

КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Л.И. Меньшиков

Российский научный центр «Курчатовский институт», Москва
Поморский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Архангельск

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	946
УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ	950
МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ФАЗ В КМС	954
СЛУЧАЙ $l \ll L \ll \lambda$	955
СЛУЧАЙ $\lambda \ll l \ll L$	963
СЛУЧАЙ $l \ll \lambda \ll L$	972
ЗАТУХАНИЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЛН	981
ПРИЛОЖЕНИЕ КМС К ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ	983
НЕЯСНЫЕ ВОПРОСЫ	991
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Теория Дикке	992
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Корреляции в системе двухуровневых атомов	996
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Нелинейный механизм фазировки	997
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Прямой расчет $\tau_{\alpha\beta}$	1002
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Доказательство формулы (48)	1003
ПРИЛОЖЕНИЕ 6 Волны в замагниченной плазме с $T_{\perp} = 0, T_{\parallel} = T$	1004
ПРИЛОЖЕНИЕ 7 Прохождение медленной циклотронной волны через границу плазмы	1006
ПРИЛОЖЕНИЕ 8 Диффузионный режим переноса когерентного циклотронного излучения в неоднородной плазме	1007
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1009

КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Л.И. Меньшиков

Российский научный центр «Курчатовский институт», Москва
Поморский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Архангельск

Рассчитано излучение, возникающее в среде, состоящей из заряженных классических осцилляторов. Показано, что оно имеет существенно коллективный характер. Обсуждается механизм возникновения когерентного излучения. Указывается на существенную роль экранировки, которая резко меняет характер сверхизлучения. В частности, в известном предельном случае Дикке вследствие диполь-дипольного взаимодействия между атомами среда переходит в своеобразное метастабильное неизлучающее состояние с нулевым суммарным дипольным моментом. В этом случае активная среда состоит из отдельных локализованных возбуждений. Показано, что в замагниченной плазме возникает коллективное циклотронное излучение, что может объяснить наблюдаемый в экспериментах аномально высокий перенос энергии поперек магнитного поля.

The radiance generated in the substance composed of charged classical oscillators is calculated. It is proved that it has substantially collective character. The mechanism of coherent radiation generation is discussed. It is stressed the important role of screening which changes the character of radiance sharply. In particular, it is shown that in the well-known limiting Dicke case the substance transits to metastable nonradiating state as a result of dipole-dipole interaction between atoms. In this state the total dipole moment is zero. Such state consists of some localized excitations. It is also pointed that the collective cyclotron radiation arises in magnetized plasma. That could be the possible explanation of experimentally observed anomalous energy transport in the direction transverse to magnetic field.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Хорошо известно, что время спонтанного излучательного перехода атома τ_s существенно зависит от окружения, в котором находится атом. В качестве одного из примеров рассмотрим возбужденный атом, находящийся вблизи металлической поверхности на расстоянии, малом по сравнению с длиной излучаемой волны λ .

Процесс девозбуждения атома описывается вектором дипольного момента перехода \mathbf{d}_{21} , представляющим собой матричный элемент оператора

дипольного момента атома, вычисленный между верхним и нижним состояниями. При строгом расчете τ_s электромагнитное поле следует проквантовать по модам, удовлетворяющим стандартным граничным условиям на поверхности проводника. Для понимания качественной стороны дела можно упростить расчет и по принципу соответствия Бора заменить атом на классический диполь $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega_0 t)$.

По методу изображения электромагнитное поле будет суперпозицией полей, созданных двумя диполями: $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}$ и дипольным моментом изображения $\mathbf{d}_2 = -\mathbf{d} + 2\mathbf{n}(\mathbf{nd})$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к металлической поверхности. Интенсивность дипольного излучения будет, очевидно, равна

$$I = \frac{1}{2} \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{D}})^2 = \frac{4}{3c^3} (\mathbf{nd})^2,$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$, а дополнительный множитель $1/2$ соответствует тому, что поле занимает лишь половину пространства. Следовательно, при $\mathbf{d} \parallel \mathbf{n}$ $I = 2I_0$, $\tau_s = \tau_0/2$, а при $\mathbf{d} \perp \mathbf{n}$ $I = 0$, $\tau_s = \infty$, где $I_0 = 2(\dot{\mathbf{d}})^2/3c^3$ — интенсивность излучения уединенного диполя, τ_0 — время жизни уединенного возбужденного атома.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из $N \gg 1$ диполей ($a = 1, 2, \dots, N$), расположенных в пространственной области размером $L \ll \lambda$ и колеблющихся с одинаковой частотой. Интенсивность излучения будет равна

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\sum_{a=1}^N \ddot{\mathbf{d}}_a(t) \right)^2,$$

где $\mathbf{d}_a(t) = \mathbf{d}_a \cos(\omega_0 t + \varphi_a)$, φ_a — фазы колебаний диполей.

Если фазы некоррелированы, то $I \propto N$, $\tau_s = \tau_0$. При полностью коррелированных фазах ($\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N$) $I \propto N^2$, $\tau_s = \tau_0/N$. Это и есть явление сверхизлучения — коллективное спонтанное излучение среды, содержащей возбужденные (инвертированные) атомы. Хотя изложенный классический вариант сверхизлучения уже давно применялся на практике, например, при конструировании радиопередающих антенн, указание Дикке [1] на аналогичное квантовое явление для атомов было встречено с большим энтузиазмом, что объясняется возможностью создания на этом принципе новых источников когерентного излучения оптического и других диапазонов.

Работа [1], суть которой кратко изложена в приложении 1, породила целое направление исследований — кооперативные явления в оптике,

основные результаты и современное состояние которого детально отражены в [2, 3]. В теории этих явлений, однако, до сих пор остается много неясного. Сверхизлучение можно подразделить на два явления: возникновение корреляции фаз отдельных атомов $\langle 1 \rangle$; собственно сверхизлучение, то есть генерация интенсивного и короткого импульса когерентного излучения $\langle 2 \rangle$. В работе [1] рассмотрена система малых размеров ($L \ll \lambda$), состоящая из двухуровневых атомов, которые при $t = 0$ находятся в верхнем состоянии. Такое состояние образуется, например, при прохождении через систему определенным образом модулированного резонансного ($\omega = \omega_0$) лазерного импульса (так называемый π -импульс). Такое состояние соответствует полностью коррелированным атомам, и поэтому вопрос $\langle 1 \rangle$ о механизме возникновения корреляций в работе [1] попросту не ставился. Более того, в модели Дикке такой механизм отсутствует (см. приложение 2). Таким образом, суть работы [1] состоит только в механизме $\langle 2 \rangle$ собственно сверхизлучения. Проблема возникновения фазовых корреляций не решена до сих пор, хотя практически во всех работах по сверхизлучению содержатся утверждения типа: «...благодаря общему полю излучения между атомами возникают фазовые корреляции...». После этих утверждений далее, как правило, следуют вычисления, основанные на предположении об изначально существующей фазовой корреляции, как и в [1].

Между тем в ряде приложений, например, в физике плазмы (см. разд.8), вопрос о механизме фазовых корреляций является основным.

В работе [4], положившей начало целому направлению в физике и технике и приведшей к созданию гиротронов и мазеров на циклотронном резонансе, указано на нелинейный механизм автофазировки, в результате действия которого устанавливается корреляция фаз и возникает сверхизлучение в системе классических осцилляторов [5—9].

В данной работе показано, что сверхизлучение возникает и в системе линейных осцилляторов. Однако диполь-дипольное взаимодействие осцилляторов приводит к образованию неизлучающего метастабильного состояния. Это явление далее будем называть экранировкой.

Нелинейные, например, релятивистские эффекты, ведущие к фазировке атомов (по терминологии [4—9] — автофазировке), в рассматриваемом здесь нерелятивистском случае становятся существенными уже значительно позже образования метастабильного состояния (см. приложение 3). Эти нелинейные эффекты требуют специального и детального исследования и в данной работе не рассматриваются.

В рамках развитой здесь линейной теории удастся исправить существенное противоречие работы [1], отмеченное в [2], которое состоит в неоправданном пренебрежении диполь-дипольным взаимодействием между атомами по сравнению с силой радиационного трения. Действительно, электрическое поле, вызывающее радиационное затухание колебаний

диполей $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{D}/3c^3$, определяется суммарным дипольным моментом системы $\mathbf{D} = \sum_a \mathbf{d}_a(t)$ и по порядку величины равно

$$E_1 \sim \omega_0^3 N d_a / c^3 \sim N d_a / \lambda^3.$$

Локальное электрическое поле, созданное диполями, порядка $E_2 \sim d_a / l^3 \sim n d_a$, где $l = n^{-1/3}$ — межатомное расстояние, n — концентрация атомов в системе (см^{-3}).

Следовательно,

$$E_1 / E_2 \sim (L / \lambda)^3 \gg 1,$$

откуда и видна противоречивость [1]. Как будет показано ниже, учет диполь-дипольного взаимодействия радикально меняет ситуацию. Автору не известны работы, в которых аккуратно учтено это взаимодействие, и поэтому ниже будут приведены некоторые подробности вычислений, опубликованных в [26].

Основные результаты по теории сверхизлучения получены на основе полуклассической модели [2], в которой рассматриваются двухуровневые атомы, описываемые квантово-механическими матрицами плотности 2×2 , и созданное этими атомами электромагнитное поле, описываемое уравнениями Максвелла, то есть классически. Уравнения полуклассической модели нелинейны, и поэтому на их основе весьма сложно разобраться в указанных выше неясных вопросах. В данной работе рассмотрена полностью классическая модель сверхизлучения (КМС), в которой атомы заменены классическими трехмерными изотропными заряженными осцилляторами. Уравнения этой модели достаточно просты и поэтому позволяют выяснить многое.

В данной задаче имеются три характерных размера λ , L и l . Ниже рассматривается представляющий наибольший интерес случай $N \gg 1$, поэтому всегда $l \ll L$ и имеются лишь три возможности:

$$\begin{aligned} (a) \quad & l \ll L \ll \lambda; \\ (б) \quad & \lambda \ll l \ll L; \\ (в) \quad & l \ll \lambda \ll L. \end{aligned} \tag{1}$$

В разд.2 получены уравнения КМС. Дипольный механизм формирования корреляций фаз отдельных атомов, который удается установить на основе КМС, рассмотрен в разд.3. В разд.4 рассчитан случай (а) из (1), соответствующий модели Дикке [1]. Показано, что в результате диполь-дипольного взаимодействия возникает экранировка возбуждения и образуются локализованные метастабильные состояния, поэтому возбужденная

среда перестает излучать. Аналогичный эффект оказывается существенным и в случае (б) (разд.5), который соответствует известным опытам по генерации когерентного рентгеновского излучения на рекомбинационных переходах в проволочках, быстро переводимых в плазменное состояние. Случай (в) (разд.6) имеет место в замагниченной плазме токамаков и соответствует распространению по плазме циклотронных когерентных волн. По-видимому, эти волны значительно увеличивают потери энергии плазмой.

Далее везде мы пренебрегаем некогерентной частью излучения среды, предполагая, что выполняются условия, при которых интенсивность этой части мала по сравнению с интенсивностью когерентной. Некогерентное излучение возбужденной среды хорошо изучено, описывается уравнением Бибермана — Холстейна (см., например, [24]). Так же, как и когерентное излучение, оно является резонансным.

2. УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ

Будем считать, что в точках с координатами \mathbf{r}_a ($a = 1, \dots, N$) закреплены пружинки и сосредоточены компенсирующие заряды e . На концах пружинок закреплены точечные массы m , несущие заряд e . Координаты a -го заряда, отсчитанные от точки закрепления \mathbf{r}_a , равны ξ_a . Потенциальную энергию пружинки будем считать гармонической: $U_a = m\omega_0^2 \xi_a^2 / 2$. Таким образом, мы не учитываем пока движение атомов и связанное с ним доплеровское уширение спектральных линий. Такое уширение мало по сравнению с диполь-дипольным и естественным уширением. По поводу последнего заметим, что вследствие кратковременности процесса сверхизлучения оно значительно превосходит обычное естественное уширение для уединенного атома [1]. В случае (в) (1) доплеровское уширение строго учитывается и оказывается существенным, что связано с большими размерами плазмы. Движение зарядов считаем нерелятивистским, что позволяет пренебречь влиянием магнитного поля и записать уравнения движения в виде

$$m\ddot{\xi}_a + m\omega_0^2 \xi_a = e\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t); \quad (2)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e \sum_{b=1}^N \nabla_r \times \left[\nabla_r \times \frac{\xi_b(t - R_b/c)}{R_b} \right], \quad (3)$$

где $\mathbf{R}_b = \mathbf{r} - \mathbf{r}_b$. Выражение для электрического поля диполей взято из [10].

При подстановке (3) в (2) возникает бесконечное слагаемое в $\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t)$ с $b = a$. Для корректного расчета этого слагаемого следует «размазать» заряды

$+e$ и $-e$ по областям, имеющим конечные размеры. После этого следует разложить $\xi_a(t - R_a/c)$ по степеням $1/c$ до членов порядка $1/c^3$ включительно. Член нулевого порядка дает собственное поле зарядов $-e$ и $+e$. Очевидно, поле заряда $+e$ не может его же и ускорить, поэтому соответствующее слагаемое равно нулю. Поле заряда $-e$ создает силу, действующую на заряд $+e$. Эту силу следует включить в коэффициент жесткости пружинки и формально опустить, считая гармонический потенциал уже окончательным суммарным потенциалом, действующим на заряд $-e$. Таким образом слагаемое нулевого порядка приводит к перенормировке коэффициента жесткости пружинки. Слагаемое первого порядка по $1/c$, как это видно из (3), равно нулю. Слагаемое второго порядка в $\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t)$ приводится к виду $-\frac{4}{3e} m_f \ddot{\xi}_a$ и должно быть включено в первый член в левой части (2).

Величина $m_f = \epsilon_f/c^2$, где ϵ_f — энергия электромагнитного облака, окружающего диполь, представляет собой массу этого облака и поэтому должна быть включена в массу m (перенормировка массы). Множитель $4/3$ в свое время вызвал оживленные дискуссии, известные как «парадокс $4/3$ ». Давно найденное А. Пуанкаре и другими авторами (см., например, [11]) разрешение этого парадокса состоит в том, что следует учесть силы, не описываемые классической электродинамикой (химическая связь, ван-дер-ваальсово взаимодействие и т.д.), которые препятствуют взаимному отталкиванию отдельных частей заряда.

Наконец, слагаемое порядка $1/c^3$ равно $\mathbf{E}_f = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}_a = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\xi}_a = - (2e\omega_0^2/3c^3) \dot{\xi}_a$. Это слагаемое соответствует радиационному трению, которое вызывает затухание колебаний диполя в уединенном атоме. Отметим, что в коллективе атомов к такому затуханию приводят и слагаемые с $b \neq a$.

Приближение $\ddot{\xi}_a \approx -\omega_0^2 \dot{\xi}_a$ позволяет избежать неправильных решений, соответствующих самоускоряющемуся заряду [10]. Такие решения появляются вследствие приближенного характера принятой процедуры исключения переменных электромагнитного поля из уравнений движения (пренебрежение слагаемыми порядка $1/c^4$ и выше). Таким образом, система (2) принимает вид

$$\ddot{\xi}_a + \omega_0^2 \xi_a + \gamma \dot{\xi}_a = \frac{e^2}{m} \sum_{b \neq a} \nabla_a \times \left(\nabla_a \times \frac{\xi_b(t_{ab})}{r_{ab}} \right), \quad (4)$$

где $\nabla_a = \partial/\partial \mathbf{r}_a$, $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, $t_{ab} = t - r_{ab}/c$, $\gamma = \frac{2r_0\omega_0^2}{3c}$, $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$.

Далее будем считать, что $\gamma \ll \omega_0$ и, более того, $\gamma N \ll \omega_0$, что соответствует наиболее интересным в практическом отношении случаям. Отметим, во избежание недоразумений, что под γN здесь подразумевается $1/t_s$ — величина, обратная характерному времени сверхизлучения t_s . Следует иметь в виду, что в каждом из трех случаев (1) выражения для этого времени получаются различными.

