*«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1996, ТОМ 27, ВЫП.3*

УДК 530.12; 531.51

ГРАВИТАЦИОННАЯ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ В СПЕЦИАЛЬНО-РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПОДХОДЕ ПУАНКАРЕ

Р.А.Асанов, Г.Н.Афанасьев

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается система двух релятивистских бесспиновых тел, взаимодействующих с помощью только запаздывающих сил, распространяющихся со скоростью света. Формулировка Пуанкаре гравитационной задачи содержит две произвольные функции. При определенном выборе этих функций получено правильное описание трех известных эффектов ОТО и эффекта задержки радиолокационных сигналов. Обобщены уравнения Пуанкаре и даны примеры сил, приводящих к движению двух тел по окружности, и сил, приводящих к прямолинейному движению. Кратко рассмотрены некоторые другие подходы к задаче.

We consider two relativistic spinless bodies interacting via pure retarded (action at distance) forces propagating with the velocity of light. The Poincaré formulation of the gravitation theory contains two arbitrary functions. A specific choice of these functions provides a correct description of three «crucial» experiments supporting General Relativity and the time delay of a radar signal. For a correct description of electromagnetic interaction it is necessary to introduce also forses depending on acceleration of bodies. Some examples are given of the forces resulting in a stationary circular motion and in straightline motion. A brief survey of some investigations of the two-body problem is given.

1. ВВЕДЕНИЕ

И.Ньютон впервые дал математическую формулировку механической задачи двух тел [1]. Более трехсот лет назад он показал, что законы Кеплера могут быть получены из законов механики и закона всемирного тяготения, т.е. предположения о центральном мгновенном дальнодействии сил и убывании сил пропорционально квадрату расстояния между тяготеющими телами (для обоснования второго закона Кеплера — о постоянстве секториальной скорости планеты — достаточно предположения о центральности). Одновременно он показал, что применительно к задаче двух тел законы в формулировке Кеплера являются приближенными. В точной формулировке надо говорить не о движении планеты вокруг Солнца, а о движении относительно их центра тяжести.

Ньютон также исследовал отклонения от закона обратных квадратов с целью объяснения, в частности, наблюдаемых вращательных смещений орбит планет (в плоскости их движения) относительно неподвижных звезд, идентифицируемых с абсолютным пространством. Непосредственно наблюдались смещения перигелиев орбит за определенные промежутки времени. Занимался Ньютон и силами, зависящими от скорости тел (конкретно, силами трения), которые также приводят к смещениям перигелиев.

Подобные вопросы остаются актуальными и по сей день — от космологии и небесной механики до элементарных объектов. Открытие конечности скорости света (О.Рёмер, 1675), создание полевой электромагнитной теории Максвелла, специальной (СТО) и общей теории относительности (ОТО) привели к дальнейшему развитию науки о двух (и более) телах. Наконец, появилась и квантовая теория, которой, однако, здесь касаться не будем.

Многие ученые занимались механической (в рамках механики Ньютона) и электромагнитной задачами двух тел. Среди них нужно упомянуть Гаусса, Вебера, Римана, Ритца, Гербера. Между тем к началу двадцатого века накопилось достаточно данных, чтобы возникла специальная теория относительности и релятивистская механика. На этой основе была поставлена и решена задача о движении заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, хотя и здесь возникли осложнения, связанные, например, с собственным излучением. В своей работе «О динамике электрона» (1906 г.) [2] А.Пуанкаре дал релятивистски-инвариантное обобщение системы уравнений Ньютона для двух взаимодействующих, в том числе тяготеющих, бесспиновых «точечных» тел.

Работы по частно-релятивистской классической неквантовой задаче двух точечных тел в зависимости от характера взаимодействия условно можно разделить на несколько направлений.

К первому мы относим те работы (см., например, [3]), в которых предполагается, что ускорение одной из частиц в некоторый момент времени может быть представлено в любой инерциальной лоренцевой системе в виде функции от параметров движения второй частицы (координат, скоростей и т.д.), взятых в тот же самый момент времени. Понятие одновременности не является релятивистски-инвариантным. Поэтому условие одновременности параметров движения частиц в любой инерциальной лоренцевой системе накладывает жесткие ограничения на характер взаимодействия. В такой формулировке возможны и сверхсветовые скорости частиц [4].

Второе направление берет свое начало от известных работ Вигнера и Ван Дама [5]. В них 4-ускорение одной из частиц записывается в виде интеграла от определенной «двухточечной» функции вдоль мировой линии второй частицы. Эта функция, играющая роль взаимодействия, отлична от нуля для точек мировой линии второй частицы, связанных пространственноподобным интервалом с рассматриваемой точкой мировой линии первой частицы. В пределе при стремлении скорости света c к бесконечности получается обычная нерелятивистская задача с тем или иным взаимодействием.

Наконец, к третьему направлению относим работы, в которых предполагается, что взаимодействие между частицами распространяется со скоростью света. Это направление, в свою очередь, может быть разделено на три группы. К первой принадлежат работы [6], в которых взаимодействие сводится к полусумме запаздывающего и опережающего взаимодействий. Ко второй группе относим работы [7], в которых предполагается, что взаимодействующие частицы лежат на одном и том же световом конусе. Это означает, например, что частица 1 взаимодействует с частицей 2 запаздывающим образом, тогда как частица 2 с частицей 1 — опережающим. Для работ первой и второй групп в электромагнитном случае удалось получить точные решения, отвечающие равномерным круговым движениям, и найти сохраняющиеся величины [8]. Под словами «электромагнитный случай» понимается следующее: сила Лоренца, действующая на одну из частиц, выражается через напряженности электрического и магнитного полей, которые, в свою очередь, с помощью потенциалов Лиенара — Вихерта могут быть выражены через координаты, скорость и ускорение второй из частиц. В итоге все полевые переменные оказываются исключенными и получается релятивистская задача двух тел с дальнодействием.

Для работ первых двух групп возникают трудности из-за возможного нарушения принципа причинности. Например, наличие опережающего потенциала означает, что фотон поглощается одной частицей раньше, чем испускается второй. Для устранения этого парадокса Уилеру и Фейнману пришлось ввести понятие абсорбера [9].

Для работ третьей группы, когда взаимодействие только запаздывающее, точные решения, равно как и законы сохранения, до последнего времени были неизвестны. Известны только теоремы единственности и существования решений для случая движения двух заряженных частиц вдоль одной прямой [10], а также разложения двухчастичных лагранжианов и сил взаимодействия по степеням c^{-2} [11,12]. Работы этой группы были инициированы знаменитой работой А.Пуанкаре «О динамике электрона» [2]. В ней он дал релятивистски-инвариантное (в духе дальнодействия) обобщение системы уравнений Ньютона для двух взаимодействующих точечных тел с учетом конечной скорости, равной скорости света, распространения взаимодействия. В ней же он попытался сформулировать первую частно-релятивистскую теорию тяготения двух тел. Так как 4-ускорение каждой из частиц является четырехмерным вектором, то правая часть уравнений движения (то есть 4-сила) также должна быть 4-вектором. Пуанкаре предположил, что 4-сила выражается через линейную комбинацию разностей 4-координат и 4-скорости каждой из частиц. Коэффициенты при этих 4-векторах являются тремя произвольными инвариантными функциями. Одна из них фиксируется требованием постоянства 4-скорости частицы или, что то же самое, — ортогональности ее 4-скорости и 4-ускорения. Остаются две произвольные функции. Пуанкаре потребовал далее, чтобы его уравнения отличались от ньютоновых уравнений для двух частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, членами порядка не ниже c^{-2}. Этому, как оказалось, довольно слабому ограничению он удовлетворил, положив одну из функций равной нулю, а вторую выбрал весьма специальным образом. Специфичность своего выбора Пуанкаре отчетливо осознавал и сразу же указал на возможные обобщения. В дальнейшем были неоднократные попытки (см., например, обзор в книге [13]) применить уравнения Пуанкаре для описания астрономических наблюдений — так называемых трех «решающих опытов» по проверке общей теории оносительности. Все вычисления основывались, однако, на упомянутой упрощенной форме уравнений Пуанкаре. Это обстоятельство, а также отсутствие однозначного рецепта выбора произвольных функций, послужили причиной мнения, что частно-релятивистские теории не могут описать данные опыты. В работах [14] был рассмотрен потенциальный предел (когда отношение масс частиц <<1) исходных, то есть с двумя произвольными функциями, уравнений Пуанкаре. Произвольные функции фиксировались из требования совпадения уравнений движения с общерелятивистскими. Как следствие, получено корректное описание как «решающих» опытов ОТО, так и временно́го запаздывания радиолокационных сигналов. Был указан один из вариантов выбора произвольных «двухчастичных» функций, входящих в уравнения Пуанкаре. В потенциальном пределе они переходят в уравнения движения пробной частицы в сферически-симметричном поле тяготения.

В этих же работах мы искали частные точные стационарные решения релятивистской двухчастичной задачи.

Будем придерживаться следующего плана изложения. В разд.2 выпишем основные уравнения, являющиеся обобщением уравнений Пуанкаре. В разд.3 мы убедимся, что эта система достаточно широка, чтобы описать и электромагнитный случай с только запаздывающим взаимодействием. Рассмотрим гравитационную задачу. Приведем описание трех «решающих» опытов и запаздывания радиационных сигналов, дадим расчет прецессии гироскопа, обращающегося по орбите вокруг Земли. Приведем сравнение с некоторыми другими подходами к задаче двух тел. В разд.4 получим условия существования решений, отвечающих стационарным круговым движениям. Покажем, что таких движений нет ни в электромагнитном случае, ни в упрощенном варианте уравнений Пуанкаре. Выясним, как следует выбрать двухчастичные инвариантные функции, чтобы уравнения Пуанкаре обладали решениями, отвечающими стационарным круговым движениям. Этими функциями можно распорядиться таким образом, чтобы получалось как круговое движение, так и правильный нерелятивистский предел. В качестве него можно выбрать, например, ньютоновы «двухчастичные» уравнения тяготения. Наконец, в разд.5 для частного выбора инвариантных функций получим решения, отвечающие прямолинейному движению.

