* [33,106].

В настоящем случае зависящий от m функционал — это распределение, соответствующее неразложенному пропагатору (17); пространство — это пространство пробных функций; аппроксимирующий функционал — это формальное разложение Тэйлора (15); подпространство, на котором последнее представляет собой хорошо определенный аппроксимирующий функционал, состоит из пробных функций, таких, что $\varphi(0) = 0$. Ясно, что единственный способ построить расширенный функционал состоит в добавлении к формальному разложению δ -функции с подходящим коэффициентом. (Это рассуждение подобно аргументам Н.Н.Боголюбова, приведшим его к открытию правильного вида R -операции [1,6]. В действительности именно конструкция Н.Н.Боголюбова с самого начала послужила моделью для теории As -операции [33].) Итак, полное разложение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \approx As \frac{1}{p^2 - m^2} + O(m^4) = \frac{1}{p^2} + \frac{m^2}{p^4} + c(m) \delta(p) + O(m^4), \quad (18)$$

где коэффициент $c(m)$ определяется однозначно условием самосогласованности. В настоящем случае его явное выражение (для случая размерной регуляризации) имеет вид

$$c(m) = \int dp \frac{1}{p^2 - m^2}. \quad (19)$$

Явные выражения для общего евклидова случая могут быть найдены в [106] (размерно регуляризованный вид) и в [87] (вид, не зависящий от регуляризации). Здесь достаточно подчеркнуть, что контрчлены, вводимые As -операцией, служат двум целям. Во-первых, они содержат расходящиеся части, которые компенсируют расходимости формального разложения подобно тому, как R -операция удаляет УФ-расходимости в координатном представлении; во-вторых, контрчлены содержат конечные части, которые фиксированы однозначно (в отличие от случая R -операции), а их роль состоит в «подстройке» разложения с тем, чтобы обеспечить аппроксимационные свойства.

Данная выше переформулировка задачи на языке распределений настолько важна (по существу, вся теория As -операции представляет собой логическое развитие этой идеи), что заслуживает нескольких замечаний общего характера.

1. Задача (17) представляет собой обобщение исходной проблемы (14). Имеется два вида обобщений. При одном игнорируется какой-либо важный аспект задачи, так что ее природа, по существу, меняется; а отсутствие важных структур может затруднить решение или сделать его невозможным. При другом игнорируются вторичные, хотя, возможно, и громоздкие детали. В результате оказывается возможным сконцентрироваться на том, что действительно важно, а задача при этом по-настоящему упрощается, даже если и вводятся в действие новые понятия. Именно этот род обобщения имеет место в нашем случае.

2. Наша переформулировка представляет собой вложение исходной задачи в более общую. Такое вложение допускает известный произвол, который мы имеем право фиксировать из соображений удобства. В нашем случае произвол включает выбор типа допустимых пробных функций $\varphi(p)$, выбор топологии (или ее отсутствия) во множестве линейных функционалов и т.п. Однако такие технические детали менее важны, нежели эвристика общего сценария, и должны фиксироваться по мере решения задачи из соображений удобства. В нашем случае наиболее удобный выбор [97] состоит в использовании пробных функций и функционалов из пространств Шварца $\mathcal{D}(P)$ и $\mathcal{D}'(P)$ соответственно.

3. Работа сначала с пробными функциями, которые убывают для всех достаточно больших p , соответствует введению гладкого УФ-обрезания.

Это соответствует наблюдению о независимости того, что происходит вокруг $p = 0$, от поведения интеграла при больших p . Мы увидим ниже, как происходит переход к интегралам по бесконечному объему. Здесь достаточно заметить, что введение локализованных пробных функций позволяет сосредоточиться на окрестности изучаемой сингулярности. Это, по существу, лишь более тонкая реализация основной идеи метода главных областей интегрирования.

СВОЙСТВО ЛОКАЛИЗАЦИИ И РЕКУРСИВНАЯ СТРУКТУРА As -ОПЕРАЦИИ

Рассмотрим многопетлевую диаграмму, где знаменатель содержит тот же зависящий от m пропагатор, что и ранее:

$$\int dp \frac{1}{(p^2 - m^2)} \int dp' \frac{1}{(p - p')^2 \dots} \quad (20)$$

(см. рис.6). Сингулярности формального разложения зависящего от m пропагатора локализованы на подпространстве $p = p'$ (вертикальная ось

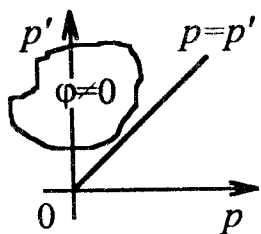


Рис. 6

на рис.6). В соответствии с философией метода главных областей интегрирования рассмотрим вклады, происходящие из окрестности этого подпространства. С точки зрения теории распределений это означает, что рассматривается разложение пробных функций $\varphi(p, p' \dots)$, которые равны нулю вокруг других сингулярностей подынтегрального выражения. Носитель φ (т.е. множество, где $\varphi(p, p' \dots) \neq 0$) может иметь вид, как на рис.6. Ясно, что произведение таких $\varphi(p, p' \dots)$ и

остальной части подынтегрального выражения, $\varphi(p, p' \dots) \times \frac{1}{(p - p')^2 \dots}$, может рассматривать-

ся как гладкая пробная функция, так что задача вырождается к случаю одиночного пропагатора (17). Введем обозначение As для операции, которая применяется к зависящим от m произведениям и дает как результат их разложение в смысле распределений. Тогда приведенные выше рассуждения могут быть формально представлены в следующем виде:

$$As^\circ \left(\frac{1}{(p^2 - m^2)} \times \frac{1}{(p - p')^2 \dots} \right) = \left(As^\circ \frac{1}{(p^2 - m^2)} \right) \times \left(T^\circ \frac{1}{(p - p')^2 \dots} \right),$$

которое справедливо на описанных выше пробных функциях. Операция T в правой части — обыкновенное тэйлоровское разложение по m . Его

присутствие отражает тот факт, что множители, разложение которых не дает сингулярностей в данной области, не требуют особого обращения.

Более общо: пусть G — произведение зависящих от m пропагаторов, которые требуется разложить по m в смысле распределений, а O — область пространства интегрирования, где сингулярны лишь часть пропагаторов из G (обозначим произведение таких пропагаторов G^{sing}), так что все другие пропагаторы из G регуляры (их произведение обозначим $G^{\text{reg}} \equiv G/G^{\text{sing}}$). Тогда возникает следующее фундаментальное

Локализационное свойство As-операции:

$$As \circ G|_O = T \circ G^{\text{reg}} \times As \circ G^{\text{sing}}.$$

Это свойство выявляет ключевую рекурсивную структуру, имеющуюся в нашей задаче о разложениях. Его роль здесь подобна роли условия микропричинности в конструкции R -операции [53].

