

ПРОБЛЕМА ФАЗЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

*Б.К.Мурзахметов**, *А.В.Чижов*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор современного состояния проблемы описания фазы квантованного электромагнитного поля. Подробно изложены два подхода к получению фазовых распределений, используемых для вычисления квантово-механических средних от фазовых наблюдаемых. Один из подходов основан на использовании эрмитова оператора фазы и его собственных состояний. В другом подходе фазовые средние вычисляются при помощи фазовых распределений, получаемых посредством интегрирования функций распределения квазивероятности по радиальной переменной. На примере конкретных неклассических состояний света проводится сравнение этих двух подходов.

A survey of a modern status of phase description of the quantized electromagnetic field is given. Two approaches for obtaining phase distributions used in calculation of quantum-mechanics averages over phase observables are considered in detail. One of the approaches is based on using a Hermitian phase operator and its eigenstates. In another approach phase averages are calculated with the help of phase distributions obtained by integration of quasiprobability distribution functions over a radial variable. Taking specific nonclassical states of light as an example, a comparison of the two approaches is made.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике традиционной математической моделью одной моды электромагнитного поля является квантовый гармонический осциллятор (Дирак, 1927 [1]). Собственные состояния оператора энергии осциллятора образуют базис в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Успехи квантовой электродинамики, основанной на подходе Дирака, неоспоримы. Однако в течение долгого времени природа фазы квантованного поля оставалась неясной. Модель осциллятора позволяет легко определить

*Постоянный адрес: 480082, Казахстан, г. Алма-Ата, Институт ядерной физики, Национальный ядерный центр РК

эрмитов оператор энергии (пропорциональный оператору числа частиц \hat{N} [2]), но в рамках этой модели не удастся определить соответствующий эрмитов оператор фазы [3—5]. Это ставит фазовую переменную в почти уникальную позицию: классическая наблюдаемая не имеет соответствующего эрмитова оператора (похожие проблемы возникают в связи с квантовым описанием угла поворота [5]).

Пока большинство оптических экспериментов имело дело с тепловыми источниками, испускающими свет в хаотическом или вакуумном состояниях со случайным распределением фазы, проблема квантового описания фазовой переменной была не столь важной. Однако в связи с изобретением и широким использованием в экспериментах мазеров и лазеров, а также интенсивным изучением в последнее десятилетие сжатых состояний света, возобновился интерес к этой проблеме. Дело в том, что лазер, работающий при значительном превышении порога генерации, излучает свет, находящийся в когерентном возбужденном состоянии. Кроме того, высокая интенсивность лазерного излучения позволяет исследовать нелинейные процессы взаимодействия света с веществом, а именно в таких процессах возможна генерация сжатых состояний света. Когерентное и сжатое состояния уже не имеют равномерного распределения по фазе и проявляют нетривиальные фазовые свойства.

Первая попытка построить эрмитов оператор фазы принадлежит Дираку. В своей основополагающей статье [2] по квантованию электромагнитного поля он постулировал существование эрмитова оператора фазы $\hat{\phi}$, сопряженного оператору числа фотонов \hat{N} . Он предположил, что оператор числа фотонов и оператор фазы должны удовлетворять каноническому коммутационному соотношению

$$[\hat{N}, \hat{\phi}] = i, \quad (1)$$

и что операторы уничтожения \hat{a} и рождения \hat{a}^\dagger одномодового электромагнитного поля можно представить в полярной форме:

$$\hat{a} = \exp(i\hat{\phi})\sqrt{\hat{N}}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{N}}\exp(-i\hat{\phi}). \quad (2)$$

Трудности этого подхода были ясно показаны Сасскиндом и Глоговером [4]. Во-первых, применяя соотношение неопределенностей Гейзенберга к коммутатору (1), получим

$$\Delta\hat{N}\Delta\hat{\phi} \geq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что состояние с хорошо определенным числом фотонов будет иметь неопределенность фазы больше, чем 2π . Это признак того, что коммутатор (1) не учитывает свойства периодичности фазы. Во-вторых,

при вычислении матричных элементов коммутатора (1) в базисе фоковских состояний возникает несоответствие типа « $0 = 1$ »:

$$(n' - n) \langle n' | \hat{\phi} | n \rangle = i\delta_{nn'}.$$

Но основная трудность заключается в явной неунитарности оператора $\hat{U} = \exp(i\hat{\phi})$, в чем можно легко убедиться, комбинируя коммутационное соотношение $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ и выражения (2). Это дает $\hat{U}\hat{N}\hat{U}^\dagger = \hat{N} + 1$, что нарушает унитарность. Таким образом, подход Дирака не позволяет построить эрмитов оператор фазы $\hat{\phi}$.

Для того чтобы найти подходящие квантовые переменные, рассмотрим классическую проблему осциллятора в терминах скобок Пуассона. Переменные действия J и угла ϕ вводятся следующим преобразованием (Лернер, 1966 [6]):

$$p = (2m\omega J)^{1/2} \sin \phi(t),$$

$$x = (2J/m\omega)^{1/2} \cos \phi(t).$$

Гамильтониан системы не зависит от ϕ :

$$H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2 = \omega J.$$

Следовательно, J является константой, тогда как $\sin \phi$ и $\cos \phi$ зависят от времени:

$$\frac{d}{dt} \cos \phi(t) = \{ \cos \phi(t), H \} = \omega \sin \phi(t),$$

$$\frac{d}{dt} \sin \phi(t) = \{ \sin \phi(t), H \} = -\omega \cos \phi(t). \quad (4)$$

Требование периодичности фазовой переменной привело к идее искать операторные аналоги $\cos \phi(t)$ и $\sin \phi(t)$, а не самой функции $\phi(t)$ (Люиселл, 1963 [3]). Согласно принципу соответствия

$$\{A, B\} \leftrightarrow (1/i\hbar) [\hat{A}, \hat{B}].$$

Классическим фазовым переменным в (4) должны соответствовать операторы «косинуса» \hat{C} и «синуса» \hat{S} , удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d\hat{C}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{C}, \hat{H}] = \omega \hat{S},$$

$$\frac{d\hat{S}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{S}, \hat{H}] = -\omega \hat{C}. \quad (5)$$

Учитывая, что $\hat{H} = \hat{N}\hbar\omega$, приводим (5) к виду

$$[\hat{C}, \hat{N}] = i\hat{S}, \quad [\hat{S}, \hat{N}] = -i\hat{C}. \quad (6)$$

Для того чтобы решить уравнения (6), Сасскинд и Глоговер ввели экспоненциальные операторы

$$\hat{E}_{\pm} = \hat{C} \mp i\hat{S}. \quad (7)$$

Так как операторы \hat{C} и \hat{S} предполагаются эрмитовыми, то

$$\hat{E}_{\pm} = (\hat{E}_{\mp})^{\dagger}.$$

В классическом пределе \hat{E}_{\pm} соответствуют функциям $\exp(\mp i\phi)$, где ϕ — классическая фазовая переменная.

Из уравнений (6) и (7) следует, что

$$[\hat{E}_{\mp}, \hat{N}] = \pm \hat{E}_{\mp}.$$

Отсюда находим

$$\hat{N}(\hat{E}_{\pm} |n\rangle) = \hat{E}_{\pm}(\hat{N} \pm 1) |n\rangle = (n \pm 1) (\hat{E}_{\pm} |n\rangle).$$

Чтобы избежать отрицательных собственных значений оператора \hat{N} , Сасскинд и Глоговер ввели дополнительное условие $\hat{E}_{-} |0\rangle = 0$.

Таким образом, операторы \hat{E}_{\pm} являются, соответственно, повышающим и понижающим операторами:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{+} |n\rangle &= |n+1\rangle, \\ \hat{E}_{-} |n\rangle &= |n-1\rangle, \\ \hat{E}_{-} |0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Вычисляя матричные элементы операторов $\hat{E}_{\pm} \hat{E}_{\mp}$ в базисе фоковских состояний, легко показать, что операторы Сасскинда — Глоговера являются не унитарными, а лишь «односторонне унитарными» [5]:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{-} \hat{E}_{+} &= \hat{I}, \\ \hat{E}_{+} \hat{E}_{-} &= \hat{I} - |0\rangle\langle 0|. \end{aligned} \quad (9)$$

Причиной тому является обрыв в нуле спектра собственных значений оператора \hat{N} . Неунитарность операторов Сасскинда — Глоговера приводит к проблемам интерпретации описываемой ими фазы. В частности, операторы «косинуса» и «синуса» не коммутируют:

$$[\hat{C}, \hat{S}] = (1/2i) (\hat{E}_{-} \hat{E}_{+} - \hat{E}_{+} \hat{E}_{-}) = (1/2i) |0\rangle\langle 0|,$$

и, следовательно, не могут быть операторными функциями общего оператора фазы. Кроме того, не выполняется тригонометрическое тождество $\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = \hat{I} - |0\rangle\langle 0|$. И, наконец, вакуумные средние от операторов \hat{C}^2 и \hat{S}^2 равны $1/4$, а не $1/2$, как должно быть для вакуума — состояния с равномерно распределенной фазой. Заметим, однако, что эти проблемы существенны лишь для слабых полей. В случае сильных полей операторы Сасскинда — Гловера ведут себя хорошо, они были широко использованы при исследовании фазы в разных проблемах квантовой оптики [5], [7—11].

Таким образом, попытки построить эрмитов оператор фазы в бесконечномерном гильбертовом пространстве потерпели неудачу. Сасскинд и Гловер [4] подчеркивали, что главная трудность в правильном определении фазового оператора лежит в ограниченности снизу спектра собственных значений оператора числа фотонов. Существуют два возможных способа преодоления этой трудности. Первый способ — расширение спектра собственных значений оператора энергии гармонического осциллятора путем присоединения к нему состояний с отрицательным числом фотонов [12]. Однако такие состояния не имеют физического смысла, и для унитарных фазовых операторов, которые можно определить в этом подходе, не существует схемы измерения. Другим способом решения проблемы полуограниченности спектра гармонического осциллятора является рассмотрение пространства состояний гармонического осциллятора конечной размерности. Некоторыми авторами (Гаррисон и Вонг [13], Попов и Ярунин [14,15], Леви-Леблонд [16], Сантанам [17,18], Бергоу и Энглерт [19]) были предприняты попытки построения эрмитова оператора фазы в конечномерном пространстве с последующим предельным переходом к бесконечномерному гильбертову пространству. В конечномерном пространстве удается построить эрмитов оператор фазы $\hat{\phi}_r$ и унитарный оператор $\hat{U}_r = \exp\{i\hat{\phi}_r\}$, который является просто экспоненциальной функцией от $i\hat{\phi}_r$ (здесь r — размерность конечномерного пространства). Операторы, действующие в бесконечномерном гильбертовом пространстве, могут быть получены вычислением матричных элементов операторов $\hat{\phi}_r$ и \hat{U}_r для конечных фоковских состояний и последующим взятием предела $r \rightarrow \infty$. Эта процедура приводит к новым операторам $\hat{\phi}$ и \hat{V} (полученным как пределы от $\hat{\phi}_r$ и \hat{U}_r соответственно). Однако при применении предельной процедуры к самому пространству и к операторам, действующим в нем, возникали определенные проблемы. В отличие от его аналога в конечномерном пространстве, оператор \hat{V} является не унитарным, а лишь односторонне унитарным, как

операторы Сасскинда — Глоговера (9). Оператор \hat{V} не коммутирует со своим эрмитово сопряженным оператором \hat{V}^\dagger , и, следовательно, они не являются операторными функциями общего оператора фазы. В частности, оператор \hat{V} не может быть получен взятием экспоненты от $i\hat{\phi}_r$. Это является следствием способа предельного перехода к бесконечномерному пространству: предел операторной функции от $\hat{\phi}_r$ не является тем же самым, что операторная функция соответствующего предела от $\hat{\phi}_r$ [20]. Отсутствие функциональных соотношений для фазовых операторов в гильбертовом пространстве приводит к проблемам при вычислении различных средних. Так, дисперсия фазы для фоковских состояний выражается формулой [15]:

$$\langle (\Delta\phi)^2 \rangle \equiv \langle n | (\hat{\phi} - \langle \hat{\phi} \rangle)^2 | n \rangle = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Для больших n дисперсия стремится к величине $\pi^2/3$, что совпадает с ожидаемой величиной дисперсии для состояния с равномерно распределенной фазой. Однако для малых n дисперсия меньше этой величины и в предельном случае вакуумного состояния равна лишь половине величины, характерной для состояния со случайно распределенной фазой.

Альтернативный формализм построения эрмитова оператора фазы в конечномерном гильбертовом пространстве был недавно предложен Пеггом и Барнеттом [21—23]. В этом подходе предельный переход к бесконечномерному пространству производится после вычисления средних значений функций фазового оператора. Важным достоинством этого формализма является возможность введения фазового распределения, что оказалось весьма удобным при описании фазовых свойств неклассических состояний электромагнитного поля.

Существует также подход к описанию фазовых свойств электромагнитного поля, не связанный с самим понятием оператора фазы и его собственных состояний. Шапиро, Шепардом и Уонгом был предложен фазовый формализм, основанный на использовании квантовой теории оценок и операторных вероятностных мер [26]. Используя в качестве базиса для операторной вероятностной меры собственные состояния фазовых операторов Сасскинда — Глоговера, они, в частности, показали, что для физических состояний, т.е. состояний с конечным средним числом фотонов, их подход дает такие же результаты, что и подход Пегга — Барнетта [27].

Другой подход основывается на использовании функций распределения квазивероятности. Фазовые распределения в этом подходе получают путем интегрирования функций распределения квазивероятности, таких как Q -функция, функция Вигнера и \mathcal{P} -функция Глаубера — Сударшана, по ра-

диальной переменной. Рассмотрение проблем определения соответствующих функций фазового распределения можно найти в работах [24,25].

Еще один подход к проблеме описания фазы, называемый операционным, был предложен в экспериментах Но, Фужера и Манделя [28—31]. Идея этого подхода заключается в использовании различных схем измерения для определения операторов косинуса и синуса разности фаз двух электромагнитных полей, подаваемых на входы гомодинного детектора. Вид определенных таким образом фазовых операторов существенно зависит от выбора схемы измерения. Это привело авторов к заключению, что не существует однозначно определенного фазового оператора. Однако, несмотря на принципиально иную идею в определении оператора фазы в данном подходе, в недавних работах [32—34] было указано на соответствие фазового распределения Но — Фужера — Манделя распределению, получаемому интегрированием Q -функции.

Совсем недавно был разработан экспериментальный метод, названный оптической гомодинной томографией [35—37], который позволяет получить информацию о фазе поля по восстановленной матрице плотности квантового состояния. Теоретической предпосылкой этого метода явилась работа Фогеля и Рискена [38], в которой рассматривалась проблема косвенного определения функции Вигнера в схеме гомодинного детектирования. Теоретические обсуждения способов измерения различных фазовых распределений с помощью данного метода содержатся в работах [39,40].

