

ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

В.В.Пупышев, О.П.Соловцова

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Дан обзор недавних теоретических исследований эффектов, обусловленных далекодействующими потенциалами в упругих и неупругих столкновениях легчайших ядер при низких энергиях. Особое внимание уделено качественному и математически корректному описанию особенностей поведения фаз и сечений упругого рассеяния в пределе низких энергий и аналогам эффекта Рамзауэра. В рамках эффективно-двухчастичного приближения показано, как оценить область энергии столкновения, в которой далекодействующим потенциалом нельзя пренебречь, и как правильно определить радиус действия такого потенциала. В этом же приближении решена задача экстраполяции фаз и сечений упругих столкновений и матричных элементов некоторых ядерных реакций солнечного pp -цикла в область энергий, недоступную для экспериментальных исследований. Развиваемый подход применен для исследования влияния поляризационного потенциала на pp -рассеяние и реакцию $pp \rightarrow d e^+ \nu$, а также для исследования роли взаимодействия магнитных моментов нейтронов в триплетном рассеянии нейтрона на нейтроне.

Recent theoretical investigations of the effects of long-range potentials in low-energy elastic and inelastic collisions of the lightest nuclei are reviewed. Special attention is paid to qualitative and also mathematically correct description of peculiarities of the low-energy behaviour of phase shifts and cross sections and analogues of the Ramsauer effect. In the framework of the effective two-body approximation it is shown how to estimate the energy region, where one cannot neglect a long-range potential and how to determine the action radius of that potential correctly. The same approximation has been used to solve the problem of extrapolating the phase shifts and cross sections of elastic nuclear collisions and nuclear-matrix elements of some solar pp -chain nuclear reactions to the experimentally inaccessible energy region. The developed approach is applied to studying the influence of polarization interaction on the pp -scattering and $pp \rightarrow d e^+ \nu$ reaction and also to investigating the role of magnetic-moment interaction in spin-triplet neutron-neutron scattering.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике [1], в теории ядра [2—5] и теории рассеяния [6—11] потенциал $V^s(r)$, убывающий с ростом расстояния r как юкавский,

$$V^s(r) \sim V_0^s r^{-1} \exp(-\mu r), \quad V_0^s = \text{const}, \quad \mu > 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (1)$$

или быстрее, принято называть короткодействующим. Короткодействующим потенциалом V^s можно пренебречь в некоторой области $r > r_s$. Ее нижнюю границу r_s обычно называют радиусом действия этого потенциала. Потенциалы, убывающие более медленно, например, как

$$V^a(r) \sim V_0^a r^{-a}, \quad V_0^a = \text{const}, \quad a > 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (2)$$

называют дальнедействующими. Считается, что их радиус действия равен бесконечности. Наиболее важными для ядерной физики низких энергий являются такие электромагнитные дальнедействующие взаимодействия, как кулоновское ($V^c \sim r^{-1}$) и поляризационное ($V^p \sim r^{-4}$), а также взаимодействие магнитного момента частицы с кулоновским полем ядра ($V_{ls}^m \sim r^{-3}$) и взаимодействие двух магнитных моментов ($V^m \sim r^{-3}$). Не менее интересны и возможные суперпозиции этих потенциалов и короткодействующего потенциала V^s , описывающего ядерное взаимодействие.

Роль кулоновского взаимодействия в ядерной физике низких энергий и разнообразные кулон-ядерные эффекты, обусловленные суперпозицией $V^{cs} = V^c + V^s$, достаточно подробно исследованы как теоретически, так и экспериментально. Результаты отражены в многочисленных монографиях [5—11] и обзорах [12—14]. Влияние взаимодействия V_{ls}^m на нейтрон-ядерное рассеяние также хорошо изучено [15—18]. Результаты недавних теоретических исследований эффектов, порождаемых суперпозициями

$$V^{cps} = V^c + V^p + V^s, \quad (3)$$

$$V^{ms} = V^m + V^s, \quad (4)$$

еще не суммировались. Это и послужило поводом для написания настоящего обзора, посвященного анализу современного состояния теории потенциального рассеяния суперпозициями (3) и (4).

Основные цели обзора таковы: показать важность учета дальнедействующих потенциалов в ядерной физике низких энергий, дать корректное определение коротко- и дальнедействующего потенциалов, описать способы определения области энергии, в которой нельзя пренебречь дальнедействующим потенциалом по сравнению с ядерным взаимодействием, привести качественные оценки влияния дальнедействующих потенциалов на упругие и неупругие столкновения и изложить эффективные математические методы, позволяющие корректно учесть такое влияние.

В разд.2 обсуждается роль поляризационного потенциала в упругих ядерных и пион-ядерных столкновениях. В разд.3 анализируется влияние этого же потенциала на реакции нуклеосинтеза. Раздел 4 посвящен понятию радиуса действия поляризационного потенциала. В разд.5 исследуется влияние взаимодействия магнитных моментов нейтронов на триплетное нейтрон-нейтронное рассеяние.

2. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Как известно [1,3,19], наиболее существенные детали рассеяния медленной частицы одноименно-заряженным комплексом частиц могут быть установлены и исследованы в рамках двухчастичной модели с эффективным потенциалом (3). В системе единиц, используемой далее, $\hbar, c, \mu = 1$, кулоновский потенциал имеет вид $V^c = 1/rR$, где r — расстояние между налетающей частицей и ц.м. комплекса, а $R = \hbar^2 / 2\mu z_1 z_2 e^2$ — боровский радиус системы частица + комплекс. Если комплекс имеет сферически-симметричное распределение заряда, что и предполагается в этом разделе, то остаток кулоновских взаимодействий между медленно налетающей частицей и частицами комплекса, т.е. поляризационный потенциал, имеет в адиабатическом приближении [19] асимптотику [20]

$$V^p(r) \sim -\alpha_e / 2 |R| r^4, \quad r \gg |R|, \quad (5)$$

где электрическая поляризуемость комплекса $\alpha_e > 0$.

Например [21], при рассеянии медленных протонов на дейтроне поляризационное pd -взаимодействие имеет асимптотику (5). Экспериментальное значение [22] поляризуемости дейтрона $\alpha_e = (0,7 \pm 0,015) \text{ фм}^3$, поляризуемости ядер ^3H , ^3He и ^4He на порядок меньше [23], $\alpha_e \approx 0,07 \text{ фм}^3$, еще меньшей поляризуемостью [24] $\alpha_e = (1,07 \pm 0,11) \cdot 10^{-3} \text{ фм}^3$ обладает протон [25].

Как отмечалось в [26], метод, позволяющий строго рассчитывать эффективный потенциал взаимодействия заряженной частицы с мишенью из двух заряженных частиц при произвольных соотношениях между их зарядами и массами, был развит в [27—29]. В более общем случае такой метод неизвестен.

Последнее слагаемое V^s суммы (3), описывающее ядерную (некулоновскую) часть эффективного взаимодействия частицы с комплексом, убывает гораздо быстрее поляризационного взаимодействия,

$$|V^s(r)/V^p(r)| \ll 1, \quad r > r_s, \quad (6)$$

и из-за эффекта экранировки [7] отталкивающим центробежным барьером $l(l+1)r^{-2}$ слабо влияет на медленные столкновения с ненулевым орбитальным моментом l . Поэтому в этом разделе обсуждаются лишь S -волновые ($l=0$) столкновения частицы и кластера-ядра, взаимодействующих посредством суперпозиции (3). Согласно (5) предполагаем, что

$$V^p(r) \equiv -(\alpha_e/2 |R| r^4) \Theta(r-r_p), \quad r_s < r_p \sim |R|, \quad (7)$$

где Θ — тэта-функция, а r_p — произвольный, но фиксированный параметр. В области $r < r_p$ поляризационное взаимодействие является сложным нелокальным потенциалом [27] и может иметь r^{-2} -зависимость [30]. В этой области поляризационное взаимодействие обычно учитывается без задания его явного вида. Способ такого безмодельного учета мы опишем ниже. Так как ядерное взаимодействие известно с большой неопределенностью [3,5], то на него накладываем самые общие ограничения [6], не противоречащие теории ядерных сил [2,15], а именно:

$$\int_0^{\infty} |V^a(t)| t dt < \infty, \quad (8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^n \exp[4(r/R)^{1/2}] V^a(r) = 0, \quad (9)$$

где $n=0, 1, \dots$ и $a=s$. Далее верхними индексами a , ca или c, a отмечаем потенциал, дополнительный к кулоновскому, и все функции, характеризующие исследуемое рассеяние суперпозицией $V^{ca} = V^c + V^a$. Опишем более подробно обозначения для фаз: δ^{ca} — полная фаза рассеяния потенциалом $V^{ca} = V^c + V^a$; символ $\delta^{c,a}$ будет означать фазу рассеяния, порожденную потенциалом V^a в кулоновском поле и отсчитанную от ку-

лоновской фазы δ^c . Например, $\delta^{c,p}$ — кулон-поляризационная фаза (случай $a = p$), а $\delta^{c,s}$ — кулон-ядерная фаза (случай $a = s$). В случае $a = ps$, т.е. при рассеянии суперпозицией $V^{ca} = V^{cps}$ трех, а не двух потенциалов, верны два разбиения полной фазы:

$$\delta^{cps} = \delta^c + \delta^{c,ps} = \delta^c + (\delta^{c,p} + \delta^{c,p,s}), \quad (10)$$

$$\delta^{c,ps} = \delta^{cp} + \delta^{cp,s} = (\delta^c + \delta^{c,p}) + \delta^{cp,s}. \quad (11)$$

Эти разбиения неэквивалентны с физической точки зрения в следующем смысле. В (10) кулон-поляризационно-ядерная фаза $\delta^{c,ps}$ порождена суммой $V^{ps} = V^p + V^s$ в кулоновском поле и отсчитывается от кулоновской фазы. В (11) кулон-поляризационно-ядерная фаза $\delta^{c,ps}$ обусловлена потенциалом V^s в кулон-поляризационном поле $V^{cp} = V^c + V^p$ и отсчитывается от кулон-поляризационной фазы $\delta^{cp} \equiv \delta^c + \delta^{c,p}$. Анализ фазы $\delta^{c,ps}$ позволяет судить о параметрах суммы V^{ps} , но не о параметрах ее слагаемых. Для восстановления формы и параметров ядерного взаимодействия требуется знание фазы $\delta^{cp,s}$ и коэффициентов ее низкоэнергетического разложения.

Символом $A(k)$ обозначается предел при $r \rightarrow \infty$ функции $\underline{A}(r; k)$, где $k = \sqrt{E}$ — импульс рассеяния в системе центра масс; $\underline{A}(r; k)$ и $\hat{A}(r; k)$ — борновское и ВКБ-приближения для этой же функции; наконец, $\hat{\delta}_{m,l}$ — дельта-функция Кронекера.

Основными формулами для нашего анализа будут известные низкоэнергетические ($E, k \rightarrow 0$) или пороговые асимптотики кулоновской [1], кулон-поляризационной [31,32] и кулон-ядерной [33] фаз рассеяния:

$$\delta^c(k) \sim \eta(\ln \eta - 1) + \pi/4, \quad V^c > 0, \quad (12)$$

$$\text{tg } \delta^{c,p}(k) \sim \begin{cases} 4\alpha_e k^5 R^2 / 15, & V^c > 0, \\ -a^{c,p} k C^2(\eta), & V^c < 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{tg } \delta^{c,s}(k) \sim -a^{c,s} k C^2(\eta) [1 - a^{c,s} k^2 (r^{c,s} / 2 + R/3)]. \quad (14)$$

Здесь $\eta \equiv 1/2kR$ — параметр Зоммерфельда, $C^2(\eta) \equiv 2\pi\eta / (\exp(2\pi\eta) - 1)$ — кулоновский барьерный множитель [11], а коэффициенты $a^{c,p}$, $a^{c,s}$ и $r^{c,s}$ называются длинами рассеяния и эффективным радиусом [3,5,13]. Коэффициенты низкоэнергетических разложений фаз — фундаментальные

характеристики низкоэнергетических ядерных столкновений, позволяющие судить о различных параметрах ядро-ядерных [3,34] и нуклон-нуклонных [5,35] взаимодействий. Поэтому корректное определение всех таких коэффициентов является важной задачей теории рассеяния.

Как известно из этой теории [6,10], потенциальное рассеяние при высоких (низких) энергиях определяется в основном поведением потенциала в области малых (больших) расстояний. Экспериментальные данные о S -фазах ядерных [3] и нуклон-нуклонных [5] столкновений известны при больших энергиях ($E \geq 10$ МэВ), когда влияние поляризационного хвоста (7) пренебрежимо мало. Экстраполяция этих данных по формулам (14) для короткодействующего потенциала в область низких энергий дает кулон-ядерные параметры $a^{c,s}$ и $r^{c,s}$. Строго говоря, ядерное взаимодействие V^s , восстановленное по данным рассеяния при больших энергиях, содержит всю информацию о поляризационном взаимодействии, обрезанном в некоторой точке $r \approx r_s$. В области $r < r_s$ такое ядерное взаимодействие на самом деле есть суперпозиция V^{ps} , из которой невозможно выделить ее слагаемые. При $r > r_s$ дополнительная к кулоновской часть эффективного взаимодействия V^{cps} также является суперпозицией $V^{ps} = V^p + V^s$, в которой явный вид (7) первого слагаемого доказан теоретически.

Итак, предположения (6), (7) и неравенство $r_s < r_p$ не только физически обоснованы, но и позволяют избежать двойного учета поляризационного взаимодействия в области $r < r_s$. Способ включения поляризационного потенциала, основанный на этих соотношениях, представляется наиболее корректным и единственно возможным в настоящее время. Поэтому далее считаем, что V^s — ядерное взаимодействие, восстановленное по экспериментальным данным в области больших энергий, а $r_s < r_p$.

Картина порогового потенциала рассеяния определяется в основном поведением хвоста потенциала [1,10]. Согласно (3) и (5)—(6) хвост потенциала V^{cps} равен сумме $V^c + V^p$. Если $V^c > 0$ и $k \rightarrow 0$, то, благодаря (13) и (14), имеем $|\delta^{c,p} / \delta^{c,s}| \gg 1$, и поэтому [31]

$$\delta^{c,ps}(k) \sim \delta^{c,p}(k) \sim O(\alpha_e k^5 R^2). \quad (15)$$

Иными словами, если кулоновский потенциал является отталкивающим, то вклад от поляризационного потенциала в фазу $\delta^{c,ps}$ доминирует над вкладом от ядерного потенциала при достаточно низких энергиях. Следовательно, при таких энергиях поляризационный потенциал необходимо учитывать для корректного анализа ядерных столкновений.

Внимание к этому физически очевидному факту было привлечено вновь в докладе [36] и последующей работе [37]. Ее авторы подставили S -фазу pd -рассеяния $\delta^{c,ps}$, аппроксимированную суммой

$$\delta^{c,ps}(k) = \delta^{c,p}(k) + \delta^{c,s}(k), \quad (16)$$

в формулу

$$K^{c,ps}(k) \equiv kC^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta^{c,ps}(k) + h(\eta)/R, \quad (17)$$

и далее с помощью соотношения (15) показали, что функция длины рассеяния $A^{c,ps}(E; \alpha_e)$ на пороге ($E=0$) и сама длина рассеяния $a^{c,ps}$

$$A^{c,ps}(E; \alpha_e) \equiv -1/K^{c,ps}(k), \quad a^{c,ps} \equiv \lim_{k \rightarrow 0} A^{c,ps}(E; \alpha_e), \quad (18)$$

являются бесконечными:

$$A^{c,ps}(E; \alpha_e) \sim -(4\alpha_e k^5 R^3 / 15\pi) \exp(\pi/kR), \quad k \rightarrow 0; \quad a^{c,ps} = -\infty. \quad (19)$$

Так было доказано, что если для суперпозиции (3) функции эффективного радиуса $K^{c,ps}$, длины рассеяния $A^{c,ps}(E; \alpha_e)$ и саму длину рассеяния $a^{c,ps}$ определить формулами (17) и (18), т.е. по аналогии с кулон-ядерной функциями эффективного радиуса [1,33]

$$K^{c,s}(k) \equiv kC^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta^{c,s}(k) + h(\eta)/R \sim -1/a^{c,s} + k^2 r^{c,s}/2, \quad (20)$$

длины рассеяния $A^{c,s}(E)$ и самой кулон-ядерной длиной рассеяния $a^{c,s}$,

$$A^{c,s}(E) \equiv -1/K^{c,s}(k), \quad a^{c,s} \equiv \lim_{k \rightarrow 0} A^{c,s}(E), \quad (21)$$

то получится физически бессмысленный результат: $a^{c,ps} = -\infty$. Он означает [14], что, в строгом смысле, длина рассеяния $a^{c,ps}$ не существует, и понятие длины рассеяния потенциалом V^s в поле V^{cp} следует определить другим образом [38].

Именно этот факт, впервые отмеченный еще в [31], стимулировал в 80-х годах интенсивное исследование [39—62] эффектов, обусловленных электрической поляризуемостью ядер в упругих и неупругих ядерных реакциях, и дальнейшее развитие [63—72] теории рассеяния для малочастичных систем [8] в пределе низких энергий. До обзора результатов этих

исследований отметим следующий физически очевидный факт. Так как $|V^p/V^c| \ll 1$ всюду, то все эффекты, обусловленные поляризационным взаимодействием (поляризационные эффекты), являются несущественными поправками к чисто кулоновской картине рассматриваемого столкновения. Эти поправки необходимо исследовать только математически корректными методами. Только тогда последующие физические выводы будут достоверными. Сравним по эффективности три таких метода. Для этого обсудим результаты, полученные в их рамках.

2.1. Эффективно-двухчастичная задача рассеяния. В серии работ [39—62] поляризационные эффекты исследовались в рамках следующей эффективно-двухчастичной модели. Предполагалось, что S -волновая функция $u^{ca}(r; k)$ рассеяния двух ядер является регулярным ($u^{ca}(0; k) = 0$) решением уравнения Шредингера

$$[\partial_r^2 + k^2 - V^c(r) - V^a(r)] u^{ca}(r; k) = 0, \quad (22)$$

нормированным на единичную плотность потока на бесконечности:

$$u^{ca}(r; k) \sim \sin[\rho - \eta \ln 2\rho + \delta^c(k) + \delta^{c,a}(k)], \quad \rho \equiv kr \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Поляризационный потенциал брался в виде (7), и неявно предполагалось, что выполняются все соотношения (5)—(9).

В [39] и [40] роль поляризуемости дейтрона в S -волновом pd -рассеянии исследовалась путем численного интегрирования (22) для функции $u^{c,ps}$. Фаза $\delta^{c,ps}$ извлекалась из вычисленной асимптотики (23). Далее изучалась функция $D(b)$ (см. (3)—(5) в [40]), совпадающая с функцией

$$t^{c,a}(b; k) \equiv \operatorname{tg} \delta^{c,a}(b; k), \quad (24)$$

имеющей смысл [9] тангенса фазы рассеяния $\delta^{c,a}(b; k)$ в случае потенциала V^a , $a = ps$, обрезанного в точке $r = b$. Длина рассеяния $a^{c,ps}(b)$ таким обрезанным потенциалом вводилась по аналогии с кулон-ядерной длиной $a^{c,s}$ из разложения (20), т.е. как предел

$$a^{c,ps}(b) \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} t^{c,ps}(b; k) / kC^2(\eta). \quad (25)$$

Далее было показано, что функция (25) имеет асимптотику

$$a^{c,ps}(b) \sim -(\alpha_e/4R^2) \exp[v(b/R)^{1/2}], \quad 2 < v < 4, \quad b \gg R, \quad (26)$$

а формулы (17), (18) и (24)—(26) использовались для того, чтобы доказать, что предел функции (25) при $b \rightarrow \infty$ есть бесконечная «длина» рассеяния $a^{c,ps}$ необрезанным потенциалом V^{ps} .

Точность всех вычислений, выполненных в [40], невысока, так как уже основное соотношение (26), найденное численным интегрированием (22), противоречит выведенной аналитически асимптотике [41,60]

$$a^{c,ps}(b) \sim (-\alpha_e R / 16\pi b^3) \exp [4(b/R)^{1/2}], \quad b \gg R. \quad (27)$$

В связи с этим критическим замечанием и дальнейшей дискуссией поясним, почему в пределе низких энергий ($k \rightarrow 0$) вычисление волновой функции $u^{c,ps}$ и фазы $\delta^{c,ps}$ невозможно прямым интегрированием (22). Во-первых, даже в случае $V^a \equiv 0$ вычисление как регулярного F , так и нерегулярного G решений (22), т.е. кулоновских функций [73] с нулевым орбитальным моментом ($l=0$), возможно лишь специальными методами [63,74,75], основанными на известных в теории дифференциальных уравнений [76—79] асимптотических разложениях [79,80]. Например, при $r \ll r_c$, где $r_c \equiv 1/k^2 R$ — кулоновская точка поворота, удобно использовать разложения Бесселя — Клиффорда [73], записанные в виде [63]

$$F(\rho, \eta) = kC(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} f_n(r), \quad G(\rho, \eta) \sim C^{-1}(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} g_n(r). \quad (28)$$

Во-вторых, если $k \rightarrow 0$, то асимптотика (23) быстро осциллирует, фаза δ^c велика, фаза $\delta^{c,ps}$ стремится к нулю, а функция $u^{c,ps}$ быстро убывает [42,60] в области $r < r_c$, где $u^{c,ps} = O(\rho C(\eta))$. Наконец, чтобы найти фазу $\delta^{c,ps}$, решая (22), необходимо [78] вычислить функцию $u^{c,ps}$ с относительной точностью $\epsilon \leq |\delta^{c,ps}|$ для любых $r \leq B$, где верхняя граница B отрезка интегрирования уравнения (22) должна быть равной [57,61,62] не скольким r_c .

Итак, если $k \rightarrow 0$, то для корректного вычисления волновой функции $u^{c,ps}$ и фазы $\delta^{c,ps}$ требуется достичь лучшей точности ($\epsilon \rightarrow 0$) на большем интервале ($B \rightarrow \infty$).

В силу вышеуказанных причин непосредственное численное решение задачи Шредингера (22), (23) все более усложняется при уменьшении энергии. Очевидно, что эту задачу следует переформулировать в виде, более удобном как для численного, так и для аналитического исследований. Это было сделано в работах [32,41,42] и [55—64].