Рекурсивная организация задачи имеет явные преимущества, поскольку она позволяет разбить исходную задачу на более простые подзадачи и свести рассуждения — как на эвристической стадии, так и в формальном доказательстве — к изучению одного индуктивного шага. Все это вполне очевидно и представляет собой именно ту цель, которую преследует теория As-операции. Более того, парадигматический пример такого подхода уже давно известен — это построение Н.Н.Боголюбовым ультрафиолетовой R -операции [1,53]. В этой связи полезно вспомнить условие микропричинности для S -матрицы, которое в простом частном случае имеет вид

$$T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)\mathcal{L}(z)(w)] = T[\mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)]T[\mathcal{L}(z)\mathcal{L}(w)], \quad x^0, y^0 > z^0, w^0.$$

В этом соотношении T обозначает хронологическое произведение, а $\mathcal{L}(x)$ — плотность лагранжиана взаимодействия в пространственно-временной точке x . Если в задаче о разложении рекурсивная структура видна только после принятия точки зрения теории распределений, в теории R -операции она была на поверхности с самого начала: оригинальное рассуждение Н.Н.Боголюбова было явно рекурсивным и обобщенно-функциональным¹³. Оно не было полностью понято и усвоено теоретическим сооб-

¹³ Следует отличать эвристический вывод R -операции Н.Н.Боголюбовым от ее «доказательства» в теории БПХЦ — они основаны на двух совершенно противоположных способах разрешения дилеммы, о которой речь ниже.

ществом (заметим, что даже в самой книге [53] ключевая работа [1] процитирована не вполне точно) — пока не было использовано как модель для теории As -операции.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ДИЛЕММА: СИНГУЛЯРНЫЕ МНОЖИТЕЛИ И РЕКУРСИЯ

Итак, фундаментальная рекурсия в задаче о разложении (локализационное свойство) имеет дело с *произведением сингулярных множителей*. Соответственно дилемма состоит в том, как обращаться с сингулярностями (см. табл.3).

Таблица 3

<i>Альтернатива</i>	БПХЦ и т.п.: пожертвовать рекурсией, чтобы избавиться от сингулярностей.	<i>As-операция</i> : использовать рекурсию путем привлечения теории распределений.
<i>Цель</i>	Формальная строгость.	Новые результаты; вычисленные методы; эвристически содержательные доказательства.
<i>За</i>	Используются только методы обычного интегрального исчисления.	Полностью используются преимущества рекурсии; детерминистский рецепт построения разложения.
<i>Против</i>	Чрезвычайно громоздкие формулы; никакой связи с эвристическими рассуждениями, ответ нужно знать заранее; не каждая рекурсия разрешима!	Нестандартная техника для работы с сингулярностями (новый раздел теории распределений).

ТРАДИЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ И ЛЕСНАЯ ФОРМУЛА

По уже обсуждавшимся причинам в течение довольно долгого времени принималось за само собой разумеющееся, что все выражения, содержащие сингулярности, должны сводиться к обычным абсолютно сходящимся интегралам путем разрешения рекурсии. Этот подход был инициирован Боголюбовым и Парасюком [4]¹⁴, преследовавшими цель

¹⁴Они, кстати, не сделали это последовательно, что только усугубило технические трудности доказательства.

дать «строгое» оформление их формулы для R -операции, и со временем развился в теорию, известную как БПХЦ (Боголюбов — Парасюк — Хепп — Циммерманн) и ставшую доминирующей для «строгого» изучения диаграмм Фейнмана, причины чего рассмотреть поучительно.

Во-первых, формализованная реализация альтернативного подхода требует создания специальной математической техники, которой нет в готовом виде в стандартной теории распределений (ср., например, так называемые d -неравенства, позволяющие описывать аналитическую структуру сингулярности в изолированной точке в присутствии сингулярностей, локализованных на многообразиях, проходящих через эту точку [56,97]). Поэтому естественно, что сначала пытались обойтись методами обычного интегрального исчисления, даже в ущерб эвристическим аспектам и интуиции.

Вторая причина была в популярности параметрических представлений. Достаточно вспомнить, что параметрические представления использовались в 50-х годах для изучения аналитических свойств амплитуд (ср., например, уравнения Ландау [5]). При использовании и «изучении» параметрических представлений создается иллюзия, что подынтегральное выражение упрощается (что обманчиво, потому что при этом разрушается его фундаментальная мультипликативная структура; напомним также, что наиболее успешные методы аналитических вычислений многопетлевых диаграмм избегают параметрических представлений — ср., например, широко применяемый алгоритм интегрирования по частям для безмассовых интегралов [29,32,38,66,67,84]). Другая иллюзия состоит в том, что при таком изучении создается впечатление, что имеет место большее, нежели просто создание систематической нотации для формального описания подынтегральных выражений и преодоления трудностей ятрогенного характера (уже отмеченное разрушение мультипликативной структуры).

Наконец, К.Хепп, уточнивший доказательство Н.Н.Боголюбова и О.С.Парасюка и введший их результат в русло мировой теоретической традиции, очевидно, не интересовался обобщенно-функциональными аспектами вывода и механизма R -операции, но рассматривал «метод Боголюбова» (т.е. окончательную формулу для R -операции, а отнюдь не вывод) довольно формально как «феноменологическую процедуру», которую надлежит «доказать» (ср. его книгу [9], особенно главу 6 и замечания перед уравнением (6.26)).

Что касается отношения самого Н.Н.Боголюбова, то можно предположить, что правильность формулы для R -операции должна была быть ему ясна из совокупности эвристических аргументов, основанных на координатном и параметрическом представлениях, и ставилась лишь задача «строгого» оформления результата. Кроме того, Н.Н.Боголюбов,

очевидно, был увлечен (судя по значительному вниманию, уделенному в монографии [6] параметрическому представлению, которое, как теперь уже вполне ясно, того не заслуживает), как и многие, любопытным (хотя и несущественным) взаимодействием комбинаторных и теоретико-графовых аспектов α -параметрического представления.

Как бы то ни было, традиция БПХЦ оставалась доминирующей в течение 30 лет. Соответствующая формула с многократным суммированием, представляющая решение соответствующей рекурсии в евклидовом случае, известна как «лесная формула» [10,21].

Разумеется, в теории распределений нет ничего сверхъестественного, и ее общие теоремы гарантируют, что любое выражение, содержащее распределения, может быть переписано на языке обычных интегралов, а процедура вывода разложений в смысле распределений может быть, хотя бы в принципе, сведена (на низшем логическом уровне) к вычитаниям, перегруппировке членов, разбиению области интегрирования на сектора типа хепповских и т.п. Но не менее справедливо, например, то, что любое математическое выражение практически сводится к конечным манипуляциям с целыми числами. Однако было бы в высшей степени неразумно пренебречь преимуществами работы с понятиями высшего логического уровня (рациональные, комплексные числа, математический анализ и проч.) только для того, чтобы не изучать правил рациональной арифметики и бесконечно малых.

С другой стороны, не все рекурсии могут быть разрешены к виду обзримой нерекурсивной формулы (в нашем случае лесная формула содержит многократные суммирования по специальным наборам подграфов — лесам). Евклидову лесную формулу уже с трудом можно назвать обзримой¹⁵. В неевклидовом случае ситуация намного хуже (что должно быть ясно уже из того факта, что неевклидов вариант задачи остается нерешенным). Формальная причина состоит в следующем. Строго говоря, локализационное свойство само по себе недостаточно. Оно позволяет лишь определить структуру контрчленов (ср.(18)). Их коэффициенты

¹⁵Это обстоятельство, кстати говоря, психологически объясняет, почему современные приверженцы теории БПХЦ столь рьяно настаивают на формальной строгости, причем именно в их варианте, при изучении многопетлевых диаграмм: при работе с лесной формулой делается попытка решить задачу целиком, одним махом, не структурируя ее в иерархию более простых подзадач. При этом лежащий в основе рассуждений примитивный подсчет степеней оказывается скрыт под слоем формализма, нужного для отслеживания сокращений между членами довольно сложной суммы; как результат, с лесной формулой можно работать только в скрупулезно формальной манере. Поэтому неудивительно, что у начинающих изучать теорию многопетлевых диаграмм с лесной формулы неискоренима подозрительность в отношении новых подходов, дающих лучшие результаты с меньшими усилиями.