2. УРАВНЕНИЯ ПУАНКАРЕ И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Итак, следуя Пуанкаре, напишем уравнения движения для каждого из тел:

$$\frac{d^2 x_{1\mu}}{d\tau_1^2} = f_1 x_\mu + f_2 \frac{dx_{1\mu}}{d\tau_1} + f_3 \frac{dx_{2\mu}}{d\tau_2} + f_4 \frac{d^2 x_{2\mu}}{d\tau_2^2}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2 x_{2\mu}}{d\tau_2^2} = -g_1 x_\mu + g_2 \frac{dx_{2\mu}}{d\tau_2} + g_3 \frac{dx_{1\mu}}{d\tau_1} + g_4 \frac{d^2 x_{1\mu}}{d\tau_1^2}. \tag{2}$$

$$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Здесь τ_1, τ_2 — собственные времена тел $(d\tau = \sqrt{dt^2 - (d\mathbf{x})^2/c^2})$, $x_{1\mu}$, $x_{2\mu}$ — их 4-координаты; $x_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu}$. Разности координат использованы для того, чтобы уравнения были не только лоренц-, но и пуанкаре-инвариантны. Массы включены в функции f и g. Уравнения (1) и (2) должны переходить друг в друга при замене индексов тел $1 \leftrightarrow 2$. Это приводит к следующим соотношениям между функциями f и g: $g_i(1, 2) = f_i(2, 1)$, $i = 1, \ldots, 4$. Соотношения (1) и (2) написаны из соображений ковариантности. Левые части являются 4-векторами, поэтому правые части также должны быть линейными комбинациями 4-векторов. Тогда f и g — некоторые инвариантные относительно группы Пуанкаре функции от векторов, входящих в правые части уравнений, и масс. Уравнения, рассмотренные Пуанкаре, не содержали в правой части 4-ускорений, то есть он выбрал $f_4 = g_4 = 0$. Они необходимы, однако, для описания электромагнитного случая (см. п.3.1).

Соотношения (1), (2) физически недостаточно определены, поскольку содержат два координатных и два собственных времени. Необходимо каким-то образом связать t_1 и t_2. Гипотеза Пуанкаре состоит в том, что время t «притягиваемого» и время $\tilde{t}$ «притягивающего» тел связаны релятивистски-инвариантным соотношением

$$\tilde{t} = t - r/c, \quad r \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{3} [z_i(t) - \tilde{z}_i(t - r/c)]^2 \right\}^{1/2}, \tag{3}$$

здесь z_i, $\tilde{z}_i$ — координаты притягиваемого и притягивающего тел.

Соотношение (3) означает, что взаимодействие как бы «покидает» притягивающее тело раньше, чем «достигает» притягиваемого, причем скорость распространения взаимодействия равна скорости света. Очевидно, что (3) находится в согласии с принципом причинности. Соответственно этому мы должны положить

$$t_1 = t, \quad t_2 = t - r/c, \quad r = \left\{ \sum_{i=1}^{3} [x_{1i}(t) - \tilde{x}_{2i}(t - r/c)]^2 \right\}^{1/2}$$

в (1) и

$$t_2 = t, \quad t_1 = t - \tilde{r}/c, \quad \tilde{r} = \left\{ \sum_{i=1}^{3} [x_{2i}(t) - \tilde{x}_{1i}(t - \tilde{r}/c)]^2 \right\}^{1/2}$$

в (2). В соотношениях (1) удобно разделить пространственную и временную части:

$$\frac{d^2 x_{1i}}{d\tau_1^2} = f_1 x_i + f_2 \frac{dx_{1i}}{d\tau_1} + f_3 \frac{dx_{2i}}{d\tau_2} + f_4 \frac{d^2 x_{2i}}{d\tau_2^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{d^2 t_1}{d\tau_1^2} = f_1 \frac{r}{c} + f_2 \frac{dt_1}{d\tau_1} + f_3 \frac{dt_2}{d\tau_2} + f_4 \frac{d^2 t_2}{d\tau_2^2}. \tag{4}$$

Еще раз напомним, что в (4) все величины, относящиеся к частице 1, берутся в некоторый момент времени t, а к частице 2 — в момент $t - r/c$. Из ортогональности 4-скорости и 4-ускорения получаем

$$c f_1 A + c^2 f_2 + c^2 f_3 C + f_4 D = 0 \tag{5}$$

и аналогичное соотношение для функций g. В (5) величины A, C, D являются релятивистски-инвариантными комбинациями 4-координат, скоростей и ускорений:

$$A = \frac{x_\mu}{c}\frac{dx_{1\mu}}{d\tau_1} = (1-\beta_1^2)^{-1/2}(r - \mathbf{r}\mathbf{v}_1/c),$$

$$C = \frac{1}{c^2}\frac{dx_{1\mu}}{d\tau_1}\frac{dx_{2\mu}}{d\tau_2} = (1-\beta_1^2)^{-1/2}(1-\beta_2^2)^{-1/2}(1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2/c^2),$$

$$D = \frac{dx_{1\mu}}{d\tau_1}\frac{d^2x_{2\mu}}{d\tau_2} = (1-\beta_1^2)^{-1/2}(1-\beta_2^2)^{-1}\left[\frac{\mathbf{v}_1\mathbf{w}_2}{1-\beta_2^2}\left(1 - \frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{c^2}\right) - \mathbf{v}_1\mathbf{w}_2\right]. \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ — обычные трехмерные скорости и ускорения; $\beta_1 = v_1/c$, $\beta_2 = v_2/c$. В дальнейшем нам понадобятся еще три инварианта:

$$B = \frac{x_\mu}{c}\frac{dx_{2\mu}}{d\tau_2} = (1-\beta_2^2)^{-1/2}(r - \mathbf{r}\mathbf{v}_2/c),$$

$$E = -x_\mu\frac{d^2x_{2\mu}}{d\tau_2^2} = (1-\beta_2^2)^{-1}(\mathbf{r}\mathbf{w}_2) - (1-\beta_2^2)^{-3/2}(\mathbf{v}_2\mathbf{w}_2)B/c,$$

$$F = -\left(\frac{d^2x_{2\mu}}{d\tau_2}\right)^2 = (1-\beta_2^2)^{-3/2}\left[w_2^2 + (1-\beta_2^2)^{-1}(\mathbf{v}_2\mathbf{w}_2)^2c^{-2}\right]. \qquad (7)$$

Отметим, что Пуанкаре [2] вводил только три инварианта A, B, C, которые не содержат ускорений.

Удобно в первых трех уравнениях (4) заменить собственное время τ_1 координатным t_1. В итоге получаем

$$\frac{w_{1i}}{1-\beta_1^2} = f_1(x_i - v_{1i}r/c) - (v_{1i} - v_{2i})[f_3(1-\beta_2^2)^{-1/2} +$$

$$+ f_4(1-\beta_2^2)^{-2}(\mathbf{v}_2\mathbf{w}_2)/c^2] + f_4w_{2i}(1-\beta_2^2)^{-1}. \qquad (8)$$

Ради полноты приведем аналогичную систему уравнений для второй частицы:

$$\frac{w_{2i}}{1-\beta_2^2} = g_1(\tilde{x}_i - v_{2i}\tilde{r}/c) - (v_{2i} - v_{1i})\,[g_3(1-\beta_2^2)^{-1/2} +$$

$$+ g_4(1-\beta_1^2)^{-2}(\mathbf{v}_1\mathbf{w}_1)/c^2] + g_4 w_{1i}(1-\beta_1^2)^{-1}. \tag{9}$$

В (9) все величины, относящиеся к частице 2, берутся в момент времени t, а к частице 1 — в момент $t-\tilde{r}/c$. Кроме того,

$$\tilde{x}_i = x_{2i}(t) - x_{1i}(t-\tilde{r}/c), \quad \tilde{r} = \left[\sum_{1=i}^{3} (\tilde{x}_i)^2\right]^{1/2}.$$

Возникает вопрос, нельзя ли использовать уравнения (9) для исключения w_{2i} из правой части (8), а затем члены с w_{1i} перенести в левую часть (8). В итоге ускорение одной из частиц можно было бы выразить только через координаты и скорость второй. Эта процедура оказывается невозможной, если вспомнить, что все величины, относящиеся к частицам 1 и 2, зависят от разных времен. Ввиду симметрии относительно перестановки частиц достаточно рассмотреть только одну систему уравнений, например (8). Следуя Пуанкаре, предполагаем, что инвариантные функции f_i построены из инвариантов $A,\ldots,F$. Конкретный вид функций может определяться несколькими факторами: физическим содержанием (гравитация, электромагнетизм, ядерные силы), необходимостью получения точного аналитического решения и т.д.

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

3.1. Электромагнитная задача двух тел. Покажем, что электромагнитная задача двух точечных тел описывается уравнениями (8), (9) при соответствующем выборе функций f, g. Запишем электрическое и магнитное поля, создаваемые частицей 2 в месте нахождения частицы 1 (см., например, [15]):

$$\mathcal{E}_2 = e_2\gamma_2^{-3}\left[\left(\mathbf{r} - \frac{r\,\mathbf{v}_2}{c}\right)\left(1 - \beta_2^2 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{w}_2}{c^2}\right) - \mathbf{w}_2\gamma_2 r/c^2\right],$$

$$\mathcal{H}_2 = \left[\frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathcal{E}_2\right]. \tag{10}$$

Здесь e_2 — электрический заряд частицы 2, $\gamma_2 = r - \mathbf{r}\mathbf{v}_2/c$. Это электромагнитное поле действует на частицу 1 с зарядом e_1 и массой m_1 с помощью силы Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = e_1\left(\mathcal{E}_2 + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_1 \times \mathcal{H}_2]\right),$$

откуда находим

$$\frac{m_1\mathbf{w}_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = e_1\left(\mathcal{E}_2 + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_1 \times \mathcal{H}_2]\right) - \frac{e_1}{c^2}\left(\mathbf{v}_1\,\mathcal{E}_2\right)\mathbf{v}_1\,. \tag{11}$$

Подставляя в это выражение $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{H}_2$ и собирая коэффициенты при x_i, v_{1i}, v_{2i}, w_{2i}, находим инвариантные функции f_i для электромагнитной задачи двух тел:

$$f_1 = \frac{e_1 e_2}{m_1 B^3}\left[C(1+E/c^2) - BD/c^3\right],$$

$$f_3 = -\frac{e_1 e_2 A}{c m_1 B^3}(1+E/c^2), \quad f_4 = -\frac{e_1 e_2 A}{c^2 m_1 B^2}\,. \tag{12}$$

Функции g вычисляются тем же способом, что и f, то есть вычисляется запаздывающее электромагнитное поле, создаваемое частицей 1 в месте нахождения частицы 2, затем строится сила Лоренца. Например, функция g_1 имеет вид

$$g_1 = \frac{e_1 e_2}{m_2 \tilde{B}^3}\left[\tilde{C}(1+\tilde{E}/c^2) - \tilde{B}\tilde{D}/c^3\right]. \tag{13}$$

$\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots, \tilde{F}$ получаются из $A, B, \ldots, F$ перестановкой индексов частиц: $\tilde{B} = \left(\tilde{r} - \dfrac{\mathbf{r}\mathbf{v}_1}{c}\right)/\sqrt{1-\beta_1^2}$ и т.д. В инвариантах $\tilde{A}, \ldots, \tilde{F}$ все величины, относящиеся к частицам 2 и 1, берутся в моменты времени t и $t - r/c$ соответственно. Мы уже упоминали, что функции g получаются из f формальной перестановкой индексов частиц. Это подтверждается выражениями (12) и (13). Из их сравнения следует, что $m_1 f_i \neq m_2 g_i$, то есть принцип равенства действия и противодействия как бы не выполняется.