В данном обзоре основное внимание будет уделено рассмотрению двух широко обсуждаемых в последнее время подходов к описанию фазы — формализму Пегга — Барнетта и квазивероятностному подходу. В разд.2 мы подробно рассмотрим основные принципы фазового формализма Пегга — Барнетта, построение эрмитова оператора фазы и функции фазового распределения. Раздел 3 посвящен проблемам введения фазовых распределений состояний электромагнитного поля, связанных с функциями распределения квазивероятности. В этом разделе мы укажем также на связь между операторным и квазивероятностным подходами. В разд.4 на примере конкретных состояний электромагнитного поля дается сравнение этих двух подходов к описанию фазы поля.

Проблема описания фазы электромагнитного поля по-прежнему привлекает к себе внимание исследователей, и число ссылок на литературу, посвященную этому вопросу, постоянно растет. Поэтому в данном обзоре мы не ставили целью привести полный список литературы, а ограничились лишь необходимым количеством ссылок, требуемых для ознакомления с этой проблемой. Различные аспекты проблемы фазы можно найти в недавно появившихся обзорах Барнетта и Дальтона [41], а также Танася, Мирановича и Ганцога [42].

2. ФАЗОВЫЙ ФОРМАЛИЗМ ПЕГГА — БАРНЕТТА

2.1. Эрмитов оператор фазы. При построении эрмитова оператора фазы Пегг и Барнетт [21—23] исходили из существования состояний с точно определенной фазой в гильбертовом пространстве:

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta) |n\rangle, \quad (10)$$

где $|n\rangle$ — фокковские состояния, покрывающие $(s+1)$ -мерное пространство состояний Ψ . Состояние с нулевой фазой выбирается как состояние, в котором все фокковские состояния в разложении (10) имеют одинаковые веса. Предельный переход необходим для нормирования состояний. Главная идея Пегга и Барнетта состоит в том, что сначала надо работать в $(s+1)$ -мерном пространстве Ψ (где s может быть сколь угодно большим), и только после того, как все физические величины (средние значения, дисперсии и т.п.) вычислены, переходить к пределу $s \rightarrow \infty$.

Параметр θ в фазовом состоянии (10) может принимать любое действительное значение, но различные фазовые состояния $|\theta\rangle$ существуют для всех значений θ только в заданном интервале $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$, где θ_0 — относительная фаза. Существует несчетное множество различных фазовых состояний даже в конечномерном пространстве состояний Ψ . Фазовые состояния образуют переполненный базис и не являются ортогональными. Однако нетрудно показать, что состояния со значениями θ , отличающимися друг от друга на величину $2\pi/(s+1)$, умноженную на целое число, ортогональны. Следовательно, задавая относительное состояние $|\theta_0\rangle$:

$$|\theta_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_0) |n\rangle,$$

можно найти полный набор $(s+1)$ ортонормированных фазовых состояний:

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s \exp(in\theta_m) |n\rangle, \quad (m=0, 1, \dots, s), \quad (11)$$

где $(s+1)$ значений θ_m определяются формулами

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{s+1}, \quad (m=0, 1, \dots, s).$$

Набор фазовых состояний $|\theta_m\rangle$ можно использовать как ортонормированный базис в пространстве Ψ . Состояния с определенным числом фотонов $|n\rangle$ можно разложить по базисным фазовым состояниям $|\theta_m\rangle$:

$$|n\rangle = \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \exp(-in\theta_m) |\theta_m\rangle. \quad (12)$$

Уравнения (11) и (12) выражают взаимосвязь между фазовым и фоковским состояниями. Из них следует, что система, которая находится в состоянии с определенным числом фотонов, может быть найдена с равной вероятностью в любом фазовом состоянии $|\theta_m\rangle$, а система, находящаяся в фазовом состоянии, может быть найдена с равной вероятностью в любом состоянии с определенным числом фотонов.

На основе ортонормированных фазовых состояний (11) можно построить оператор фазы следующим образом:

$$\hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|.$$

Очевидно, $\hat{\phi}_\theta$ является эрмитовым оператором и удовлетворяет уравнению

$$\hat{\phi}_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle.$$

Унитарный оператор фазы $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ можно определить как экспоненциальную функцию от эрмитова оператора фазы $\hat{\phi}_\theta$. Он будет коммутировать с оператором $\exp(-i\hat{\phi}_\theta)$. Эти два экспоненциальных оператора фазы имеют общие собственные векторы:

$$\exp(\pm i\hat{\phi}_\theta) |\theta_m\rangle = \exp(\pm i\theta_m) |\theta_m\rangle.$$

Свойства оператора $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ определяются его действием на фоковское состояние

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\phi}_\theta) |n\rangle &= \exp\left[i \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \right] |n\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \exp[-i(n-1)\theta_m] |\theta_m\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

где использовано разложение (12). Для $n > 0$ результирующим состоянием (13) будет просто фоковское состояние $|n-1\rangle$:

$$\exp(i\hat{\phi}_\theta) |n\rangle = |n-1\rangle.$$

Для вакуумного состояния получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^s \exp(i\theta_m) | \theta_m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \exp[i(s+1)\theta_0] \sum_{m=0}^s \exp(-is\theta_m) | \theta_m \rangle = \\ &= \exp[i(s+1)\theta_0] | s \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому в представлении фоковских состояний $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ имеет вид

$$\exp(i\hat{\phi}_\theta) = \sum_{n=0}^{s-1} | n \rangle \langle n+1 | + \exp[i(s+1)\theta_0] | s \rangle \langle 0 |. \quad (14)$$

В пределе $s \rightarrow \infty$ первый член в (14) совпадает с оператором Сасскинда — Глоговера. Необходимо подчеркнуть, что, в отличие от унитарного оператора Пегга — Барнетта, экспоненциальный оператор Сасскинда — Глоговера

$$\hat{E}_- = \sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \langle n+1 |$$

определен как целое и не является унитарным.

Из унитарного оператора фазы $\exp(i\hat{\phi}_\theta)$ можно построить эрмитовы операторы косинуса и синуса. Эти операторы обладают свойствами, требуемыми для описания фазы. В частности, они удовлетворяют соотношениям

$$\cos^2 \hat{\phi}_\theta + \sin^2 \hat{\phi}_\theta = 1,$$

$$[\cos \hat{\phi}_\theta, \sin \hat{\phi}_\theta] = 0,$$

$$\langle n | \cos^2 \hat{\phi}_\theta | n \rangle = \langle n | \sin^2 \hat{\phi}_\theta | n \rangle = \frac{1}{2}.$$

В отличие от случая фазового оператора Сасскинда — Глоговера последнее соотношение справедливо и для вакуумного состояния. Это согласуется с тем, что фаза для вакуумного состояния, как состояния с определенным числом фотонов, случайно распределена. Среднее значение и дисперсия фазы в фоковском состоянии $| n \rangle$ имеют вид

$$\langle n | \hat{\phi}_\theta | n \rangle = \theta_0 + \pi,$$

$$\langle (\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3},$$

как и должно быть для состояний со случайно распределенной фазой.

2.2. Фазовое распределение. Важным достоинством формализма Пегга — Барнетта является возможность введения фазового распределения веро-

ятности. Фазовые состояния образуют полный ортонормированный базис в пространстве состояний Ψ , и поэтому вероятность нахождения системы в данном фазовом состоянии мы можем записать в виде

$$P(\theta_m) = \langle \theta_m | \hat{\rho} | \theta_m \rangle,$$

где $\hat{\rho}$ — матрица плотности, описывающая состояние системы. Мы будем рассматривать главным образом «физические» состояния [23], которые можно получить (хотя бы в принципе) в реальном эксперименте. Используя формализм Пегга — Барнетта, мы выведем некоторые общие формулы для «физических» состояний, которые позволяют описывать фазовые свойства оптических полей весьма эффективным образом.

Рассмотрим разложение чистого квантового состояния поля по фоковскому базису:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^s c_n |n\rangle. \quad (15)$$

Используя соотношение (12), можно получить разложение этого состояния по базису фазовых состояний:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_n \sum_m c_n \exp(-in\theta_m) |\theta_m\rangle.$$

Фазовое распределение вероятности определяется формулой [21—23]:

$$|\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \left| \sum_n c_n \exp(-in\theta_m) \right|^2. \quad (16)$$

Имея фазовое распределение, можно вычислить среднее значение и дисперсию фазы:

$$\langle \psi | \hat{\phi}_\theta | \psi \rangle = \sum_m \theta_m |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2,$$

$$\langle (\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 \rangle = \sum_m (\theta_m - \langle \hat{\phi}_\theta \rangle)^2 |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2.$$

Будем называть состояние $|\psi\rangle$ состоянием с частично определенной фазой, если ее амплитуду можно написать в виде

$$c_n = b_n e^{in\varphi}. \quad (17)$$

Тогда фазовое распределение вероятности (16) принимает вид

$$|\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} \left| \sum_n b_n \exp[in(\varphi - \theta_m)] \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)(\varphi - \theta_m)]. \quad (18)$$

Среднее значение и дисперсия оператора $\hat{\Phi}_\theta$ будут зависеть от выбираемого значения θ_0 . Для состояний с частично определенной фазой более удобным и физически ясным способом выбора θ_0 является симметризация фазового окна по отношению к фазе φ . Это означает, что

$$\theta_0 = \varphi - \frac{\pi s}{s+1}, \quad (19)$$

и после введения нового индекса фазы

$$\mu = m - \frac{s}{2} \quad (20)$$

для фазового распределения вероятности (18) получаем формулу

$$|\langle \theta_\mu | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} \sum_{n>k} b_n b_k \cos \left[(n-k) \frac{2\pi\mu}{s+1} \right], \quad (21)$$

где μ пробегает все целые значения от $-s/2$ до $s/2$. Поскольку распределение (21) симметрично по отношению к μ , мы, согласно (19)—(21), непосредственно получаем

$$\langle \psi | \hat{\Phi}_\theta | \psi \rangle = \varphi.$$

Это является общим и очень важным результатом для состояний с частично определенной фазой, которое можно прямо применить, например, для любого когерентного состояния. При таком выборе относительной фазы θ_0 дисперсия фазового оператора имеет, в частности, простой вид

$$\langle (\Delta \hat{\Phi}_\theta)^2 \rangle = \frac{4\pi^2}{(s+1)^2} \sum_{\mu=-s/2}^{s/2} \mu^2 |\langle \theta_\mu | \psi \rangle|^2. \quad (22)$$

Для «физических» состояний можно ввести непрерывную функцию распределения фазы, переходя к непрерывным переменным. Поскольку $(s+1)/2\pi$ есть плотность фазовых состояний, определим функцию распределения фазы выражением

$$P(\theta_\mu) = \frac{s+1}{2\pi} |\langle \theta_\mu | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)\theta_\mu] \right\}, \quad (23)$$

где

$$\theta_\mu = \frac{2\pi}{s+1} \mu, \quad \mu = -s/2, \dots, s/2.$$

Заметим, что m -й момент оператора числа фотонов \hat{N} в пределе $s \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\langle \psi | \hat{N}^m | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^m |b_n|^2. \quad (24)$$

Поскольку для «физических» состояний значение (24) конечно для любого конечного m , остаток ряда в правой части (24) $\sum_{n=t}^{\infty} n^m |b_n|^2$ исчезает в пределе $t \rightarrow \infty$. Математически это означает, что для любого заданного $\epsilon > 0$ мы можем найти число $M(\epsilon)$ такое, что для всех $t > M(\epsilon)$

$$\sum_{n=t}^{\infty} n^m |b_n|^2 < \epsilon.$$

Поэтому всегда найдется такое число t , что $b_n \rightarrow 0$ для всех $n > t$. Поскольку в формализме Пегга — Барнетта параметр s является конечным, но сколь угодно большим, выбирая значение $s > t$, мы спокойно можем заменить верхний предел суммы в (23) на ∞ (т.е. перейти к пределу $s \rightarrow \infty$). В этом пределе можно ввести непрерывную фазовую переменную заменой $\theta_\mu = \mu 2\pi / (s + 1)$ через θ и $2\pi / (s + 1)$ через $d\theta$. Тогда мы получим следующее общее выражение для фазового распределения вероятности:

$$P^{(PB)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k}^{\infty} b_n b_k \cos [(n-k)\theta] \right\}, \quad (25)$$

с нормировкой

$$\int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta) d\theta = 1.$$

Следует подчеркнуть, что мы ввели функцию распределения фазы (25) исключительно для «физических» состояний, с которыми обычно приходится иметь дело в реальных физических ситуациях. В общем случае, если состояние не является «физическим», надо использовать распределение (23).

Теперь нетрудно вычислить среднее значение любой функции от оператора фазы $f(\hat{\phi}_\theta)$ с помощью простого интегрирования:

$$\langle f(\hat{\phi}_\theta) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta) f(\theta) d\theta,$$

где $P^{(PB)}(\theta)$ определяется выражением (25). Это означает, что если известна функция распределения $P^{(PB)}(\theta)$, то все квантово-механические фазовые средние можно вычислить с помощью этой функции классическим образом. В частности, формулу (22) для дисперсии оператора фазы можно переписать в виде

$$\langle (\Delta \hat{\Phi}_\theta)^2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 P^{(PB)}(\theta) d\theta.$$

После интегрирования по θ получаем

$$\langle (\Delta \hat{\Phi}_\theta)^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n > k} b_n b_k \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^2}.$$

Слагаемое $\pi^2/3$ представляет собой значение дисперсии для равномерно распределенной фазы.

Формализм Пегга — Барнетта открыл широкие возможности для исследования фазовых свойств оптических полей. Этот формализм позволяет вычислять не только такие «традиционные» фазовые характеристики, как косинус и синус фазы, но и функцию фазового распределения, среднее значение и дисперсию фазы для данной моды и корреляцию фаз разных мод, что было невозможно для других подходов. В последние годы формализм Пегга — Барнетта широко использовался в приложении к различным проблемам квантовой оптики. В частности, были исследованы фазовые свойства фоковского [43], когерентного [43], одномодового сжатого [44], парного когерентного [45], двухмодового сжатого вакуумного [46,47] состояний, и когерентного света, взаимодействующего с двухуровневым атомом [48]. Исследована также квантовая динамика фазы в некоторых нелинейных оптических системах [49—54]. С использованием формализма Пегга — Барнетта построены состояния с минимальной неопределенностью число—фаза [55] и с минимальным фазовым шумом [56].

3. КВАЗИВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ФАЗЫ

3.1. Функции распределения квазивероятности. Статистическое описание микроскопической системы обычно формулируется в терминах ее оператора плотности $\hat{\rho}$. Известное выражение для статистического среднего значения измерений микроскопической наблюдаемой \hat{F} имеет вид

$$\langle \hat{F} \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{F} \}.$$

Для определенных, важных в физике, классов операторов \hat{F} возможна запись их средних значений в виде интегралов, подобных интегралам по фазовому пространству в классической теории вероятности [57,58]. При этом статистическая информация переходит от оператора плотности $\hat{\rho}$ к весовой функции $w(\alpha)$, комплексный аргумент которой представляет точку в фазовом пространстве системы. Среднее значение $\langle \hat{F} \rangle$ записывается в виде интеграла от произведения весовой функции $w(\alpha)$ и функции $f(\alpha)$, соответствующей оператору \hat{F} :

$$\text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{F} \} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha) f(\alpha) d^2\alpha.$$

Интегрирование производится по всем возможным состояниям системы, т.е. по всей комплексной плоскости α . Функцию $w(\alpha)$ не всегда можно интерпретировать как распределение вероятности, но она играет настолько похожую роль, что ее называют функцией распределения квазивероятности.

В силу того, что квантово-механические операторы в общем случае не коммутируют, существует множество способов, которыми можно установить соответствие между функциями $w(\alpha)$ и $f(\alpha)$ и операторами $\hat{\rho}$ и \hat{F} . С функцией $|\alpha|^2$, например, можно сопоставить и нормально-упорядоченный оператор $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, и антинормально-упорядоченный оператор $\hat{a} \hat{a}^\dagger$, и симметризованное произведение $\frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger)$. Наиболее полезные соответствия основаны на этих трех типах упорядочения.

Введенное Глаубером [59,60] и Сударшаном [61] \mathcal{P} -представление для оператора плотности

$$\hat{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

дает удобный способ вычисления средних от нормально-упорядоченных операторов. В силу того, что все операторы плотности являются эрмитовыми и обладают единичным следом, \mathcal{P} -функция, когда существует, может быть выбрана действительной и нормированной на единицу:

$$1 = \text{Tr} \hat{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\alpha) d^2\alpha.$$

Введем в рассмотрение нормально-упорядоченную характеристическую функцию

$$\chi_N(\xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(\xi \hat{a}^\dagger) \exp(-\xi^* \hat{a}) \}. \quad (26)$$

\mathcal{P} -функцию можно получить из функции $\chi_N(\xi)$ с помощью двумерного фурье-преобразования:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\xi \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi) \chi_N(\xi).$$

\mathcal{P} -функция Глаубера — Сударшана существует и является неотрицательной для хаотических световых полей (гауссовское распределение) и когерентных лазерных полей (распределение в виде δ -функции). Для полей с неклассической статистикой фотонов $\mathcal{P}(\alpha)$ — не обязательно неотрицательная функция с хорошим поведением (Клаудер и Сударшан [62] показали, что она существует, но в виде чрезвычайно сингулярных распределений).

Перейдем теперь к рассмотрению представления для оператора плотности, которое используется для усреднения симметрично-упорядоченных операторов. Весовой функцией этого представления является введенная Вигнером функция распределения квазивероятности $W(\alpha)$.

Как было показано Кахиллом и Глаубером [57,58], произвольный оператор плотности можно записать в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\xi) \hat{D}^{-1}(\xi) d^2\xi,$$

где $\hat{D}(\xi) = \exp(\xi\hat{a}^\dagger - \xi^*\hat{a})$ — оператор смещения. Весовая функция $\chi(\xi)$ равна среднему значению оператора $\hat{D}(\xi)$:

$$\chi(\xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}(\xi) \}. \quad (27)$$

Это соотношение является известным определением характеристической функции, которая в квантовой статистике играет роль, аналогичную роли характеристической функции в классической теории вероятности. Функция Вигнера определяется как фурье-образ характеристической функции:

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi) \chi(\xi) d^2\xi.$$

Функция $W(\alpha)$ отличается только нормировкой от функции распределения $W(q, p)$, введенной Вигнером [63] в качестве квантово-механического аналога распределения в фазовом пространстве классической статистической механики. Существует и другое представление функции Вигнера [57,58]:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}(2\alpha) \exp(i\pi\hat{a}^\dagger \hat{a}) \}, \quad (28)$$

которое будет использовано нами для получения фазового распределения квазивероятности, связанного с функцией Вигнера.

Перейдем теперь к рассмотрению функции, которая позволяет выразить средние значения антинормально-упорядоченных операторов в виде простых интегралов. По аналогии с уравнениями (26) и (27) можно ввести антинормально-упорядоченную характеристическую функцию:

$$\chi_A(\xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(-\xi^* \hat{a}) \exp(\xi \hat{a}^\dagger) \}.$$

Q -функция определяется как фурье-образ этой характеристической функции:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha \xi^* - \alpha^* \xi) \chi_A(\xi) d^2 \xi.$$

Эта функция может быть также представлена в виде

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle,$$

из которого следует, что Q -функция неотрицательна на всей фазовой плоскости.

Функции $\chi_N(\xi)$, $\chi(\xi)$ и $\chi_A(\xi)$ связаны простыми соотношениями:

$$\chi_N(\xi) = \exp(|\xi|^2/2) \chi(\xi),$$

$$\chi_A(\xi) = \exp(-|\xi|^2/2) \chi(\xi).$$

До сих пор мы рассматривали случай одной моды электромагнитного поля. Данное рассмотрение естественно обобщается на случай двух мод [64]. Определим двухмодовые характеристические функции, соответствующие нормальному, симметричному и антинормальному упорядочению операторов:

$$\chi_N(\eta, \xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(\eta \hat{a}^\dagger) \exp(\xi \hat{b}^\dagger) \exp(-\eta^* \hat{a}) \exp(-\xi^* \hat{b}) \},$$

$$\chi(\eta, \xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(\eta \hat{a}^\dagger - \eta^* \hat{a}) \exp(\xi \hat{b}^\dagger - \xi^* \hat{b}) \},$$

$$\chi_A(\eta, \xi) = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \exp(-\eta^* \hat{a}) \exp(-\xi^* \hat{b}) \exp(\eta \hat{a}^\dagger) \exp(\xi \hat{b}^\dagger) \}.$$

Эти характеристические функции связаны соотношениями:

$$\chi_N(\eta, \xi) = \exp(|\eta|^2/2) \exp(|\xi|^2/2) \chi(\eta, \xi),$$

$$\chi_A(\eta, \xi) = \exp(-|\eta|^2/2) \exp(-|\xi|^2/2) \chi(\eta, \xi).$$

Двухмодовые функции распределения квазивероятности можно получить из соответствующих характеристических функций с помощью четырехмерного фурье-преобразования:

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha\eta^* - \alpha^*\eta) \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi) \chi_N(\eta, \xi) d^2\eta d^2\xi,$$

$$W(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha\eta^* - \alpha^*\eta) \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi) \chi(\eta, \xi) d^2\eta d^2\xi,$$

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha\eta^* - \alpha^*\eta) \exp(\beta\xi^* - \beta^*\xi) \chi_A(\eta, \xi) d^2\eta d^2\xi.$$

Эти функции будут использованы нами в дальнейшем при изучении фазовых свойств двухмодовых состояний электромагнитного поля.

3.2. Фазовые распределения квазивероятности. Фазовое распределение Пегга — Барнетта (25) является положительно определенным, нормированным и 2π -периодическим, и, таким образом, удовлетворяет требованиям, налагаемым на функцию распределения вероятности фазы. Однако фазовые распределения, которые являются нормированными и 2π -периодическими, можно получить также, проинтегрировав функции распределения квазивероятности по радиальной переменной.

Идея использования функций распределения квазивероятности для описания фазы носит не только формальный математический характер, но имеет также и физическое обоснование. Как было показано Шапиро и Варнером [65], с помощью гетеродинного метода измерения можно определить фазу θ измеряемой моды (θ определяется относительно фазы локального осциллятора). При этом фазовое распределение представляет собой проинтегрированную по радиальной переменной Q -функцию [66,67]:

$$P^{(Q)}(\theta) = \int_0^{\infty} Q(\alpha) |\alpha| d|\alpha|. \quad (29)$$

На другой пример такого распределения указали Фрейбергер, Фогель и Шлейх, рассматривая 8-портовую схему гомодинного детектирования эксперимента группы Манделя [28—30]. Моменты фазовых операторов, измеренных в этом эксперименте, были непосредственным образом связаны с проинтегрированной по радиальной переменной Q -функцией [32,33]. Такие измерения фазы являются эффективно «классическими», поскольку Q -функция соответствует одновременному измерению двух некоммутирующих наблюдаемых [65,66].

Авторами работы [67] была установлена взаимосвязь между фазовым распределением Пегга — Барнетта и «классическим» распределением фазы (29). Для состояния (15) Q -функция имеет вид

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \left| \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} b_n e^{in(\varphi - \theta)} \right|^2, \quad (30)$$

где использовано обозначение $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$. Интегрируя (30) по радиальной переменной $|\alpha|$, получаем

$$\begin{aligned} P^{(Q)}(\theta) &= \int_0^{\infty} Q(\alpha) |\alpha| d|\alpha| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)(\theta - \varphi)] G^{(Q)}(n, k) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$G^{(Q)}(n, k) = \frac{\Gamma((n+k)/2 + 1)}{\sqrt{n!k!}}. \quad (31)$$

Для сравнения с функцией $P^{(PB)}(\theta)$ мы симметризуем окно фазовых значений θ относительно φ . Тогда «классическая» функция распределения фазы принимает следующий вид [67,68]:

$$P^{(Q)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] G^{(Q)}(n, k) \right\}. \quad (32)$$

Функция $P^{(Q)}(\theta)$, так же, как и функция $Q(\alpha)$, положительно определена и нормирована следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P^{(Q)}(\theta) d\theta = 1.$$

Из сравнения формул (32) и (25) видно, что «классическое» распределение $P^{(Q)}(\theta)$ отличается от распределения Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$ только дополнительным фактором $G^{(Q)}(n, k)$. Коэффициенты $G^{(Q)}(n, k)$ симметричны, $G^{(Q)}(n, k) = G^{(Q)}(k, n)$, и их диагональные элементы равны единице: $G^{(Q)}(n, n) = 1$. Распределение коэффициентов $G^{(Q)}(n, k)$ показано на рис.1. Видно, что чем дальше мы удаляемся от диагонали $G^{(Q)}(n, n) = 1$, тем меньшим становится значение $G^{(Q)}(n, k)$. Зная коэффициенты $G^{(Q)}(n, k)$, мы прямо можем получить фазовое распределение

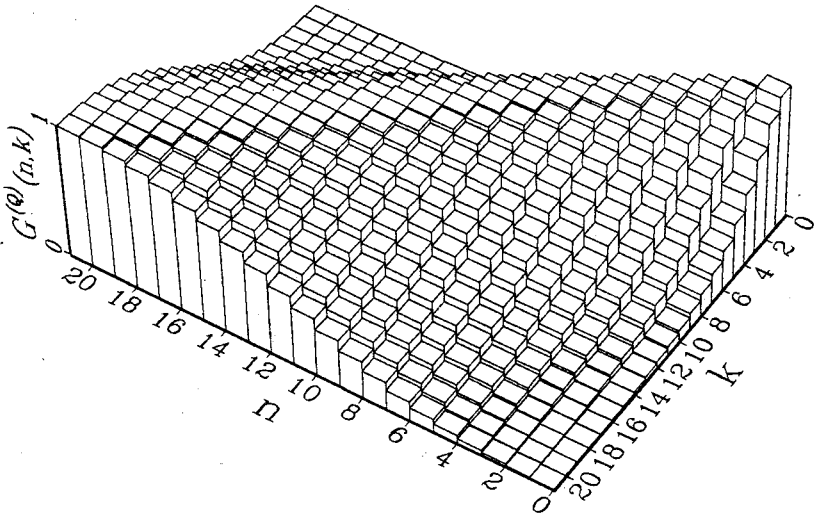


Рис. 1. Распределение коэффициентов $G^{(Q)}(n, k)$

квазивероятности $P^{(Q)}(\theta)$ из распределения Пегга — Барнетта умножением его недиагональных элементов на их «вероятность» $G^{(Q)}(n, k)$. Такую процедуру можно рассматривать как некое усреднение фазового распределения Пегга — Барнетта. Это приводит к сглаживанию и уширению распределения, в результате которого теряется часть фазовой информации. Поэтому распределение $P^{(Q)}(\theta)$ менее информативно, чем распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$.

Концепция интерференции в фазовом пространстве, введенная Шлейхом и Уилером [69], указывает на возможность получения другого фазового распределения квазивероятности при помощи интегрирования функции Вигнера по радиальной переменной [70]. Пусть матрица плотности $\hat{\rho}$ описывает состояние с частично определенной фазой:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

где $|\psi\rangle$ определяется формулами (15) и (17). Воспользовавшись выражением (28), запишем функцию Вигнера в следующем виде:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n, k} b_n b_k e^{i(n-k)\varphi} \langle k | \hat{D}(2\alpha) | n \rangle e^{i\pi n}.$$

Матричные элементы оператора смещения в фоковском базисе определяются формулой [57,58]:

$$\langle k | \hat{D}(2\alpha) | n \rangle = \left(\frac{n!}{k!} \right) (2\alpha)^{k-n} e^{-2|\alpha|^2} L_n^{k-n}(4|\alpha|^2), \quad k > n, \quad (33)$$

где $L_n^{k-n}(4|\alpha|^2)$ — присоединенные полиномы Лагерра. Выделим теперь фазу комплексного числа α , записав $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$. Интегрируя функцию Вигнера по радиальной переменной $|\alpha|$ и симметризуя окно фазовых значений θ относительно ϕ , получаем фазовое распределение квазивероятности:

$$\begin{aligned} P^{(W)}(\theta) &= \int_0^\infty W(\beta) |\beta| d|\beta| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{\substack{n,k=0 \\ n>k}}^\infty b_n b_k \cos[(n-k)\theta] G^{(W)}(n, k) \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

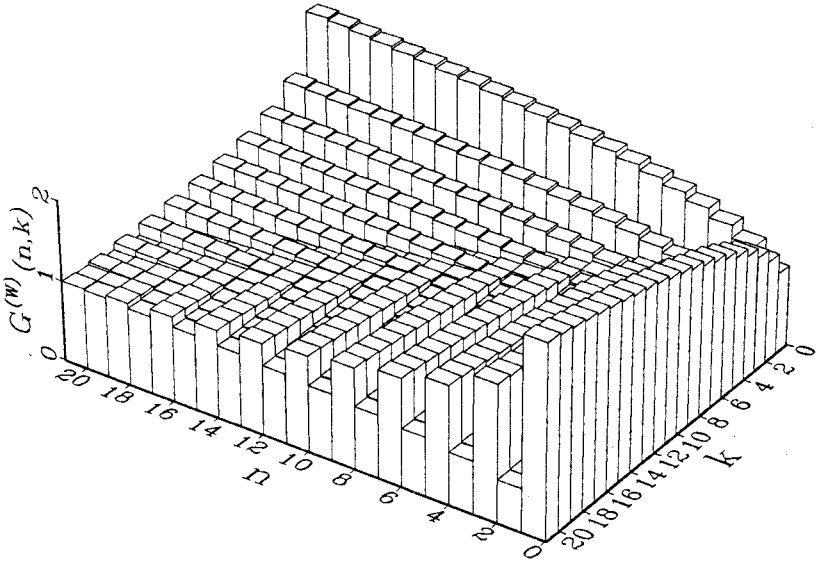
где коэффициенты $G^{(W)}(n, k)$ определяются формулой:

$$\begin{aligned} G^{(W)}(n, k) &= \sum_{m=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-m} 2^{(|n-k|+2m)/2} \times \\ &\times \sqrt{\binom{\lambda}{m} \binom{\nu}{\lambda-m}} G^{(Q)}(m, |n-k|+m), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\lambda = \min(n, k), \quad \nu = \max(n, k), \quad (36)$$

и $G^{(Q)}(m, |n-k|+m)$ определяются формулой (31). Коэффициенты $G^{(W)}(n, k)$ являются симметричными, $G^{(W)}(n, k) = G^{(W)}(k, n)$, и их диагональные элементы равны единице, $G^{(W)}(n, n) = 1$. Распределение коэффициентов $G^{(W)}(n, k)$ приведено на рис.2. Видно, что вне диагонали эти коэффициенты принимают значения как меньше, так и больше единицы. Это приводит к тому, что распределение $P^{(W)}(\theta)$ является более «резким» по сравнению с фазовым распределением $P^{(PB)}(\theta)$. Кроме того, так как функция Вигнера может принимать отрицательные значения, то положительная определенность распределения $P^{(W)}(\theta)$ не гарантирована, что создает проблемы интерпретации этого распределения как распределения вероятности.