2.2. Нелинейные версии метода фазовых функций. Как известно [31] еще с 1965 года, борновское приближение

$$\operatorname{tg} \delta^{c,a}(k) \approx \operatorname{tg} \tilde{\delta}^{c,a}(k) \equiv -k^{-1} \int_b^{\infty} V^a(t) F^2(kt, \eta) dt, \quad b \leq r_c \quad (29)$$

правильно описывает пороговое поведение фазы рассеяния $\delta^{c,a}$, порожденной поправкой (2) с $a > 3$ к отталкивающему кулоновскому потенциалу. В [32] Квицинский обобщил это утверждение на случай $1 < a < 3$, доказав асимптотические ($k \rightarrow 0$) соотношения

$$\delta^{c,a}(k) \sim \varphi^{c,a}(b; k) \equiv - \int_{r_c}^b [V^a(t)/2p^c(t; k)] dt, \quad (30)$$

$$\delta^{c,a}(k) \sim -(V_0^a/2R^{1-a}) k^{2a-3} B(a-1, 1/2), \quad (31)$$

в которых $b = \infty$, B — бета-функция [73], а $\varphi_0^{c,a}$ — нулевое приближение для решения $\varphi^{c,a}$ нелинейного фазового уравнения Дашена [81]

$$\begin{aligned} \partial_r \varphi^{c,a} &= (V^a/2p^c) [\cos 2(\chi^c + \varphi^{c,a}) - 1] + \\ &+ (\partial_r p^c/p^c) \sin \varphi^{c,a} \cos(\varphi^{c,a} + 2\chi^c) \end{aligned} \quad (32)$$

с единственным граничным условием $\varphi^{c,a}(r_c; k) = 0$ и функциями

$$p^c(r; k) \equiv k(1 - r_c/r)^{1/2}, \quad (33)$$

$$\chi^c(r; k) \equiv \operatorname{arctg} [p^c(r; k) F(p, \eta) / \partial_r F(p, \eta)]. \quad (34)$$

Неоднородный член уравнения (32), содержащий кулоновский квазиимпульс (33), сингулярен в граничной точке $r = r_c$, поэтому уравнение (32), дополненное лишь одним граничным условием $\varphi^{c,a}(r_c; k) = 0$, может иметь много решений [76]. При таком граничном условии и любом k фаза рассеяния $\delta^{c,a}(k) \equiv \varphi^{c,a}(\infty; k)$ не зависит от поведения потенциала V^a при $r < r_c$, что с физической точки зрения представляется абсурдным. Как отмечалось в [62], уравнение (32) следует регуляризовать методом Дашена [81] или же дополнить вторым граничным условием, например, задать производную $\partial_r \varphi^{c,a}$ в точке r_c и тем самым включить информацию о пове-

дении потенциала V^a при $r \leq r_c$. Так как (32) содержит слагаемое $V^a/2p^c$ и осциллирующую при $k \rightarrow 0$ фазу (34), то оно неудобно даже для качественных исследований. Действительно, решение $\varphi^{c,a}(r; k)$, взятое в некоторой точке $r = b$, не имеет смысла фазы рассеяния потенциалом V^a , обрезанным в этой точке, сходится к своему предельному при $b \rightarrow \infty$ значению $\varphi^{c,a}(\infty; k)$ слишком медленно и, более того, осциллирует в обоих случаях: $k \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$. Удобнее оперировать функциями, имеющими явный физический смысл при любых r и удовлетворяющими корректным и более простым уравнениям. Такими функциями являются фазовая функция [41,57] $\delta^{c,a}$, приведенные амплитудные функции [42,58,59] cs^{ca} и sn^{ca} и амплитудные функции [60—64] c^{ca} и s^{ca} .

Бенц и Чендлер [41], используя соотношения (24), (25) и предельные при $k \rightarrow 0$ формы рядов (28), свели известное уравнение [10]

$$\begin{aligned} \partial_r \delta^{c,a}(r; k) = & -k^{-1} V^a(r) [F(\rho, \eta) \cos \delta^{c,a}(r; k) + \\ & + G(\rho, \eta) \sin \delta^{c,a}(r; k)]^2 \end{aligned} \quad (35)$$

с граничным условием $\delta^{c,a}(0; k) = 0$ к краевой задаче

$$\partial_r a^{c,a}(r) = -V^a(r) [f_0(r) - a^{c,a}(r) g_0(r)]^2, \quad a^{c,a}(0) = 0 \quad (36)$$

для функции (25) и нашли аналитически асимптотику ее производной $\partial_r a^{c,a}$ при $r \rightarrow \infty$ и $a = ps$. Интегрируя эту асимптотику, нетрудно вывести формулу (27). Хотя Бенц и Чендлер [41] отметили, что их главный результат ($|a^{c,ps}| = \infty$) подразумевался в [10], необходимо напомнить основной результат работы [82] Бабикова, что позволит нам сформулировать полезный критерий. Представив функции Кулона рядами Бесселя — Клиффорда [73] и используя для фазовой функции (24) асимптотическое разложение

$$t^{c,a}(r; k) \sim -kC^2(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} A_n^{c,a}(r; h(\eta)), \quad (37)$$

Бабиков [82] свел уравнение

$$\partial_r t^{c,a}(r; k) = -k^{-1} V^a(r) [F(\rho, \eta) + t^{c,a}(r; k) G(\rho, \eta)]^2 \quad (38)$$

с граничным условием $t^{c,a}(0; k) = 0$ к рекуррентным ($n = 0, 1, \dots$) уравнениям для функций $A_n^{c,a}$. Применив к (38) итерационный метод [77],

можно доказать, что $|A_m^{c,a}(\infty; 0)| < \infty$ тогда и только тогда, когда потенциал V^a подчиняется условиям (8) и (9) для всех $n \leq m+1$. Этот критерий и тождество $a^{c,ps}(\infty) = A_0^{c,ps}(\infty; 0)$, вытекающее из (25) и (37), означают, что равенство $|a^{c,ps}| = \infty$ подразумевалось уже в [82].

Эффективным методом [9,10] исследования вклада от хвоста потенциала V^a в фазу $\delta^{c,a}(k)$ является анализ отношения фазовой функции $\delta^{c,a}(r; k)$ к ее асимптотическому значению $\delta^{c,a}(\infty; k)$, равному этой фазе. Чтобы пояснить этот метод, приведем основные результаты исследования влияния поляризуемости дейтрона на S -волновое π^+d -рассеяние [57].

В [57] уравнение (35) было переписано в безразмерной переменной $\rho = kr$:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \delta^{c,a}(\rho; k) = & -k^{-2} V^a(\rho/k) [F(\rho, \eta) \cos \delta^{c,a}(\rho; k) + \\ & + G(\rho, \eta) \sin \delta^{c,a}(\rho; k)]^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Далее исследовалась зависимость фазовой функции $\delta^{c,p}(\rho; k, r_p)$, т.е. решения уравнения (39) при $a=p$ и граничном условии $\delta^{c,p}(\rho_p; k, r_p) = 0$, $\rho_p \equiv kr_p$, от свободного параметра r_p поляризационного потенциала (7). Как оказалось, если $E \leq 1$ кэВ, то четвертая значащая цифра функции $\delta^{c,p}(\rho; k, r_p)$ не изменяется при увеличении ρ в области $\rho \geq 15\rho_c$, где $\rho_c = kr_c$. Относительная точность $\varepsilon = 10^{-4}$ была вполне достаточна и поэтому значения фаз $\delta^{c,p}(k, r_p)$ принимались всюду равными значениям соответствующих фазовых функций $\delta^{c,p}(15\rho_c; k, r_p)$.

Как следует из табл.1, кулон-поляризационная фаза $\delta^{c,p}(k, r_p)$ слабо зависит от параметра r_p при достаточно низких энергиях. Этот вывод подтверждается и рис.1, где изображены графики функций

$$D(\rho; E, r_p) \equiv \delta^{c,p}(\rho; k, r_p) / \delta^{c,p}(k, r_p). \quad (40)$$

Согласно рис.1 с уменьшением энергии зависимость фазовых функций и функций (40) от величины параметра r_p становится все более слабой. Действительно, при $E = 0,1$ кэВ функции (40), соответствующие трем различным значениям параметра $r_p = 0,1R; R; 10R$, совпадают друг с другом

Таблица 1. Фаза $\delta^{c,p}(k, r_p)$ (рад) π^+d -рассеяния в зависимости от энергии E (кэВ) и параметра $r_p = \gamma R$ поляризационного потенциала

γ E	0,1	1	10
0,01	$2,0141 \cdot 10^{-15}$	$2,0141 \cdot 10^{-15}$	$2,0141 \cdot 10^{-15}$
0,1	$7,5129 \cdot 10^{-13}$	$7,5129 \cdot 10^{-13}$	$7,5129 \cdot 10^{-13}$
0,2	$4,3480 \cdot 10^{-12}$	$4,3479 \cdot 10^{-13}$	$4,3470 \cdot 10^{-13}$
0,4	$2,6058 \cdot 10^{-11}$	$2,5948 \cdot 10^{-11}$	$2,5774 \cdot 10^{-11}$
0,6	$7,9769 \cdot 10^{-11}$	$7,6569 \cdot 10^{-11}$	$7,1999 \cdot 10^{-11}$
0,8	$1,9417 \cdot 10^{-10}$	$1,7003 \cdot 10^{-10}$	$1,3951 \cdot 10^{-10}$
1,0	$4,1678 \cdot 10^{-10}$	$3,2091 \cdot 10^{-10}$	$2,1325 \cdot 10^{-10}$

в области $\rho > 0,7r_c$ с относительной точностью $\epsilon = 10^{-4}$. Штриховая кривая — общий график этих функций. Из рис.1 также следует, что роль области $\rho \leq 0,8r_c$ (т.е. $r \leq 0,8r_c$) в формировании фазы $\delta^{c,p}(k, r_p)$ невелика. При $E \leq 1$ кэВ эти фазы независимо от значения $r_p \geq 0,1R$ формируются главным образом на интервале $(0,8r_c, 2r_c)$, т.е. в области достаточно больших в ядерном масштабе расстояний ($R = 104$ фм, а $r_c \approx 1,4 \cdot 10^4$ фм при $E = 1$ кэВ). С уменьшением энергии обе границы этого интервала увеличиваются как $O(E^{-1}R^{-1})$. Такое поведение фазовых функций $\delta^{c,p}(\rho; k, r_p)$ и их слабая зависимость от параметра r_p качественно объясняются эффектом экранировки [7,20] поляризационного потенциала отталкивающим кулоновским барьером в квазиклассически недоступной [80] области расстояний ($r < r_c$). Математическое доказа-

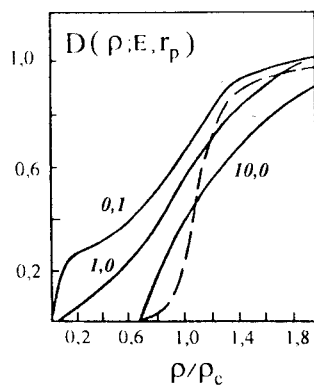


Рис.1. Функции $D(\rho; E, r_p)$ при энергиях $E = 1$ кэВ (сплошные кривые) и $E = 0,1$ кэВ (штриховая кривая) и различных значениях параметра $r_p = \gamma R$. Числа у кривых — значения γ

тельство [31] слабой зависимости фазы $\delta^{c,p}$ от поведения поляризационного потенциала в этой области основано на следующем анализе борновского интеграла (29), возникающего в результате первой итерации уравнения (39). Как известно [75], $F^2 = O(\rho^2 C^2(\eta))$ при $r < r_c$ и $F^2 = O(k/2p^c(r; k))$ при $r > r_c$. Если $k \rightarrow 0$, то вклад от области $r < r_c$ в интеграл (29) убывает как $O(\exp(-\pi/kR))$ и пренебрежимо мал по сравнению с вкладом (30) в этот же интеграл от области $r > r_c$, убывающим, согласно (31), как $O(\alpha_c k^5 R^2)$.

В [57] также было установлено, что относительная точность борновской аппроксимации $\delta^{c,p} \approx \tilde{\delta}^{c,p}$ не хуже чем 10^{-4} , если $E \leq 1$ кэВ. Далее было показано, что аппроксимация $u^{cp} \approx u_{as}^{cp}$ волновой функции u^{cp} ее асимптотической при $\rho \rightarrow \infty$ формой

$$u_{as}^{ca}(r; k) \equiv F(\rho, \eta) \cos \delta^{c,a}(k, r_p) + G(\rho, \eta) \sin \delta^{c,a}(k, r_p), \quad (41)$$

где $a=p$, верна с относительной точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, если $E \leq 1$ кэВ, $r_p \geq 0,1R$ и $r \geq 2r_c$, а асимптотическое представление (23) справедливо при тех же ограничениях на E и r_p , но с худшей относительной точностью $\varepsilon = 0,1$, и в области еще больших расстояний, а именно при $r > 10r_c$.

Предположение $r_s < r_p \sim R$ о параметре r_p поляризационного потенциала (7) означает, что области расстояний, в которых действуют потенциалы V^s и V^p , не перекрываются. Это позволило вычислить в [57] фазовую функцию $\delta^{c,p_s}(\rho; k, r_p)$ модельно-независимым образом, т.е. без задания конкретной формы π^+d -ядерного потенциала V^s . Для этого использовалось общепринятое [1] определение радиуса действия r_s как точки на оси r , справа от которой можно положить $V^s = 0$. Поэтому в точке $\rho_s = kr_s$ функция $\delta^{c,p_s}(\rho; k, r_p)$ равна кулон-ядерной фазе $\delta^{c,s}$. Не зная потенциал V^s , эту фазу при низких энергиях можно вычислить по формуле (14), используя экспериментальное значение [83] пион-дейтронной длины рассеяния $a^{c,s} = 0,079$ фм. Таким образом, предположение $r_s < r_p$ позволяет нормировать фазовую функцию $\delta^{c,p_s}(\rho; k, r_p)$ в точке ρ_p ее экспериментальным значением, равным кулон-ядерной π^+d -фазе $\delta^{c,s}(k)$.

Так как $r_s < r_p$, то в [57] полагалось, что $V^{ps} = V^p$ при $\rho \geq \rho_p$, а уравнение (39) дополнялось граничным условием $\delta^{c,ps}(\rho_p; k, r_p) = \delta^{c,s}(k)$. Оказалось, что фазы $\delta^{c,ps}(k, r_p) \equiv \delta^{c,ps}(15\rho_c; k, r_p)$, вычисленные решением такой краевой задачи, так же, как и фазы $\delta^{c,p}(k, r_p)$, слабо зависят от параметра r_p . Этим же свойством обладают функции фаз $\delta^{c,a}(k, r_p)$, $a = p, ps$, такие как функция длины рассеяния $A^{c,ps}$ из (18) и S -волновые сечения π^+d -рассеяния

$$\sigma^{ca}(E) = 4\pi[k^{-1} \sin(\delta^c(k) + \delta^{c,a}(k))]^2, \quad a = p, s, ps. \quad (42)$$

Здесь уместно привести схему доказательства того, что важное для дальнейшего анализа приближение (16) верно при условиях (6) и (7). Пусть $a = ps$. При $r \leq r_s$ имеем $V^{ps} = V^s$, поэтому значение фазовой функции $\delta^{c,ps}(\rho; k)$ в точке ρ_s равно кулон-ядерной фазе $\delta^{c,s}(k)$. Это значение используем в качестве граничного условия $\delta^{c,ps}(\rho_s; k) = \delta^{c,s}(k)$ для уравнения (39) в области $\rho \geq \rho_s$, где $V^{ps} \approx V^p$. Такую краевую задачу запишем в интегральной форме и применим итерационный метод [77]. В результате первой итерации фаза $\delta^{c,ps}$ представится в виде суммы кулон-ядерной фазы и борновского интеграла (29) с нижним пределом $b = r_s$ и индексом $a = 4$. Точность борновского приближения довольно высокая, что позволяет заменить в этой сумме $\tilde{\delta}^{c,p}$ на $\delta^{c,p}$ и получить формулу (16).

Используя (13), (14) и (16), поясним поведение функции длины рассеяния $A^{c,ps}$ и оценим границы E^- и E^+ интервалов $E \leq E^-$ и $E \geq E^+$ энергий, при которых вклад потенциала V^p и, соответственно, V^s в рассеяние является доминирующим. Оценки такого сорта условны и зависят от подразумеваемой точности. Условимся о следующем определении: вклад $A^{c,p}$ от V^p (или вклад $A^{c,s}$ от V^s) в исследуемую функцию $A^{c,ps}$ является доминирующим при $E \leq E^-$ (или при $E \geq E^+$), если $|A^{c,s}/A^{c,ps}| \leq 0,1$ при $E \leq E^-$ (или $|A^{c,s}/A^{c,ps}| \geq 0,9$ при $E \geq E^+$).

На рис.2 сплошной кривой изображен общий график трех функций $A^{c,ps}(E; \alpha_e)$, вычисленных в [57] при $r_p = 0,1R; R; 10R$ по формулам (17), (18) и (39). Если поляризационное взаимодействие выключено ($\alpha_e = 0$), то $\delta^{c,ps} = \delta^{c,s}$, и функция $A^{c,ps}(E; 0)$ равна кулон-ядерной функции длины рассеяния $A^{c,s}(E)$, изображенной на рис.2 штриховой линией. В силу (14), (20) и

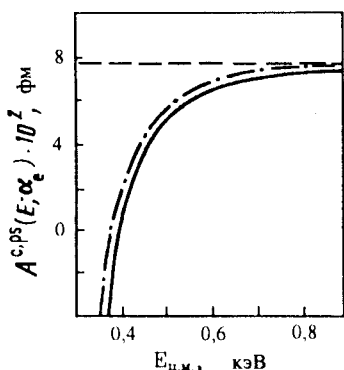


Рис.2. Функция длины π^+d -рассеяния $A^{c,ps}(E; \alpha_e)$, вычисленная методом фазовых функций (сплошная кривая) и методом ВКБ (штрихпунктирная) при $\alpha_e = 0,7$ фм³. Штриховая линия — функция $A^{c,ps}(E; \alpha_e) = A^{c,s}(E)$ при $\alpha_e = 0$

(21) функция $A^{c,s}$ слабо зависит от энергии в рассматриваемой области $E \leq 1$ кэВ и имеет в точке $E=0$ конечный предел, равный π^+d кулон-ядерной длине рассеяния $a^{c,s}$. Включение поляризационного взаимодействия (7) с $\alpha_e = 0,7$ фм³ радикально изменяет поведение функции $A^{c,ps}(E; \alpha_e)$. С уменьшением энергии в области $E \leq E^+ = 0,8$ кэВ фаза $\delta^{c,s}$ в сумме (16) убывает быстрее фазы $\delta^{c,p}$, и поэтому функция $A^{c,ps}$ отклоняется от своей «горизонтальной асимптоты» $A^{c,ps}(E; 0) \approx a^{c,s}$. Так как $a^{c,s} > 0$, то фазы $\delta^{c,p}$ и $\delta^{c,s}$ имеют разные знаки, поэтому их сумма $\delta^{c,ps}$ и функция $A^{c,ps}$ обращаются в нуль при $E = E_1 \approx 0,4$ кэВ. С уменьшением энергии в области $E \leq E^- = 0,35$ кэВ фаза $\delta^{c,p}$ доминирует над фазой $\delta^{c,s}$ и, в силу (13), функция $A^{c,ps}$ неограниченно убывает по закону (19).

Обсудим результаты [57] сравнительного ($a = p, s, ps$) анализа π^+d -сечений (42). Сечения σ^{ca} удобно записать в виде суммы

$$\sigma^{ca} = \sigma^c + 8\pi k^{-2} \sin \delta^c \sin \delta^{c,a} \cos(\delta^c + \delta^{c,a}) + \sigma^{c,a} \quad (43)$$

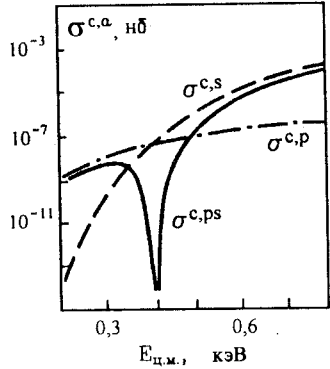
осциллирующих при $k \rightarrow 0$ кулоновского σ^c и интерференционного сечения [1] и гладкого слагаемого $\sigma^{c,a}$, которое обычно исследуется в экспериментах. Согласно (12)—(15) при $k \rightarrow 0$

$$\sigma^c(E) \equiv 4\pi k^{-2} \sin^2 \delta^c(k) = O(k^{-2}), \quad (44)$$

$$\sigma^{c,a}(E) \equiv 4\pi k^{-2} \sin^2 \delta^{c,a}(k) \sim \begin{cases} \pi \left(\frac{2\pi a^{c,s}}{kR} \right)^2 \exp(-2\pi/kR), & a = s, \\ 4\pi \left(\frac{4\alpha_e k^4 R^2}{15} \right)^2, & a = p, ps. \end{cases} \quad (45)$$

Кулоновское сечение (44), осциллируя, стремится к бесконечности. Если $a = p$ или $a = ps$, то второе слагаемое суммы (43) также осциллирует, но

Рис.3. Кулон-поляризационное ($\sigma^{c,p}$), кулон-ядерное ($\sigma^{c,s}$) и кулон-поляризационно-ядерное ($\sigma^{c,ps}$) сечения S -волнового π^+d -рассеяния



из-за степенного по импульсу k убывания (13) фазы $\delta^{c,p}$ имеет пороговое поведение $O(k^3)$. По этой же причине кулон-поляризационно-ядерное сечение $\sigma^{c,ps}$, определенное формулой (45) при $a = ps$, убывает на пороге степенным образом. Оно изображено на рис.3 сплошной кривой. Если $E \leq E^- = 0,35$ кэВ, то $\delta^{c,p} \gg |\delta^{c,s}|$, $\delta^{c,ps} \approx \delta^{c,p}$ и сечение $\sigma^{c,ps}$ обусловлено в основном рассеянием потенциалом V^p . Сечение $\sigma^{c,p}$ такого рассеяния задается формулой (45) при $a = p$ и изображено на рис.3 штрихпунктирной линией. В области $E^- < E < E^+$, где $E^+ = 0,8$ кэВ, фазы $\delta^{c,p}$ и $\delta^{c,s}$ сравнимы по порядку величины, но имеют разные знаки, и оба потенциала V^p и V^s вносят примерно одинаковый вклад в сечение $\sigma^{c,ps}$. В этой области, а именно при $E = E_1 \approx 0,4$ кэВ, фаза $\delta^{c,ps}$ обращается

в нуль, поэтому функция $A^{c,ps}(E)$ и сечение $\sigma^{c,ps}$ равны нулю при той же энергии. При $E \geq E^+$ сечение $\sigma^{c,ps}$ близко к сечению $\sigma^{c,s}$, которое убывает на пороге по экспоненциальному закону (45) и изображено на рис.3 штриховой кривой. В этой области $\delta^{c,ps} \approx \delta^{c,s}$ и влияние поляризуемости дейтрона на π^+d -рассеяние несущественно. Минимум в сечении $\sigma^{c,ps}(E)$ при $E \approx 0,4$ кэВ обусловлен взаимным воздействием отталкивающего пион-ядерного и притягивающего поляризационного потенциалов. Это явление есть S -волновой π^+d -аналог известного в атомной физике [19] эффекта Рамзауэра [84]. Поясним эту аналогию. Как было обнаружено в [84], сечение рассеяния электронов инертными газами Ag, Kr и Xe имеет локальный минимум при энергии около 0,5 эВ. Это явление было названо эффектом Рамзауэра. Позже в [85] было показано, что этот эффект обусловлен совместным воздействием короткодействующего отталкивающего обменного потенциала и дальнегодействующего притягивающего поляризационного потенциала.