3.2. Гравитационная задача двух тел [14]. При следующем выборе инвариантных функций f получается упрощенный вариант уравнений Пуанкаре:

$$f_2 = f_4 = 0, \quad f_1 = \frac{\gamma}{B^3}, \quad f_3 = -\frac{\gamma A}{cB^3 C}, \quad \gamma = \text{const}. \tag{14}$$

Тогда уравнения (8) выглядят следующим образом:

$$\frac{w_{1i}}{1-\beta_1^2} = \frac{\gamma}{B^3}\left[x_i - \frac{v_{1i}}{c}(r - A/\sqrt{1-\beta_2^2}) - \frac{v_{2i}A}{cC}\right]. \tag{15}$$

Эти уравнения отличаются от нерелятивистских гравитационных уравнений членами порядка c^{-2}. Мы уже упоминали, что они недостаточны для описания «решающих опытов» ОТО. Найденные в [14] функции f, адекватные этим опытам, существенно отличаются от функций (14).

Запишем частично расширенные уравнения вида (4), используя только две произвольные функции инвариантов ψ_1 и ψ_2. Введенные для удобства функции ψ связаны с прежними f: $\psi_1 = B^3 f_1$, $\psi_2 = cf_2$. Функция f_4, являющаяся коэффициентом при ускорении второй частицы, положена равной нулю:

$$\frac{d^2 x_{1i}}{d\tau_1^2} = \psi_1 \frac{x_i}{B^3} + \frac{\psi_2}{c}\frac{dx_{1i}}{d\tau_1} - \frac{1}{cC}\left(\frac{\psi_1 A}{B^3} + \psi_2\right)\frac{dx_{2i}}{d\tau_2},$$

$$\frac{d^2 t_1}{d\tau_1^2} = \psi_1 \frac{r}{cB^3} + \frac{\psi_2}{c}\frac{dt_1}{d\tau_1} - \frac{1}{cC}\left(\frac{\psi_1 A}{B^3} + \psi_2\right)\frac{dt_2}{d\tau_2}. \tag{16}$$

Если задать асимптотику произвольных функций при $c \to \infty$ такую, что $\psi_2 \sim O(1/c)$, $\psi_1 \sim \text{const} + O(1/c^2)$, то из уравнений (16) получатся, с точностью до $1/c^2$, уравнения Ньютона для двух частиц, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Сам Пуанкаре использовал более простое выражение, положив $\psi_2 = 0$.

Еще более специальные случаи были рассмотрены Г.Минковским [16] и В.С.Брежневым [17]. В этих работах выбиралось $\psi_1 = \text{const}$, $\psi_2 = 0$. Ниже будет показано, что при этом (или предыдущем) ограничении невозможно получить описание «решающих опытов» по проверке общей теории относительности. Если же для выбора функций ψ_1 и ψ_2 использовать решение Шварцшильда, то оказывается возможным описать три известных эффекта по проверке ОТО и эффект задержки радиолокационных сигналов.

3.3. Потенциальный предел релятивистской задачи. Прежде чем обсудить приближенные методы решения уравнений (16), а также известные точные частные решения, рассмотрим потенциальный предел (масса второй частицы $M_2 \to \infty$). В этом случае частица 2 движется прямолинейно и равномерно. Переходя с помощью преобразования Лоренца в систему координат, где частица 2 покоится, получаем вместо (16)

$$\frac{d^2x_i}{d\tau_1^2} = \frac{\psi_1 x_i}{r^3} + \frac{\psi_2 v_{1i}/c}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, \quad \frac{d^2t_1}{d\tau_1^2} = \frac{\psi_1(\mathbf{x}\mathbf{v}_1)}{c^2r^3} + \frac{\psi_2 v_1^2/c^3}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \tag{17}$$

Перейдем здесь от собственного времени τ_1 к координатному t_1:

$$\frac{d^2x_i}{dt_1^2} = (1-\beta_1^2)\left[\frac{\psi_1 x_i}{r^3} + \frac{v_{1i}}{c}\left(\psi_2\sqrt{1-\beta_1^2} - \frac{\psi_1(\mathbf{x}\mathbf{v}_1)}{r^3c}\right)\right]. \tag{18}$$

Сравним (18) с точными уравнениями движения пробного тела в ОТО (в метрике Шварцшильда $ds^2 = c^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 - d\mathbf{x}^2 - \mu\,(\mathbf{x}d\mathbf{x})^2$)):

$$\frac{d^2x_i}{dt_1^2} = v_{1i}\mu\,(\mathbf{x}\mathbf{v}_1) - x_i\left[\frac{d\mu}{dr}\frac{(\mathbf{x}\mathbf{v}_1)^2}{2r} + \mu v_1^2 + \frac{mc^2}{r^3}\right]\left(1-\frac{2m}{r}\right), \tag{19}$$

здесь

$$\mu \equiv \frac{2m}{r^3}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad m \equiv \frac{GM_1}{c^2},$$

G — ньютонова гравитационная константа. Уравнения движения пробного тела в лоренц-инвариантной теории и в ОТО совпадают при следующем единственном выборе функций ψ:

$$\psi_1 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)(1-\beta_1^2)^{-1}\left[\frac{r^2}{2}\frac{d\mu}{dr}(\mathbf{x}\mathbf{v}_1)^2 + \mu \mathbf{v}_1^2 r^3 + mc^2\right],$$

$$\psi_2\sqrt{1-\beta_1^2} = \psi_1\,(\mathbf{x}\mathbf{v}_1)r^{-3}c^{-1} + \mu\,(\mathbf{x}\mathbf{v}_1)\,c\,(1-\beta_1^2)^{-1}. \tag{20}$$

Поставим следующий вопрос: возможно ли восстановить из урезанных одночастичных функций (20) полные двухчастичные функции $\psi_1(A, B, C)$, $\psi_2(A, B, C)$, входящие в систему уравнений (16)? Вот один из возможных рецептов. В выражениях (20) вместо r, v_1^2, m и $(\mathbf{xv}_1)$ следует подставить величины A, B, C по следующему правилу:

$$r \to B, \quad \sqrt{1-\beta_1^2} \to 1/C, \quad m \to G(M_1+M_2)/c^2, \quad \frac{(\mathbf{xv}_1)}{c} \to B - \frac{A}{C}, \tag{21}$$

где величины A, B, C зависят от координат и скоростей двух частиц и определены соотношениями (6). Тогда лоренц-ковариантные двухчастичные уравнения (16) с определенными таким образом функциями $\psi_1(A, B, C)$ и $\psi_2(A, B, C)$ имеют в качестве одночастичного предела уравнения движения пробного тела в ОТО.

3.4. Сравнение с другим подходом. Совпадение (18) с уравнениями движения пробного тела в ОТО можно получить также в рамках так называемого полностью ковариантного формализма [18]. В этом подходе предполагается, что в данной лоренцевой системе взаимодействуют только те части траекторий частиц, которые соответствуют равным временам. В этом формализме уравнения движения имеют вид

$$w_{1\nu} = (x_\nu - y_1 v_{1\nu})f + (v_{2\nu} - y_4 v_{1\nu})g,$$

$$w_{2\nu} = -(x_\nu - y_2 v_{2\nu})F + (v_{1\nu} - y_4 v_{2\nu})G, \quad \nu = 1,\dots,4.$$

Здесь $x_\mu = x_{1\mu}(t) - x_{2\mu}(t)$; $v_{i\nu}$, $w_{i\nu}$ — 4-скорость и ускорение i-й частицы; $y_1 = (\mathbf{xv}_1)$, $y_2 = (\mathbf{xv}_2)$, $y_3 = (\mathbf{xx})$, $y_4 = (\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2)$; f, g, F, G — функции инвариантов y_ν. Условие лоренц-ковариантности приведенных уравнений движения накладывает ограничения на функции f, g, F, G. Оказывается [18], что эти функции должны удовлетворять системе четырех нелинейных дифференциальных уравнений. В потенциальном пределе одна из частиц, скажем, вторая, движется с постоянной скоростью. Тогда $G = F = 0$, и упомянутая система уравнений сводится к следующей линейной системе: $Df = 0$, $Dg + f = 0$, где D — дифференциальный оператор: $D = y_4 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + \dfrac{\partial}{\partial y_2} + 2y_2 \dfrac{\partial}{\partial y_3}$. Эти уравнения легко решить. Вот ответ: f может быть произвольной функцией двух следующих комбинаций инвариантов: $y_2^2 - y_3$ и $y_1 - y_4 y_2$; функция g равна

$$g = -f(y_2^2 - y_3, y_1 - y_4 y_2) y_1 y_4^{-1} + g_1,$$

где g_1 — опять-таки произвольная функция все тех же инвариантных комбинаций. Наличие двух произвольных функций позволяет, как и ранее, легко воспроизвести уравнение, совпадающее с уравнением движения пробной частицы в ОТО.

3.5. Описание экспериментов по проверке ОТО на основе СТО. Итак, совпадают тройки уравнений, в которых шварцшильдовский интервал в ОТО и лоренц-инвариантный интервал СТО выражены через координатное время t. Между тем традиционное описание трех классических опытов в рамках ОТО основано на использовании как пространственных, так и временно́й компонент уравнений движения. Докажем, что система трех уравнений (19) достаточна для описания трех опытов. Прежде всего вычислим интегралы углового момента. Из (17) или (19) следует

$$x_i \frac{d^2 x_j}{dt^2} - x_j \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \left(x_i \frac{dx_j}{dt} - x_j \frac{dx_i}{dt} \right) (\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}})\mu,$$

откуда

$$\frac{x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i}{1 - 2m/r} = L_{ij} = \text{const}. \tag{22}$$

Точка над координатами означает дифференцирование по координатному времени. Интеграл энергии равен

$$\frac{(\dot{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}})}{(1 - 2m/r)^2} + \frac{2m}{r^3} \frac{(\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}})^2}{(1 - 2m/r)^3} - \frac{2mc^2}{r - 2m} = \varepsilon. \tag{23}$$

Из (22) следует, что движение происходит в плоскости. Перепишем последние формулы, выбрав в качестве этой плоскости $z = 0$:

$$\frac{r^2 \dot{\phi}}{1 - 2m/r} = L, \quad \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}{(1 - 2m/r)^2} + \frac{2m\dot{r}^2 / r}{(1 - 2m/r)^3} - \frac{2mc^2}{r - 2m} = \varepsilon. \tag{24}$$

Исключая временну́ю переменную t, получаем уравнение орбиты пробной частицы:

$$u_\phi^2 + (1 - 2mu)u^2 = \frac{2mu}{L^2}(c^2 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{L^2}, \quad u \equiv \frac{1}{r}, \quad u_\phi \equiv \frac{du}{d\phi}. \tag{25}$$