(ср.(19)) должны быть найдены с помощью дополнительных рассуждений, основанных на принципе продолжения. Выражения для коэффициентов замыкают рекурсию. В евклидовом случае такие выражения довольно просты, особенно в размерной регуляризации (ср.(19)). В неевклидовом случае выражения для коэффициентов содержат дополнительные разложения, так что рекурсия в целом усложняется принципиальным образом (она становится как бы двухъярусной). Поэтому даже если неевклидова лесная формула в точном смысле слова и будет построена, не следует ожидать, что она окажется полезной даже для целей формальной верификации результатов, полученных более тонкими методами.

Это подводит нас к следующему. Имеется другая конкретная причина эвристической бесплодности стандартного подхода, основанного на использовании лесной формулы. Типичная структура R - или As -операции (с точки зрения теории распределений) имеет следующий вид:

$$r_G \circ \left(G/\Gamma \sum_{\Gamma \subset G} \dots r_{\Gamma} \circ \Gamma \right), \tag{21}$$

где r_{Γ} — оператор, который «обрабатывает» сингулярность, ассоциированную с подпроизведением Γ . Конструкция (21) выражает тот простой факт, что перед тем, как рассматривать сингулярность, ассоциированную с полным произведением G (и локализованную, скажем, в изолированной точке), нужно «обработать» сингулярности, ассоциированные с подпроизведениями $\Gamma \subset G$ (и локализованные на многообразиях, проходящих через эту точку). Следует подчеркнуть, что явный вид последнего оператора r_G может быть определен только после того, как построены операторы r_{Γ} для всех подпроизведений. Однако процедура разрешения рекурсии включает раскрытие вычитательных операторов в присутствии пробных функций, что может быть представлено в следующем символическом виде:

$$\int (r \circ \Gamma)\varphi \rightarrow \int \Gamma \times (\varphi - T\varphi),$$

где T есть нечто типа (не обязательно в точности) разложения Тэйлора. Это означает, что в получающихся интегралах *обращен порядок вычитаний* (в точном сходстве с обращением порядка операторов при сопряжении). В более общем случае (21) эффект может быть представлен в следующем виде:

$$\int X r_G \circ \sum_{\Gamma \subset G} Y r_{\Gamma} \circ Z \rightarrow \int \sum_{\Gamma \subset G} Z \times (1 - T_{\Gamma}) [Y \times (1 - T_G) X].$$

(Заметим, что структура правой части явно подобна структуре лесной формулы; ср. трехточечные произведения в §30 книги [53].)

Итак, если работать с выражениями, соответствующими разрешенным рекурсиям, то вычитание, которое следует делать первым, $(1 - T_G)$, соответствует сингулярности, которая должна анализироваться последней — после того, как определены все вычитания для подграфов.

Формальное обращение порядка вычитаний в подграфах есть техническая причина, по которой обычные методы не позволяют эффективно использовать рекурсию. Это объясняет их неудачу в неевклидовом случае.

С другой стороны, в рамках традиционного подхода никогда не делалось попыток изучать (и развивать) эвристические аспекты рассматриваемых задач. В этой связи можно вспомнить, что эвристики, использованные Н.Н.Боголюбовым для нахождения правильной формулы для R -операции, были полностью проигнорированы в теории БПХЦ. В этом нет ничего удивительного: в то время как доказательство, данное Боголюбовым и Парасюком, основывалось на первом подходе к разрешению вышеприведенной дилеммы, оригинальное рассуждение Н.Н.Боголюбова [1] соответствует второму.

РЕШЕНИЕ, ПРЕДЛАГАЕМОЕ ТЕОРИЕЙ A_S -ОПЕРАЦИИ

Специалистам хорошо известно, что любое формальное доказательство, касающееся свойств многопетлевых диаграмм, в конечном счете сводится к обыкновенному счету степеней. Как уже было отмечено, традиционный подход пытается рассматривать всю задачу целиком, неструктурированным образом, так что при подсчете степеней приходится рассматривать все выражение таким образом, что все члены, порожденные вычитаниями, рассматриваются одновременно (например, остаточный член разложения перенормированной l -петлевой диаграммы).

Ключевая аналитическая идея теории A_S -операции состоит в использовании локализационного условия для структурирования задачи к форме итерации одного и того же элементарного шага, в котором рассматривается только сингулярность, локализованная в изолированной точке.

После того как это понято, задача в существенном сводится к нахождению и анализу ограниченного числа представительных примеров с небольшим числом петель, для того чтобы понять механизм центрального рекурсивного шага (напомним, что конструктивный рецепт для случая

изолированной сингулярности дается принципом продолжения, обсуждавшимся выше).

В евклидовом случае достаточно рассмотреть двухпетлевые диаграммы¹⁶. Следующий двухпетлевой пример поможет проиллюстрировать этот момент.

Рассмотрим двухпетлевую евклидову диаграмму, показанную на рис.7. Две верхние жирные линии соответствуют тяжелым частицам с массой M , которая имеет порядок Q . Три других пропегатора содержат массы $m \ll Q, M$. Направим Q по жирным линиям. Тогда вся зависимость от тяжелых параметров будет удобно локализована в двух тяжелых пропегаторах. Задача состоит в разложении диаграммы по $m/M \rightarrow 0$.

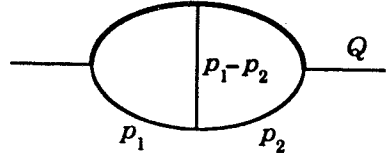


Рис. 7

Для простоты рассмотрим двумерную теорию. Тогда УФ-расходимости отсутствуют, в то время как нетривиальные сингулярности возникают уже в членах ведущего порядка $O(m^0)$ формального разложения по m .

Интеграл в целом имеет вид

$$\int d^2p_1 d^2p_2 \frac{1}{p_1^2 + m^2} \times \frac{1}{p_2^2 + m^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2} \times \\ \times \frac{1}{(p_1 - Q)^2 + M^2} \times \frac{1}{(p_2 - Q)^2 + M^2}.$$

Можно видеть, что два тяжелых пропегатора не зависят от m и составляют «пробную функцию», точный вид которой неважен. Ясно, что достаточно разложить произведение трех факторов, зависящих от m , в смысле теории распределений и подставить результат в интеграл.

Построение разложения факторов, зависящих от m , в смысле теории распределений является итерацией следующей последовательности шагов:

¹⁶Чтобы увидеть, как рекурсия будет продолжаться, здесь необходимо рассматривать некоторые свойства двухпетлевых диаграмм произведений, которые не нужны для разложения собственно двухпетлевых интегралов. Это все же менее громоздко, чем рассмотрение полного трехпетлевого случая. Более сложные примеры не показывают новых явлений. Условнения, связанные с неевклидовыми режимами, делают уже однопетлевые диаграммы более трудными, с точки зрения построения разложений, чем евклидовы двухпетлевые. Тем не менее общие принципы работают и здесь.

