«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
1997, ТОМ 28, ВЫП.3

УДК 517.91.1/958;
512.54

ГРУППЫ ЛИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: СИММЕТРИИ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ФИЗИКЕ

М.Б.Шефтель

Северо-Западный политехнический институт, Санкт-Петербург

В доступной для начинающих форме излагаются основы современного группового анализа дифференциальных уравнений. Это математическая теория симметрий и законов сохранения и технология получения на этой основе точных решений математических моделей, базирующихся на (нелинейных) дифференциальных уравнениях (как обыкновенных, так и в частных производных). При групповом анализе естественным образом возникают наиболее удобные для данной задачи переменные и связанные с ней дифференциально-геометрические структуры, такие как (псевдо)риманова геометрия, связности, гамильтонов и лагранжев формализмы. Область возможных приложений включает в себя механику сплошных сред (газо- и гидродинамику, нелинейную теорию упругости и пластичности твердых тел), нелинейную акустику, магнитную гидродинамику, теорию гравитации и другие нелинейные полевые теории (калибровочные и киральные поля, струнные теории и т.п.), химию (хроматографию и электрофорез), биологию. Перспективными являются и приложения к таким линейным теориям, как квантовая механика: построение новых точных решений, теория разделения переменных и др.

We present here the basics of modern group analysis of differential equations in the form suitable for beginners. This is a mathematical theory of symmetries and conservation laws and, being based on it,a technology for production of exact solutions for such mathematical models, which use (nonlinear) partial or ordinary differential equations. The group analysis produces in a natural way the variables, which are most suitable for a problem in question, and also the associated differential-geometric structures, such as (pseudo)Riemann geometry, connections, Hamiltonian and Lagrangian formalism. The domain of possible applications includes continuous media mechanics (gas- and hydrodynamics, nonlinear elasticity and plasticity theory of solids), nonlinear acoustics, magnetic hydrodynamics, gravitation and other nonlinear field theories (gauge and chiral fields, string theories etc.), chemistry (chromatography and electrophoresis), biology. We consider also as promising ones the applications to such linear theories as quantum mechanics: construction of new exact solutions, theory of separation of variables etc.

1. ВВЕДЕНИЕ

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник в работах великого норвежского математика Софуса Ли (1842–1899) [1,2], опубликованных в 1885–1895 гг. Это математический аппарат для исследования *непрерывных* симметрий дифференциальных уравнений. Симметриями называются семейства преобразований, непрерывно зависящие от одного или нескольких параметров, такие, что система уравнений остается неизменной, когда зависимые и независимые переменные изменяются под действием данных преобразований. Отсюда следует важное свойство таких преобразований: они переводят любое решение уравнений снова в решение. Если некоторые решения уже известны, то это помогает размножать их: получать бесконечные семейства решений, зависящие от параметров преобразований. В частности, если в качестве «затравочных» решений выбирать тривиальные, то могут порождаться нетривиальные решения. Если же решения неизвестны, но предполагаются инвариантными относительно группы, то условия их инвариантности представляют собой дополнительные дифференциальные уравнения («дифференциальные связи»), которые пополняют исходную систему уравнений, делая ее переопределенной и облегчая тем самым процесс интегрирования.

Первоначально исследование симметрий дифференциальных уравнений было предпринято С.Ли в связи с вопросом о разрешимости в квадратурах обыкновенных дифференциальных уравнений [1], по аналогии с теорией разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, построенной Н.Г.Абелем и Э.Галуа. В этой теории впервые появилось понятие группы, а именно дискретной конечной группы симметрий алгебраического уравнения. Аналог этой теории для дифференциальных уравнений основан на понятии непрерывной группы Ли преобразований, оставляющих инвариантными дифференциальные уравнения.

При первом знакомстве с теорией интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений она выглядит как разрозненный набор не объединенных какой-либо общей идеей специальных методов для решения некоторых частных типов уравнений: с разделяющимися переменными, (обобщенно-)однородных, допускающих понижение порядка и т.п. Величайшая заслуга Ли заключалась в демонстрации того, что все эти частные приемы интегрирования имеют в своей основе универсальную теорию. Тем более парадоксально выглядит тот факт, что программа раздела «Обыкновенные дифференциальные уравнения» в университетах до сих пор предусматривает его изложение как «набор трюков», умалчивая о теории Ли, т.е. на уровне середины девятнадцатого века! Особенно большой ущерб это наносит образованию будущих физиков, так как упускается возможность уже на втором курсе в разделах «Обыкновенные дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики» познакомить их с группами и алгебрами Ли и показать им плодотворность понятия симметрии не только как основного принципа построения математических моделей в современной физике, но и как инструмента для получения точных решений этих моделей в аналитической форме.

Сейчас общеизвестно, что группы Ли и их представления играют важную роль в математике, физике, механике и т.д. Однако до сих пор внимание математиков и физиков в основном было сосредоточено на теории представлений групп линейными операторами. Специфика приложений групп Ли к дифференциальным уравнениям такова, что они не укладываются в рамки теории линейных представлений. Рассматриваемые преобразования, вообще говоря, нелинейны и могут быть названы «нелинейными представлениями» групп Ли. Однако вычислительные алгоритмы этой теории основаны на решении линейных уравнений. Дело в том, что хотя условия инвариантности системы уравнений относительно конечных преобразований группы являются сложными и нелинейными, но для непрерывной группы они эквивалентны более простым линейным условиям инфинитезимальной инвариантности (для малых значений параметров группы). Это по-прежнему точные условия, не содержащие каких-либо приближений. Обычно эти линейные «определяющие уравнения» можно точно проинтегрировать и получить группу всех непрерывных симметрий данной системы.

О возможности приложений групп Ли к дифференциальным уравнениям было забыто вплоть до 50-х годов XX века. Возрождению теории Ли мы обязаны в основном Л.В.Овсянникову и его новосибирской школе [3,4], создавшим новые полезные понятия и алгоритмы и получившим эффектные приложения группового анализа (это название также принадлежит Л.В.Овсянникову) к газовой динамике и гидромеханике. Позднее важную роль в становлении и популяризации группового анализа за рубежом сыграл П.Олвер [5] — ученик Г.Биркгофа, впервые указавшего на полезность приложений теории Ли дифференциальных уравнений в гидромеханике [6]. Первые приложения теории Ли — Овсянникова к квантовой теории поля принадлежат Н.Н.Боголюбову и Д.В.Ширкову (ренормализационная группа) [7].

Все сказанное выше относится к «классическим» (лиевским) симметриям, использующим класс точечных преобразований. Около 20 лет тому назад российский и американский математики Н.Х.Ибрагимов и Р.Л.Андерсон открыли обобщенные симметрии дифференциальных уравнений, которые они назвали группами Ли — Беклунда [8]. Затем Ибрагимов построил строгую математическую теорию таких групп [9]. Обобщение состояло в том, что в отличие от теории Ли пространство «нелинейного представления» группы становится бесконечномерным и содержит в качестве локальных координат производные от зависимых переменных любого порядка.

Это расширение пространства представления дает, в частности, возможность алгоритмически вычислять такие «скрытые» симметрии в квантовой механике, как $O(4)$-симметрия атома водорода, открытая лишь благодаря гениальной интуиции В.А.Фока.

В последнее время возникла концепция современного группового анализа, в которую автор вкладывает следующий смысл: полное исследование системы должно включать как ее симметрии, так и законы сохранения (интегралы) и их совместное использование для отыскания решений системы (теория Ли изучает и использует лишь симметрии). Она включает также открытые недавно связи симметрий с интегралами, в определенном смысле обобщающие теорему Э.Нетер без предположения о лагранжевости или гамильтоновости системы. Стало также ясно, что для систем, «богатых симметриями», возникают дифференциально-геометрические конструкции, обобщающие гамильтонов формализм. Примером тому служат полугамильтоновы системы гидродинамического типа [10,11].

Все вычислительные методы современного группового анализа алгоритмичны и могут быть положены в основу компьютерной системы аналитических вычислений, что позволило бы автоматизировать трудоемкую рутинную часть работы при решении действительно сложных задач. Такая система должна работать в режиме диалога, так как на определенных этапах возникает творческий элемент и нельзя полностью исключить участие человека в групповом анализе. Многие существующие системы аналитических вычислений (пакет Шварца, программа МАКСИМА и др.) не отвечают требованиям современного группового анализа: либо вычисляются лишь классические симметрии, либо ищутся только симметрии, но не законы сохранения и т.п. По-видимому, нужная система должна или использовать язык REDUCE, или базироваться на макрокомандах, построенных из команд системы МАТЕМАТИКА. Различные версии таких систем созданы в самое последнее время.

Возможные приложения группового анализа чрезвычайно разнообразны и включают в себя механику жидкости и газа, нелинейную теорию упругости и пластичности твердых тел, нелинейную акустику, теорию фазовых переходов, магнитную гидродинамику, теорию гравитации и другие нелинейные полевые теории (калибровочные и киральные поля, струнные теории и т.п.), химию (хроматографию и электрофорез), биологию. Перспективными являются также приложения к таким линейным теориям, как квантовая механика: генерация новых точных решений, теория разделения переменных и др.

Данный обзор предназначен для физиков, впервые изучающих групповой анализ и желающих научиться использовать его в своих исследованиях. Наиболее обстоятельно удалось изложить теорию интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ уравнений в частных производных носит более фрагментарный характер из-за ограничений объема. Этот недостаток будет устранен в книге, которую автор надеется издать в ближайшем будущем.

Трудно переоценить влияние, оказанное при работе над этой статьей замечательными монографиями Л.В.Овсянникова, Н.Х.Ибрагимова и П.Олвера как в теоретическом плане, так и при подборе примеров. Отличие данной работы состоит в том, что по возможности избегается аппарат современной математики. Это делает материал доступным для тех, кто владеет математикой в рамках программы университета. Изучение же указанных монографий, как и журнальной литературы, полезно не для первого знакомства с предметом, а для более углубленного изучения специальных вопросов.

2. ГРУППЫ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

2.1. Основные понятия

2.1.1. Группы

Определение 2.1. ***Группой*** *называется множество G вместе с групповой операцией — умножением, такой, что для любых двух элементов g, h множества G их произведение $g \cdot h = \varphi(g, h)$ снова есть элемент из G; причем умножение удовлетворяет следующим аксиомам.*

Аксиомы умножения:

1. Ассоциативность. Если $g, h, k \in G$, то

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k.$$

2. Единичный элемент. Существует элемент $e \in G$ такой, что

$$e \cdot g = g \cdot e = g, \quad \forall g \in G.$$

3. Обратные элементы. Для любого $g \in G$ существует обратный элемент g^{-1} такой, что:

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g.$$

Если групповая операция коммутативна: $g \cdot h = h \cdot g$ для любых $g, h \in G$, то группа G называется *абелевой* (коммутативной). Для абелевых групп произведение $g \cdot h$ часто обозначается как сумма $g + h$, и групповая операция называется не умножением, а *сложением*. Тогда единица группы называется нулем и обозначается 0, а элемент g^{-1}, обратный к g, называется *противоположным* и обозначается $-a$.

2.1.2. Группы Ли

Определение 2.2. *Группа G называется* ***параметрической*** *(локально-евклидовой), если ее элементы могут быть параметризованы (хотя бы локально, т.е. в окрестности каждой точки) некоторой системой вещественных параметров — координат в группе (r-параметрическая группа):*

$$g = g(\tau) = g(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r).$$

Закон умножения выражается теперь в аналитической форме:

$$\tau_i(g \cdot h) = \varphi_i(\tau_j(g), \tau_k(h)) \Leftrightarrow \tau_i = \varphi_i(\rho_j, \sigma_k)\ (i, j, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Единичному элементу e группы сопоставляется начало координат O в пространстве параметров: $e = e(O) = e(0, 0, \ldots, 0)$.

Так как $g \cdot e = g$ и $e \cdot h = h$, то

$$\varphi_i(\rho_j, O) = \rho_i, \quad \varphi_i(O, \sigma_k) = \sigma_i.$$

По аксиоме *3* закон умножения в группе $\varphi = \{\varphi_i\}$ порождает операцию перехода к обратному элементу группы: $\psi(g) = g^{-1}$, т.е. при заданных $\tau_j(g)$ система уравнений

$$g \cdot g^{-1} = e \Leftrightarrow \varphi_i(\tau_j(g), \tau_k(g^{-1})) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

однозначно разрешима относительно $\tau_k(g^{-1})$: $\tau_k(g^{-1}) = \psi_k(\tau_j(g))$.

Определение 2.3. *Параметрическая группа G называется* ***r-параметрической*** *группой Ли, если она является r-мерным гладким многообразием*, а законы умножения $\varphi(g, h) = g \cdot h$ и взятия обратного элемента $\psi(g) = g^{-1}$ есть аналитические функции координат.*

Если ограничиться некоторой достаточно малой окрестностью единицы e, т.е. окрестностью начала координат $O = (0, 0, \ldots, 0)$ в параметрическом пространстве, то получаем множество, называемое *локальной группой Ли*: множество элементов группы, близких к единичному элементу.

Отличие такой группы в том, что в аксиомах группы операции φ (или $g \cdot h$) и ψ (или g^{-1}) не обязательно определены всюду, а имеют смысл лишь для g и h, достаточно близких к e (т.е. к O).

Группы Ли, определенные выше, называются *глобальными группами Ли*.

---

*Упрощенно это область в евклидовом пространстве с гладкой координатной сеткой.

2.2. Теория Ли локальных групп преобразований

2.2.1. Однопараметрические локальные группы преобразований

Пусть $G = G_1 \subset \mathbb{R}^1_\tau$ и умножение в группе есть $\tau \cdot \sigma = \varphi(\tau, \sigma)$. Пусть M — n-мерное многообразие (область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$), τ — вещественный параметр, непрерывно меняющийся в некотором интервале Δ оси $\mathbb{R}^1$, содержащем единицу e, т.е. точку $\tau = 0$.

Однопараметрическая локальная группа преобразований, действующая на многообразии M (с фиксированной системой координат), задается гладкой функцией f от z и τ:

$$\bar{z} = f(z, \tau) = T_\tau z \Leftrightarrow \bar{z}^i = f^i(z, \tau)$$

$$(\forall z \in U \subset M, \quad \tau \in \Delta_z, \quad \bar{z} \in M, \quad e = 0 \in \Delta_z) \tag{2.1}$$

(где интервал Δ_z может зависеть от выбора точки z в U), удовлетворяющей трем аксиомам:

$$1)\ T_0 = I \Leftrightarrow f(z, 0) = z, \qquad \forall z \in M. \tag{2.2}$$

$$2)\ T_\sigma T_\tau = T_{\varphi(\tau, \sigma)} \Leftrightarrow f(\bar{z}, \sigma) \equiv f(f(z, \tau), \sigma) = f(z, \varphi(\tau, \sigma)), \tag{2.3}$$

если $z \in U$, $\tau \in \Delta_z$, $\sigma \in \Delta_z$, $f(z, \tau) \in U$, $\varphi(\tau, \sigma) \in \Delta_z$.

3) Преобразования T_τ обратимы:

$$T_\tau^{-1} = T_{\tau^{-1}} \Leftrightarrow T_{\tau^{-1}} T_\tau = I \Leftrightarrow f(f(z, \tau), \tau^{-1}) = f(\bar{z}, \tau^{-1}) = z, \tag{2.4}$$

причем если $z \in U$, $\tau \in \Delta_z$, то $\tau^{-1} \in \Delta_z$.

Аналогично определяется *r-параметрическая локальная группа Ли преобразований G_r*.

Определение 2.4. *Для фиксированной точки $z_0 \in \mathbb{R}^n$ множество $G_r(z_0)$ всех ее образов $Tz_0(T \in G_r)$ образует локальное многообразие в $\mathbb{R}^n$, называемое* ***орбитой*** *или* ***G_r-орбитой*** *точки z_0. Орбита множества точек есть объединение орбит этих точек.*

Пример 2.1. Группа переносов (*трансляций*) вдоль вещественной прямой (оси x):

$$\bar{x} = T_\tau x = x + \tau,$$

$$T_\sigma T_\tau x = T_\sigma x = x + \sigma = (x + \tau) + \sigma = x + (\tau + \sigma).$$

Здесь $\varphi(\tau, \sigma) = \tau + \sigma$, $\tau^{-1} = -\tau$, $\Delta = \mathbb{R}_\tau$.

Пример 2.2. Группа растяжений: $\bar{z} = \tau z$. Тождественное преобразование получается при $\tau = 1$. После сдвига параметра $\tau \to \tau + 1$ получаем: $\bar{z} = T_\tau z = (1 + \tau)z$ и $T_0 z = z (T_0 = I)$.Обратное преобразование определяется условием

$$T_{\tau^{-1}} \bar{z} = (1 + \tau^{-1})(1 + \tau)\, z = z \Leftrightarrow \tau^{-1} = -\frac{\tau}{1 + \tau}$$

при $\tau > -1$, т.е. $\Delta = (-1, +\infty)$. Для $\sigma, \tau \in \Delta$ имеем

$$\bar{\bar{z}} = T_\sigma T_\tau z = T_\sigma \bar{z} = (1 + \sigma)\bar{z} = (1 + \sigma)(1 + \tau)\, z = (1 + \tau + \sigma + \tau\sigma)\, z = T_{\varphi(\tau, \sigma)}\, z.$$

Получаем $T_\sigma T_\tau = T_{\varphi(\tau, \sigma)}$, где $\varphi(\tau, \sigma) = \tau + \sigma + \tau\sigma$ — закон умножения в группе.

Легко проверить аксиомы группы.

2.2.2. Уравнения Ли

Рассмотрим однопараметрическую локальную группу преобразований G на M. Пусть умножение в группе G имеет канонический вид

$$\varphi(\tau, \sigma) = \tau + \sigma \Leftrightarrow T_\sigma T_\tau = T_{\tau + \sigma} \Leftrightarrow f(f(z, \tau), \sigma) = f(z, \tau + \sigma). \tag{2.5}$$

Очевидно, $\tau^{-1} = -\tau$.