Роль поляризационного потенциала (7) в S -волновом π^-d -рассеянии анализировалась в [62] по аналогии с исследованием π^+d -рассеяния [57]. Кулоновский π^-d -потенциал является притягивающим ($V^c < 0$) и не эк-

Таблица 2. Фазовая функция $\delta^{c,p}(r; k, r_p)$ (рад) π - d -рассеяния в зависимости от энергии E (кэВ) и расстояния $r = \gamma |R|$. Все значения умножены на 10^{11}

E γ	0,1	1	10
1,04	1216	1182	908
1,08	2287	2216	1685
1,2	4813	4312	3402
1,4	7462	7183	4947
1,6	8971	8592	5621
1,8	9846	9388	5886
2,0	10356	9837	5976
4,0	11033	10343	6213
6,0	11075	10440	6272
10,0	11161	10503	6295
15,0	11165	10512	6300
30,0	11173	10518	6308

Таблица 3. Фаза $\delta^{c,p}(k, r_p)$ (рад) π - d -рассеяния в зависимости от энергии E (кэВ) и параметра $r_p = \gamma |R|$. При $\gamma = 0,1; 1; 10$ значения фазы умножены, соответственно, на $10^{10}, 10^{11}, 10^{14}$

γ E	0,1	1	10
10^{-4}	69845	11249	12449
10^{-3}	69845	11249	12447
10^{-2}	69841	11242	12372
10^{-1}	69748	11173	11711
1,0	69572	10518	11469
10	69387	6308	6557

ранирует поляризационный потенциал, поэтому в обоих ($a = p, ps$) случаях фазы $\delta^{c,a}(k, r_p)$ формируются в основном на конечном интервале ($r_p < r < r_p + 2|R|$) и быстро убывают с ростом параметра r_p . Эти выводы демонстрируют результаты, приведенные в табл.2 и 3. Как видно из табл.3 и формулы (13), кулон-поляризационная длина π - d -рассеяния $a^{c,p}$ конечна, ($a^{c,p} \approx -4 \cdot 10^{-6}$ фм при $r_p = |R| = 104$ фм) и пренебрежимо мала по сравнению с кулон-ядерной длиной $a^{c,s} = 0,079$ фм. Поэтому из (16) следует, что $\delta^{c,ps} \approx \delta^{c,s}$, если $E \leq 1$ кэВ.

Итак, в случае $V^c < 0$ потенциал V^p является лишь несущественной поправкой к ядерному взаимодействию, и все три ($a = p, s, ps$) сечения $\sigma^{c,a}$ имеют одинаковое пороговое поведение.

Упомянутые результаты работ [41,57,62] показывают, что нелинейные уравнения (35), (36), (38) и (39) позволяют детально исследовать роль поляризационного потенциала (7) в упругих столкновениях. Для исследования влияния этого взаимодействия на ядерную реакцию необходимо знать функцию u^{ca} ее начального состояния. Построение такой функции требует решения задач (35) или (38) и последующего вычисления определенных интегралов [9,10], содержащих функции $\delta^{c,a}(r; k)$ или

$t^{c,a}(r; k)$. Линейная версия метода фазовых функций более удобна, так как в ней вычисления таких интегралов не требуется, а ключевые уравнения являются линейными и поэтому могут быть исследованы известными асимптотическими методами [79].

2.3. Линейная версия метода фазовых функций. Эта версия, предложенная Калоджеро [86] для решения задачи (22), (23), основана на известном [76] методе вариации «постоянных» коэффициентов c^{ca} и s^{ca} . Бенц и др. [42] применили этот же метод, но использовали функции $cs^{ca} = c^{ca}$, $sn^{ca} = s^{ca}/kC^2$ и подстановкой

$$u^{ca}(r; k) = cs^{ca}(r; k)[F(\rho, \eta)/kC(\eta)] + sn^{ca}(r; k)[C(\eta)G(\rho, \eta)] \quad (46)$$

свели (22) к системе линейных уравнений

$$\partial_r \begin{cases} cs^{ca}(r; k) \\ sn^{ca}(r; k) \end{cases} = V^a(r) u^{ca}(r; k) \begin{cases} C(\eta)G(\rho, \eta) \\ -F(\rho, \eta)/kC(\eta) \end{cases} \quad (47)$$

с начальными условиями $cs^{ca} = 1$ и $sn^{ca} = 0$ в точке $r = 0$. Развивая известную идею [31, 33, 87], Бенц и др. использовали вместо разбиения (10) представление (11), ввели соответствующую ему модифицированную функцию эффективного радиуса

$$K^{cp,s}(k) \equiv kC_p^2(\eta) \operatorname{ctg} \delta^{cp,s}(k) + h_p(\eta)/R \sim -1/a^{cp,s} + r^{cp,s}k^2/2 \quad (48)$$

и доказали, что, в отличие от $a^{c,ps}$, модифицированная длина рассеяния

$$a^{cp,s} \equiv -\lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \delta^{cp,s}(k)/kC_p^2(\eta) \quad (49)$$

ограничена, имеет физический смысл и вычисляется экстраполяцией фазы $\delta^{cp,s}(k)$ в точку $E = 0$ или же решением уравнения (22) при $k = 0$.

Предложенная в [42] теория рассеяния суперпозицией (3) трех потенциалов неполна. Функции $C_p(\eta)$ и $h_p(\eta)$, содержащиеся в (48) и (49), давно известны как определенные интегралы [87], но до сих пор не найдены явно, более того, неизвестен эффективный способ построения асимптотик этих интегралов при $k \rightarrow 0$. Следующая, не затронутая в [42] проблема состоит в построении низкоэнергетических разложений волновой функции $u^{cp,s}$ и исследовании влияния поляризационного потенциала на ее поведение. Решению этих задач были посвящены работы [60], [62—64], в которых линейная версия метода фазовых функций развивалась в ее оригиналь-

ной формулировке [86]. В этой версии искомое решение u^{ca} задачи (22), (23) записывается в виде

$$u^{ca}(r; k) = N^{c,a}(k) U^{ca}(r; k),$$

$$U^{ca}(r; k) \equiv c^{ca}(r; k) F(\rho, \eta) + s^{ca}(r; k) G(\rho, \eta), \quad (50)$$

неизвестные амплитудные функции c^{ca} и s^{ca} подчиняются уравнениям

$$\partial_r \begin{cases} c^{ca}(r; k) \\ s^{ca}(r; k) \end{cases} = k^{-1} V^a(r) U^{ca}(r; k) \begin{cases} G(\rho, \eta) \\ -F(\rho, \eta) \end{cases}, \quad (51)$$

с граничными условиями $c^{ca} = 1$ и $s^{ca} = 0$ в точке $r = 0$, а фаза $\delta^{c,a}(k)$ и нормировочный множитель $N^{c,a}(k)$ функции (50) равны пределам при $r \rightarrow \infty$ соответствующих функций

$$\delta^{c,a}(r; k) = \text{arctg} [s^{ca}(r; k) / c^{ca}(r; k)], \quad (52)$$

$$N^{c,a}(r; k) = \cos \delta^{c,a}(r; k) / c^{ca}(r; k). \quad (53)$$

Для построения низкоэнергетических асимптотик в [60,62] функции Кулона заменили рядами (28), а решения уравнения (51) искали в виде

$$c^{ca}(r; k) \sim \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} c_n^{ca}(r), \quad s^{ca}(r; k) \sim kC^2(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} s_n^{ca}(r). \quad (54)$$

В итоге было получено асимптотические разложение

$$u^{ca}(r; k) \sim kC(\eta) N^{c,a}(k) \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} U_n^{ca}(r), \quad k \rightarrow 0, \quad r \ll r_c, \quad (55)$$

$$U_n^{ca}(r) \equiv \sum_{m'+m=n} [c_m^{ca}(r) f_m(r) + s_m^{ca}(r) g_m(r)], \quad (56)$$

в котором расстояние r отделено от импульса рассеяния k , а новые неизвестные функции c_n^{ca} и s_n^{ca} не зависят от энергии и подчинены рекуррентным ($n = 0, 1, \dots$) системам уравнений

$$\partial_r \begin{cases} c_n^{ca}(r) \\ s_n^{ca}(r) \end{cases} = V^a(r) \sum_{m'+m=n} U_{m'}^{ca}(r) \begin{cases} g_m(r) \\ -f_m(r) \end{cases} \quad (57)$$

с начальными условиями $c_n^{ca}(0) = \hat{\delta}_{n,0}$ и $s_n^{ca}(0) = 0$.

При $r \geq r_c$ ряды (28), (54) и (55) сходятся медленно. Поэтому в [60] для аппроксимации функций c^{ca} , s^{ca} и u^{ca} в области $r \geq r_c$ и построения низкоэнергетических асимптотик фазы (52) и нормировочного множителя (53) использовались функции $s^{ca(m)}$, $c^{ca(m)}$ и $u^{ca(m)}$, порожденные m -й итерацией уравнений (51), записанных в эквивалентной интегральной форме. Далее методом сжимающих отображений [77] было доказано достаточное условие

$$(\alpha_e / 3r_p^2 R) \max \{3(\pi/2)^{1/2}, |a^{c,s} / r_p|\} < 1/2, \tag{58}$$

при котором эти итерации сходятся равномерно на всей полупрямой $r \geq r_p$ и имеют место следующие асимптотические при $k \rightarrow 0$ представления: более точная, чем борновское приближение (29), аппроксимация фазы

$$\text{tg } \delta^{c,p}(k) = \frac{B_2(\infty; k)}{1 + B_3(\infty; k)} + O[B_2^2(\infty; k)], \tag{59}$$

$$B_n(r; k) \equiv -k^{-1} \int_{r_p}^r V^p(t) F(kt, \eta) [F(kt, \eta) \hat{\delta}_{n,2} - G(kt, \eta) \hat{\delta}_{n,3}] dt, \tag{60}$$

и разложение нормировочного множителя

$$N^{c,a}(k) = \sum_{n=0}^2 k^{2n} N_n^{c,a} + \Delta N^{c,a}(k), \quad a = p, s, ps, \tag{61}$$

$$\Delta N^{c,s} = O(k^6); \quad \Delta N^{c,p}, \Delta N^{c,ps} = O(k^{16/3}). \tag{62}$$

Здесь $N_n^{c,a}$ — конечные константы, как при $a = s$, когда поляризационный потенциал не учитывается, так и при $a = p, ps$, когда он учтен. В этих случаях остаточные члены (62) имеют различное пороговое поведение. В этом и проявляется влияние поляризационного потенциала на волновую функцию в области $kr \ll 1$, где она, согласно (50) и (51), имеет асимптотику $u^{ca} \sim N^{c,a}(k) \rho C(\eta)$. Предложенный в [60] метод построения низкоэнергетических асимптотик является полуаналитическим: асимптотики представляются рядами по известным явно функциям энергии и функциям расстояния, которые достаточно просто выражаются через решения ключевых уравнений (57). Например, в силу (52) и (54) коэффициент $a^{c,a}$ из (19) или (20) равен пределу при $r \rightarrow \infty$ соответствующей функции

$$a^{c,a}(r) = -s_0^{ca}(r) / c_0^{ca}(r). \tag{63}$$

В [63] и [64] исследовалась более общая, чем (22), (23), одномерная задача рассеяния Шредингера: предполагалось, что угловой момент $l \geq 0$, а потенциал V^a удовлетворяет только условию (8). В [63] показано, как построить регулярную и нерегулярную волновые функции в виде асимптотических при $k \rightarrow 0$ и $r \ll r_c$ рядов, в которых импульс и расстояние разделены. В [64] предложена новая теория возмущений, являющаяся асимптотическим методом как в пределе большого углового момента, так и в пределе низких энергий. Нулевое приближение этой теории вычисляется интегрированием уравнений для амплитудных функций на определенном конечном отрезке $r \leq b < \infty$ и отвечает потенциалу V^a , обрезанному в точке $r = b$. Все последующие приближения, учитывающие потенциал V^a в области $r > b$, строятся аналитически итерационным способом.

В рассматриваемом случае, когда $l = 0$, $a = 4$ и $V^c > 0$, теория возмущений, построенная в [64], применима на всей полуоси $r \geq 0$, если

$$\alpha_e / Rr_p^2 < \sqrt{2/\pi} \ln 3. \quad (64)$$

При таком условии справедлива относительная оценка

$$|\delta^{(1)c,p}(k) / \delta^{c,p}(k) - 1| < O((kR)^{16/3}), \quad kR \rightarrow 0, \quad (65)$$

где фаза $\delta^{(1)c,p}$, полученная в первом порядке теории возмущений, выражается через интегралы (60) формулой

$$\operatorname{tg} \delta^{(1)c,p}(k) = \exp(-2B_3(\infty; k)) \int_{r_p}^{\infty} \partial_t B_2(t; k) \exp(2B_3(t; k)) dt. \quad (66)$$

Результаты упомянутых работ [32,41,42,57], [60] и [62—64] убедительно доказывают эффективность метода фазовых функций для исследования поляризационных эффектов и вывода различных низкоэнергетических представлений в явном виде. Однако качественное исследование искажения фазы и волновой функции поляризационным взаимодействием можно выполнить более простым способом, а именно применяя классический метод ВКБ [1], как это было сделано в [55], или его модификацию, предложенную в [56] и развиваемую ниже.

2.4. Метод ВКБ по малому параметру $q = kR$. Введя безразмерные импульс $q \equiv kR$ и переменную $x = q^2 r / R$, запишем (22) в виде уравнения

$$[q^2 \partial_x^2 + (p^{ca}(x; q))^2] u^{ca}(x; k) = 0 \quad (67)$$

с малым ($q \rightarrow 0$) параметром перед старшей производной и функцией

$$(p^{ca}(x; q))^2 = (p^c(x))^2 + (R/q)^2 V^a(xR/q^2). \quad (68)$$

Импульс q в (67) играет роль константы Планка \hbar в стандартном квазиклассическом приближении [1], а функции (68) и $p^c \equiv \sqrt{1 - x^{-1}}$ являются аналогами полного и кулоновского (см. (33)) квазиимпульсов. Поэтому известный в теории дифференциальных уравнений метод [79] построения асимптотик решений уравнения (67) при $q \rightarrow 0$ мы называем методом ВКБ по малому параметру q . Применим этот метод к уравнению (67).

Сначала построим ВКБ-асимптотики функций $u^{cp\pm}$, удовлетворяющих (67) в случае $a = p$ и нормированных при $\rho = xq^{-1} \rightarrow \infty$ условиями

$$u^{cp\pm}(x; q) \sim \sin [q^{-1}x - \eta \ln (2q^{-1}x) + \delta^c(q) + \delta^{c,p}(q) + (1 \mp 1) \pi / 4]. \quad (69)$$

В этом случае функция (68) задается формулами

$$(p^{cp}(x; q))^2 = (p^c(x))^2 + \beta x^{-4} \Theta(x - x_p), \quad \beta \equiv \alpha_e q^6 / 2R^3, \quad (70)$$

монотонно возрастает на полупрямой $x \geq x_p \equiv q^2 r_p R^{-1}$ и имеет один нуль $x_{cp} = x_c + O(q^6)$, сходящийся при $q \rightarrow 0$ к корню $x_c = 1$ уравнения $(p^c(x))^2 = 0$. Функции $u^{cp\pm}$ на интервале $x < x_p$, где стандартный метод ВКБ требует сложных модификаций [80], нам не потребуются. Известное достаточное условие [79] применимости этого метода на полупрямой $x \geq x_p$ выполняется при условии (58) или (64). Оба эти неравенства верны для всех рассматриваемых ниже столкновений.

Функция (70) отрицательна на отрезке $[x_p, x_{cp} - \epsilon]$, где ϵ — некоторое малое число, и поэтому в этой области ВКБ-асимптотики функций $u^{cp\pm}$ имеют вид падающей и растущей экспонент:

$$u^{cp\pm}(x; q) \sim [2^{1 \pm 1} |p^{cp}(x; q)|]^{-1/2} \exp(\pm q^{-1} \varphi^{cp}(x; q)), \quad (71)$$

$$\varphi^{cp}(x; q) \equiv \int_{x_{cp}}^x |p^{cp}(t; q)| dt. \quad (72)$$

Старшие слагаемые асимптотик (71) запишем в виде

$$u^{cp+}(x; q) \sim \bar{F}(x, q) P^+(x; q), \quad u^{cp-}(x; q) \sim \bar{G}(x, q) P^-(x; q), \quad (73)$$

выделив известные ВКБ-асимптотики [73] функций Кулона:

$$\bar{F}(x, q) = \frac{\exp(q^{-1} \varphi^c(x))}{|2p^c(x)|^{-1/2}}, \quad \bar{G}(x, q) = \frac{\sqrt{2}}{|p^c(x)| \bar{F}(x, q)}, \quad (74)$$

$$\varphi^c(x) \equiv \int_1^x |p^c(t)| dt = \pi/2 - \sqrt{x(1-x)} - \arcsin \sqrt{x} \quad (75)$$

и описывающие влияние поляризационного потенциала функции

$$P^\pm(x; q) \equiv S(x; q) \exp(\mp Q(x; q)), \quad (76)$$

$$S(x; q) \equiv \left| \frac{p^c(x)}{p^{cp}(x; q)} \right|^{1/2}, \quad Q(x; q) \equiv q^{-1} \int_x^1 [|p^{cp}(t; q)| - |p^c(t)|] dt. \quad (77)$$

При условии (64) производные функций (76) пренебрежимо малы, а функции (77) в линейном по параметру $\alpha_e/r_p^2 R$ приближении имеют очень простой вид:

$$S(r; k) \approx 1 + \alpha_e/2r^3, \quad Q(r; k) \approx -\alpha_e/5r^2\sqrt{rR}, \quad r \geq r_p, \quad k = 0. \quad (78)$$

В окрестности $(x_{cp} - \varepsilon, x_{cp} + \varepsilon)$ точки x_{cp} ВКБ-асимптотики функций $u^{cp\pm}$ содержат [79] функции Эйри [73]. Функции (70) и (72) положительны на полупрямой $[x_{cp} + \varepsilon, \infty)$. При аналитическом продолжении функций (71) в эту область они переходят в соответствующие осциллирующие функции

$$u^{cp\pm}(x; q) \sim (p^{cp}(x; q))^{-1/2} \sin [q^{-1} \varphi^{cp}(x; q) + (2 \mp 1) \pi/4]. \quad (79)$$

Для построения старших членов асимптотик (79) полагаем $x_{cp} = x_c$ и аппроксимируем функцию (72) суммой двух интегралов

$$\varphi^{cp}(x; q) \sim \varphi^c(x) + \varphi^{c,p}(x; q) \equiv \int_1^x |p^c(t)| dt + \beta \int_1^x \frac{t^8 dt}{2|p^c(t)|^{1/2}}, \quad (80)$$

$$\varphi^c(x) = \sqrt{x(x-1)} - \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}), \quad (81)$$

$$\varphi^{c,p}(x; q) = (\alpha_e q^6 / 30R^3) \sqrt{1-x^{-1}} (8 + 4x^{-1} + 3x^{-2}). \quad (82)$$

Используя (70) и (80)—(82), запишем старшие слагаемые асимптотик функций (79) при $\rho \rightarrow \infty$ в виде

$$u^{cp\pm}(r; k) \sim \sin [\rho - \eta \ln 2\rho + \bar{\delta}^c + \bar{\delta}^{c,P} + (1 \mp 1) \pi / 4]. \quad (83)$$

Сравнив (69) с (83), заключаем, что кулоновская и кулон-поляризационная ВКБ-фазы определяются пределами

$$\bar{\delta}^c(k) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} q^{-1} \varphi^c(x), \quad \bar{\delta}^{c,P}(k) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} q^{-1} \varphi^{c,P}(x; q) \quad (84)$$

функций (81) и (82) и совпадают с асимптотиками (12) и (13) соответствующих фаз δ^c и $\delta^{c,P}$.