Дифференцируем по ϕ:

$$u_{\phi\phi} + u = 3mu^2 + mL^{-2}(c^2 - \varepsilon). \qquad (26)$$

Это уравнение совпадает с уравнением движения пробной частицы в ОТО. Поэтому смещение перигелия планет оказывается одним и тем же. Далее, так как для фотона величина ε (энергия на единицу массы) равна c^2, то (26) принимает вид $u_{\phi\phi} + u = 3mu^2$, что совпадает с уравнением распространения луча света в ОТО. Таким образом, величина отклонения все та же, что и в ОТО. Столь же элементарно доказывается совпадение времен задержки радиолокационных сигналов в ОТО (четвертый эффект ОТО) и данной лоренц-ковариантной теории. Для этого достаточно заметить, что уравнения (24) одинаковы как в ОТО, так и в данной теории. Перейдем к красному смещению. Идентифицируя полусумму первых двух членов как кинетическую энергию, что следует из нерелятивистского предела, и приравнивая ее к энергии фотона $h\nu$, получаем правильную величину красного смещения $\nu \sim GM/r$. Некоторая осторожность, однако, необходима. Уравнения (24) образуют полную систему. Поэтому невозможно для фотона дополнить их уравнением

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi} = c^2, \qquad (27)$$

так как уравнения (27) и (24) оказываются несовместимыми. Соотношение (27) означает, что свет не взаимодействует с тяготением. Тот факт, что отсутствие такого взаимодействия ведет к многочисленным парадоксам и несовместимо с законом сохранения энергии, был отмечен А.Эйнштейном еще в 1911 г. [19]. Поэтому для распространения света мы не накладываем условия (27). Вместо этого мы рассматриваем движение фотонов и пробных тел с единой точки зрения и определяем фотоны как такие пробные частицы, скорость которых равна c на бесконечности (или в отсутствие тяготения). Тогда из соотношения (23) следует, что энергетическая константа ε для фотонов равна c^2. Сказанное выше относится только к уравнению (24), которое было получено из более общего уравнения (18) с помощью весьма специфического выбора функций f_1 и f_2, имевшего целью в точности воспроизвести уравнения движения ОТО. Элементарные вычисления показывают, что упрощенный электродинамический вариант двухчастичных сил, предложенный в [16,17], дает в потенциальном пределе неправильное значение смещения перигелия Меркурия, равное одной шестой наблюдаемого на опыте.

3.6. Сравнение с теорией Биркгофа. Любопытно сравнить результаты данного подхода с результатами полевой теории гравитации Дж.Биркгофа [20,21], близкой по духу к линеаризованной теории Эйнштейна, хотя при этом мы уже выходим за рамки классических теорий дальнодействия. Известно [21], что в линеаризованной ОТО невозможно одновременно описать все три «решающих опыта». Теория Биркгофа соответствует полностью плоскому пространству-времени и возникла намного позже ОТО (1943 г.).

Уравнения этой теории являются частным случаем уравнений (17) при следующем выборе функций ψ_1, ψ_2:

$$\psi_1^B = -mc^2 - \frac{2mv^2}{1-\beta^2} \approx -mc^2 - 2mv^2, \quad \psi_2^B = \frac{m(\mathbf{rv})c}{r^3\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{m(\mathbf{rv})c}{r^3}. \tag{28}$$

Авторы работ [21] утверждают, что при таком выборе функций ψ_1, ψ_2 в первом порядке по $1/c^2$ правильно воспроизводятся смещение перигелия Меркурия, красное смещение и отклонение луча света в гравитационном поле. Сравним функции ψ_1, ψ_2, отвечающие данному рассмотрению (20), и модели Биркгофа (28). Пренебрегая членами порядка более высокого, чем $1/c^2$, получаем

$$\psi_1 = -mc^2\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{3v^2}{c^2}\right) + \frac{3m(\mathbf{rv})^2}{r^2}, \quad \psi_2 = \frac{mc}{r^3}(\mathbf{rv}), \tag{29}$$

$$\psi_1^B = -mc^2 - 2mv^2, \quad \psi_2^B = \psi_2. \tag{30}$$

Столь существенное отличие ψ_1 и ψ_1^B вынуждает нас проанализировать ситуацию более детально. Без ограничения общности можно считать, что движение происходит в плоскости $z = 0$. Уравнения Биркгофа имеют вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{mc^2}{r^3}x - \frac{2mx}{r^3}V^2 + \frac{m(\mathbf{rV})}{r^3}\dot{x}, \quad V^2 \equiv \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{mc^2}{r^3}y - \frac{2my}{r^3}V^2 + \frac{m(\mathbf{rV})}{r^3}\dot{y}, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau}, \quad \dot{y} \equiv \frac{dy}{d\tau}. \tag{31}$$

Отсюда находим интегралы энергии и углового момента:

$$(V^2 + c^2)\exp(-2m/r) = c^2 + \tilde{\varepsilon}, \quad (x\dot{y} - y\dot{x})\exp(+m/r) = \lambda. \tag{32}$$

Исключая собственное время, находим уравнение орбиты, полученное Биркгофом:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = e^{2mu}\,[(c^2+\tilde{\varepsilon})\,e^{2mu} - c^2]\,, \quad u \equiv 1/r. \tag{33}$$

Пренебрегаем в (33) членами более высокого порядка, чем $1/c^2$:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\left[1 - \frac{2m^2}{3\lambda^2}(3c^2+4\tilde{\varepsilon})\right] = \lambda^{-2}\,[\,\tilde{\varepsilon} + 2mu\,(c^2+2\tilde{\varepsilon})]\,.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r = r_0(1 + p\cos\omega\,\phi)^{-1}, \tag{34}$$

где

$$r_0 = \frac{\lambda^2\omega^2}{m(c^2+2\varepsilon)}\,, \quad p = \left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}\,r_0^2}{\lambda^2\omega^2}\right)^{1/2}, \quad \omega^2 = 1 - \frac{2m^2}{\lambda^2}(3c^2+4\tilde{\varepsilon}).$$

Для движения планет $\tilde{\varepsilon} < 0$, $|\,\tilde{\varepsilon}\,| << c^2$, и поэтому

$$r_0 \approx \frac{\lambda^2}{mc^2}\,, \quad p \approx 1 - \frac{|\,\tilde{\varepsilon}\,|\,\lambda^2}{2G^2M^2}\,, \quad \omega \approx 1 - \frac{3m^2c^2}{\lambda^2}\,.$$

В этом случае траектория пробной частицы близка к эллиптической. Смещение перигелия планеты за один оборот составляет $\Delta = \dfrac{6\pi m^2c^2}{\lambda^2}$, что в точности совпадает с результатом, предсказываемым ОТО. Эффект красного смещения, являясь следствием закона сохранения энергии, легко выводится из интеграла энергии (32). Результат, как легко было предвидеть, совпадает с результатом ОТО.

Переходим к отклонению луча света в теории Биркгофа. В (32) удобно перейти от собственного времени τ к координатному t. После несложных преобразований получаем

$$v^2/c^2 = 1 - \exp(-2m/r)\,(1+\tilde{\varepsilon}/c^2)^{-1}, \quad v^2 \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \tag{35}$$

Попытаемся подобрать $\tilde{\varepsilon}$ в (34) таким образом, чтобы получить правильное экспериментальное значение $\delta_{\text{эксп}}$ для угла отклонения светового луча вблизи солнечного диска. Этому условию удовлетворяет следующее значение $\tilde{\varepsilon}$:

$$\tilde{\varepsilon} = (c^2/2)\,(\delta_{\text{эксп}} r_{\text{мин}}/4m - 1)^{-1}\,. \tag{36}$$

Здесь $r_{\text{мин}}$ — наименьшее удаление светового луча от центра притяжения. Различные эксперименты дают для величины $\dfrac{\delta_{\text{эксп}}\, r_{\text{мин}}}{4m}$ общерелятивистское значение 1 с точностью от 2 до 15% [22]. Отсюда получаем следующие оценки: $\tilde{\varepsilon} > 3c^2$ (15%); $\tilde{\varepsilon} > 25c^2$ (2%), причем $\tilde{\varepsilon} = \infty$, если угол отклонения света в точности совпадает с общерелятивистским значением.

Вычислим теперь время запаздывания отраженного радиолокационного сигнала. Ради простоты рассмотрим случай, когда радиосигнал распространяется в радиальном направлении. Тогда из (35) находим для времени задержки сигнала

$$\Delta t^{B} = \frac{2\Delta r}{c}\left(\sqrt{1 + c^2/\tilde{\varepsilon}} - 1\right) + \frac{2mc}{\tilde{\varepsilon}}\sqrt{1 + c^2/\tilde{\varepsilon}}\,\ln\frac{r_2}{r_1}\,. \tag{37}$$

ОТО (а следовательно, и данная версия подхода Пуанкаре) предсказывает следующее время задержки:

$$\Delta t = \frac{4m}{c}\ln\frac{r_2 - 2m}{r_1 - 2m} \approx \frac{4m}{c}\ln\frac{r_2}{r_1}\,, \tag{38}$$

которое экспериментально подтверждается с большой точностью. До сих пор движение света ничем не отличалось от движения пробных тел. Определим теперь свет как такие пробные частицы, скорость которых равна c при отсутствии тяготения ($m = 0$) или на бесконечном удалении ($r = \infty$). Тогда из (35) следует, что $\tilde{\varepsilon} = \infty$. При таком значении $\tilde{\varepsilon}$ времення́я задержка радиолокационных сигналов равна нулю. Таким образом, давая правильные результаты для трех известных опытов ОТО, теория Биркгофа не может объяснить задержку радиолокационных сигналов.

3.7. Прецессия гироскопа. Существует, по-видимому, единственный опыт, осуществление которого намечено на 1996 г. [22], для которого предсказания ОТО и данной лоренц-ковариантной теории разнятся. Это прецессия гироскопа в гравитационном поле Земли. Угол прецессии гироскопа, установленного, например, на искусственном спутнике Земли, составляет на один орбитальный оборот $\frac{3\pi GM}{Rc^2}$ в ОТО и $-\frac{\pi GM}{Rc^2}$ в данном варианте лоренц-ковариантной теории.

Последнее выражение получается следующим образом. Предполагаем, что прецессия гироскопа, находящегося на круговой орбите радиуса R, обязана прецессии Томаса. Для последней угол поворота «спина» (вектора, задающего ориентацию гироскопа) равен [23] $\Theta = -2\pi(\gamma - 1)$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, v — скорость «спина» на круговой орбите. Из (19) следует, что для круговой орбиты $\beta^2 = \frac{m}{R-2m}$. Подставляя это значение в Θ и отбрасывая члены более высокого порядка, получаем приведенное частно-релятивистское выражение.