Разложим аналитическую функцию $f(z, \tau)$ в ряд Тейлора по степеням параметра τ с учетом условия (2.2), обозначив

$$\xi(z) = \frac{\partial f(z, \tau)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau = 0} \Leftrightarrow \xi^i(z) = \frac{\partial f^i(z, \tau)}{\partial \tau}\bigg|_{\tau = 0} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.6}$$

Получим

$$\bar{z} = T_\tau(z) = f(z, \tau) = z + \xi(z)\, \tau + o(\tau). \tag{2.7}$$

Формула (2.6) задает в каждой точке z касательный вектор к G-орбите (2.7) точки z (к кривой, описываемой точкой под действием преобразований группы G): *касательное векторное поле группы*. Первые два члена в формуле (2.7) определяют *инфинитезимальное* (бесконечно малое) преобразование группы. Смысл следующей теоремы Ли в том, что они однозначно определяют и конечные преобразования (2.1) группы G в силу группового свойства (2.5) этих преобразований. Поэтому говорят, что группа G полностью определяется своим касательным векторным полем $\xi(z)$. Оно обычно представляется в виде дифференциального оператора первого порядка:

$$X = \xi(z)\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(z)\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (2.8)$$

Теорема 2.1 (С.Ли). *Пусть функция $f(z, \tau)$ удовлетворяет групповому свойству (2.5) и разлагается в ряд (2.7). Тогда она является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*

$$\frac{df}{d\tau} = \xi(f) \Leftrightarrow \frac{df^i}{d\tau} = \xi^i(f) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2.9)$$

с начальными условиями

$$f(z, 0) = \bar{z}\big|_{\tau=0} = z \Leftrightarrow f^i(z, 0) = z^i. \qquad (2.10)$$

Наоборот, для любого гладкого векторного поля $\xi(z)$ решение задачи Коши (2.9), (2.10) удовлетворяет групповому свойству (2.5).

Определение 2.5. *Уравнения (2.9) называются* ***уравнениями Ли****.*

Следствие 2.1. *Уравнение Ли есть инфинитезимальное выражение группового свойства (2.5) с каноническим параметром.*

Пример 2.3. Решим уравнение Ли для векторного поля $\xi(x) = x$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$:

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{x}, \qquad \bar{x}\big|_{\tau=0} = x.$$

Его решение: $\bar{x} = x \exp(\tau)$ дает группу растяжений с каноническим параметром τ в отличие от примера 2.2. Более привычный вид она имеет с параметром $\bar{\tau} = \exp(\tau)$: $\bar{x} = \bar{\tau}x$, но параметр теперь не канонический, и тождественное преобразование получается при параметре, равном 1, а не 0.

2.2.3. Инфинитезимальный оператор группы

Получим закон преобразования функции $F(z)$ при преобразованиях (2.1):

$$\overline{F}(z) = T_\tau F(z) + F(T_\tau(z)) = F(\bar{z}) = F(z + \tau\xi(z) + o(\tau)) =$$

$$= F(z) + \tau \sum_{i=1}^{n} \xi^i(z)\frac{\partial F(z)}{\partial z^i} + o(\tau) = F(z) + \tau X F(z) + o(\tau), \qquad (2.11)$$

где оператор X определен формулой (2.8).

Определение 2.6. ***Инфинитезимальным оператором*** *однопараметрической группы G преобразований называется дифференциальный оператор:*

$$X = \xi(z)\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i} \Leftrightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X(z^i)\frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{2.12}$$

Функции $\xi^i(z)$ называются координатами инфинитезимального оператора X.

Здесь использовано соотношение $X(z^i) = \xi^i(z)$.

Из равенства (2.11) следует, что в каждой точке z оператор X совпадает с полной производной по параметру группы вдоль орбиты точки z:

$$\left.\frac{dF(\bar{z})}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = \lim_{\tau\to 0}\frac{F(\bar{z}) - F(z)}{\tau - 0} = XF(z) \Leftrightarrow X = d/d\tau. \tag{2.13}$$

Инфинитезимальный оператор — это другой, более удобный способ представления касательного векторного поля $\xi(z) = \{\xi^i(z)\}$ группы G: в отличие от ξ^i оператор X имеет следующее свойство.

Теорема 2.2. *Оператор X инвариантен при преобразованиях системы координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ (на многообразии M).*

Замечание 2.1. *Из инвариантности оператора X следует правило замены переменных в операторе X:*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X((z')^i)\frac{\partial}{\partial (z')^i}. \tag{2.14}$$

В силу уравнения Ли $d\bar{z}^i/d\tau = \xi^i(\bar{z})$ имеем

$$\frac{dF(\bar{z})}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}^i}\frac{d\bar{z}^i}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n}\xi^i(\bar{z})\frac{\partial F}{\partial \bar{z}^i} = XF(\bar{z}).$$

Сравнивая этот результат с (2.13), заключаем, что векторное поле $\xi^i(z)$ на многообразии M *инвариантно относительно группы*: под действием группы (сдвига вдоль ее орбит), т.е. при изменении параметра τ, это поле не меняется.

2.2.4. Инвариантные группы

Определение 2.7. *Вещественнозначная функция $F(z)$ на многообразии M, не равная тождественно постоянной, называется* ***инвариантом*** *группы преобразований G: $\bar{z} = f(z,\tau)$ (или G-инвариантной), если для всех допустимых z, τ выполняется*

$$F(f(z,\tau)) = F(z). \tag{2.15}$$

Отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^s$ ($F = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$) называется G-инвариантом, если и только если каждая его компонента F_ν есть инвариант группы G.

Теорема 2.3. *Функция $F(z)$ является инвариантом однопараметрической группы Ли преобразований, если и только если она удовлетворяет уравнению*

$$XF = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = 0. \tag{2.16}$$

Определение 2.8. *Уравнение (2.16) называется* ***инфинитезимальным критерием инвариантности.***

Это линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. *Характеристиками* этого уравнения называются такие кривые с параметрическими уравнениями $z^i = z^i(\tau)$, что выполняются уравнения *характеристической системы* для (2.16):

$$\frac{dz^i}{d\tau} = \xi^i(z)\ (i = 1, \ldots, n) \Leftrightarrow d\tau = \frac{dz^1}{\xi^1(z)} = \frac{dz^2}{\xi^2(z)} = \ldots = \frac{dz^n}{\xi^n(z)}. \tag{2.17}$$

Итак, характеристики — это интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.17) (*это уравнения Ли!*), и вдоль характеристик левая часть уравнения (2.16) равна полной производной по τ:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} \frac{dz^i}{d\tau} = \frac{dF(z)}{d\tau}.$$

Поэтому уравнение (2.16) эквивалентно следующему:

$$\frac{dF(z(\tau))}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow F(z)\big|_{z = z(\tau)} = C = \mathrm{const}.$$

Система (2.17), состоящая после исключения $d\tau$ из $(n-1)$ дифференциальных уравнений первого порядка, имеет $(n-1)$ *функционально независимых первых интегралов:*

$$J_1(z)\big|_{z = z(\tau)} = C_1, \ldots, J_{n-1}(z)\big|_{z = z(\tau)} = C_{n-1},$$

сохраняющих постоянные значения на характеристиках. Следовательно, эти интегралы $J_i(z)$ составляют $(n-1)$ функционально независимых инвариантов группы, являясь решениями уравнения (2.16). Говорят, что

$\{J_i(z)\}$ образуют *базис инвариантов*: любой другой инвариант данной группы является функцией этих $(n-1)$ «базисных инвариантов», т.е. функция

$$F(z) = \Phi(J_1(z), \ldots, J_{n-1}(z)),$$

очевидно, удовлетворяет уравнению (2.16) и является его общим интегралом.

Утверждение 2.1. *Всякая однопараметрическая группа преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ имеет базис из $(n-1)$ функционально независимых инвариантов $J_1(z), \ldots, J_{n-1}(z)$, и любой другой инвариант $F(z)$ является их функцией.*

Теорема 2.4 (О выпрямлении векторного поля). *Пусть z — любая неособая точка векторного поля $X = \{\xi^i\}$ на многообразии M, т.е. $X(z) \neq 0$, $\forall z \in M$. Тогда в достаточно малой окрестности точки z всякая однопараметрическая локальная группа G преобразований $\bar{z} = f(z, \tau)$ n-мерного многообразия M некоторой невырожденной заменой переменных $z'^i = z'^i(z)$ приводится к группе трансляций по оси z'^n с оператором $X = \partial/\partial z'^n$.*

Доказательство. Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i(z)\,\partial/\partial z^i$ — инфинитезимальный оператор группы G. По правилу замены переменных в операторе X (2.14) при замене $z'^i = z'^i(z)$ оператор X принимает вид $X = \sum\limits_i X(z'^i)\,\partial/\partial z'^i$. Этот оператор имеет требуемый вид $X = \partial/\partial z'^n$, если и только если функции $z'^i(z)$ удовлетворяют следующим линейным уравнениям в частных производных первого порядка:

$$X(z'^i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \xi^j(z)\frac{\partial z'^i}{\partial z^j} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2.18}$$

$$X(z'^n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \xi^j(z)\frac{\partial z'^n}{\partial z^j} = 1. \tag{2.19}$$

Система уравнений (2.18) означает, что функции $z'^1(z)$, $z'^2(z), \ldots,$ $z'^{n-1}(z)$ являются инвариантами группы G с оператором X. Поэтому в качестве первых $(n-1)$ новых переменных можно выбрать любой набор $(n-1)$ функционально независимых инвариантов:

$$z'^{1}=J_1(z), \quad z'^{2}=J_2(z), \ldots, \quad z'^{n-1}=J_{n-1}(z). \tag{2.20}$$

Поскольку $\det(\partial J_i/\partial z^j)\neq 0$, то преобразование (2.20) обратимо (матрица Якоби невырожденная). Итак, новые переменные (инварианты) $J_i(z)$ есть $(n-1)$ независимых первых интегралов характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.17). В качестве последней новой переменной z'^{n} можно выбрать любой частный интеграл уравнения (2.19), а общий интеграл искать не обязательно. Например, можно искать решение этого уравнения, зависящее всего от одной из переменных z^i. □

Замечание 2.2. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений для характеристик (2.17) — это в точности та же задача, что и интегрирование уравнений Ли группы G в исходных переменных. Поэтому задача о выпрямлении векторного поля равносильна задаче интегрирования уравнений Ли.*

2.2.5. Инвариантные уравнения

Прежде чем заняться дифференциальными уравнениями, разберем более простой случай групп симметрий систем конечных уравнений:

$$F_1(z)=0,\ F_2(z)=0,\ \ldots,\ F_s(z)=0 \quad (s\leq n;\ z\in M\subset \mathbb{R}^n), \tag{2.21}$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_s$ — гладкие вещественные функции, заданные на n-мерном многообразии M (или в пространстве $\mathbb{R}^n$). Если $F_\nu(z)$ функционально независимы, то множество решений системы (2.21) есть $(n-s)$-мерная поверхность S, лежащая в M.

Определение 2.9. ***Группой симметрий*** *системы (2.21) называется локальная группа преобразований, действующая на M, со следующим свойством: группа G преобразует решения этой системы снова в ее решения. Более точно: если z есть решение, $g=g(\tau)$ есть элемент группы и определено действие g в точке z:*

$$\bar{z}=T_\tau z=f(z,\tau)=z+\tau\xi(z)+o(\tau), \tag{2.22}$$

то требуется, чтобы $\bar{z}$ также было решением: т.е. $F_\nu(\bar{z})=0$ при $F_\nu(z)=0$ $(\nu=1,\ldots,s)$. Говорят также, что эта система уравнений ***инвариантна*** *относительно группы G или* ***допускает*** *группу G. Подмножество $S\subset M$ называется* ***G-инвариантным****, а группа G — группой симметрий* *подмножества S, если для любой точки $z \in S$, в которой определено действие элемента $g = g(\tau)$ группы G, выполняется условие: $\bar{z} = T_\tau z \in S$, т.е. точка поверхности S перемещается преобразованием (2.22) только по этой поверхности.*

Инвариантность уравнения необязательно означает инвариантность его левой части: если множество нулей гладкой функции $\{z;\, F(z) = 0\}$ есть инвариантное подмножество многообразия M, то отсюда не следует, что и сама функция F инвариантна.

Утверждение 2.2. *Если группа G действует на многообразии M и $F\colon M \to \mathbb{R}^s$ — гладкая функция, то F будет G-инвариантной функцией, если и только если каждое множество уровня $\{z\colon F(z) = C\ (C \in \mathbb{R}^s)\}$ будет G-инвариантным подмножеством многообразия M.*

Полной группой симметрий называется наибольшая группа преобразований, оставляющих многообразие или функцию инвариантными.

Следствие 2.2. *Полная группа симметрий множества решений $S = \{x;\, F(x) = 0\}$ системы уравнений (2.21) может быть шире, чем группа симметрии вектор-функции F, задающей это множество решений.*

Расширение понятия симметрии — рассмотрение симметрий множества решений вместо симметрий левых частей уравнений — приводит к большему многообразию симметрий дифференциальных уравнений.

Перенесем инфинитезимальный критерий инвариантности из теоремы 2.3 (формула (2.16)) с функций $F\colon M \to \mathbb{R}^s$ на множество решений S системы уравнений $F(z) = 0$ (2.21). Для этого требуется дополнительное условие на функцию $F = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$ — *условие максимальности ранга* — ранг матрицы Якоби отображения F:

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial F_\nu}{\partial z^i}\right)\Bigg|_S = s \qquad (\nu = 1, \ldots, s;\ i = 1, \ldots, n;\ s \le n)$$

наибольший возможный в точках поверхности S, т.е. в каждой точке z, являющейся решением системы (2.21). Тогда говорят, что это *система максимального ранга*, а задание поверхности S является *регулярным*.

Теорема 2.5. *Пусть G — однопараметрическая локальная группа преобразований n-мерного многообразия M с оператором*

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(z)\,\frac{\partial}{\partial z^i}$$

и гладкое отображение $F\colon M \to \mathbb{R}^s$ $(s \le n)$ определяет систему конечных уравнений (2.21) на M: $F_\nu(z) = 0$ $(\nu = 1, \ldots, s)$. Пусть это система *максимального ранга. Тогда G — группа симметрий этой системы, если и только если выполняется условие:*

$$X[F_\nu(z)]\,\big|_S = 0 \Leftrightarrow X[F_\nu(z)]\,\big|_{F(z)=0} = 0 \; (\nu = 1, \ldots, s;\; s \le n). \tag{2.23}$$

Базис инвариантов группы позволяет описать не только все инварианты группы, но и все инвариантные многообразия.

Теорема 2.6. *Пусть поверхность S_F в n-мерном многообразии M регулярно задана системой уравнений (2.21): $F_\nu(z) = 0$ $(\nu = 1, \ldots, s)$, инвариантной относительно группы G, и инфинитезимальный оператор X этой группы не обращается в нуль на поверхности S_F. Тогда, если $J_1(z), \ldots, J_{n-1}(z)$ образуют базис инвариантов группы G, то та же поверхность S_F может быть равносильным образом задана системой уравнений вида*

$$\Phi_\nu(J_1(z), \ldots, J_{n-1}(z)) = 0, \quad (\nu = 1, \ldots, s), \tag{2.24}$$

выраженных только через базисные инварианты группы.

3. СИММЕТРИИ И ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Теория продолжения

3.1.1. Уравнения в продолженном пространстве

Дифференциальные уравнения (как обыкновенные, так и в частных производных) удобно рассматривать как уравнения многообразий (поверхностей) в *продолженном пространстве*. Локальными координатами в этом пространстве наряду с независимыми и зависимыми переменными $x = \{x^i\}$ и $u = \{u^\alpha\}$являются также производные от зависимых переменных по независимым:

$$u_1 = \{u_i^\alpha\},\; u_2 = \{u_{ij}^\alpha\}, \ldots, \quad (i = 1, \ldots, n;\; \alpha = 1, \ldots, m).$$

На решениях уравнений $u = u(x)$ нижние индексы соответствуют дифференцированиям по независимым переменным:

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad u_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i\,\partial x^j}, \ldots .$$

При анализе симметрий все эти переменные удобно считать алгебраически независимыми, но связанными между собой с помощью *операторов полного дифференцирования*:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{i_1 i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + \ldots + u_{i_1 \ldots i_l i} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \ldots i_l}^\alpha} + \ldots, \tag{3.1}$$

которые формализуют известное правило вычисления «полной частной производной» от сложной функции. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам:

$$i, i_1, \ldots, i_l = 1, \ldots, n; \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Дифференциальные связи между переменными имеют вид

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha),\ u_{ij}^\alpha = D_j\,(u_i^\alpha) = D_j\,D_i(u^\alpha),\ \ldots\,. \tag{3.2}$$

Легко проверить, что операторы полного дифференцирования коммутируют между собой:

$$[D_i\,, D_j\,] \overset{\text{def}}{\equiv} D_i\,D_j - D_j\,D_i = 0, \tag{3.3}$$

откуда следует $u_{ji}^\alpha = u_{ij}^\alpha$ и т.п. В формуле (3.1) сумма берется лишь по алгебраически независимым переменным.

Хотя формальное выражение (3.1) для операторов D_i бесконечно, но их действие определяется лишь на множестве всех гладких функций, зависящих от конечного набора переменных x, u, u_1, $u_2 \ldots$, u_N, когда это выражение «обрывается».

Дифференциальные уравнения рассматриваются как уравнения поверхности в продолженном пространстве:

$$F_1(x, u, u_1, \ldots, u_N) = 0, \ldots, F_s(x, u, u_1, \ldots, u_N) = 0. \tag{3.4}$$

Дифференциальными следствиями уравнений (3.4) называются результаты их дифференцирований (любого порядка) по независимым переменным:

$$D_i F = 0, \quad D_i D_j F = 0, \ \dots \ .$$

Для корректного геометрического описания дифференциальных уравнений как поверхностей в продолженном пространстве, к которым применимы понятие симметрии и критерий инвариантности из предыдущего раздела, необходимо рассматривать эти уравнения вместе со всеми их дифференциальными следствиями. Получаем бесконечномерное *дифференциальное многообразие* $[F]$ в продолженном пространстве, заданное бесконечной системой уравнений:

$$[F]\colon F = 0, \quad D_i F = 0, \quad D_i D_j F = 0, \ \dots \ . \tag{3.5}$$

Понятие дифференциального уравнения включает еще понятие решения. Будем рассматривать лишь *классические решения*, т.е. гладкие функции $u^\alpha = u^\alpha(x)$, имеющие производные по x^i до порядка N, и такие, что при их подстановке в уравнения (3.4):

$$u^\alpha = u^\alpha(x), \ u_i^\alpha = \partial u^\alpha(x) / \partial x^i, \ \dots$$

Эти уравнения превращаются в тождества по x. При этом система дифференциальных уравнений (3.4) считается уже приведенной к пассивной форме: все условия совместности системы (3.4) (получаемые приравниванием смешанных частных производных, вычисленных из различных ее уравнений) являются лишь алгебраическими или дифференциальными следствиями уравнений этой системы.