Теперь построим ВКБ-приближение \bar{u}^{cps} функции u^{cps} . Перейдем к переменной r . При $r \leq r_p$ поляризационное взаимодействие (7) отсутствует, поэтому $u^{cps} \sim u^{cs}$. Соотношение $r_s < r_p$ позволяет аппроксимировать функцию u^{cs} при $r > r_s$ функцией (41). Заменяя в этом приближении кулоновские функции их ВКБ-асимптотиками (74), (75), имеем

$$\bar{u}^{cps} \approx \bar{N}^{cp,s} u_{as}^{cs} \sim \bar{N}^{cp,s} (\bar{F} \cos \delta^{c,s} + \bar{G} \sin \delta^{c,s}), \quad r_s < r \leq r_p, \quad (85)$$

где $\bar{N}^{cp,s}$ — пока неизвестный нормировочный множитель. Соотношение (6) позволяет пренебречь ядерным потенциалом при $r \geq r_p$ и представить решение \bar{u}^{cps} линейной комбинацией функций (73):

$$\bar{u}^{cps} \approx u^{cp+} \cos \bar{\delta}^{cp,s} + u^{cp-} \sin \bar{\delta}^{cp,s}, \quad r \geq r_p. \quad (86)$$

В силу (83) функция (86) имеет нужную асимптотику (23) с фазой

$$\delta^{cps} \approx \bar{\delta}^{cps} = \bar{\delta}^{cp} + \bar{\delta}^{cp,s} = (\bar{\delta}^c + \bar{\delta}^{c,P}) + \bar{\delta}^{cp,s}, \quad (87)$$

отвечающей разбиению (11). Слагаемые $\bar{\delta}^c$ и $\bar{\delta}^{c,P}$ суммы (87) вычисляются по формулам (81), (82) и (84), а неизвестная фаза $\bar{\delta}^{cp,s}$, порождаемая потенциалом V^s и отсчитанная от ВКБ-фазы $\bar{\delta}^{cp}$, определяется «сшивкой» функций (85) и (86) в точке $r = r_p$. Приравнявая логарифмические производные этих функций в указанной точке и пренебрегая производными функций (76), получаем

$$\operatorname{tg} \bar{\delta}^{cp, s}(k) \approx \exp(-2Q(r_p; k)) \operatorname{tg} \delta^{c, s}(k), \quad (88)$$

$$\bar{N}^{cp, s}(k) \approx S(r_p; k) \exp(-Q(r_p; k)) \frac{\cos \bar{\delta}^{cp, s}(k)}{\cos \delta^{c, s}(k)}. \quad (89)$$

Из (78) и (88) следует, что фазы $\bar{\delta}^{cp, s}$ и $\delta^{c, s}$ имеют одинаковое пороговое поведение. Оно описывается старшим членом пороговой асимптотики множителя $kC^2(\eta)$. Поделим соотношение (88) на этот множитель и перейдем к пределу $k \rightarrow 0$. Учтя (14) и (78), получаем ВКБ-приближение модифицированной длины рассеяния (49):

$$\bar{a}^{cp, s} \equiv - \lim_{k \rightarrow 0} \operatorname{tg} \bar{\delta}^{cp, s}(k) / kC^2(\eta) \approx a^{c, s} (1 + 2\alpha_e / 5r_p^2 \sqrt{r_p R}). \quad (90)$$

Используя (78), (85) и (89), получаем соотношение

$$\bar{u}^{cps} / u_{as}^{cs} \approx N^{cp, s} \approx 1 + \alpha_e r_p^{-2} (1/2r_p + 1/5\sqrt{r_p R}), \quad r_s \leq r \leq r_p, \quad (91)$$

означающее, что поляризационное взаимодействие несущественно изменяет плотность вероятности нахождения сталкивающихся ядер на границе ($r = r_s$) действия ядерных сил.

Опишем простой способ нахождения оценок E^\pm , не требующий построения функции $A^{c, ps}$ и основанный на формулах (77), (84), (87) и (88). Пусть $a^{c, s} > 0$, и при заданном значении параметра w корень $k_1(w)$ уравнения

$$|\bar{\delta}^{c, p}(k) / \bar{\delta}^{cp, s}(k)| = w \quad (92)$$

удовлетворяет асимптотическому условию $k_1(w)R \equiv q_1 \ll 1$ применимости метода ВКБ. Из формул $\bar{\delta}^{c, ps} = \bar{\delta}^{c, p} + \bar{\delta}^{cp, s}$ и (92) следует, что ВКБ-оценки \bar{E}^\pm и \bar{E}_1 границ интервала $E^- < E < E^+$, где $\delta^{c, p} = O(\delta^{c, s})$, и положения нуля E_1 фазы $\delta^{c, ps}$ (минимума сечения $\sigma^{c, ps}$) задаются соотношениями $\bar{E}^- = k_1^2(0, 9)$, $\bar{E}^+ = k_1^2(0, 1)$ и $\bar{E}_1 = k_1^2(1)$. Заменим в (92) все фазы соответствующими старшими членами их асимптотик (13), (14) и (88) и перейдем к безразмерной переменной $q = kR$, тогда получим более удобное уравнение

$$\pi q^{-1} = \ln(1 + zq^{-5}). \quad (93)$$

Положение его корней $q_1(z)$ и $q_2(z)$ определяется не отдельно взятыми параметрами α_e , $a^{c,s}$ и R , характеризующими рассматриваемое столкновение, а их безразмерной комбинацией

$$z \equiv \pi w R^2 \left| 15 a^{c,s} / 4 \alpha_e \right| \exp(-2Q(r_p; 0)). \tag{94}$$

Уравнения и параметры такого типа называются автомодельными. К ним относятся, например, гидродинамическое уравнение Навье — Стокса [88] и его параметр — число Рейнольдса.

Корни уравнения (93), вычисленные в [56], изображены на рис.4. Корень q_1 всегда удовлетворяет условию $q_1 < 1$ и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Если $z \geq z_{thr} = 14,5$, то корни совпадают ($q_1 = q_2$). Следовательно, если значения параметров α_e , $a^{c,s}$ и R таковы, что $z \gg z_{thr}$, то уравнение (92) имеет корень $k_1 \ll R^{-1}$. Автомодельность [88] уравнения (93) позволяет легко получить ВКБ-оценку \bar{E}_1 положения S -волнового минимума Рамзауэра для любого исследуемого столкновения заряженной частицы с поляризованным кластером. Для этого необходимо вычислить значение автомодельного параметра (94) при $w = 1$, а затем использовать рис.4 для нахождения значений q_1 и соответствующей энергии $\bar{E}_1 = q_1 R^{-2}$. Как следует из соотношения (94) и рис.4, при одном и том же значении поляризуемости α_e величина энергии \bar{E}_1 уменьшается с ростом R и $a^{c,s}$. Эти выводы иллюстрируют рис.5,6 и рис.7,8, взятые из [56]. На рис.5,6 изображена энергия \bar{E}_1 в зависимости от

кулон-ядерной длины рассеяния $a^{c,s}$ для систем с разными значениями боровских радиусов. На рис.7,8 изображены ВКБ-приближения $\bar{A}^{c,ps}(E; \alpha_e)$ функций длины рассеяния. Это приближение определялось формулами (17) и (18), в которых точная фаза $\delta^{c,ps}$ заменялась ее ВКБ-асимптотикой

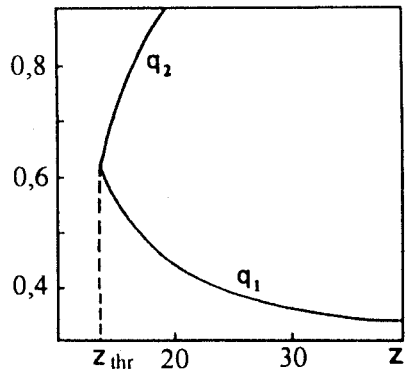


Рис.4. Зависимость корней q_1 и q_2 уравнения (93) от параметра z

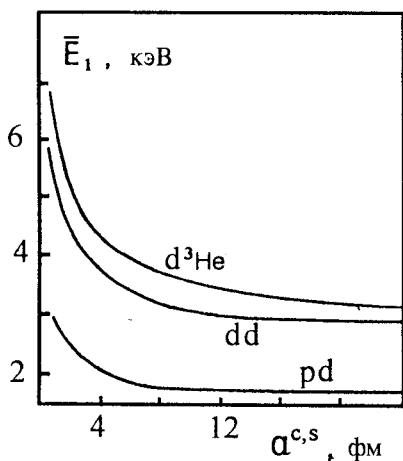


Рис.5. Энергия \bar{E}_1 , отвечающая корню q_1 уравнения (93), как функция кулон-ядерной длины рассеяния $a^{c,s}$ для pd -, dd - и $d^3\text{He}$ -столкновений

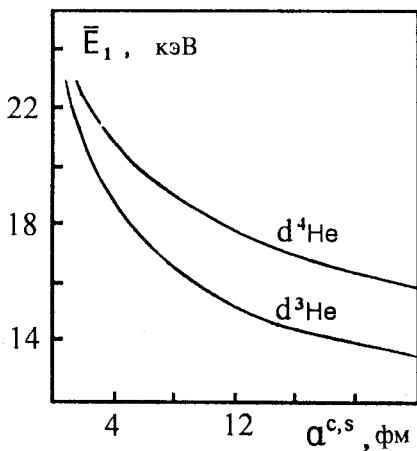


Рис.6. Энергия \bar{E}_1 , отвечающая корню q_1 уравнения (93), как функция кулон-ядерной длины рассеяния $a^{c,s}$ для $d^3\text{He}$ - и $d^4\text{He}$ -столкновений

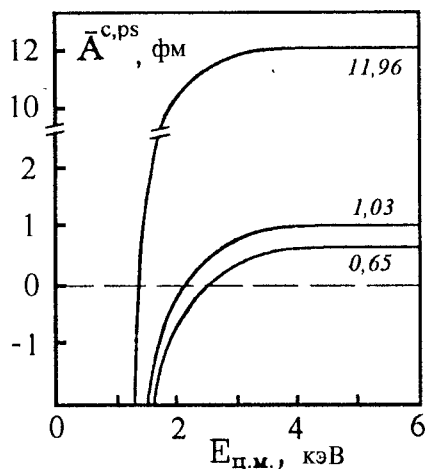


Рис.7. Функция длины pd -рассеяния $\bar{A}^{c,ps}(E; \alpha_e)$ при различных значениях кулон-ядерной длины pd -рассеяния $a^{c,s}$. Числа у кривых — значения $a^{c,s}$ (фм)

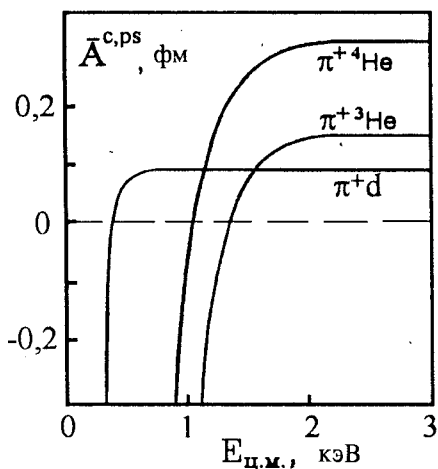


Рис.8. Функции длины π^+d -, $\pi^+{}^3\text{He}$ - и $\pi^+{}^4\text{He}$ -рассеяния $\bar{A}^{c,ps}(E; \alpha_e)$

$\bar{\delta}^{c,ps} = \bar{\delta}^{c,p} + \bar{\delta}^{c,p,s}$. Как видно из рис.7, при уменьшении значения кулон-ядерной длины pd -рассеяния $a^{c,s}$ от 11,96 фм [89] до 0,65 фм [39] нуль pd -функции $\bar{A}^{c,ps}$ смещается в область больших энергий. Эту же закономерность подтверждает и рис.8, согласно которому нуль $\pi^+ {}^3\text{He}$ -функции $\bar{A}^{c,ps}$ ($a^{c,s} = 0,3$ фм [90]) расположен левее нуля $\pi^+ {}^4\text{He}$ -функции $\bar{A}^{c,ps}$ ($a^{c,s} = 0,143$ фм [91]). Одна и та же $\pi^+ d$ -функция $\bar{A}^{c,ps}$ изображена на рис.2 и рис.8 штриховой и сплошной линиями. Как следует из рис.2, относительная точность ϵ приближения $A^{c,ps} \approx \bar{A}^{c,ps}$ довольно высока ($\epsilon \approx 0,06$) даже при энергиях, близких к положению E_1 нуля функции $A^{c,ps}$ (минимума сечения $\sigma^{c,ps}$). Значит, используя рис.7,8, можно примерно с такой же точностью найти оценки \bar{E}_1 положений S -волновых минимумов Рамзауэра в сечениях $\sigma^{c,ps}$ упругих pd -, $\pi^+ {}^3\text{He}$ - и $\pi^+ {}^4\text{He}$ -столкновений. Например, для квартетного pd -рассеяния $a^{c,s} = 11,96$ фм и $E_1^{3/2} \approx \bar{E}_1 \approx 1,2$ кэВ, в дублетном случае $a^{c,s} = 1,03$ фм и $E_1^{1/2} \approx \bar{E}_1 \approx 2,2$ кэВ. Поэтому полное S -волновое сечение pd -рассеяния должно иметь два минимума Рамзауэра. Означает ли этот факт и соотношение унитарности для S -матрицы [7] то, что сечение $\sigma_r(E)$ pd -реакции ($d(p, \gamma) {}^3\text{He}$) должно иметь два максимума примерно при тех же энергиях $E_1^{3/2}$ и $E_1^{1/2}$? Как влияет поляризационное взаимодействие на эту реакцию и на другие реакции нуклеосинтеза? Поиску ответа на этот вопрос были посвящены работы [43—56] и [58—62].

3. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В РЕАКЦИЯХ НУКЛЕОСИНТЕЗА

Существенное различие (парадокс Девиса) между экспериментальным значением $2,0 \pm 0,2$ SNU скорости захвата солнечных нейтрино, измеренным в экспериментах ${}^{37}\text{Cl}$ -детектором [92], и ее теоретической оценкой $8,0 \pm 3,0$ SNU до сих пор не объяснено [93—95]. Большая часть солнечных нейтрино является одним из конечных продуктов солнечного pp -цикла [96] реакций подбарьерного слияния легких ядер. Сечение такой реакции удобно представить в виде [96,97]

$$\sigma_r^{ca}(E) = E^{-1} \exp(-2\pi\eta) S^{ca}(E), \quad (95)$$

выделив тем самым наиболее резко зависящий от энергии кулоновский барьерный множитель. В современной астрофизике [94,96] фактор S^{ca} сечения (95) ядерной реакции пропорционален ядерному матричному элементу, который обычно выражается [98] в первом порядке теории возмущений по гамильтониану рассматриваемой реакции в виде интеграла, содержащего функции ее начального и конечного состояний.

Например, в импульсном приближении [96] по гамильтониану β^+ -захвата [4] ядерный матричный элемент pp -реакции ($pp \rightarrow de^+ \nu$):

$$\Lambda^{ca}(k) = [8\pi r_d^3 k^2 C^2(\eta)]^{-1/2} \int_0^\infty u^{ca}(r; k) u_d(r) dr \quad (96)$$

является интегралом перекрытия S -волновой функции pp -рассеяния u^{ca} и 3S_1 -компоненты u_d волновой функции дейтрона, радиус которого $r_d = 4,316$ фм. Формула (96), предложенная в пионерских работах [99] и [100], используется до сих пор.

Теоретическая оценка потока солнечных нейтрино существенно зависит от величины S^{ca} -фактора начальной и наиболее медленной (одно событие в 10^{29} лет) реакции $pp \rightarrow de^+ \nu$ солнечного pp -цикла [96]. Эта оценка пропорциональна $(S^{cs})^{-5/2}$, поэтому исследование любых поправок к S^{cs} -факторам ядерных реакций является важным для астрофизики. Дискуссия о бесконечной длине рассеяния $a^{c,ps}$ инициировала в 80-х годах серию исследований [43—56], [58—62] роли поляризационного потенциала в реакциях нуклеосинтеза. Чтобы показать, как понимание этой роли развивалось во времени, дадим краткий обзор всех этих работ в том порядке, в котором они были опубликованы.

3.1. Оценки вклада поляризационного потенциала в сечения реакций нуклеосинтеза. Роль поляризационного потенциала в реакциях нуклеосинтеза интенсивно исследовалась начиная с 1986 года, а именно после работы [43], в которой было предсказано, что при $E < 2$ кэВ сечения реакции $d(p, \gamma){}^3\text{He}$, рассчитанные с учетом (σ_r^{cps}) и без учета (σ_r^{cs}) поляризации дейтрона, сильно «различаются»: $\sigma_r^{cps} / \sigma_r^{cs} \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow 0$.

Неожиданные выводы работы [43], в частности, доказательство того, что поляризуемость дейтрона порождает расходимость $S^{cps}(E)$ -фактора pd -реакции при $E \rightarrow 0$, т.е. нарушает соотношение унитарности [2,3], стимулировали первое исследование [56] ВКБ-оценки $\bar{D}^P(E)$ для вклада

$$D^P(E) \equiv S^{cps}(E) / S^{cs}(E) - 1 \quad (97)$$

от pd -поляризационного потенциала (7) в S^{cps} -фактор. В [56], исходя из соотношения (91), было показано, что оценка $\bar{D}^P(E)$ является гладкой функцией энергии pd -столкновения и не превышает $5 \cdot 10^{-3}$ при $E \leq 6$ кэВ. Следовательно, $S^{cps}(E)$ -фактор pd -реакции — также непрерывная и конечная функция, что противоречит вышеупомянутому результату $S^{cps}(0) = \infty$ работы [43].

В [44] и [45] была предпринята попытка восстановить унитарность метода, примененного в [43]. Она оказалась неудачной: в [44] и [45] был снова получен нефизический результат, означающий, что из-за поляризационного взаимодействия между протонами сечение σ_r^{cps} pp -реакции должно иметь очень большой ($\sigma_r^{cps}/\sigma_r^{cs} \approx 10^{30}$) и узкий минимум.

Следующей работой был препринт [55] Львова. Львов, используя элементы ВКБ-метода [1] и теории возмущений по поляризационному взаимодействию (7), построил в рамках уравнения (22) приближенную функцию pd -рассеяния u^{cps} , получил ВКБ-оценку $\bar{D}^P \approx 10^{-3}$ для вклада (97) и тем самым подтвердил оценку, выведенную ранее в [56].

Позднее в [46] было предсказано, что сечение σ_r^{cps} реакции ${}^3\text{H}(d, n){}^4\text{He}$ должно иметь узкий максимум ($\sigma_r^{cps}/\sigma_r^{cs} \approx 100$), порожденный поляризационным взаимодействием (7) дейтрона с тритием.

В рапортерском докладе [47] результаты работ [43—46] обсуждались без упоминания критических замечаний Львова [55] и Левашева [48]. В этой связи следует подчеркнуть, что именно Львов впервые объяснил то, что главной ошибкой всех работ [43—46] была необоснованная замена функции u^{cp} ее асимптотической формой u_{as}^{cp} (см. (41)) для любых $r \leq r_s$. Позднее эта общая для всех работ [43—46] ошибка была отмечена в тезисах [48] Левашева и далее в серии его работ [49—52]. В них Левашев предполагал, что S^{ca} -фактор pp -реакции пропорционален квадрату ядерного матричного элемента (96). Заменяв pp -функцию u^{cps} в (96) функцией \tilde{u}^{cps} , построенной им в рамках борновского приближения по поляризационному потенциалу (7), он получил борновские приближения $\tilde{\Lambda}^{cps}$ и \tilde{D}^P для интеграла (96) и вклада (97). Главный результат Левашева означает, что вклад \tilde{D}^P от поляризационного потенциала в борновское приближение \tilde{S}^{cps} для S^{cps} -фактора pp -реакции определяется значением поляризационного потенциала на границе действия ядерных сил ($\tilde{D}^P(E) \approx \alpha_e/2r_p^2 R$) и поэтому этот вклад пренебрежимо мал.

Перед тем как появились журнальные версии [50] и [51] препринта [49], Бенц предложил в [53] оригинальный и физически ясный метод оценки вклада (97). Этот метод основан на теории R -матрицы [3,7] и поэтому является более общим, чем другие методы, развитые в работах [48—52] и [58—62]. К сожалению, последняя формула Бенца ((14) в [53]), означающая, что вклад D^P равняется $\text{tg}^2 \delta^{c,p}$, неверна. Как заметил Левашев в [52], при выводе этой формулы было потеряно одно слагаемое. Тем не менее этот досадный факт не меняет главного вывода Бенца [53]: эффект электрической поляризуемости ядер дает пренебрежимо малый вклад в сечения низкоэнергетических ядерных реакций. Этот вывод был подтвержден прецизионными вычислениями, выполненными в [58].

Для описания pp -столкновения в [58] использовалась следующая модель. В качестве ядерного потенциала брался потенциал Рида с мягким кором [5], для поляризационного взаимодействия использовалось представление (7) с параметром $r_p = 4$ фм и удвоенным экспериментальным значением [25] ($\alpha_e = 2 \cdot 10^{-3}$ фм³) поляризуемости протона. В результате вычислений, выполненных в рамках уравнений (47) и представлений (46), (96) и (97), было показано, что при $E \leq 6$ кэВ вклад (97) пренебрежимо мал, но является возрастающей функцией энергии: $D^P(0) = 2,11 \cdot 10^{-6}$, $D^P(E)/D^P(0) \approx 1,02$ при $E = 6$ кэВ. Этот вывод стимулировал последующие исследования [59,60] энергетической зависимости функций (96) и (97). Они были выполнены в рамках той же модели pp -столкновения.

В анонсе [59] работы [60] было доказано представление

$$\Lambda^{ca}(k) = \sum_{n=0}^2 k^{2n} \Lambda_n^{ca} + \Delta \Lambda^{ca}(k), \quad k \rightarrow 0, \quad (98)$$

где Λ_n^{ca} — константы, независимо от того, учитывается ($a = ps$) или нет ($a = s$) поляризационное взаимодействие, но $\Delta \Lambda^{cps}$ убывает при $k \rightarrow 0$ медленнее, чем $\Delta \Lambda^{cs}$. Иными словами, поляризационное взаимодействие не изменяет энергетическую зависимость трех первых слагаемых низкоэнергетического разложения ядерного матричного элемента, вклада D^P , а значит и сечения pp -реакции.

Достаточно полная теория pp -столкновения, учитывающая поляризуемость протона, была построена в [60]. В результате вычислений, выполненных по формулам (50)—(61) и (95)—(98), было доказано, что вклад D^P равен $2,1108 \cdot 10^{-6}$ при $E = 0$, достигает своего максимального значения

$3,3773 \cdot 10^{-6}$ в точке $E \approx 400$ кэВ и медленно убывает при дальнейшем увеличении энергии.

В [54] исследовалась реакция ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$. Для построения функции \tilde{y}^{cp} , аппроксимирующей p - ${}^7\text{Be}$ -функцию рассеяния u^{cps} , использовалось известное [9] борновское приближение \tilde{t}^{cp} для функции t^{cp} , удовлетворяющей уравнению (38). В итоге был получен физически правдоподобный результат, означающий, что оценка \tilde{D}^p вклада (97) от p - ${}^7\text{Be}$ -поляризационного взаимодействия (7) в фактор S^{cps} реакции ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ приблизительно равна $2,6 \cdot 10^{-3}$.