- формальное разложение Тэйлора;
 - изучение геометрии сингулярностей формального разложения;
 - идентификация наборов пропагаторов (*IR*-подграфов), чьи сингулярности перекрываются в различных точках области интегрирования (*условие полноты*);
 - изучение аналитической структуры сингулярностей (подсчет степеней);
 - построение контрчленов.
- Формальное разложение имеет вид*

$$\frac{1}{p_1^2 + m^2} \times \frac{1}{p_2^2 + m^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2} \approx \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2). \quad (22)$$

Геометрия сингулярностей правой части (22) показана на рис. 8. Каждый знаменатель, который может обращаться в нуль, порождает многообразие, на котором локализована сингулярность. В нашем случае

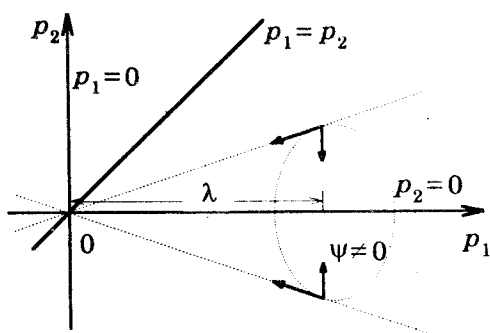


Рис. 8

имеются три разных двумерных подпространства, соответствующие каждому из трех множителей. Такие сингулярные многообразия могут пересекаться. Каждое пересечение должно рассматриваться как новое сингулярное многообразие, потому что природа сингулярности в соответствующих точках может быть нетривиальной. «Нетривиальная» в данном контексте означает, что сингулярность не факторизуется. В нашем случае

таким пересечением является точка $p_1 = p_2 = 0$; сингулярность здесь не факторизуется. В отсутствие любого из трех множителей сингулярность становится факторизующейся.

Перечисление всех пересечений не представляет затруднений: достаточно перечислить все подмножества сингулярных пропагаторов с учетом ограничений, налагаемых сохранением импульса. Это известно как *условие полноты* [49,50,106]. В самом деле, если положить равными нулю импульсы некоторого выбранного набора пропагаторов (что соответствует пересечению соответствующих многообразий), то могут быть пропагаторы, чьи импульсы автоматически занулятся из-за сохранения импульса.

са. Это означает, что их сингулярности накладываются на сингулярности набора, и такие пропагаторы нужно включить в этот набор. Наборы пропагаторов, которые не могут быть пополнены таким образом, суть в точности *IR-подграфы*. В настоящем случае имеется четыре *IR-подграфа*: $\gamma_1 = \{\text{пропагатор, зависящий от } p_1\}$; $\gamma_2 = \{\text{пропагатор, зависящий от } p_2\}$; $\gamma_3 = \{\text{пропагатор, зависящий от } p_1 - p_2\}$; $\gamma_{123} = \{\text{набор всех трех пропагаторов}\}$. Ни одна из трех пар пропагаторов не обладает свойством полноты и поэтому не является *IR-подграфом*.

Затем следует изучить аналитическую природу сингулярностей. Именно в этом месте в дело вводится локализационное условие. В самом деле, как объяснялось выше, разложение, справедливое на пробных функциях ψ , не равных нулю только в области, показанной на рис.8, дается формальным разложением множителей, регулярных в этой области, умноженным на разложение в смысле теории распределений для пропагатора, сингулярного в этой области. Разложение изолированного пропагатора уже известно (см. (18)); в двумерном случае контрчлен, пропорциональный δ -функции, должен быть включен уже для первого члена формального разложения, который в этом случае будет иметь логарифмическую сингулярность при нулевом импульсе). Поэтому разложение в области имеет вид (здесь используется размерная регуляризация для придания смысла промежуточным выражениям):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_1^2} \times \left(\frac{1}{p_2^2} + c_0(m) \delta(p_2) \right) \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2) = \\ & = \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + \frac{1}{p_1^2} \times c_0(m) \delta(p_2) \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2). \end{aligned}$$

Итак, анализ окрестности сингулярного многообразия $p_2 = 0$ показал необходимость введения контрчлена в правую часть. Легко рассмотреть аналогичным образом два сингулярных многообразия $p_1 = 0$ и $p_1 = p_2$. Получается выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + \frac{1}{p_1^2} \times c_0(m) \delta(p_2) \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + \\ & + \frac{1}{p_1^2} \times \frac{1}{p_2^2} \times c_0(m) \delta(p_1 - p_2) + c_0(m) \delta(p_1) \times \frac{1}{p_2^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} + O(m^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Это разложение справедливо в смысле теории распределений на пробных функциях, которые могут отличаться от нуля всюду, кроме малой окрестности точки $p_1 = p_2 = 0$.

Можно также сказать, что после удаления точки $p_1 = p_2 = 0$ три многообразия перестают пересекаться (сингулярности «распадаются»), так что задача эффективно распадается на более простые подзадачи, соответствующие сингулярным многообразиям большей размерности и с меньшим числом пропагаторов, дающих вклад в соответствующие сингулярности.

Остается превратить разложение (23) в разложение, справедливое на всем пространстве интегрирования. Это делается в два логических шага. Во-первых, замечаем, что (подобно случаю R -операции в координатном представлении) разложение (23) (вместе с уже добавленными контрчленами) интегрируемо с пробными функциями из более широкого множества, не обязательно исчезающими в окрестности начала координат. Утверждение, в сущности, эквивалентное теореме Боголюбова — Парасюка, состоит в том, что такие пробные функции должны лишь иметь нуль второго порядка (подробное обсуждение теоремы Боголюбова — Парасюка в координатном представлении с точки зрения теории распределений дано в [56, 97]). Естественно предположить, что аппроксимационные свойства разложения (23) также сохраняются на таких пробных функциях. Это ключевой аналитический шаг в доказательстве. Предполагая, что это доказано, легко сделать второй шаг, который состоит в построении контрчлена для сингулярности в точке $p_1 = p_2 = 0$ точно таким же образом, как и в случае отдельного пропагатора. А именно: контрчлен должен быть линейной комбинацией δ -функции и ее производных первого порядка, причем коэффициенты имеют вид, аналогичный (19). Например, для коэффициента при δ -функции без производных имеем

$$c_0^{\{y_3^3\}}(m) = \int dp_1 dp_2 \frac{1}{p_1^2 + m^2} \times \frac{1}{p_2^2 + m^2} \times \frac{1}{(p_1 - p_2)^2 + m^2}.$$

(Обсуждение подобных выражений можно найти в [106]).

Сосредоточимся теперь на ключевом аналитическом пункте вышеприведенного рассуждения — на подсчете степеней в (23) в точке $p_1 = p_2 = 0$ в присутствии трех контрчленов. Рассмотрим снова пробную функцию, локализованную в области, показанной на рис.8. Введем параметр λ , как показано на рисунке, чтобы параметризовать пробную функцию $\psi_\lambda(p_1, p_2) \equiv \psi(p_1/\lambda, p_2/\lambda)$ (не предполагая ничего о нулях ψ). Ясно, что изучение сингулярности (23) в $p_1 = p_2 = 0$ эквивалентно изу-

чению зависимости значения распределения (23) на ψ_λ при $\lambda \rightarrow 0$. Как уже упоминалось, утверждение, по существу, эквивалентное теореме Боголюбова — Парасюка, состоит в том, что при фиксированном m ведущее степенное поведение есть λ^{-2} , т.е. такое же, как получается путем наивного подсчета степеней. С другой стороны, при фиксированном λ остаточный член разложения (т.е. разность между начальным выражением, т.е. левой частью (22) и (23)) известно, что он имеет порядок $O(m^2)$. Теперь для того, чтобы проверить, что аппроксимационное свойство выполнено, нужно получить оценку остаточного члена, которая соединяла бы оба типа зависимости в факторизованном виде, т.е. $O(\lambda^{-2}) \times O(m^2)$.