3.1.2. Продолжение инфинитезимального оператора

Обозначим через z точки продолженного пространства:

$$z = (x, u, u_1, u_2, \ \dots \ ).$$

Пусть G — однопараметрическая группа преобразований бесконечномерного продолженного пространства с каноническим параметром τ:

$$\bar{x}^i = f^i(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau), \qquad \bar{u}^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau),$$

$$\bar{u}_i^\alpha = \psi_i^\alpha(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau), \ \dots, \ \bar{u}^\alpha_{i_1 \dots i_l} = \psi^\alpha_{i_1 \dots i_l}(x, u, u_1, u_2, \dots; \tau). \tag{3.6}$$

Значению $\tau = 0$ параметра группы соответствует тождественное преобразование:

$$f^i(z; 0) = x^i,\ \varphi^\alpha(z; 0) = u^\alpha,\ \psi_i^\alpha(z; 0) = u_i^\alpha,\ \ldots,\ \psi^\alpha_{i_1\ldots i_l}(z; 0) = u^\alpha_{i_1\ldots i_l},\ \ldots\ . \tag{3.7}$$

Определим касательное векторное поле группы G преобразований продолженного пространства формулами, аналогичными (2.6):

$$\xi^i(z) = \left.\frac{\partial f^i(z; \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = 0}, \quad \eta^\alpha(z) = \left.\frac{\partial \varphi^\alpha(z; \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = 0},$$

$$\zeta_i^\alpha(z) = \left.\frac{\partial \psi_i^\alpha(z; \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = 0}, \ \ldots,\ \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_l}(z) = \left.\frac{\partial \psi^\alpha_{i_1\ldots i_l}(z; \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = 0}, \ \ldots\ . \tag{3.8}$$

Здесь функции $\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_l}$, как и функции $\psi^\alpha_{i_1\ldots i_l}$, симметричны по нижним индексам в силу равенств (3.6) и симметрии величин $\bar{u}^\alpha_{i_1\ldots i_l}$.

Продолженным (инфинитезимальным) оператором или оператором Ли — Беклунда группы G называется оператор X, определенный формулой, аналогичной (2.8):

$$X = \xi^i(z)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{l \geq 2} \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_l}(z)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_l}}\,. \tag{3.9}$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Каноническому оператору $\hat{X}$ соответствует важный частный случай, когда преобразования (3.6) оставляют инвариантными независимые переменные: $\bar{x}^i = f^i(z; \tau) = x^i$, так что формула (3.8) дает $\xi^i(z) = 0$:

$$\hat{X} = \hat{\eta}^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \hat{\zeta}_i^\alpha(z)\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \sum_{l \geq 2} \hat{\zeta}^\alpha_{i_1\ldots i_l}(z)\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{i_1\ldots i_l}}\,. \tag{3.10}$$

В формулах (3.9), (3.10) суммирование производится при условии $i_1 \leq \ldots \leq i_l$.

Уравнения Ли (2.9) в продолженном пространстве принимают вид бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} d\bar{x}^i/d\tau = \xi^i(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots) \\ d\bar{u}^\alpha/d\tau = \eta^\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots) \\ d\bar{u}_i^\alpha/d\tau = \zeta_i^\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots) \\ \qquad \ldots \\ d\bar{u}_{i_1\ldots i_l}^\alpha/d\tau = \zeta_{i_1\ldots i_l}^\alpha(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots). \\ \qquad \ldots \end{cases} \tag{3.11}$$

В силу этих уравнений оператор X задает инвариантное относительно группы G векторное поле в продолженном пространстве и совпадает с оператором полного дифференцирования по параметру τ вдоль орбит группы:

$$X = D_\tau = \frac{d\bar{x}^i}{d\tau}\frac{\partial}{\partial\bar{x}^i} + \frac{d\bar{u}^\alpha}{d\tau}\frac{\partial}{\partial\bar{u}^\alpha} + \frac{d\bar{u}_i^\alpha}{d\tau}\frac{\partial}{\partial\bar{u}_i^\alpha} + \sum_{l\geq 2}\frac{d\bar{u}_{i_1\ldots i_l}^\alpha}{d\tau}\frac{\partial}{\partial\bar{u}_{i_1\ldots i_l}^\alpha}. \tag{3.12}$$

В частности, если независимые переменные x^i инвариантны, то канонический оператор $\hat{X} = D_\tau$ должен коммутировать с операторами D_i (3.1) полного дифференцирования по независимым переменным:

$$[D_\tau, D_i] \equiv [\hat{X}, D_i] = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Действительно, τ есть такая же независимая переменная, как и x^i, причем x^i не зависят от τ, а операторы дифференцирования по независимым переменным перестановочны на гладких функциях. Подстановка выражений (3.1) и (3.10) для D_i и $\hat{X}$ в это условие дает

$$\hat{\zeta}_i^\alpha = D_i[\hat{\eta}^\alpha],\ \hat{\zeta}_{i_1 i}^\alpha = D_i[\hat{\zeta}_{i_1}^\alpha],\ \ldots,\ \hat{\zeta}_{i_1\ldots i_l i}^\alpha = D_i[\hat{\zeta}_{i_1\ldots i_l}^\alpha],\ \ldots. \tag{3.13}$$

Из соотношений (3.13) следуют *формулы продолжения координат канонического оператора*:

$$\hat{\zeta}_{i_1\ldots i_l}^\alpha = D_{i_1}\ldots D_{i_l}[\hat{\eta}^\alpha]. \tag{3.14}$$

В случае, когда независимые переменные x^i зависят от τ, выражение для оператора полной производной $X = D_\tau$ имеет по сравнению с $\hat{X}$ дополнительное слагаемое:

$$X = D_\tau = \hat{X} + \frac{d\bar{x}^i}{d\tau} D_i = \hat{X} + \xi^i D_i\,, \tag{3.15}$$

где использовано первое из уравнений Ли (3.11). Подставляя сюда выражения (3.9) и (3.10) для X и $\hat{X}$, получаем связь между координатами операторов X и $\hat{X}$:

$$\hat{\eta}^\alpha = \eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha, \qquad \hat{\zeta}_{i_1}^\alpha = \zeta_{i_1}^\alpha - u_{i_1 i}^\alpha\, \xi^i, \ \ldots$$

$$\ldots, \hat{\zeta}_{i_1 \ldots i_l}^\alpha = \zeta_{i_1 \ldots i_l}^\alpha - u_{i_1 \ldots i_l i}^\alpha\, \xi^i, \ \ldots\, . \tag{3.16}$$

Тогда, используя формулы (3.13) и (3.16), получаем *формулы продолжения инфинитезимального оператора общего вида*:

$$\zeta_i^\alpha = D_i\,[\eta^\alpha] - u_j^\alpha D_i\,[\xi^j],$$

$$\ldots$$

$$\zeta_{i_1 \ldots i_l i}^\alpha = D_i\,[\zeta_{i_1 \ldots i_l}^\alpha] - u_{i_1 \ldots i_l j}^\alpha\, D_i\,[\xi^j],$$

$$(l = 1, 2, \ldots). \tag{3.17}$$

Из формул продолжения (3.13) и (3.17) видно, что для построения продолженного инфинитезимального оператора группы X нужно знать только координаты ξ, η, т.е. «исходный» оператор:

$$\overset{0}{X} = \xi^i(z)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(z)\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\,. \tag{3.18}$$

Используя связь (3.15) и учитывая равенство $[D_i\,, \hat{X}] = 0$, легко получить коммутационное соотношение:

$$[D_i\,, D_\tau] = [D_i\,, X] = D_i\,[\xi^j]\, D_j\,. \tag{3.19}$$

С помощью соотношения (3.19) и формул (3.17) легко проверить, что только первые два уравнения Ли из бесконечной цепочки (3.11) независимы. Остальные уравнения получаются действием операторов D_i на второе из уравнений (3.11), которое при отбрасывании всех остальных следует считать уравнением (системой уравнений) в частных производных:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tau} = \eta^\alpha(x^i, u^\beta, u_i^\beta, u_{ij}^\beta, ..., u_{i_1 ... i_l}^\beta). \tag{3.20}$$

3.1.3. Продолжение точечных преобразований. Касательные и контактные преобразования

Определение 3.1. ***Точечными преобразованиями*** *называются такие преобразования (3.6) продолженного пространства, которые оставляют инвариантным подпространство независимых и зависимых переменных* (x, u):

$$\bar{x}^i = f^i(x, u; \tau), \quad \bar{u}^\alpha = \varphi^\alpha(x, u; \tau) \quad (i = 1, ..., n; \alpha = 1, ..., m). \tag{3.21}$$

Тогда действие операторов D_i полного дифференцирования по переменным x^i на $\bar{u}^\alpha$ с учетом равенств (3.21) для $\bar{x}^i$ дает

$$\bar{u}_i^\alpha = \psi_i^\alpha(x, u, u_1; \tau), ..., \bar{u}_{i_1 ... i_l}^\alpha = \psi_{i_1 ... i_l}^\alpha(x, u, u_1, ..., u_l; \tau). \tag{3.22}$$

Итак, однопараметрические группы точечных преобразований (3.21), (3.22) продолженного пространства обладают следующим характеристическим свойством: они имеют конечномерные инвариантные подпространства в продолженном пространстве, а именно: преобразованные производные от u по x порядка l выражаются снова через производные от u порядка не выше l $(l = 0, 1, 2, ...)$. Поскольку все преобразования (3.22) есть следствия преобразований (3.21), то говорят, что группа преобразований продолженного пространства является *l-м продолжением* на первые и высшие производные $u_1, ..., u_l$ группы точечных преобразований (3.21).

Если ограничиться преобразованиями (3.22) производных порядка не выше l, то это есть *группа касательных преобразований порядка l.* В частности, при $l = 1$ получаем *группу контактных преобразований.*

Теорема 3.1 (С. Ли). *Если $m > 1$ и $l = 1$, то всякая группа G контактных преобразований (3.21), (3.22) является первым продолжением группы точечных преобразований.*

Случай $m = 1$ рассмотрим чуть позже.

Для точечных преобразований (3.21) формулы (3.8) для координат инфинитезимального оператора дают

$$\xi^i(x, u) = \left.\frac{\partial f^i(x, u; \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = 0}, \quad \eta^\alpha(x, u) = \left.\frac{\partial \varphi^\alpha(x, u; \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = 0}. \tag{3.23}$$

Исходный (непродолженный) инфинитезимальный оператор (3.18) группы точечных преобразований имеет вид

$$\overset{0}{X} = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \tag{3.24}$$

Первое продолжение этого оператора получаем с помощью формул (3.9), (3.17):

$$\overset{1}{X} = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha(x, u, u_1)\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}, \tag{3.25}$$

где

$$\zeta_i^\alpha(x, u, u_1) = D_i\,[\eta^\alpha(x, u)] - u_j^\alpha D_i\,[\xi^i(x, u)]. \tag{3.26}$$

Аналогично получаются второе и высшее продолжения этого оператора.

Теорема 3.2 (А.В.Беклунд). *Всякая группа касательных преобразований конечного порядка l является продолжением группы точечных преобразований при $m > 1$ и группы контактных преобразований при $m = 1$.*

Итак, только группы касательных преобразований (3.6) бесконечного порядка, т.е. *группы Ли — Беклунда*, открытые Н.Х.Ибрагимовым и Р.Л.Андерсоном, не сводятся к продолженным точечным и контактным преобразованиям и представляют собой обобщение теории Ли.

3.2. Инвариантные дифференциальные уравнения

3.2.1. Инфинитезимальный критерий инвариантности

Пусть задана система $F = 0$ дифференциальных уравнений (3.4), определяющая дифференциальное многообразие $[F]$ в продолженном пространстве с уравнениями (3.5).

Определение 3.2. *Говорят, что система дифференциальных уравнений (3.4)* ***инвариантна относительно группы Ли — Беклунда G*** *преобразований (3.6) продолженного пространства, если инвариантно диффе-*

ренциальное многообразие $[F]$, определяемое этой системой. Говорят также, что система уравнений (3.4) ***допускает группу G*** *и что G —* ***допускаемая группа или группа симметрий*** *дифференциальных уравнений (3.4).*

Инфинитезимальный критерий инвариантности (2.23) переносится на дифференциальные уравнения, рассматриваемые как уравнения поверхности в продолженном пространстве.

Теорема 3.3 (Н.Х.Ибрагимов, Р.Л.Андерсон [8]). *Система $F=0$ дифференциальных уравнений (3.4) максимального ранга инвариантна относительно однопараметрической группы G преобразований Ли — Беклунда с инфинитезимальным оператором X, если выполняется условие*

$$(XF)\big|_{[F]}=0 \Leftrightarrow (XF_k)\big|_{[F]}=0 \quad (k=1, \ldots, s). \tag{3.27}$$

При отыскании инфинитезимального оператора X допускаемой группы G, определенного формулой (3.9), с помощью уравнений (3.27) используются формулы продолжения (3.17). Они выражают все координаты оператора X как линейные однородные функции от координат ξ^i, η^α «исходного» оператора $\overset{0}{X}$ (3.18). Поэтому система (3.27) представляет собой систему линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка относительно функций $\xi^i(z)$ и $\eta^\alpha(z)$. Уравнения (3.27) называются *определяющими уравнениями* группы преобразований, допускаемой дифференциальными уравнениями (3.4). Также говорят, что *оператор X допускается дифференциальными уравнениями.*

3.2.2. Определяющие уравнения и группы симметрии

Для групп Ли точечных преобразований по найденному инфинитезимальному оператору $\overset{0}{X}$ с координатами ξ, η можно найти допускаемую однопараметрическую группу, интегрируя укороченную систему уравнений Ли (3.11):

$$\frac{dx^i}{d\tau}=\xi^i(x, u), \qquad \frac{du^\alpha}{d\tau}=\eta^\alpha(x, u), \tag{3.28}$$

где $i=1, \ldots, n$; $\alpha=1, \ldots, m$. Здесь черточки над x, u опущены.

Для групп Ли — Беклунда касательных преобразований бесконечного порядка ситуация более сложная. Н.Х.Ибрагимов показал [9], что интегрирование бесконечной цепочки уравнений Ли (3.11) выражает конечные преобразования группы Ли — Беклунда в виде бесконечных формальных рядов по степеням группового параметра τ. Это сужает возможности применений конечных преобразований группы Ли — Беклунда для размножения решений. Однако имеются другие их приложения, использующие только инфинитезимальный оператор, а для размножения решений применяется так называемый оператор рекурсии. Допускаемые группы Ли — Беклунда называются *обобщенными симметриями* дифференциальных уравнений в отличие от *классических* или *геометрических симметрий* С.Ли.

Определяющие уравнения (3.27) допускаемой группы имеют ту особенность, что они обычно содержат в своих коэффициентах производные от u^α по x^i более высокого порядка, нежели те, от которых зависят искомые функции ξ, η. Поэтому определяющие уравнения «расщепляются» по этим свободным переменным, что приводит к переопределенной системе уравнений с нетривиальными условиями совместности. Это сильно облегчает полное интегрирование системы (3.27). Примеры этой техники приведены ниже.

Утверждение 3.1. *Оператор X допускается дифференциальными уравнениями (3.4), если и только если соответствующий ему по формулам (3.15) канонический оператор $\hat{X}$ допускается уравнениями (3.4).*

Утверждение очевидно, так как X отличается от $\hat{X}$ в (3.15) лишь слагаемым $\xi^i D_i$, которое всегда является допускаемым оператором для дифференциальных уравнений: уравнения можно почленно дифференцировать по x^i. Поэтому говорят, что операторы X и $\hat{X}$ *эквивалентны*. Формулы (3.16) дают связь между координатами эквивалентных операторов.

Определение 3.3. *Набор из m функций $\hat{\eta} = \{\hat{\eta}^\alpha\}$, определяющий посредством соотношений (3.14) все координаты канонического оператора (3.10), допускаемого системой (3.4), называется* ***характеристикой симметрии*** *с оператором $\hat{X}$, а также всего класса эквивалентных симметрий X (3.15).*

Это понятие введено П.Олвером [5].

3.3. Алгебры Ли и многопараметрические симметрии

Определяющие уравнения (3.27) обычно имеют не одно, а несколько линейно независимых решений $\xi^i_\mu(z)$, $\eta^\alpha_\mu(z)$ $(\mu = 1, ..., r)$ для неизвестных $\xi^i(z)$, $\eta^\alpha(z)$, т.е r допускаемых операторов X_μ и соответствующих однопараметрических групп симметрий. Тогда получаем r-параметрическую группу G_r симметрий системы (3.4). В силу линейной однородности определяющих уравнений их решения образуют линейное пространство. Следовательно, любая линейная комбинация допускаемых операторов X_μ с постоянными коэффициентами также является допускаемым оператором: это принцип линейной суперпозиции.

Кроме того, решения определяющих уравнений обладают еще одним важным законом композиции, связанным с понятием алгебры Ли, для которой закон умножения определяется как коммутатор операторов.

Рассмотрим сначала свойства коммутатора операторов общего вида (2.12): $X_\mu = \sum_{i=1}^{n} \xi^i_\mu(z)\,\partial/\partial z^i$. Он снова равен оператору того же вида:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{i=1}^{n} (X_\mu(\xi^i_\nu) - X_\nu(\xi^i_\mu)) \frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{3.29}$$

Из определения (3.29) очевидны следующие свойства коммутатора:

1) *билинейность:*

$$[c_1 X_\mu + c_2 X_\nu, X_\lambda] = c_1 [X_\mu, X_\lambda] + c_2 [X_\nu, X_\lambda],$$

где c_1, c_2 — константы;

2) *кососимметричность:*

$$[X_\nu, X_\mu] = -[X_\mu, X_\nu]; \tag{3.30}$$

3) *тождество Якоби:*

$$[X_\lambda, [X_\mu, X_\nu]] + [X_\nu, [X_\lambda, X_\mu]] + [X_\mu, [X_\nu, X_\lambda]] = 0. \tag{3.31}$$

Определение 3.4. ***Алгеброй Ли*** *называется линейное пространство с билинейной операцией (умножением) [,], называемой скобкой Ли, удовлетворяющей аксиомам билинейности, кососимметричности и тождеству Якоби.*

Размерностью алгебры Ли называется размерность r соответствующего линейного пространства.