Рис. 2. Распределение коэффициентов $G^{(W)}(n, k)$

По аналогии с фазовыми распределениями, связанными с Q -функцией и функцией Вигнера, можно также определить фазовое распределение, соответствующее \mathcal{P} -функции Глаубера — Сударшана. Однако, как было отмечено выше, \mathcal{P} -функция для неклассических состояний либо отрицательна, либо сильно сингулярна, что делает невозможным определение соответствующего фазового распределения для этих состояний. Поэтому фазовое распределение, связанное с \mathcal{P} -функцией, может быть определено только для квазиклассических состояний. В следующем разделе на примере сжатых хаотических состояний мы определим это фазовое распределение и сравним его с введенными выше тремя распределениями.

В заключение отметим, что фазовые распределения, связанные с Q -функцией и функцией Вигнера, могут быть выражены одной аналитической формулой следующего вида:

$$P^{(S)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)\theta] G^{(S)}(n, k) \right\}, \quad (37)$$

где коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$ определяются выражениями (31) для Q -функции ($S=Q$) и (35) для функции Вигнера ($S=W$). В соотношении (37) мож-

но включить также и фазовое распределение Пегга — Барнетта, если считать коэффициенты $G^{(PB)}(n, k) \equiv 1$.

4. ФАЗОВЫЕ СВОЙСТВА НЕКЛАССИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ СВЕТА

4.1. Смещенные фоковские состояния. Современные достижения в квантовой оптике привели к новым предложениям по способам генерации фоковских состояний электромагнитного поля. Хонг и Мандель успешно провели опыт по генерации локализованного однофотонного состояния в параметрической даун-конверсии с использованием оптического затвора [71]. Системой, в которой возможна генерация фоковских состояний с большим числом фотонов, является микромазер. Было показано [72], что электромагнитное поле в полости микромазера, взаимодействуя с ридберговскими атомами, инжектируемыми в полость с хорошо определенной скоростью, переходит в состояние с малой дисперсией числа фотонов, являющееся хорошей аппроксимацией фоковского состояния.

Смещенное фоковское состояние может быть получено из фоковского состояния путем добавления ненулевой амплитуды поля. Фоковское состояние определяется числом фотонов, его фаза полностью случайна. Среднее значение амплитуды поля в фоковском состоянии равно нулю. При смещении в фазовом пространстве появляется добавочная амплитуда поля, и теперь число фотонов имеет вклад от когерентной компоненты поля. Состояние поля становится зависящим от фазы смещения.

Смещенное фоковское состояние определяется действием оператора смещения на фоковское состояние:

$$|\alpha, N\rangle = \hat{D}(\alpha) |N\rangle. \quad (38)$$

Для $N=0$ это состояние сводится к когерентному состоянию $|\alpha\rangle$. Некоторые свойства смещенного фоковского состояния могут быть исследованы при помощи преобразования операторов рождения и уничтожения посредством сдвига на комплексное число:

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) &= \hat{a} + \alpha, \\ \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) &= \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \end{aligned}$$

Дисперсия числа фотонов в этом состоянии

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = (2N + 1) |\alpha|^2$$

всегда больше дисперсий числа фотонов в фоковском и когерентном состояниях. Вычислим теперь параметр Мандела Q , показывающий отклонение состояния от пуассоновской статистики:

$$Q = \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} = N \left(\frac{2 |\alpha|^2 - 1}{N + |\alpha|^2} \right), \quad (39)$$

где $\langle \hat{n} \rangle = N + |\alpha|^2$ — среднее число фотонов в смещенном фоковском состоянии. Для пуассоновской статистики $Q = 0$. Если $Q < 0$, то говорят, что поле находится в состоянии с субпуассоновской статистикой. Если $Q > 0$, то статистику поля называют суперпуассоновской. Из уравнения (39) заключаем, что состояние $|\alpha, N\rangle$ имеет субпуассоновскую статистику при $|\alpha|^2 < 1/2$.

Распределение числа фотонов в смещенном фоковском состоянии имеет вид

$$P_{DN}(l) = |\langle l | \alpha, N \rangle|^2 = |\langle l | \hat{D}(\alpha) | N \rangle|^2.$$

Используя формулу (33), получаем

$$P_{DN}(l) = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2(l-N)}}{N!!!} \left| \sum_{k=0}^N \frac{N!!! (-1)^k |\alpha|^{2(N-k)}}{k!(N-k)!(l-k)!} \right|^2. \quad (40)$$

Для $\alpha = 0$ распределение $P_{DN}(l) = \delta_{lN}$, как и должно быть для фоковского состояния. Под знаком модуля в (40) мы имеем полиномиальную функцию степени N . У такой функции должно быть N нулей переменной l . Следовательно, распределение $P_{DN}(l)$ имеет N минимумов между $(N+1)$ максимумами. Наличие таких осцилляций в распределении числа фотонов может быть объяснено с помощью концепции интерференции в фазовом пространстве [69,73].

Рассмотрим теперь фазовые свойства смещенного фоковского состояния [24]. Разложение этого состояния по фоковским состояниям имеет вид

$$|\alpha, N\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \alpha, N \rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \hat{D}(\alpha) | N \rangle = \sum_n b_n e^{i\varphi_n} |n\rangle,$$

где для $n \geq N$

$$b_n = \left(\frac{N!}{n!} \right)^{1/2} |\alpha|^{n-N} e^{-|\alpha|^2/2} L_N^{n-N}(|\alpha|^2),$$

и

$$\varphi_n = (n - N)\varphi, \quad (41)$$

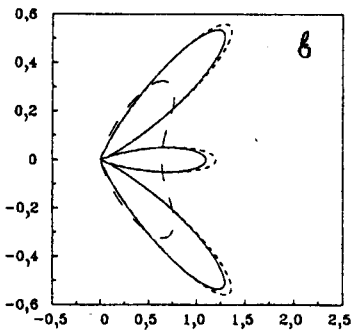
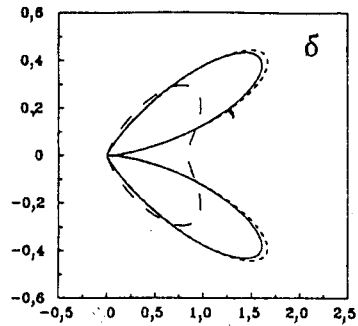
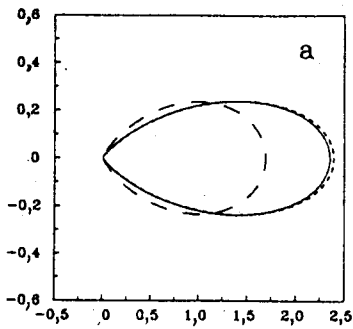


Рис. 3. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(Q)}(\theta)$ (длинные штрихи) и $P^{(W)}(\theta)$ (короткие штрихи) в полярных координатах (по оси $X - P(\theta) \cos \theta$, по оси $Y - P(\theta) \sin \theta$) для смещенного фоковского состояния при значениях $|\alpha| = 3$ и а) $N = 0$, б) $N = 1$, в) $N = 2$

где φ — фаза комплексного числа $\alpha = |\alpha| \exp(i\varphi)$, $L_N^{n-N}(|\alpha|^2)$ — присоединенный полином Лагерра. Для $n < N$ коэффициенты b_n имеют вид

$$b_n = \left(\frac{n!}{N!} \right)^{1/2} (-1)^{N-n} |\alpha|^{N-n} e^{-|\alpha|^2/2} L_n^{N-n}(|\alpha|^2),$$

и фаза φ_n по-прежнему определяется формулой (41). При вычислении коэффициентов b_n использованы матричные элементы оператора смещения в фоковском базисе (33). Зная эти коэффициенты, мы можем прямо применить формулы (25), (32) и (34) для фазовых распределений $P_{DN}^{(PB)}(\theta)$, $P_{DN}^{(Q)}(\theta)$ и $P_{DN}^{(W)}(\theta)$. На рис.3 приведены графики этих функций в полярных координатах для смещенных фоковских состояний с $|\alpha| = 3$ и $N = 0, 1, 2$. Видно, что распределения $P_{DN}^{(PB)}(\theta)$ и $P_{DN}^{(W)}(\theta)$ очень близки друг к другу и имеют $(N + 1)$ максимум, тогда как $P_{DN}^{(Q)}(\theta)$ несколько шире и имеет лишь

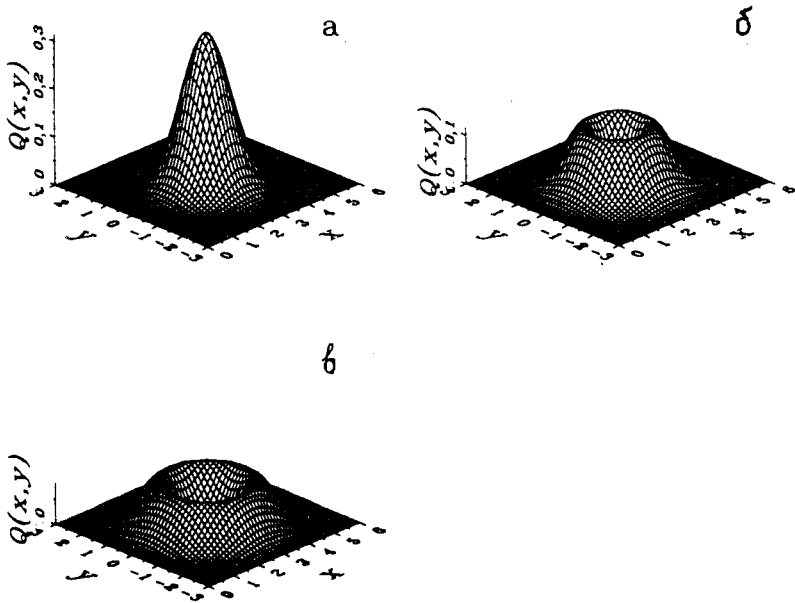


Рис. 4. Q -функция для смещенного фоковского состояния при значениях $|\alpha| = 3$ и а) $N=0$, б) $N=1$, в) $N=2$; $x = \text{Re}(\beta - \alpha)$, $y = \text{Im}(\beta - \alpha)$ и $\varphi = 0$

два максимума (заметим, что это справедливо для любых значений $N \geq 1$). Чтобы объяснить такой вид фазовых распределений, рассмотрим явный вид Q -функции и функции Вигнера для смещенных фоковских состояний. Эти функции распределения квазивероятности для рассматриваемых состояний получаются простым смещением соответствующих функций распределения для фоковских состояний [73]:

$$Q_{\text{DN}}(\beta) = Q_N(\beta - \alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta - \alpha|^2} \frac{|\beta - \alpha|^{2N}}{N!},$$

$$W_{\text{DN}}(\beta) = W_N(\beta - \alpha) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\beta - \alpha|^2) (-1)^N L_N(4|\beta - \alpha|^2), \quad (42)$$

где $L_N(x)$ — полином Лагерра порядка N . На рис.4 и 5 приведены графики этих функций для $|\alpha| = 3$ и $N=0,1,2$. Из (42) видно, что Q -функция принимает нулевое значение при $|\beta - \alpha| = 0$ для $N \geq 1$ (рис.4). Это приводит к тому, что распределение $P_{\text{DN}}^{(Q)}(\theta)$ имеет два максимума, которые соответствуют двум положениям азимутальной полуплоскости, когда пло-

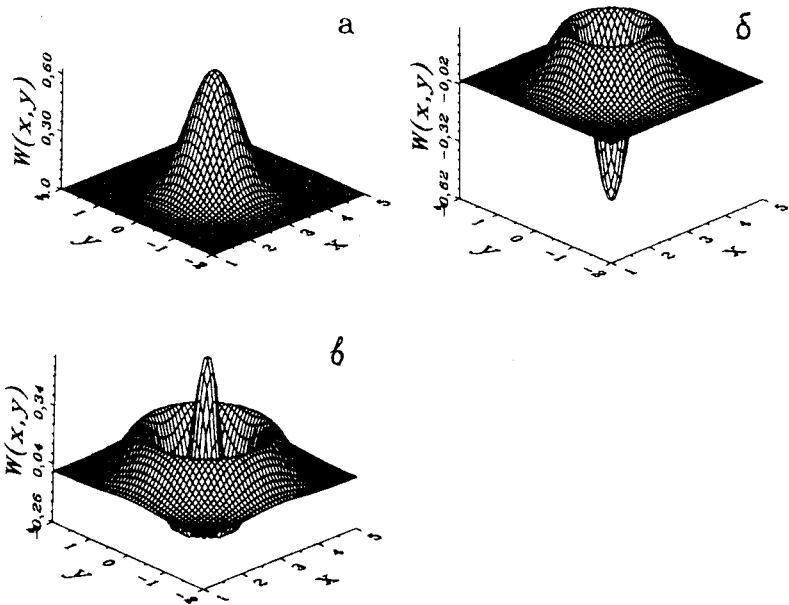


Рис. 5. Функция Вигнера для смещенного фоковского состояния при значениях $|\alpha| = 3$ и а) $N = 0$, б) $N = 1$, в) $N = 2$; $x = \text{Re}(\beta - \alpha)$, $y = \text{Im}(\beta - \alpha)$ и $\varphi = 0$

щадь пересечения ее с Q -функцией принимает наибольшие значения. Это и есть концепция суперпозиции в фазовом пространстве (area-of-overlap in phase space [70]), примененная для Q -функции. Поскольку функция Вигнера осциллирует в зависимости от N (рис.5), применение к ней этой идеи объясняет наличие $(N + 1)$ пика в распределении $P_{\text{DN}}^{(W)}(\theta)$. Таким образом, есть существенное различие в фазовой информации, содержащейся в распределениях $P_{\text{DN}}^{(Q)}(\theta)$ и $P_{\text{DN}}^{(W)}(\theta)$. Из-за процедуры усреднения с весом $G^{(Q)}(n, k)$ определенная часть фазовой информации в $P_{\text{DN}}^{(Q)}(\theta)$ теряется. Распределения $P_{\text{DN}}^{(PB)}(\theta)$ и $P_{\text{DN}}^{(W)}(\theta)$ почти совпадают, и, следовательно, в рассматриваемом случае смещенных фоковских состояний они несут в основном одинаковую фазовую информацию.