Заметим, что это означает, что тип зависимости от λ и m здесь *тот же самый*, что и в первом отброшенном члене, — свойство, хорошо известное из более простых случаев асимптотических разложений. Учитывая, что аналитическая природа интегралов, с которыми нам приходится иметь дело (интегралы от рациональных функций), довольно проста (несмотря на внешнюю громоздкость, имеющую чисто комбинаторную природу), трудно представить себе, что это могло бы быть иначе. Во всяком случае такого рода оценки безусловно справедливы для отдельных пропагаторов, и требуется лишь провести формальное вычисление, чтобы вывести подобное свойство для произведения в целом. Наличие рекурсии сильно помогает, поскольку позволяет использовать (в этом состоит индуктивное предположение, которое, по существу, и требуется проверить) факторизованную оценку степенного поведения для отдельного пропагатора (более общо — для IR -подграфа, соответствующего сингулярному многообразию, с которым ведется работа).

Остается заметить, что удобный формальный язык для точного описания таких оценок и выполнения вычислений этого типа — в сущности, подсчет степеней в присутствии логарифмических модификаций — развит в [56,97] (так называемые *d-неравенства*).

Наконец, замечание о комбинаторном восстановлении разложений в глобальной операторной форме. Ясно, что окончательные формулы для разложений в формализме As -операции представляют собой суммы по IR -подграфам, которые имеют простую характеристику (см. выше условие полноты). Более того, из выражений для контрчленов нетрудно видеть, что они допускают непосредственную интерпретацию как проинтегрированные фейнмановские диаграммы, соответствующие некоторым матричным элементам. Это приводит к *радикальным упрощениям комбинаторики экспоненцирования* по сравнению с обычными рассуждениями (см. детали в [87,98,107]).

РАБОТА С УФ-РАСХОДЯЩИМИСЯ ДИАГРАММАМИ

Рассмотрим неперенормированную диаграмму. Пусть $G(p, M_{\text{tot}})$ — ее подынтегральное выражение, где p — набор импульсов интегрирования, а M_{tot} — набор всех ее внешних импульсов и всех масс, от которых зависят ее пропагаторы. Введем гладкое обрезание при больших $p \sim \Lambda$ посредством пробной функции $\Phi(p/\Lambda)$ такой, что $\Phi(0) = 1$. Тогда устремление $\Lambda \rightarrow \infty$ соответствует снятию обрезания и восстановлению интеграции по всему импульсному пространству. Представим обрезавшую функцию как сумму по сферическим слоям (ср.рис.9):

$$\Phi\left(\frac{p}{\Lambda}\right) = \int_0^{\Lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} \phi\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Меняя порядок интеграций по p и λ и заменяя $p \rightarrow \lambda p$, видим, что изучение интеграла $\int dp \Phi(p/\Lambda) G(p, M_{\text{tot}})$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ эквивалентно изучению выражения $\int dp \phi(p) G(p, M_{\text{tot}}/\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. А последнее — в точности то же самое, что изучение асимптотического разложения подынтегрального выражения при $M_{\text{tot}} \rightarrow 0$ в смысле теории распределений для $p \neq 0$. Можно сразу использовать формализм As -операции и получить точную исчерпывающую информацию об УФ-расходимостях диаграммы. Оказывается, что путем вычитания из подынтегрального выражения тех и только тех членов разложения, которые ответственны за УФ-расходимости, можно не только обеспечить автоматическую сходимость в УФ-области, но также получить правильную УФ-перенормировку, эквивалентную R -операции Боголюбова [75,98].

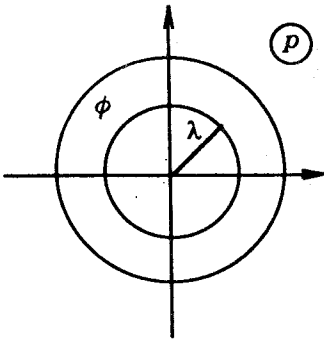


Рис. 9

Можно показать, что после этого изучение разложений перенормированных диаграмм сводится к изучению двойного асимптотического разложения (As -операции по отношению к иерархии параметров, состоящей, с одной стороны, из легких параметров разложения и, с другой стороны, из совокупности всех размерных параметров диаграммы, как показано выше) [75,98]. Как и ранее, все, что требуется сделать, — это получить факторизованные оценки для остаточного члена двойного разложения. Такая задача существенных новых трудностей не содержит.

ЕВКЛИДОВА A_S -ОПЕРАЦИЯ

Более или менее полная теория A_S -операции к настоящему моменту развита для случая евклидовых асимптотических режимов, хотя идеология и большая часть техники являются совершенно общими. Принцип продолжения был найден в [33,47] (см. также [106] и ссылки там). Исходные мотивировки были следующие:

— анализ вывода R -операции Боголюбовым [1,6] в связи с многопетлевыми вычислениями теоретических групп из ОИЯИ (Дубна) [22] и ИЯИ РАН (Москва) [36];

— метод ренормгрупповых вычислений, развитый в [15,20,22,28]; этот метод основан на идее использования простой зависимости УФ-контрчленов в MS -схеме от масс и импульсов [52] для упрощения вычислений; по существу, метод включал в себя тэйлоровские разложения по массам и импульсам, что иногда приводило к трудностям из-за ИК-расходимостей типа обсуждавшихся выше;

— анализ операторного разложения на малых расстояниях с целью применения вычислительных алгоритмов для 3-петлевых безмассовых интегралов пропагаторного типа [29,32,38,84] к вычислению коэффициентных функций; стандартные формулы, предлагавшиеся теорией БПХЦ, оказались для этих целей бесполезными.

Мотивировки имели отчетливо прикладной характер. Соответственно первые результаты были также связаны с практическими вычислениями.

R^* -операция [35] обобщает метод ренормгрупповых вычислений, упомянутый выше. Эвристика, стоящая за рецептом R^* -операции [35,108], состоит в следующем. Возьмем диаграмму, контрчлен которой нужно вычислить в перенормированном виде, т.е. вместе со всеми контрчленами. Выполним теперь разложение такого выражения по какому-либо параметру диаграммы (например, по одной из масс) по рецептам теории A_S -операции. (Такое разложение заведомо упростит диаграмму с вычислительной точки зрения.) При этом учтем тот факт, что УФ-контрчлены в MS -схеме (в том числе тот, который необходимо вычислить) суть полиномы от размерных параметров [52], поэтому они разлагаются тривиально и войдут в конечное выражение известным образом; без ограничения общности можно считать, что диаграмма логарифмически расходится в УФ-области и вычисляемый контрчлен входит в выражение как аддитивная добавка. Теперь обратим внимание на то, что нужно вычислять не всю диаграмму, а только этот последний контрчлен. Тогда не важно, является ли получившееся выражение аппроксимацией исходной диаграммы. Но тогда не важны и аппроксимационные свойства контрчленов, вводимых A_S -операцией; попросту говоря, можно

проигнорировать конечные части ИК-контрчленов и выбирать их только исходя из требования ИК-сходимости. Схематически:

$$R_{MS} \circ G \rightarrow As \circ R_{MS} \circ G \rightarrow \tilde{R} \circ R_{MS} \circ G \equiv R^* \circ G,$$

где \tilde{R} обозначает операцию, которая отличается от As -операции отсутствием конечных частей в контрчленах. Получающиеся формулы допускают независимые проверки прямыми вычислениями, поскольку даже в одной и той же диаграмме допустимы вариации, связанные с разным выбором параметров разложения; получающиеся при этом структуры ИК-расходимостей могут быть совершенно различными.