Систему (4) следует решить при начальном условии:

$$t = 0, \quad \xi_a = \eta_a \cos \varphi_a, \quad \dot{\xi}_a = -\omega_0 \eta_a \sin \varphi_a, \quad (5)$$

где η_a, φ_a — начальные амплитуды и фазы осцилляторов. Поскольку мы интересуемся решением при $t > 0$, можно считать, что при $t < 0$ $\xi_a = 0$. Начальная энергия a -го осциллятора равна

$$t = 0, \quad E_0^{(a)} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_a^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \xi_a^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \eta_a^2. \quad (6)$$

В случае уединенного атома правая часть в (4) равна нулю:

$$\xi_a(t) = \eta_a e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_a), \quad E_a(t) = E_0^{(a)} e^{-\gamma t},$$

откуда видно, что при сравнении классических и квантовых результатов следует принять для уединенного атома $t_s = 1/\gamma$.

Из (3) следует, что при $r \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \frac{e}{rc^2} \mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} \times \sum_b \ddot{\xi}_b \left(t' + \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{r}_b \right) \right) \right], \quad (7)$$

где $t' = t - \frac{r}{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, \mathbf{r} — вектор, проведенный из начала координат (расположенного в произвольном месте) к точке наблюдения.

Вычисляя вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))^2 \mathbf{n},$$

находим интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$:

$$dI = d\Omega \frac{e^2 \omega_0^4}{4\pi c^3} \mathbf{Q}^2, \quad (8)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \times \sum_a \xi_a \left(t' + \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{r}_a \right), \quad (9)$$

где положили $\ddot{\xi}_a \approx -\omega_0^2 \xi_a$.

Система (4) существенно упрощается после подстановки

$$\xi_a(t) = \mathbf{F}_a(t) e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{F}_a^*(t) e^{i\omega_0 t}, \quad (10)$$

где $\mathbf{F}_a(t)$ в соответствии с $\omega_0 t_s \gg 1$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с экспоненциальным множителем. Пренебрегая членами с $\ddot{\mathbf{F}}_a(t)$, полагая $\mathbf{F}_b(t - r_{ab}/c) \approx \mathbf{F}_b(t)$, что справедливо вследствие (именно этот случай будет рассмотрен далее)

$$t_s \gg L/c,$$

получаем уравнение для \mathbf{F}_a :

$$\dot{\mathbf{F}}_a + \frac{\gamma}{2} \mathbf{F}_a = i\beta \sum_{b \neq a} \nabla_a \times \left(\nabla_a \frac{e^{ikr_{ab}}}{r_{ab}} \times \mathbf{F}_b(t) \right), \quad (11)$$

где $\beta = e^2 / (2m\omega_0)$, $k = \omega_0 / c$. Согласно (5) и (10)

$$\mathbf{F}_a(0) = \mathbf{B}_a, \quad \mathbf{B}_a = e^{-i\varphi_a} \boldsymbol{\eta}_a / 2. \quad (12)$$

Имеется ряд процессов, в которых когерентность теряется [24]: столкновительное тушение атомов, в результате которого атом совершает безызлучательный неупругий переход, сбой фазы атомов при упругих столкновениях и др. Во втором из этих процессов электронные уровни энергии E_n атома возмущаются при сближении с другим атомом ($E_n \rightarrow E_n + \Delta E_n(t)$), поэтому волновая функция n -го состояния умножается на фазовый множитель

$$\exp(-i\varphi_n), \quad \varphi_n = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta E_n(t) dt.$$

Дипольный момент перехода $n \rightarrow n'$ умножается на $\exp(-i\varphi_n + i\varphi_{n'})$. Поскольку для разных атомов эти множители разные и не коррелируют друг с другом, то когерентность теряется. Эти процессы учитываются путем введения дополнительного затухания

$$\gamma \rightarrow \Gamma = \gamma + \gamma_c,$$

где γ_c — эффективная ширина, учитывающая указанные процессы. Ниже мы будем считать, что $t_s \gamma_c \ll 1$, и поэтому опускать γ_c .

Уравнения КМС (4), (12) являются линейными, то есть сумма их решений, умноженных на произвольные коэффициенты, снова является реше-

нием. Это позволяет применить технику функций Грина. Для этого сначала надо отыскать решение (4) $\xi_a^{(b)}(t)$ (функцию Грина) с начальным условием

$$t = 0, \quad \xi_a^{(b)} = \eta_b \cos \varphi_b \cdot \delta_{ab}, \quad \dot{\xi}_a^{(b)} = -\omega_0 \eta_b \sin \varphi_b \cdot \delta_{ab}, \quad (13)$$

где δ_{ab} — символ Кронекера ($\delta_{ab} = 0$ при $a \neq b$ и $\delta_{ab} = 1$ при $a = b$). Решение с произвольным начальным условием (5) равно

$$\xi_a(t) = \sum_b \xi_a^{(b)}(t). \quad (14)$$

Рассмотрим случай полностью некоррелированных при $t = 0$ атомов

$$\langle e^{i(\varphi_a - \varphi_b)} \rangle = 0. \quad (15)$$

Вследствие независимости фаз

$$dI = \sum_b dI_b, \quad (16)$$

где dI_b определяется формулами (8), (9), в которые вместо ξ_a следует подставить $\xi_a^{(b)}$.

В следующих разделах показано, что, несмотря на отсутствие корреляций при $t = 0$, при $t > 0$ возникают корреляции между атомами и, как следствие, развиваются коллективные когерентные эффекты.

3. МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ФАЗ В КМС

Рассмотрим для определенности случай (a) из (1) и оценим интенсивность I_b для точечного начального условия (13). Для оценки I_b и t_s достаточно считать, что атом с номером b колеблется с постоянной амплитудой: $\xi_b = \eta_b \cos(\omega_0 t + \varphi_b)$. Атом b в точке нахождения первоначально невозбужденного атома a создает резонансное поле E_a , которое начинает раскачивать осциллятор a :

$$\begin{aligned} E_a &\sim \frac{e\eta_b}{R_a^3} \cos(\omega_0 t + \varphi_b); \\ \xi_a &\sim \frac{e^2\eta_b}{m\omega_0 R_a^3} t \sin(\omega_0 t + \varphi_b), \end{aligned} \quad (17)$$

здесь и далее $\mathbf{R}_a \equiv \mathbf{r}_{ab} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$.

Для оценок будем считать, что типичное расстояние между атомами:

$$R_a \sim L. \quad (18)$$

Через некоторое время начальная энергия атома b перераспределяется по всем атомам активной среды. Их амплитуда становится порядка

$$\xi_a \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \eta_b. \quad (19)$$

Теперь сформировался когерентный ансамбль из N атомов. Когерентность дает в интенсивность I_b множитель N^2 (см. разд.1), но вследствие (19) появляется еще один множитель $(1/\sqrt{N})^2 = 1/N$, поэтому $I_b \sim NI_1$, где I_1 — интенсивность излучения уединенного атома. Отсюда следует оценка $t_s \sim \epsilon_b/I_b \sim \tau_0/N$, где $\tau_0 = \epsilon_b/I_1$ — время жизни уединенного возбужденного атома. Согласно (16) полная интенсивность излучения среды из первоначально некоррелированных атомов порядка $I \sim NI_b \sim N^2 I_1$.

Эти рассуждения верны в том отношении, что они указывают на существенную роль коллективных эффектов при излучении атома, окруженного резонансными партнерами, однако они не являются точными. Причина состоит в неправильности оценки (18). Это видно уже из (17): ξ_a довольно быстро спадает с ростом R_a , и, как будет показано в следующем разделе, это обстоятельство вносит существенные изменения в описанную выше простую картину.

4. СЛУЧАЙ $l \ll L \ll \lambda$

В уравнении (11) в этом случае следует произвести разложение экспоненты до членов $\sim k^3$ включительно. Слагаемое $\sim k$ равно нулю, чисто мнимое слагаемое $\sim k^2$ мало по сравнению с мнимым слагаемым нулевого порядка, и поэтому его следует опустить. Слагаемое $\sim k^3$

$$-\frac{\gamma}{2} \sum_{b \neq a} \mathbf{F}_b$$

является вещественным, и поэтому его следует сохранить.

Уравнение (11) приводится к виду

$$\dot{\mathbf{F}}_a + \frac{\gamma}{2} \mathbf{F}_a = i\beta \sum_{b \neq a} \frac{3\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab} \cdot \mathbf{F}_b) - \mathbf{F}_b}{(r_{ab})^3}, \quad (20)$$

где $\mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$,

$$\mathbf{F} = \sum_a \mathbf{F}_a(t). \quad (21)$$

В индексной записи (20) выглядит так:

$$\dot{F}_{a\alpha} + \frac{\gamma}{2} F_{a\alpha} = i\beta \sum_{b \neq a} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) F_{b\beta}, \quad (22)$$

где $G_{\alpha\beta} = \frac{3S_\alpha S_\beta - \delta_{\alpha\beta}}{(r_{ab})^3}$, $\mathbf{S} \equiv \mathbf{n}_{ab}$, $\alpha, \beta = x, y, z$. В (22) и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Функция Грина $\mathbf{F}_a^{(b)}(t)$ уравнения (11) удовлетворяет начальному условию:

$$t = 0, \quad \mathbf{F}_a^{(b)} = \mathbf{B}_b \delta_{ab}. \quad (23)$$

Решение с произвольным начальным условием (12) аналогично (14) имеет вид

$$\mathbf{F}_a(t) = \sum_b \mathbf{F}_a^{(b)}(t). \quad (24)$$

Ниже полагаем, что среда имеет форму эллипсоида. Сюда относятся важные частные случаи шара, эллипсоида вращения и тонкого длинного стержня. Рассмотрим сначала «точечное» решение (22) $\mathbf{F}_a^{(b)}$. Для упрощения записи формул ниже будем опускать верхний индекс b .

Интенсивность излучения в случае $l \ll L \ll \lambda$ равна

$$I = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{D}})^2 \approx \frac{2\omega_0^4}{3c^3} (\mathbf{D})^2, \quad (25)$$

где

$$\mathbf{D} = e \sum_a \boldsymbol{\xi}_a = e(\mathbf{F} e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{F}^* e^{i\omega_0 t}). \quad (26)$$

Суммируя (22) по a получаем

$$\dot{\mathbf{F}}_\alpha + \frac{\gamma N}{2} F_\alpha = i\beta \sum_b \tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) F_{b\beta}, \quad (27)$$

где

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) = \sum_a G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}). \quad (28)$$

Замечательным обстоятельством, характерным только для эллипсоида, является то, что в этом случае $\tau_{\alpha\beta}$ не зависит от \mathbf{r}_b [12, 13] (см. также приложение 4). Величину $\tau_{\alpha\beta}$ можно рассчитать, решив известную задачу о

диэлектрическом эллипсоиде в однородном внешнем электрическом поле \mathbf{E}_0 . Поле внутри эллипсоида равно

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}',$$

где \mathbf{E}' — собственное поле эллипсоида, созданное всеми дипольными моментами эллипсоида:

$$\mathbf{E}'_{\alpha} = \sum_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_b) d_{b\beta} = -4\pi Q_{\alpha\beta} P_{\beta}, \quad (29)$$

\mathbf{P} — вектор поляризации среды (дипольный момент единицы объема),

$$Q_{\alpha\beta} = r^{(x)} i_{\alpha} i_{\beta} + r^{(y)} j_{\alpha} j_{\beta} + r^{(z)} k_{\alpha} k_{\beta}. \quad (30)$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные вдоль главных осей эллипсоида, соответствующие полуоси равны a, b, c ; $r^{(x)}, r^{(y)}, r^{(z)}$ — деполяризующие факторы:

$$r^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^{\infty} \frac{dS}{(S+a^2)R_s}, \quad (31)$$

где $R_s = \sqrt{(S+a^2)(S+b^2)(S+c^2)}$.

Формулы для $r^{(y)}$ и $r^{(z)}$ получаются из (31) после замены множителя $S+a^2$ в знаменателе на $S+b^2$ и $S+c^2$ соответственно. Справедлива формула

$$r^{(x)} + r^{(y)} + r^{(z)} = 1. \quad (32)$$

В частности, для шара:

$$r^{(x)} = r^{(y)} = r^{(z)} = \frac{1}{3}. \quad (33)$$

Выделим шар малого радиуса с центром на атоме a . Тогда

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad (34)$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ — поля, созданные диполями, находящимися внутри и вне шара соответственно. По физическому смыслу

$$\sum_{b \neq a} G_{\alpha\beta}(\mathbf{R}_b) d_{b\beta} = E_{2\alpha}.$$

Учитывая, что для эллипсоида $\mathbf{d}_b = \mathbf{d} = \text{const}$, находим

$$E_{2\alpha} = \tau_{\alpha\beta} d_{\beta} = \tau_{\alpha\beta} P_{\beta} / n. \quad (35)$$

Поле \mathbf{E}_1 есть не что иное, как поле внутри шара с однородной поляризацией ($\mathbf{P} = \text{const}$) [12, 13]: $\mathbf{E}_1 = -4\pi\mathbf{P}/3$. Отсюда, из (29), (34) и (35) получаем:

$$\tau_{\alpha\beta} = 4\pi n \left(\frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta} \right). \quad (36)$$

Как следует из (30), (33) и (36), для шара

$$\tau_{\alpha\beta} = 0. \quad (37)$$

Из (27) и $\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) = \text{const}$ следует

$$\dot{F}_\alpha + \frac{\gamma N}{2} F_\alpha = i\beta\tau_{\alpha\beta}F_\beta. \quad (38)$$

Согласно (23) начальное условие для \mathbf{F} имеет вид

$$t = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{B}_b = B_{bx} \mathbf{i} + B_{by} \mathbf{j} + B_{bz} \mathbf{k}.$$

Отсюда и из (23), (26), (30) и (36) получаем:

$$\mathbf{F}(t) = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}; \quad (39)$$

$$F_x = B_{bx} \exp \left(-i\omega_x t - \frac{\gamma N}{2} t \right);$$

$$\mathbf{D}_b(t) = D_x^{(b)} \mathbf{i} + D_y^{(b)} \mathbf{j} + D_z^{(b)} \mathbf{k};$$

$$D_x^{(b)} = e\eta_{bx} \cos [(\omega_0 + \omega_x) t + \phi_b] \exp \left(-\frac{\gamma N}{2} t \right), \quad (40)$$

где $\omega_x = \omega_d(3n^{(x)} - 1)$, $\omega_d = 4\pi\beta n/3$.

Выражения для F_y , F_z и D_y , D_z получаются из (39), (40) после замены индекса x на y и z соответственно. Выражениями (40) определяется дипольный момент для точечного начального условия (13), (23). Вследствие линейности (см. (24)) дипольный момент среды с произвольным начальным условием (5), (12) получается при суммировании (40) по всем атомам b :

$$\mathbf{D} = D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k};$$

$$D_x = e \sum_b \eta_{bx} \cos [(\omega_0 + \omega_x) t + \phi_b] \exp \left(-\frac{\gamma N}{2} t \right). \quad (41)$$

Имея в виду, что $(\mathbf{D})^2 = (D_x)^2 + (D_y)^2 + (D_z)^2$, усредним $(D_x)^2$ по быстрым осцилляциям с периодом $2\pi/\omega_0$:

$$\langle D_x^2 \rangle = \frac{1}{2} e^2 \exp(-\gamma N t) \sum_{a,b} \eta_{ax} \eta_{bx} \cos(\varphi_a - \varphi_b).$$

Соответственно

$$\langle \mathbf{D}^2 \rangle = \frac{1}{2} e^2 \exp(-\gamma N t) g,$$

где

$$g = \sum_{a,b} (\boldsymbol{\eta}_a \boldsymbol{\eta}_b) \cos(\varphi_a - \varphi_b). \quad (42)$$

Отсюда и из (25) получаем

$$I = \frac{4e^2 \omega_0^4}{3c^3} g \exp(-\gamma N t). \quad (43)$$

Следовательно, полная излученная энергия равна

$$E_r = \int_0^\infty I dt = \frac{m \omega_0^2 g}{2N}.$$

Начальная энергия осцилляторов определяется выражением (6):

$$E_0 = \sum_a E_0^{(a)} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \sum_a \boldsymbol{\eta}_a^2.$$

Для отношения этих энергий получаем

$$\xi = \frac{E_r}{E_0} = \frac{g}{N \sum_a \boldsymbol{\eta}_a^2}. \quad (44)$$

Докажем, что $\xi \leq 1$. Из (42) $g = \sum_{a,b} \eta_a \eta_b q_{ab}$, где η_a, η_b — модули соответствующих векторов, $q_{ab} = \cos(\alpha_{ab}) \cos(\varphi_a - \varphi_b)$, α_{ab} — угол между векторами $\boldsymbol{\eta}_a$ и $\boldsymbol{\eta}_b$. Очевидно, $q_{ab} \leq 1$, поэтому

$$g \leq \sum_{a,b} \eta_a \eta_b.$$

Поскольку

$$\sqrt{\eta_a \eta_b} < \frac{\eta_a + \eta_b}{2},$$

то

$$\sum_{a,b} \eta_a \eta_b \leq \sum_{a,b} \left(\frac{\eta_a + \eta_b}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sum_{a,b} (\eta_a^2 + \eta_b^2 + 2\eta_a \eta_b) = \frac{1}{2} N \sum_a \eta_a^2 + \frac{1}{2} \sum_{a,b} \eta_a \eta_b.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\sum_{a,b} \eta_a \eta_b \leq N \sum_a \eta_a^2$$

то есть $\xi \leq 1$.