4.2. Сжатые фоковские и сжатые хаотические состояния. Поле в фоковском состоянии может быть подано на вход «сжимающего» устройства типа вырожденного параметрического усилителя. Тогда на выходе этого устройства будет генерировано поле в сжатом фоковском состоянии. Ис-

торически понятие сжатого фоковского состояния было введено Йеном [74]. Статистические свойства этого состояния изучались в [75—77]. Как отмечалось ранее, распределение фазы в фоковском состоянии полностью случайно. В сжатом фоковском состоянии распределение фазы уже не является равномерным.

Хаотическое (тепловое) состояние определяется как разложение по базису фоковских состояний с весовыми множителями распределения Бозе — Эйнштейна. Поле в хаотическом состоянии также может быть подано на вход вырожденного параметрического усилителя. Заметим, что при изучении взаимодействия неклассического поля с ридберговскими атомами в полости микроазера необходим учет теплового шума. Поэтому изучение неклассических состояний с хаотической компонентой имеет важное значение.

$\hat{S}(r, \varphi)$ Сжатое фоковское состояние определяется действием оператора сжатия $\hat{S}(r, \varphi)$ на фоковское состояние $|N\rangle$:

$$|N\rangle_{(r, \varphi)} = \hat{S}(r, \varphi) |N\rangle, \quad (43)$$

где

$$\hat{S}(r, \varphi) = \exp \left[\frac{r}{2} (\hat{a}^2 e^{-2i\varphi} - \hat{a}^{\dagger 2} e^{2i\varphi}) \right].$$

Разложение состояния (43) по базису фоковских состояний имеет вид

$$\begin{aligned} |N\rangle_{(r, \varphi)} &= \sum_n |N\rangle \langle n | N \rangle_{(r, \varphi)} = \sum_n |n\rangle \langle n | \hat{S}(r, \varphi) |N\rangle = \\ &= \sum_n b_n e^{i\varphi_n} |n\rangle, \end{aligned} \quad (44)$$

где [76]:

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{n! N!}{\cosh r} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \tanh r \right)^{(n+N)/2} \times \\ &\times \sum_{i=0}^{\min(n, N)} (-1)^{(N-i)/2} \frac{(2/\sinh r)^i}{i!} \frac{H_{n-i}(0)}{(n-i)!} \frac{H_{N-i}(0)}{(N-i)!} \end{aligned}$$

и

$$\varphi_n = (n - N)\varphi.$$

Здесь φ — угол поворота эллипса неопределенности в фазовом пространстве, $H_n(x)$ — полином Эрмита степени n .

Сжатое хаотическое состояние определяется матрицей плотности [75]:

$$\hat{\rho}_{ST} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^N |N\rangle_{(r, \varphi)(r, \varphi)} \langle N|, \quad (45)$$

где \bar{n} — среднее число фотонов в хаотическом состоянии на входе «сжимающего» устройства.

Дисперсии квадратурных компонент поля в сжатом фоковском состоянии могут быть представлены в виде [75]:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2N + 1) e^{-2r},$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2N + 1) e^{2r}.$$

Из этих соотношений видно, что только сжатый вакуум ($N=0$) является состоянием с минимальной неопределенностью (идеальным сжатым состоянием), а остальные сжатые фоковские состояния с $N \geq 1$ не являются таковыми. Дисперсии квадратурных компонент поля в сжатом хаотическом состоянии имеют вид [75]:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2\bar{n} + 1) e^{-2r},$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} (2\bar{n} + 1) e^{2r}.$$

Статистические свойства рассматриваемых состояний удобно исследовать при помощи корреляционной функции 2-го порядка:

$$g^{(2)} = 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2}.$$

Для сжатого фоковского состояния получаем

$$g^{(2)} = 1 - \frac{\cosh(2r)}{\langle \hat{n} \rangle^2} N + \frac{\sinh^2 r}{\langle \hat{n} \rangle^2} [(2N^2 + 2N) \cosh^2 r + \cosh(2r)], \quad (46)$$

где

$$\langle \hat{n} \rangle = N \cosh(2r) + \sinh^2 r.$$

При малых r корреляционная функция может принимать значения меньше единицы, что соответствует субпуассоновской статистике распределения фотонов. Второй член в (46) при $r \gg 1$ пренебрежимо мал, и для $g^{(2)}$ получаем

$$g^{(2)} \approx 1 + \frac{2(N^2 + N + 1)}{(2N + 1)^2}.$$

Для больших N корреляционная функция стремится к 1,5. Корреляционная функция $g^{(2)}$ для сжатого хаотического состояния имеет вид

$$g^{(2)} = 2 + \frac{(\overline{n} + 1)^2}{\langle \hat{n} \rangle^2} \sinh^2 r \cosh^2 r, \quad (47)$$

где

$$\langle \hat{n} \rangle = \overline{n} \cosh(2r) + \sinh^2 r.$$

Для $r \neq 0$ второй член в (47) является положительным, так что корреляционная функция $g^{(2)}$ для сжатого хаотического состояния всегда превосходит величину этой функции для хаотического состояния. Сжатие хаотического поля приводит к возрастанию флуктуаций его интенсивности. Распределение фотонов в хаотическом состоянии является гауссовским. Сжатые хаотические состояния обладают супергауссовской статистикой фотонов. В предельном случае $r \gg 1$ функция $g^{(2)}$ для этих состояний стремится к 3.

Имея разложение (44) сжатого фоковского состояния по базису фоковских состояний и выражение для матрицы плотности сжатого хаотического состояния (45), мы можем прямо применить формулы (25), (32) и (34) для фазовых распределений $P^{(PB)}(\theta)$, $P^{(Q)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ при исследовании фазовых свойств этих состояний [78]. Отметим, что функция $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ оказывается независимой от числа фотонов N в первоначальном фоковском состоянии. Чтобы показать это, воспользуемся явным видом функции Вигнера для сжатого фоковского состояния [75]:

$$W_{SN}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp \left[\frac{1}{2} (\alpha - \alpha^*)^2 e^{-2r} - \frac{1}{2} (\alpha + \alpha^*)^2 e^{2r} \right] \times \\ \times (-1)^N L_N [(\alpha + \alpha^*)^2 e^{2r} - (\alpha - \alpha^*)^2 e^{-2r}],$$

где $L_N(x)$ — полином Лагерра степени N . Проинтегрировав эту функцию по радиальной переменной, мы получаем фазовое распределение $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ для сжатого фоковского состояния, которое не зависит от N :

$$P_{SN}^{(W)}(\theta) = \frac{1}{2\pi (\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2\theta)}. \quad (48)$$

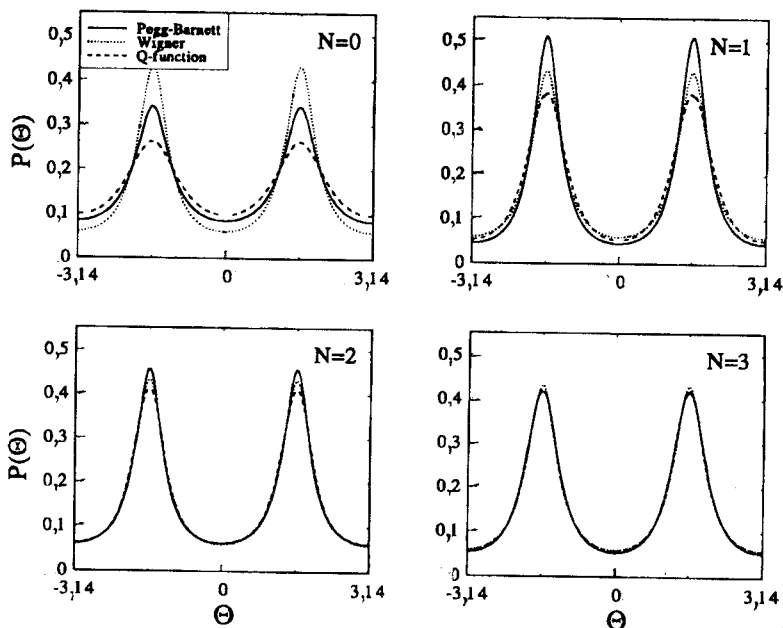


Рис. 6. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$, $P^{(Q)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ для сжатых фоковских состояний с $r=0,5$ и $N=0,1,2,3$

Асимптотически, в пределе большого сжатия ($r \rightarrow \infty$), распределение (48) превращается в сумму двух симметрично расположенных δ -функций:

$$P_{SN}^{(W)}(\theta) = \frac{1}{2} [\delta(\theta - \pi/2) + \delta(\theta + \pi/2)].$$

На рис.6 представлены графики фазовых распределений $P_{SN}^{(PB)}(\theta)$, $P_{SN}^{(Q)}(\theta)$ и $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ для сжатых фоковских состояний. Видно, что есть существенное различие в поведении трех фазовых распределений при малых N . При увеличении N фазовые распределения $P_{SN}^{(PB)}(\theta)$ и $P_{SN}^{(Q)}(\theta)$ стремятся к $P_{SN}^{(W)}(\theta)$, и для значений $N \geq 4$ эти три кривые становятся практически неразличимыми.

Рассмотрим теперь фазовые распределения для сжатых хаотических состояний (45). Они могут быть получены из фазовых распределений для сжатых фоковских состояний суммированием по числу фотонов N с весовым фактором Бозе — Эйнштейна $\bar{n}^N / (1 + \bar{n})^{N+1}$. Когда среднее число фотонов в фоковском состоянии на входе «сжимающего» устройства мало, т.е. $\bar{n} \leq 1$,

определяющий вклад в сумму дает сжатое фоковское состояние с $N=0$ (сжатый вакуум). Поэтому фазовое распределение для сжатого хаотического состояния с $\bar{n} \leq 1$ совпадает с распределением для сжатого вакуума. Однако, когда \bar{n} большое, важными являются вклады в сумму от фоковских состояний с большим числом фотонов. Поэтому в случае $\bar{n} > 1$ отличия между тремя фазовыми распределениями становятся незначительными, что аналогично случаю сжатого фоковского состояния с большим N . Так как $P_{SN}^{(W)}(\theta)$ не зависит от N , то распределение $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ для сжатого хаотического состояния совпадает с распределением $P_{SN}^{(W)}(\theta)$.

Q -функция в случае сжатого хаотического состояния имеет простую аналитическую форму [78]:

$$Q_{ST}(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n} \cosh r [(1 + 1/\bar{n})^2 - \tanh^2 r]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{(1 + 1/\bar{n} + \tanh^2 r) |\alpha|^2 + (\alpha^2 + \alpha^{*2}) (1 + 1/(2\bar{n})) \tanh r}{\bar{n} [(1 + 1/\bar{n})^2 - \tanh^2 r]} \right\}, \quad (49)$$

откуда посредством интегрирования по радиальной переменной легко получить фазовое распределение $P_{ST}^{(Q)}(\theta)$:

$$P_{ST}^{(Q)}(\theta) = \frac{\cosh r [(1 + 1/\bar{n})^2 - \tanh^2 r]^{1/2}}{2\pi [\cosh 2r + \cosh^2 r/\bar{n} + (1 + 1/(2\bar{n})) \sinh 2r \cos 2\theta]}. \quad (50)$$

Асимптотически, в пределе больших \bar{n} , формула (50) переходит в формулу (48) для $P_{ST}^{(W)}(\theta)$. На рис.7 представлены графики фазовых распределений $P_{ST}^{(PB)}(\theta)$, $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ и $P_{ST}^{(Q)}(\theta)$ для сжатых хаотических состояний. Видно, что распределения $P_{ST}^{(PB)}(\theta)$ и $P_{ST}^{(Q)}(\theta)$ становятся более узкими с увеличением \bar{n} , и для больших \bar{n} все три кривые полностью совпадают. Это означает, что в случае сжатых хаотических состояний распределение $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ является предельным фазовым распределением, и другие фазовые распределения достигают его при увеличении среднего числа фотонов в фоковском состоянии на входе «сжимающего» устройства. Отметим следующее интересное свойство сжатых хаотических состояний: минимальная величина фазовых флуктуаций может быть достигнута при помощи увеличения тепловых флуктуаций.