Утверждение 3.2. *Инфинитезимальные операторы X_μ однопараметрических групп преобразований образуют алгебру Ли.*

Пусть r — размерность алгебры Ли L и пусть $X_1, .., X_r$ — некоторый базис в этой алгебре. Так как любой элемент X из L разлагается по базису:

$$X = \sum_{\mu=1}^{r} c^\mu X_\mu \quad (c^\mu = \text{const}),$$

а коммутатор $[X_\mu, X_\nu]$ есть снова элемент из L, то этот коммутатор также разлагается по базису:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{r} c^\lambda_{\mu\nu} X_\lambda \quad (\mu, \nu = 1, ..., r). \tag{3.32}$$

Здесь $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ — вещественные числа, называемые *структурными константами* алгебры Ли L.

Условия (3.30) и (3.31) приводят к следующим свойствам структурных констант:

1) *кососимметричность:*

$$c^{\lambda}_{\nu\mu} = -\, c^{\lambda}_{\mu\nu}\,; \tag{3.33}$$

2) *тождество Якоби:*

$$\sum_{\lambda=1}^{r} (c^{\lambda}_{\mu\nu}\, c^{\rho}_{\lambda\sigma} + c^{\lambda}_{\sigma\mu}\, c^{\rho}_{\lambda\nu} + c^{\lambda}_{\nu\sigma}\, c^{\rho}_{\lambda\mu}) = 0. \tag{3.34}$$

Теорема 3.4 (С.Ли). *Всякое множество констант $c^{\lambda}_{\mu\nu}$, удовлетворяющих условиям (3.33), (3.34), является множеством структурных констант некоторой алгебры Ли.*

Коммутатор инфинитезимальных операторов в продолженном пространстве вида (3.9) снова является инфинитезимальным оператором некоторой однопараметрической группы преобразований продолженного пространства: он снова имеет вид (3.9), и для его координат по-прежнему справедливы формулы продолжения (3.17).

Теорема 3.5. *Умножение в алгебре Ли (скобка Ли) коммутирует с операцией продолжения инфинитезимальных операторов.*

Можно показать, что для любой пары операторов X_μ, X_ν, допускаемых системой (3.4), их коммутатор $[X_\mu, X_\nu]$ также допускается этой системой.

Следствие 3.1. *Скобка Ли любых двух решений определяющих уравнений (3.27) порождает снова решение этих уравнений.*

Утверждение 3.3. *Линейное пространство L всех решений определяющих уравнений (3.27) является алгеброй Ли.*

3.4. Законы сохранения

3.4.1. Законы сохранения и интегралы движения

Определение 3.5. ***Законом сохранения*** *(в дифференциальной форме) для дифференциальных уравнений (3.4) называется всякое равенство нулю n-мерной полной дивергенции:*

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\,[P_i]\,\big|_{(3.4)} = 0, \tag{3.35}$$

являющееся следствием уравнений (3.4).

Здесь $P_i = P_i\,(x, u, u_1, \dots, u_{N-1})$ — гладкие функции.

В частности, если (3.4) — система обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной $x^1 = x$, то, переобозначая $D_1 = D_x = D$, $P_1 = P$, получаем закон сохранения в виде

$$D[P]\,\big|_{(3.4)} = 0 \Leftrightarrow P\,\big|_{(3.4)} = C = \mathrm{const}. \tag{3.36}$$

Тогда функция P превращается в константу на решениях системы (3.4) и является *первым интегралом* или *интегралом движения*.

Для эволюционных уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = F_\alpha(t, x, u, u_1, \dots, u_N) \tag{3.37}$$

одна из независимых переменных t является временем (параметром эволюции), а остальные аргументы $x = \{x^i\}$ — пространственными координатами. Правые части F_α содержат производные от u только по x. Тогда закон сохранения (3.35) принимает вид уравнения неразрывности:

$$\left\{ D_t\,[P] + \sum_{i=1}^{n} D_i\,[Q_i] \right\}\Bigg|_{(3.4)} = 0, \tag{3.38}$$

где P —*плотность* закона сохранения, $Q = \{Q_i\}$ — *поток*.

В этом случае при подходящих граничных условиях константой (интегралом движения) является интеграл от плотности:

$$\mathcal{P} = \int_\Omega P(t, x, u, u_1, \dots, u_{N-1})\,dx = \mathrm{const}. \tag{3.39}$$

Например, для быстроубывающих при $x \to \infty$ решений $u(x, t)$ пределы интегрирования в формуле (3.39) бесконечны, а для периодических решений интегрирование производится по периоду.

П.Олвер показал [5], что законы сохранения (3.35) можно привести к *характеристической форме*:

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\,[P_i] = \sum_{\alpha=1}^{n} R_\alpha F_\alpha\,. \tag{3.40}$$

Здесь набор из m гладких функций $R = \{R_\alpha\}$ от $x, u, u_1, \dots$ называется *характеристикой* закона сохранения (3.40).

3.4.2. Определяющие уравнения для законов сохранения

Пусть $K(u, x)$ есть некоторое гладкое отображение линейного пространства гладких функций от $x, u, u_x, \ldots, u_x^{(N)}$, зависящее также от x.

Определение 3.6. ***Производной Фреше*** *функции K по «направлению» функции v называется выражение [12]*:

$$K'(u, x)[v] \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial K(u + \varepsilon v, x)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon = 0}. \tag{3.41}$$

Если $K(u, x)$ зависит только от производных от u до порядка N, то определение (3.41) дает оператор производной Фреше (обобщенный градиент) вида

$$(K')_{\alpha\beta} = \sum_J \left(\frac{\partial K_\alpha}{\partial u_J^\beta}\right) D_J, \tag{3.42}$$

где $J = (j_1, \ldots, j_l)$ — мультииндекс с $1 \le j_k \le n$,

$$u_J^\beta(x) = \frac{\partial^l u^\beta(x)}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_l}}, \qquad D_J = D_{j_1} \ldots D_{j_l}$$

и D_{j_k} — оператор полного дифференцирования по x^{jk}. Суммирование в (3.42) производится до $l = N$.

Например, если $n = 1$, $m = 1$, $K(u) = u_{xxx} + 6uu_x$ и нижние индексы обозначают дифференцирования по x, то $K'(u) = D^3 + 6uD + 6u_x$.

Сопряженным дифференциальным оператором к оператору K' (3.42) называется оператор $(K')^+$, определяемый соотношением

$$(K')^+_{\alpha\beta}[R] = \sum_J (-1)^l D_j \left[\frac{\partial K_\beta}{\partial u_J^\alpha} R\right]. \tag{3.43}$$

Оператор, сопряженный к K' из предыдущего примера, имеет вид

$$(K')^+ = -D^3 - 6uD + 6u_x.$$

Теорема 3.6. *Вектор R из m гладких функций R_α от x, u, u_1, ... является характеристикой закона сохранения для системы из m дифференциальных уравнений (3.4): $F=0$, если и только если определяющие уравнения*

$$(R')^+[F] + (F')^+[R] = 0 \tag{3.44}$$

выполняются тождественно для всех u, x.

3.4.3. Связи между симметриями и интегралами

Локальная группа Ли преобразований продолженного пространства называется *группой вариационных симметрий* функционала (3.39), если любое из преобразований группы, не выводящее из его области определения, не изменяет значение этого функционала для всех гладких функций $u=f(x)$.

Всякая обобщенная вариационная симметрия функционала $\mathcal{P}$ является симметрией соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа для его экстремалей. Однако обратное неверно: множество экстремалей функционала может обладать дополнительными симметриями, отсутствующими у этого функционала. Поэтому изучение симметрий дифференциальных уравнений не сводится к изучению симметрий порождающих их функционалов. Это полезно иметь в виду и при построении теоретико-полевых моделей: не все наблюдаемые симметрии могут быть симметриями лагранжиана, а могут возникать и как симметрии динамических полевых уравнений.

Если система дифференциальных уравнений (3.4) является уравнениями Эйлера — Лагранжа для некоторого функционала, то Э.Нетер установила связь между симметриями и законами сохранения [13].

Теорема 3.7 (Нетер). *Инфинитезимальный оператор $X_{\hat\eta}$ порождает группу вариационных симметрий функционала $\mathcal{P}$ (3.39), если и только если характеристика симметрий $\hat\eta = \{\hat\eta^\alpha\}$ (3.16) является характеристикой $R=\{R_\alpha\}$ закона сохранения соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа.*

Эта формулировка принадлежит П.Олверу [5].

Если же система дифференциальных уравнений не имеет лагранжевой (или гамильтоновой) структуры, т.е. не является уравнениями Эйлера — Лагранжа, то теорема Нетер неприменима. Однако остается справедливым утверждение, полученное Н.Х.Ибрагимовым, в определенном смысле обобщающее теорему Нетер [9].

Теорема 3.8 (Обобщенная теорема Нетер). *Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\,[P_i] = 0$ — закон сохранения для системы дифференциальных уравнений (3.4) и пусть*

$\hat{X}_{\hat{\eta}}$ — *канонический оператор симметрии этой системы. Тогда вектор* $\tilde{P} = \hat{X}_{\hat{\eta}}(P)$: $\tilde{P}_i = \hat{X}_{\hat{\eta}}(P_i)$ *также является законом сохранения для этой системы:* $\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\,[\tilde{P}_i] = 0$.

Доказательство получается, если применить оператор $\hat{X}_{\hat{\eta}}$ к закону сохранения (3.40) в характеристической форме с использованием свойства $[\hat{X}_{\hat{\eta}}, D_i] = 0$ и инфинитезимального критерия инвариантности.

4. ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Симметрии и методы интегрирования

4.1.1. Определяющие уравнения

Рассмотрим сначала одно обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n с одной неизвестной $y = y(x)$ в нормальной форме:

$$y^{(n)} = f\,(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{4.1}$$

Здесь $m = 1$, $n = 1$, $x^1 = x$, $u^1 = y$, $N = n$, $u_1 = y'$, ..., $u_N = y^{(n)}$.

Рассмотрим сначала симметрии этого уравнения в каноническом представлении, когда переменная x является инвариантом и не преобразуется. Канонический оператор Ли — Беклунда (3.10) с координатами (3.14) в продолженном пространстве имеет вид

$$\hat{X} = \hat{\eta}\,\frac{\partial}{\partial y} + D[\hat{\eta}]\,\frac{\partial}{\partial y'} + D^2[\hat{\eta}]\,\frac{\partial}{\partial y''} + \sum_{l \geq 3} D^l[\hat{\eta}]\,\frac{\partial}{\partial y^{(l)}}, \tag{4.2}$$

где $D = D_1 = D_x$ есть оператор полного дифференцирования по x вида (3.1):

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y'\,\frac{\partial}{\partial y} + y''\,\frac{\partial}{\partial y'} + \sum_{l \geq 3} y^{(l+1)}\,\frac{\partial}{\partial y^{(l)}}. \tag{4.3}$$

Применим инфинитезимальный критерий инвариантности (3.27), в котором символ $[F]$ означает, что должны учитываться как само уравнение (4.1), так и уравнения, полученные его дифференцированием по x:

$$y^{(n+s)} = D^s[f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})] \quad (s = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

Условие инвариантности (3.27) уравнения (4.1) имеет вид

$$\left\{ \hat{\eta} f_y + D[\hat{\eta}] f_{y'} + D^2[\hat{\eta}] f_{y''} + \sum_{l=3}^{n-1} D^l[\hat{\eta}] f_{y^{(l)}} - D^n[\hat{\eta}] \right\} \Bigg|_{(4.1),(4.4)} = 0. \tag{4.5}$$

Здесь и далее нижние буквенные индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным. Рассмотрим в качестве примера уравнение (4.1) порядка $n = 2$:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{4.6}$$

Условие его инвариантности есть (4.5) при $n = 2$:

$$\begin{aligned} &\hat{\eta}(x, y, y') f_y(x, y, y') + [\hat{\eta}_x(x, y, y') + y' \hat{\eta}_y(x, y, y') + \\ &+ f(x, y, y') \hat{\eta}_{y'}(x, y, y')] f_{y'}(x, y, y') - D[\hat{\eta}_x(x, y, y') + \\ &+ y' \hat{\eta}_y(x, y, y') + f(x, y, y') \hat{\eta}_{y'}(x, y, y')] \big|_{(4.1),(4.4)} = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь выражение (4.3) для D «обрывается» и с учетом уравнения (4.6) имеет вид

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + f(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Получаем следующее определяющее уравнение для характеристики $\hat{\eta}$ канонического оператора симметрии:

$$\begin{aligned} &\hat{\eta}_{xx} + 2y'(\hat{\eta}_{xy} + f \hat{\eta}_{y'y}) + (y')^2 \hat{\eta}_{yy} + f^2 \hat{\eta}_{y'y'} + 2f \hat{\eta}_{xy'} + \\ &+ f \hat{\eta}_y + (f_x + y' f_y) \hat{\eta}_{y'} - f_{y'}(\hat{\eta}_x + y' \hat{\eta}_y) - f_y \hat{\eta} = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Для групп Ли точечных преобразований формула (3.16) дает линейную зависимость характеристики симметрии от производной:

$$\hat{\eta}(x, y, y') = \eta(x, y) - y'\xi(x, y). \tag{4.9}$$

Подстановка выражения (4.9) в уравнение (4.8) дает

$$\eta_{xx} + y'(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + (y')^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - (y')^3\,\xi_{yy} +$$
$$+ f(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y) - f_{y'}[\eta_x + y'(\eta_y - \xi_x) -$$
$$- (y')^2\,\xi_y] - f_x\,\xi - f_y\,\eta = 0. \tag{4.10}$$

При заданном уравнении (4.6) известна вся зависимость от производной y' его правой части f, а следовательно, и левой части уравнения (4.10), так как неизвестные ξ, η не зависят от y'. Отсюда следует, что после приведения подобных членов, одинаково зависящих от y', коэффициенты при каждой такой группе членов следует приравнять нулю. Происходит «расщепление» уравнения (4.10) по переменной y' на несколько уравнений. Получаем переопределенную систему *определяющих уравнений для классических (лиевских) симметрий.*

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$y'' = \frac{1}{x}\,(y')^2 - \frac{2}{x^2}\,yy' + \frac{y^2}{x^3} \equiv f(x, y, y'). \tag{4.11}$$

Подстановка функции f из уравнения (4.11) в уравнении (4.10) дает равенства нулю четырех групп членов, пропорциональных четырем различным степеням y':

$$\xi_{yy} + \frac{1}{x}\,\xi_y = 0, \tag{4.12}$$

$$\eta_{yy} - \frac{1}{x}\,\eta_y - 2\xi_{xy} + 4\frac{y}{x^2}\,\xi_y + \frac{1}{x^2}\,\xi = 0, \tag{4.13}$$

$$2\eta_{xy} - \frac{2}{x}\,\eta_x + \frac{2}{x^2}\,\eta - \xi_{xx} + 2\frac{y}{x^2}\,\xi_x - 3\,\frac{y^2}{x^3}\,\xi_y - 4\,\frac{y}{x^3}\,\xi = 0, \tag{4.14}$$

$$\eta_{xx} + 2\,\frac{y}{x^2}\,\eta_x + \frac{y^2}{x^3}\,\eta_y - 2\,\frac{y}{x^3}\,\eta - 2\,\frac{y^2}{x^3}\,\xi_x + 3\,\frac{y^2}{x^4}\,\xi = 0. \tag{4.15}$$

Уравнение (4.12) легко интегрируется и дает

$$\xi(x, y) = C_1(x) + C_2(x)\exp(-y/x), \tag{4.16}$$

где $C_{1,2}(x)$ — произвольные гладкие функции от x. Подстановка выражения (4.16) для ξ в уравнение (4.13) приводит к линейному уравнению только для неизвестной η, имеющему общее решение

$$\eta(x, y) = [-xC_2'(x) + (y/x + 2)\, C_2(x)] \exp(-y/x) +$$

$$+ (y/x + 1)\, C_1(x) - xC_3(x) + C_4(x) \exp(y/x) \tag{4.17}$$

с двумя новыми произвольными функциями $C_{3,4}(x)$. Таким образом, вся зависимость от y неизвестных ξ, η уже найдена. Поэтому подстановка выражений (4.16), (4.17) в уравнение (4.14) приводит к его расщеплению по переменной y: приравниваются нулю суммарные коэффициенты членов с одинаковой зависимостью от y. Выражения для координат инфинитезимального оператора симметрии имеют следующий окончательный вид:

$$\xi(x) = C_3 x^2 + C_1 x + \overline{C}_1,$$

$$\eta(x, y) = (C_4 x + \overline{C}_4) \exp(y/x) + C_3 xy + \overline{C}_1 \frac{y}{x} +$$

$$+ (C_1 - \overline{C}_3)\, x + C_1 y + \overline{C}_1, \tag{4.18}$$

где все величины C, $\overline{C}$ с индексами — произвольные константы, $C_2 = \overline{C}_2 = 0$. Полагая по очереди все константы,кроме одной, равными нулю в формуле (4.18) и используя выражение (3.24) для инфинитезимальных операторов симметрии X_μ:

$$X_\mu = \xi_\mu(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\mu(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \tag{4.19}$$

получаем базис алгебры операторов симметрии, допускаемых уравнением (4.11):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{y}{x} + 1\right)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = xX_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + (x + y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_4 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = x \exp(y/x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_6 = \exp(y/x)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.20}$$

Коммутаторы операторов симметрии вида (4.19) имеют тот же вид:

$$[X_\mu, X_\nu] = \xi_{\mu\nu}(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_{\mu\nu}(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.21}$$

с координатами, определяемыми формулой (3.29):

$$\xi_{\mu\nu} = X_\mu(\xi_\nu) - X_\nu(\xi_\mu),$$

$$\eta_{\mu\nu} = X_\mu(\eta_\nu) - X_\nu(\eta_\mu). \tag{4.22}$$

Результаты вычисления коммутаторов операторов симметрии удобно записать в виде таблицы, в которой выражение для коммутатора $[X_\mu, X_\nu]$ стоит на пересечении μ-й строки и ν-го столбца. В примере 4.1 алгебра Ли симметрий уравнения (4.11) определяется табл.1, вычисленной по формулам (4.22).