Теперь покажем, что $\xi \geq 0$. Рассмотрим выражение $b = \langle [\sum_a \eta_a \times \cos(\varphi_a + \Psi)]^2 \rangle$, где угловыми скобками обозначено усреднение по случайной фазе Ψ .

Имеем

$$b = \sum_{a,b} \eta_a \eta_b \langle \cos(\varphi_a + \Psi) \cos(\varphi_b + \Psi) \rangle = \frac{1}{2} g.$$

Учитывая, что $b \geq 0$, заключаем, что ξ неотрицательно. Итак, $0 \leq \xi \leq 1$, то есть излучается только часть энергии. Возникает вопрос: куда девается оставшаяся энергия?

Причина этого явления заключается в том, что в результате диполь-дипольного взаимодействия активная среда переходит в метастабильное когерентное состояние с $\mathbf{D} = 0$. Оставшаяся энергия излучается за гораздо большее время в виде квадрупольного излучения, либо в результате разрушения метастабильного состояния в процессах атомных столкновений.

Рассмотрим предельный случай $N \rightarrow \infty$ (бесконечная среда). Для нахождения метастабильных состояний решение уравнения (22) следует искать в виде

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{F}_a(t) = \mathbf{S}_a e^{-i\omega t}. \quad (45)$$

Для амплитуд \mathbf{S}_a получаем уравнение

$$-\omega S_{a\alpha} = \beta \sum_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) S_{b\beta}, \quad (46)$$

решение которого ищем в виде

$$S_{a\alpha}^{(b)} = B_{b\alpha} \delta_{ab} + G_{\alpha\beta}(r_{ab}) D_{b\beta}. \quad (47)$$

Из (46) и (47) с учетом формулы (см. приложение 5)

$$\sum_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) G_{\beta\gamma}(\mathbf{r}_{bc}) = -\frac{4\pi n}{3} G_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_{ac}) + \frac{32\pi^2 n^2}{9} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{ac} \quad (48)$$

получаем

$$\begin{cases} -\omega \mathbf{B} = \frac{8\pi n \omega_d}{3} \mathbf{D} \\ -\omega \mathbf{D} = \beta \mathbf{B} - \omega_d \mathbf{D}. \end{cases}$$

Приравнивая ее определитель к нулю, находим два решения:

$$\omega_1 = -\omega_d, \quad \omega_2 = 2\omega_d. \quad (49)$$

Этим двум частотам соответствуют два решения

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a^{(b)}(t) &= \left[\mathbf{B}_b \delta_{ab} + \frac{3}{8\pi n} \frac{3\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab} \mathbf{B}_b) - \mathbf{B}_b}{(r_{ab})^3} \right] e^{i\omega_d t}; \\ \mathbf{F}_a^{(b)}(t) &= \left[\mathbf{B}_b \delta_{ab} - \frac{3}{4\pi n} \frac{3\mathbf{n}_{ab}(\mathbf{n}_{ab} \mathbf{B}_b) - \mathbf{B}_b}{(r_{ab})^3} \right] e^{-2i\omega_d t}, \end{aligned} \quad (50)$$

которые описывают локализованные на атоме b возбуждения активной среды.

Формулы (48)—(50) справедливы (см. приложение 5) с точностью до членов $\sim 1/N$, которые в бесконечной среде равны нулю. По этой причине, пользуясь (50), нельзя рассчитать дипольный момент среды, чтобы, например, убедиться в равенстве его нулю. Так, для шара из (37) и (50) следует:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_b e^{-i\omega t} \neq 0.$$

Однако после добавления к $\mathbf{F}_a^{(b)}$ из (50) члена $-\frac{1}{N} \mathbf{B}_b e^{i\omega t}$ дипольный момент среды обратится в нуль. По этой причине в дальнейшем было бы интересно отыскать решение уравнения (22) с точностью до слагаемых $\sim 1/N$ включительно для среды произвольной формы. Приведенное же выше решение для эллипсоида, вычисленный на его основе дипольный момент и все выводы, которые были сделаны, являются правильными. Действительно, пусть при расчете $\tau_{\alpha\beta}$ была допущена ошибка $\sim 1/N$. Тогда для эллипсоида получили бы

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) = \tau_{\alpha\beta} + \frac{n}{N} Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b), \quad (51)$$

где $\tau_{\alpha\beta}$ — прежнее выражение (36), $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b)$ — безразмерные величины порядка единицы. Из (27) и (51) тогда следует уравнение (ср. с (38)):

$$\dot{\mathbf{F}}_{\alpha} + \frac{\gamma N}{2} F_{\alpha} = i\beta\tau_{\alpha\beta} F_{\beta} + \frac{i\beta n}{N} \sum_b Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b) F_{b\beta}.$$

Рассмотрим для простоты случай шара: $\tau_{\alpha\beta} = 0$. Ясно, что величины $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b)$ существенно изменяются лишь на характерном размере среды ($r_b \sim L$). Для оценок порядка величины поправок достаточно рассмотреть случай

$$Q_{\alpha\beta} = Q\delta_{\alpha\beta},$$

где $Q \sim 1$. Тогда вместо (40) получаем

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}_b \exp\left(-\frac{\gamma N}{2} t + \frac{i\beta n}{N} Qt\right).$$

Поскольку $N \gg 1$, то этими поправками можно пренебречь.

Решения (50) являются лишь частными случаями метастабильных состояний. Такое произвольное состояние имеет вид

$$\mathbf{F}_a(t) = \sum_b \mathbf{F}_a^{(b)},$$

причем здесь $\mathbf{F}_a^{(b)}$ является линейной комбинацией двух решений из (50). Собственные моды (50) имеют ту же физическую природу, что и поляритоны (см. разд.6), однако, вследствие $L \ll \lambda$, они не распространяются по среде. Эти колебания можно было бы назвать квазистатическими поляритонами.

Случай $\xi = 1$ соответствует полностью когерентной накачке (π -импульсом)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N, \quad \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_N$$

и является классическим аналогом задачи, рассмотренной Дикке [1]. Из (43) следует, что в системе классических осцилляторов при накачке π -импульсом экранировка отсутствует, имеется сверхизлучение ($I \propto N^2$). Спецификой осцилляторов является нулевое время задержки импульса сверхизлучения. Эти обстоятельства указывают на справедливость теории Дикке при полностью когерентной накачке среды, имеющей форму эллипсоида, а значит, и на своеобразную компенсацию диполь-дипольного взаимодействия атомов в этом случае. Достаточно очевидно, что для другой формы среды будут наблюдаться значительные отклонения от теории Дикке.

5. СЛУЧАЙ $\lambda \ll l \ll L$

На этот раз в (11) следует дифференцировать только экспоненту:

$$\dot{\mathbf{F}}_a + \frac{\gamma}{2} \mathbf{F}_a = -\frac{ir_0\omega_0}{2} \sum_{b \neq a} \frac{e^{ikr_{ab}}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{F}_b), \quad (52)$$

где $r_0 = e^2/(mc^2)$. Произведя подстановку

$$\mathbf{F}_a(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \mathbf{G}_a(t), \quad (53)$$

получим уравнение для \mathbf{G}_a , аналогичное (52), в котором отсутствует второе слагаемое в левой части. Полагая, что при $t < 0$ $\mathbf{F}_a = 0$, а при $t = 0$ выполняются «точечные» начальные условия (23), произведем фурье-преобразование уравнения. Для фурье-компонент

$$\mathbf{N}_a = \int_0^{\infty} \mathbf{G}_a(t) e^{i\omega t} dt \quad (54)$$

получаем уравнение

$$\mathbf{B}_b \delta_{ab} + i\omega \mathbf{N}_a = \frac{ir_0\omega_0}{2} \sum_{c \neq a} \frac{e^{ikr_{ac}}}{r_{ac}} \mathbf{n}_{ac} \times (\mathbf{n}_{ac} \times \mathbf{N}_c). \quad (55)$$

Обратное преобразование осуществляется по формуле

$$\mathbf{G}_a(t) = \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{N}_a. \quad (56)$$

Таким образом, в (54) подразумевается, что частота имеет положительную мнимую добавку: $\omega \rightarrow \omega + i0$.

После подстановки в (55)

$$\mathbf{N}_a = \frac{i}{\omega} \mathbf{B}_b \delta_{ab} + \mathbf{S}_a \quad (57)$$

получаем уравнение

$$-i\omega \mathbf{S}_a = \frac{r_0\omega_0}{2\omega} \frac{e^{ikr_{ab}}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{B}_b) - \frac{ir_0\omega_0}{2} \mathbf{\Lambda};$$

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{c \neq a} \frac{e^{ikr_{ac}}}{r_{ac}} \mathbf{n}_{ac} \times (\mathbf{n}_{ac} \times \mathbf{S}_c). \quad (58)$$

Уравнение (58) решаем при помощи подстановки

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{M}_a \frac{e^{ikr_{ab}}}{r_{ab}}. \quad (59)$$

Множитель

$$e^{ik(r_{ac} + r_{cb})}, \quad (60)$$

возникающий при расчете Λ , остается постоянным для атомов c , находящихся на оси ab (см. рис.1), соединяющей атомы a и b . Это означает, что основной вклад в Λ дает область, прилегающая к этой оси. Рассмотрим атом c , находящийся на расстоянии ρ от оси ab . Проведем через атом c плоскость, перпендикулярную к оси ab . Эта плоскость пересекает ось ab в некоторой точке, лежащей на расстоянии z от атома b , причем $0 < z < r_{ab}$.

При $\rho \ll r_{ab}$

$$\begin{aligned} r_{cb} &\approx \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}; \\ r_{ac} &\approx r_{ab} - z + \frac{\rho^2}{2(r_{ab} - z)}; \\ r_{ac} + r_{cb} &\approx r_{ab} + \frac{r_{ab}}{2z(r_{ab} - z)} \rho^2. \end{aligned} \quad (61)$$

Отсюда и из (60) следует, что основной вклад в сумму Λ дает область

$$0 < z < r_{ab} \sim L, \quad z \sim r_{ab} \sim L, \quad \rho \sim \sqrt{r_{ab}/k} \sim \sqrt{L/k}, \quad (62)$$

где учтено, что типичное значение r_{ab} порядка размера среды L (это будет видно ниже). Эту область далее будем называть областью конструктивной интерференции (ОКИ, на рис.1 показана пунктиром).

Физический смысл соотношений (62) заключается в следующем. Фаза сигнала, движущегося от b к a по оси ab , равна $\varphi_1 = kr_{ab}$. Рассмотрим другой путь — bca . Электромагнитные волны, поступающие от b по пути bc , раскачивают осциллятор c , который начинает излучать свои волны, достига-

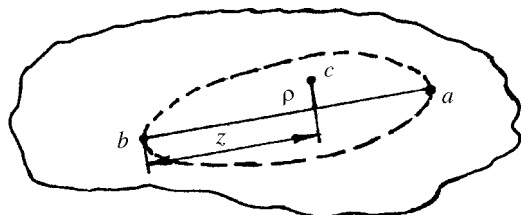


Рис.1. Область конструктивной интерференции для атома a

ющие a . Сигналу, распространяющемуся по пути bca , соответствует фаза $\varphi_2 = k(r_{bc} + r_{ca})$. Эти два сигнала интерферируют конструктивно, если $\varphi_2 - \varphi_1 \lesssim 1$. Объем ОКИ $V_c \sim L^2/k$. Далее предполагаем, что число атомов, находящихся в ОКИ, велико:

$$N_c \sim nL^2/k \gg 1, \quad (63)$$

поэтому суммирование по c можно заменить интегрированием

$$\sum_c \rightarrow n \int d^3r_c = n \int_0^{r_{ab}} dz \int d^2\rho; \quad (64)$$

$$\Lambda \approx n \int d^3r_c \frac{e^{ik(r_{ac} + r_{bc})}}{(r_{ab} - z)z} \mathbf{Q}(z), \quad (65)$$

где $\mathbf{Q}(z) = \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{M}(z))$.

Здесь учтено, что вследствие $\rho \ll z$ в ОКИ $\mathbf{n}_{ac} \approx \mathbf{n}_{ab}$. Кроме того, в случае (63) множитель \mathbf{M}_a в (59) изменяется медленно по сравнению с экспонентой и поэтому при расчете Λ можно положить

$$\mathbf{M}_a \equiv \mathbf{M}(z, \rho) \approx \mathbf{M}(z, 0) \equiv \mathbf{M}(z).$$

Подставляя (61) в (65), проводим интегрирование по $d^2\rho = 2\pi\rho d\rho$:

$$\Lambda = \frac{2\pi i n}{k} \frac{e^{ikr_{ab}}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{T});$$

$$\mathbf{T}(r_{ab}) = \int_0^{r_{ab}} dz \mathbf{M}(z).$$

Уравнение (58) принимает вид

$$-i\omega\mathbf{M}(r) = \frac{r_0\omega_0}{2\omega} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_b) + \pi r_0 c n \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{T}(r)), \quad (66)$$

где $r \equiv r_{ab}$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_{ab} = \mathbf{r}_{ab}/r_{ab}$. Подстановка

$$\mathbf{M}(r) = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{B}_b) f(r) \quad (67)$$

позволяет перейти от векторной величины \mathbf{M} к скалярной f :

$$-i\omega f(r) = \frac{r_0\omega_0}{2\omega} - \pi r_0 c n R(r); \quad (68)$$

$$R(r) = \int_0^r dr' f(r'). \quad (69)$$

Перепишем (68) в виде

$$\frac{dR}{dr} + \frac{\pi i r_0 c n}{\omega} R = \frac{i r_0 \omega_0}{2\omega^2} \quad (70)$$

и учтя граничное условие $R(0) = 0$, следующее из (69), получим решение (70):

$$R(r) = \frac{\omega_0}{2\pi c n \omega} \left(1 - e^{-\frac{\pi i r_0 c n}{\omega} r} \right).$$

Отсюда и из (56), (57), (59), (67), (69) находим:

$$f(r) = \frac{dR}{dr} = \frac{i\omega_0 r_0}{2\omega^2} e^{-\frac{\pi i r_0 c n}{\omega} r};$$

$$\mathbf{N}_a = \frac{i}{\omega} \mathbf{B}_b \delta_{ab} + \frac{i\omega_0 r_0}{2\omega^2} e^{-\frac{\pi i r_0 c n}{\omega} r_{ab}} \frac{e^{i k r_{ab}}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{B}_b); \quad (71)$$

$$\mathbf{G}_a(t) = \mathbf{B}_b \delta_{ab} + \frac{i\omega_0 r_0}{4\pi} \frac{e^{i k r_{ab}}}{r_{ab}} \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \mathbf{B}_b) K;$$

$$K = \int_{-\infty + i0}^{+\infty + i0} \frac{d\omega}{\omega^2} e^{-i\omega t - \frac{\pi i r_0 c n}{\omega} r_{ab}}. \quad (72)$$