Рассмотрим теперь фазовое распределение, получаемое интегрированием \mathcal{P} -функции Глаубера — Сударшана по радиальной переменной. \mathcal{P} -функ-

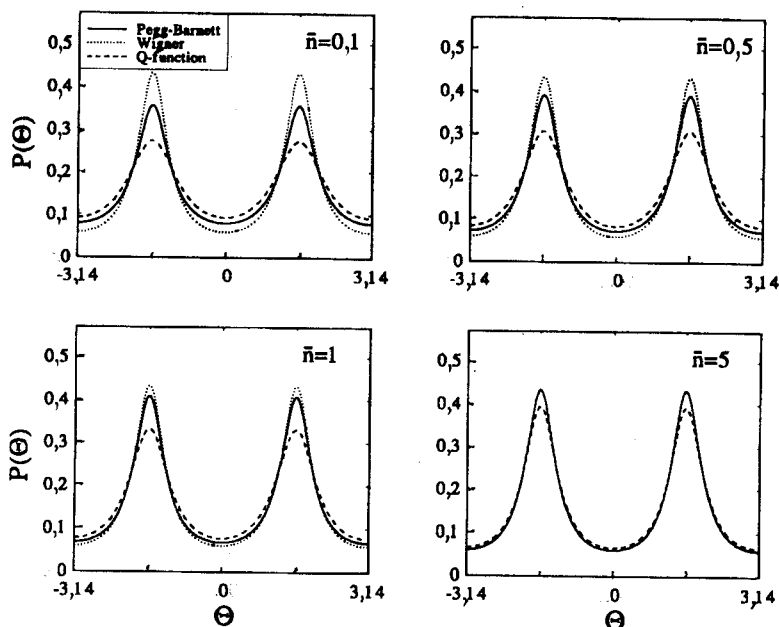


Рис. 7. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$, $P^{(Q)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ для сжатых хаотических состояний с $r = 0,5$ и $\bar{n} = 0,1; 0,5; 1,5$

ция является хорошо определенной для классических состояний, но для состояний с неклассическим поведением эта функция либо сингулярна, либо не является положительно определенной. Как было показано в работе [75], при условии $(2\bar{n} + 1)e^{-2r} > 1$ для сжатых хаотических состояний существует всюду положительная несингулярная \mathcal{P} -функция

$$\mathcal{P}_{ST}(\alpha) = \frac{1}{\pi [(\bar{n}e^r + \sinh r)(\bar{n}e^{-r} - \sinh r)]^{1/2}} \times \exp \left[\frac{(\alpha - \alpha^*)^2 e^{-r}}{4(\bar{n}e^r + \sinh r)} - \frac{(\alpha + \alpha^*)^2 e^r}{4(\bar{n}e^{-r} - \sinh r)} \right].$$

Фазовое распределение $P^{(P)}(\theta)$, связанное с \mathcal{P} -функцией, определяется тогда выражением

$$P^{(P)}(\theta) = \int_0^\infty \mathcal{P}_{ST}(\alpha) |\alpha| d|\alpha| = \frac{1}{2\pi (\bar{n} + 1/2)} \frac{[(\bar{n}e^r + \sinh r)(\bar{n}e^{-r} - \sinh r)]^{1/2}}{(\cosh 2r + \sinh 2r \cos 2\theta) - 1/2}.$$

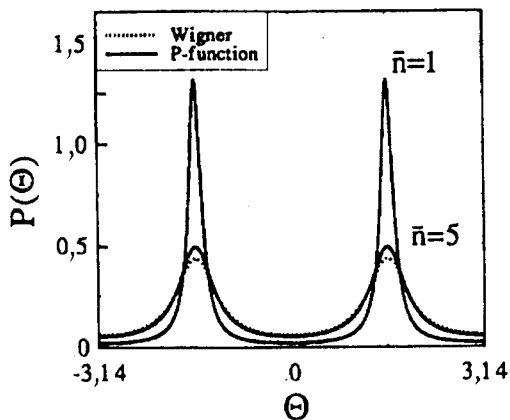


Рис. 8. Фазовые распределения $P^{(P)}(\theta)$ и $P^{(W)}(\theta)$ для сжатого хаотического состояния с $r=0,5$ и $\bar{n}=1,5$

В пределе больших \bar{n} распределение $P_{ST}^{(P)}(\theta)$ совпадает с распределением $P_{ST}^{(W)}(\theta)$ — соотношение (48). На рис.8 приведен график фазового распределения $P_{ST}^{(P)}(\theta)$ для сжатых хаотических состояний. Для сравнения приведен также график распределения $P_{ST}^{(W)}(\theta)$. Фазовое распределение $P_{ST}^{(P)}(\theta)$ является наиболее резким из рассматриваемых распределений. Видно, что чем больше \bar{n} , тем шире $P_{ST}^{(P)}(\theta)$.

4.3. Двухмодовые сжатые фоковские состояния. Как уже упоминалось, сжатые состояния можно генерировать в двухфотонных процессах типа параметрического усиления. В вырожденном случае, когда частота сигнальной моды совпадает с частотой холостой моды, в этих процессах происходит генерация сжатых состояний с минимальной неопределенностью и уменьшенными (по сравнению с вакуумными) флуктуациями в одной из квадратур [74]. Ситуация является более сложной в невырожденном случае, когда частоты сигнальной и холостой мод различны. Теперь каждая мода в отдельности проявляет изотропные, не зависящие от фазы флуктуации, которые обычно ассоциируют с хаотическими или тепловыми полями [79—83]. Однако комбинированное двухмодовое состояние есть неклассическое состояние, проявляющее сжатые флуктуации в модах, являющихся суперпозицией сигнальной и холостой мод.

Предположим, что на входе «сжимающего» устройства типа невырожденного параметрического усилителя приготовлено электромагнитное поле в двухмодовом фоковском состоянии $|N+q, N\rangle$, где q — разность в числе фотонов в модах. Гамильтониан такой системы имеет вид [81,84] ($\hbar=1$):

$$\hat{H} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} - i \{ g \hat{a} \hat{b} \exp(i\omega t) - g^* \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger \exp(-i\omega t) \},$$

где ω — частота классического поля накачки, g — константа связи. При точном резонансе $\omega = \omega_a + \omega_b$ гамильтониан может быть записан в пред-

ставлении взаимодействия: $\hat{H}_I = -i\{g\hat{a}\hat{b} - g^*\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger\}$. Тогда оператор эволюции системы $\exp(-i\hat{H}_I t) = \exp\{-g\hat{t}\hat{a}\hat{b} + g^*\hat{t}\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger\}$ представляет собой зависящий от времени двухмодовый оператор сжатия: $\exp(-i\hat{H}_I t) = \hat{S}(gt)$, где $\xi = gt$ — параметр сжатия. В момент времени t на выходе параметрического усилителя мы получим двухмодовое сжатое фоковское состояние

$$|\xi\rangle = \exp(-\xi\hat{a}\hat{b} + \xi^*\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger) |N+q, N\rangle.$$

Заметим, что двухмодовый сжатый вакуум является частным случаем двухмодового сжатого фоковского состояния при $N=0$ и $q=0$.

Дадим теперь формальное определение двухмодового сжатого фоковского состояния [85]. Рассмотрим две моды электромагнитного поля с операторами рождения и уничтожения \hat{a}^\dagger , \hat{a} и \hat{b}^\dagger , \hat{b} . Двухмодовое сжатое фоковское состояние определяется действием оператора сжатия $\hat{S}(r, \varphi)$ на двухмодовое фоковское состояние $|N+q, N\rangle$:

$$|N+q, N\rangle_{(r, \varphi)} = \hat{S}(r, \varphi) |N+q, N\rangle, \quad q \geq 0,$$

где q — разность в числе фотонов между двумя модами и

$$\hat{S}(r, \varphi) = \exp[r(\hat{a}\hat{b}e^{-2i\varphi} - \hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger e^{2i\varphi})].$$

Заметим, что в процессах с парным рождением и уничтожением фотонов величина q остается постоянной. Если рождение фотонов происходит из вакуума, то параметр q равен нулю. Разложение двухмодового сжатого фоковского состояния по базису фоковских состояний

$$\begin{aligned} |N+q, N\rangle_{(r, \varphi)} &= \sum_n |n+q, n\rangle \langle n+q, n|N+q, N\rangle_{(r, \varphi)} = \\ &= \sum_n b_n e^{i\varphi n} |n+q, n\rangle, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(\tanh r)^{N+n}}{(\cosh r)^{1+q}} (N! (N+q)! n! (n+q)!)^{1/2} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\min(n, N)} \frac{(-1)^{n-k} (\sinh r)^{-2k}}{k! (n-k)! (N-k)! (q+k)!} \end{aligned} \quad (52)$$

и

$$\varphi_n = (n-N)\varphi.$$

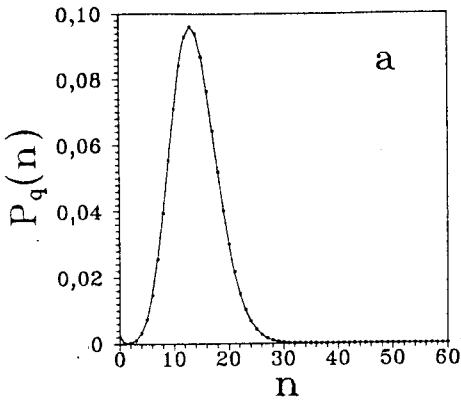
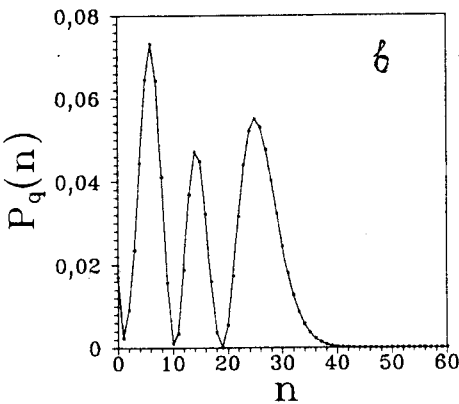
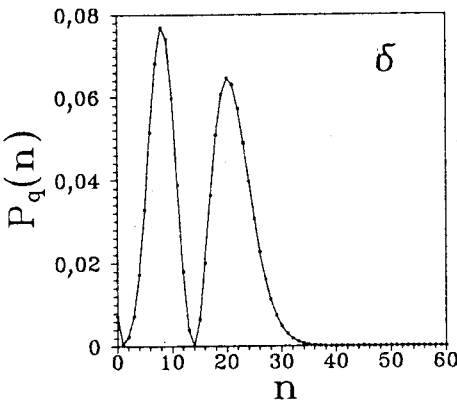


Рис. 9. Распределение числа фотонов для двухмодовых сжатых фоковских состояний с $r=0,5$, $q=50$ и а) $N=0$, б) $N=1$, в) $N=2$



При получении выражения (52) для коэффициентов b_n мы воспользовались факторизованной формой двухмодового оператора сжатия [82]:

$$\hat{S}(r, \varphi) = (\cosh r)^{-1} \exp [-\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{2i\varphi} \tanh r] \times \\ \times \exp [-(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \ln (\cosh r)] \exp [\hat{a} \hat{b} e^{-2i\varphi} \tanh r]. \quad (53)$$

Рассмотрим теперь статистические свойства двухмодового сжатого фоковского состояния. С помощью соотношения (52) легко посчитать среднее число фотонов в этом состоянии:

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle = (2N + q + 1) \cosh 2r - 1.$$

Совместное распределение вероятности найти n_a фотонов в моде a и n_b фотонов в моде b определяется соотношением

$$P(n_a, n_b) = |\langle n_a, n_b | N + q, N \rangle_{(r, \varphi)}|^2.$$

Используя (51) и (52), получаем

$$P(n_a, n_b) = P(n + q, n) \delta_{n_a, n + q} \delta_{n_b, n},$$

где

$$P(n + q, n) \equiv P_q(n) = |b_n|^2.$$

Как можно видеть на рис.9, распределение числа фотонов $P_q(n)$ имеет осцилляторное поведение. Такое поведение является следствием интерференции в 4-мерном фазовом пространстве [86]. Отметим наличие $(N + 1)$ -пиковой структуры в этом распределении. Аналогичная структура распределения числа фотонов наблюдается и в случае смещенных фоковских состояний, как было отмечено в п.4.1.

Рассмотрим теперь представление двухмодового сжатого фоковского состояния с помощью функций распределения квазивероятности. Для простоты выберем параметр сжатия вещественным, $\xi = r$. Отметим, что для рассматриваемых состояний \mathcal{P} -функция Глаубера — Сударшана является сингулярной. В двухмодовом случае \mathcal{Q} -функция может быть определена в следующем виде:

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^2} \langle \alpha, \beta | \hat{\rho} | \alpha, \beta \rangle.$$

Из этого определения видно, что функция является неотрицательной во всей области определения своих аргументов. Используя выражение для матрицы плотности для двухмодового сжатого фоковского состояния

$$\hat{\rho} = \hat{S}(r) |N+q, N\rangle \langle N+q, N| \hat{S}^\dagger(r) \quad (54)$$

и факторизованную форму оператора сжатия (53), получаем

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha|^{2q}}{\pi^2 (\cosh r)^{4N+2q+2}} \exp[-(\alpha\beta + \alpha^*\beta^*) \tanh r] \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)] \times \\ \times \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^N \frac{\left(\frac{1}{2} \sinh r\right)^{n+k} N!(N+q)! (\alpha^*\beta^*)^{N-n} (\alpha\beta)^{N-k}}{n! k! (N-n)! (N-k)! (N+q-n)! (N+q-k)!}. \quad (55)$$

Функция Вигнера может быть представлена в виде [57,58]:

$$W(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}_a(2\alpha) \hat{D}_b(2\beta) \exp[i\pi(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b})] \},$$

где $\hat{D}_a(\gamma)$ и $\hat{D}_b(\gamma)$ — операторы смещения для мод a и b соответственно. Выражение для функции Вигнера легко получить, используя соотношение (54), а также операторные преобразования [82]:

$$\hat{S}^\dagger(r) \hat{a} \hat{S}(r) = \hat{a} \cosh r - \hat{b}^\dagger \sinh r, \\ \hat{S}^\dagger(r) \hat{b} \hat{S}(r) = \hat{b} \cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r,$$

и эрмитово сопряженные им. В результате для функции Вигнера мы имеем следующее аналитическое выражение:

$$W(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} (-1)^q \exp[-2 \cosh 2r (|\alpha|^2 + |\beta|^2) - 2 \sinh 2r (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)] \times \\ \times L_N((2 \sinh r |\alpha|)^2 + (2 \cosh r |\beta|)^2 + 2 \sinh 2r (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)) \times \\ \times L_{N+q}((2 \cosh r |\alpha|)^2 + (2 \sinh r |\beta|)^2 + 2 \sinh 2r (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)), \quad (56)$$

где $L_n(x)$ — полином Лагерра степени n . Из уравнений (55) и (56) видно, что как Q -функция, так и функция Вигнера для двухмодового сжатого фоковского состояния зависят только от суммы фаз ($\theta_a + \theta_b$). Это свойство функций квазивероятности указывает на сильную корреляцию мод в этом состоянии.

Перейдем теперь к рассмотрению фазовых свойств двухмодового сжатого фоковского состояния. Мы применим обобщение фазового формализма Пега — Барнетта на случай двух мод [46,87] для нахождения фазового распределения. Зная разложение (51) рассматриваемых состояний по базису

фоковских состояний, можно определить совместное фазовое распределение вероятности для непрерывных фазовых переменных θ_a и θ_b :

$$P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)(\theta_a + \theta_b)] \right\}, \quad (57)$$

где b_n определяются соотношением (52). Распределение (57) нормировано следующим образом:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) d\theta_a d\theta_b = 1.$$

Одно важное фазовое свойство рассматриваемых состояний сразу видно из формулы (57). Совместная функция распределения вероятности зависит только от суммы фаз:

$$P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) = P^{(PB)}(\theta_+ = \theta_a + \theta_b).$$

Это свойство является следствием сильной корреляции между модами. Интегрируя $P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b)$ по одной из фазовых переменных, получаем маргинальное фазовое распределение $P^{(PB)}(\theta_a)$ или $P^{(PB)}(\theta_b)$ для фаз θ_a или θ_b :

$$P^{(PB)}(\theta_a) = \int_{-\pi}^{\pi} P^{(PB)}(\theta_a, \theta_b) d\theta_b = \frac{1}{2\pi},$$

$$P^{(PB)}(\theta_b) = P^{(PB)}(\theta_a) = \frac{1}{2\pi}.$$

Таким образом, фазы θ_a и θ_b индивидуальных мод распределены равномерно, и единственной неравномерно распределенной фазовой переменной является сумма фаз $\theta_+ = \theta_a + \theta_b$. На рис.10 приведены графики в полярных координатах фазового распределения Пегга — Барнетта для двухмодовых сжатых фоковских состояний с различными значениями параметра q . Для ненулевых значений q фазовое распределение проявляет $(N+1)$ -лепестковую структуру, при этом чем больше q , тем более четкими становятся лепестки. Однако при $q=0$ фазовое распределение имеет один лепесток для всех значений N . Интересно отметить замечательное сходство в поведении фазового распределения и распределения числа фотонов для двухмодовых сжатых фоковских состояний: оба они проявляют $(N+1)$ -пиковую структуру при $q \neq 0$.