В тезисе [61] анонсировался главный результат работы [62]. Он заключался в развитии концепции радиуса действия поляризационного потенциала, которую мы обсудим в разд.4, и доказательстве того, что этот потенциал является короткодействующим в ядерных реакциях.

Общий итог исследований [48—62], выполненных в рамках эффективно-двухчастичной модели, заключается в следующем: поляризационное взаимодействие не изменяет порогового поведения сечений реакций нуклеосинтеза, а его вклад в эти сечения пренебрежимо мал. Этот вывод подтверждают и немногочисленные результаты, полученные в рамках задачи нескольких тел. Упомянем наиболее интересные из них.

Алгебраическая версия метода резонирующих групп [101] применялась в [102] для исследования S^{cps} -факторов реакций ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ и ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ при нулевой энергии. Никаких поляризационных эффектов не было обнаружено.

Модифицированные [103] интегральные трехчастичные уравнения Фаддеева [8] использовались в [104] для вычислений S^{cps} -фактора реакции $d(p, \gamma){}^3\text{He}$ при нулевой энергии. Впервые в рамках задачи трех тел было доказано, что этот фактор конечен в пределе низких энергий. Однако вычислить его в астрофизически интересной области энергии $E \leq 20$ кэВ и учесть далекодействующую часть (5) поляризационного pd -взаимодействия авторам не удалось по простой причине: эффективный метод решения задачи рассеяния трех частиц при сверхнизких энергиях неизвестен. Возможный способ построения такого метода для задачи рассеяния $(3 \rightarrow 3)$ в системе трех попарно не связывающихся частиц основан на синтезе [65—70] метода фазовых функций и теории гипергармоник [105,106].

В [65] методом ВКБ получена низкоэнергетическая асимптотика фазы задачи рассеяния $(3 \rightarrow 3)$ в системе трех незаряженных частиц. Низкоэнергетические разложения для этой же задачи в случае обрезанного гиперрадиуса выведены в [66]. В этом же случае, но для системы трех заряженных частиц, трехчастичный аналог $(3 \rightarrow 3)$ -функции эффективного радиуса

предложен в [67]. В [68] обсуждался полуаналитический метод построения N -частичного аналога функций Йоста для системы N незаряженных частиц. Корректное определение функции Йоста в задаче рассеяния трех нейтронов предложено в [69] и развито в [70].

Как известно [106], слагаемые разложений парных кулоновских потенциалов по базису трехчастичных гипергармоник [105] вычисляются явно, однако такие ряды сходятся слишком медленно. Именно поэтому подход, предложенный в [65—70], представляется неперспективным для развития эффективного метода исследования задачи трех заряженных частиц в низкоэнергетическом пределе. Первым этапом построения такого метода является исследование низкоэнергетических асимптотик в двухчастичном случае. Ниже метод построения таких двухчастичных асимптотик, развитый в [60—64], применяется для анализа поляризационных эффектов в pp -реакции. Для описания pp -столкновения используется упомянутая выше модель работы [58].

3.2. Поляризационные эффекты в pp -реакции. Как известно [95,96], средняя энергия pp -столкновения в недрах Солнца приближенно равна 6 кэВ. В области энергий $E < 20$ кэВ квадрат кулон-ядерного ($a = s$) матричного элемента (96) принято [96] аппроксимировать линейной функцией энергии [101]:

$$(\Lambda^{ca}(E))^2 = (\Lambda^{ca}(0))^2(1 + \lambda^{ca}E) + O(E^2) \quad (99)$$

с коэффициентами $(\Lambda^{cs}(0))^2 = 7,0 \pm 0,18$ и $\lambda^{cs} = 2,2 \text{ МэВ}^{-1}$. Ошибки в их определении [97] порождаются [98] в основном неопределенностями ($\approx 0,025$) нуклон-нуклонного потенциала [5] и вкладом ($\approx 0,02$) обменных мезонных токов [108].

Ядерный потенциал V^s Риды с мягким кором [5] имеет юкавский хвост (1) и удовлетворяет условиям (8) и (9) при всех n , поэтому [60] кулон-ядерные функции $c_0^{cs}(r)$, $s_0^{cs}(r)$ и $a^{c,s}(r)$, вычисленные по уравнениям (57) и формуле (63), всюду конечны. Четвертые значащие цифры этих функций не изменяются при увеличении r в области $r \geq B = 80$ фм. Отношения этих функций к их значениям при $r = B$ и отношение волновой функции u^{cs} , вычисленной по формулам (53)—(57), к ее асимптотической форме (41) изображены на рис.9. Согласно ему функция $s_0^{cs}(r)$ достигает своего предельного значения при $r \rightarrow \infty$ медленнее, чем функция $c_0^{cs}(r)$, кулон-ядерная длина рассеяния $a^{c,s}$ формируется в основном во внутренней области ($r < 4$ фм) расстояний, а аппроксимация $u^{cs}(r; 0)/u_{as}^{cs}(r; 0) \approx 1$ верна лишь во внешней области ($r > 4$ фм). Включение поляризационного потенциала (7)

Рис.9. Отношения кулон-ядерных функций $c_0^{cs}(r)$, $s_0^{cs}(r)$, $a^{c,s}(r)$ и $u^{cs}(r; E)$ к их асимптотикам при $r \geq B = 80$ фм и $E = 0$ кэВ

радикально изменяет поведение функций $s_n^{cps}(r)$ и $a^{c,ps}(r)$ в области $r \gg r_p$. Как следует из (57), при $x \equiv 2\sqrt{r}/R \rightarrow \infty$ и $n = 0, 1, 2$ функции $s_n^{cps}(r)$ бесконечно возрастают, а функции $c_n^{cps}(r)$ остаются ограниченными [60]:

$$s_n^{cps}(r)/c_0^{cps}(\infty) \sim (8\alpha_e/\pi R^2)(R/2)^{2n} x^{3n-6} \exp(2x),$$

$$c_n^{cps}(r)/c_0^{cps}(\infty) = 1 + 32\alpha_e/5R^3 x^5 + O(x^{-10}). \quad (100)$$

В силу (100) длина рассеяния $a^{c,ps}(b)$, определенная формулой (63), обращается при $b \rightarrow \infty$ в бесконечность по закону (27). Так как в любом из случаев ($a = p, s, ps$) функции $c_n^{ca}(r)$ с индексом $n = 0, 1, 2$ ограничены, то при $E \rightarrow 0$ и $a = p, s, ps$ нормировочный множитель (53) аппроксимируется линейной функцией (61) энергии:

$$N^{c,a}(k) \approx N_0^{c,a} + EN_1^{c,a}, \quad N_0^{c,a} = \frac{1}{c_0^{ca}(\infty)}, \quad N_1^{c,a} = -\frac{c_1^{ca}(\infty)}{(c_0^{ca}(\infty))^2}. \quad (101)$$

Так же в трех случаях ($a = p, s, ps$) из формул (55), (56) и (101) следует низкоэнергетическое представление волновой функции

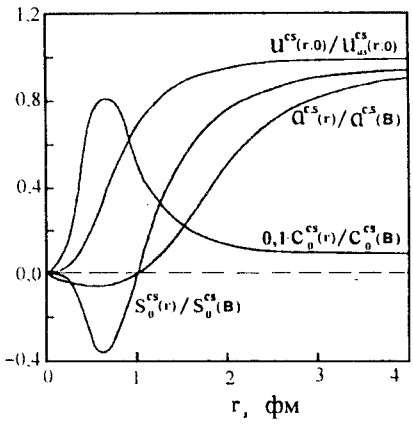
$$u^{ca}(r; k) \sim kC(\eta)[u_0^{ca}(r) + Eu_1^{ca}(r)], \quad r \ll r_c, \quad (102)$$

в котором расстояние отделено от энергии, а функции

$$u_0^{ca}(r) \equiv N_0^{c,a}U_0^{ca}(r), \quad u_1^{ca} \equiv N_0^{c,a}U_1^{ca}(r) + N_1^{c,a}U_0^{ca}(r), \quad (103)$$

в силу (55), (56) и (100), имеют при $x \equiv 2\sqrt{r}/R \rightarrow \infty$ асимптотики

$$u_n^{ca}(r) = N_n^{c,a}[R^{2n+1}x^{3n}/(1+23n)]\sqrt{x/8\pi} \exp(x)(1+O(x^{-1})). \quad (104)$$



Замена волновой функции pp -рассеяния ее асимптотикой (102) в интеграле (96) дает низкоэнергетическое представление (99), коэффициенты которого являются интегралами

$$\Lambda^{ca}(0) = (8\pi r_d^3)^{-1/2} \int_0^{\infty} u_0^{ca}(r) u_d(r) dr, \quad (105)$$

$$\lambda^{ca} = (\Lambda^{ca}(0))^{-1} (2\pi r_d^3)^{-1/2} \int_0^{\infty} u_1^{ca}(r) u_d(r) dr, \quad (106)$$

сходящимися на верхнем пределе, благодаря соотношениям (104) и быстрому убыванию функции дейтрона: $u_d = O(\exp(-r/r_d))$ при $r \rightarrow \infty$. Из представлений (99) для функций Λ^{cs} и Λ^{cps} следует, что вклад (97) имеет линейную низкоэнергетическую асимптотику:

$$D^P(E) \approx (\Lambda^{cps}(0)/\Lambda^{cs}(0))^2 [1 + (\lambda^{cps} - \lambda^{cs}) E] - 1. \quad (107)$$

Итак, в предлагаемом методе задача экстраполяции ядерного матричного элемента Λ^{cps} и вклада D^P в область астрофизических низких энергий сводится к интегрированию линейных уравнений (57) и последующему вычислению экстраполяционных коэффициентов по формулам (101)—(107). Так как ключевые уравнения (57) не зависят от энергии, то такие вычисления нетрудно выполнить с высокой точностью. Обсудим их результаты.

Вычисленные коэффициенты (105), (106) кулон-ядерной функции (99)

$$(\Lambda^{cs}(0))^2 = 6,96072905, \quad \lambda^{cs} = 2,42552113 \text{ МэВ}^{-1} \quad (108)$$

близки к коэффициентам $(\Lambda^{cs}(0))^2 = 6,934$ и $\lambda^{cs} = 2,5 \text{ МэВ}^{-1}$, полученным в [109] стандартным методом, основанным на вычислении функции u^{cs} путем интегрирования уравнения Шредингера (22) с потенциалом Риды с мягким кором при низких энергиях. Принципиальные недостатки этого метода, обсуждавшиеся в п.2.1, не позволяют применить его для исследования поляризационных эффектов ввиду их очень малого вклада. В рамках предлагаемого метода такие исследования вполне реальны.

Ясно, что слабое притягивающее поляризационное взаимодействие существенно увеличивает коэффициенты (105) и (106), а значит и сечение pp -реакции. Действительно, при учете этого взаимодействия

$$(\Lambda^{cps}(0))^2 = 6,96074375, \quad \lambda^{cps} = 2,42552961 \text{ МэВ}^{-1}. \quad (109)$$

Если такой учет необходим, то при $E < 20$ кэВ вклад (97) от поляризационного взаимодействия с точностью $\epsilon \approx 0,02$ можно описывать линейной функцией (107) энергии с коэффициентами $D^P(0) = 2,1108 \cdot 10^{-6}$ и $\lambda^{cps} - \lambda^{cs} = 8,48 \cdot 10^{-6}$ МэВ⁻¹, найденными по формулам (108) и (109).

Вычисленная зависимость $D^P(r_p; E)$ вклада D^P от величины параметра r_p поляризационного потенциала (7) при фиксированной энергии ($E < 20$ кэВ) показана на рис.10. Даже если этот параметр достигает своей нижней, разумной с физической точки зрения границы, равной расстоянию между центрами масс протонов (≈ 2 фм), вклад остается пренебрежимо малым ($D^P \sim 10^{-5}$) по сравнению с существующими неопределенностями ($\approx 0,025$) ядерного взаимодействия.

На рис.11 изображено отношение функции $(\Lambda^{cps}(E))^2$, вычисленной без использования низкоэнергетических разложений, к ее линейной аппроксимации (99) с коэффициентами (109). Относительная точность ϵ такой аппроксимации ухудшается с ростом энергии: $\epsilon \leq 0,003$ при $E \leq 10$ кэВ, $\epsilon = 0,014$ при $E = 20$ кэВ и $\epsilon = 0,4$ при $E = 50$ кэВ. Ясно, что при $E > 50$ кэВ линейную аппроксимацию (99) использовать нельзя. В этой области энергий эффективный метод исследования pp -реакции основан на формулах (50)—(53). Приведем наиболее интересные результаты, полученные таким способом.

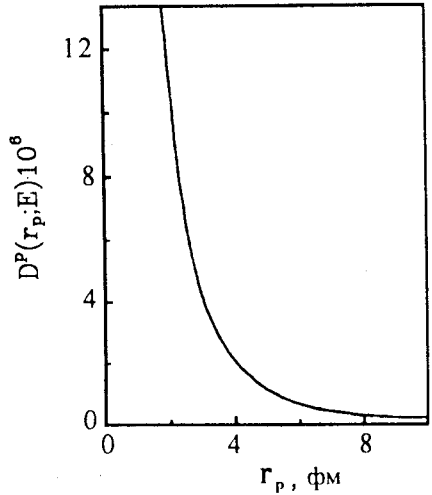


Рис.10. Вклад $D^P(r_p; E)$ поляризационного потенциала в S^{cps} — фактор pp -реакции как функция параметра r_p при $E \leq 20$ кэВ

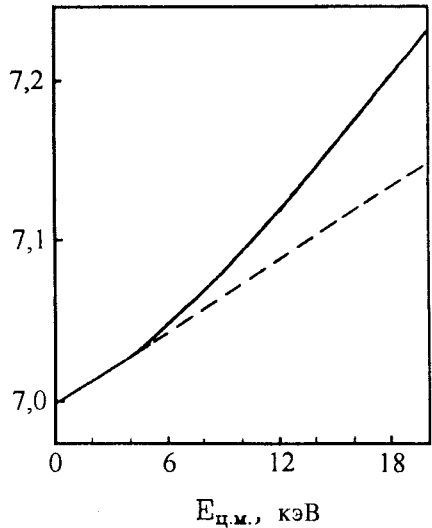


Рис.11. Сплошная кривая — $(\Lambda^{cps}(E))^2$, пунктир — ее линейная аппроксимация $(\Lambda^{cps}(0))^2(1 + \lambda^{cps}E)$

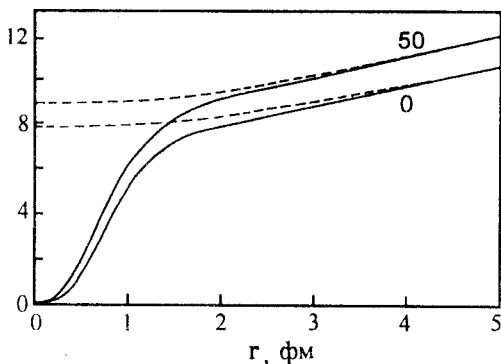


Рис.12. Волновая функция pp -рассеяния $u^{cps}(r; E)/kC(\eta)$ (сплошные кривые) и ее асимптотика $u_{as}^{cps}(r; E)/kC(\eta)$ (пунктирные кривые). Числа у кривых — значения энергий pp -столкновения E (кэВ)

Функции $u_{as}^{cps}/kC(\eta)$ и $u^{cps}/kC(\eta)$, вычисленные по формулам (41) и (50), изображены на рис.12. Как видно из рис.9,12, включение поляризационного потенциала практически не изменяет нижнюю границу внешней области ($r > 4$ фм), в которой $u^{cps} \approx u_{as}^{cps}$ с точностью $\epsilon \leq 0,01$.

Из-за экспоненциального убывания функции дейтрона произведение $u^{cps} u_d / kC(\eta)$, изображенное на рис.13, быстро сходится к нулю при $r \rightarrow \infty$,

и основной вклад в интеграл (96) дает область ($r_- < r < r_+$, $r_- \approx 0,5$ фм, $r_+ \approx 20$ фм), в которой в основном и происходит pp -реакция. Верхняя граница r_+ этой области примерно в пять раз превышает размер дейтрона, потому что функция $u^{cps}/kC(\eta)$ возрастает при $r \rightarrow r_c$ (см. рис.12). Обе границы r_- и r_+ можно оценить более точно.

Для этого удобно ввести функцию $\Lambda^{ca}(r; E)$, определив ее интегралом (96) с верхним пределом r , а далее проанализировать отношение этой функции к ее предельному при

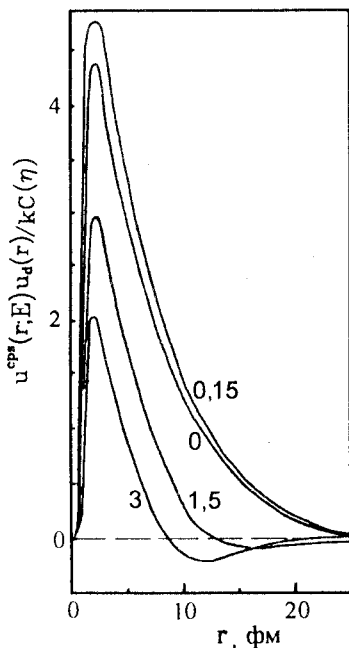


Рис.13. Произведение $u^{cps}(r; E) u_d(r) / kC(\eta)$ волновых функций pp -рассеяния и дейтрона. Числа у кривых — значения энергий pp -столкновения E (МэВ)

$r \rightarrow \infty$ значению. Квадраты таких отношений изображены на рис.14. Поясним их зависимость от энергии. При очень низких энергиях лишь малая доля сталкивающихся протонов преодолевает отталкивающий кулоновский барьер, несущественно пониженный поляризационным притяжением. С ростом энергии этот барьер становится все более прозрачным, функция $u^{cps} u_d / kC(\eta)$ равномерно возрастает, поэтому увеличивается и интеграл (96). При дальнейшем увеличении энергии у pp -функции появляются нули в области реакции ($r_- < r < r_+$). В результате функция $u^{cps} u_d$ под интегралом (96) становится осциллирующей и величина интеграла $(\Lambda^{cps})^2$ начинает уменьшаться. В пределе $E \rightarrow \infty$ время pp -столкновения, а значит, и вероятность pp -реакции, становятся бесконечно малыми, функция u^{cps} равномерно сходится к функции свободного движения, всюду равной $\sin kr$ и ортогональной функции дейтрона. Поэтому $\Lambda^{cps} \rightarrow 0$ при $E \rightarrow \infty$.

Из приведенного качественного анализа следует, что функция $(\Lambda^{cps})^2$ ограничена при любой энергии и должна иметь локальный максимум. Эти выводы подтверждает рис.15. На нем изображены вычисленные квадраты матричного элемента Λ^{cps} и его стандартной [96] аппроксимации Λ_{as}^{cs} , порожденной заменой $u^{cps} \rightarrow u_{as}^{cs}$ в интеграле (96). Обе изображенные функции имеют максимумы при $E \approx 130$ кэВ.

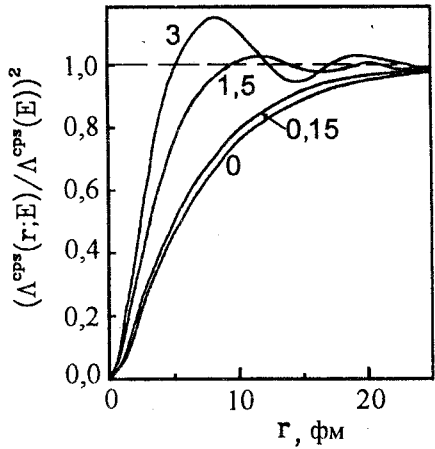


Рис.14. Квадрат функции $\Lambda^{cps}(r;E) / \Lambda^{cps}(E)$. Числа у кривых — значения энергий pp -столкновения E (МэВ)

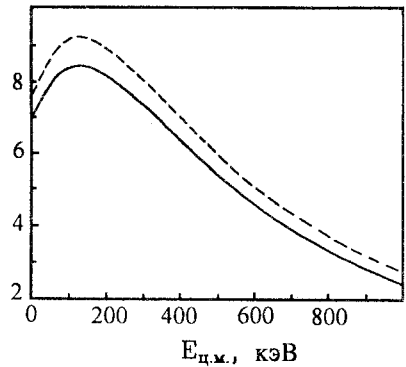


Рис.15. Квадраты ядерных матричных элементов pp -реакции. Сплошная кривая — $(\Lambda^{cps}(E))^2$, пунктир — $(\Lambda_{as}^{cs}(E))^2$

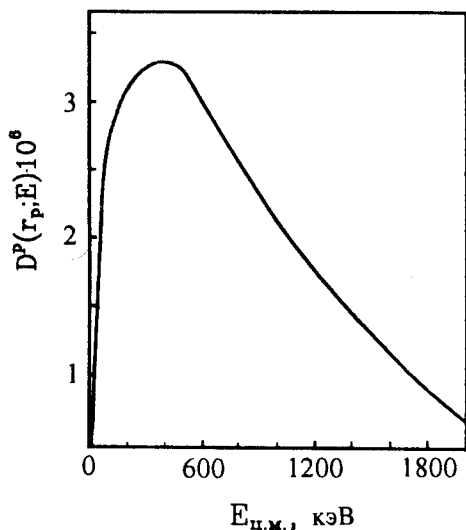


Рис.16. Вклад $D^P(E)$ поляризационного потенциала в сечение pp -реакции

Из квазиклассики [80] известно, что в случае $V^c > 0$ на упругое рассеяние влияет лишь часть потенциала V^P в области $r > r_c = 1/ER$. При увеличении энергии pp -столкновения от нуля кулоновская точка поворота r_c , т.е. нижняя граница области расстояний, где притягивающий поляризационный потенциал оказывает влияние на рассеяние, смещается влево и поэтому вклад $D^P(E)$ возрастает.

При энергии $E \approx E_{\max}^P = 1/r_p R$,

когда $r_c = r_p$ и поляризационное взаимодействие (7) оказывается полностью включенным с точки зрения квазиклассики, вклад D^P достигает своего максимального значения. При дальнейшем увеличении энергии начинает выполняться соотношение $E > |V_p|$, и поэтому вклад D^P монотонно уменьшается. Приведенные качественные выводы подтверждает рис.16, на котором изображена функция $D^P(E)$, вычисленная при $r_p = 4$ фм. Она имеет максимум в точке $E \approx 400$ кэВ, что вполне согласуется с качественной оценкой $E_{\max}^P \approx 372$ кэВ.