Чтобы вычислить интеграл K , производим разложение каждой из экспонент в подынтегральном выражении в ряд Тейлора и используем далее теорему о вычетах:

$$K = -2\pi \frac{\sqrt{t}}{\beta} J_1(2\sqrt{\beta t}), \quad (73)$$

где $\beta = \pi i c r_0 r_{ab}$, J_1 — функция Бесселя. Из (10), (12), (53), (72) и (73) находим:

$$\xi_a(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} t} \left[\boldsymbol{\eta}_b \cos(\omega_0 t + \varphi_b) \delta_{ab} - \frac{\omega_0 r_0}{2r_{ab}} \sqrt{\frac{t}{\beta}} J_1(2\sqrt{\beta t}) \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \boldsymbol{\eta}_b) \sin(\omega_0 t + \varphi_b - k r_{ab}) \right]. \quad (74)$$

Теперь приступаем к расчету интенсивности излучения по формулам (8), (9):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}; \quad (75)$$

$$\mathbf{b} = \sum_a \xi_a \left(t' + \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{r}_a \right), \quad (76)$$

где $t' = t - r/c$, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Начало координат располагаем в точке нахождения атома b , тогда r — расстояние от удаленной точки наблюдения до атома b . Из (74), (76) находим:

$$\mathbf{b} = e^{-\frac{\gamma}{2} t} \left[\boldsymbol{\eta}_b \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) - \frac{\omega_0 r_0}{2} \mathbf{A} \right]; \quad (77)$$

$$\mathbf{A} = \sum_a \frac{1}{r_{ab}} \sqrt{\frac{t'}{\beta}} J_1(2\sqrt{\beta t'}) \mathbf{n}_{ab} \times (\mathbf{n}_{ab} \times \boldsymbol{\eta}_b) \sin(\omega_0 t' + \varphi_b + \Psi), \quad (78)$$

где $\Psi = k \mathbf{n} \mathbf{r}_{ab} - k r_{ab}$. Направим ось z вдоль \mathbf{n} . Пусть ρ — расстояние от атома a от оси z . Основной вклад в сумму \mathbf{A} дают атомы a , находящиеся в ОКИ:

$$\rho \sim \sqrt{\frac{r_{ab}}{k}} \sim \sqrt{\frac{L}{k}} \ll L. \quad (79)$$

Число атомов в этой области определяется прежней формулой (63). В данном случае ОКИ имеет несколько иной смысл, чем ранее. Теперь интерферируют между собой два сигнала, поступающие в точку наблюдения (см. рис.2). Один сигнал идет от атома b вдоль вектора \mathbf{r} , то есть по прямой линии, соединяющей атомы b и точку наблюдения. Другой сигнал испускается атомом b и по прямой достигает атома a . Далее он переизлучается атомом a и по прямой достигает точки наблюдения. С учетом этих замечаний имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \mathbf{r}_{ab} &= z, \quad r_{ab} = \sqrt{z^2 + \rho^2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}; \\ \Psi &\approx -\frac{k\rho^2}{2z}, \quad \mathbf{n}_{ab} \approx \mathbf{n}; \quad \mathbf{A} \approx \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) D; \end{aligned} \quad (80)$$

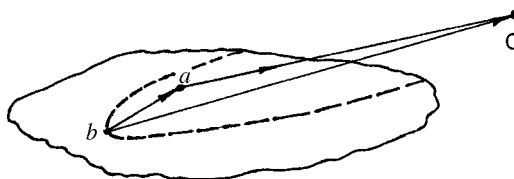


Рис.2. Область конструктивной интерференции для наблюдателя в точке O

$$D = n \int_0^L \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{t'}{\beta_0}} J_1(2\sqrt{\beta_0 t'}) P; \quad \beta_0 = \pi n c r_0 z; \quad (81)$$

$$P = \int d^2 \rho \sin \left(\omega_0 t' + \varphi_b - \frac{k \rho^2}{2z} \right) = -\frac{2\pi z}{k} \cos(\omega_0 t' + \varphi_b). \quad (82)$$

Здесь $L \equiv L(\mathbf{n})$ — расстояние от атома b до границы среды вдоль вектора наблюдения \mathbf{n} .

Дальнейшее интегрирование по dz в (81) производится на основе формулы

$$J_1(x) = -J'_0(x).$$

Для D получаем выражение

$$D = \frac{2}{\omega_0 r_0} \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) [J_0(x_0) - 1]; \quad (83)$$

$$x_0 = 2\sqrt{\pi n c r_0 L t'}. \quad (84)$$

Из (75), (77), (80) и (83) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) [\boldsymbol{\eta}_b - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) (J_0 - 1)]; \\ \mathbf{Q} &= e^{-\frac{\gamma}{2} t'} \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) (1 + J_0 - 1) = \\ &= e^{-\frac{\gamma}{2} t'} \cos(\omega_0 t' + \varphi_b) (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) J_0(x_0), \end{aligned} \quad (85)$$

где специально отмечен замечательный факт сокращения двух слагаемых, смысл которого обсудим позже.

Из (6), (8) и (85) получаем следующее выражение для интенсивности излучения:

$$dI \equiv dI_b = d\Omega \frac{3\gamma E_0^{(b)}}{8\pi} \sin^2 \alpha J_0^2(x_0) e^{-\gamma t}, \quad (86)$$

где α — угол между векторами \mathbf{n} и $\boldsymbol{\eta}_b$. Интегрируя интенсивность (86) по времени в пределах $(0, \infty)$, находим энергию, излученную в телесный угол $d\Omega$:

$$dE_r = E_0^{(b)} d\Omega \frac{3}{8\pi} \sin^2 \alpha F(\varphi), \quad (87)$$

где $\varphi = \frac{3\pi n L}{K^2}$,

$$F(\varphi) = e^{-\varphi} I_0(\varphi), \quad (88)$$

I_0 — модифицированная функция Бесселя. При интегрировании по времени была применена формула [14]

$$\int_0^{\infty} dt e^{-\gamma t} J_0(\alpha\sqrt{t}) J_0(\beta\sqrt{t}) = \frac{1}{\gamma} I_0\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right) e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma}}.$$

Обсудим физический смысл полученных результатов. Сначала исходим из «наивной» точки зрения, изложенной в начале разд.3. Итак, энергия атома b через некоторое время распределяется по N атомам среды. Тем самым образуется когерентный ансамбль осцилляторов, которые колеблются с амплитудами (19). Из этих N атомов лишь N_c атомов (см. (63)) дают когерентный вклад в точку наблюдения, поэтому интенсивность излучения средой будет порядка

$$I \sim \frac{I_0}{N} (N_c)^2 \sim I_0 \frac{n^2 L^4}{Nk^2} \sim I_0 \varphi, \quad (89)$$

где учтено, что $nL^3 \sim N$. Соотношение (89) поясняет смысл параметра φ , откуда ясно, что сверхизлучение возникает только при условии

$$\varphi \gg 1. \quad (90)$$

Отметим, что при $\varphi \gg 1$ $N_c \sim \varphi kL \gg 1$, как предполагалось выше.

В действительности, как и в предыдущем разделе, все оказывается сложнее.

Приготовленное атомом b когерентное облако атомов среды вместо сверхизлучения вызывает противоположный эффект — экранировку. Это видно из указанного выше сокращения слагаемых в (85), а также из свойства $J_0^2 < 1$ и выражения (86), которое перепишем в виде

$$dI = dI_s \cdot J_0^2(x_0), \quad (91)$$

где dI_s — интенсивность спонтанного излучения уединенного атома b . Таким образом, $dI < dI_s$, то есть среда экранирует даже гораздо более медленно — спонтанное излучение атома b . Степень экранировки ясна из (87), (88), (91). Вследствие (90)

$$F(\varphi) \approx 1/\sqrt{2\pi\varphi} \ll 1,$$

то есть

$$\frac{E_r}{E_0^{(b)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\varphi}} \ll 1.$$

В выражение (91) входят два характерных времени:

$$\tau_0 = \frac{1}{\gamma}, \quad t_s = \frac{1}{ncr_0 L} \sim \frac{\tau_0}{\phi}. \quad (92)$$

При $t \lesssim t_s$ $dl \approx dl_s$, а при $t \gg t_s$ $dl \sim dl_s t_s/t$.

Рассмотрим произвольное начальное условие (5), (12). Интенсивность излучения определяется теперь выражением (8), в котором согласно (14), (85) в качестве \mathbf{Q} следует взять величину

$$\mathbf{Q} = \sum_b e^{-\frac{\gamma t_b}{2}} \cos(\omega_0 t_b + \phi_b) (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) J_0(x_b). \quad (93)$$

Здесь $t_b = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_b| \approx t' + \frac{1}{c} \mathbf{n} \mathbf{r}_b$, $t' = t - r/c$, \mathbf{r} , \mathbf{r}_b — радиусы-векторы, проведенные к точке наблюдения и атому b соответственно из начала координат, расположенного в произвольной точке:

$$x_b = 2\sqrt{\pi n c r_0 L_b t_b},$$

где $L_b \equiv L_b(\mathbf{r}_b)$. Экспоненциальный множитель в (93) и функция $J_0(x_b)$ слабо зависят от координат атома b , поэтому можно положить

$$e^{-\frac{\gamma t_b}{2}} \approx e^{-\frac{\gamma t'}{2}}, \quad x_b \approx 2\sqrt{\pi n c r_0 L_b t'}.$$

Если начальные фазы ϕ_b разных атомов некоррелированы, то согласно (16) и (86) в этом случае также наступает экранировка.

Пусть теперь $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_N$. Тогда из (93) видно, что вследствие быстрого изменения косинуса и отсутствия корреляции в положениях атомов \mathbf{r}_b снова будет справедливой формула (16) и снова наступает экранировка.

Рассмотрим теперь случай накачки среды бегущей волной с волновым вектором \mathbf{k} , например, коротким импульсом лазера. Тогда

$$\phi_b = -\mathbf{k} \mathbf{r}_b; \quad (94)$$

$$\mathbf{Q} = e^{-\frac{\gamma t'}{2}} \sum_b \cos(\omega_0 t' + \mathbf{k} \mathbf{r}_b - \mathbf{k} \mathbf{r}_b) \mathbf{m}(\mathbf{r}_b);$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_b) = (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta}_b) J_0(x_b). \quad (95)$$

Излучение среды будет происходить в этом случае под малыми углами ($\sim 1/kL$), близкими к направлению вектора $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}/k$. Положим поэтому

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \boldsymbol{\delta},$$

где $\boldsymbol{\delta}$ — малый двумерный вектор, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{n}_0 = 0$, $\boldsymbol{\delta} \ll 1$. Суммирование в (95) можно заменить интегрированием (см. (64)). Усредняя интенсивность (8) по быстрым осцилляциям (с периодом $T = 2\pi/\omega_0$) и интегрируя по углам с учетом соотношения

$$d\Omega \approx d^2\boldsymbol{\delta},$$

получаем следующее выражение для полной интенсивности (далее $\mathbf{r}_b \equiv \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{b'} \equiv \mathbf{r}'$):

$$\begin{aligned} I &= \frac{e^2 \omega_0^4}{4\pi c^3} e^{-\gamma t'} n^2 \int d^3 r d^3 r' \mathbf{m}(\mathbf{r}) \mathbf{m}(\mathbf{r}') A_0; \\ A_0 &= \int d^2 \boldsymbol{\delta} \langle \cos(\omega_0 t' + k \mathbf{r}_\perp \boldsymbol{\delta}) \cos(\omega_0 t' + k \mathbf{r}'_\perp \boldsymbol{\delta}) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \int d^2 \boldsymbol{\delta} \cos[K(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \boldsymbol{\delta}] = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}[K(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)] = \frac{2\pi^2}{K^2} \delta^{(2)}(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp), \end{aligned}$$

где \mathbf{r}_\perp — составляющая вектора \mathbf{r}_b , перпендикулярная \mathbf{r}_0 .

Следовательно,

$$I = \frac{\pi e^2 \omega_0^2 n^2}{2c} e^{-\gamma t'} \int dz dz' d^2 r_\perp (\boldsymbol{\eta}_b \boldsymbol{\eta}_{b'}) J_0(x_b) J_0(x_{b'}). \quad (96)$$

Здесь z — составляющая \mathbf{r}_b вдоль \mathbf{r}_0 . В (96) учтена поперечность электромагнитной волны накачки: $\mathbf{n}_0 \boldsymbol{\eta}_b = 0$. Если импульс накачки слабо затухает на размере среды, то в (96) следует положить $\boldsymbol{\eta}_b = \boldsymbol{\eta} = \text{const}$, $\boldsymbol{\eta}_b \boldsymbol{\eta}_{b'} = \eta^2$.

Выражение (96) может быть переписано в виде

$$I = \frac{\pi e^2 \omega_0^2 n^2}{2c} \eta^2 e^{-\gamma t'} \int d^2 r_\perp \Phi^2, \quad (97)$$

где

$$\Phi = \int_0^L dz J_0(x), \quad x = 2\sqrt{\pi n c r_0 t' z},$$

$L \equiv L(\mathbf{n}_0, \mathbf{r}_\perp)$ — толщина тела в том месте, где оно «протыкается» прямой линией, проходящей через точку \mathbf{r}_\perp в направлении \mathbf{r}_0 .

Используя формулу

$$x J_0(x) = (x J_1(x))',$$

вычисляем интеграл Φ :

$$\Phi = \frac{1}{2\pi n c r_0 t'} x_0 J_1(x_0),$$

где $x_0 = 2\sqrt{\pi n c r_0 t' L}$. С учетом (6) выражение (97) приводится к виду

$$I = \frac{E_0}{t'} e^{-\gamma t'} Q(t'), \quad (98)$$

где $Q(t') = \frac{1}{V} \int d^2 r_{\perp} L J_1^2(x_0)$, V — объем тела, $E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \eta^2 N$.

Из (98) следует, что в случае (94) имеется сверхизлучение. Действительно, при $t \lesssim t_s$ $I \sim I_0 \Phi N$, причем время задержки импульса отсутствует. При $t \gtrsim t_s$ после окончания главного импульса излучения возникает ряд затухающих по амплитуде по закону t^{-2} импульсов. Поскольку $\gamma t_s \sim 1/\phi \ll 1$, то экспоненту в (98) можно положить равной единице.

Используя интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} J_1^2(x) = \frac{1}{2},$$

легко убедиться, что излучается вся запасенная энергия:

$$E_r = \int_0^{\infty} I dt = E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \eta^2 N.$$

При вычислениях следует учесть соотношение $\int d^2 r_{\perp} L = V$.

Таким образом, как и в предыдущем разделе, в данном случае полностью когерентное состояние не экранируется.

6. СЛУЧАЙ $l \ll \lambda \ll L$

В этом случае физические величины мало изменяются на межатомном расстоянии l , поэтому применимо приближение сплошной среды:

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}, \quad \xi_a(t) \rightarrow \xi(\mathbf{r}, t);$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

и т.д.

Намагниченность среды представляет собой один из эффектов первого порядка малости по v_a/c , которыми мы пренебрегали с самого начала. По этой причине среду считаем немагнитной и полагаем далее $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Уравнения Максвелла вместе с уравнением движения образуют замкнутую систему КМС в случае (6) из (1):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0; \quad (99)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi e n \boldsymbol{\xi}; \quad (100)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0; \quad (101)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}; \quad (102)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}; \quad (103)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \omega_0^2 \boldsymbol{\xi} = \frac{e}{m} \mathbf{E}, \quad (104)$$

где точкой обозначена частная производная $\partial/\partial t$.