3.8. Другие методы рассмотрения релятивистской задачи. Рассмотренный подход является, по сути дела, релятивистской механикой. Соответствующая релятивистская полевая теория гравитации была построена А.А.Логуновым [24,25].

Очевидно, могут существовать разные релятивистские теории, описывающие «решающие» эксперименты и не сводящиеся к ОТО. Попытки промоделировать уравнения движения ОТО на основе введения специально подобранных сил в СТО ранее предпринимались неоднократно. Например, в серии интересных работ [26] было показано, что точное моделирование возможно только в том случае, если сила в СТО представляет собой полином четвертой степени от скоростей:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \Omega^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} - \frac{dx^\alpha}{d\tau}\Omega_{\beta\gamma\delta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau}\frac{dx^\delta}{d\tau}. \tag{39}$$

В рассматриваемом случае Ω представляют собой разности коэффициентов связности плоского и кривого пространств. Докажем, что (39) эквивалентно (19). Будем использовать декартовы координаты. Тогда коэффициенты связности для плоского пространства равны нулю, а соотношение (39) есть уравнение движения в метрике Шварцшильда, которое совпадает с уравнением (19), если за параметр принять координатное время t. Это означает, что тройная сумма в правой части (39) трансформировалась в первый член правой части (19).

Система уравнений (16), определяющая движение частицы 1, должна быть дополнена системой уравнений для движения частицы 2. Выбор в (16) знака разности $t_1 - t_2 (= r/c)$ отвечает запаздывающему воздействию частицы 2 на частицу 1. Выбор $t_1 - t_2 = -\frac{r}{c}$ отвечал бы опережающему воздействию частицы 2 на частицу 1, т.е. действие частицы 2 достигает частицы 1 раньше, чем оно покидает частицу 2. Итак, вместо (16) можно было бы взять полусумму запаздывающего и опережающего взаимодействий. При этом для случая, упомянутого в разд.2 [16,17], можно найти релятивистски-инвариантный лагранжиан [27] и, следовательно, получить в явном виде величины энергии, импульса, углового момента. В этом случае найдены частные точные решения релятивистской двухчастичной задачи [28]. При этом частицы вращаются по двум концентрическим окружностям с постоянной угловой скоростью. Точные решения, отвечающие движению по концентрическим окружностям, существуют и для случая короткодействующих двухчастичных взаимодействий [29]. Подобные же точные решения удается получить и тогда, когда взаимодействие частицы 1 с частицей 2 является запаздывающим, а взаимодействие частицы 2 с частицей 1 является опережающим, при этом частицы 1 и 2 лежат на световом конусе. В этом случае, кроме движения по концентрическим окружностям, можно отыскать точное решение, отвечающее прямолинейному движению [30]. Если же запаздывающими являются как взаимодействие частицы 1 с 2, так и 2 с 1, точные решения неизвестны. В этом случае для медленных движений в (16) можно выполнить разложение по степеням $1/c^2$. При этом (16) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания. С точностью до членов $1/c^2$ включительно имеем

$$\frac{d^2x_{1i}}{dt^2} = -\frac{GM_2}{r^3}\left[1+\frac{\phi_1}{c^2}-\frac{v_1^2}{c^2}-\frac{3}{2}\frac{GM_1}{rc^2}-\frac{3}{2}\left(\frac{\mathbf{rv}_2}{rc}\right)^2\right]x_i + \\ + \frac{v_{1i}-v_{2i}}{c^2}\left[\dot{\phi}_2 + GM_2 r^{-3}(\mathbf{rv}_1)\right], \tag{40}$$

где мы положили

$$\psi_1 \equiv -GM_2(1+\phi_1/c^2), \quad \psi_2 \equiv \phi_2/c.$$

Все значения координат, скорости, ускорения взяты здесь в один и тот же момент времени t. Движение частицы 2 подчиняется точно такому же уравнению (с заменой индексов $1 \longleftrightarrow 2$). Система обыкновенных дифференциальных уравнений (40) может быть решена стандартными методами, если известны начальные положения и скорости частиц. Используя процедуру, описанную в конце п.3.3, находим ϕ_1 и ϕ_2. С точностью до членов порядка $1/c^2$ имеем

$$\phi_1 = 3\mathbf{v}^2 - 2G(M_1+M_2)/r - 3(\mathbf{rv})^2/r^2, \ \phi_2 = GM_2(\mathbf{rv})/r^3, \ \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

Подставляя ϕ_1 и ϕ_2 в (40), убеждаемся, что уравнения движения (33) отличаются от уравнений движения, которые следуют из приближенного лагранжиана Эйнштейна — Инфельда — Гофмана. Тем не менее потенциальный предел этих уравнений ($M_2 \to \infty$) один и тот же. Это частично связано с неоднозначностью восстановления двухчастичных функций из одночастичных.

Если движение не является медленным, но одна из масс существенно превышает другую, для решения системы (16) можно воспользоваться методом, предложенным в [31]. В первом приближении считаем движение большой массы M_2 прямолинейным. При заданном движении M_2, пользуясь (16), вычисляем движение M_1. Подставляя в уравнения движения для M_2 найденное движение M_1, снова получаем движение M_2, но с поправками порядка M_1/M_2. Этот процесс продолжается до получения необходимой точности. В обоих приближенных случаях задание начальных положений и скоростей полностью определяет дальнейшую динамику двухчастичной системы. Но для точной системы уравнений (16) (плюс уравнения для движения второй частицы) из-за конечной скорости распространения взаимодействия задания положений и скоростей в какой-то момент времени недостаточно: необходимо задать начальные координаты и скорости на конечных участках траекторий частиц или задать в данный момент не только координаты и скорости, но также все высшие производные по времени от координат [32]. Поэтому приближенные решения составляют весьма малую часть множества точных решений. Одним из путей преодоления этих осложнений является введение подходящего эвристического принципа [33], который позволил бы ограничить множество решений. Конечно, остается открытым вопрос о соотношении этих принципов с экспериментальными данными.

В работе [34] была получена общая форма приближенно-инвариантного с точностью до $1/c^2$ релятивистского лагранжиана. Сравнивая уравнения движения (40) с уравнениями движения, вытекающими из лагранжиана из работы [34], легко восстановить лагранжиан, соответствующий уравнениям (40). Это, в свою очередь, определяет приближенные интегралы движения, соответствующие импульсу, энергии и угловому моменту.

3.9. Сравнение с галилеевой двухчастичной задачей. Обратимся еще раз к трем одночастичным уравнениям (18). При выборе функций ψ_1, ψ_2 с помощью формул (20) получается правильное описание трех решающих опытов ОТО. Поскольку уравнения (18) отнесены к системе покоя частицы 2, всякая информация о движении этой частицы отсутствует. Поэтому в уравнениях (18) отсутствует информация о движении системы двух частиц как целого, а следовательно, и о свойствах симметрии этого движения.

«Разморозить» эту степень свободы можно по-разному. Ранее мы требовали, чтобы полученные двухчастичные уравнения были лоренц-ковариантными. В этом случае для определения ψ_1, ψ_2, входящих в (16), можно воспользоваться рецептом (21). С другой стороны, можно потребовать, чтобы уравнения (18) были потенциальным пределом галилеево-ковариантных двухчастичных уравнений. Последние выглядят следующим образом:

$$\frac{d^2x_{1i}}{dt^2} = F_1 x_i + F_2 v_i; \quad x_i \equiv x_{1i} - x_{2i}, \quad v_i \equiv v_{1i} - v_{2i}. \tag{41}$$

Здесь F_1, F_2 — функции трех инвариантов группы Галилея: $r^2 = \sum x_i^2$, $v^2 = \sum v_i^2$, $(\mathbf{rv}) = \sum x_i v_i$. Если мы хотим, чтобы в потенциальном пределе уравнения (41) совпадали с уравнениями движения пробной частицы в ОТО (19), то мы должны следующим образом выбрать функции F_1, F_2:

$$F_1 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\left[\frac{1}{2r}\frac{d\mu}{dr}(\mathbf{rv})^2 + \mu \mathbf{v}^2 + mc^2/r^3\right],$$

$$F_2 = \mu(\mathbf{rv}), \quad \mu \equiv \frac{2m}{r^3}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}, \quad m \equiv \frac{GM_2}{c^2}, \quad M \equiv M_1 + M_2. \tag{42}$$

При таком выборе воспроизводятся результаты трех «решающих» опытов ОТО. Попытки модификации законов ньютоновой механики известны давно (Гаусс, Риман, Вебер, Нейман). В таком подходе возможность приближенного описания опытов ОТО изучалась Тредером [35]. В отличие от этих работ уравнения (41) с определенными в (42) функциями в потенциальном пределе в точности воспроизводят уравнения движения ОТО. Несостоятельность этих попыток построения галилеевской ковариантной теории, включая и нашу, состоит в том, что, правильно описывая большинство эффектов ОТО, они не могут описать эффектов СТО — сокращения промежутков длины и времени и т.д.

4. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КРУГОВОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Два тела с равными массами. Найдем условия, при которых уравнения (8), (9) имеют решения, отвечающие стационарному круговому движению. Массы частиц предполагаем одинаковыми, тогда движение происходит по одной и той же окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью ω:

$$x_1(t) = a\cos\omega t, \quad y_1 = a\sin\omega t,$$
$$x_2(t) = -a\cos\omega t, \quad y_2 = -a\sin\omega t. \tag{43}$$

При подстановке (43) в уравнения (8) все величины, относящиеся к частице 2, следует взять в более ранний момент времени:

$$x_2 = -a\cos\omega(t-t_0) = -a\cos(\omega t - \phi_0),$$
$$y_2 = -a\sin\omega(t-t_0) = -a\sin(\omega t - \phi_0). \tag{44}$$

Поскольку движение стационарное, то $t_0 = \mathrm{const}$, $\phi_0 = \omega t_0 = \mathrm{const}$. Угол запаздывания ϕ_0 определяется из условия, что взаимодействие, распространяющееся со скоростью света, покинувшее частицу 2 в момент $t - t_0$, достигнет частицы 1 в момент времени t. Это приводит к следующему условию:

$$\beta = \frac{\omega a}{c} = \frac{\phi_0}{\sqrt{2(1+\cos\phi_0)}} = \frac{\phi_0}{2\cos(\phi_0/2)}. \tag{45}$$

Отсюда следует, что $\phi_0 = 0$ при $\beta = 0$ и достигает максимального значения ($\approx 85°$) при $\beta = 1$. Итак, движение определяется двумя константами a и ω, а две другие связаны с ними соотношением (45). В дальнейшем нам понадобятся значения инвариантов $A,\ldots,F$ для кругового движения, которые обозначим через $A_0,\ldots,F_0$:

$$A_0 = B_0 = aZ_0(1-\beta_2^2)^{-1/2}, \quad Z_0 \equiv \beta\sin\phi_0 + \sqrt{2(1+\cos\phi_0)},$$
$$C_0 = (1-\beta^2)^{-1}(1+\beta^2\cos\phi_0), \quad D_0 = (1-\beta^2)^{-3/2}a^2\omega^3\sin\phi_0,$$
$$E_0 = (1-\beta^2)^{-1}(1+\cos\phi_0)\,\omega^2 a^2, \quad F_0 = (1-\beta^2)^2 a^2\omega^4. \tag{46}$$

Подставляя (43), (44) в (8), получаем следующие два соотношения между функциями f:

$$f_3^0\frac{\sin\phi_0}{\omega\sqrt{1-\beta^2}} - f_4^0\frac{\cos\phi_0}{1-\beta^2} = f_1^0(1+\cos\phi_0)\,\omega^{-2} + (1-\beta^2)^{-1},$$
$$f_3^0\frac{1+\cos\phi_0}{\omega\sqrt{1-\beta^2}} + f_4^0\frac{\sin\phi_0}{1-\beta^2} = -f_1^0(\sin\phi_0 + \beta\sqrt{2(1+\cos\phi_0)})\,\omega^{-2}. \tag{47}$$

Здесь $f_i^0 = f_i(A,\ldots,F)\Big|_{A=A_0,\ldots,F=F_0}$.