Таблица 1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	X_1	0	$2X_2 - X_3$	X_6	0
X_2	$-X_1$	0	0	X_4	X_5	0
X_3	0	0	0	0	X_5	X_6
X_4	$-2X_2 + X_3$	$-X_4$	0	0	0	$-X_5$
X_5	$-X_6$	$-X_5$	$-X_5$	0	0	0
X_6	0	0	$-X_6$	X_5	0	0

4.1.2. Метод канонических переменных

Знание однопараметрической группы симметрии дифференциального уравнения позволяет понизить его порядок на единицу, а для уравнения первого порядка — проинтегрировать его. Метод канонических переменных есть один из двух методов, с помощью которых это достигается [5,14]. Он использует теорему 2.4 о выпрямлении векторного поля.

Каноническими переменными называются те переменные, в которых группа симметрии уравнения приводится к группе трансляций по одной из переменных, и следовательно, уравнение не зависит от этой переменной. Как известно, такое дифференциальное уравнение допускает понижение порядка. В случае же уравнения первого порядка независимость от одной из переменных приводит к разделению переменных, и уравнение интегрируется в квадратурах.

Требуемая замена переменных $(x, y) \to (t, u)$: $t = t(x, y)$, $u = u(x, y)$ определяется по известному инфинитезимальному оператору симметрии X вида (3.24):

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{4.23}$$

формулами (2.18), (2.19) при $n = 2$, $z'^{1} = t$, $z'^{2} = u$:

$$X(t) \equiv \xi(x, y)\frac{\partial t}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \tag{4.24}$$

$$X(u) \equiv \xi(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 1. \tag{4.25}$$

Уравнение (4.24) означает, что функция $t(x, y)$ есть инвариант группы с оператором (4.23). Оператор X преобразуется в новых переменных к виду $X = \partial/\partial u$ и порождает группу трансляций по координате u.

Пример 4.2. Применим теперь метод канонических переменных к дифференциальному уравнению (4.11) второго порядка из примера 4.1 для понижения его порядка. Это уравнение допускает 6 однопараметрических групп симметрии с операторами (4.20) и любую из них можно использовать для понижения его порядка. Выберем, например, симметрию с оператором X_1. Канонические переменные t, u определяются уравнениями (4.24), (4.25):

$$X_1(t) \equiv \frac{\partial t}{\partial x} + \left(\frac{y}{x} + 1\right)\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad X_1(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{y}{x} + 1\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

Решая эти линейные уравнения в частных производных первого порядка методом характеристик, находим их общие решения:

$$t = \Phi\left(\frac{y}{x} - \ln|x|\right), \quad u = x + \Psi\left(\frac{y}{x} - \ln|x|\right),$$

зависящие от произвольных гладких функций Φ, Ψ одного аргумента. Простейший их выбор: $\Phi(z) = z$, $\Psi(z) = z$ дает

$$t = \frac{y}{x} - \ln|x|, \quad u = x + \frac{y}{x} - \ln|x|.$$

Это и есть искомое преобразование к каноническим переменным. Легко находим обратное преобразование:

$$x = u - t, \quad y = (u - t)(t + \ln|u - t|)$$

и формулы преобразования производных y', y''.

Подстановка этих выражений в уравнение (4.11) преобразует его к каноническим переменным:

$$u''_{tt} = 1 - u'_t .$$

Полученное уравнение не зависит явно от переменной u в соответствии с тем, что оператор симметрии в новых переменных по построению должен стать оператором трансляций по u: $X_1 = \partial/\partial u$, а инвариантное уравнение не должно зависеть от u. С помощью известного приема, вводя новую неизвестную $z(t) = u'_t$, мы теперь можем понизить порядок этого уравнения:

$$\frac{dz}{dt} = 1 - z.$$

Если используется лишь однопараметрическая группа симметрий, то полученное уравнение первого порядка не обязано быть интегрируемым в квадратурах. Тот факт, что в данном примере оно является таковым, будучи уравнением с разделяющимися переменными, объясняется тем, что уравнение (4.11) имеет и другие симметрии (4.20): данное уравнение не зависит явно от t и потому допускает оператор трансляций по t.

Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, находим

$$z = \frac{du}{dt} = C_1 \exp(-t) + 1.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$u = t - C_1 \exp(-t) + C_2,$$

где $C_{1,2}$ — произвольные константы. Подставляя сюда выражения $t(x, y)$, $u(x, y)$, находим общее решение уравнения (4.11):

$$y = x \ln \left| \frac{C_1 x}{C_2 - x} \right| .$$

4.1.3. Метод дифференциальных инвариантов

Перейдем теперь ко второму методу понижения порядка и интегрирования дифференциальных уравнений, основанному на понятии *дифференциальных инвариантов*, т.е. инвариантов I группы преобразований продолженного пространства. Дифференциальные инварианты порядка n определяются условием (2.16), использующим n-е продолжение инфинитезимального оператора (3.9) группы симметрии:

$$\overset{n}{X}I(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) \equiv \xi \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial I}{\partial y'} + \zeta_2 \frac{\partial I}{\partial y''} + \ldots + \zeta_n \frac{\partial I}{\partial y^{(n)}} = 0 \quad (4.26)$$

и формулы продолжения (3.17):

$$\zeta_1 = D[\eta] - y'D[\xi], \; \zeta_2 = D[\zeta_1] - y''D[\xi], \ldots \zeta_n = D[\zeta_{n-1}] - y^{(n)}D[\xi]. \quad (4.27)$$

Здесь n-е продолжение инфинитезимального оператора группы симметрии обозначено $\overset{n}{X}$.

Из формул (4.26), (4.27) видно, что прямой путь отыскания дифференциальных инвариантов высших порядков как решений соответствующей характеристической системы вида (2.17) может оказаться делом довольно сложным. С.Ли показал, что имеется легкий способ построения всех дифференциальных инвариантов с помощью *инвариантного дифференцирования* дифференциальных инвариантов низших порядков.

Теорема 4.1. *Пусть для группы G преобразований плоскости XOY известны дифференциальные инварианты порядка n:*

$$t = t(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \quad \text{и} \quad u = u(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

Тогда производная

$$v = \frac{du}{dt} = \frac{du/dx}{dt/dx} \equiv \frac{D[u]}{D[t]} \quad (4.28)$$

является дифференциальным инвариантом группы G порядка $(n + 1)$.

Следствие 4.1. *Пусть G — однопараметрическая группа преобразований плоскости XOY и $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ — полное множество (базис) функционально независимых дифференциальных инвариантов первого порядка. Тогда производные*

$$t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} \quad (4.29)$$

составляют базис дифференциальных инвариантов n-го порядка $(n \geq 1)$.

Теорема 4.2. *Пусть G — локальная группа преобразований плоскости XOY, и функции*

$$w_1(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \ldots, w_k(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

составляют базис дифференциальных инвариантов n-го порядка для группы G. Тогда дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

допускает группу G в качестве своей группы симметрий, если и только если это уравнение можно равносильным образом выразить только через базис дифференциальных инвариантов n-го порядка группы G:

$$\tilde{F}(w_1(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \ldots, w_k(x, y, y', \ldots, y^{(n)})) = 0. \tag{4.30}$$

В частности, если G — однопараметрическая группа симметрий любого дифференциального уравнения n-го порядка, то оно эквивалентно уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$\tilde{F}\left(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\right) = 0, \tag{4.31}$$

выраженному только через дифференциальные инварианты порядка не выше первого: $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ и через их производные.

Доказательство сразу следует из теоремы 2.6 и следствия 4.1.

На этой теореме основано понижение порядка дифференциального уравнения методом дифференциальных инвариантов, а именно: выражая исходное дифференциальное уравнение порядка n через дифференциальные инварианты, мы не только автоматически понижаем его порядок на единицу. На самом деле получается еще более сильный результат. Действительно, если решение полученного уравнения (4.31) $(n-1)$-го порядка уже найдено: $u = h(t)$, то решение $y = y(x)$ исходного уравнения получается интегрированием вспомогательного уравнения первого порядка, которое получается при подстановке выражений для u, t через x, y:

$$u(x, y, y') = h(t(x, y)). \tag{4.32}$$

Так как это уравнение выражено только через инварианты группы G, то группа G есть однопараметрическая группа его симметрий. Следовательно, уравнение (4.32) можно проинтегрировать в квадратурах методом канонических переменных.

Итак, под понижением порядка дифференциального уравнения понимается не просто переписывание его в новых переменных в виде уравнения меньшего порядка, а тот факт, что по известному решению последнего уравнения решение исходного уравнения восстанавливается только с помощью квадратур. Именно в этом смысле понижение порядка уравнения достигается методом дифференциальных инвариантов. То же замечание справедливо и для метода канонических переменных.

Заметим также, что левая часть уравнения F может быть вектор-функцией, и тогда теорема 4.2, очевидно, применима для понижения порядка также и системы дифференциальных уравнений.

Пример 4.3. Применим этот метод к уравнению диффузионного пограничного слоя в автомодельном режиме для случая гиперболической зависимости коэффициента диффузии от концентрации в растворе диффундирующего вещества [15]:

$$y'' = f(x, y, y') \equiv -\nu x^n y y' + \frac{1}{y}(y')^2, \qquad \nu = \frac{1}{n+1}. \tag{4.33}$$

Подставим функцию f, заданную формулой (4.33), в определяющее уравнение (4.10) для симметрий. Расщепление по y' дает четыре уравнения для координат $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ инфинитезимального оператора симметрии X вида (4.23) (нижние буквенные индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным):

$$\xi_{yy} + \frac{1}{y}\xi_y = 0, \tag{4.34}$$

$$\eta_{xx} + \nu x^n y\,\eta_x = 0, \tag{4.35}$$

$$\eta_{yy} - \frac{1}{y}\eta_y + \frac{1}{y^2}\eta - 2\xi_{xy} + 2\nu x^n y\,\xi_y = 0, \tag{4.36}$$

$$2\eta_{xy} - \frac{2}{y}\eta_x + \nu x^n \eta - \xi_{xx} + \nu x^n y\left(\xi_x + \frac{n}{x}\xi\right) = 0. \tag{4.37}$$

Получаем $\eta = \eta(y)$, и уравнение (4.35) обращается в тождество. Общее решение уравнения (4.34) имеет вид

$$\xi(x, y) = C_1(x)\ln|y| + C_2(x) \tag{4.38}$$

с двумя произвольными гладкими функциями $C_1(x)$, $C_2(x)$. Подстановка этих результатов в уравнение (4.36) приводит к его расщеплению по y и дает $\xi = \xi(x)$, а также уравнение только для η, имеющее следующее общее решение:

$$\eta(y) = C_3 y \ln |y| + C_4 y. \tag{4.39}$$

Окончательно получаем общее решение определяющих уравнений

$$\xi(x) = x, \quad \eta(y) = -\frac{1}{\nu}\, y,$$

и оператор симметрии имеет следующий вид:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\nu}\, y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.40}$$

Мы доказали, что уравнение (4.33) не имеет других классических симметрий.

Используем теперь симметрию этого уравнения для понижения его порядка методом дифференциальных инвариантов. Дифференциальные инварианты порядка не выше первого $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ получаются с использованием первого продолжения $\overset{1}{X}$ инфинитезимального оператора (4.40) и определяются условиями $X(t) = 0$ и

$$\overset{1}{X}(u) \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\nu}\, y\frac{\partial u}{\partial y} - (n+2)\, y'\frac{\partial u}{\partial y'} = 0. \tag{4.41}$$

Решая уравнения $X(t) = 0$ и (4.41) методом характеристик, находим базис инвариантов низших порядков:

$$t = x^{n+1} y, \quad u = \frac{xy'}{y}. \tag{4.42}$$

С помощью инвариантного дифференцирования находим отсюда дифференциальный инвариант второго порядка:

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{D[u]}{D[t]} = \frac{1}{t(n+1+u)}\left(\frac{x^{n+3}}{t}\, y'' - u^2 + u\right).$$

Используя эти выражения в уравнении (4.33), преобразуем его к новым переменным t, u:

$$t(n+1+u)\frac{du}{dt} = (1 - \nu t)\, u. \tag{4.43}$$

Разделяя здесь переменные и интегрируя, находим общий интеграл этого уравнения:

$$u^{n+1} \exp u = C_1 t \exp(-\nu t). \tag{4.44}$$

Мы доказали, что уравнение (4.33) не имеет других классических симметрий. Следовательно, дополнительная классическая симметрия, ответственная за разделение переменных в уравнении (4.43), появилась только после понижения порядка уравнения. Ее инфинитезимальный оператор приводится к оператору трансляций $X = \partial/\partial v$ по переменной $v = \ln |t| - \nu t$, в которой уравнение принимает вид

$$dv = \frac{(n+1+u)}{u}\, du$$

и не зависит явно от v. Ей соответствует нелокальная симметрия исходного уравнения (4.33), которая получается применением к оператору трансляций по ν преобразования Беклунда, обратного к (4.42) и выражающего x, y через t, u. Такая симметрия не могла быть обнаружена при решении определяющих уравнений (4.10) для классических симметрий.

Обозначим через $u = h(t, C_1)$ неявную функцию, определяемую равенством (4.44). Подставляя сюда выражения (4.42) для t, u, получаем вспомогательное дифференциальное уравнение:

$$\frac{xy'}{y} = h(x^{n+1}y, C_1). \tag{4.45}$$

Поскольку это уравнение выражается только через инварианты t, u, то оно автоматически допускает оператор симметрии (4.40). Канонические переменные ищем из условий

$$X(t) \equiv x\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{1}{\nu}\, y\frac{\partial t}{\partial y} = 0, \qquad X(w) \equiv x\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{\nu}\, y\frac{\partial w}{\partial y} = 1. \tag{4.46}$$

Методом характеристик получаем

$$t = x^{n+1}y, \qquad w = \ln |x| + \varphi(x^{n+1}y).$$

Простейший выбор произвольной функции $\varphi \equiv 0$ дает $w = \ln |x|$. Уравнение (4.45), преобразованное к переменным t, w, допускает в силу условий (4.46) трансляции по w и потому не зависит явно от w и интегрируется:

$$w(t) \equiv \ln |x| = \int_0^t \frac{dt}{t[h(t, C_1) + n + 1]} + C_2. \tag{4.47}$$

Обозначая

$$J(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \frac{h(t, C_1)\, dt}{t[h(t, C_1) + n + 1]}$$

и решая уравнение (4.45) относительно $\ln |y|$, получаем решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\ln |y| = J(t) - (n+1)\, C_2, \quad \ln |x| = -\frac{1}{(n+1)} J(t) + \frac{1}{(n+1)} \ln |t| + C_2,$$

где использовано равенство (4.42), определяющее t. В определении функции $J(t)$ величина $u = h(t, C_1)$ есть неявная функция, определяемая равенством (4.44), откуда можно извлечь всю нужную информацию о ней. Именно в такой форме решение уравнения (4.33) используется в приложениях [15].

4.2. Многопараметрические симметрии и интегрирование дифференциальных уравнений

4.2.1. Двухпараметрические группы Ли симметрий и понижение порядка

Выше было показано, как наличие у дифференциального уравнения однопараметрической группы симметрий приводит к понижению его порядка на единицу. Были также приведены примеры, где наличие двух однопараметрических групп симметрий у уравнения второго порядка приводит к понижению порядка на две единицы, т.е. к интегрированию этого уравнения. Этот факт базировался на том свойстве, что после понижения порядка на единицу с помощью одной симметрии уравнение сохраняет (или приобретает) вторую классическую симметрию, что и приводит к его интегрированию. Однако это не всегда так: оказывается, что необходимо сформулировать алгоритм интегрирования с правильным порядком использования симметрий. Для этого понадобятся дополнительные сведения о структуре групп и алгебр Ли.

Определение 4.1. ***Гомоморфизм*** *групп Ли — это есть гладкое отображение $\varphi: G \to H$ одной группы Ли в другую, согласованное с групповым умножением:*

$$\varphi(g \cdot \tilde{g}) = \varphi(g) \cdot \varphi(\tilde{g}), \qquad g, \tilde{g} \in G.$$

Если гомоморфизм φ гладкий обратный, то он определяет ***изоморфизм*** *групп Ли G и H.*

Практически часто можно не различать изоморфные группы Ли.

Определение 4.2. ***Подгруппа Ли*** *H группы Ли G есть подмногообразие $H = \varphi(\tilde{H})$, где $\tilde{H}$ также является группой Ли, а отображение φ: $\tilde{H} \to G$ есть гомоморфизм групп Ли.*

Определение 4.3. *Подгруппа H группы G называется* ***нормальной****, если $g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$ для любого $h \in H$ и любого $g \in G$.*

В группе G можно ввести отношение эквивалентности по ее подгруппе H: элементы g и $\tilde{g}$ группы G эквивалентны $g \sim \tilde{g}$, если и только если $g = \tilde{g} \cdot h$ для некоторого $h \in H$. Множество всех элементов группы G, эквивалентных данному элементу g, называется *смежным классом* или *классом эквивалентности* с представителем g. Всякий элемент этого класса имеет вид $g \cdot h$ с некоторым элементом h подгруппы H. Множество всех смежных классов группы G по подгруппе H обозначается G/H.

Теорема 4.3. *Если H — нормальная подгруппа группы G, то на множестве смежных классов G/H можно ввести структуру группы, называемой* ***фактор-группой*** *группы G по подгруппе H.*

Для групп Ли эти понятия переносятся на алгебры Ли. Пусть L_r — конечномерная алгебра Ли размерностью r, и пусть N — линейное подпространство в L_r.

Определение 4.4. *Подпространство N называется* ***подалгеброй*** *алгебры Ли L_r, если оно замкнуто относительно скобки Ли, т.е. $[X, Y] \in N$, если $X, Y \in N$. Подпространство называется* ***идеалом*** *алгебры Ли L_r, если $[X, Y] \in N$ для всех $X \in N$ и всех $Y \in L_r$.*

В алгебре Ли L_r можно ввести отношение эквивалентности по ее идеалу N: операторы X и Y из L_r называются *эквивалентными* $X \sim Y$, если $Y - X \in N$. Множество всех операторов, эквивалентных данному оператору Y, называется *смежным классом* с представителем X: всякий элемент Y этого класса имеет вид $Y = X + Z$ с некоторым оператором $Z \in N$. Множество всех смежных классов образует алгебру Ли, которая называется *фактор-алгеброй* алгебры Ли L_r по идеалу N и обозначается L_r/N. Элементами этой фактор-алгебры являются представители смежных классов.