Пусть V — фиксированный объем внутри среды. Преобразуя на основе уравнений (99)—(104) производную

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = \int_V d^3r n \dot{\boldsymbol{\xi}} m (\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \omega_0^2 \boldsymbol{\xi}),$$

где $\varepsilon_a = \int d^3r m \left(\frac{m \dot{\boldsymbol{\xi}}^2}{2} + \frac{m \omega_0^2 \boldsymbol{\xi}^2}{2} \right)$ — энергия атомов в КМС, получаем уравнение баланса энергии:

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon_a + \varepsilon_f) = - \int_{\Gamma} d\mathbf{f} \mathbf{S}, \quad (105)$$

где Γ — граница объема V , $d\mathbf{f}$ — внешний элемент площади этой границы,

$$\varepsilon_f = \int_V d^3r W, \quad W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi},$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (106)$$

— плотность потока энергии (вектор Умова — Пойнтинга). Эффекты спонтанного излучения и влияние столкновений в данном разделе считаются малыми и поэтому не учитываются в (99), поскольку имеются в виду приложения КМС к разреженной среде типа плазмы токамака. Ниже будет пока-

зано, что в этом случае указанные эффекты действительно несущественны. Для других приложений КМС в левую часть (104) следует добавить слагаемое $\Gamma \dot{\xi}$ (см. разд.2).

Таким образом, в данном случае среда является диэлектриком. Подставив в (99)—(104) ξ , \mathbf{E} и \mathbf{D} в виде

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{r}, t) &= \xi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}; \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}; \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{D}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}; \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}),\end{aligned}$$

найдем диэлектрическую проницаемость на частоте ω :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (107)$$

Физическая суть явления сверхизлучения в случае (6) из (1) состоит в следующем. Пусть в среде при $t=0$ имеется некое возбуждение, скажем, с начальным условием

$$t=0, \quad \dot{\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \xi = 0, \quad \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{H} = 0. \quad (108)$$

Такое начальное условие соответствует, очевидно, случаю, когда первоначально покоящимся массам при $t=0$ придают скорости $\dot{\xi}_a = \mathbf{f}(\mathbf{r}_a)$. Если это локализованное где-то внутри среды возбуждение, то по ней начинают распространяться коллективные волны, в результате чего возбуждение «рассасывается». Дойдя до границы среды, эти волны превращаются в электромагнитные волны, покидающие среду.

Определим вид этих коллективных волн в бесконечной однородной ($n = \text{const}$) среде. Для этого будем искать решение (99)—(104) в виде

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{r}, t) &= \xi e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\omega t}; \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\omega t}\end{aligned}$$

и т.д., где ξ , \mathbf{E} — постоянные амплитуды. Получаем:

$$\xi = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{E}; \quad (109)$$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}; \quad \mathbf{p} \times \mathbf{H} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}. \quad (110)$$

Направим ось z вдоль \mathbf{p} . Тогда из (110) получаем:

$$\begin{cases} -p E_y = \frac{\omega}{c} H_x \\ p H_x = -\frac{\omega}{c} \varepsilon E_y \end{cases} \quad (111)$$

$$\begin{cases} p E_x = \frac{\omega}{c} H_y \\ p H_y = \frac{\omega}{c} \varepsilon E_x \end{cases} \quad (112)$$

$$\begin{cases} \varepsilon(\omega) E_z = 0 \\ H_z = 0. \end{cases} \quad (113)$$

Таким образом, поле \mathbf{H} — поперечное ($H_z = 0$). Поле \mathbf{E} может быть как поперечным ($E_z = 0$), так и продольным ($E_x = E_y = 0, E_z \neq 0$). Поперечные волны описываются системами (111), (112), которые соответствуют двум поляризациям. Из условий совместности каждой из этих систем следует дисперсионное соотношение для поперечных волн:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega). \quad (114)$$

Отсюда и из (107) следует, что имеются две ветви поперечных коллективных волн: быстрая (или обыкновенная)

$$\omega_1^2 = B + \sqrt{A}, \quad (115)$$

медленная (или необыкновенная)

$$\omega_2^2 = B - \sqrt{A}, \quad (116)$$

где $B = \frac{1}{2} (\omega_0^2 + \omega_p^2 + p^2 c^2)$, $A = B^2 - \omega_0^2 p^2 c^2$. Волновой вектор \mathbf{p} меняется в пределах $(0, +\infty)$. При этом ω_1 монотонно возрастает от $\omega = \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ до $\omega = +\infty$, а ω_2 также монотонно возрастает от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$. Таким образом, при любых p $\omega_1 > \omega_a$, $0 < \omega_2 < \omega_0$. Волны с частотами $\omega_0 < \omega < \omega_a$ быстро затухают, поскольку для них $\varepsilon < 0$.

При $p \rightarrow 0$ $\omega_1 \rightarrow \omega_a$, $\omega_2 \approx pc\omega_0/\omega_a$. При $p \rightarrow \infty$ $\omega_1 \approx \sqrt{p^2 c^2 + \omega_p^2} \approx pc$, $\omega_2 \approx \omega_0$.

Таким образом, при больших частотах, когда смещения осцилляторов пренебрежимо малы ($\xi_a \approx 0$), в среде распространяется обычная электро-

магнитная волна ($\omega_1 \approx pc$). Вторая ветвь (ω_2) при $p \rightarrow \infty$ описывает практически независимые колебания осцилляторов, слегка возмущенные их диполь-дипольным взаимодействием. Следуя литературе (см., например, [9]), описанные здесь поперечные волны будем называть поляритонами. Они представляют собой своеобразную смесь осцилляторных и электромагнитных колебаний.

Продольные волны представляют собой собственные колебания среды. При $E_z \neq 0$ из (113) видно, что $\epsilon(\omega) = 0$, $\mathbf{D} = 0$, то есть

$$\omega = \omega_a. \quad (117)$$

В этом случае согласно (111), (112) $E_x = E_y = H_x = H_y = 0$, а согласно (109)

$$\boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{4\pi ne} \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = 0. \quad (118)$$

Продольные волны не распространяются по плазме, так как согласно (117) их групповая скорость равна нулю:

$$\mathbf{v}_g = \partial\omega / \partial\mathbf{p} = 0.$$

В пределе $\omega_0 \rightarrow 0$, соответствующем полностью ионизованной идеальной плазме, эти волны переходят в обычные плазменные колебания.

Решим теперь следующую задачу. Пусть при $t = 0$ в бесконечной одно-родной среде создается возбуждение (108), для которого

$$\epsilon_f = 0, \quad \epsilon_a = \frac{1}{2} \mathbf{n} m \int d^3r \mathbf{f}^2(\mathbf{r}).$$

Таким образом, начальная энергия возбуждения равна

$$\epsilon_0 = \epsilon_a + \epsilon_f = \frac{1}{2} \mathbf{n} m \int d^3r \mathbf{f}^2(\mathbf{r}). \quad (119)$$

Рассчитаем теперь энергию, унесенную коллективными волнами:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int d\Omega_r \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{n} \mathbf{S}(t, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{c}{8\pi^2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int d\Omega_r \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{n} (\mathbf{E}_{-\omega} \times \mathbf{H}_{\omega}) = \\ &= \frac{c}{8\pi^2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int d\Omega_r \int_0^{\infty} d\omega \mathbf{n} [(\mathbf{E}_{\omega}^* \times \mathbf{H}_{\omega}) + (\mathbf{E}_{\omega} \times \mathbf{H}_{\omega}^*)], \end{aligned} \quad (120)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ и использованы свойства $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_{\omega}^*$, $\mathbf{H}_{-\omega} = \mathbf{H}_{\omega}^*$, следующие из вещественности \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Поскольку при $t < 0$ все физические величины равны нулю ($\xi = 0$, $\dot{\xi} = 0$, $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$), то к уравнениям Максвелла (99)—(104) применяется фурье-преобразование вида (54), (56). Одновременно произведем фурье-преобразование по пространственным переменным вида:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{p}).$$

Уравнения для фурье-компонент с учетом начального условия (108) имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\omega p} = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{\omega p} \\ \mathbf{p} \times \mathbf{H}_{\omega p} = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_{\omega p} - \frac{4\pi ne\omega}{c^2(\omega_0^2 - \omega^2)} \mathbf{f}(\mathbf{p}) \\ (\omega_0^2 - \omega^2) \xi_{\omega p} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\omega p} + \mathbf{f}(\mathbf{p}). \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{H}_{\omega p} = \frac{4\pi re\omega}{c(\omega^2 - \omega_0^2)d} (\mathbf{p} \times \mathbf{f}(\mathbf{p})),$$

где $d = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - p^2$. При $r \rightarrow \infty$ основной вклад в интеграл

$$\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \mathbf{H}_{\omega p}$$

дает сингулярность $1/d$, когда производится интегрирование по dp , и направления \mathbf{p} , близкие к $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, когда производится интегрирование по направлениям \mathbf{p} . По этой причине в несингулярных множителях подынтегрального выражения можно положить

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} = q\mathbf{n}, \quad q = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \quad (121)$$

и вынести их за интеграл. Оставшийся интеграл вычисляется по формуле

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{p^2 - q^2 - i0} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \frac{e^{iqr}}{r}.$$

Примененное здесь правило обхода полюсов следует из замечания, связанного с формулами (54), (56), согласно которому под ω следует понимать комплексную величину $\omega + i0$. Результат имеет вид:

$$\mathbf{H}_{\omega}(\mathbf{r}) = -\frac{ne\omega}{c(\omega^2 - \omega_0^2)} (\mathbf{q} \times \mathbf{f}(\mathbf{q})) \theta \frac{e^{iqr}}{r}, \quad (122)$$

где множитель $\theta = \theta[(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_a)]$ возникает вследствие того, что при $\omega_0 < \omega < \omega_a$ $\varepsilon < 0$, поэтому q — чисто мнимое, и $H(\mathbf{r})$ экспоненциально затухает при $r \rightarrow \infty$. Теперь произведем фурье-преобразование вида (54), (56) уравнений (100), (103) и (104):

$$\nabla \times \mathbf{H}_\omega = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}_\omega. \quad (123)$$

Отсюда и из (122) получаем

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{ne}{(\omega^2 - \omega_0^2) \varepsilon} \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{f}(\mathbf{q})) \frac{e^{iqr}}{r} \theta. \quad (124)$$

Тогда из (120), (122) следует:

$$\varepsilon_r = \frac{n^2 e^2}{4\pi^2 c^3} \int d\Omega_{\mathbf{n}} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) (\mathbf{n} \times \mathbf{f})^2 \theta = \frac{n^2 e^2}{\pi c^3} (\tau_1 + \tau_2),$$

где

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^4 \sqrt{\varepsilon}}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2};$$

$$\tau_1 = \int_{\omega_a}^\infty d\omega \rho(\omega) S(q); \quad \tau_2 = \int_0^{\omega_0} d\omega \rho(\omega) S(q);$$

$$S(q) = \langle (\mathbf{n} \times \mathbf{f}(\mathbf{q}))^2 \rangle,$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по направлениям \mathbf{r} . В каждом из интегралов $\tau_{1,2}$ заменим переменную интегрирования ω на q , причем при преобразовании τ_1 и τ_2 используем, соответственно, ветви ω_1 и ω_2 с заменой $p \rightarrow q$ в (115) и (116). Таким образом, τ_1 определяет энергию, уносимую необыкновенными волнами, τ_2 — обыкновенными. Дифференцируя соотношение (121), получаем

$$\rho(\omega) d\omega = c^3 F(\omega) q^2 dq,$$

где

$$F(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega_a^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega_p^2 \omega^2}.$$

Следовательно

$$\varepsilon_r = \frac{n^2 e^2}{\pi} \int_0^\infty dq q^2 S(q) K(q), \quad (125)$$

где $K(q) = F(\omega_1) + F(\omega_2)$. Множитель $K(q)$ является симметричным алгебраическим выражением по корням ω_1^2 и ω_2^2 биквадратного уравнения

$$\omega^4 - (\omega_a^2 + q^2 c^2) \omega^2 + q^2 c^2 \omega_0^2 = 0,$$

следующего из (121). Это выражение преобразуем, используя теорему Виета:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_a^2 + q^2 c^2, \quad \omega_1^2 \omega_2^2 = q^2 c^2 \omega_0^2.$$

Результат имеет вид

$$K(q) = \frac{1}{\omega_p^2}.$$

Отсюда и из (125) следует

$$\varepsilon_r = \frac{nm}{4\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 S(q). \quad (126)$$

Формула (119) для начальной энергии после перехода к фурье-компонентам принимает вид

$$\varepsilon_0 = \frac{nm}{4\pi^2} \int_0^\infty dq q^2 M(q), \quad (127)$$

где $M(q) = \langle f^2(q\mathbf{n}) \rangle$.

Поскольку $(\mathbf{n} \times \mathbf{f})^2 \leq f^2$, то из (126) и (127) следует, что $\varepsilon_r \leq \varepsilon_0$. Например, если при $t = 0$ электроны получают толчок в одном направлении, а возбужденные атомы расположены сферически-симметрично ($\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} f(r)$, $|\mathbf{k}| = 1$, $\mathbf{k} = \text{const}$), то $\varepsilon_r = 2\varepsilon_0/3$. Таким образом, и в случае (e) из (1) образуются дипольно-неизлучающие состояния. Природа этих состояний становится ясной из анализа формулы (126), согласно которой $\varepsilon_r = 0$ при $\mathbf{q} \times \mathbf{f}(\mathbf{q}) = 0$, то есть при

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0. \quad (128)$$

Из (102), (104) и (108) получаем

$$\nabla \times E_\omega = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}_\omega; \quad (129)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \boldsymbol{\xi}_\omega = \frac{e}{m} \mathbf{E}_\omega + \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (130)$$

а из (128) и (130) следует

$$(\omega_0^2 - \omega^2) (\nabla \times \boldsymbol{\xi}_\omega) = \frac{e}{m} (\nabla \times \mathbf{E}_\omega). \quad (131)$$

Теперь возьмем ротор от (123) и учтем (129):

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{H}_\omega = 0. \quad (132)$$

Уравнения (129), (131), (132) образуют замкнутую систему для трех величин: $\nabla \times \mathbf{E}_\omega$, \mathbf{H}_ω , $\nabla \times \boldsymbol{\xi}_\omega$. Поскольку они являются однородными (ср. с (130)), а среда бесконечной, то их решение имеет вид

$$\nabla \times \mathbf{E}_\omega = 0, \quad \mathbf{H}_\omega = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{\xi}_\omega = 0.$$

Следовательно,

$$\nabla \times \mathbf{D}_\omega = \nabla \times (\mathbf{E}_\omega + 4\pi re \boldsymbol{\xi}_\omega) = 0.$$

Отсюда и из уравнения (99), переписанного в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\omega = 0,$$

следует, что $\mathbf{D}_\omega = 0$, а значит, $\mathbf{D} = 0$, откуда следует (118).

Из $\mathbf{H}_\omega = 0$ и (123) заключаем, что $\varepsilon = 0$, то есть частота ω определяется формулой (117). Таким образом, аналогом дипольно-неизлучающих состояний в случае (е) из (1) являются обсуждавшиеся выше продольные волны. Часть энергии возбуждения на длительное время удерживается этими колебаниями. В дальнейшем эти когерентные состояния разрушаются вследствие межатомных столкновений, и их энергия либо излучается, либо переходит в другие степени свободы.

Рассмотрим теперь аналог фундаментального решения (13). В пределе сплошной среды следует произвести замену

$$\delta_{ab} \rightarrow n \delta^{(3)}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b), \quad (133)$$

которая согласуется с правилом (64). Однако, как видно из (119), при такой замене $\varepsilon_0 = \infty$, что физически бессмысленно. Причина очевидна: начальное условие вида (133) не удовлетворяет условиям применимости приближения сплошной среды

$$l \ll L_0, \quad q_0 l \ll 1, \quad (134)$$

где L_0 — характерный размер начального возбуждения, $q_0 = 1/L_0$. Это затруднение в действительности отсутствует, поскольку в случае (е) из (1) нет необходимости в нахождении фундаментального решения (13). Вследствие $\lambda \ll L$ задача об эволюции любого начального возбуждения среды может быть решена другими методами: численными, разложением на фурье-гармоники, в приближении геометрической оптики и т.д.