Разрешим эти уравнения относительно f_3^0, f_4^0:

$$\frac{f_3^0}{\omega\sqrt{1-\beta^2}} = \left(\frac{f_1^0}{\omega^2} + \frac{1}{1-\beta^2}\right)\frac{\sin\phi_0}{1+\cos\phi_0} - f_1^0\,\frac{\beta\sqrt{2}\cos\phi_0}{\omega^2\sqrt{1+\cos\phi_0}},$$

$$\frac{f_4^0}{1-\beta^2} = -\frac{2f_1^0}{\omega^2}\left(1 + \frac{\beta\sin\phi_0}{\sqrt{2(1+\cos\phi_0)}}\right) - (1-\beta^2)^{-1}. \tag{48}$$

Соотношения (47) или (48) могут служить тестом существования круговых стационарных движений в той или иной релятивистской двухчастичной задаче. Применим соотношения (47), (48) к релятивистскому круговому движению двух разноименно заряженных частиц ($e_1 = -e_2 = e$) с одинаковой массой m. В этом случае имеем

$$f_1^0 = -\varepsilon\omega^2\beta^{-2}(1-\beta^2)^{-1/2}\,[(1+\beta^2\cos\phi_0)^2 + \beta^3\sin\phi_0 Z_0]Z_0^{-3},$$

$$f_3^0 = \varepsilon\omega\beta^{-1}(1+\beta^2\cos\phi_0)Z_0^{-2},\quad f_4^0 = \varepsilon\sqrt{1-\beta^2}\,Z_0^{-1}. \tag{49}$$

Здесь $\varepsilon = e^2/mc^2a$ — безразмерная константа, по порядку величины равная отношению электрической энергии взаимодействия двух частиц к полной. Подставляя эти функции во второе из уравнений (47), получаем трансцендентное уравнение для ϕ_0:

$$\beta(1+\cos\phi_0)\,(1+\beta^2\cos\phi_0)Z_0 + \beta^2 Z_0^2\sin\phi_0 =$$

$$= [(1+\beta^2\cos\phi_0)^2 + \beta^3 Z_0\sin\phi_0]\,[\,\sin\phi_0 + \beta\sqrt{2(1+\cos\phi_0)}\,]\,. \tag{50}$$

Здесь β выражается через ϕ_0 с помощью соотношения (45). Уравнение (50) имеет два следующих тривиальных решения:

1) $\phi_0 = 0$. В этом случае $\beta = 0$, т.е. частицы покоятся. Подставляя эти значения в первое уравнение (47), убеждаемся, что $\varepsilon = 0$, что означает отсутствие взаимодействия;

2) $\beta = 1$ ($\phi_0 \approx 85°$). Из первого уравнения (47) следует $\varepsilon = \infty$. Это означает, что бесконечно сильное притяжение компенсируется центробежными силами при движении по окружности со скоростью света.

Вычисления показывают, что при $0 < \beta < 1$ уравнение (50) не имеет корней. Итак, в электромагнитном случае с запаздыванием отсутствуют решения, отвечающие круговому движению со скоростью, меньшей скорости света.

Выясним теперь, нет ли круговых стационарных движений в упрощенном варианте (15) уравнений Пуанкаре? Подставляем $f_3 = -f_1 \dfrac{A}{cC}$, $f_4 = 0$ во второе из уравнений (47). После упрощений получаем: $\beta\sqrt{2}\cos\phi_0\sqrt{1+\cos\phi_0} = \sin\phi_0$ или, с учетом (45), $\tan\phi_0 = \phi_0$.

В доступном для ϕ_0 интервале $0 \le \phi_0 \le 85°$ есть только тривиальное решение $\phi_0 = 0$, $\beta = 0$, отвечающее отсутствию взаимодействия. Как и в предыдущем случае, стационарные круговые движения отсутствуют.

4.2. Примеры релятивистских двухчастичных сил, допускающих стационарные круговые движения. Выразим с помощью соотношений (46) константы a, ω через инварианты $A_0,\ldots,F_0$:

$$a = \frac{E_0}{\sqrt{F_0}\,(2-Y_0^2)}, \quad \omega = cE_0^{-1}\sqrt{F_0}\,Q_0\left(\frac{X_0}{X_0+Q_0}\right)^{1/2}. \tag{51}$$

Здесь X_0, Y_0 — следующие безразмерные комбинации инвариантов:

$$X_0 \equiv E_0 / c^2, \quad Y_0 \equiv D_0(E_0F_0)^{-1/2}, \quad Q_0 \equiv 2 - Y_0^2.$$

Поскольку констант движения a, ω две, а инвариантов $A_0,\ldots,F_0$ шесть, то должны существовать четыре соотношения между инвариантами:

$$A_0 = B_0 = (\sqrt{F_0}\,Q_0)^{-1}\,[Y_0\sqrt{X_0} + \sqrt{2(X_0+Q_0)}\,],$$

$$C_0 = 1 + E_0 / c^2, \quad 1 - Y_0^2 = \cos\sqrt{\frac{2X_0Q_0}{X_0+Q_0}}. \tag{52}$$

Подставим ω и a из (51) в (48). Приведем первое из этих соотношений:

$$f_4^0 = -1 - f_1^0\sqrt{2}\,E_0(F_0Q_0)^{-1}\left[\sqrt{2} + Y_0\left(\frac{X_0}{X_0+Q_0}\right)^{1/2}\right]. \tag{53}$$

Это соотношение имеет вид

$$f_4^0 = \psi_4(f_1^0, A_0, B_0, \ldots, F_0). \tag{54}$$

При подстановке ω и a во второе соотношение (48) получаем выражение, связывающее f_3^0 и f_1^0:

$$f_3^0 = \psi_3(f_1^0, A_0, B_0, ..., F_0). \qquad (55)$$

Рассмотрим теперь соотношения, получаемые из (53)—(55) заменой $A_0 \to A, ..., F_0 \to F$. Тогда вместо (53), например, имеем

$$f_4 = -1 - f_1 \sqrt{2} E (FQ)^{-1} \left[\sqrt{2} + Y \left(\frac{X}{X+Q} \right)^{1/2} \right]. \qquad (56)$$

Здесь $Y \equiv D/\sqrt{EE}, X \equiv E/c^2, Q \equiv 2 - Y^2$.

Такое же соотношение получается для f_3. В итоге имеем

$$f_3 = \psi_3(f_1, A, B, ..., F), \ \ f_4 = \psi_4(f_1, A, B, ..., F). \qquad (57)$$

Подставим теперь выражения (57) в (18). Полученные уравнения содержат одну произвольную функцию $f_1(A, ..., F)$. Эти уравнения переходят в условия кругового движения (47) при подстановке вместо инвариантов $A, ..., F$ их выражений $A_0, ..., F_0$, соответствующих круговому движению. Иначе говоря, уравнения (8) с функциями f_3, f_4, выбранными в виде (56), (57), и произвольной функцией f_1 допускают решение (43), отвечающее круговому движению с произвольными a, ω. Однако, даже если функцию f_1 из физических или иных соображений зафиксировать, остается неопределенность двоякого рода. Во-первых, учтем, что инварианты $A_0, ..., F_0$ не являются независимыми (см. соотношения (52)). Например, вместо E_0 в (53) можно было бы подставить $c^2(C_0 - 1)$, F_0 выразить через A_0 или B_0 с помощью второго соотношения (52) и т.д. Все эти соотношения полностью эквивалентны в силу (46). Однако при переходе от (54), (55) к (56) такая эквивалентность нарушается. В итоге будут получаться уравнения (8), (9), в которых f_3, f_4 по-разному связаны с f_1, т.е. будем иметь различные двухчастичные релятивистские уравнения, допускающие одно и то же круговое движение с произвольными параметрами a, ω. Вторая неопределенность состоит в том, что соотношения (57) всегда можно умножить на произвольную функцию инвариантов $A, ..., F$, сводящуюся к 1 для кругового решения, т.е. при $A = A_0, ..., F = F_0$, так же как и добавить в правую часть произвольную функцию, обращающуюся в нуль для того же движения. Остающийся произвол все еще слишком велик. Попытаемся ограничить его требованием перехода релятивистских уравнений (8) в заданные нерелятивистские. В качестве примера можно потребовать, чтобы общие уравнения (8) переходили в обычные нерелятивистские гравитационные уравнения, причем так, чтобы первые поправочные члены к ним имели порядок c^{-2}. Вернемся снова к исходным уравнениям (8). Коэффициент при ω_{2i} будет мал, если f_4 будет порядка c^{-2}. Ради простоты положим $f_4 = 0$. Далее, коэффициент, стоящий при x_i, должен с точностью до c^{-2} совпадать с $c - \gamma/r^3$ (γ= const). Проще всего этого можно достичь, положив $f_1 = -\gamma/B^3$. Наконец, еще одно условие совпадения с точностью c^{-2} уравнений (8) с гравитационными нерелятивистскими состоит в том, что

$$f_1 \frac{r}{c} + f_3(1-\beta_2^2)^{-1/2} \sim O(c^{-2}) \quad \text{при } c \to \infty. \tag{58}$$

Проще всего этого добиться, если, следуя Пуанкаре, положить

$$f_3 = -f_1 A/cC.$$

Мы видели, однако, что при таком выборе функций f (см. выше) круговое движение отсутствует. Поэтому мы попытаемся подойти с другого конца. При этом будем придерживаться следующего плана. Сначала выясним, что означают первые два наших условия ($f_4 = 0, f_1 = -\gamma/B^3$) для кругового движения. Далее с помощью второй из формул найдем соотношение между f_3^0 и f_1^0. Заменим в нем инварианты $A_0,\dots,F_0$ кругового движения на общие инварианты $A,\dots,F$. Тогда получится некоторое соотношение между f_3 и f_1. Устремляя в нем $c \to \infty$, убедимся, что оно переходит в (58).