Итак, основной вклад от взаимодействия V^P в нормировочный множитель $N^{c,ps}$ функции u^{cps} и S^{cps} -фактор pp -реакции дает его внутренняя часть $V^P \Theta(r_+ - r)$, где $r_+ \approx 20$ фм. Как было показано в п.2.2, главный вклад от этого же взаимодействия в фазу $\delta^{c,ps}$ и соответствующее сечение $\sigma^{c,ps}$ обусловлен его хвостом $V^P \Theta(r - r_c)$, если $V^c > 0$, или внутренней частью $V^P \Theta(2|R| + r_p - r)$, если $V^c < 0$. Следовательно, область расстояний, в которой потенциалом V^P , строго говоря, нельзя пренебречь, существенно зависит от типа рассматриваемого физического процесса. Уже это замечание указывает на необходимость корректного определения радиуса действия поляризационного потенциала.

4. РАДИУС ДЕЙСТВИЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

В физической литературе [1,2] под радиусом действия потенциала V подразумевается точка B на оси переменной r , справа от которой можно положить $V \equiv 0$. В вычислительной математике [78] радиус действия B потенциала V для искомой функции A определяется как верхний предел отрезка $0 \leq r \leq B$, на котором задача решается численно. Этот предел выбирается так, чтобы вычисленная функция была близка, в определенном смысле, к точному решению исследуемой задачи. В асимптотических методах теории дифференциальных уравнений [79] точка B имеет смысл, близкий к ранее упомянутому, и определяется как нижняя граница интервала $B \leq r \leq \infty$, где рассматриваемую функцию можно заменить, опять же в определенном смысле, ее асимптотикой при $r \rightarrow \infty$.

Следуя [62], определим радиус действия B потенциала V^P для исследуемой функции A как решение $B = B(A; \epsilon, \{\mathcal{P}\})$ неравенства

$$d(A, B) \equiv |A(B; \{\mathcal{P}\})/A(\infty; \{\mathcal{P}\}) - 1| \leq \epsilon, \quad 0 \leq \epsilon < 1, \quad (110)$$

где $\{\mathcal{P}\}$ — множество всех параметров уравнения (22). В качестве A рассмотрим фазовую функцию $\delta^{c,p}(r; k)$, регулярное решение $u^{ca}(r; k, B)$ ($a = p, ps$) уравнения (22) с потенциалом V^P , обрезанным в точке $r = B$, нормировочный множитель $N^{c,ps}(B; k)$ функции $u^{cps}(r; k, B)$ и матричный элемент $\Lambda^{cps}(B; k)$, определенный интегралом (96), в котором функция $u^{ca}(r; k)$ заменена функцией $u^{cps}(r; k, B)$. В каждом случае исследуемая функция A , величины d, ϵ и соотношение (110) имеют ясный смысл. По определению $A(B; k)$ есть исследуемая функция $A(k) = A(\infty; k)$ в случае обрезанного в точке $r = B$ потенциала V^P . Если B удовлетворяет неравенству (110), то функция $A(B; k)$ аппроксимирует функцию $A(k)$, отвечающую реальному необрезанному поляризаационному потенциалу, с относительной точностью d , меньшей или равной требуемой точности ϵ .

На практике вместо функции $A(\infty; k)$ всегда вычисляется функция $A(B; k)$, а величина B определяется так, чтобы M значащих цифр чисел $A(B; k)$ и $A(B'; k)$ были бы одинаковыми для любых $B' > B$. Для построения B как функции M вычисляется последовательность функций $\{A(B_i; k)\}_{i=1}^N$, отвечающая последовательности потенциалов $V^P \Theta(B_i - r)$, обрезанных в точках $B_1 < B_2 < \dots < B_N$. В результате численного эксперимента точка B_N выбирается достаточно удаленной и принимается за бесконечно удаленную точку. Затем (110) сводится к неравенству

$$d(A, B_M) = |A(B_M; k) / A(B_N; k) - 1| < 10^{-M}, \quad (111)$$

которое выполняется для всех $M = 1, \dots, N-1$. Так получается решение $B(A; \varepsilon, \{\mathcal{P}\}) = B_M$ неравенства (110) при $\varepsilon = 10^{-M}$, $M = 1, \dots, N-1$ и фиксированных значениях набора $\{\mathcal{P}\}$ всех параметров.

Описанным способом в [62] было показано, что радиус действия поляризационного потенциала для π^\pm -фаз $\delta^{c,P}$ задается формулами

$$B(\delta^{c,P}(k); \varepsilon, \{k, R, r_p\}) \approx \begin{cases} (0,3 + 0,6\varepsilon^{-1/3})r_c, & R > 0, \\ 0,6r_p - (0,2 - 0,5\varepsilon^{-1/3})|R|, & R < 0. \end{cases} \quad (112)$$

Они верны, если $\varepsilon = 10^{-M}$, $M = 1, \dots, 5$; $0,1 \leq r_p / |R| \leq 10$ и $E \leq 10$ кэВ, и показывают, что для вычисления $\pi^\pm d$ -фаз с относительной ошибкой $d(\delta^{c,P}, B)$, меньшей, чем ε , можно пренебречь поляризационным потенциалом (7) в области $r > B$, нижняя граница которой существенно зависит как от набора $\{\mathcal{P}\} = \{k, R, r_p\}$ всех параметров, так и от заданной точности ε . Из (112) видно, что в случае $V^c > 0$ поляризационный потенциал имеет более дальнедействующую природу, чем в случае $V^c < 0$. Его радиус действия для $\pi^+ d$ -фазы $\delta^{c,P}$ увеличивается с уменьшением энергии и слабо зависит от нее в случае $\pi^- d$ -рассеяния. Так как фаза $\delta^{c,P}$ содержится в асимптотике (23) функции u^{cP} , то для этой функции радиус действия поляризационного потенциала не может быть меньше, чем его радиус действия (112) для фазы. Как отмечалось в [62], соотношения

$$B(u^{cP}(r; k); \varepsilon, \{k, R, r_p\}) = B(\delta^{c,P}(k); \varepsilon, \{k, R, r_p\}) \quad (113)$$

верны для $\pi^\pm d$ -рассеяния, если ε , r_p и E те же, что и в оценках (112). Радиусы действия поляризационного потенциала для нормировочного множителя функции pp -рассеяния и ядерного матричного элемента также равны, и при условиях $\varepsilon < 10^{-M}$, $M = 1, \dots, 5$; $E < 10$ кэВ и $r_p = 4$ фм описываются соотношениями [62]

$$B(N^{c,ps}; \varepsilon, \{k, R, r_p\}) = B(\Lambda^{cps}; \varepsilon, \{k, r_p\}) \approx r_p + 1,3 \cdot 10^{-3} R \varepsilon^{-2/5}. \quad (114)$$

Как следует из (112) и (114), радиус действия потенциала V^p для интеграла $\Lambda^{c,ps}$, а значит, и для сечения $\sigma_r^{c,ps}$ pp -реакции, не зависит от энергии и намного меньше радиуса действия этого же потенциала для фазы $\delta^{c,p}$ и, следовательно, для сечения $\sigma^{c,ps}$ упругого pp -рассеяния.

Другой метод определения радиуса действия B поляризационного потенциала для исследуемой функции A является аналитическим. Используя его, оценим радиус действия поляризационного потенциала для ВКБ-фазы $\bar{\delta}^{c,p}$. Подставим в (110) фазовую функцию (82) в качестве A . Разрешив полученное неравенство относительно B , имеем

$$B(\bar{\delta}^{c,p}(k); \epsilon, \{k, R\}) \approx (16\epsilon/5)^{-1/3} r_c \approx 0,68 r_c \epsilon^{-1/3}. \quad (115)$$

Теперь найдем радиус действия поляризационного потенциала для нормировочного множителя $N^{c,ps}(k)$ при $k=0$ и $V^c > 0$. Из (53), (54) и (101) имеем $N^{c,ps}(r; 0) = 1/c_0^{c,ps}(r)$. Используя асимптотику (100) функции $c_0^{c,ps}(r)$, решим неравенство (110) с $A = N^{c,ps}$, тогда получим

$$B(N^{c,ps}(0); \epsilon, \{\alpha_e, R\}) \approx R(\alpha_e/10R^3\epsilon)^{2/5}. \quad (116)$$

Формулы (112)—(116) показывают, что нижняя граница B интервала $B \leq r \leq \infty$, где поляризационный потенциал можно заменить тождественно нулем, является в общем случае функционалом исследуемой функции A , точности ϵ , требуемой для ее вычисления, энергии столкновения и параметров кулоновского и поляризационного потенциалов. Эту границу следует всегда определять по отношению к исследуемой функции A как решение неравенств (110) и (111) аналитическим или численным методами.

Итак, понятие «дальнодействующий потенциал» является относительным. Приведем еще один аргумент, подтверждающий этот вывод. Кроме медленного убывания, характерным признаком дальнодействующего потенциала (2) является медленная сходимости [6,13] ряда парциальных амплитуд f_l^a к полной амплитуде рассеяния $f^a(\theta)$ и, как следствие такой сходимости, пикообразное поведение дифференциального сечения $d\sigma^a(\theta)$ при малых углах рассеяния ($\theta \rightarrow 0$). Например, если $a=3$, $k \rightarrow 0$ и $l \geq 1$, то фазы δ_l^a рассеяния потенциалом (2) линейны по импульсу [110] и поэтому ряд парциальных амплитуд, определяющий сечение $d\sigma^a(\theta)$, расходится при $\theta \rightarrow 0$ как $O(\ln(\theta/2))^2$. При $k \rightarrow 0$ поляризационное взаимодействие (случай $a=4$) также порождает две важные особенности [37] в поведении амплитуды

$f^{c, ps}$ рассеяния суперпозицией (3). Первая из них состоит в том, что вклад $f^{c, p}$ от этого взаимодействия убывает не экспоненциальным [11], как вклад $f^{c, s}$ от ядерного взаимодействия, а степенным образом: $f^{c, p} \sim k^3$. Вторая особенность — неравномерный характер асимптотики амплитуды $f^{c, ps}$: при $k \rightarrow 0$ вклад в эту амплитуду от суммы парциальных амплитуд $f_l^{c, ps}$ с конечными l мал, ее старший член порождается слагаемыми $f_l^{c, ps} \sim f_l^{c, p}$ с большими номерами $l \sim \eta \operatorname{ctg}(\theta/2)$.

Однако дальнедействующий потенциал может порождать быстро сходящийся ряд парциальных амплитуд и несингулярное сечение рассеяния. Примером такого потенциала является взаимодействие магнитных моментов. Докажем это утверждение фазовым анализом nn -рассеяния.

5. ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ НЕЙТРОНОВ НА НЕЙТРОН-НЕЙТРОННОЕ РАССЕЯНИЕ

После работ Мотта [111] и Швингера [112] влияние взаимодействия [15]

$$V_{ls}^m = \frac{\hbar}{M} \gamma (\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\mu}) r^{-3}, \quad \gamma \equiv \frac{\mu Z e^2}{2 M c^2}, \quad (117)$$

магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ нейтрона с электрическим полем ядра, имеющего заряд Z , неоднократно исследовались как теоретически, так и экспериментально [15—18]. В результате было установлено, что дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного пучка нейтронов на бесспиновом ядре описывается формулами

$$d\tilde{\sigma}(\theta) = d\sigma^s(\theta) + d\tilde{\sigma}_{ls}^m(\theta), \quad d\tilde{\sigma}_{ls}^m(\theta) = (\gamma \operatorname{ctg}(\theta/2))^2, \quad (118)$$

полученными Швингером [112] в борновском приближении [7]. Дифференциальное сечение $d\sigma^s(\theta)$ ядерного рассеяния, обусловленного ядерным взаимодействием нейтрона с ядром, является гладкой функцией угла рассеяния θ . Дифференциальное сечение $d\tilde{\sigma}_{ls}^m(\theta)$ рассеяния потенциалом (117), впервые названное в [113] швингеровским рассеянием, неограниченно возрастает при $\theta \rightarrow 0$. Такое же пикообразное поведение имеет и сумма (118) этих сечений в области малых углов рассеяния, когда $d\tilde{\sigma}(\theta) \approx d\tilde{\sigma}_{ls}^m(\theta)$. Из теории рассеяния [6] известно, что этот эффект обусловлен медленным убыванием потенциала (117).

Взаимодействие магнитных моментов $\mu_i = 2\mu_i s_i$ двух ($i = 1, 2$) нуклонов описывается тензорным потенциалом [2,15]

$$V^m = - [3(\mu_1 \cdot r)(\mu_2 \cdot r) r^{-2} - (\mu_1 \cdot \mu_2)] r^{-3}, \quad (119)$$

зависящим от r так же, как потенциал (117). Хотя потенциал (119) является дальнедействующим, до сих пор не обнаружено каких-либо эффектов его влияния на pp - и np -рассеяние [35]. Известно [114], что вклад $f^{c,m}$ от V^m в амплитуду pp -рассеяния, дополнительную к кулоновской, несингулярен при $\theta \rightarrow 0$ и мал по сравнению с вкладом $f_{ls}^{c,m}$ от V_{ls}^m . Поэтому при анализе экспериментальных данных по упругому pp - и np -рассеянию взаимодействием (119) обычно пренебрегают [35]. До недавних работ [71] и [72] влияние этого взаимодействия на nn -рассеяние, по-видимому, не исследовалось ни теоретически, ни экспериментально. В монографиях [15—18], посвященных фундаментальным свойствам нейтрона, такие исследования не упомянуты.

Как известно [15,115,116], проблема прямого измерения характеристик упругого рассеяния нейтрона на нейтроне до сих пор остается открытой. Возможность прямого измерения длины nn -рассеяния в нейтронном пучке, обсуждавшаяся в [117], стимулировала наши исследования [71] и [72] влияния потенциала (119) на энергетическую зависимость фаз и сечений nn -рассеяния. В этом разделе качественный анализ [72] роли взаимодействия магнитных моментов нейтронов в триплетном nn -рассеянии дополняется результатами недавних вычислений, выполненных в трех случаях ($a = m, s, ms$) и отвечающих разным предположениям о полном взаимодействии V^a двух нейтронов. В первом случае ($a = m$) исследуется рассеяние потенциалом (119). Характеристики такого модельного рассеяния называются магнитными. Во втором случае ($a = s$) исследуются характеристики ядерного рассеяния. В третьем случае ($a = ms$) для исследования магнитно-ядерного рассеяния учитываются оба потенциала V^m и V^s , а полное взаимодействие берется в виде суперпозиции (4). Все функции в каждом из этих трех случаев помечаются соответствующим верхним индексом a .

Напомним основные обозначения и формулы теории рассеяния двух нуклонов [2]. Пусть s, l и j — полный спин ($s = s_1 \oplus s_2$), угловой и полный ($j = l \oplus s$) моменты системы двух нейтронов с полной энергией $E = k^2$, где k — импульс рассеяния в системе их центра масс. Согласно теории нуклон-нуклонного взаимодействия [5], s и j — сохраняющиеся квантовые числа; если $s = 1$, то l сохраняется в чистых состояниях с $j = 0, l = 1$ или $l = j = 1, 3, 5, \dots$ и не сохраняется в смешанных состояниях, когда

$j = 2, 3, 4, \dots$, а $l = j \pm 1$. Смешивание состояний обусловлено тензорным слагаемым ядерного потенциала. Взаимодействие (119) отличается от этого слагаемого лишь зависимостью от расстояния r между двумя нейтронами и исчезает в их синглетных ($s = 0$) по спину состояниях. Поэтому мы исследуем только триплетное ($s = 1$) nn -рассеяние.

В методе фазовых функций [10] параметры рассеяния (фазы $\delta_{l,j}^a(k)$ и параметр смешивания $\epsilon_j^a(k)$), введенные Стаппом и др. [118] в случае $a = s$, определяются как пределы при $r \rightarrow \infty$ соответствующих фазовых функций $\delta_{l,j}^a(r; k)$ и $\epsilon_j^a(r; k)$. Эти функции равны нулю при $r = 0$, а при $r > 0$ подчиняются следующим уравнениям [119]:

$$\begin{aligned} \partial_r \delta_{l,j}^a &= -k^{-1} \sec 2\epsilon_j \{ V_{l,l}^a (P_l^2 \cos^4 \epsilon_j^a - Q_l^2 \sin^4 \epsilon_j^a) - \\ &- V_{l,l'}^a \sin 2\epsilon_j^a [2^{-2}(P_l^2 - Q_l^2) \sin 2\epsilon_j^a + P_l Q_l \cos^2 \epsilon_j^a - P_l Q_l \sin^2 \epsilon_j^a] \}, \\ \partial_r \epsilon_j^a &= -k^{-1} \{ V_{l,l}^a (P_l P_{l'} \cos^2 \epsilon_j^a + Q_l Q_{l'} \sin^2 \epsilon_j^a) - \\ &- 2^{-1} \sin 2\epsilon_j^a \sum_{l''=j \pm 1} V_{l'',l''}^a P_{l''} Q_{l''} \}. \end{aligned} \quad (120)$$

В этих уравнениях $l, l' = j \pm 1, l \neq l'$;

$$P_l \equiv j_l \cos \delta_{l,j}^a - n_l \sin \delta_{l,j}^a, \quad Q_l \equiv j_l \sin \delta_{l,j}^a + n_l \cos \delta_{l,j}^a,$$

j_l и n_l — регулярная и нерегулярная функции Риккати — Бесселя [73]; символами $V_{l,l'}^a$ обозначены матричные элементы nn -взаимодействия V^a в базисе векторных сферических функций. Для чистых состояний $\epsilon_j^a \equiv 0$, и система (120) распадается на два несвязанных уравнения. В этом базисе матричные элементы тензорного потенциала (119) имеют вид

$$\begin{aligned} V_{l,l}^m &= 2\tau r^{-3} \{ \hat{\delta}_{l,j}^m - [l \hat{\delta}_{l,j-1}^m + (l+1) \hat{\delta}_{l,j+1}^m] / (2j+1) \}, \\ V_{l,l'}^m &= \tau r^{-3} \sqrt{6j(j+1)} / (2j+1), \end{aligned} \quad (121)$$

ограничены при всех l и содержат константу $\tau \equiv -\mu_n^2 m_n = -0,0014$ фм, где μ_n и m_n — магнитный момент и масса нейтрона.

Триpletное рассеяние двух нуклонов описывается [118] матрицей M , определенной в спиновом пространстве равенствами

$$f_n^a(\Omega; k) = \sum_{n'=-1}^1 M_{n, n'}^a(\Omega; k) a_{n'}(k).$$

Они связывают три ($n = -1, 0, 1$) амплитуды рассеяния $f_n^a(\Omega; k)$ в состояниях с проекцией $s_z = n$ полного спина $s = 1$ с амплитудами $a_{n'}$ состояний с проекциями $s_z = n'$ в падающей волне. Матричные элементы $M_{n, n'}^a$ зависят от углов рассеяния $\Omega = (\theta, \varphi)$ и представлены в табл. III работы [118] в виде бесконечных рядов. Например,

$$M_{0,0}^a(\Omega; k) = (ik)^{-1} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} P_l^0(x) \{ (l+1) \alpha_{l, l+1}^a + l \alpha_{l, l-1}^a + \\ + [(l+1)(l+2)]^{1/2} \alpha_{l+1}^a + [l(l-1)]^{1/2} \alpha_{l-1}^a \}. \quad (122)$$

Здесь $P_l^n(x)$ — присоединенный полином Лежандра [73] переменной $x = \cos \theta$, а матрица α^a определена следующим образом: $\alpha_{l, j}^a = 0$, если $j < 0$, и $\alpha_j^a = 0$ при $j \leq 2$; в остальных случаях

$$\alpha_{l, j}^a = \cos 2\varepsilon_j^a [\exp(2i \delta_{l, j}^a) - 1], \\ \alpha_j^a = i \sin 2\varepsilon_j^a \exp [i(\delta_{j+1, j}^a + \delta_{j-1, j}^a)]. \quad (123)$$

Согласно табл. II этой же работы [118], дифференциальное сечение tripletного nn -рассеяния определяется формулой

$$d\sigma^a(\theta; E) = \pi \sum_{n=0}^1 \sum_{n'=-\hat{\delta}_{n,1}}^{\infty} (1 - \hat{\delta}_{n,0} \hat{\delta}_{n',0} / 2) |M_{n, n'}^a|^2. \quad (124)$$

Приступим к исследованию характеристик tripletного nn -рассеяния.

5.1. Характеристики tripletного nn -рассеяния. Приведем основные результаты качественного анализа [72] поведения параметров nn -рассеяния.