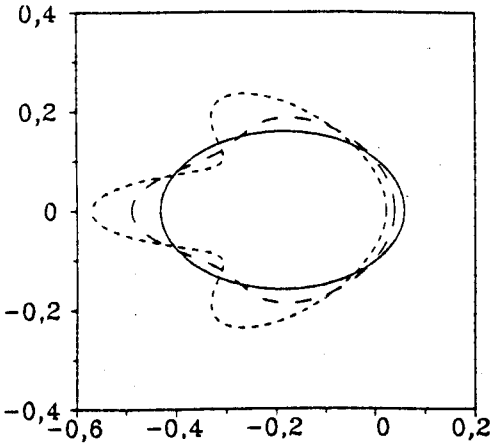


Рис. 10. Фазовое распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta_+)$ в полярных координатах (по оси X — $P(\theta_+) \cos \theta_+$, по оси Y — $P(\theta_+) \sin \theta_+$) для двухмодовых сжатых фоковских состояний с $r=0,5$, $N=2$ и $q=0$ (сплошная линия), $q=3$ (длинные штрихи) и $q=6$ (короткие штрихи)

Еще одним важным свойством совместного фазового распределения для двухмодовых сжатых фоковских состояний является привязка суммы фаз двух мод к фазе сжатия 2ϕ при увеличении амплитуды сжатия r (phase locking). Это явление было изучено в случае двухмодового сжатого вакуума в работах [46,47].

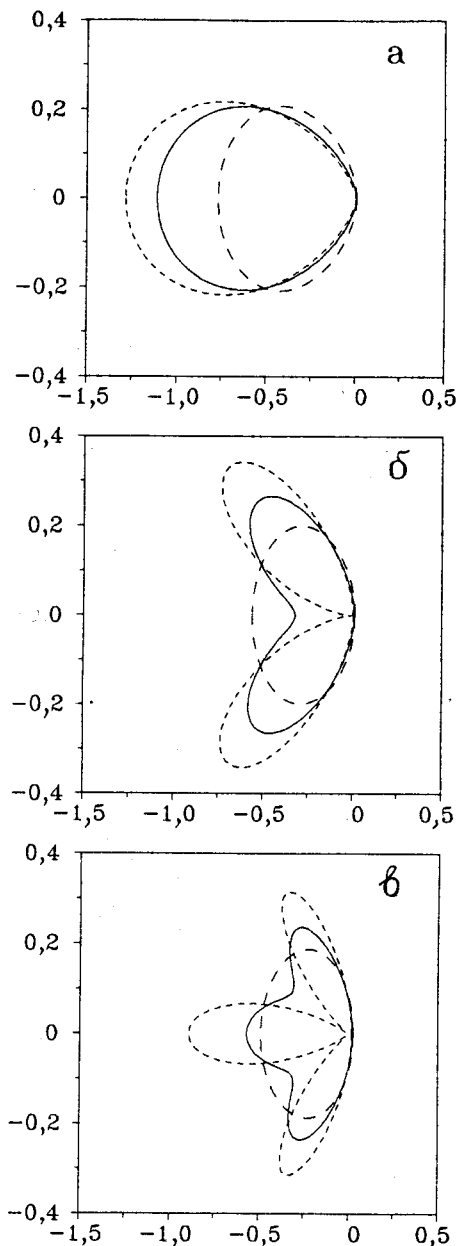
Перейдем теперь к рассмотрению фазовых распределений, которые могут быть получены интегрированием функций распределения квазивероятности по радиальным переменным. Отметим, что для двухмодовых сжатых фоковских состояний \mathcal{P} -функция является сингулярной, и поэтому не существует соответствующего ей фазового распределения. В результате интегрирования функций $Q(\alpha, \beta)$ и $W(\alpha, \beta)$ по переменным $|\alpha|$ и $|\beta|$ получаем следующую формулу:

$$P^{(V)}(\theta_+) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos [(n-k)\theta_+] G^{(V)}(n, k) G^{(V)}(n+q, k+q) \right\}, \quad (58)$$

где коэффициенты $G^{(V)}(n, k)$ определяются формулой (31) при $V=Q$ и формулой (35) при $V=W$. Заметим, что выражения (57), (58) для фазовых распределений могут быть применены для всех двухмодовых состояний, имеющих разложение по фоковским состояниям типа (51). Примером таких состояний являются парные когерентные состояния, введенные Агарвалом [88]. На рис.11 приведены графики фазовых распределений $P^{(PB)}(\theta_+)$, $P^{(Q)}(\theta_+)$ и $P^{(W)}(\theta_+)$ в полярных координатах для двухмодовых сжатых фоковских состояний с различными значениями N при $q \neq 0$. Видно, что распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta_+)$ и $P^{(W)}(\theta_+)$ имеют

Рис. 11. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta_+)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta_+)$ (короткие штрихи) и $P^{(Q)}(\theta_+)$ (длинные штрихи) в полярных координатах (по оси X — $P(\theta_+) \cos \theta_+$, по оси Y — $P(\theta_+) \sin \theta_+$) для двухмодовых сжатых фоковских состояний с $r=0,5$, $q=6$ и а) $N=0$, б) $N=1$, в) $N=2$

$(N+1)$ лепестков, тогда как $P^{(Q)}(\theta_+)$ гораздо шире и имеет лишь один лепесток для всех значений N . В случае $q=0$ все три распределения имеют одинаковую форму одного лепестка. Таким образом, как и в случае смещенных фоковских состояний, есть существенное различие в фазовой информации, которую несут распределения $P^{(Q)}(\theta_+)$ и $P^{(W)}(\theta_+)$. Из-за процедуры усреднения с «вероятностями» $G^{(Q)}(n, k)G^{(Q)}(n+q, k+q)$ некоторая часть фазовой информации в $P^{(Q)}(\theta_+)$ потеряна. Распределение Пегга — Барнетта является близким по форме к распределению $P^{(W)}(\theta_+)$, хотя и не идентично ему. Фазовые пики в $P^{(W)}(\theta_+)$ несколько уже, чем соответствующие пики в $P^{(PB)}(\theta_+)$. Чем больше разница в числе фотонов между модами q , тем более близкими становятся эти два



распределения. В целом они несут аналогичную фазовую информацию. Этот факт находится в соответствии с аргументами концепции супер-

позиции в фазовом пространстве, согласно которым функция Вигнера представляет квантовое состояние в фазовом пространстве [70].

4.4. Квадратично-амплитудные сжатые состояния. Рассматривая корреляционные функции высших порядков для амплитуды поля, можно определить эффекты сжатия высших порядков. Согласно Хонгу и Манделю, состояние является сжатым порядка $2N$, если для этого состояния момент порядка $2N$ квадратуры поля меньше, чем соответствующий момент для когерентного состояния [89,90]. Такой тип сжатия был найден этими авторами в ряде оптических процессов. Иной подход к понятию сжатия высших порядков был исследован Браунштейном и Маклахланом [91]. Для определения обобщенных сжатых состояний они использовали аналоги высших порядков оператора сжатия. Изучение Q -представлений этих состояний выявило их весьма необычные статистические свойства.

Другое определение сжатия высших порядков в терминах действительной и мнимой частей квадрата и более высоких степеней амплитуды поля было предложено Хиллери [92]. Им было показано, что квадратично-амплитудное сжатие естественным образом возникает в процессе генерации второй гармоники [93]. В работе [94] получены общие решения для квадратично-амплитудных сжатых состояний, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга, и исследованы их статистические свойства.

Квадратично-амплитудное сжатие описывается в терминах действительной и мнимой частей квадрата амплитуды поля. Эти величины соответствуют квадратурным операторам

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 &= (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)/2, \\ \hat{Y}_2 &= i(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2)/2,\end{aligned}\quad (59)$$

удовлетворяющим соотношению неопределенности Гейзенберга [92]:

$$\Delta\hat{Y}_1\Delta\hat{Y}_2 \geq \langle \hat{N} + \frac{1}{2} \rangle, \quad (60)$$

где $\hat{N} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ — число фотонов. Состояние называется сжатым по квадрату амплитуды в направлении Y_1 , если

$$\langle (\Delta\hat{Y}_1)^2 \rangle < \langle \hat{N} + \frac{1}{2} \rangle.$$

Состояния, которые минимизируют соотношение неопределенности (60), называются квадратично-амплитудными сжатыми состояниями с минимальной неопределенностью. Разложение этих состояний по базису фоковских состояний может быть представлено в виде:

$$|\lambda, \beta\rangle = \sum_n b_n |n\rangle, \quad (61)$$

где коэффициенты b_n определяются следующими рекуррентными соотношениями [94]:

$$b_{n+4} = b_{n+2} \frac{2\beta}{(\lambda+1)\sqrt{(n+4)(n+3)}} + b_n \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sqrt{\frac{(n+2)(n+1)}{(n+4)(n+3)}},$$

$$b_2 = \sqrt{2} \frac{\beta}{\lambda+1} b_0, \quad b_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta}{\lambda+1} b_1, \quad 0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq |\beta| < \infty, \quad (62)$$

с условием нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 = 1.$$

Из соотношений (62) можно видеть, что коэффициенты b_n разбиваются на две последовательности коэффициентов с четными и нечетными индексами. Поэтому, в зависимости от выбора последовательности коэффициентов, мы можем определить два типа состояний — четные и нечетные квадратично-амплитудные сжатые состояния.

Определим теперь функции распределения квазивероятности для рассматриваемых состояний. Нас прежде всего будут интересовать Q -функция и функция Вигнера, которые получаются с помощью преобразования Фурье, соответственно, нормально- и симметрично-упорядоченных характеристических функций. Используя представление в фоковском базисе (61), Q -функцию можно записать в следующем виде:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \lambda, \beta \rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2.$$

С помощью соотношения (28) функция Вигнера представляется через коэффициенты разложения b_n :

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(|2\alpha|^2) (b_n)^2 + 2 \sum_{n>m=0}^{\infty} \left(\frac{m!}{n!} \right)^{1/2} (-1)^m (2\alpha)^{n-m} L_m^{n-m}(|2\alpha|^2) b_n b_m \right\}.$$

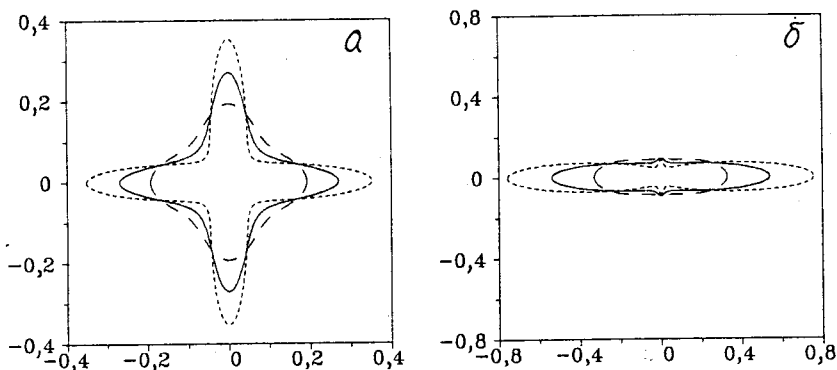


Рис. 12. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (короткие штрихи) и $P^{(Q)}(\theta)$ (длинные штрихи) в полярных координатах (по оси $X — P(\theta) \cos \theta$, по оси $Y — P(\theta) \sin \theta$) для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и а) $\beta = 0$, б) $\beta = 1$

Как Q -функция, так и функция Вигнера для квадратично-амплитудных сжатых состояний имеют существенные различия в поведении в случаях, когда параметр β равен и не равен нулю. В случае $\beta = 0$ эти функции проявляют четырехкратную симметрию, тогда как в случае $\beta \neq 0$ симметрия этих функций становится двухкратной [94]. Как было отмечено ранее, Q -функция является неотрицательной на всей фазовой плоскости, в то время как функция Вигнера может принимать и отрицательные значения. Как будет показано в дальнейшем, это может приводить к проблемам в определении соответствующего фазового распределения квазивероятности.

Перейдем теперь к рассмотрению фазовых свойств квадратично-амплитудных сжатых состояний [95]. Зная их разложение по базису фоковских состояний (61), мы можем применить фазовое распределение Пегга — Барнетта и фазовые распределения квазивероятности, определяемые общей формулой (37). Графики всех трех фазовых распределений для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний при различных значениях λ и β представлены на рис.12, а для нечетных состояний — на рис.13. Мы видим, что в случае, когда параметр β равен нулю, фазовые распределения имеют четырехлепестковую форму. Для значений β , не равных нулю, все три распределения имеют двухлепестковую структуру. Такое поведение согласуется с симметрией функций распределения квазивероятности. Можно также заметить, что фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является самым узким из трех распределений для четных состояний

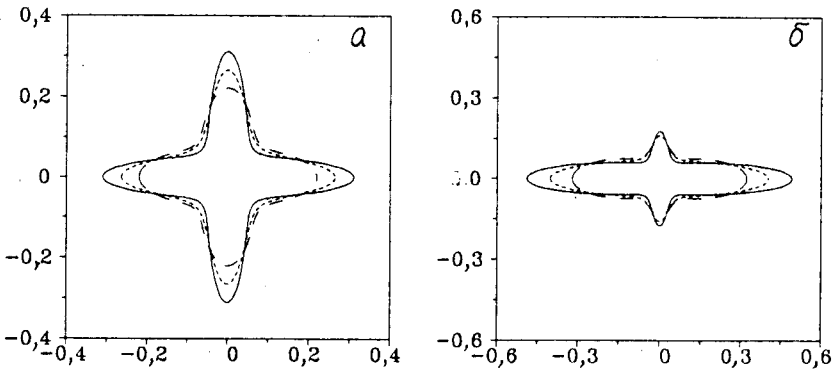


Рис. 13. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (короткие штрихи) и $P^{(Q)}(\theta)$ (длинные штрихи) в полярных координатах (по оси X — $P(\theta) \cos \theta$, по оси Y — $P(\theta) \sin \theta$) для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и а) $\beta = 0$, б) $\beta = 1$