В следующем разделе мы убедимся, что все интересные в практическом отношении случаи могут быть легко проанализированы, если рассмотреть аналог фундаментального решения, для которого

$$\frac{c}{\omega_p} \ll L_0 \ll L, \quad (135)$$

причем во всех этих случаях

$$\omega_0 \gg \omega_p, \quad (136)$$

то есть среда является достаточно разреженной. При условиях (135), (136)

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx qc, & \omega_2 &\approx \omega_0 - \frac{\omega_0 \omega_p^2}{2c^2 q^2}; \\ \frac{\tau_1}{\tau_2} &\sim \left(\frac{c}{L_0 \omega_p} \right)^2 \ll 1. \end{aligned} \quad (137)$$

Это означает, что такое достаточно сильно локализованное начальное возбуждение составлено главным образом из медленных необыкновенных волн с малыми λ , для которых закон дисперсии (116) сводится к более простому выражению (137).

Характерная скорость расплывания такого начального возбуждения определяется групповой скоростью этих волн, которая, согласно (137), равна

$$v_s = \frac{d\omega_2}{dq} = \frac{\omega_0 \omega_p^2}{c^2 q^3} \sim \frac{\omega_0 \omega_p^2 L_0^3}{c^2}. \quad (138)$$

7. ЗАТУХАНИЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЛН

В данной статье рассматривается разреженная среда, в которой основным механизмом затухания является доплеровское уширение. Вследствие этого уширения собственная частота осцилляторов в лабораторной системе отсчета, которую далее обозначим через Ω , будет различна.

Обозначим функцию распределения по Ω через $f(\Omega)$. Выполняются соотношения:

$$\int_0^{\infty} d\Omega f(\Omega) = 1, \quad \int_0^{\infty} d\Omega \Omega f(\Omega) = \omega_0.$$

Пусть $\Delta\Omega$ — характерная ширина распределения $f(\Omega)$. С течением времени нарастает разность фаз отдельных осцилляторов, поэтому когерентность разрушается за характерное время

$$\tau \sim 1/\Delta\Omega,$$

в чем и заключается физический смысл затухания когерентных волн. Естественно, что при этом энергия возбуждения среды остается неизменной. Однако вследствие исчезновения когерентности эта энергия будет излучаться за гораздо более длительное время — время спонтанного излучения, в процессе которого атомы излучают независимо один от другого. Малой интенсивностью спонтанного излучения далее будем пренебрегать.

С учетом уширения осцилляторная координата зависит теперь от трех переменных — Ω , \mathbf{r} и t :

$$\xi = \xi_{\Omega}(\mathbf{r}, t).$$

Вместо уравнения (104) имеем

$$\ddot{\xi}_{\Omega} + \Omega^2 \xi_{\Omega} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (139)$$

Вектор поляризации среды равен теперь

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = ne \int_0^{\infty} d\Omega f(\Omega) \xi_{\Omega}(\mathbf{r}, t),$$

следовательно, в качестве ξ в (100) следует подставить величину

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} d\Omega f(\Omega) \xi_{\Omega}(\mathbf{r}, t). \quad (140)$$

Теперь найдем длину затухания коллективных волн, для чего решение уравнений (99)—(103), (139), (140) будем искать в виде

$$\xi_{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \xi_{\Omega} e^{-i\omega t + ipz},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} e^{-i\omega t + ipz},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} e^{i\omega t + ipz}.$$

Тогда получаем уравнения (111)—(113), в которых

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + \omega_p^2 \int_0^{\infty} d\Omega f(\Omega) \frac{1}{\Omega^2 - (\omega + i0)^2} = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega); \\ \varepsilon'(\omega) &= 1 + \omega_p^2 \int_0^{\infty} d\Omega f(\Omega) \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2}; \\ \varepsilon''(\omega) &= \pi\omega_p^2 \operatorname{sign} \omega \int_0^{\infty} d\Omega f(\Omega) \delta(\Omega^2 - \omega^2) = \frac{\pi\omega_p^2}{2\omega} f(|\omega|), \end{aligned} \quad (141)$$

где при расчете использована формула Сохоцкого

$$\frac{1}{a \pm i\delta} = P \left(\frac{1}{a} \right) \mp \pi i \delta(a).$$

В частности, при лоренцевой форме уширения

$$f(\Omega) = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \frac{1}{(\Omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Delta\Omega}{2}\right)^2}$$

диэлектрическая проницаемость равна

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\left(\omega + i\frac{\Delta\Omega}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = \frac{\omega_a^2 - \left(\omega + i\frac{\Delta\Omega}{2}\right)^2}{\omega_0^2 - \left(\omega + i\frac{\Delta\Omega}{2}\right)^2}. \quad (142)$$

Таким образом, продольные колебания, для которых $\varepsilon(\omega) = 0$, затухают по закону

$$\xi \sim e^{-\frac{\Delta\Omega}{2}t}.$$

Для нахождения длины затухания поперечных волн представим p в виде $p = q + ip''$. Амплитуда волн уменьшается по закону

$$\xi \sim e^{-p''z},$$

следовательно, длина затухания $L_d = 1/(2p'')$. При $\omega \approx \omega_0$ из (142) следует

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\omega_p^2}{2\omega_0 \left(\omega_0 - \omega - i\frac{\Delta\Omega}{2}\right)}.$$

Отсюда и из (114), считая затухание слабым эффектом, получаем

$$q = \frac{\sqrt{\omega_0} \omega_p}{c\sqrt{2}(\omega_0 - \omega)}, \quad L_d = \frac{\omega_0 \omega_p^2}{c^2 q^3 \Delta\Omega} = \frac{v_g}{\Delta\Omega}, \quad (143)$$

где v_g определено в (138).

8. ПРИЛОЖЕНИЕ КМС К ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим плазменный цилиндр, помещенный в продольное магнитное поле B_0 . Имея в виду приложение к физике токамаков, рассмотрим типичные для них параметры плазмы

$$n_e = n_i = n \sim 10^{14} \text{ см}^{-3}, \quad T \sim 10^4 \text{ эВ},$$

$$B_0 \sim 5 \cdot 10^4 \text{ Гс}, \quad a \sim 3 \text{ м}, \quad (144)$$

где a — радиус плазменного цилиндра (как в проекте ИТЭР [16]). При условиях (144) плазма является сильно замагниченной [17,18]:

$$\omega_H \tau_c \gg 1, \quad (145)$$

где $\omega_H = \omega_B / \gamma$ — циклотронная частота электронов, $\omega_B = eB_0 / (mc) \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \approx 1$ — релятивистский фактор электрона, v — его скорость,

$$\tau_c \sim 10^{-4} \text{ с} \quad (146)$$

— характерное время электрон-электронных и электрон-ионных столкновений. Таким образом, электроны совершают в основном круговое движение вокруг силовых линий магнитного поля и после $\sim 10^8$ оборотов испытывают удары, резко изменяющие их траектории. Естественно, что в таких условиях роль столкновений мала и должны проявляться когерентные эффекты.

Размер ларморовской орбиты электронов составляет

$$r_H \sim \frac{v_T}{\omega_H} \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \quad (147)$$

где $v_T \sim 3 \cdot 10^9 \text{ см/с}$ — тепловая скорость электронов. Поскольку $r_H \ll a$, то магнитное поле на малых расстояниях является практически однородным, следовательно, электроны, совершая циклотронное движение, находятся в резонансе друг с другом. В результате диполь-дипольного взаимодействия устанавливаются корреляции между орбитами разных электронов: каждый электрон слегка возмущает циклотронное движение других электронов, причем это возмущение находится в одной фазе с вращением выбранного электрона. Отсюда заключаем, что в циклотронном излучении должны быть существенными коллективные когерентные эффекты, которые будут значительно усиливать это излучение. Оценим интенсивность этого излучения и характерное время потери энергии плазмой τ_E . Такая задача должна ставиться следующим образом. При $t = 0$ в плазме «отключим» все источники энергии, то есть реакции синтеза и внешний нагрев. Для простоты «отключим» также и обмен энергией между электронами и ионами. Тогда энергия электронов $\epsilon \sim T$ за счет излучения будет уменьшаться по закону

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau_E} T. \quad (148)$$

Вследствие независимости начальных (при $t = 0$) фаз циклотронного движения разных электронов полную интенсивность I излучения плазмы следует искать по формуле (16), из которой следует оценка

$$I \sim N I_b, \quad (149)$$

где I_b — интенсивность излучения одного электрона с начальной энергией $\varepsilon \sim T$, окруженного другими электронами, имеющими нулевую начальную энергию. Речь здесь, конечно же, идет об энергии, относящейся к осцилляторным (циклотронным) степеням свободы электронов. Именно эти степени свободы находятся в резонансе друг с другом и проявляют коллективные эффекты. В отличие от предыдущих разделов в случае замагниченной плазмы осцилляторы являются двумерными: только компоненты d_x и d_y дипольного момента меняются со временем по гармоническому закону (ось z направлена вдоль \mathbf{B}). Это означает, что при $t = 0$ для всех электронов, кроме одного выбранного, следует положить

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0.$$

В то же время на движение вдоль z , которое не является резонансной степенью свободы, не налагается никаких ограничений. Мы приходим к выводу, что I_b следует вычислять при условии

$$T_{\perp} = 0, \quad T_{\parallel} = T. \quad (150)$$

Ниже мы убедимся, что условие (150), следующее из достаточно тривиального соотношения (16), приведет к довольно нетривиальным выводам. Заметим, что для модели трехмерных изотропных осцилляторов, рассмотренной в предыдущих разделах, условие, при котором рассчитывается I_b , имеет более простой, чем (150), вид: $T = 0$. В остальном же характер физических явлений в замагниченной плазме тот же, что и в случае изотропных осцилляторов: вследствие диполь-дипольного взаимодействия между циклотронными орбитами электронов по плазме распространяются коллективные волны, причем снова имеются два типа волн — быстрая и медленная циклотронные волны.

Итак, при $t = 0$ имеется один электрон с $\varepsilon_{\perp} \neq 0$, $\varepsilon_{\perp} \sim \varepsilon_{\parallel} \sim T$, а для остальных электронов $\varepsilon_{\perp} = 0$, $\varepsilon_{\parallel} \sim T$, то есть при $t = 0$ они движутся только вдоль оси z . Этот выбранный электрон обращается по круговой орбите с радиусом r_H . Отсюда ясно, что характерные значения волновых векторов q таковы:

$$q \sim \frac{1}{r_H}. \quad (151)$$

Из формул (138) и (147), в которых следует теперь положить $L_0 \sim r_H$, $\omega_o = \omega_H$, получаем

$$v_g \sim 10^7 \text{ см/с}. \quad (152)$$

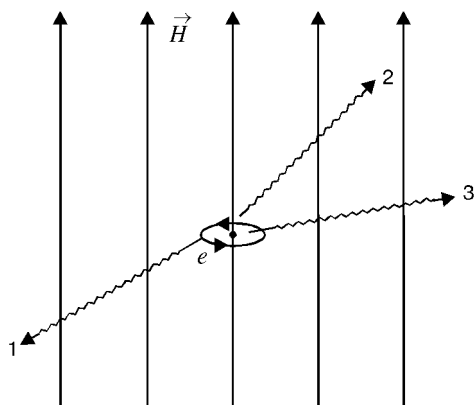


Рис.3. Излучение циклотронных волн СИ. Волны, бегущие почти поперек H , не затухают (в линейном приближении)

Сначала (за время $\sim r_H/v_g$) за счет кулоновского взаимодействия выбранный электрон передает энергию другим электронам, находящимся на расстоянии $\sim r_H$ от него, то есть в пределах ларморовской орбиты. После этой быстрой стадии в плазме возникает возбуждение с

энергией $\sim T$ в области размером $\sim r_H$, чем дополнительно поясняется соотношение (151).

Поскольку

$$\frac{qc}{\omega_0} \equiv \frac{qc}{\omega_H} \sim \frac{c}{r_H \omega_H} \sim \frac{c}{v_T} \gg 1, \quad (153)$$

то это возбуждение составлено главным образом из медленных циклотронных волн. Далее волны начинают распространяться со скоростью $\sim v_g$ и возбуждение «рассасывается». Движение электронов вдоль z приводит к доплеровскому уширению, что вызывает быстрое затухание основной части этих волн (лучи 1 и 2 на рис.3), то есть переход когерентных колебаний в некогерентные, энергия которых, как говорилось в разд.7, излучается очень медленно. Имеется, однако, малая доля ρ незатухающих волн, которые покидают плазму, унося энергию (луч 3).

Физический смысл выражения (141) для ϵ'' заключается в том, что δ -функция в подынтегральном выражении выделяет группу электронов, находящихся в резонансе с циклотронной волной частоты ω , которые и поглощают энергию этой волны. Рассмотрим электроны, движущиеся вдоль силовой линии магнитного поля со скоростью v_z (как уже говорилось, $v_x = v_y = 0$). Резонансная с этим электроном волна в его системе покоя имеет частоту $\omega_0 = \omega_B$ и волновой вектор \mathbf{q}' , а в лабораторной — Ω и \mathbf{q} . Поскольку (Ω, \mathbf{q}) — 4-вектор, то имеем соотношение

$$\omega_B = \gamma(\Omega - v_z q_z),$$

где $\gamma = (1 - v_z^2/c^2)^{-1/2}$. Отсюда следует, что при интересующих нас нерелятивистских скоростях частота резонансной с электроном волны в лабораторной системе отсчета равна

$$\Omega = \frac{\omega_B}{\gamma} + q_z v_z \approx \omega_B - \frac{\omega_B}{2c^2} v_z^2 + q_z v_z. \quad (154)$$

Приравняв эту частоту к частоте $\omega = \omega(\mathbf{q})$ движущейся по плазме волны, получим условие резонанса, то есть условие наличия поглощения

$$\Omega = \omega(\mathbf{q}), \quad (155)$$

которое перепишем в виде

$$v_z^2 - 2 \frac{c^2 q_z}{\omega_B} v_z + 2c^2 \frac{\omega - \omega_B}{\omega_B} = 0.$$

Отсюда находим скорости резонансных электронов

$$(v_z)_{1,2} = \frac{c}{\omega_B} (c q_z \pm \sqrt{D}),$$

$$D = c^2 q_z^2 - 2 \omega_B (\omega(\mathbf{q}) - \omega_B). \quad (156)$$

Очевидно, условие отсутствия поглощения имеет вид

$$D < 0. \quad (157)$$

Покажем, что существуют волны, для которых это условие выполняется, и поэтому такие волны не поглощаются. Для этих волн вектор \mathbf{q} вещественный, что и предполагалось при выводе (157). Волновые векторы \mathbf{q} этих волн почти перпендикулярны к направлению \mathbf{B} , то есть $|q_z| \ll q$. Поскольку в (156) оба слагаемых в правой части одного порядка величины и q_z мал, то во втором слагаемом достаточно положить $q_z = 0$, то есть в качестве $\omega(\mathbf{q})$ подставить закон дисперсии $\omega(q)$ волн с $\mathbf{q} \perp \mathbf{B}$, что существенно упрощает расчет. По этой же причине в законе дисперсии $\omega(\mathbf{q})$ из (156) можно положить $T_\perp = T_\parallel = 0$. Более строгий расчет приведен в приложении 6.

Система уравнений, описывающая нерелятивистскую плазму в магнитном поле (\mathbf{B}_0), направленном вдоль оси z , имеет вид (ср. с (99)—(104))

$$m \ddot{\xi}_\perp = \frac{e}{c} \ddot{\xi}_\perp \times \mathbf{B}_0 + e \mathbf{E}_\perp; \quad m \ddot{\xi}_z = e E_z;$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} n e \dot{\xi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (158)$$

где знаком « \perp » отмечены компоненты, перпендикулярные \mathbf{B}_0 . Рассматривая зависимость от \mathbf{r} и t вида $e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}$, для амплитуд волны из (158) получаем систему

$$\begin{aligned} -\omega^2 \xi_{\perp} &= -i\omega_B \omega \xi_{\perp} \times \mathbf{K} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\perp}; & -\omega^2 \xi_z &= \frac{e}{m} E_z; \\ \mathbf{q} \times \mathbf{E} &= \frac{\omega}{c} \mathbf{B}; & \mathbf{q} \times \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}; \end{aligned} \quad (159)$$

где \mathbf{B} , \mathbf{E} — поля циклотронной волны, $\mathbf{K} = \mathbf{B}_0/B_0$.