Теорема 4.4 (инфинитезимальный критерий нормальности). *Подгруппа Ли H группы Ли G нормальна, если и только если ее алгебра Ли N является идеалом алгебры Ли группы G.*

Теорема 4.5. *Если группа Ли H есть нормальная подгруппа группы Ли G, а N и L — их алгебры Ли соответственно, то фактор-группа G/H есть группа Ли с алгеброй Ли, являющейся фактор-алгеброй L/N.*

Теорема 4.6. *Каждая двумерная алгебра Ли L_2 с базисом X_1, X_2 либо абелева: $[X_1, X_2] = 0$, либо изоморфна алгебре Ли, удовлетворяющей соотношению $[X_1, X_2] = X_1$.*

Оба эти случая объединяются соотношением

$$[X_1, X_2] = kX_1, \tag{4.48}$$

где $k = 0$ или $k = 1$.

Здесь одномерная алгебра Ли L_1, натянутая на X_1, образует идеал в L_2. Фактор-алгебра L_2/L_1 отождествляется с одномерной алгеброй Ли, натянутой на X_2.

Пусть G_r есть r-параметрическая группа Ли преобразований m-мерного многообразия M (в частности, области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$). Пусть H есть s-параметрическая подгруппа Ли группы G_r, и функции $J(z) = (J_1(z), \ldots, J_{m-s}(z))$ составляют полное множество (базис) функционально независимых инвариантов группы H. Если H является нормальной подгруппой в G, то определено *индуцированное действие* группы G на $(m-s)$-мерном подмногообразии $\tilde{M}$, имеющем локальные координаты $y = (y^1, \ldots, y^{m-s})$, $y^i = J_i(z)$.

Вернемся теперь к анализу симметрий конечных уравнений вида (2.21), определяющих поверхность S_F, лежащую в M. Согласно теореме 2.6 всякую поверхность S_F, инвариантную относительно группы H, можно задать уравнениями, выраженными только через базис инвариантов группы H:

$$F(z) = \tilde{F}(J(z)) \equiv \tilde{F}(y) = 0, \quad \text{где} \quad y = J(z). \tag{4.49}$$

Отсюда следует утверждение:

Теорема 4.7. *Если H — нормальная подгруппа группы Ли G, то поверхность S_F инвариантна относительно всей группы G, если и только если поверхность $S_{\tilde{F}}$, заданная уравнением (4.49) в инвариантах, является инвариантной относительно индуцированного действия группы G на $\tilde{M}$, т.е. допускает фактор-группу G/H как группу симметрий.*

Далее рассматриваем только классические симметрии, т.е. группы Ли точечных преобразований.

Аналог теоремы 4.7 справедлив и для дифференциальных уравнений. Отличие в том, что эти уравнения определяют поверхности в продолженном пространстве, так что локальные координаты включают в себя производные от неизвестных, а множество инвариантов содержит дифференциальные инварианты.

Пусть M — многообразие в плоскости XOY, а его r-е продолжение $M^{(r)}$ содержит в числе своих координат производные неизвестной y до r-го порядка включительно: $(x, y, y', \ldots, y^{(r)})$. Далее принимается следующее

Предположение 4.1. *Группа G_r преобразований $(r+2)$-мерного многообразия $M^{(r)}$ имеет r-мерные орбиты.*

Тогда группа G_r имеет два независимых дифференциальных инварианта порядка r:

$$t = t(x, y, y', \ldots, y^{(r)}), \qquad u = u(x, y, y', \ldots, y^{(r)}). \tag{4.50}$$

Согласно теоремам 2.6 и 4.2 инвариантность дифференциального уравнения n-го порядка эквивалентна возможности выразить это уравнение только через дифференциальные инварианты n-го продолжения группы G_r в виде дифференциального уравнения $(n-r)$-го порядка для неизвестной функции $u = u(t)$:

$$\tilde{F}\left(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-r}u}{dt^{n-r}}\right) = 0.$$

Если $u = h(t)$ — решение этого редуцированного уравнения, то, подставляя сюда выражения для инвариантов, получаем вспомогательное дифференциальное уравнение r-го порядка:

$$u(x, y, y', \ldots, y^{(r)}) = h[t(x, y, y', \ldots, y^{(r)})]. \tag{4.51}$$

Поскольку это уравнение выражается только через инварианты, то оно допускает r-параметрическую группу симметрий G_r. Однако отсюда не следует, что группу G_r можно использовать для интегрирования в квадратурах уравнения (4.51). Причина в том, что при поэтапном понижении порядка с использованием на каждом этапе однопараметрических симметрий может произойти потеря еще не использованных симметрий. Этого не случится, если на каждом этапе использовать нормальную подгруппу группы симметрии.

Теорема 4.8. *Пусть H_s есть нормальная подгруппа группы G_r, и дифференциальное уравнение*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{4.52}$$

порядка n допускает H_s как группу симметрий. Пусть соответствующее редуцированное уравнение, выраженное через инварианты t, u группы H_s, имеет вид

$$\tilde{F}\left(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-s}u}{dt^{n-s}}\right) = 0. \tag{4.53}$$

Тогда определено индуцированное действие фактор-группы G_r/H_s на плоскости инвариантов t, u (на множестве $\tilde{M}$) и уравнение (4.52) допускает всю группу симметрий G_r, если и только если редуцированное уравнение (4.53) допускает фактор-группу G_r/H_s как свою группу симметрий.

Таким образом, теорема 4.7 для алгебраических уравнений переносится на дифференциальные уравнения.

Теперь можно определить правильную последовательность использования симметрий из двухпараметрической группы для понижения порядка на две единицы.

Теорема 4.9. *Пусть дифференциальное уравнение (4.52) n-го порядка инвариантно относительно двухпараметрической группы симметрий G. Тогда существует редуцированное уравнение вида (4.53) с $s = 2$ порядка $n - 2$, обладающее тем свойством, что по его общему решению можно получить общее решение исходного уравнения (4.52) с помощью двух квадратур.*

Доказательство состоит в указании правильного алгоритма понижения порядка с помощью двухпараметрической группы симметрий с базисом алгебры Ли X_1, X_2, удовлетворяющим соотношению (4.48), в котором можно считать, что $k = 1$ (при $k = 0$ симметрии можно использовать в любом порядке, и проблемы нет). Такой базис всегда существует в силу теоремы 4.6. Тогда подалгебра Ли, натянутая на X_1, образует идеал в двумерной алгебре Ли с базисом X_1, X_2. Поэтому однопараметрическая подгруппа H, порожденная X_1, является нормальной подгруппой группы G с однопараметрической фактор-группой G/H. *Правильная последовательность понижения порядка* уравнения (4.52) состоит в том, что сначала используется симметрия X_1, соответствующая *нормальной подгруппе*, и уравнение выражается через ее дифференциальные инварианты $t = t(x, y)$, $u = u(x, y, y')$ согласно теореме 4.2. Причем решение исходного уравнения (4.52) восстанавливается по решению редуцированного уравнения $(n - 1)$-го порядка с помощью одной квадратуры. Так как H — нормальная подгруппа, то редуцированное уравнение инвариантно относительно действия фактор-группы G/H на множестве инвариантов t, u, т.е. сохраняет симметрию X_2. Поэтому симметрию X_2 можно использовать для понижения порядка уравнения еще на одну единицу.

4.2.2. Разрешимые группы и алгебры Ли и понижение порядка с помощью многопараметрических симметрий

Для группы Ли G_r с числом параметров $r \geq 3$ вообще может оказаться невозможным понижение порядка G_r-инвариантного уравнения на r единиц. Зависящие от r параметров группы Ли и соответствующие r-мерные алгебры Ли, которые можно использовать для понижения порядка уравнения на r единиц, т.е. для полного разрешения в квадратурах дифференциального уравнения r-го порядка, называются *разрешимыми*.

Определение 4.5. *Группа Ли G_r называется* ***разрешимой****, если существует цепочка подгрупп Ли*

$$C_r \supset G_{r-1} \supset \ldots \supset C_2 \supset G_1 \supset G_0 = \{e\}$$

с размерностями $r, r-1, \ldots, 2, 1, 0$ соответственно, в которой каждая последующая подгруппа является нормальной подгруппой предыдущей подгруппы G_s $(s = 2, \ldots, r)$:

$$g_s^{-1} \cdot g_{s-1} \cdot g_s \in G_{s-1}, \quad \text{если} \quad g_{s-1} \in G_{s-1}, \quad g_s \in G_s .$$

Определение 4.6. *Алгебра Ли L_r называется* ***разрешимой,*** *если существует цепочка подалгебр Ли*

$$L_r \supset L_{r-1} \supset \ldots \supset L_2 \supset L_1$$

размерностей $r, r-1, \ldots, 2, 1$ соответственно, в которой каждая последующая подалгебра L_{s-1} является идеалом в предыдущей подалгебре L_s $(s = 2, \ldots, r)$:

$$[X_{s-1}, X_s] \in L_{s-1}, \quad \text{если} \quad X_{s-1} \in L_{s-1}, \quad X_s \in L_s .$$

Следующее утверждение устанавливает эквивалентность этих двух определений.

Утверждение 4.1. *Группа Ли разрешима, если и только если разрешима ее алгебра Ли.*

Критерий разрешимости алгебры Ли формулируется с помощью *производной алгебры*.

Определение 4.7. *Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — базис алгебры Ли L_r. Подпространство, базисом которого являются коммутаторы $[X_i, X_j]$ всевозможных пар базисных операторов, образует идеал, называемый* ***производной алгеброй*** *и обозначаемый L'_r. Производные алгебры высших порядков определяются по индукции:*

$$L_r^{(n+1)} = (L_r^{(n)})', \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 4.10. *Алгебра Ли L_r разрешима, если и только если ее производная алгебра некоторого порядка обращается в нуль: $L_r^{(n)} = 0$ для некоторого $n > 0$.*

Отсюда очевидно, что всякая абелева алгебра Ли (для которой скобки Ли всех ее элементов равны нулю) разрешима, поскольку ее производная алгебра равна нулю, т.е. состоит лишь из нулевого элемента.

Следствие 4.2. *Всякая двумерная алгебра Ли L_2 разрешима.*

Теорема 4.11. *Пусть дифференциальное уравнение (4.52) порядка n допускает разрешимую r-параметрическую группу симметрий G_r. Тогда общее решение этого уравнения можно получить только с помощью квадратур из общего решения редуцированного уравнения (4.53) $(n-r)$-го порядка (при $s = r$). В частности, если уравнение (4.52) допускает n-параметрическую разрешимую группу симметрий, то его общее решение можно получить только квадратурами.*

Пример 4.4 (П.Олвер [5]). Уравнение третьего порядка

$$(y')^5 y''' = 3(y')^4 (y'')^2 + (y'')^3 \tag{4.54}$$

допускает трехпараметрическую группу симметрии. Соответствующий базис алгебры Ли L_3 состоит из операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.55}$$

с коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Цепочка подалгебр $L_3 \supset L_2 \supset L_1$, имеющих базисы (4.55), $\{X_1, X_2\}$ и X_1 соответственно, очевидно, удовлетворяет определению 4.6, и, следовательно, L_3 является разрешимой алгеброй. Поэтому уравнение (4.54) интегрируемо в квадратурах.

Применим теперь алгоритм интегрирования, на котором основано доказательство теоремы 4.11. Сначала используем базисный элемент X_1 алгебры L_1. Инварианты порождаемой им однопараметрической подгруппы имеют вид: $t = x$, $u = y'$. Выразим через них уравнение (4.54), понизив его порядок на единицу:

$$u^5 \frac{d^2u}{dt^2} = 3u^4 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^3 . \tag{4.56}$$

Рассмотрим базисный элемент X_2 алгебры L_2, не принадлежащий L_1, и выразим его через инварианты t, u. Получим оператор $X_2 = \tilde{X}_2 = \partial/\partial t$, порождающий индуцированное действие двухпараметрической подгруппы G_2 на множестве инвариантов t, u алгебры L_1. Найдем теперь дифференциальные инварианты второго порядка оператора $\tilde{X}_2$:

$$z = u, \qquad v = \frac{du}{dt}, \qquad \frac{dv}{dz} = \frac{D_t[v]}{D_t[z]} = \frac{d^2u/dt^2}{du/dt} .$$

Выразим через них уравнение (4.56), понижая его порядок еще на одну единицу:

$$z^5 \frac{dv}{dz} = 3z^4 v + v^2. \tag{4.57}$$

Это уравнение Риккати должно сохранить еще симметрию X_3. Действительно, второе продолжение этого оператора, будучи выражено через инварианты z, v, принимает вид

$$\overset{2}{X}_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 3zv \frac{\partial}{\partial v} .$$

Получаем редуцированный инфинитезимальный оператор

$$\tilde{X}_3 = -z^2 \frac{\partial}{\partial z} - 3zv \frac{\partial}{\partial v} ,$$

являющийся симметрией уравнения (4.57). Он приводится к оператору трансляций $\tilde{X}_3 = \partial/\partial s$ по новой переменной s заменой переменных:

$$s=\frac{1}{z}, \quad w=\frac{v}{z^3},$$

где w — инвариант оператора $\tilde{X}_3$. Выразим уравнение (4.57) в переменных w, s. Получаем уравнение с разделяющимися переменными с общим решением

$$w=\frac{1}{s+C_1}.$$

Возвращаясь в последнем равенстве к переменным u, t, получим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dt}=\frac{u^4}{C_1 u+1}.$$

Разделение переменных и интегрирование дает его общий интеграл

$$t=-\frac{C_1}{2u^2}-\frac{1}{3u^3}+C_2.$$

Пусть чисто алгебраическая проблема решения этого уравнения уже преодолена, и $u=h(t)$ есть его решение. Выражая его через исходные переменные x, y, получаем дифференциальное уравнение: $dy/dx=h(x)$, интегрируемое в квадратурах.

Предыдущие результаты легко переносятся на системы дифференциальных уравнений.

4.3. Законы сохранения для обыкновенных дифференциальных уравнений

4.3.1. Интегрирующие множители для уравнений высших порядков

Все известные классические методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на две группы. Во-первых, это замена переменных, приводящая к понижению порядка или разделению переменных и интегрированию уравнения. Во-вторых, это приведение левой части уравнения к полному дифференциалу путем домножения его на соответствующий интегрирующий множитель с последующим понижением порядка или интегрированием в исходных переменных.

Методы интегрирования, относящиеся к первой группе, унифицируются групповым анализом на основе теории Ли классических симметрий. Оказывается, что аналогичный регулярный подход возможен также для отыскания интегрирующих множителей и соответствующих первых интегралов дифференциальных уравнений. Удивительно, что этот подход до сих пор практически не был развит, хотя техника отыскания интегрирующих множителей аналогична используемой при решении определяющих уравнений для симметрий.

Если интегрируемость уравнения не прогнозируется теорией Ли классических симметрий, то окончательный вывод о возможности его интегрирования может быть получен лишь в результате комбинированного исследования, включающего также поиск интегрирующих множителей и первых интегралов и использующего связи симметрий и интегралов. Для существования этих связей не требуется наличия у уравнений лагранжевой или гамильтоновой структуры, что необходимо для применимости теоремы Нетер 3.7. Они позволяют размножать интегралы с помощью симметрий, а также находить симметрии первых интегралов, что приводит к дальнейшему понижению порядка, а возможно, и к интегрированию уравнения. Указанные связи, базирующиеся на обобщенной теореме Нетер 3.8, также не применялись к обыкновенным дифференциальным уравнениям до самого последнего времени. Исследование и комбинированное использование симметрий, интегралов и связей между ними и составляет концепцию *современного группового анализа.*

Пусть система (3.4) состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_k(x, y, y', y'', \ldots, \overset{(n_k)}{y}) = 0 \quad (k = 1, \ldots, s). \tag{4.58}$$

Здесь $y = \{y_\alpha\}$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ — неизвестная вектор-функция аргумента x; $y', y'', \ldots$ — ее производные по x; n_k обозначает порядок уравнения с номером k, и пусть n — наибольший из этих порядков.

В соответствии с формулами (3.36), (3.40) функция

$$P(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

является *первым интегралом* (законом сохранения) для системы (4.58), если существует набор функций R_k $(k = 1, \ldots, s)$, зависящих от x, y, $y', \ldots, y^{(n)}$, таких, что выполняется тождество

$$R \cdot F \equiv \sum_{k=1}^{s} R_k F_k = D[P]. \tag{4.59}$$

Тогда $R = \{R_k\}$ называется *интегрирующим множителем* (характеристикой закона сохранения), соответствующим интегралу P. В силу системы (4.58) из тождества (4.59) следует

$$P(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C \quad (C = \mathrm{const}), \tag{4.60}$$

что означает понижение порядка уравнения на единицу.

4.3.2. Определяющие уравнения для интегрирующих множителей

Перейдем теперь к регулярным процедурам отыскания интегрирующего множителя R и соответствующего первого интеграла P.

Определяющие уравнения для R получаются применением к равенству (4.59) оператора Эйлера — Лагранжа (вариационной производной):

$$E_{y_\alpha} = \sum_{j=0}^{n} (-D)^j \frac{\partial}{\partial y_\alpha^{(j)}} \tag{4.61}$$

и имеют следующий вид (признак полной производной):

$$E_{y_\alpha}\left(\sum_{k=1}^{s} R_k F_k \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m). \tag{4.62}$$

Далее применим к равенству (4.62) правило Лейбница для вариационной производной, используя матрично-дифференциальный оператор производной Фреше (3.42):

$$(F')_{\alpha\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial F_\alpha}{\partial y_\beta^{(j)}} D^j, \tag{4.63}$$

а также сопряженный ему оператор (3.43):

$$(F')^{+}_{\alpha\beta}[R] = \sum_{j=0}^{\infty} (-D)^j \left[\frac{\partial F_\beta}{\partial y_\alpha^{(j)}} R \right]. \tag{4.64}$$

Получим определяющие уравнения для интегрирующего множителя вида (3.44):

$$\sum_{\beta=1}^{s} [(R')^{+}_{\alpha\beta}[F_\beta] + (F')^{+}_{\alpha\beta}[R_\beta]] = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m). \tag{4.65}$$

Рассмотрим подробнее случай одного уравнения (4.1) с одной неизвестной y. Тогда закон сохранения (4.59) имеет вид

$$D[P] = RF, \quad \text{где} \quad F = y^n - f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{4.66}$$

а определяющее уравнение для интегрирующего множителя

$$\sum_{j=0}^{n} (-D)^j \left[\frac{\partial R}{\partial y^{(j)}} F + \frac{\partial F}{\partial y^{(j)}} R \right] = 0. \tag{4.67}$$

Отсюда для уравнения (4.1) в нормальной форме порядков $n = 1, 2, \ldots$ с правой частью $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ получаем следующие определяющие уравнения (нижние буквенные индексы по-прежнему обозначают частные производные по этим переменным).