Первая итерация уравнения (120) в случае $a = m$ дает магнитные фазы $\delta_{l,j}^m$ и параметры смешивания ϵ_j^m в борновском приближении:

$$\tilde{\delta}_{l,j}^m(k) = \frac{(-1)^{l-j+1} \tau k}{\max\{l, j\} (2j+1-j) \hat{\delta}_{l,j}^m}, \quad \tilde{\epsilon}_j^m(k) = \frac{-\tau k}{\sqrt{j(j+1)}(2j+1)}, \quad (125)$$

точность которого такова, что

$$\delta_{l,j}^m(k) = \tilde{\delta}_{l,j}^m(k) + o(\tau k), \quad \epsilon_j^m(k) = \tilde{\epsilon}_j^m(k) + o(\tau k), \quad k \rightarrow 0. \quad (126)$$

Из (125) и (126) следует, что старшие члены низкоэнергетических асимптотик параметров магнитного рассеяния линейны по импульсу k при любых l и j . Параметры ядерного рассеяния (случай $a = s$) убывают более быстро [7,10]:

$$\delta_{l,j}^s = A_{l,j}^s k^{2l+1} (1 + O(k^2)), \quad \epsilon_j^s = A_j^s k^{2j+1} (1 + O(k^2)), \quad k \rightarrow 0. \quad (127)$$

Коэффициенты $A_{l,j}^s$ и A_j^s можно найти, экстраполируя по формулам (127) соответствующие экспериментальные данные [5], [35] для фаз и параметров смешивания NN -рассеяния в точку $E=0$, либо вычислить, используя любое ядерное взаимодействие, описывающее эти данные. Поясним это важное утверждение, означающее независимость всех последующих выводов от модели ядерного взаимодействия. Все известные параметризации ядерного взаимодействия [5] имеют один и тот же юкавский хвост (1), где μ — масса π -мезона. Этот хвост и определяет поведение параметров ядерного рассеяния при низких энергиях. Оно слабо зависит от формы V^s в области конечных расстояний, поэтому далее в качестве ядерного потенциала V^s используется лишь один из таких потенциалов, а именно потенциал Риды с мягким кором [5]. Интегрирование уравнений (120) с этим потенциалом дает

$$A_{1,0}^s = 2,74 \text{ фм}^3, \quad A_{1,1}^s = -1,53 \text{ фм}^3;$$

$$A_{1,2}^s = 0,25 \text{ фм}^3, \quad A_{3,2}^s = 1,36 \text{ фм}^7, \quad A_2^s = -2,00 \text{ фм}^5. \quad (128)$$

Параметры магнитно-ядерного рассеяния (случай $a = ms$) аппроксимируются [72] следующими суммами:

$$\delta_{l,j}^{ms}(k) \approx \delta_{l,j}^s(k) + \tilde{\delta}_{l,j}^m(k), \quad \epsilon_j^{ms}(k) \approx \epsilon_j^s(k) + \tilde{\epsilon}_j^m(k), \quad k \rightarrow 0. \quad (129)$$

В силу (125)—(129) можно условно выделить три области энергий. В первой области, т.е. при достаточно низких энергиях ($E \leq E_{l,j}^-$), магнитные слагаемые (125) сумм (129) намного больше ядерных слагаемых (127), и поэтому параметры (129) магнитно-ядерного рассеяния близки к параметрам магнитного рассеяния (126) и, следовательно, линейны по k при любых l, j . В третьей области, т.е. при достаточно больших энергиях ($E \geq E_{l,j}^+$), выполняются обратные соотношения и магнитно-ядерные параметры близки к ядерным. Во второй, промежуточной, области ($E_{l,j}^- < E < E_{l,j}^+$) магнитные и ядерные слагаемые сумм (129) сравнимы по порядку величины, и рассеяние обуславливается взаимным воздействием потенциалов V^m и V^s . В результате этого взаимного воздействия магнитно-ядерные параметры (129) могут иметь нули, если ядерные и магнитные параметры противоположны по знаку. Это условие выполняется для 3P_0 , 3P_1 и 3P_2 - 3F_2 -состояний nn -системы. Из (125), (127) и (129) следуют приближенные формулы

$$E_{l,j}^{ms} \approx \left(\frac{(-1)^{l-j} \tau}{A_{l,j}^s \max\{l, j\} (2j+1-j \delta_{l,j}^{\wedge})} \right)^{1/l},$$

$$E_j^{ms} \approx \left(\frac{\tau}{A_j^s \sqrt{j(j+1)}(2j+1)} \right)^{1/j}, \quad (130)$$

связывающие нули фаз $\delta_{l,j}^{ms}$ и параметров смешивания ϵ_j^{ms} с константой τ потенциала (119) и коэффициентами ядерных асимптотик (127). После подстановки значений (128) этих коэффициентов в (130) получаются следующие оценки:

$$E_{1,0}^{ms} \approx 21 \text{ кэВ}, \quad E_{1,1}^{ms} \approx 19 \text{ кэВ}, \quad E_{1,2}^{ms} \approx 23 \text{ кэВ},$$

$$E_{3,2}^{ms} \approx 1,7 \text{ МэВ}, \quad E_2^{ms} \approx 313 \text{ кэВ}. \quad (131)$$

Согласно им все три ($j = 0, 1, 2$) фазы $\delta_{1,j}^{ms}$ имеют нуль примерно при одной и той же энергии, равной ≈ 20 кэВ. Следовательно, полное сечение магнитно-ядерного рассеяния σ^{ms} будет иметь локальный минимум при той же энергии $E \approx 20$ кэВ, если nn -состояния с $j \leq 2$ дают основной вклад в это сечение. Несмотря на то, что потенциал V^{ms} является дальнедействующим, это условие реализуется при достаточно низких энергиях. Опишем схему доказательства этого утверждения.

Каждый ряд $M_{n,n}^a$, представляется в виде сумм двух слагаемых:

$$M_{n,n}^a = M_{n,n}^a(j \leq j_{\max}) + M_{n,n}^a(j > j_{\max}). \quad (132)$$

Первое из них является конечной суммой этого ряда, все слагаемые которой имеют индекс j , не превышающий j_{\max} , и описывает вклад от состояний nn -рассеяния с $j \leq j_{\max}$ в исследуемый ряд. Для построения низкоэнергетических приближений рядов (132), их подсумм и сечений (124) элементы (123) матрицы α^a аппроксимируются первыми слагаемыми их разложений в ряды Тейлора: $\alpha_{i,j}^a \approx 2i \delta_{i,j}^a$, $\alpha_j^a \approx 2i \epsilon_j^a$, а параметры рассеяния заменяются соответствующими старшими членами их асимптотик (125), (127) и (129).

В борновском приближении все ряды $\tilde{M}_{n,n}^m$, за исключением ряда $\tilde{M}_{1,-1}^m$, равны конечным суммам своих слагаемых, имеющих индекс $l = 1$ и отвечающих nn -состояниям с $j \leq 2$. Все остальные слагаемые этих рядов обращаются в нуль, так как борновские магнитные фазы рассеяния в чистых и смешанных состояниях имеют разные знаки. Например, ряд (122) и ряд $\tilde{M}_{1,0}^m$ равны вкладам от 3P_0 -состояния, а ряды $\tilde{M}_{0,1}^m$ и $\tilde{M}_{1,1}^m$ совпадают с вкладами от состояний с $j = 1, 2$. Бесконечный ряд $\tilde{M}_{1,-1}^m$ содержит вклады от всех состояний с $j \geq 2$, но быстро сходится и является табличным [73]. Вследствие такой структуры магнитных борновских рядов они суммируются в явном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{0,1}^m &= (\tilde{M}_{1,0}^m)^* = -\sqrt{2} \tau \exp(i\phi) P_1^1(x), & \tilde{M}_{1,1}^m &= -\tau P_1(x), \\ \tilde{M}_{0,0}^m &= 2\tau P_1(x), & \tilde{M}_{1,-1}^m &= \tau \exp(-2i\phi) P_1(x). \end{aligned} \quad (133)$$

Подстановка их в (124) вместо соответствующих рядов $M_{n,n}^m$ дает борновские приближения $d\tilde{\sigma}^m = 4\pi\tau^2$ и $\tilde{\sigma}^m = 8\pi\tau^2$ дифференциального и полного магнитных сечений. В силу (126) точность этих приближений улучшается как $o(\tau k)$, если $k \rightarrow 0$. В этом пределе магнитное дифференциальное сечение $d\sigma^m$ становится изотропным, в отличие от швингеровского дифференциального сечения $d\tilde{\sigma}_{ls}^m$ (см. (118)). Существенное отличие угловой зависимости этих сечений обусловлено операторным строением потенциалов (117) и (119). При увеличении нейтрон-ядерного углового момента l матричные элементы ls -потенциала V_{ls}^m в спин-угловом нейтрон-

ядерном базисе растут как $O(l)$. Поэтому основной вклад в ряд $d\tilde{\sigma}_{ls}^m(\theta)$ парциальных амплитуд швингеровского рассеяния дают все амплитуды с большими номерами $l \sim 1/\theta$, в результате чего этот ряд расходится при $\theta \rightarrow 0$. Матричные элементы (121) потенциала V^m ограничены в любых nl -состояниях. Кроме того, это взаимодействие является притягивающим (отталкивающим) в чистых (смешанных) состояниях nl -рассеяния. При низких энергиях в каждом состоянии с $j \geq 3$ такое притяжение компенсируется отталкиванием. В результате основной вклад в ряды $M_{n,n'}^m$ дает конечное число nl -состояний с $j \leq 2$ и поэтому сечение $d\tilde{\sigma}^m(\theta)$ несингулярно.

Благодаря быстрому убыванию (127) параметров ядерного рассеяния ряды $M_{n,n'}^s$ в линейном по энергии приближении

$$M_{1,0}^s \approx \sqrt{2} \exp(-i\varphi) E(A_{1,2}^s - A_{1,0}^s) P_1^1(x), \quad M_{1,-1}^s = 0,$$

$$M_{0,1}^s \approx (3/\sqrt{2}) \exp(i\varphi) E(A_{1,1}^s - A_{1,2}^s) P_1^1(x),$$

$$M_{1,1}^s \approx 3E(A_{1,1}^s + A_{1,2}^s) P_1(x), \quad M_{0,0}^s \approx 2E(A_{1,0}^s + 2A_{1,2}^s) P_1(x) \quad (134)$$

совпадают с вкладами от состояний с $j \leq 2$, а вклады от остальных состояний в суммы (132) убывают как $O(k^4)$. Подстановка (134) в (124) дает полное сечение ядерного рассеяния

$$\sigma^s(E) \approx 4\pi E^2 \sum_{j=0}^2 (2j+1)(A_{1,j}^s)^2 \quad (135)$$

в стандартном приближении [35], не учитывающем вклад от состояний с $j \geq 3$. Этот вклад убывает при $k \rightarrow 0$ как $O(k^6)$.

Аппроксимации (126), (127) и (129) порождают приближенные (с точностью $o(\tau k)$) представления в виде сумм

$$M_{n,n'}^{ms} \approx \tilde{M}_{n,n'}^m + M_{n,n'}^s \quad (136)$$

со слагаемыми (133) и (134). Подстановкой (136) в (124) получается соответствующая приближенная формула

$$\sigma^{ms}(E) \approx \tilde{\sigma}^m(E) + (4\pi/3) \tau E(2A_{1,0}^s - 3A_{1,1}^s + A_{1,2}^s) + \sigma^s(E) \quad (137)$$

для полного магнитно-ядерного сечения. Точность этого приближения равна $o(\tau k)$ при $k \rightarrow 0$. Вклад $\tilde{\sigma}^m$ от V^m в сумму (137) постоянен и равен

$8\pi\tau^2$. При значениях (128) коэффициентов $A_{1,j}^s$ второе слагаемое отрицательно и линейно по энергии. Оно описывает взаимный вклад от V^m и V^s . Последнее слагаемое, т.е. вклад (135) от V^s , положительно и квадратично по энергии. Такая структура соотношения (137) позволяет условно выделить три области энергий. В первой области достаточно низких энергий ($E \leq E^-$) сечение σ^{ms} приблизительно постоянно и равно сечению $\tilde{\sigma}^m$. При таких энергиях в сумме (4) можно пренебречь ядерным потенциалом. В третьей области энергия настолько велика ($E \geq E^+$), что $\sigma^{ms} \approx \sigma^s$, и можно пренебречь потенциалом V^m . В этой области сечение σ^{ms} растет с увеличением энергии. Очевидно, что во второй, промежуточной, области энергий ($E^- < E < E^+$) магнитно-ядерное сечение (137) должно иметь локальный минимум. Это явление есть нейтрон-нейтронный аналог эффекта Рамзауэра, ибо оно, как и известный эффект Рамзауэра [84], порождается совместным воздействием коротко- и дальнедействующего потенциалов, имеющих разные знаки. Нуль первой производной функции (137) по энергии определяет положение минимума полного сечения магнитно-ядерного nn -рассеяния,

$$E_{\min}^{ms} \approx (-\tau/2)(2A_{1,0}^s - 3A_{1,1}^s + A_{1,2}^s) / \sum_{j=0}^2 (2j+1)(A_{1,j}^s)^2, \quad (138)$$

через константу τ потенциала V^m и коэффициенты $A_{1,j}^s$ асимптотик (127) трех ядерных фаз рассеяния. Если в (138) подставить значения (128) этих коэффициентов, то получится

$E_{\min}^{ms} \approx 20$ кэВ. Формула (138)

является аналогом соотношения, впервые полученного в [120] и связывающего положение минимума Рамзауэра с поляризационной константой α_e и длиной рассеяния a^s короткодействующим обменным потенциалом.

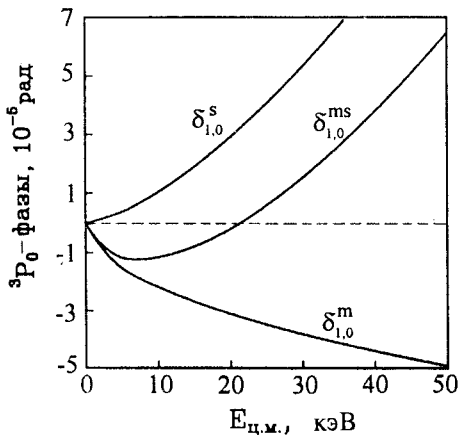


Рис.17. Магнитная ($\delta_{1,0}^m$), ядерная ($\delta_{1,0}^s$) и магнитно-ядерная ($\delta_{1,0}^{ms}$) фазы nn -рассеяния в 3P_0 -состоянии

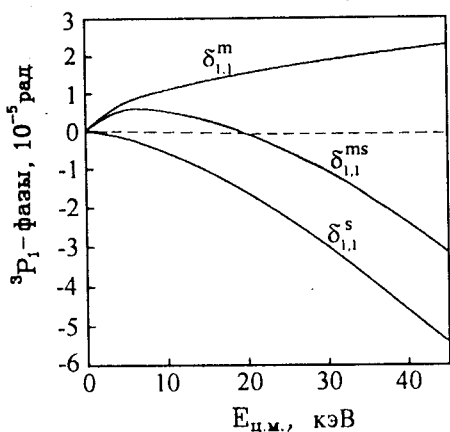


Рис.18. Магнитная ($\delta_{1,1}^m$), ядерная ($\delta_{1,1}^s$) и магнитно-ядерная ($\delta_{1,1}^{ms}$) фазы np -рассеяния в 3P_1 -состоянии

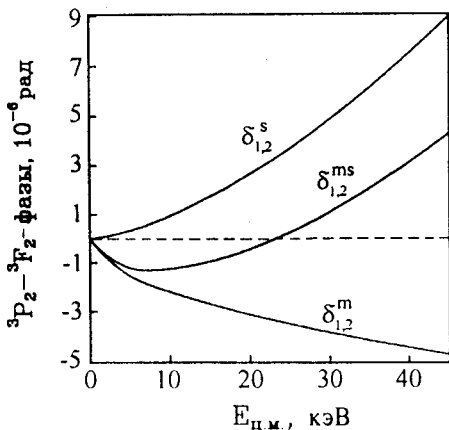
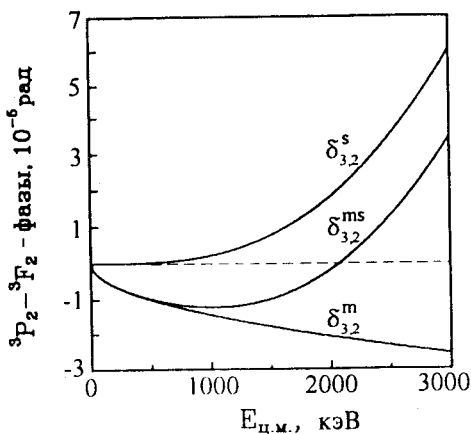


Рис.19. Магнитная ($\delta_{1,2}^m$), ядерная ($\delta_{1,2}^s$) и магнитно-ядерная ($\delta_{1,2}^{ms}$) фазы np -рассеяния в 3P_2 - 3F_2 -состоянии

Рис.20. Магнитная ($\delta_{3,2}^m$), ядерная ($\delta_{3,2}^s$) и магнитно-ядерная ($\delta_{3,2}^{ms}$) фазы np -рассеяния в 3P_2 - 3F_2 -состоянии



Перечислим основные результаты численного анализа np -рассеяния. Параметры рассеяния в состояниях с $j \leq 2$, вычисленные интегрированием (120), изображены на рис.17—21. Эти данные наглядно поясняют влияние потенциала (119) на np -рассеяние и позволяют оценить границы $E_{l,j}^-$ и $E_{l,j}^+$. Если их определить как максимальное и минимальное значения энергий,

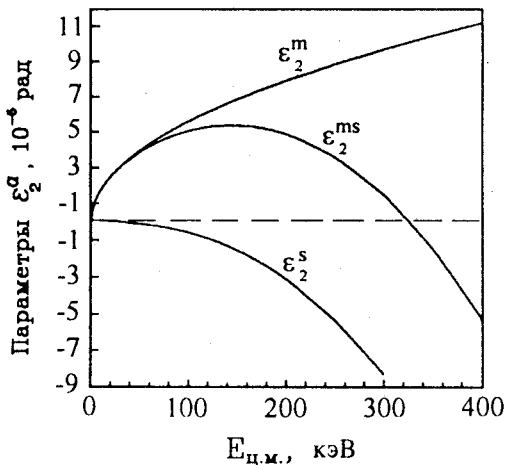


Рис.21. Магнитный (ϵ_2^m), ядерный (ϵ_2^s) и магнитно-ядерный (ϵ_2^{ms}) параметры смешивания nn -рассеяния в 3P_2 — 3F_2 -состоянии

при которых выполняются соответствующие неравенства $|\delta_{l,j}^s/\delta_{l,j}^{ms}| \leq 0,1$ и $|\delta_{l,j}^s/\delta_{l,j}^{ms}| \geq 0,9$, то получаются следующие оценки:

$$E_{1,j}^- \approx 2 \text{ кэВ}, \quad E_{1,j}^+ \approx 0,3 \text{ МэВ}, \quad j=0, 1, 2;$$

$$E_{3,2}^- \approx 0,7 \text{ МэВ}, \quad E_{3,2}^+ \approx 7 \text{ МэВ}.$$

Как оказалось, относительная точность борновского приближения достаточно высока: борновские выражения (125) аппроксимируют магнитные параметры nn -рассеяния с относительной точностью $\epsilon \approx 10^{-4}$ при всех $j \leq 10$ и $E \leq 10$ МэВ. Относительная точность аппроксимации ядерных параметров рассеяния старшими слагаемыми их асимптотик (127) не хуже чем 10^{-2} , если $l=0, 1; j=0, 1, 2$ и $E < 7$ МэВ. С такой же точностью и при тех же условиях справедливы приближения (129), (130) и (131). Так как точность всех ключевых приближений, упомянутых выше, достаточно высока, то приближения

$$M_{n,n'}^m \approx \tilde{M}_{n,n'}^m, \quad M_{n,n'}^s \approx M_{n,n'}^s (j \leq 2),$$

$$M_{n,n'}^{ms} \approx M_{n,n'}^{ms} (j \leq 2) + \tilde{M}_{n,n'}^m (j > 2) \quad (139)$$

должны выполняться с относительной точностью $\epsilon \approx 10^{-2}$ при $E < 7$ МэВ. Этот вывод был проверен численно и позволил использовать приближения (139) для вычисления сечений (124).

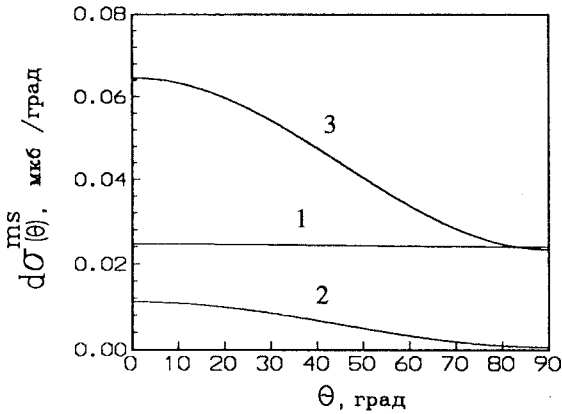


Рис.22. Магнитно-ядерное дифференциальное сечение $d\sigma^{ms}(\theta)$ триплетного np -рассеяния при энергиях 5, 20, 40 кэВ (кривые 1, 2, 3 соответственно)

Изменение угловой зависимости дифференциального сечения $d\sigma^{ms}(\theta)$ с ростом энергии поясняет рис.22. При $E = 5$ кэВ рассеяние в основном обусловлено потенциалом V^m , сечение $d\sigma^{ms}$ близко к магнитному сечению $d\sigma^m$ и поэтому изотропно. В промежуточной области $d\sigma^{ms}$ равномерно уменьшается при увеличении энергии до значения $E \approx 20$ кэВ. Далее $d\sigma^{ms}$ увеличивается и становится неизотропным из-за возрастающего влияния ядерного взаимодействия.

Влияние потенциала V^m на полное сечение np -рассеяния и нейтрон-нейтронный аналог эффекта Рамзауэра демонстрирует рис.23. На нем изображены одновременно сечения σ^m , σ^s и σ^{ms} . Как видно, σ^s быстро убывает при уменьшении энергии, σ^m слабо зависит от нее, σ^{ms} совпадает с σ^m при $E = 0$, имеет локальный минимум при $E \approx 20$ кэВ и сходится к σ^s при дальнейшем увеличении энергии.

Для полноты исследовались вклады $d\sigma_{j_{\max}}^m$ в сечение $d\sigma^{ms}$ от состояний с $j \leq j_{\max}$. По определению $d\sigma_{j_{\max}}^{ms}$ — сумма (124), слагаемые которой заменены вкладами $M_{n,n}^{ms}(j \leq j_{\max})$, вычисленными по точным формулам. При таком определении случай $j_{\max} = \infty$ отвечает реальной ситуации, когда все состо-

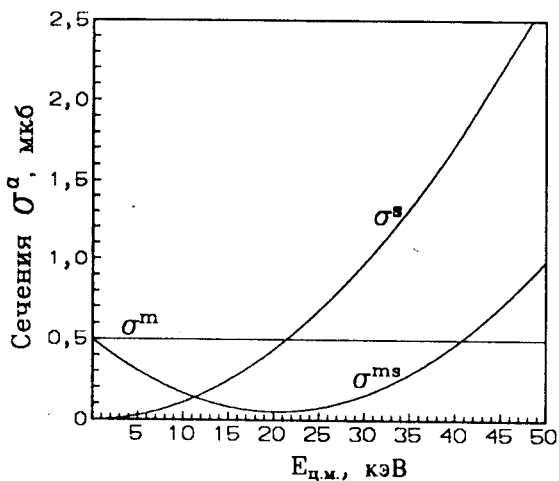


Рис.23. Магнитное (σ^m), ядерное (σ^s) и магнитно-ядерное (σ^{ms}) полные сечения триплетного n - n -рассеяния

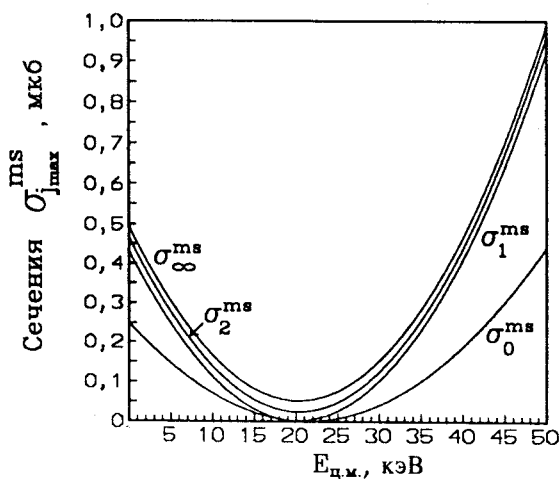


Рис.24. Вклады $\sigma_{j_{\max}}^{ms}$, $j_{\max} = 0, 1, 2$, в магнитно-ядерное полное сечение σ_{∞}^{ms} триплетного n - n -рассеяния

яния рассеяния учтены, поэтому $d\sigma_{\infty}^{ms} \equiv d\sigma^{ms}$. Вклады $\sigma_{j_{\max}}^{ms}$ в полное сечение σ_{∞}^{ms} и оно само изображены на рис.24. Согласно ему основной вклад σ_1^{ms} дают 3P_0 - и 3P_1 -состояния. Оба вклада σ_0^{ms} и σ_1^{ms} становятся нулевыми примерно при одной и той же энергии. За счет 3P_2 - 3F_2 -состояния минимальное значение вклада σ_2^{ms} отлично от нуля, а положение минимума немного смещено вправо. Из-за всех остальных состояний с $j \geq 3$ сечение σ^{ms} равномерно по энергии, но не существенно, превышает вклад σ_2^{ms} .