Отсюда и из (100) следуют уравнения

$$D_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}; \quad (160)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{q} \mathbf{E}) - q^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad (161)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &\equiv \varepsilon = \frac{\omega_B^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_B^2 - \omega^2}; \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &\equiv -if, \quad f = \frac{\omega_B \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_B^2)}; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0, \quad \varepsilon_{zz} \equiv \eta = 1 - \omega_p^2/\omega^2.$$

Приравняв детерминант (161) к нулю, с учетом (160) получаем дисперсионное уравнение, из которого определяются зависимости $\omega = \omega(\mathbf{q})$ для коллективных волн [19]:

$$\det \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) + q_{\alpha} q_{\beta} - q^2 \delta_{\alpha\beta} \right] = 0. \quad (162)$$

При $\mathbf{q} \perp \mathbf{B}_0$ из (162) следует уравнение

$$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega) = 0,$$

где $F_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \eta - q^2$, $F_2 = \varepsilon(\varepsilon - N^2) - f^2$, $N = qc/\omega$ — показатель преломления. Направим ось x вдоль \mathbf{q} . Согласно (159) $B_x = 0$. Из уравнения $F_1 = 0$ следует соотношение

$$\omega^2 = q^2 c^2 + \omega_p^2.$$

Последнее определяет волну, у которой $E_x = E_y = B_z = 0$, $\xi_x = \xi_y = 0$.
Уравнение $F_2 = 0$ легко приводится к виду

$$\omega^4 - (\omega_B^2 + 2\omega_p^2 + q^2 c^2) \omega^2 + \omega_p^4 + q^2 c^2 (\omega_B^2 + \omega_p^2) = 0. \quad (163)$$

Оно описывает быструю и медленную циклотронные волны, у которых $E_z = 0$, $\xi_z = 0$, $B_x = B_y = 0$. Для быстрой волны

$$\omega^2 = A + \sqrt{D} \equiv \omega_f^2,$$

где

$$A = \omega_p^2 + (\omega_B^2 + q^2 c^2) / 2,$$

$$D = \frac{1}{4} (q^2 c^2 - \omega_B^2)^2 + \omega_p^2 \omega_B^2.$$

Для медленной волны

$$\omega^2 = A - \sqrt{D} \equiv \omega_s^2.$$

При $q^2 c^2 - \omega_B^2 \gg \omega_p \omega_B$

$$\omega_f^2 \approx \omega_p^2 + q^2 c^2 + \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{q^2 c^2 - \omega_B^2};$$

$$\omega_s^2 \approx \omega_B^2 + \omega_p^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{q^2 c^2 - \omega_B^2}.$$

В частности, в представляющем наибольший интерес случае (153)

$$\omega_s^2 \approx \omega_B^2 + \omega_p^2 - \frac{\omega_p^2 \omega_B^2}{q^2 c^2}.$$

Поскольку при параметрах (144) выполняется условие (136), то отсюда получаем

$$\omega_s \approx \omega_B + \frac{\omega_p^2}{2\omega_B} - \frac{\omega_p^2 \omega_B}{2q^2 c^2}. \quad (164)$$

Сравнение (138) и (164) подтверждает полученную ранее оценку (152).

При подстановке (164) в (156), (157) можно пренебречь последним слагаемым в (164). Условие отсутствия поглощения (157) принимает вид

$$|q_z| < \frac{\omega_p}{c}. \quad (165)$$

Таким образом, не поглощаются волны, у которых волновые векторы \mathbf{q} составляют с плоскостью, перпендикулярной магнитному полю \mathbf{B}_0 , углы из интервала

$$|\alpha| < \alpha_c, \quad (166)$$

где

$$\alpha_c = \frac{\omega_p}{qc} \sim \frac{\omega_p r_H}{c} \sim \frac{\omega_p v_T}{\omega_B c} \sim 0,04. \quad (167)$$

Угол $\alpha_c \approx 3^\circ$, а полный угол раствора области прозрачности (166) $2\alpha_c \sim 6^\circ$. На единичной сфере область (166) образует кольцо (обруч) площадью $4\pi\alpha_c$, поэтому при «расплывании» начального возбуждения (см. рассуждения, следующие после формулы (152)) все эти коллективные волны поглощаются, кроме малой доли

$$\rho = \frac{4\pi\alpha_c}{4\pi} = \alpha_c. \quad (168)$$

Проанализируем полученную картину. Уравнение баланса энергии (148) имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = -I_b, \quad (169)$$

где I_b — интенсивность излучения при одном возбужденном при $t=0$ электро-роне. Затухающие волны несут энергию $\sim \rho T$ и через время $\tau_1 \sim a/v_g \sim \sim 10^{-5}$ с достигают границы плазмы и покидают ее, превращаясь в электро-магнитные волны (см. приложение 7). Поскольку $\tau_c \gg \tau_1$ (см. (146)), то когерентность при таком движении волн не нарушается. Через время $\sim \tau_c$ происходят столкновения и система возвращается к прежней ситуации — такой же, как и при $t=0$, но с абсолютно другими фазами осцилляторов. Далее каждый электрон опять испускает из плазмы энергию $\sim \rho T$ и т.д. Таким образом,

$$I_b \sim \frac{\rho T}{\tau_c}. \quad (170)$$

Из сравнения (169), (170) со (148) получаем оценку

$$\tau_E \sim \tau_c / \rho \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Таким будет время жизни плазмы, не окруженной металлическим кожухом. Испускаемые электронами циклотронные волны миллиметрового диапазона хорошо отражаются первой стенкой токамака, однако уже после первого отражения из-за практически полной случайности больших фаз этих волн когерентность теряется. Энергия этих волн переходит в энергию некогерентного возбуждения плазмы, которая, как было указано ранее, практически не излучается. Однако при первом отражении от стенки будет поглощена доля энергии

$$R \sim \sqrt{\omega/\sigma} \approx \sqrt{\omega_B/\sigma} \sim 3 \cdot 10^{-3},$$

где $\sigma \sim 10^{17} \text{ с}^{-1}$ — проводимость стенки токамака. Таким образом, интенсивность (170) следует домножить на R . Окончательно получаем

$$\tau_E \sim \tau_c / (\rho R) \sim 1 \text{ с}, \quad (171)$$

что согласуется с экспериментальным временем, полученным на установках TFTR и JET. Такое совпадение, однако, не следует рассматривать как полное подтверждение развитой в данном разделе теории (скорее, это гипотеза), поскольку имеется ряд эффектов, которые в ней не учтены. Они обсуждаются в следующем разделе.

В заключение данного раздела остановимся на обсуждении формул (154), (157). В (154) учтена релятивистская поправка $\sim v_z^2/c^2$, которая оказалась существенной в области малых углов α . Таким образом, отсутствие поглощения волн при малых α является релятивистским эффектом. Может возникнуть сомнение в том, что учет квадратичных по скорости членов нарушит линейность КМС, которая существенным образом была использована выше. Очевидно, однако, что линейность не нарушается, поскольку осцилляторной резонансной переменной является ξ_{\perp} , по которой уравнения КМС остаются линейными, а учитываются квадратичные по v_z члены (см. приложение 6).

9. НЕЯСНЫЕ ВОПРОСЫ

Таким образом, КМС оказывается довольно содержательной моделью. В ее рамках удается учесть диполь-дипольное взаимодействие, которое, как было показано выше, вызывает эффект экранировки, замедляющий выход излучения из вещества. В результате экранировки образуется локализованное возбуждение с нулевым дипольным моментом и поэтому не излучающее. Это когерентное возбуждение в последующем разрушается вследствие межатомных столкновений, и избыточная энергия медленно уходит из вещества в виде некогерентного излучения.

Возможно (но маловероятно), что эффект экранировки является спецификой модели классических осцилляторов. Необходимо провести соответствующий расчет для квантовой двухуровневой модели атомов. Диполь-дипольное взаимодействие атомов можно учесть в первом порядке теории возмущений. Требуется учесть также эффект фазировки осцилляторов [4—9], который вызывается нелинейными слагаемыми различной природы в уравнениях движения осцилляторов. Фазировка наступает вследствие зави-

симости фазы осцилляторов от их амплитуды, в результате чего когерентное неизлучающее состояние постепенно может снова превратиться в сверхизлучающее, о чем свидетельствуют результаты [7].

Может оказаться существенной неоднородность магнитного поля в токамаке, в частности, кривизна силовых линий, что также требуется учесть при расчете τ_E . Расчет, изложенный в предыдущем разделе, относится к случаю однородного магнитного поля и плотности плазмы, который весьма далек от условий токамака. В этих условиях возникает диффузионный режим переноса когерентного циклотронного излучения (см. приложение 8), который, вероятно, может объяснить значения коэффициентов переноса в токамаке.

По нашему мнению, было бы желательно построить детальную теорию рассмотренного здесь коллективного циклотронного излучения замагниченной плазмы. Это становится особенно важным, если учесть то обстоятельство, что до сих пор отсутствует объяснение характерного для токамаков аномально большого переноса энергии [20,21]. В такой ситуации любая гипотеза требует проверки.

Автор признателен И.Н.Головину, Б.Б.Кадомцеву, С.И.Крючкову, И.Н.Мешкову, И.Н.Михайлову, В.В.Орлову, Б.М.Смирнову и М.П. Файфману за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Теория Дикке

Пусть имеется N атомов, ядра которых имеют заряд z и покоятся в точках r_a ($a = 1, 2, \dots, N$). Поведение атомов в электромагнитном поле $A^\mu(r, t) = (\varphi, \mathbf{A})$ описывается гамильтонианом (здесь и далее $\hbar = m_e = e = 1$)

$$\hat{H} = \sum_{a,s} \left\{ \frac{1}{2} \left[-i\nabla_{as} + \frac{1}{c} \mathbf{A}(r_{as}, t) \right]^2 - \varphi(\mathbf{r}_{as}, t) \right\} + u,$$

где \mathbf{r}_{as} — координаты электронов, относящихся к атому a (обменом атомов электронами пренебрегаем), $s = 1, \dots, z$, u — потенциальная энергия электронов и ядер. Гамильтониан упрощается в дипольном приближении ($\mathbf{r}_{as} = \mathbf{r}_{as} - \mathbf{r}_a$):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{as}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t);$$

$$\varphi(\mathbf{r}_{as}, t) \approx \varphi(\mathbf{r}_a, t) + \mathbf{r}_{as} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_a} \varphi(\mathbf{r}_a, t), \quad (\text{П1.1})$$

которое справедливо при условии

$$\lambda \gg 1, \quad (\text{П1.2})$$

где λ — характерная длина волны.

В уравнении Шредингера $i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$ для волновой функции электронов $\Psi(\mathbf{r}_{as}, t) \equiv \Psi(\mathbf{r}_{1s}, \dots, \mathbf{r}_{Ns}; t)$ произведем калибровочное преобразование:

$$\Psi(\mathbf{r}_{as}, t) = \exp \left\{ -i \sum_{as} \mathbf{p}_{as} \mathbf{A}(\mathbf{r}_a, t) - i \int_{-\infty}^t \varphi(\mathbf{r}_a, t') dt' \right\} \Psi'.$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что уравнение Шредингера для новой волновой функции принимает вид $i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} = \hat{H}' \Psi'$, где

$$\hat{H}' = \sum_{as} \left(-\frac{1}{2} \nabla_{as}^2 \right) + u + \hat{v}_d; \quad (\text{П1.3})$$

$$\hat{v}_d = - \sum_a \mathbf{d}_a \mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t), \quad (\text{П1.4})$$

где $\mathbf{d}_a = - \sum_{s=1}^z \mathbf{p}_{as}$ — оператор дипольного момента a -го атома,

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ — электрическое поле. Таким образом, при условии (П1.2) для сколь угодно протяженной системы атомов справедливы формулы (П1.3), (П1.4) (а не при условии $L \ll \lambda$, как иногда считают).

Следуя [1], рассмотрим приближение двухуровневых атомов, когда учитываются только два состояния с волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 и энергиями E_1, E_2 ; $E_2 > E_1$. Уровни E_1, E_2 считаем невырожденными.

Волновая функция двухуровневого атома может быть записана в виде $\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2$ или в виде двухкомпонентного вектора $e = (c_1, c_2)$. Следовательно, оператор любой физической величины может быть представлен в виде комплексной эрмитовой (2×2) -матрицы, действующей на столбец e . Таким образом, описание состояний двухуровневого атома полностью аналогично описанию состояний спина $s = 1/2$, в частности, состояния α и β с $s_z = +1/2$ и $s_z = -1/2$ соответствуют верхнему и нижнему состояниям атома.

Состояния системы из N двухуровневых атомов можно классифицировать как собственные состояния операторов τ^2 и τ_z , где $\boldsymbol{\tau} = \sum_{a=1}^N \mathbf{s}_a$ — суммарный (энергетический) спин: $\psi = |\boldsymbol{\tau}, M, \alpha\rangle$. Здесь M — собственное значение

τ_z . Смысл квантового числа α поясняется в [2] и для дальнейшего не существует.

Гамильтониан атомов и электромагнитного поля имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{v}; \quad (\text{П1.5})$$

$$\hat{H}_0 = \sum_k \omega_k \hat{c}_k^+ \hat{c}_k + \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z; \quad (\text{П1.6})$$

$$\hat{v} = \sum_k g_k (\sigma^+ \hat{c}_k + \sigma \hat{c}_k^+), \quad (\text{П1.7})$$

где $\sigma_z = \sum_a \sigma_a^z$, $\sigma_{\pm} = \sum_a \sigma_a^{\pm}$, \hat{c}_k^+ , \hat{c}_k — операторы уничтожения и рождения фотонов, $k = (\mathbf{k}, \mu)$ — квантовые числа фотонов (импульс, поляризация, $\mu = \pm 1$), $\omega_k = ck$, $\omega_0 = E_2 - E_1$,

$$\sigma_a^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_a = 2s_z; \quad \sigma_a^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_a, \quad \sigma_a^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_a,$$

$g_k = \omega_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_k v}} (\mathbf{e}_{k\mu} \mathbf{d})$, v — нормировочный объем, $\mathbf{d} = \langle 2 | \mathbf{d} | 1 \rangle$, $\mathbf{e}_{k\mu}$ — вектор поляризации фотона. Оператор \hat{v} взаимодействия атомов с полем в (П1.7) записан для модели Дикке

$$L \ll \lambda. \quad (\text{П1.8})$$

Полный момент является сохраняющимся квантовым числом, поскольку $[\tau^2, \hat{H}] = 0$. Он принимает значения $0 \leq \tau \leq N/2$. Оператор \hat{v} изменяет z -проекцию полного спина $\tau_z = \frac{1}{2} \sigma_z$ на единицу ($M_f - M_i = \pm 1$) и рождает либо уничтожает один фотон. Если «отключить» \hat{v} , то будем иметь независимые друг от друга континуум состояний поля и эквидистантный спектр состояний вещества:

$$E_{\tau M} = \omega_0 M, \quad -\tau \leq M \leq \tau.$$

По «золотому» правилу Ферми скорость перехода $(\tau, M) \rightarrow (\tau, M - 1)$ равна

$$\begin{aligned} \lambda_M &= \sum_k |\langle 1k, \tau, M - 1 | \hat{v} | 0, \tau, M \rangle|^2 2\pi\delta(\omega_k - \omega_0) = \\ &= (\tau - M + 1) (\tau + M) \lambda_s, \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

где $\lambda_s = 4\omega_0^3 d^2 / 3c^3$ — скорость спонтанного перехода $2 \rightarrow 1$ изолированного атома.