Определение IR -подграфа в оригинальной работе [35] не было вполне общим, поскольку была сделана попытка сформулировать его на языке координатного представления, что мотивировалось более ранними вычислительными алгоритмами [36]. Общая аналитическая характеристика ИК-контрчленов была представлена в [49,50] (см. пример условия полноты выше и подробное изложение в [106]).

Если используется α -представление, то аналитическое описание IR -подграфов через условие полноты уже недостаточно, и для работы с α -представлением была специально придумана теоретико-графовая версия определения IR -подграфов [54]. Хотя и непригодная для практической работы по причине своей чрезвычайной громоздкости, эта версия необходима для строгого доказывания уже известных результатов о многопетлевых диаграммах. Причина этого в том, что структура подынтегрального выражения в представлении характеризуется косвенно через вторичные теоретико-графовые понятия¹⁷. Далее, при переходе к параметрическим представлениям простая мультипликативная структура подынтегральных выражений в импульсном представлении разрушается, и строение подынтегрального выражения в α -представлении описывается посредством вторичных теоретико-графовых понятий (двудеревьев, коциклов и проч.). Соответственно условие полноты, весьма просто и естественно формулируемое на языке импульсного представления [106], становится совершенно строгим при переписывании в терминах коциклов [54].

С аналитической точки зрения сущность механизма метода R^* -операции сводится к свойству коммутативности двойной As -операции,

¹⁷Иногда утверждается, что такое косвенное (и, заметим, чрезвычайно громоздкое) описание является более «строгим», чем простое аналитическое. Это яркий пример того, как строгость иногда путают с бессодержательной громоздкостью неудачно формализованных «доказательств».

обсуждавшейся выше (полные доказательства этого свойства в виде, не зависящем от регуляризации, даны в [87,97]).

Имеется значительное количество вычислений, в которых применялась R^* -операция (см., например, [46,51,79,89,90]). Близкие по духу рассуждения были использованы в [80].

Алгоритмы для коэффициентных функций операторных разложений [39,45] в рамках MS-схемы оказались весьма успешными (см., например, недавние 3-петлевые вычисления [46,51,61,82,83,85,89]). Теоретическая и практическая важность требования совершенной факторизации в операторных разложениях была показана в [39,40].

Общие формулы для асимптотических разложений в евклидовых режимах в размерно-регуляризованной форме, удовлетворяющие критерию совершенной факторизации, были даны в [50,57,58] (см. также [107]) и обсуждались в литературе с традиционной точки зрения в работах [63,68,74]. Метод комбинаторного экспоненцирования разложений, разработанный в теории As-операции (в частности, метод обратной R-операции [62]), вызвал пересмотр комбинаторных аспектов и в теории БПХЦ [81].

Систематическое описание теории евклидовой As-операции с упором на приложения в рамках размерной регуляризации дано в [106,107,108].

Анализ теории евклидовой As-операции, не зависящий от используемой регуляризации, предпринят в работах [56,64,75,77,78,87,97,98]. Для детального сравнения того, как изучаются многопетлевые диаграммы в теории As-операции, с формализмом БПХЦ весьма важно новое представление для УФ-перенормированных диаграмм, разработанное в рамках теории As-операции [64,75,98]. Это представление дает удобный способ формулировки вычитательных схем типа MS-схемы [14] без использования размерной регуляризации. Развитие чисто 4-мерных аналитических формализмов весьма важно, ввиду того, что мощные расчетные методы, основанные на использовании спиральных амплитуд (см., например, [65]), выходят на центральное место в практике пертурбативной КХД.

Кроме уже упоминавшихся работ [63,68], проверке формул евклидовых асимптотических разложений, полученных в рамках теории As-операции [33,39,47,48,50,57,58,106,107], посвящена довольно необычная серия работ [71,74], опубликованных представителями московской школы приверженцев α -представления (ср. основополагающее сочинение этой школы [21]). Своеобразие этих работ в том, что хотя в них и не содержится сколько-нибудь существенных новых результатов, в них даются формализованные описания уже известных, весьма полезные для строгой теории α -представления.

Интересная математическая задача общего характера состоит в том, чтобы проанализировать и прояснить использование размерной регуляризации в приложениях непосредственно в импульсном представлении (ср. оригинальное определение [11] и любую работу с расчетами в пертурбативной КХД). Формальный перевод эвристически полученных результатов на язык параметрических представлений, как это было сделано, например, в [19,81], остается неудовлетворительным, поскольку совершенно ничего не дает в эвристическом плане. Имеются частичные результаты в правильном направлении (см. [37] и ссылки там), но они, по-видимому, недостаточны. В этой связи нужно отметить недавно обнаруженный эффект нарушения размерной регуляризации в неевклидовых асимптотических режимах [101]. Этот результат подчеркивает необходимость более содержательного математического изучения размерной регуляризации.

К НЕЕКЛИДОВОЙ A_S -ОПЕРАЦИИ

При распространении метода A_S -операции на неевклидовы асимптотические режимы возникают технические проблемы, связанные с тем фактом, что квадратичные формы в знаменателях фейнмановских пропагаторов, в отличие от евклидова случая, не являются положительно определенными. Поэтому сингулярности отдельных сомножителей локализованы на многообразиях второго порядка, которые могут быть сингулярны в дифференциально-геометрическом смысле (особенность в вершине светового конуса). Возникают следующие трудности.

Оскулирующие («слипающиеся») сингулярности (пересечения сингулярных многообразий не общего положения). Чтобы проанализировать природу таких сингулярностей, необходимо выполнять выпрямляющие деформации координат. Такие деформации должны быть найдены в явном виде, что не всегда тривиально. Другое следствие в том, что рескейлинги переменных, которые нужно проделать для подсчета степеней (ср. выше), асимметричны, т.е. степень растяжения по разным направлениям различна.

Возможны проблемы из-за алгебраической зависимости между скалярными инвариантами в знаменателях. Напомним, что между векторами, число которых превышает размерность пространства, всегда существует линейная зависимость. Это может сделать невозможным простую характеризацию IR -подграфов. Однако в ряде конкретных случаев, видимо, возможен полный анализ.

Неоднородные выражения для контрчленов, которые возникают из условий самосогласованности. Здесь нужно выполнять вторичное разложение (так называемая *гомогенизация*). В результате возникают со-

множители, которые более не соответствуют стандартным пропегаторам и имеют необычное УФ-поведение. Гомогенизация в общем случае может быть весьма тонкой процедурой с необычным взаимодействием между УФ- и ИК-расходимостями.

Сложная двухуровневая рекурсия, которая связана с вторичным разложением в контрчленах (гомогенизацией) и которая отнюдь не допускает явного решения типа трехточечных произведений или лесной формулы, возникающих в теории БПХЦ. Это, вероятно, является непреодолимым препятствием для обычных методов доказательств.