Итак, все выводы качественного анализа [72] роли потенциала (119) в триплетном nn -рассеянии подтверждаются результатами численных исследований. Это позволяет сделать следующие выводы.

Взаимодействие магнитных моментов нейтронов необходимо учитывать для корректного описания триплетного nn -рассеяния при низких энергиях ($E \leq 300$ кэВ) по следующим причинам. Благодаря этому взаимодействию в пределе низких энергий ($E \leq 2$ кэВ) фазы рассеяния должны быть пропорциональны импульсу рассеяния, дифференциальное сечение должно быть изотропным, полное сечение не должно обращаться в нуль. В результате интерференции ядерного и магнитного рассеяний при энергии $E \approx 20$ кэВ фазы рассеяния в состояниях с $l = 1$ и $j = 0, 1, 2$ должны принимать нулевые значения, а полное сечение должно иметь локальный минимум. Для экстраполяции параметров и полного сечения триплетного nn -рассеяния, учитывающей взаимодействие магнитных моментов, можно использовать формулы (129) и (137). При $E \leq 300$ кэВ эти формулы описывают достаточно точно не только фазы и полное сечение nn -рассеяния, но и интересные с экспериментальной точки зрения структурные особенности: положения нулей и локального минимума.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре основное внимание было уделено теоретическому анализу эффектов, порождаемых поляризационным взаимодействием и взаимодействием магнитных моментов. Каждый раздел заканчивался подведением итогов этого анализа, поэтому здесь мы перечислим лишь некоторые из них. Это необходимо сделать для того, чтобы сформулировать особо важные, но так и не решенные в процитированных работах проблемы теории рассеяния и методики обработки экспериментальных данных.

Итак, поляризационное взаимодействие радикально изменяет пороговое ($E \rightarrow 0$) поведение S -фаз $\delta^{c,ps}$ и сечений $\sigma^{c,ps}$ упругих ядерных и пион-ядер-

ных столкновений, но вносит несущественный вклад в сечения реакций нуклеосинтеза. Благодаря этому взаимодействию фазы $\delta^{c,ps}$ и сечения $\sigma^{c,ps}$ убывают на пороге степенным, а не экспоненциальным, как кулон-ядерные фазы $\delta^{c,s}$ и сечения $\sigma^{c,s}$, образом. Из-за такого сравнительно медленного убывания фазы $\delta^{c,ps}$ величина $a^{c,ps}$ не ограничена и не имеет смысла длины рассеяния. Им обладает ее модификация $a^{c,p,s}$, содержащаяся в разложении (48) модифицированной функции эффективного радиуса $K^{c,p,s}$. Это особо важное для корректного извлечения информации о самом ядерном взаимодействии из экспериментальных данных разложение до сих пор не исследовано в полном объеме. В настоящее время неизвестен явный вид аналогов S_p и h_p кулоновских функций S и h из разложения (20) и не предложен эффективный метод вычисления модифицированных коэффициентов $a^{c,p,s}$ и $r^{c,p,s}$ по заданным взаимодействиям V^c , V^p и V^s . Самое главное — неизвестен и надежный практический способ определения этих величин по данным о сечении упругого рассеяния $\sigma^{c,ps}$ суперпозицией (3) таких потенциалов в области достаточно больших ($E > 10$ МэВ) и поэтому доступных для современных экспериментальных исследований ядерных столкновений энергий. Для решения этой важной задачи необходимо вычесть из измеренного сечения $\sigma^{c,ps}$ вклад $\sigma^{c,p}$ от суперпозиции кулоновского и поляризованного взаимодействий. Однако и это нельзя сделать достаточно точным в широком интервале энергий образом по той простой причине, что, в отличие от кулоновского сечения σ^c , сечения $\sigma^{c,p}$ и $\sigma^{c,p}$ неизвестны в явном виде.

Как следует из этого замечания и всего обзора, в настоящее время единственный возможный способ корректного учета поляризованного взаимодействия состоит в использовании низкоэнергетического разложения исследуемой функции $A^{c,p,s}$, отвечающей разбиению (10) фазы $\delta^{c,ps}$. В этом способе основными являются аппроксимации (12)—(14), (16) и (55), (61) и (99). Они позволяют правильно экстраполировать фазы $\delta^{c,ps}$, сечения $\sigma^{c,ps}$, нормировочные множители $N^{c,ps}$ и ядерные матричные элементы типа интеграла (96) в область энергий $E \leq E^+$, где прямые экспериментальные измерения невозможны. Для такой экстраполяции необходимо знать, во-первых, как выделить три области энергий $E \leq E^-$, $E^- < E < E^+$ и $E \geq E^+$, в которых справедливы соответствующие приближения $\delta^{c,ps} \approx \delta^{c,p}$, $\delta^{c,ps} \approx \delta^{c,p} + \delta^{c,s}$ и $\delta^{c,ps} \approx \delta^{c,s}$, и, во-вторых, — точность этих приближений. Именно поэтому в обзоре подробно обсуждалось, как оценить границы E^\pm , исследуя отношение $\delta^{c,s} / \delta^{c,ps}$ фаз, функцию длины рассеяния $A^{c,ps}$ или автомодельное урав-

нение (93). По той же причине анализировались достаточные условия каждого приближения, его точность и независимость от модели ядерного взаимодействия.

Отметим, что основную аппроксимацию (16) можно существенно уточнить, используя вместо борновской аппроксимации (29) более точные приближения (59), (60) или (65), (66) фазы $\delta^{c,p}$. Формулы (31) и (66) позволяют обобщить все обсуждавшиеся результаты о пороговом поведении фаз и сечений на случай рассеяния более общей, чем (3), суперпозицией $V^c + V^a + V^s$, содержащей дальнедействующее слагаемое (2) с произвольным $a > 2$.

Одним из наиболее интересных результатов, обсуждавшихся в обзоре, является указание на аналог эффекта Рамзауэра в pd -рассеянии. Следует еще раз подчеркнуть, что это указание относится лишь к S -волновому ($l=0$) сечению $\sigma^{c,ps}$. Вопрос о минимуме в полном сечении, учитывающем pd -рассеяние во всех парциальных волнах ($l \leq 0$), остался открытым как для теоретических, так и для экспериментальных исследований. Экспериментальное измерение такого сечения в области $E \leq E^+ \approx 10$ кэВ, где его S -волновые квартетная и дублетная части имеют локальные минимумы при близких энергиях (см. рис.7), позволило бы ответить на этот вопрос. В настоящее время такое измерение не представляется возможным, и поэтому особенно интересным является теоретическое исследование pd -рассеяния при $E \leq 10$ кэВ.

Если вопрос о pd -аналоге эффекта Рамзауэра остался нерешенным, то теоретическое указание на существование такого аналога в триплетном nn -рассеянии представляется достаточно убедительным. Действительно, теоретический анализ выполнен в разд.5 для полного сечения σ^{ms} модельно-независимым от ядерного взаимодействия образом и подтвержден результатами тщательных численных исследований. Все это позволяет надеяться на будущие экспериментальные подтверждения приведенных в разд.5 выводов о влиянии взаимодействия магнитных моментов на триплетное nn -рассеяние при энергиях ниже 300 кэВ. Теоретически возможная схема такого эксперимента состоит в измерении полного сечения триплетного nn -рассеяния в поляризованном по спину нейтрона нейтронном пучке. Такие измерения имели бы фундаментальное значение и позволили бы уточнить современные представления о нуклон-нуклонном взаимодействии при низких энергиях. Однако приготовление поляризованного нейтронного пучка и измерение столь малого магнитно-ядерного сечения (см. рис.23) пока являются нерешенными задачами экспериментальной физики нейтронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.
2. Флюгге З. — Строение атомного ядра. Под ред. А.С.Давыдова. Пер. с нем. М.: Изд-во иностр.лит., 1959.
3. Вильдермут К., Тан Я. — Единая теория ядра. Пер. с англ. М.: Мир, 1980.
4. Соловьев В.Г. — Теория атомного ядра. Ядерные модели. М.: Энергоиздат, 1981.
5. Браун Дж.Е., Джексон А.Д. — Нуклон-нуклонные взаимодействия. Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1979.
6. Рид М., Саймон Б. — Методы современной математической физики, т.3. Теория рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
7. Тейлор Д. — Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
8. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. — Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
9. Калоджеро Ф. — Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
10. Бабиков В.В. — Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
11. Ментковский Ю.Л. — Частица в ядерно-кулоновском поле. М.: Энергоатомиздат, 1982.
12. Alt E.O. — In: Few-Body Methods. Eds. Kim T.K. et al. Singapore, World Scientific, 1986.
13. Kok L.P. — In: Lecture Notes in Physics, vol.273: Models and Methods in Few-Body Physics. Eds. Ferreira L.S. et al. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.
14. Квицинский А.А. и др. — ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.2, с.267.
15. Вурне J. — Neutrons, Nuclei, and Matter: an Exploration of the Physics of Slow Neutrons. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1994.
16. Власов Н.А. — Нейтроны. М.: Наука, 1971.
17. Александров Ю.А. — Фундаментальные свойства нейтрона. М.: Энергоиздат, 1982.
18. Alexandrov Yu.A. — Fundamental Properties of the Neutron. Oxford: Clarendon Press, 1992.
19. Друкарев Г.Ф. — Столкновение электронов с атомами и молекулами. М.: Наука, 1978.
20. Бом Д. — Квантовая теория. Пер. с англ. М.: Наука, 1965.
21. Kharchenko V.F., Shadchin S.A. — Few-Body Systems, 1989, vol.6, p.45.
22. Rodnig N.L. et al. — Phys.Rev.Lett., 1982, vol.49, p.99.
23. Arndt R.A., Long D.D., Roper L.D. — Nucl.Phys., 1973, vol.A209, p.429.
24. Zieger A. et al. — Phys.Lett., 1981, vol.B279, p.34.
25. Петрунькин В.А. — ЭЧАЯ, 1981, т.12, с.692.

26. Кузмичев В.Е., Пересыпкин В.В., Ефетов А.В. — Укр. физ. журн., 1993, т.38, с.831.
27. Кузмичев В.Е., Пересыпкин В.В. — ЯФ, 1990, т.51, с.103.
28. Kuzmichev V.E., Peresypkin V.V. — Nucl.Phys., 1990, vol.A506, p.245.
29. Kuzmichev V.E., Efetov A.V., Peresypkin V.V. — Ann.Phys., 1991, vol.209, p.306.
30. Киржниц Д.А., Пеньков Ф.М. — ЖЭТФ, 1983, т.85, с.80.
31. Berger R.O., Spruch L. — Phys.Rev., 1965, vol.138, p.B1106.
32. Квицинский А.А. — ТМФ, 1985, т.65, с.226.
33. Ландау Л.Д., Смородинский Я.А. — ЖЭТФ, 1944, т.14, с.269.
34. Карнаков и др. — ЯФ, 1990, т.52, с.1540.
35. Stoks V.G.J., de Swart J.J. — Phys.Rev., 1990, vol.C42, p.1235.
36. Kvitsinsky A.A., Merkuriev S.P. — In: Proc. of the IXth Europ. Conf. on Few-Body Problems in Physics, Tbilisi, 1984, p.40.
37. Квицинский А.А., Меркурьев С.П. — ЯФ, 1985, т.41, с.647.
38. Gibson A.G. — In: Proc. of the Xth Europ. Symp. on the Dynamical Few-Body Systems. Eds. Bencze Gy., Doleschall P., Revai J. Budapest: KFKI, 1986, p.355.
39. Kuzmichev V.E., Zepalova M.L. — In: Cont. to the Xth Europ. Symp. on the Dynamical Few-Body Physics. Budapest: KFKI, 1985, p.355.
40. Kuzmichev V.E., Zepalova M.L. — Phys.Lett., 1986, vol.B167, p.268.
41. Bencze Gy., Chandler C. — Phys.Lett., 1985, vol.B163, p.21.
42. Bencze Gy. et al. — Phys.Rev., 1987, vol.C35, p.1188.
43. Belyaev V.B., Kartavtsev O.I., Kuzmichev V.E. — Preprint JINR E4-86-66, Dubna, 1986.
44. Belyaev V.B., Kuzmichev V.E. — Preprint ITF, ITF-86-122P, Kiev, 1986.
45. Belyaev V.B., Kuzmichev V.E. — In: Contr. to the XIth IUPAP Conf. on Few-Body Systems in Particle and Nuclear Physics. Eds. T.Sasakava et al. Sendai: Tohoku Univ., 1986, p.388.
46. Belyaev V.B. et al. — Preprint JINR E4-87-35, Dubna, 1987.
47. Kuzmichev V.E. — In: Proc. of the Int. Conf. on the Theory of Few-Body and Quark-Hadronic Systems. Eds. Sapozhnikov M.G., Khankhasaev M.Kh., D4-87-692, Dubna: JINR, 1987, p.113.
48. Levashev V.P. — In: Contr. to the Int. Conf. on the Theory of Few-Body and Quark-Hadronic Systems, D4-87-237, Dubna: JINR, 1987, p.121 and p.125.
49. Levashev V.P. — Preprint ITF, ITF-87-165, Kiev, 1987.
50. Levashev V.P. — Nucl.Phys., 1989, vol.A491, p.109.
51. Левашев В.П. — ЯФ, 1989, т.49, с.681.
52. Levashev V.P. — Phys.Lett., 1988, vol.B214, p.493.
53. Bencze Gy. — Phys.Lett., 1988, vol.B202, p.289.
54. Belyaev V.B., Kartavtsev O.I., Kuzmichev V.E. — In: Int. Proc. on Few-Body Physics, Kalinin: KSU, 1989, p.60.
55. L'vov A.I. — Preprint FIAN-14, M.: FIAN, 1986.
56. Пупышев В.В., Соловцова О.П. — Сообщение ОИЯИ Р4-86-346, Дубна, 1986.

57. Пупышев В.В., Соловцова О.П. — ЯФ, 1988, т.47, с.60.
58. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — Preprint JINR E4-88-471, Dubna, 1988.
59. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — In: Contr. to the XII Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics. Ed. Jennings B.K. Vancouver, Canada, 1989, p.D8.
60. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — Preprint JINR E4-89-432, Dubna, 1989.
61. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — In: Proc. of the 12th Europ. Conf. on Few-Body Physics. Uzhgorod. Eds. Lendyel V.I., Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.340.
62. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — Int. J. Mod. Phys., 1992, vol.A7, p.2713.
63. Pupyshov V.V. — Preprint JINR E4-92-213, Dubna, 1992.
64. Pupyshov V.V. — J.Phys., 1995, vol.A28, p.3305.
65. Pupyshov V.V. — In: Proc. of the 12th Europ. Conf. on Few-Body Physics. Uzhgorod. Eds. Lendyel V.I., Haysak M.I., Uzhgorod, 1990, p.346.
66. Pupyshov V.V., Rakityansky S.A. — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics. Eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.61B.
67. Pupyshov V.V., Rakityansky S.A. — In: Contr. to the 7th Int. Conf. on Polarization Phenomena in Nuclear Physics. Eds. Lepage M. et al. Paris: Gif-sur Yvette Cedex, 1990, p.62B.
68. Pupyshov V.V., Rakityansky S.A. — In: Proc. of National Con. on Physics of Few-Body and Quark-Hadronic Systems. Eds. Boldyshev V., Kotlyar V., Shebeko A. Kharkov: KFTI, 1992, p.388.
69. Pupyshov V.V., Rakityansky S.A. — ЯФ, 1993, т.56, с.46.
70. Pupyshov V.V., Rakityansky S.A. — Zeit.Phys., 1994, vol.A348, p.227.
71. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — In: Cont. to the Int. Conf. Mesons and Nuclei at Intermediate Energies. Eds. Khankhasaev M.Kh., Kurmanov Zh.B. Dubna: JINR, 1994, p.84.
72. Pupyshov V.V., Solovtsova O.P. — Phys.Lett., 1995, vol.B354, p.1.
73. Абрамовиц М., Стиган И. — Справочник по специальным функциям. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
74. Strecok A.J., Gregory J.A. — Math.Comp., 1972, vol.26, p.955.
75. Fröberg C.E. — Rev.Mod.Phys., 1955, vol.27, p.239.
76. Сансоне Дж. — Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.1. Пер. с франц. М.: Изд-во иностр.лит., 1953.
77. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. — Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
78. Марчук Г.И. — Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
79. Федорюк М.В. — Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
80. Фреман Н., Фреман П.У. — ВКБ-приближение. Пер. с англ. М.: Мир, 1967.
81. Dashen R.F. — J.Math.Phys., 1963, vol.4, p.338.
82. Бабиков В.В. — ЯФ, 1965, т.1, с.793.
83. Bovet E. et al. — Phys.Lett., 1985, vol.B153, p.231.

84. **Ramzauer C., Kollath R.** — *Ann.Phys.*, 1929, vol.3, p.54.
85. **Holtsmark J.** — *Z.Phys.*, 1930, Bd.66, p.49.
86. **Calogero F.** — *Nuovo Cimento*, 1963, vol.27, p.261.
87. **Berger R.O., Snodgrass H.B., Spruch L.** — *Phys.Rev.*, 1969, vol.185, p.113.
88. **Batchelor G.K.** — *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1970.
89. **Квицинский А.А.** — *Письма в ЖЭТФ*, 1982, т.36, с.375.
90. **Беляев В.Б., Пупышев В.В., Ракитянский С.А.** — *ЯФ*, 1985, т.42, с.1104.
91. **Cheon I.-T., Von Egidy T.** — *Nucl.Phys.*, 1974, vol.A234, p.401.
92. **Davis R. Jr. et al.** — In: *Proc. of the 21st Int. Cosmic Ray Con.*, vol.12. Ed. Protheroe, Adelaide: University of Adelaide, 1992, p.143.
93. **Bahcall J.N., Pinsonneault M.H.** — *Rev.Mod.Phys.*, 1992, vol.64, p.885.
94. **Haxton W.C.** — *Report DOE/ER/40561-192-INT95-00-89*, Seattle: University of Washington Physics and Astronomy, 1995. To appear in *Ann. Rev. of Astronomy and Astrophysics*, 1995.
95. **Shaviv G.** — *Nucl.Phys. (Proc.Suppl.)*, 1995, vol.B38, p.81.
96. **Reeves H.** — *Stellar Structure*. Eds. Aller L.H., McLaughlin D.B., Chicago-London: University of Chicago Press, 1965.
97. **Bahcall J.N.** — *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, 1989.
98. **Bahcall J.N., Ulrich R.K.** — *Rev.Mod.Phys.*, 1988, vol.60, p.297.
99. **Bethe H.A.** — *Phys.Rev.*, 1952, vol.55, p.434.
100. **Salpeter E.E.** — *Phys.Rev.*, 1955, vol.88, p.547.
101. **Чоповский Л.Л.** — *ЯФ*, 1988, т.48, с.1699.
102. **Chopovsky L.L.** — *Phys.Lett.*, 1989, vol.B229, p.316.
103. **Shadchin S.A., Kharchenko V.F., Navrotsky M.A.** — *Preprint ITF, ITF-90-15E*, Kiev, 1990.
104. **Харченко В.Ф., Навроцкий М.А., Катеринчук П.А.** — *ЯФ*, 1992, т.55, с.86.
105. **Джибути Р.И., Крупеникова Н.Б.** — *Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел*. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
106. **Джибути Р.И., Шитикова К.В.** — *Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике*. М.: Энергоатомиздат, 1993.
107. **Bahcall J.N. et al.** — *Rev.Mod.Phys.*, 1982, vol.54, p.767.
108. **Bargholtz Chr.** — *Astr.J.*, 1979, vol.233, p.L161.
109. **Picker H.S., Haftel M.I.** — *Phys.Rev.*, 1976, vol.C14, p.1293.
110. **Levy B.R., Keller J.B.** — *J.Math.Phys.*, 1963, vol.4, p.54.
111. **Mott N.F.** — *Proc. Roy. Soc., London*, 1929, vol.A124, p.425.
112. **Schwinger J.** — *Phys.Rev.*, 1948, vol.73, p.407.
113. **Александров Ю.А.** — *ЖЭТФ*, 1957, т.33, с.294.
114. **Knutson L.D., Chiang D.** — *Phys.Rev.*, 1978, vol.C18, p.1958.
115. **Dobrozemsky R.** — *Nucl.Instr.Meth.*, 1974, vol.118, p.1.
116. **Kazarnovsky M.V. et al.** — In: *Proc. of the Int. Seminar on Intermediate Energy Physics*, vol.1. Moscow, 1990, p.219.

117. Pokotilovski Yu.N., Takhtamyshev G.G. — Preprint JINR E3-92-417, Dubna, 1992.
118. Stapp H.P., Ypsilantis T.J., Metropolis M. — Phys.Rev., 1957, vol.105, p.302.
119. Бабиков В.В. — ЯФ, 1965, т.1, с.369.
120. O'Malley T.F. — Phys.Rev., 1963, vol.130, p.1020.