$n = 1$:

$$R_x + (fR)_y = 0. \tag{4.68}$$

$n = 2$:

$$2R_y + R_{xy'} + y'R_{yy'} + (fR)_{y'y'} = 0, \tag{4.69}$$

$$R_{xx} + 2y'R_{xy} + (y')^2 R_{yy} + (fR)_{y'x} + y'(fR)_{y'y} - (fR)_y = 0. \tag{4.70}$$

Явный вид определяющих уравнений для R при $n \geq 3$ в общем случае становится слишком громоздким. Поэтому ниже эти уравнения приведем в иной форме, применяя другую процедуру, когда отыскание интегрирующего множителя R и соответствующего интеграла P проводится параллельно.

Если для уравнения (4.1) порядка $n = 1$ известна однопараметрическая группа симметрий с характеристикой

$$\hat{\eta}(x, y, y') = \eta(x, y) - y'\xi(x, y) \equiv \eta(x, y) - f(x, y)\,\xi(x, y),$$

то обратная величина

$$R = \frac{1}{\hat{\eta}(x, y, y')} = \frac{1}{\eta(x, y) - f(x, y)\,\xi(x, y)} \tag{4.71}$$

является интегрирующим множителем для этого уравнения.

4.3.3. *Метод «зашнуровки» (бутстрап)*

Рассмотрим процедуру параллельного отыскания R и P для уравнения порядка $n = 2$.

Имеем

$$RF \equiv R(y'' - f) = D[P(x, y, y')] \equiv P_x + y'P_y + y''P_{y'}, \tag{4.72}$$

где f и R зависят лишь от x, y, y'. Обозначим через L_f дифференциальный оператор первого порядка, зависящий от f:

$$L_f(R) = R_x + y'R_y + (fR)_{y'}.$$

Расщепление равенства (4.72) по y'' с учетом условия совместности полученной системы дает

$$\begin{cases} P_{y'} = R, \\ P_y = -L_f(R), \\ P_x = y'L_f(R) - fR. \end{cases} \tag{4.73}$$

Эта система имеет следующие условия интегрируемости:

$$P_{y'y} = P_{yy'} \Leftrightarrow R_y + [L_f(R)]_{y'} = 0, \tag{4.74}$$

$$P_{xy} = P_{yx} \Leftrightarrow [L_f(R)]_x + y'[L_f(R)]_y - (fR)_y = 0, \tag{4.75}$$

$$P_{y'x} = P_{xy'} \Leftrightarrow L_f(R) = R_x + y'R_y + (fR)_{y'}. \tag{4.76}$$

Здесь условия (4.74) и (4.75) — это определяющие уравнения для интегрирующего множителя R, из которых исключен интеграл P, совпадающие с (4.69), (4.70), а условие (4.76) снова дает определение L_f.

Чтобы сделать возможным расщепление этих уравнений по y', необходимо предположить вид зависимости R от y': либо полагаем $R_{y'} = 0$, либо предполагаем линейную, квадратичную, полиномиальную или экспоненциальную и т.п. зависимость R от y' и проверяем совместимость этих анзацев с уравнениями (4.74), (4.75), либо считаем их условиями на f и классифицируем дифференциальные уравнения, допускающие интегрирующие множители данного вида.

Затем мы в общем случае не пытаемся продолжать решение системы (4.74), (4.75) для отыскания зависимости R от x, y, а обращаемся к системе (4.73). Из ее первого уравнения получаем вид зависимости интеграла P от y'. Подставляя это в два последние уравнения данной системы и расщепляя их по y', получаем ограничения на вид зависимости R от x, y. С этой информацией входим в систему (4.74), (4.75) и получаем из нее дальнейшие сведения о R, возвращаясь после этого к системе (4.73) и получая оттуда информацию об интеграле P. Подобные рекурсивные процедуры в физике обычно называют «зашнуровкой» (бутстрапом).

Для $n \geq 3$ рекурсивная процедура «зашнуровки» аналогична описанной выше.

4.3.4. Комбинирование симметрий и первых интегралов

Согласно обобщенной теореме Нетер из п.3.4.3 канонический оператор симметрии $\hat{X}_{\hat{\eta}}$ дифференциального уравнения, действуя на первый интеграл P этого уравнения, снова порождает его первый интеграл

$$\tilde{P} = \hat{X}_{\hat{\eta}}(P). \tag{4.77}$$

Рассмотрим на примере использование взаимодействия симметрий и интегралов.

Пример 4.5. Рассмотрим интегрирование уравнения

$$y^{IV} = Ay^{-5/3} \tag{4.78}$$

методами современного группового анализа.

Анализ классических симметрий этого уравнения дает трехпараметрическую группу Ли симметрий. Соответствующие инфинитезимальные операторы мы приводим как в канонической форме, выписывая явно лишь первое слагаемое, содержащее характеристику симметрии, так и в «геометрической» форме, как операторы точечных преобразований:

$$\hat{X}_1 = y' \frac{\partial}{\partial y} + \ldots \sim X_1 = -\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\hat{X}_2 = (3y - 2xy') \frac{\partial}{\partial y} + \ldots \sim X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\hat{X}_3 = (3xy - x^2 y') \frac{\partial}{\partial y} + \ldots \sim X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3xy \frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.79}$$

Эти операторы образуют алгебру Ли группы $SL(2, R)$:

$$[X_2, X_3] = 2X_3, \quad [X_2, X_1] = -2X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Эта алгебра не является разрешимой, так что теория Ли классических симметрий прогнозирует неинтегрируемость уравнения (4.78) в квадратурах.

Применим более общие методы современного группового анализа. Решая определяющие уравнения для интегралов, следующие из (4.67), найдем интегрирующие множители вида $R(x, y, y')$, не зависящие от y'', y''', и соответствующие первые интегралы:

$$P_1 = y'y''' - \frac{1}{2}(y'')^2 + \frac{3}{2}Ay^{-2/3}, \quad R_1 = y',$$

$$P_2 = 2xP_1 - 3yy''' + y'y'', \quad R_2 = 2xy' - 3y,$$

$$P_3 = x^2P_1 - xP_2 - 3yy'' + 2(y')^2, \quad R_3 = -x^2y' + 3xy. \tag{4.80}$$

Они образуют базис функционально независимых интегралов указанного класса. Вычислим действие операторов симметрии (4.79) на интегралы (4.80) и приведем результаты в табл.2, в которой на пересечении строки с номером i и столбца с номером j стоит выражение для $\hat{X}_i(P_j)$.

Таблица 2

	P_1	P_2	P_3
$\hat{X}_1$	0	$-2P_1$	P_2
$\hat{X}_2$	$-2P_1$	0	$2P_3$
$\hat{X}_3$	$-P_2$	$2P_3$	$-x^2P_2$

Получим уравнение первого порядка, исключая из системы трех уравнений третьего порядка

$$P_1 = C_1, \quad P_2 = C_2, \quad P_3 = C_3 \tag{4.81}$$

третью и вторую производные y''' и y''. Искомое уравнение первого порядка имеет вид

$$p(x)(y')^2 - 3p'(x)yy' + \frac{1}{2}p^2(x) + 9C_1y^2 - \frac{27}{2}Ay^{4/3} = 0, \tag{4.82}$$

где использованы уравнения (4.81) и обозначено: $p(x) = C_1x^2 - C_2x - C_3$.

Как проинтегрировать уравнение (4.82)? Трудность в том, что в случае дифференциального уравнения первого порядка невозможно расщепление определяющего уравнения для симметрий. Для простых уравнений, интегрируемых классическими методами, этого не требуется, так как очевидны частные решения последнего, дающие искомые симметрии.

Проверим, не сохранила ли комбинация интегралов (4.82) какую-либо симметрию исходного уравнения (4.78). Ищем оператор симметрии, допускаемый уравнением (4.82), в алгебре Ли исходного уравнения с базисом (4.79):

$$\hat{X} = \lambda_1 \hat{X}_1 + \lambda_2 \hat{X}_2 + \lambda_3 \hat{X}_3. \tag{4.83}$$

Применяя инфинитезимальный критерий инвариантности (4.5) уравнения (4.82) относительно оператора (4.83), находим один допускаемый оператор (приведем его в геометрической форме):

$$X = 2C_3 X_1 - C_2 X_2 + 2C_1 X_3 = 2p(x)\frac{\partial}{\partial x} + 3p'(x)y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4.84}$$

Проинтегрируем уравнение (4.82) методом канонических переменных с помощью симметрии (4.84). Новые переменные u, t ищем из уравнений (4.24), (4.25) (t и u поменялись ролями):

$$X(u) \equiv 2p(x)\frac{\partial u}{\partial x} + 3p'(x)y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{4.85}$$

$$X(t) = 2p(x)\frac{\partial t}{\partial x} + 3p'(x)y\frac{\partial t}{\partial y} = 1. \tag{4.86}$$

Ищем частное решение уравнения (4.86) вида $t = t(x)$. Получаем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2p(x)}, \qquad t = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{p(x)}. \tag{4.87}$$

Переменную u находим как интеграл характеристической системы:

$$\frac{dx}{2p(x)} = \frac{dy}{3p'(x)y}, \qquad yp^{-3/2}(x) = C, \tag{4.88}$$

т.е. $u = yp^{-3/2}(x)$ есть инвариант оператора (4.84).

Итак, в уравнение (4.82) подставляем (4.87), а также

$$y = up^{3/2}(x), \qquad y' = \frac{D_t[y]}{D_t[x]} = \frac{1}{2}p^{1/2}(x)(u_t + 3p'(x)u). \tag{4.89}$$

Уравнение принимает вид

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 9[4C_1C_3 + C_2^2)\,u^2 + 6Au^{4/3}] = 0. \tag{4.90}$$

Разделение переменных и интегрирование дает общий интеграл

$$\int \frac{du}{u\sqrt{2C_1C_3 + C_2^2 + 6Au^{-2/3}}} = \pm\frac{3}{2}\int \frac{dx}{C_1x^2 - C_2x - C_3} + C_4. \qquad (4.91)$$

Это равенство вместе с подстановкой (4.89):

$$y = u(C_1x^2 - C_2x - C_3)^{3/2}$$

дает общее решение исходного уравнения (4.78) в параметрической форме (с параметром u).

Решение этого уравнения с помощью дискретно-группового анализа рассматривалось В.Ф.Зайцевым [15].

5. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1. Симметрии эволюционных уравнений

5.1.1. Определяющие уравнения для симметрий

Рассмотрим системы эволюционных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x, u, u_1, \ldots, u_N) \Leftrightarrow \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = F_\alpha(t, x, u, u_1, \ldots, u_N), \qquad (5.1)$$

где одна из независимых переменных t является временем (параметром эволюции), а остальные аргументы $x = \{x^i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — пространственными координатами. Правые части $F = \{F_\alpha\}$ содержат производные от u только по x:

$$u = \{u^\alpha\}, \quad u_1 = \{u_i^\alpha\}, \quad u_2 = \{u_{ij}^\alpha\}, \ldots, (i = 1, .., n;\ \alpha = 1, \ldots, m),$$

причем нижние индексы соответствуют дифференцированиям по независимым переменным:

$$u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad u_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}, \ldots .$$

Область возможных приложений эволюционных уравнений включает в себя механику жидкости и газа, нелинейную теорию упругости и пластичности твердых тел, нелинейную акустику, теорию фазовых переходов, магнитную гидродинамику, теорию солитонов, нелинейные полевые теории и т.п. К этому классу уравнений принадлежат также гамильтоновы системы (континуальный аналог гамильтонова формализма), являющиеся наиболее естественным объектом для квантования.

Симметрии системы (5.1) порождаются уравнениями Ли:

$$u_\tau^\alpha = \eta_\alpha(t, x, u, u_1, \ldots, u_N), \tag{5.2}$$

где τ — параметр группы. Здесь выбрано каноническое представление (аргументы t, x инвариантны) и в обозначении характеристики симметрии $\eta = \{\eta_\alpha\}$ опущена «шляпка».

Система Ли (5.2) также имеет эволюционный вид (5.1) с «временем» τ. Поэтому условие инвариантности (3.27) системы (5.1) относительно группы Ли — Беклунда, порождаемой системой (5.2), совпадает с условием совместности этих систем — равенством перекрестных производных $u_{t\tau}^\alpha = u_{\tau t}^\alpha$, вычисленных с учетом уравнений (5.1), (5.2):

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + [\![\eta, F]\!] = 0, \tag{5.3}$$

где $\partial\eta/\partial t$ есть частная производная от η по t, входящему явно, а $[\![\eta, F]\!]$ обозначает коммутатор, определенный как

$$[\![\eta, F]\!] = \eta'[F] - F'[\eta]. \tag{5.4}$$

Здесь штрихом обозначена производная Фреше, определенная формулой (3.42) как матрично-дифференциальный оператор. В частности, если симметрия η не зависит явно от t, то определяющее уравнение (5.3) принимает вид

$$[\![\eta, F]\!] = 0. \tag{5.5}$$

Справедливо очевидное соотношение между производной Фреше и каноническим оператором Ли — Беклунда с характеристикой F:

$$\eta'[F] = \hat{X}_F(\eta), \tag{5.6}$$

в силу которого определяющее уравнение (5.3) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{X}_F - F'\right)[\eta] = 0. \tag{5.7}$$

В частности, если x и u одномерны, то имеем в формуле (5.7):

$$\hat{X}_F = F\frac{\partial}{\partial u} + (D[F])\frac{\partial}{\partial u_x} + (D^2[F])\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \ldots, \tag{5.8}$$

$$F' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial u_x^{(j)}} D^j, \tag{5.9}$$

где $u_x^{(j)} = \partial^j u / \partial x^j$.

Пример 5.1. Уравнение Кортевега — де Фриза (КДФ):

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x\,. \tag{5.10}$$

Здесь $F = u_{xxx} + 6uu_x$ и $F' = D^3 + 6uD + 6u_x$ согласно (5.9). Определяющее уравнение (5.7) для симметрий принимает вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \sum_{j=0}^{\infty} (D^j[u_{xxx} + 6uu_x])\frac{\partial\eta}{\partial u_x^{(j)}} - (D^3 + 6uD + 6u_x)\,[\eta] = 0. \tag{5.11}$$

Приведем некоторые его решения (характеристики симметрий):

$$\eta_1 = u_x\,, \quad \eta_3 = u_{xxx} + 6uu_x\,,$$

$$\eta_5 = u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_x u_{xx} + 30u^2 u_x\,. \tag{5.12}$$

Первые две симметрии соответствуют трансляциям по x и t. Третья симметрия есть начало бесконечной иерархии высших симметрий, указывающей на полную интегрируемость этого уравнения [16].

5.1.2. Размножение решений с помощью группы симметрий

Группа симметрий оставляет уравнение инвариантным и переводит любое его решение снова в решение. Если решение само не инвариантно относительно группы, то каждая однопараметрическая подгруппа порождает из него бесконечное семейство новых решений, зависящих от группового параметра τ.

Пример 5.2 (П.Олвер [5]). Одномерное уравнение теплопроводности:

$$u_t = u_{xx} \tag{5.13}$$

(коэффициент диффузии выбран равным единице).

Приведем инфинитезимальные операторы для классических симметрий этого уравнения, полученные решением определяющих уравнений (5.7):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = 4tx\frac{\partial}{\partial x} + 4t^2\frac{\partial}{\partial t} - (x^2+2t)\,u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{5.14}$$

Еще имеется бесконечномерная подалгебра, порождаемая операторами

$$X_\phi = \phi(x, t)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{5.15}$$

где $\phi(x, t)$ — произвольное гладкое решение уравнения теплопроводности (5.13).

Почти все решения (5.14) и (5.15) соответствуют очевидным симметриям уравнения (5.13). Симметрии X_1 и X_2 (инвариантность относительно сдвигов по x и t) означают, что это уравнение не зависит явно от x, t. Симметрии X_3 и X_ϕ отвечают линейной однородности уравнения: возможность умножения решения на любую константу и прибавления к решению любого другого решения. Оператор X_4 порождает очевидную симметрию относительно растяжений: $x \to \lambda x$, $t \to \lambda^2 t$ (анализ размерностей и подобия). Оператор X_5 порождает преобразования Галилея к движущейся системе отсчета, давая закон преобразования температуры u: $x \to x + vt$, $u \to u \exp\,[-v/2(x + vt/2)]$.

Лишь симметрия X_6 не является очевидной. Группу соответствующих конечных преобразований получаем, интегрируя уравнения Ли:

$$\frac{dx}{d\tau} = 4tx, \quad \frac{dt}{d\tau} = 4t^2, \quad \frac{du}{d\tau} = -(x^2+2t)\,u.$$

Обозначая чертой преобразованные переменные, получаем

$$\bar{x} = \frac{x}{1-4\tau t}, \quad \bar{t} = \frac{t}{1-4\tau t}, \quad \bar{u} = u\sqrt{1-4\tau t}\,\exp\left(\frac{-\tau x^2}{1-4\tau t}\right). \tag{5.16}$$

Найдем, как преобразуется решение $u = f(x, t)$ уравнения (5.13) под действием группы (5.16). Для этого подставим $f(x, t)$ вместо u в равенство

(5.16), определяющее u, и выразим x и t через $\bar{x}$ и $\bar{t}$ по формулам (5.16). Опуская черточки, получаем

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4\tau t}} \exp\left(\frac{-\tau x^2}{1+4\tau t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\tau t}, \frac{t}{1+4\tau t}\right). \tag{5.17}$$

Группа симметрии (5.16), оставляя уравнение (5.13) инвариантным, преобразует всякое его решение $f(x, t)$ по формуле (5.17) снова в его решение. Формулы размножения решений, порождаемые другими операторами симметрии (5.14), получаются аналогично с помощью конечных преобразований группы, указанных перед уравнением (5.16) и найденных интегрированием уравнений Ли.