Неприменимость размерной регуляризации [101] является, по всей видимости, весьма общей чертой неевклидовых разложений. Последствия этого факта для вычислительных приложений, где роль размерной регуляризации огромна, могут быть драматическими. Во всяком случае с простотой (зачастую обманчивой) формул, к которой мы привыкли в рамках размерной регуляризации, придется, по-видимому, распрощаться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершить обзор удобно с помощью следующей аналогии из истории математики, которая довольно точно иллюстрирует некоторые психологические аспекты того, как в научном сообществе воспринимаются новые парадигмы (см. табл. 4).

Таблица 4

Греко-римская арифметическая нотация в Европе до IX в.	Позиционная система принесена арабами из Индии	
позволяет приступать к работе немедленно: $I + I = II$	сначала нужно выучить новые правила: $1 + 1 = 2$	
ОДНАКО		
в сложных задачах быстро возникают трудности: МСМХСIII	после усвоения новых правил проблем нет: 1993	
Языки низкого уровня:	←→	Языки высокого уровня:
БПХЦ		As-операция

Полезно вспомнить, что во Флоренции еще в 1299 г. использование позиционной десятичной системы в банковских бухгалтерских книгах было запрещено законом [7]. Сегодня кажется невероятным, но тогда де-

сятничная система казалась сложной и непонятной. Теперь мы знаем, что в конечном счете десятичная система проложила путь к открытию десятичных дробей, двоичной системы и к арифметике с плавающей точкой, встроенной в любой персональный компьютер. Здесь уместно вспомнить отзывы на ранние работы по теории As -операции, полученные от экспертов по теории БПХЦ (см. вышеприведенные цитаты)¹⁸. Эта аналогия также помогает понять, почему, например, трудно удовлетворить обычную просьбу — объяснить основные идеи теории As -операции на простом однопетлевом примере; анализ таких примеров состоит в основном из новых определений, смысл и значение которых выясняются только при анализе довольно громоздких интегралов, рассмотреть которые прямыми методами чрезвычайно трудно. В то же время в простых примерах вполне можно обойтись и без теории распределений (ср. $I + I = II \Leftrightarrow 1 + 1 = 2$).

Тем не менее совершенно очевидно, что теория As -операции доказала вполне определенно свой потенциал — как в эвристическом плане, указав уникальные вычислительные алгоритмы, так и в формальном плане, дав новые, весьма компактные методы формальных доказательств. Более того, на данный момент представляется вполне определенно, что проблемы, перечисленные выше при обсуждении неевклидовых асимптотических режимов, допускают вполне конкретные решения в рамках теории As -операции. Надеюсь иметь возможность обсудить эти решения в недалеком будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н.Н. — ДАН СССР, 1952, т.82, с.217.
2. Судаков В.В. — ЖЭТФ, 1956, т.30, №1, с.87.
3. Littlewood J.E. — A Mathematician's Miscellany. London, 1957.
4. Bogoliubov N.N., Parasiuk O.S. — Acta Math., 1957, vol.97, No.3,4, p. 227.
5. Landau L.D. — Nucl. Phys., 1959, vol.13, p. 187.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — Введение в теорию квантованных полей. М.: Физматгиз, 1957 (1 изд.).
7. Struik D.J. — Abriss der Geschichte der Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag, 1963.
8. Wilson K. — Phys. Rev., 1969, vol.179, p.1499.
9. Hepp K. — Theorie de la Renormalization. Lecture Notes in Physics, vol. 2. Heidelberg: Springer, 1969.
10. Zimmermann W. — In: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory. 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics (Deser S. et al., Ed.). MIT Press: Cambridge (Mass.), 1970.
11. 't Hooft G., Veltman M. — Nucl. Phys. B, 1972, vol.44, No.1, p.189.

¹⁸Как известно, основной метод освоения новых способов мышления человеческими сообществами — смена поколений.

12. Zimmermann W. — *Ann. Phys.*, 1973, vol.77, No.2, p.570.
13. Славнов Д.А. — *ТМФ*, 1973, т.17, №2, с.169.
14. 't Hooft G. — *Nucl. Phys. B*, 1973, vol.61, No.2, p.455.
15. Jones D.R.T. — *Nucl. Phys. B* 1974, vol. 75. No. 3, p. 531.
16. Gaillard M., Lee B.W. — *P. Rev. Lett.*, 1974, vol.33, No.1, p.108.
17. Altarelli G., Maiani L. — *Phys. Lett. B*, 1974, vol.52, No.3, p.351.
18. Lipatov L.N. — *Sov. J. Nucl. Phys.*, 1976, vol.23, p.338.
19. Breitenlohner P., Maison D. — *Commun. Math. Phys.*, 1977, vol.52, No.1, p.55.
20. Владимиров А.А. — *ТМФ*, 1978, т.36, №2, с.271.
21. Завьялов О.И. — *Перенормированные диаграммы Фейнмана*. М.: Наука, 1979.
22. Владимиров А.А., Ширков Д.В. — *УФН*, 1979, т.22, с.860.
23. Казаков Д.И., Тарасов О.В., Ширков Д.В. — *ТМФ*, 1979, т.38, №1, с.15.
24. 't Hooft G., Veltman M. — *Nucl. Phys. B*, 1979, vol.153, No.3,4, p.365.
25. Казаков Д.И., Ширков Д.В. — *Суммирование асимптотических рядов в квантовой теории поля. Лекции для молодых ученых*, Дубна, ОИЯИ, 1980.
26. Ellis R.K., Furman M.A., Haber H.E., Hinchliffe I. — *Nucl. Phys. B*, 1980, vol.173, p.397.
27. De Calan C., Malbouisson A.P.C. — *Ann. Inst. H.Poincare A*, 1980, vol.32, No.1, p.91.
28. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. — *Nucl. Phys. B*, 1980, vol.174, No.2/3, p.345.
29. Tkachov F.V. — *Phys. Lett. B*, 1981, vol.100, No.1, p.65.
30. Mueller A.H. — *Phys. Reports*, 1981, vol.73, No.4, p.238.
31. Manoukian E.B. — *J. Phys. G*, 1981, vol.7, No.9, p.1159.
32. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. — *Nucl. Phys. B*, 1981, vol.192, No.1, p.159.
33. Tkachov F.V. — In: «Quarks-82» (1982, May 5—7, Sukhumi, USSR). INR, USSR Acad. Sci.: Moscow, 1983.
34. Pohlmeier K. — *J. Math. Phys.*, 1982, vol.23, p.2511.
35. Chetyrkin K.G., Tkachov F.V. — *Phys. Lett. B*, 1982, vol.114, No.5, p.340.
36. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V. — In: *Quantum Chromodynamics. Proc. Extended Triangle Meeting Hadron Structure '80* (Nogov A., Ed.). VEDA: Bratislava, 1982.
37. Блехер П.М. — *ТМФ*, 1982, т.50, №3, с.370.
38. Ткачев Ф.В. — *ТМФ*, 1983, т.56, с.350.
39. Tkachov F.V. — *Phys. Lett. B*, 1983, vol.124, No.3,4, p.212.
40. Tkachov F.V. — *Phys. Lett. B*, 1983, vol.125, No.1, p.85.
41. Радюшкин А.В. — *ЭЧАЯ*, 1983, т.14, №1, с.58.
42. Kinoshita T., Lindquist W.B. — *Phys. Rev. D*, 1983, vol.27, No.4, p.853.
43. Kazakov D.I. — *Phys. Lett. B*, 1983, vol.133, p.406.
44. Июффе Б.Л., Липатов Л.Н., Хозе В.А. — *Глубоконеупругие процессы. (Феноменология. Партоновая модель)*. М.: Энергоатомиздат, 1983.
45. Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. — *Phys. Lett. B*, 1983, vol.124, No.3,4, p.217.
46. Chetyrkin K.G., Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. — *Phys. Lett. B*, 1983, vol.132, No.4,5,6, p.351.
47. Tkachov F.V. — *Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-332*, Moscow, 1984.
48. Tkachov F.V. — *Preprint INR, Russ. Acad. Sci. INR P-358*, Moscow, 1984.
49. Попов Е.Н. — *Preprint JINR E2-84-569*, Dubna, 1984.
50. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — *Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-370*, Moscow, 1984.
51. Gorishny S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. — *Phys. Lett. A*, 1984, vol.101, p.120.
52. Collins J.C. — *Renormalization*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.
53. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. — *Введение в теорию квантованных полей*. М.: Наука, 1984 (4 изд.).