Итак, подставляем $f_4 = 0, f_1 = -\gamma / B^3$ в (48):

$$2 - \gamma^{-1}\omega^2 a^3 Z_0^3 (1-\beta^2)^{-5/2} + \sqrt{2}\,\beta \sin\phi_0 = 0. \tag{59}$$

Выясним физический смысл этого условия. Переходя к пределу при $c \to \infty$, получаем

$$\frac{\gamma}{4\omega^2} = a^3, \tag{60}$$

то есть третий закон Кеплера (квадрат периода пропорционален кубу полуоси). Таким образом, (54) является некоторым релятивистским обобщением третьего закона Кеплера. Остается выяснить, во что переходит второе из выражений (48) при таком выборе f_4, f_1. Однако удобнее использовать второе из соотношений (47). Оно приводится к виду

$$f_3^0 = -f_1^0 a c^{-1} \sqrt{1-\beta^2}\,(\sin\phi_0 + \sqrt{2}\,\beta\sqrt{1+\cos\phi_0})\,(1+\cos\phi_0)^{-1}\beta^{-1}. \qquad (61)$$

Выражаем ϕ_0, β, a через $A_0,\dots,F_0$:

$$f_3^0 = -\frac{f_1^0}{c}\,\frac{\sqrt{2X_0} + Y_0\,(X_0+Q_0)^{1/2}}{Y_0\sqrt{X_0} + \sqrt{2}\,(X_0+Q_0)^{1/2}}\,[\,X_0(X_0+Q_0)]^{-1/2}. \qquad (62)$$

Следующий шаг состоит в том, что в (62) вместо инвариантов $A_0,\dots,F_0$ кругового движения подставляются их общие выражения (6), (7):

$$f_3 = -\frac{f_1}{c}\,\frac{\sqrt{2X} + Y(X+Q)^{1/2}}{Y\sqrt{X} + \sqrt{2}\,(X+Q)^{1/2}}\,[\,X(X+Q)]^{-1/2}. \qquad (63)$$

Переходя, наконец, здесь к нерелятивистскому пределу, убеждаемся в справедливости (58).

Таким образом, релятивистские уравнения (8), (9) с $f_4 = 0$, $f_1 = \gamma/B^3$ и f_3, определенной с помощью (63), допускают решения, отвечающие круговому движению (43). При этом ω и a оказываются связанными соотношением (59). В нерелятивистском пределе уравнения (8), (9) и условие (59) переходят в обычные ньютоновские гравитационные уравнения и третий закон Кеплера.

Заметим, что частные запаздывающие решения, отвечающие круговому движению, были ранее получены Дж. Сингом [36].

Полученные выше результаты становятся прозрачными для более простого случая — галилеевской механики двух частиц. В этом случае имеются два независимых галилеевски-ковариантных вектора: $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ (см., например, [33]). Отсюда следует общий вид уравнений, форминвариантных относительно преобразований Галилея:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = f_1\mathbf{r} + g_1\mathbf{v}, \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \qquad (64)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -f_2\mathbf{r} + g_2\mathbf{v}. \qquad (65)$$

В правую часть (64) можно было бы добавить член, пропорциональный $\mathbf{w}_2$. Однако его можно было бы исключить с помощью (65), поскольку все члены уравнений относятся к одному и тому же времени. Далее, правые части могли бы содержать слагаемое, пропорциональное векторному произведению $[\mathbf{r}\times\mathbf{v}]$.

В этом случае движение не происходит в одной плоскости, даже если начальные радиус-векторы частиц и их скорости лежат в ней.

Теперь f и g — функции от трех независимых галилеевских инвариантов $\mathbf{r}^2$, $\mathbf{v}^2$ и $(\mathbf{rv})$. Найдем условия, при которых уравнения (64), (65) имеют решения, отвечающие круговым движениям:

$$x_{1,2}=\pm a\cos\omega t,\quad y_{1,2}=\pm a\sin\omega t. \tag{66}$$

При этом действуем точно так, как и в релятивистском случае. Подставляя эти значения x, y в уравнения, получаем

$$f_1^0=f_2^0=-\omega^2/2,\quad g_1^0=g_2^0=0. \tag{67}$$

Далее выписываем значения инвариантов для кругового движения

$$r_0^2=4a^2,\quad v_0^2=\omega^2a^2,\quad (\mathbf{rv})=0. \tag{68}$$

Записываем функции f_1^0 и g_1^0 через инварианты

$$f_1^0=-2v_0^2/r_0^2,\quad g_1^0=0. \tag{69}$$

Наконец, в (67) заменяем инварианты r_0, v_0 на r, v:

$$f_1=-2v^2/r^2,\quad g_1=0. \tag{70}$$

Таким образом, уравнения (64), (65) с функциями f и g, определенными выражениями (70), имеют решения, отвечающие круговому решению с произвольными a, ω. Понятно, что функции (70), при которых допустимо круговое движение, не самого общего вида. Обобщение тривиально и сводится, как мы уже упоминали выше для релятивистского случая, к умножению f_1 на произвольную функцию ϕ_1 инвариантов, обращающуюся в единицу при их значениях (68) и добавлению произвольных функций ϕ_2, ϕ_3, обращающихся в нуль для кругового движения:

$$f_1=-\frac{2v^2}{r^2}\phi_1\left(\frac{(\mathbf{rv})}{rv}\right)+\phi_2\left(\frac{(\mathbf{rv})}{rv}\right),\quad g_1=\phi_3\left(\frac{(\mathbf{rv})}{rv}\right),$$

$$\phi_1(0)=1,\quad \phi_2(0)=\phi_3(0)=0. \tag{71}$$

Понятно, что функции ϕ_1 могут зависеть только от безразмерных параметров. Единственным таким параметром является $(\mathbf{rv})/rv$, который в соответствии с (68) обращается в нуль для кругового движения.

Таким образом, уравнения (64), (65) с инвариантными функциями (71) имеют решения, отвечающие движению по окружности произвольного радиуса a и с произвольной частотой ω. Зафиксируем теперь f_1 так, чтобы получить нерелятивистскую гравитационную задачу двух тел: $f_1 = -\gamma/r^3$. Условие существования кругового решения имеет вид третьего закона Кеплера $\omega^2 = 2\gamma/a^3$.

Итак, в релятивистском и галилеевском случае ситуация довольно сходна. Существуют как решения, отвечающие произвольным a, ω, так и решения, при которых между a и ω существует определенная связь типа третьего закона Кеплера. Все же в релятивистском случае функциональный произвол значительно более широк.

5. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

При следующем выборе инвариантных функций f, g удается отыскать решения, отвечающие прямолинейному движению:

$$f_1 = \gamma_1/A, \quad f_3 = f_4 = 0, \quad g_1 = \gamma_2/\tilde{A}, \quad g_3 = g_4 = 0,$$

$$\tilde{A} = (1-\beta_2^2)^{-1/2}(\tilde{r} - \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{v}_2/c); \quad \gamma_1, \gamma_2 - \text{const}.$$

Тогда уравнения (8), (9) принимают вид

$$w_{1x} = \gamma_1 \frac{x_1 - \tilde{x}_2}{|x_1 - \tilde{x}_2|}(1-\beta_1^2)^{3/2}, \quad w_{2x} = \gamma_2 \frac{x_2 - \tilde{x}_1}{|x_2 - \tilde{x}_1|}(1-\beta_2^2)^{3/2}. \qquad (72)$$

Знак тильда означает, что соответствующие величины должны браться в моменты времени $t - r/c$ или $t - \tilde{r}/c$ (см. разд. 1). Нерелятивистский аналог уравнений (72) изучался Аппелем [37] (движение с постоянной силой взаимодействия). Поскольку релятивистский случай по сложности несущественно отличается от нерелятивистского, за исключением того, что скорость частицы не может превышать скорости света, рассмотрим свойства решений (72) очень кратко. При $x_1 > \tilde{x}_2$ решения выглядят следующим образом:

$$x_1(t) = c^2\gamma_1^{-1}(1+N_1^2)^{1/2} - c^2\gamma_1^{-1}(1-\beta_{10}^2)^{-1/2} + x_1^0,$$

$$\beta_1(t) = N_1(1+N_1^2)^{-1/2}, \quad N_1 \equiv \gamma_1 t/c + \beta_{10}(1-\beta_{10}^2)^{-1/2},$$

$$x_2(t) = x_2^0 - c^2\gamma_2^{-1}(1+N_2^2)^{1/2} + c^2\gamma_2^{-1}(1-\beta_{20}^2)^{-1/2},$$

$$\beta_2(t) = N_2(1+N_2^2)^{-1/2}, \quad N_2 \equiv -\gamma_2 t/c + \beta_{20}(1-\beta_{20}^2)^{-1/2}.$$

Здесь $x_1^0, x_2^0, v_1^0, v_2^0, x_1, x_2, v_1, v_2$ — положения и скорости частиц в начальный ($t=0$) и текущий моменты времени, $\beta_1 = v_1/c$, $\beta_2 = v_2/c$, $\beta_{10} = v_1^0/c$, $\beta_{20} = v_2^0/c$. При $x_2 > x_1$ справедливы аналогичные выражения. Для простоты будем считать массы частиц одинаковыми ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$). Рассмотрим сначала случай отталкивания ($\gamma > 0$). Пусть в начальный момент времени частицы покоятся и расположены симметрично относительно начала координат, $x_1^0 = -x_2^0 = x^0 > 0$. Тогда при $t > 0$ имеем

$$x_1(t) = -x_2(t) = x_0 + c^2\gamma^{-1}[(1+\gamma^2 t^2/c^2)^{1/2} - 1],$$

то есть частицы разлетаются с нарастающей скоростью, которая стремится к c при $t \to \infty$. Пусть теперь начальные скорости частиц одинаковы по абсолютной величине, но направлены к началу координат, $v_2^0 = -v_1^0 = v_0 > 0$. Тогда при $t > 0$ скорости частиц начинают уменьшаться по абсолютной величине. Если начальная скорость не превосходит $v_0^c = \dfrac{\sqrt{\gamma x_0(2+\gamma x_0/c^2}}{1+(\gamma x_0)/c^2}$, то частицы сближаются, останавливаются в момент времени $t = \dfrac{v_0}{\gamma}(1-\beta_0^2)^{-1/2}$ на расстоянии $\pm\left[x_0 - \dfrac{c^2}{\gamma}(1-\beta_0^2)^{-1/2} + \dfrac{c^2}{\gamma}\right]$ от начала координат, а затем разлетаются, как в предыдущем случае. Если же $v_0 > v_0^c$, то частицы «встречаются» в начале координат, проходят «друг через друга» и снова разлетаются. Более интересен случай притяжения, $\gamma < 0$. Пусть частицы вначале покоятся $x_{10} = -x_{20} = x_0 > 0$. Тогда при $t > 0$ частицы сближаются, проходят через начало координат в момент времени $t_0 = \sqrt{\dfrac{x_0}{|\gamma|}\left(2 + \dfrac{|\gamma|\, x_0}{c^2}\right)}$. После этого $x_1(t) - x_2(t) < 0$, то есть частица 1 левее частицы 2. При $t > t_0$ частицы замедляются, останавливаются при $t = 2t_0$ на расстоянии $\mp x_0$ от начала координат. После этого процесс повторяется. В итоге получается периодическое движение с периодом $4t_0$ и амплитудой x_0.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный подход Пуанкаре в значительной степени является феноменологическим. В самом деле, неизвестные произвольные функции могут выбираться либо при сравнении с экспериментом, либо с уравнениями Ньютона или ОТО. Недостатки такого подхода отчетливо выявляются при сравнении с общей теорией относительности Эйнштейна, в которой распределение материи определяет гравитационное поле и движение в нем. К сожалению, в ОТО до сих пор нет сколько-нибудь удовлетворительного решения и даже точной постановки задачи двух тел. В то же время в СТО существуют интересные возможности решения этой задачи.