Какое решение порождается преобразованием (5.17), примененным к тривиальному решению $u = c = \mathrm{const}$ уравнения (5.13)? Подстановка $u = c$ в формулу (5.17) дает

$$u = \frac{c}{\sqrt{1+4\tau t}} \exp\left(\frac{-\tau x^2}{1+4\tau t}\right). \tag{5.18}$$

Получилось *фундаментальное решение* уравнения теплопроводности (функция Грина задачи Коши), соответствующее выбору начальной точки $(x_0, t_0) = (0, -1/4\tau)$, если фиксировать нормировку $c = \sqrt{\tau/\pi}$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left(\frac{-x^2}{4(t-t_0}\right). \tag{5.19}$$

Итак, смысл неочевидной симметрии X_6 в том, что она порождает из тривиального решения функцию Грина, т.е. все решения (с любыми начальными данными)! Таким образом, в этом примере анализ симметрий дает исчерпывающую информацию о решениях уравнения и делает ненужным изучение традиционной его теории. Если вспомнить о том, что в университетском курсе уравнений математической физики на протяжении целого семестра изучаются всего три уравнения: волновое, теплопроводности и Лапласа (Пуассона), то становится очевидной необходимость реформирования преподавания дифференциальных уравнений на основе теории симметрий.

5.2. Инвариантные решения и линеаризация

5.2.1. Инвариантные решения солитонных уравнений

Группы симметрии оставляют уравнения инвариантными и, следовательно, преобразуют решения снова в решения. *Инвариантными решениями* называются такие, которые не преобразуются группой симметрии или какой-либо ее подгруппой (неподвижные точки преобразований). Обычно группы инвариантности решений ищут среди подгрупп группы симметрии дифференциального уравнения. Очевидно, что это ограничение не обязательно: группа преобразований может оставлять решение инвариантным, не обладая свойством отображать любое решение снова в решение. Отыскание таких «условных симметрий», оставляющих инвариантными не дифференциальные уравнения, а только их некоторые частные интегральные многообразия, является перспективным направлением исследований [17]. Его комбинирование с подходящим вариантом метода инвариантного погружения [18] должно позволить применить методы и алгоритмы группового анализа для регулярного отыскания таких специфических симметрий, как ренормгруппа в квантовой теории поля [7]. Однако мы ограничимся здесь инвариантными решениями в их традиционном понимании.

Пусть X_η — канонический оператор симметрии уравнений (5.1) с характеристикой η. *Условием инвариантности решения* относительно этой группы симметрий является его независимость от группового параметра τ: $u_\tau^\alpha = 0$, т.е. в силу уравнений Ли (5.2) *равенство нулю характеристики симметрии*:

$$\eta_\alpha(t, x, u, u_1, \ldots, u_N) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, m). \tag{5.20}$$

Итак, условиями инвариантности решения являются «дифференциальные связи» (5.20) — дополнительные дифференциальные уравнения, присоединяемые к исходной системе (5.1). Получается переопределенная система, имеющая нетривиальные условия совместности исходных и добавленных уравнений. Ее интегрирование значительно проще, чем решение системы (5.1), в силу большего числа уравнений. Обычно уравнения (5.1) и (5.20) совместны, т.е. если уравнения инвариантны относительно группы, то существуют и инвариантные решения.

Первыми известными инвариантными решениями были автомодельные решения в газодинамике, полученные с помощью теории размерности и подобия [19], которая, как показал Л.В.Овсянников [3], вытекает из группового анализа, если группа симметрии есть группа растяжений. Позднее оказалось, что инвариантные решения описывают физически интересные режимы и для многих других приложений.

Пример 5.3. Точные решения уравнения КДФ. Уравнение КДФ (5.10) является самым известным уравнением теории солитонов. Найдем его инвариантные решения относительно группы трансляций в пространстве независимых переменных:

$$\bar{x} = x + c\tau, \quad \bar{t} = t + \tau, \quad \bar{u} = u \quad (c = \text{const})$$

с оператором $X = \partial/\partial t + c\partial/\partial x$. Условие инвариантности решений имеет вид

$$\eta \equiv u_{xxx} + 6uu_x + cu_x = 0. \tag{5.21}$$

Оно совместно с исходным уравнением КДФ, если

$$u_t + cu_x = 0 \Leftrightarrow u = f(x - ct),$$

т.е. искомое решение есть бегущая волна (со скоростью c). Уравнение (5.21) интегрируется, и полученное уравнение

$$u_{xx} + 3u^2 + cu = C_1$$

имеет интегрирующий множитель u_x и первый интеграл:

$$\frac{1}{2}u_x^2 = -\left(u^3 + \frac{c}{2}u^2\right) + C_1 u + C_2.$$

Это уравнение интегрируется в квадратурах и его общее решение выражается через эллиптические функции Вейерштрасса $\mathcal{P}(x)$. Итак, $u = \mathcal{P}(x - ct)$ и инвариантное решение есть известная кноидальная волна. Быстро убывающее на бесконечности решение получается отсюда при $C_1 = C_2 = 0$:

$$u = \frac{c}{2\mathrm{ch}^2\,[\sqrt{c}/2(x - ct) + \delta]}$$

и описывает солитон.

Решение уравнения КДФ, инвариантное относительно высшей симметрии с характеристикой, являющейся линейной комбинацией симметрий (5.12), есть двухзонное решение Б.А.Дубровина и С.П.Новикова [20], а в вырожденном случае — двухсолитонное решение. Известно, что все конечнозонные и, в частности, многосолитонные решения уравнения КДФ являются инвариантными относительно его высших симметрий [16].

5.2.2. Линеаризация систем гидродинамического типа

Системами гидродинамического типа называются системы квазилинейных эволюционных уравнений первого порядка:

$$u_t^i = v_i(u)\, u_x^i \quad (u = 1, 2, \dots, n) \tag{5.22}$$

с диагональной $(n \times n)$-матрицей $V(u) = \mathrm{diag}\,(v_i(u))$. Здесь и далее не предполагается суммирования по повторяющимся индексам. Здесь $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$, u^i — инварианты Римана.

Гидродинамическими симметриями называются такие, характеристики которых (линейно) зависят от первых производных от u по x, так что их уравнения Ли также являются системами гидродинамического типа:

$$u^i_\tau = W_i(u, x, t)\, u^i_x \quad (i = 1, 2, .., n), \tag{5.23}$$

где допускается также явная зависимость от x, t.

Наложим на систему (5.22) условие

$$v_i(u) \neq v_j(u) \quad (i \neq j). \tag{5.24}$$

Определим коэффициенты связности [10]:

$$\Gamma^i_{ij}(u) = \Gamma^j_{ji}(u) = v_{i,u^j}(u) / (v_j - v_i) \quad (i \neq j). \tag{5.25}$$

Определение 5.1. *Диагональная система гидродинамического типа (5.22) называется* ***полугамильтоновой,*** *если ее коэффициенты $v_i(u)$ удовлетворяют условию (5.24) и «условиям Царева» [10]:*

$$[v_{i,u^j}/(v_j - v_i)]_{u^k} = [v_{i,u^k}/(v_k - v_i)]_{u^j} \quad (i \neq j \neq k \neq i). \tag{5.26}$$

Теорема 5.1 (С.П.Царев [10]). *Диагональная система (5.22), удовлетворяющая условию (5.24), обладает бесконечным множеством гидродинамических симмётрий, не зависящих явно от x, t:*

$$u^i_\tau = w_i(u)\, u^i_x \quad (i = 1, 2, ,..., n), \tag{5.27}$$

имеющим функциональный произвол, если и только если система (5.22) полугамильтонова, т.е. условие (5.26) также должно выполняться. Эти симметрии порождаются уравнениями Ли (5.27) с коэффициентами $w_i(u)$, составляющими произвольное гладкое решение линейной системы:

$$w_{i,u^j} = \Gamma^i_{ij}(w_j - w_i) \quad (i \neq j). \tag{5.28}$$

Теорема 5.2 (М.Б.Шефтель [11]). *Любая полугамильтонова система (5.22) обладает бесконечным множеством явно зависящих от x, t гидродинамических симметрий с тем же функциональным произволом, что и в теореме 5.1. Эти симметрии порождаются уравнениями Ли:*

$$u^i_\tau = [w_i(u) + c(x + tv_i(u))]\, u^i_x \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{5.29}$$

с коэффициентами $w_i(u)$, составляющими произвольное гладкое решение линейной системы (5.28), и произвольной константой с.

Рассмотрим теперь явно зависящие от x, t гидродинамические симметрии (5.29) с $c = -1$. Условия инвариантности решений полугамильтоновой системы (5.22) относительно этих симметрий с $u_x \neq 0$ имеют вид

$$w_i(u) = tv_i(u) + x \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{5.30}$$

Теорема 5.3 (С.П.Царев [10]). *Пусть функции $w_i(u)$ в равенствах (5.30) составляют произвольное гладкое решение линейной системы (5.28). Тогда любое гладкое решение $u^i(x, t)$ системы (5.30) также является решением полугамильтоновой системы (5.22). Наоборот, любое гладкое решение $u^i(x, t)$ системы (5.22) может быть локально представлено как решение системы (5.30) в окрестности такой точки (x_0, t_0), в которой условие $u^i_x(x_0, t_0) \neq 0$ удовлетворяется для каждого значения $i = 1, 2, ..., n$.*

Замечание 5.1. *Равенства (5.30) определяют линеаризующее преобразование для полугамильтоновой системы (5.22): решение нелинейной системы (5.22) сводится к решению линейной системы (5.28) для функций $w_i(u)$. Оно обобщает классическое преобразование годографа для многокомпонентных систем и называется обобщенным преобразованием годографа.*

Мы показали здесь теоретико-групповое происхождение этого линеаризующего преобразования: любое несингулярное решение системы (5.22) является ее инвариантным решением относительно симметрий (5.29). Степень произвола множеств этих симметрий и соответствующих инвариантных решений такая же, как для множества решений системы (5.22): n произвольных функций $c_i(u^i)$ одной переменной. Следовательно, чтобы получить явные формулы для инвариантных решений нелинейной системы (5.22) остается решить линейную систему (5.28) с переменными коэффициентами.

5.3. Операторы рекурсии

5.3.1. Операторы рекурсии и высшие симметрии

Определение 5.2. *Оператор R называется оператором рекурсии уравнений (5.1), если и только если он отображает симметрии уравнений (5.1) снова в симметрии этих уравнений [5,9,12].*

Теорема 5.4. *Для того чтобы оператор R был оператором рекурсии уравнений (5.1), необходимо и достаточно, чтобы R коммутировал с опе-*

ратором определяющего уравнения (5.7) для симметрий на многообразии решений уравнения (5.7):

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\hat{X}_F-F'\right), R\right]=0 \Leftrightarrow R_t+R'[F]-[F', R]=0, \qquad (5.31)$$

где нуль в правой части уравнения (5.31) понимается как оператор, который аннулирует любое решение η *уравнения (5.7).*

Уравнение (5.31) часто понимается как равенство оператора нулю. Тогда уравнение (5.31) является достаточным условием того, чтобы R являлся оператором рекурсии.

Пример 5.4. Оператор рекурсии для уравнения КДФ [16]. Для уравнения КДФ (5.10) оператор рекурсии дается формулой:

$$R=D^2+4u+2u_x D^{-1}. \qquad (5.32)$$

Здесь оператор D^{-1} определен как $(D^{-1}f)(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi$.

Оператор рекурсии (5.32) порождает бесконечную иерархию высших симметрий уравнения КДФ, действуя многократно на «затравочную» симметрию с характеристикой $\eta_1=u_x$, соответствующую трансляционной инвариантности этого уравнения по x. Эти симметрии порождаются уравнениями Ли:

$$u_\tau=R^n u_x \quad (n=1, 2, \ldots). \qquad (5.33)$$

Например, для симметрий (5.12) имеем

$$\eta_3=Ru_x, \quad \eta_5=R^2u_x.$$

Уравнения (5.33) с $n\geq 2$, в которых параметр τ понимается как время t, называются высшими уравнениями КДФ и составляют бесконечную иерархию уравнений, интегрируемых с помощью одной и той же спектральной задачи методом обратной задачи рассеяния. Причем оператор рекурсии оказывается тесно связанным с L-оператором метода обратной задачи, а коммутационное соотношение (5.31) определяет $L-A$-пару [16]. Все известные точные решения теории солитонов могут быть получены без обращения к этому методу как инвариантные решения относительно высших симметрий, порождаемых оператором рекурсии.

5.3.2. Операторы рекурсии и генерация точных решений

Пусть система (5.1) обладает оператором рекурсии, порождающим бесконечное множество ее высших симметрий. Им соответствуют группы преобразований Ли — Беклунда, которые нельзя использовать для размножения решений, как это было возможно для классических лиевских симметрий. В этом случае для размножения решений можно использовать оператор рекурсии.

Рассмотрим эту процедуру для полугамильтоновых систем гидродинамического типа (5.22). Подчиним эти системы, помимо условия (5.26), еще условию существования матрично-дифференциального оператора рекурсии первого порядка:

$$S_{i,u^j} = \Gamma^i_{ij}(S_j - S_i) \quad (j \neq i), \tag{5.34}$$

где функции $S_i(u)$ определены так:

$$S_i(u) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{ik}(u)\, c_k(u^k) + d_i(u^i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В.М.Тешуков показал [21], что оператор рекурсии первого порядка вида

$$R = (AD + B)\, U_x^{-1}, \tag{5.35}$$

где $A(u)$, $B(u, u_x)$ — $(n \times n)$-матрицы, $U_x = \begin{pmatrix} u_x^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_x^n \end{pmatrix}$, существует при условии, что найдутся $2n$ функций одного аргумента $c_i(u^i)$, $d_i(u^i)$, удовлетворяющих условию (5.34). Гидродинамические симметрии (5.27), (5.28) образуют инвариантное подпространство для этого оператора рекурсии, и его действие порождает рекурсию гидродинамических симметрий:

$$\overline{w}_i(u) = (\hat{R}[w])_i \overset{\text{def}}{=} c_i(u^i)\, w_{i,u^i}(u) + d_i(u^i)\, w_i(u) + \sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{ik}(u)\, c_k(u^k)\, w_k(u). \tag{5.36}$$

Здесь через $\hat{R}$ обозначено сужение оператора рекурсии на подпространство гидродинамических симметрий.

Итак, получаем следующий результат.

Теорема 5.5. *Для любого решения $\{w_i(u)\}$ линейной системы (5.28) функции $\{\overline{w}_i(u)\}$ также составляют решение этой системы, т.е. формула (5.36) дает рекурсию решений системы (5.28), если и только если удовлетворяются условия (5.34).*

Следствие 5.1. *Преобразование (5.36) в совокупности с линеаризующим преобразованием (5.30) порождает рекурсию решений нелинейной системы (5.22):*

$$\overline{w}_i(u) \equiv (\hat{R}[w])_i = tv_i(u) + x \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{5.37}$$

Линейная система (5.28) имеет два тривиальных решения:

$$w_i = 1, \quad w_i = v_i(u) \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.38}$$

служащих затравочными элементами, из которых оператор рекурсии порождает две бесконечные серии нетривиальных решений:

$$(\hat{R}_1^N[1])_i = tv_i(u) + x, \quad (\hat{R}_1^N[v])_i = tv_i(u) + x. \tag{5.39}$$

Например, первая серия из (5.39) при $N = 1$ дает следующее решение системы (5.22) в виде неявной функции:

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{ik}(u)\, c_k(u^k) + d_i(u^i) = tv_i(u) + x, \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{5.40}$$

где нужно подставить конкретные функции $c_i(u^i)$, $d_i(u^i)$, удовлетворяющие условиям (5.34). Чтобы ослабить эти довольно жесткие условия, в работе [22] был построен оператор рекурсии второго порядка, существующий при менее ограничительных условиях.

Общая теория операторов рекурсии, ее связь с гамильтоновым формализмом, преобразованиями Беклунда и методом обратной задачи рассеяния, а также методы построения операторов рекурсии для систем гидродинамического типа были развиты в работах автора [23—25].

Мощь методов группового анализа дифференциальных уравнений была продемонстрирована недавно для уравнений Эйнштейна теории гравитации: были построены новые гравитационные инстантоны после 18 лет отсутствия прогресса в этой области [26].

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда и правительства России (грант R5B300).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lie S.** — Arch. Math., 1883, v.VIII, p.187; 1884, v.IX, p.431.
2. **Lie S.** — Gesammelte Abhandlungen, bd. 1—6, Leipzig, B.G.Teubner, 1922—1937.
3. **Овсянников Л.В.** — Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: СО АН СССР, 1962.

4. **Овсянников Л.В.** — Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Олвер П.** — Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
6. **Биркгоф Г.** — Гидродинамика. М.: ИЛ, 1963.
7. **Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.** — ДАН СССР, 1955, т.103, с.203; ДАН СССР, 1955, т.103, с.391.
8. **Anderson R.L., Ibragimov N.H.** — Lie-Backlund Transformations in Applications. Philadelphia, SIAM, 1979.
9. **Ибрагимов Н.Х.** — Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. **Царев С.П.** — Изв. АН СССР, сер. мат., 1990, т.54, с.1048.
11. **Шефтель М.Б.** — Дифференциальные уравнения, 1993, т.29, с.1782.
12. **Fuchssteiner B., Fokas A.S.** — Physica D, 1981, v.4, p.47.
13. **Нетер Э.** — Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959.
14. **Ибрагимов Н.Х.** — УМН, 1992, т.47, с.83.
15. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** — Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1993.
16. **Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.** — ДАН СССР, 1979, т.244, с.57.
17. **Воробьев Е.М.** — ДАН СССР, 1986, т.287, с.536.
18. **Kovalev V.F., Krivenko S.V., Pustovalov V.V.** — In: Renormalization Group'91, Proc. of 1991 Dubna Conf., Eds. D.V.Shirkov and V.B.Priezzhev, WS, Singapore, 1992, pp.300—314.
19. **Седов Л.И.** —Методы подобия и размерности в механике. М.: ГИТТЛ, 1957.
20. **Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.** — Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
21. **Тешуков В.М.** — Препринт ЛИИАН, Л., №106, 1989.
22. **Шефтель М.Б.** —Дифференциальные уравнения, 1994, т.30, с.444.
23. **Шефтель М.Б.** — Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. Томск: изд. Томского гос. университета, 1994.
24. **Sheftel' M.B.** — In: CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.3, «New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods», Ch.4, p.91-137, N.H.Ibragimov ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1995.
25. **Sheftel' M.B.** — In: CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol.3, «New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods», Ch.7, p.169—189, N.H.Ibragimov ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 1995.
26. **Nutku Y., Sheftel' M.B., Malykh A.A.** — Classical and Quantum Gravity. Cambridge, UK, 1996 (to be published).