54. Смирнов В.А., Четыркин К.Г. — ТМФ, 1985, т.63, №2, с.208.
55. Kosinski P., Maslanka P. — Lett. Math. Phys., 1985, vol.9, p.157.
56. Vlasov V.V., Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-504, Moscow, 1986.
57. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — In: Int. Seminar Quarks-86 (1986, Tbilisi, Georgia). VNU Science Press, 1987.
58. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. P-459, Moscow, 1986.
59. Корчемский Г.П., Радюшкин А.В. — ЯФ, 1987, т.45, с.910.
60. Ellis S.D. — In: «The 1987 Theoretical Advanced Study Institute» (1987, July, St. John's College, Santa Fe, NM), (also preprint NSF-ITP-88-55).
61. Сургуладзе Л.Р., Ткачев Ф.В. — ТМФ, 1988, т.75, №2, с.245.
62. Пивоваров Г.Б., Ткачев Ф.В. — ТМФ, 1988, т.77, №1, с.51.
63. Llewellyn Smith C.H., de Vries J.P. — Nucl. Phys. B, 1988, vol.29, p.991.
64. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V. — In: «Quarks-88» (1988, May, Tbilisi, Georgia).
65. Berends F.A., Giele W.T. — Nucl. Phys. B, 1988, vol.306, No.4, p.759.
66. Surguladze L.R., Tkachov F.V. — Comp. Phys. Commun., 1989, vol.55, No.2, p.205.
67. Gorishny S.G., Larin S.A., Surguladze L.R., Tkachov F.V. — Comp. Phys. Commun., 1989, vol.55, No.2, p.381.
68. Gorishny S.G. — Nucl. Phys. B, 1989, vol.319, No.3, p.633.
69. Collins J.C., Soper D.E., Sterman G. — In Perturbative QCD (Mueller A. H., Ed.). World Scientific: Singapore, 1989.
70. Collins J.C. — In Perturbative QCD (Mueller A. H., Ed.). World Scientific: Singapore, 1989.
71. Chetyrkin K.G. — Preprint ICTP IC/88/418. Miramare-Trieste, 1989.
72. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. — Квантовая электродинамика. Л.Ландау, Е.Лифшиц. Курс теоретической физики. М.: Наука, 1989, т.4 (3 изд.).
73. van Oldenborgh G.J., Vermaseren J.A.M. — Z. Phys. C, 1990, vol.46, p.425.
74. Smirnov V.A. — Commun. Math. Phys., 1990, vol.134, No.1, p.109.
75. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V. — Preprint NIKHEF-H/90-17, 1990.
76. van Neerven W.L., Zijlstra E. — Phys. Lett. B, 1991, vol.272, No.1,2, p.127.
77. Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint McGill-91/03. Montreal, 1991.
78. Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint McGill-91/04. Montreal, 1991.
79. Surguladze L.R., Samuel M.A. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.66, p.560.
80. Spiridonov V.P., Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1991, vol.260, No.1,2, p.109.
81. Smirnov V.A. — Renormalization and Asymptotic Expansions. Progress in Physics, vol.14. Basel: Birkhauser, 1991.
82. Larin S.A., Vermaseren J.A.M. — Phys. Lett. B, 1991, vol.259, No.3, p.345.
83. Larin S.A., Tkachov F.V., Vermaseren J.A.M. — Phys. Lett. B, 1991, vol.272, No.1,2, p.121.
84. Larin S.A., Tkachov F.V., Vermaseren J.A.M. — Preprint NIKHEF-H/91-18, 1991.
85. Larin S.A., Tkachov F.V., Vermaseren J.A.M. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.66, No.7, p.862.
86. Laporta S., Remiddi E. — Preprint Bologna Univ., DFUB 91-3, 1991.
87. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint FERMILAB-PUB-91/346-T, 1991.
88. Grinstein B. — Preprint Lyman Labs., Harvard Univ., HUTP-91/A028, 1991.
89. Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A., Surguladze L.R. — Phys. Lett. B, 1991, vol.256, No.1, p.81.
90. Gorishny S.G., Kataev A.L., Larin S.A. — Phys. Lett. B, 1991, vol.259, No.1,2, p.144.
91. Contogouris A.P., Papadopoulos S., Kamal B. — Nucl. Phys. B, 1991, vol.23, No.1, p.119.
92. Chiappetta P., Ermolaev B.I., Guillet J.P.H. — Preprint CPT-91/P, 2594. Marseille, 1991.
93. Bethke S. — Preprint CERN-PPE/91-36, 1991.

94. van Neerven W. — In: «New Techniques for Calculating Higher Order QCD Corrections» (1992, 16—18 December 1992, ETH, Zürich). ETH: Zürich, 1992.
95. Ussyukina N.I., Davydychev A.I. — In: «VII Workshop on High-Energy Physics and Quantum Field Theory» (1992, October 6—14, 1992, Sochi, USSR). Sov. J. Nucl. Phys.: Moscow.
96. Li H.-N., Sterman G. — Nucl. Phys. B, 1992, vol.381, p.129.
97. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V., Vlasov V.V. — Preprint Penn. State Univ. PSU-92/108-T, 1992.
98. Kuznetsov A.N., Tkachov F.V. — Preprint INR, Russ. Acad. Sci. INR-809/93, Moscow, 1992.
99. Kosower D.A. — In «New Techniques for Calculating Higher Order QCD Corrections» (1992, 16—18 December 1992, ETH, Zürich). ETH: Zürich, 1992.
100. Korchemsky G.P., Radyushkin A.V. — Phys Lett. B, 1992, vol.279, No.3,4, p.359.
101. Collins J.C., Tkachov F.V. — Phys. Lett. B, 1992, vol.294, No.3,4, p.403.
102. Broadhurst D.J. — In: «Artificial Intelligence '92» (1992, January), (available as preprint OUT-4102-37).
103. Boos E.E., Davydychev A.I. — J. Math. Phys., 1992, vol.33, No.1, p.358.
104. Bethke S. — In: «New Techniques for Calculating Higher Order QCD Corrections» (1992, 16—18 December 1992, ETH, Zürich). ETH: Zürich, 1992.
105. Badelek B., Charchula K., Krawczyk M., Kwiecinski J. — Rev. Mod. Phys., 1992, vol.64, No.4, p.927.
106. Tkachov F.V. — Int. J. Mod. Phys. A, 1993, vol.8, No.12, p.2047.
107. Pivovarov G.B., Tkachov F.V. — Int. J. Mod. Phys. A, 1993, vol.8, No.13, p.2241.
108. Tkachov F.V. — Int. J. Mod. Phys. A (to be publ.).