(рис.12), тогда как для нечетных самым узким является распределение Пегга — Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$ (рис.13). Далее, отметим, что фазовое распределение $P^{(Q)}(\theta)$ является самым широким из рассматриваемых распределений для обоих типов состояний. Такой вид фазовых распределений можно объяснить с помощью соотношений (31), (35) и (37). Как было указано нами ранее, коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$ играют роль весовых множителей в суммировании бесконечного ряда в (37), что может рассматриваться как некая процедура «усреднения» фазового распределения Пегга — Барнетта (25). В случае четных квадратично-амплитудных сжатых состояний суммирование в (37) ведется только по четным индексам n и k . Так как коэффициенты $G^{(W)}(n, k) > 1$ для четных индексов, то процедура «усреднения» приводит к более резкому фазовому распределению Вигнера, чем распределение Пегга — Барнетта. В случае же нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний, когда суммирование в (37) ведется по нечетным индексам, коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, и процедура «усреднения» приводит к уширению фазового распределения Вигнера. Что касается фазового распределения $P^{(Q)}(\theta)$, то в силу того, что коэффициенты $G^{(Q)}(n, k) < 1$ для всех значений индексов n и k , процедура «усреднения» приводит к уширению этого распределения по сравнению с распределением Пегга — Барнетта как для четных, так и для нечетных состояний. Это со-

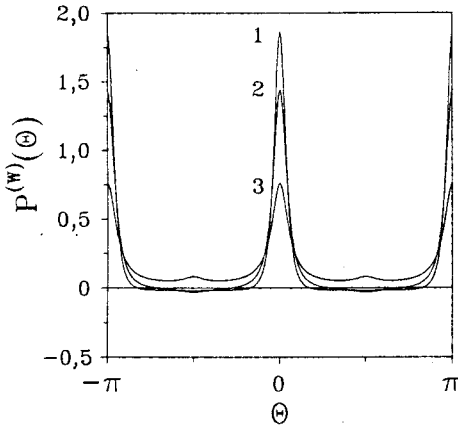


Рис. 14. Фазовые распределения $P^{(W)}(\theta)$ для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda=3$ и 1) $\beta=1$, 2) $\beta=3$, 3) $\beta=5$

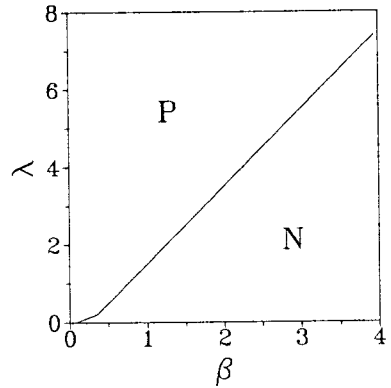


Рис. 15. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является положительно определенным (P) и где оно может принимать отрицательные значения (N)

ласуется с фактом, что Q -функция связана с одновременным измерением двух некоммутирующих наблюдаемых — процессом, неизбежно сопровождающимся дополнительным шумом [65,66].

Как мы уже отмечали, тот факт, что функция Вигнера не является положительно определенной, может привести к появлению в соответствующем фазовом распределении отрицательных значений. Такое свойство в поведении фазового распределения Вигнера было отмечено в работе [96] для суперпозиции когерентных и фоковских состояний. Другим примером являются рассматриваемые в данной работе четные квадратично-амплитудные сжатые состояния. На рис.14 представлено фазовое распределение Вигнера для этих состояний при различных значениях параметра β . Мы видим, что при некоторых значениях фазовой переменной это распределение становится отрицательным. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера является положительно определенным и где это распределение может принимать отрицательные значения, показаны на рис.15. В тех случаях, когда существует область изменения параметров, где фазовое распределение становится отрицательным, мы уже не можем говорить о таком распределении как об истинном фазовом распределении, которое по определению должно быть неотрицательным для всех значений фазовой пере-

менной. Следовательно, фазовое распределение Вигнера для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний может быть определено только в ограниченной области изменения параметров состояния. Отметим, что для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний фазовое распределение Вигнера является всегда положительно определенным. Этот факт может быть объяснен опять с точки зрения процедуры «усреднения». Для нечетных состояний коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, поэтому умножение недиагональных членов суммы в соотношении (37) на эти коэффициенты приводит к распределению, уширенному по сравнению с распределением Пегга — Барнетта, которое по определению является всюду неотрицательным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре обсуждаются различные концепции описания фазовых свойств полей, рассматриваемых в задачах квантовой оптики. Основное внимание при этом уделяется двум подходам к проблеме фазы — операторному формализму Пегга — Барнетта и подходу, связанному с функциями распределения квазивероятности. На примере различных неклассических состояний света, генерируемых в нелинейных оптических процессах, мы указали на связь между этими подходами и обсудили, какого рода информацию дают соответствующие фазовые распределения. Распределение Пегга — Барнетта является положительно определенным и 2π -периодическим, и оно может рассматриваться как результат идеального измерения фазы. Распределение, связанное с Q -функцией, соответствует случаю одновременного измерения двух некоммутирующих наблюдаемых. Такое измерение неизбежно сопровождается дополнительным шумом, что приводит к уширению фазового распределения, и, в некоторых случаях, к потере существенной части фазовой информации. Что касается фазового распределения Вигнера, то для одних состояний поля это распределение, будучи положительно определенным, может быть использовано для описания их фазовых свойств, тогда как для других состояний это распределение принимает отрицательные значения, что делает бессмысленным его использование в этих случаях.

Авторы выражают благодарность Ц.Ганцогу, Р.Танасю и В.С.Ярунину за полезные обсуждения и замечания по данному обзору. Работа была поддержана совместным грантом №RFD300 Международного научного фонда, Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства России.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дирак П.А.М. — Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
2. Dirac P.A.M. — Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1927, vol.114, p.243.
3. Louisell W.H. — Phys. Lett., 1963, vol.7, p.60.
4. Susskind L., Glogower J. — Physics, 1964, vol.1, p.49.
5. Carruthers P., Nieto M.M. — Rev. Mod. Phys., 1968, vol.40, p.411.
6. Lerner E. — Univ. of South Carolina Report, 1966.
7. Levy-Leblond J.-M. — Ann. Phys. (N.Y.), 1976, vol.101, p.319.
8. Loudon R., Shepherd T.J. — Opt. Acta, 1984, vol.31, p.1243.
9. Sanders B.C., Barnett S.M., Knight P.L. — Opt. Comm., 1986, vol.58, p.290.
10. Gerhardt H., Buchler U., Liftin G. — Phys. Lett. A, 1974, vol.49, p.119.
11. Gerhardt H., Welling H., Frolich D. — Appl. Phys., 1973, vol.2, p.91.
12. Barnett S.M., Pegg D.T. — J. Phys. A, 1986, vol.19, p.3849.
13. Garrison J.C., Wong J. — J. Math. Phys., 1970, vol.11, p.2243.
14. Попов В.Н., Ярунин В.С. — Вестник Ленингр. унив., 1973, т.22, с.7.
15. Popov V.N., Yarusin V.S. — J. Mod. Opt., 1992, vol.39, p.1525.
16. Levy-Leblond J.-M. — Revista Mexicana de Fisica, 1973, vol.22, p.15.
17. Santhanam T.S. — Found. Phys., 1977, vol.7, p.121.
18. Santhanam T.S., Sinha K.B. — Aust. J. Phys., 1978, vol.31, p.233.
19. Bergou J., Englert B.-G. — Ann. Phys. (N.Y.), 1991, vol.209, p.479.
20. Barnett S.M., Pegg D.T. — J. Mod. Opt., 1992, vol.39, p.2121.
21. Pegg D.T., Barnett S.M. — Europhys. Lett., 1988, vol.6, p.483.
22. Barnett S.M., Pegg D.T. — J. Mod. Opt., 1989, vol.36, p.7.
23. Pegg D.T., Barnett S.M. — Phys. Rev. A, 1989, vol.39, p.1665.
24. Tanas' R., Murzakhmetov B.K., Gantsog Ts., Chizhov A.V. — Quantum Opt., 1992, vol.4, p.1.
25. Tanas' R., Miranowicz A., Gantsog Ts. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.53.
26. Shapiro L.H., Shepard S.R., Wong W.C. — Phys. Rev. Lett., 1989, vol.62, p.2377.
27. Shapiro J.H., Shepard S.R. — Phys. Rev. A, 1991, vol.43, p.3795.
28. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Phys. Rev. Lett., 1991, vol.67, p.1426.
29. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Phys. Rev. A, 1992, vol.45, p.424.
30. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Phys. Rev. A, 1992, vol.46, p.2840.
31. Noh J.W., Fougères A., Mandel L. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.29.
32. Freyberger M., Schleich W. — Phys. Rev. A., 1993, vol.47, p.R30.
33. Freyberger M., Vogel K., Schleich W. — Phys. Lett. A, 1993, vol.176, p.41.
34. Leonhardt U., Paul H. — Phys. Rev. A, 1993, vol.47, p.R2460.
35. Smithy D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A. — Phys. Rev. Lett., 1993, vol.70, p.1244.
36. Smithy D.T., Beck M., Cooper J. et al. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.35.
37. Raymer M.G., Beck M., McAlister D.F. — Phys. Rev. Lett., 1994, vol.72, p.1137.
38. Vogel K., Risken H. — Phys. Rev. A, 1989, vol.40, p.2847.
39. Leonhardt U., Vaccaro J.A., Böhmer B., Paul H. — Phys. Rev. A, 1995, vol.51, p.84.
40. Leonhardt U., Paul H. — Physica Scripta, 1993, vol.48, p.45.
41. Barnett S.M., Dalton B.J. — Physica Scripta, 1993, vol.T48, p.13.

42. **Tanaš R., Miranowicz A., Gantsog Ts.** — Progress in Optics, 1996, vol.35.
43. **Barnett S.M., Pegg D.T.** — J. Mod. Opt., 1989, vol.36, p.7.
44. **Vaccaro J.A., Pegg D.T.** — Opt. Commun., 1989, vol.70, p.529.
45. **Gantsog Ts., Tanaš R.** — Opt. Commun., 1991, vol.82, p.145.
46. **Barnett S.M., Pegg D.T.** — Phys. Rev. A, 1990, vol.42, p.6713.
47. **Gantsog Ts., Tanaš R.** — Phys. Lett. A, 1991, vol.152, p.251.
48. **Ho Trung Dung, Tanaš R., Shumovsky A.S.** — Opt. Commun., 1990, vol.79, p.462.
49. **Gerry C.C.** — Opt. Commun., 1990, vol.75, p.168.
50. **Gantsog Ts., Tanaš R.J.** — J. Mod. Opt., 1991, vol.38, p.1021.
51. **Gantsog Ts., Tanaš R.J.** — J. Mod. Opt., 1991, vol.38, p.1537.
52. **Gantsog Ts., Tanaš R.J.** — Quantum Opt., 1991, vol.3, p.33.
53. **Gantsog Ts., Tanaš R., Zawodny R.** — Phys. Lett. A, 1991, vol.155, p.1.
54. **Gantsog Ts., Tanaš R., Zawodny R.** — Opt. Commun., 1991, vol.82, p.345.
55. **Vaccaro J.A., Pegg D.T.** — J. Mod. Opt., 1990, vol.37, p.17.
56. **Summy G.S., Pegg D.T.** — Opt. Commun., 1989, vol.77, p.75.
57. **Cahill K.E., Glauber R.J.** — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.1857.
58. **Cahill K.E., Glauber R.J.** — Phys. Rev., 1969, vol.177, p.1882.
59. **Glauber R.J.** — Phys. Rev., 1963, vol.130, p.2529.
60. **Glauber R.J.** — Phys. Rev., 1963, vol.131, p.2766.
61. **Sudarshan E.C.G.** — Phys. Rev. Lett., 1963, vol.10, p.277.
62. **Клаудер Дж., Сударшан Э.** — Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970.
63. **Wigner E.P.** — Phys. Rev., 1932, vol.40, p.749.
64. **Barnett S.M., Knight P.L.** — J. Mod. Opt., 1987, vol.34, p.841.
65. **Shapiro J.H., Wagner S.S.** — IEEE J. Quantum Electron., 1984, vol.QE-20, p.803.
66. **Braunstein S.L., Caves C.M.** — Phys. Rev. A, 1990, vol.42, p.4115.
67. **Tanaš R., Gantsog Ts., Miranowicz A., Kielich S.** — J. Opt. Soc. Am. B, 1991, vol.8, p.1576.
68. **Tanaš R., Gantsog Ts.** — Phys. Rev. A, 1992, vol.45, p.5031.
69. **Schleich W., Wheeler J.A.** — Nature, 1987, vol.326, p.574.
70. **Schleich W., Horowicz R.J., Varro S.** — Phys. Rev. A, 1989, vol.40, p.7405.
71. **Hong C.K., Mandel L.** — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.56, p.58.
72. **Filipowicz P., Javanainen J., Meystre P.** — J. Opt. Soc. Am. B, 1986, vol.3, p.906.
73. **De Oliveira F.A.M., Kim M.S., Knight P.L., Buž ek V.** — Phys. Rev. A, 1990, vol.41, p.2645.
74. **Yuen H.P.** — Phys. Rev. A, 1976, vol.13, p.2226.
75. **Kim M.S., de Oliveira F.A.M., Knight P.L.** — Phys. Rev. A, 1989, vol.40, p.2494.
76. **Král P.** — J. Mod. Opt., 1990, vol.37, p.889.
77. **Шумовский А.С.** — ТМФ, 1991, т.89, с.438.
78. **Chizhov A.V., Gantsog Ts., Murzakhmetov B.K.** — Quantum Opt., 1993, vol.5, p.85.
79. **Mollow B.R., Glauber R.J.** — Phys. Rev., 1967, vol.160, p.1076.
80. **Mollow B.R., Glauber R.J.** — Phys. Rev., 1967, vol.160, p.1097.
81. **Barnett S.M., Knight P.L.** — J. Opt. Soc. Am. B, 1985, vol.2, p.467.
82. **Caves C.M., Schumaker B.L.** — Phys. Rev. A, 1985, vol.31, p.3068.
83. **Schumaker B.L., Caves C.M.** — Phys. Rev. A, 1985, vol.31, p.3093.
84. **Louisell W.H., Yariv A., Siegman A.E.** — Phys. Rev., 1961, vol.124, p.1646.

85. Chizhov A.V., Murzakhmetov B.K. — Phys. Lett. A, 1993, vol.176, p.33.
86. Caves C.M., Chang Zhu, Milburn G.J., Schleich W. — Phys. Rev. A, 1991, vol.43, p.3854.
87. Gantsog Ts., Tanas R. — Opt. Commun., 1991, vol.82, p.145.
88. Agarwal G.S. — Phys. Rev. Lett., 1986, vol.57, p.827.
89. Hong C.K., Mandel L. — Phys. Rev. Lett., 1985, vol.54, p.323.
90. Hong C.K., Mandel L. — Phys. Rev. A, 1985, vol.32, p.974.
91. Braunstein S.L., McLachlan R.I. — Phys. Rev. A, 1987, vol.35, p.1659.
92. Hillery M. — Opt. Commun., 1987, vol.62, p.135.
93. Hillery M. — Phys. Rev. A, 1987, vol.36, p.3796.
94. Yu D., Hillery M. — Quantum Opt., 1994, vol.6, p.37.
95. Мурзахметов Б.К., Чижов А.В. — Препринт ОИЯИ, Р17-95-136, Дубна, 1995.
96. Garraway B.M., Knight P.L. — Phys. Rev. A, 1992, vol.46, p.R5346.