О результатах по гравитационной задаче в данном подходе достаточно сказано во введении, поэтому не будем повторяться.

Далее, показано, что в релятивистской системе двух частиц, взаимодействующих чисто запаздывающими силами, возможны решения, отвечающие движению частиц одинаковой массы по одной и той же окружности произвольного радиуса a с произвольной постоянной угловой скоростью ω.

Найдены условия (47), которым должны удовлетворять релятивистские силы между частицами, чтобы такое движение было возможным. Даны примеры (56), (57) таких сил. Эти силы допускают значительный функциональный произвол. Его удается в значительной мере ограничить, потребовав перехода в нерелятивистском пределе в заданные ньютоновы уравнения. В частности, оказывается возможным написать релятивистские уравнения для двух частиц, переходящие в нерелятивистском пределе в гравитационные ньютоновы уравнения и допускающие решения, отвечающие релятивистскому движению по окружности с постоянной угловой скоростью. При этом за счет сужения первоначального произвола параметры движения a и ω оказываются не произвольными, но связанными соотношением (59) — релятивистским аналогом третьего закона Кеплера. Показано также, что при специальном выборе инвариантных функций можно получить решения, отвечающие прямолинейному движению.

До работы Дж.Синга [36] и наших [14] подобные стационарные движения были известны только для случая полусуммы запаздывающего и опережающего взаимодействий, а также тогда, когда первая частица взаимодействует со второй запаздывающей силой, а вторая с первой — опережающей. В этих случаях были получены интегральные законы сохранения энергии-импульса. Их наличие интерпретировалось как своеобразный баланс между запаздывающим и опережающим взаимодействием.

Возможность стационарного движения для чисто запаздывающего взаимодействия указывает на отсутствие излучения и позволяет надеяться на получение законов сохранения. Тем не менее этот вопрос остается пока открытым. Наконец, отметим, что данное рассмотрение не позволяет однозначным образом зафиксировать произвольные функции, входящие в уравнения Пуанкаре или им подобные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Newton J.S.** — Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Londini, 1686;
   Ньютон И. — Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. (Перевод с лат. изд., 1871, изд. В.Томсон, Г.Блакбурн);
   Newton I. — Principia. Berkeley, Univ. of California Press, 1934.
2. **Poincaré H.** — Sur la dinamique de l'électron. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1906, vol.21, p.129;
   Пуанкаре А. — Избранные труды: Пер. с франц. М.: Наука, 1974, т.3, с.433.
3. **Hill R.N.** — J.Math. Phys., 1967, vol.8, p.201, 1756;
   Jordan T.F. — Phys. Rev., 1975, vol.D11, p.2807; ibid, 1978, vol.D17, p.2844; The Theory of Action at a Distance in Relativistic Particle Dynamics. Ed. by E.H.Kerner. New York, Gordon and Breach, 1972.
4. **Currie D.G., Jordan T.F.** — Interactions in Relativistic Classical Particle Mechanics. In: Lectures at the Theoretical Physics Inst., New York, Gordon and Breach, 1968.
5. **Van Dam H., Wigner E.P.** — Phys. Rev., 1965, vol.138, p.1576; ibid, 1966, vol.142, p.838;
   Katz A. — J. Math. Phys., 1969, vol.10, p.1929, 2215;
   Pearle P.M. — Phys. Rev., 1968, vol.168, p.1429;
   Degasperis A. — Phys. Rev., 1971, vol.D3, p.273.
6. **Wheeler J.A., Feynman R.P.** — Rev. Mod. Rhys., 1949, vol.21, p.425.
7. **Bruhns B.** — Phys. Rev., 1973, vol.D8, p.2370;
   Fahnline D.W. — J. Math. Phys., 1977, vol.18, p.1006; ibid, 1979, vol.20, p.1118; ibid, 1981, vol.22, p.1640.
8. **Dettman J.W., Schild A.** — Phys. Rev., 1954, vol.95, p.1057;
   Schild A. — Phys. Rev., 1963, vol.131, p.2762;
   Anderson C.M., Bayer H.C. — Ann. Phys., New York, 1970, vol.60, p.67.
9. **Wheeler J.A., Feynman R.P.** — Rev. Mod. Phys., 1945, vol.17, p.157;
   Pegg D.T. — Rep. Progr. Phys., 1975, vol.38, p.1339.
10. **Driver R.D.** — Ann. Phys., New York, 1969, vol.21, p.122;
    Driver R.D., Norris M.J. — ibid, 1967, vol.42, p.347;
    Driver R.D. — Phys. Rev., 1969, vol.178, p.2051;
    Zhdanov V.I. — Int. J. Theor. Phys., 1976, vol.15, p.157;
    Hsing D.K. — Phys. Rev., 1977, vol.D16, p.974;
    Murdock J.A. — Ann. Phys., New York, 1979, vol.119, p.90.

11. **Голубенков В.Н., Смородинский Я.А.** — ЖЭТФ, 1956, т.31, с.330.
12. **Barker B.M., O'Connel R.F.** — Ann. Phys., New York, 1980, vol.129, p.358; Can. J. Phys., 1980, vol.58, p.1659;
Persides S., Pascalis J. — Ann. Phys., New York, 1974, vol.87, p.161;
Herman W.N., Havas P. — Phys. Rev., 1978, vol.D17, p.1985.
13. **Визгин В.П.** — Релятивистская теория тяготения. М.: Наука, 1981.
14. **Afanasiev G.N., Asanov R.A.** — In: Proc. of the Int. Seminar «Group Theoretical Methods in Physics», Zvenigorod, 1979. М.: Наука, 1980, т.2, с.117;
Afanasiev G.N., Asanov R.A. — Ann. d. Physik Leipz., 1981, B.38, S.169;
Асанов Р.А., Афанасьев Г.Н. — Препринт ОИЯИ Р2-85-357, Дубна, 1985.
15. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** — Теория поля. М.: Наука, 1973;
Landau L., Lifshitz E. — The Classical Theory of Fields. Oxford, Pergamon Press, 1985.
16. **Minkowski H.** — Gott. Nachr., 1907, p.472.
17. **Брежнев B.C.** — В кн.: Тр. Всесоюзн. НИИ оптикофизических измерений, теор. и мат. физика, М.: ВНИИОФИ, 1972, сер.А, вып.1, с.139.
18. **Kerner E.H.** — (см. [3]);
Droz-Vincent Ph. — Ann. Inst. H.Poincaré, 1977, vol.27, p.407;
Martin J., Sanz J.L. — J. Math. Phys., 1977, vol.19, p.1887;
Wray J.C. — Phys. Rev., 1969, vol.D1, p.2212.
19. **Einstein A.** — Ann. d. Physik., 1911, B.35, S.898 (Перевод в кн.: Эйнштейн А. — Собрание научных трудов, М.: Наука, 1965, т.1, с.165).
20. **Birkhoff G.D.** — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1943, vol.29, No.8, p.231.
21. **Barajas A.** — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1944, vol.30, (No.3), p.54;
Barajas A. et al. — Phys. Rev., 1944, vol.66, p.138.
22. **Will C.M.** — Int. J. Mod. Phys. D, 1992, vol.1, No.1, p.13;
Will C.M. — Science 1990, vol.250, No.4982, p.770;
Will C.M. — Nature, 1990, vol.47, No.6293, p.516.
23. **Møller K.** — The Theory of Relativity. Oxford, Clarendon Press, 1972 (Пер.: Меллер К. — Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975).
24. **Логунов А.А.** — Лекции по теории относительности. М.: Изд. МГУ, 1984.
25. **Логунов А.А.** — Основные принципы релятивистской теории гравитации. М.: Изд. МГУ, 1992;
Логунов А.А. — УФН, 1995, т.165, №2, с.187.
26. **Петров А.З.** — В сб.: Гравитация и теория относительности. Изд-во Казанского университета, 1968, №4—5, с.7,22; там же, 1969, №6, с.7; 1970, №7, с.3;
Шавохина Н.С. — там же, 1970, №7, с.135.
27. **Wheeler J.A., Feynman R.P.** — Rev. Mod. Phys., 1945, vol.17, p.157; ibid, 1949, vol.21, p.425.
28. **Schild A.** — Phys. Rev., 1963, vol.131, p.2762.
29. **Andersen C.M., Bayer H.C.** — Ann. of Phys., 1970, vol.60, p.67.
30. **Bruhns B.** — Phys. Rev., 1973, vol.D8, p.2370.
31. **Synge J.L.** — Proc. Roy. Soc., 1940, vol.A177, p.118.
32. **Anderson J.L.** — Principles of Relativity Physics. New York, Acad. Press, 1967.
33. **Черников Н.А., Шавохина Н.С.** — Препринты ОИЯИ, Р2-10375, Дубна, 1977; Р2-11295, 1978; Р2-12813, 1979.

34. **Woodcock H.W., Havas P.** — Phys. Rev., 1972, vol.D6, p.3422.
35. **Treder H.J.** — Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip. Berlin, Akad. Verlag, 1971;
Treder H.J. — Die Relativität der Trägheit. Berlin, Akad. Verlag, 1972 (Переводы: Тредер Г.Ю. — Теория гравитации и принцип эквивалентности. М.: Атомиздат, 1973; Тредер Г.Ю. — Относительность инерции. М.: Атомиздат, 1975).
36. **Synge J.L.** — In: Magic Without Magic. Ed. J.A.Wheeler, San Francisco, Freeman, 1972, p.117.
37. **Appell P.** — Traité de mécanique rationelle. Paris, Gauthier — Villars, 1902, vol.1, 1953 (Перевод: Аппель П. — Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960, т.1, с.335).