Пусть при $t = 0$ система атомов находится в состоянии $|\tau, M_0\rangle$. В результате излучения средняя энергия $\bar{E} = \omega_0 \bar{M}$ атомов будет уменьшаться по закону

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -I,$$

где $I = \omega_0 \lambda_M \approx I_0(\tau^2 - M^2)$ — полная интенсивность излучения, $I_0 = \omega_0 \lambda_s$ — интенсивность излучения изолированного атома. Считая дисперсию M малой ($\Delta M \ll \tau$, $M \approx \bar{M}$), отсюда и из (П1.9) находим

$$M = -\tau \operatorname{th} [2\lambda_s \tau(t - t_0)]; \quad (\text{П1.10})$$

$$I = I_0 \frac{\tau^2}{\operatorname{ch}^2 [2\lambda_s \tau(t - t_0)]}, \quad (\text{П1.11})$$

где t_0 — время задержки импульса, определяемое из начального условия

$$M_0 = \tau \operatorname{th} (2\lambda_s \tau t_0). \quad (\text{П1.12})$$

Наиболее интересен случай полностью инвертированной при $t = 0$ системы атомов:

$$\tau = N/2 = M_0. \quad (\text{П1.13})$$

Для нахождения t_0 в (П1.12) следует положить $M_0 = \tau - k$, $k \sim 1$ (в этом проявляется ошибка, возникшая при замене $M \rightarrow \bar{M}$). Тогда с логарифмической точностью

$$t_0 = \frac{1}{4\lambda_s \tau} \ln \tau. \quad (\text{П1.14})$$

Из (П1.11) видно, что по истечении времени задержки t_0 возникает сильный ($I \sim I_0 N^2$) короткий ($\Delta t \sim 1/\lambda_s N$) импульс. При этом $t_0 \sim \Delta t \ln N \gg \Delta t$.

Эти выводы получены в первом порядке теории возмущений по \hat{v} . Во втором и следующих порядках в результате обмена виртуальными фотонами возникает диполь-дипольное взаимодействие атомов (см. любой курс квантовой электродинамики), радиационные эффекты (перенормировка массы, заряда и т.д.), которыми Дикке пренебрегает. В разд.1 и далее показано, что диполь-дипольное взаимодействие не может быть отброшено и приводит к качественному изменению характера процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Корреляции в системе двухуровневых атомов

Состояния пары атомов независимы, если равен нулю коррелятор

$$Q = \frac{1}{s(s+1)} \langle (\mathbf{s}_1 - \langle \mathbf{s}_1 \rangle)(\mathbf{s}_2 - \langle \mathbf{s}_2 \rangle) \rangle = \frac{1}{s(s+1)} (\langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle - \langle \mathbf{s}_1 \rangle^2),$$

где учтено, что $\langle \mathbf{s}_1 \rangle = \langle \mathbf{s}_2 \rangle = \dots = \langle \mathbf{s}_N \rangle$

Поскольку в состоянии $\psi = |\tau, M\rangle$

$$\langle \tau_x \rangle = \langle \tau_y \rangle = 0,$$

то

$$\langle \mathbf{s}_1 \rangle = A \hat{z},$$

где \hat{z} — единичный вектор, направленный вдоль оси z . Отсюда $A = \langle \mathbf{s}_{1z} \rangle = M/N$. Далее

$$\langle \tau^2 \rangle = \tau(\tau+1) = \langle (\sum_{a=1}^N \mathbf{s}_a)^2 \rangle = N \langle \mathbf{s}_1^2 \rangle + N(N-1) \langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle,$$

где учтено, что $\langle \mathbf{s}_a \mathbf{s}_b \rangle = \langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle$ для любых a и b . Отсюда

$$\langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle = \frac{\tau(\tau+1)}{N(N-1)} - \frac{s(s+1)}{N-1},$$

$$Q = \frac{\tau^2 - M^2}{s(s+1)N^2},$$

где отброшены малые слагаемые ($\sim 1/N$).

В состояниях с $\tau \sim N$ $Q \sim 1$, то есть атомы сильно коррелированы. Параметр Q неадекватен только в максимально когерентных случаях $\tau - M \ll \tau$, $\tau \sim N$, для которых, как следует из приведенной выше формулы, $Q \ll 1$. Этот параметр вполне адекватно описывает ситуацию в представляющих сейчас наибольший интерес случаях $\tau \ll N$. Поскольку $-\tau \leq M \leq \tau$, то в этих случаях $Q \ll 1$, то есть корреляции между атомами отсутствуют. Согласно теории Дикке [1] излучение в этих состояниях также отсутствует:

$$I \approx (\tau^2 - M^2)I_0 \approx 0,$$

где I_0 — интенсивность излучения отдельного атома.

Такие состояния полностью аналогичны неизлучающим состояниям системы классических осцилляторов (разд.4). Мы видим, что если нет кор-

реляции атомов в начале, то она не возникает и в последующем. Таким образом, в модели Дикке отсутствует механизм фазировки атомов. Фазировка появляется только при учете диполь-дипольного взаимодействия атомов (разд.3, 4), которое в работе [1] не учитывается. Время задержки импульса сверхизлучения у Дикке связано вовсе не с тем, что в течение этого периода у атомов устанавливается одинаковая фаза. Задержка импульса является лишь особенностью динамики системы с самого начала полностью сфазированных атомов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Нелинейный механизм фазировки

Этот универсальный механизм, предложенный в 1960 году А.В.Гапоновым-Греховым [23], наиболее детально изложен в [4]. В [7] показано, что в системе классических нелинейных осцилляторов по этому механизму возникает их фазировка и, как следствие, сверхизлучение. Подчеркнем, однако, что в [7] по традиции отбрасывалось диполь-дипольное взаимодействие, что неправомерно. В данной работе показано, что диполь-дипольное взаимодействие приводит к быстрому сверхизлучению части энергии и образованию метастабильного состояния (эффект экранировки). Нелинейность на этом этапе не проявляется. Совместный учет диполь-дипольного взаимодействия и эффекта нелинейной фазировки является сложной задачей, которую следует решить в будущем. Можно предположить, что нелинейная фазировка может разрушить метастабильное состояние и привести к высвечиванию оставшейся части энергии в режиме сверхизлучения.

Следуя [7], отбросим диполь-дипольное взаимодействие и рассмотрим одномерные заряженные осцилляторы ($a = 1, 2, \dots, N$), сосредоточенные в квазистатической области $L \ll \lambda$:

$$\ddot{x}_a = \omega_0^2 (1 + \gamma x_a^2) x_a = - \frac{2e^2 \omega_0^2}{3me^3} \sum_b \dot{x}_b,$$

где правая часть моделирует радиационное трение (ср. с (20)). После подстановки

$$x_a = b(F_a(t) e^{-i\omega t} + F_a^*(t) e^{i\omega t})$$

и отбрасывания вторых производных от F_a получаем

$$\dot{F}_a + i\delta(|F_a|^2 - 1) F_a = - \frac{1}{2} \beta \sum_b F_b, \quad (\text{П3.1})$$

где $\omega = \omega_0 + \delta$, $\delta = 3\gamma\omega_0 b^2 / 2$, $\beta = 2r_0\omega_0^2 / 3c$, $r_0 = e^2 / mc^2$.

Из компонент комплексной безразмерной амплитуды $F_a = R_a + i\tau_a$ удобно образовать трехмерный двухкомпонентный вектор $\mathbf{r}_a = (R_a, \tau_a, 0)$ с равной нулю z -компонентой. Движение системы осцилляторов тогда довольно наглядно изображается N точками, лежащими в плоскости (x, y) , и описывается уравнением

$$\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_a) \times \mathbf{r}_a + f, \quad (\text{П3.2})$$

где $\mathbf{v}_a \equiv \dot{\mathbf{r}}_a$, $f = -\frac{1}{2} \beta \sum_a \mathbf{r}_a$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = (0, 0, -\delta(r^2 - 1))$. Таким образом, точки совершают круговое движение вокруг начала координат ($x = y = 0$) с угловой скоростью $\omega = \omega(r)$. Кроме того, если центр тяжести системы точек $\mathbf{p}_0 = \sum_a \mathbf{r}_a / N$ смещен из начала координат, то вся система как целое движется со скоростью f в направлении, противоположном \mathbf{p}_0 .

В случае $N \gg 1$ применимо континуальное приближение. Из сохранения числа осцилляторов

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0$$

и следующего из (П3.2) свойства $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ заключаем, что движение точек подобно течению несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n = 0, \quad (\text{П3.3})$$

где $n(\mathbf{r}, t)$ — плотность точек на плоскости (x, y) .

Скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ выражается согласно (П3.2) через эту плотность:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r} + f(t); \quad (\text{П3.4})$$

$$\mathbf{f}(t) = -\frac{1}{2} \beta \int d^2r \mathbf{r} n(\mathbf{r}, t), \quad (\text{П3.5})$$

поэтому уравнение (П3.3) для $n(\mathbf{r}, t)$ является нелинейным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(r, \varphi, t)}{\partial t} - \delta(r^2 - 1) \frac{\partial n}{\partial \varphi} + (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) \frac{\partial n}{\partial r} + \\ + (-f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П3.6})$$

где φ — угол между \mathbf{r} и осью x .

Пусть при $t = 0$ распределение осцилляторов по фазам равномерное ($n(r, \varphi, 0) = n_0(r)$). Тогда из (ПЗ.6) следует, что оно будет стационарным: $n(r, \varphi, t) = n_0(r)$. Исследуем устойчивость такого распределения, для чего линеаризуем уравнение (ПЗ.6) по малому возмущению $n^{(1)}$:

$$n(r, \varphi, t) = n_0(r) + n^{(1)}(r, \varphi, t);$$

$$\frac{\partial n^{(1)}}{\partial t} - \delta(r^2 - 1) \frac{\partial n^{(1)}}{\partial \varphi} + (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) n_0'(r) = 0; \quad (\text{ПЗ.7})$$

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \beta \int d^2r \mathbf{r} n^{(1)}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{ПЗ.8})$$

Разложим $n^{(1)}$ по собственным модам:

$$n^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n_m(r, t) e^{im\varphi}, \quad n_m = n_m^*.$$

Моду с $m = 0$ следует отнести к $n_0(r)$, поэтому $n_0 = 0$. Скорость \mathbf{f} определяется дипольными ($m = \pm 1$) модами:

$$f_x = \frac{1}{2} (\tau + \tau^*), \quad f_y = \frac{i}{2} (\tau - \tau^*),$$

где $\tau(t) = -\pi\beta \int_0^{\infty} dr r^2 n_1(r, t)$. Отсюда и из (ПЗ.7) получаем:

$$\frac{\partial n_1(r, t)}{\partial t} - i\delta(r^2 - 1) n_1(r, t) = \frac{\pi}{2} \beta \tau(t) n_0'(r) = 0; \quad (\text{ПЗ.9})$$

$$\frac{\partial n_m(r, t)}{\partial t} - im\delta(r^2 - 1) n_m(r, t) = 0, \quad m \neq \pm 1. \quad (\text{ПЗ.10})$$

Согласно (ПЗ.10) $n_m(r, t) = n_m(r, 0) \exp [im\delta(r^2 - 1) t]$, поэтому при $t \rightarrow \infty$ моды $m \neq \pm 1$ дают в $n(\mathbf{r}, t)$ все быстрее и быстрее осциллирующий при изменении r вклад. Это означает, что моды $m \neq \pm 1$ дают в любую наблюдаемую величину (интенсивность квадрупольного излучения и т.д.) экспоненциально убывающий при $t \rightarrow \infty$ вклад.

Решение (ПЗ.9) для дипольной моды ищем в виде $n_1(r, t) = e^{pt} n_1(r)$, где $p = p' + ip''$ — комплексное число, заранее предполагая, что существует неустойчивость ($p' > 0$). Тогда находим:

$$n_1(r) = \frac{\pi\beta n_0'(r)}{2(p - i\delta(r^2 - 1))} \tau_0;$$

$$\tau_0 = \int_0^{\infty} dr r^2 n_1(r).$$

Отсюда следует уравнение $\tau_0 \cdot \Delta = 0$, следовательно,

$$\Delta + 1 + \frac{\beta N}{2} (\tau_1 + i\delta\tau_2) = 0, \quad (\text{ПЗ.11})$$

$$\tau_1 = \int_0^{\infty} \frac{dr g_0(r)r}{p - i\delta(r^2 - 1)}, \quad \tau_2 = \int_0^{\infty} \frac{dr g_0(r)r^2}{[p - i\delta(r^2 - 1)]^2}. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Здесь введена функция распределения осцилляторов по энергиям

$$g_0(r) = \frac{2\pi}{N} n_0(r),$$

нормированная условием

$$\int_0^{\infty} dr r g_0(r) = 1. \quad (\text{ПЗ.13})$$

Исследуем интересный случай малого начального (при $t = 0$) разброса осцилляторов по энергиям $\Delta E/E \ll 1$, когда все точки в плоскости (x, y) сосредоточены вблизи окружности $r = 1$. Поскольку $|z| \sim \Delta E/E$, где $z = r - 1$, то

$$|z| \ll 1. \quad (\text{ПЗ.14})$$

Формулы (ПЗ.12), (ПЗ.13) упрощаются:

$$\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz g_0(z)}{p - 2i\delta z}, \quad \tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz g_0(z)}{(p - 2i\delta z)^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz g_0(z) = 1.$$

Пусть

$$g_0(z) = \frac{\Delta z}{\pi} \frac{1}{z^2 + (\Delta z)^2}.$$

Тогда

$$\tau_1 = \frac{1}{p + 2\delta\Delta z}, \quad \tau_2 = \frac{1}{(p + 2\delta\Delta z)^2}.$$

Отсюда и из (ПЗ.11) получаем

$$p = -2\delta\Delta z - \frac{\beta N}{4} + \frac{\beta N}{4} \sqrt{1 - i\theta}, \quad (\text{ПЗ.15})$$

где

$$\theta = \frac{8\delta}{\beta N}, \quad (\text{ПЗ.16})$$

а при извлечении корня следует взять его значение с положительно вещественной частью. Случай $p' > 0$ возможен только при выборе знака в (ПЗ.15), откуда следует:

$$p' = \frac{\beta N}{4} (-\theta\Delta z - 1 + D), \quad (\text{ПЗ.17})$$

$$\text{где } D = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \theta^2} \right) \right]^{1/2}.$$

При $\Delta z \neq 0$ вращение точек вокруг начала координат является неравномерным, имеется разброс $\Delta\omega$ по частотам ω . Точки с $r < 1$ движутся по часовой стрелке, а с $r > 1$ — против (для конкретности рассматривается случай $\delta < 0$). Из-за разброса частот возмущение n_1 растягивается в азимутальном направлении (по φ) и вследствие этого затухает, что описывается первым слагаемым в (ПЗ.17). Второе и третье слагаемые описывают эффект фазировки осцилляторов. Пусть при $t = 0$ все точки сосредоточены в верхней части окружности $r = 1$. Тогда в результате излучения в начальный момент времени окружность как целое будет смещаться со скоростью \mathbf{f} вниз — в отрицательном направлении оси y . Смещение частиц по радиусу r зависит от угла φ (фазы): $\Delta r \approx -|\Delta y| \sin \varphi$. Каждая из этих точек начнет вращаться с частотой $\omega = -2|\delta||\Delta y| \sin \varphi$ против часовой стрелки, причем точки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ остаются неподвижными и расположенными по-прежнему на окружности $r = 1$ (с точностью до $\sim \Delta y^2$). Тогда точки начнут сгущаться вблизи $\varphi = \pi$. Это и есть начальная стадия фазовой группировки. В дальнейшем движение точек становится более сложным и уже не сводится к простой группировке по углу φ .

Таким образом, второе и третье слагаемые в (ПЗ.17) описывают формирование сгустков частиц, ведущее к испусканию всей энергии в режиме сверхизлучения. Первое слагаемое описывает противоположный эффект — рассасывание сгустков, в результате действия которого сверхизлучение может не возникнуть. Из (ПЗ.17) и условия $p' > 0$ заключаем, что нелинейная «раскачка» сверхизлучения возникнет лишь при достаточно малом разбросе осцилляторов по энергиям:

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \Delta z < (D - 1)/\theta. \quad (\text{ПЗ.18})$$

Вспоминая, что диполь-дипольное взаимодействие приводит к когерентному, сохраняющему фазы запираанию излучения, приходим к выводу о сложности явлений, возникающих при одновременном действии всех рассмотренных эффектов. Это одна из задач, которые предстоит решить в будущем.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Прямой расчет $\tau_{\alpha\beta}$

Основной вклад в тензор $\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_b)$, определенный формулой (28), вносят области, далекие от атома b . Действительно, выберем точку на поверхности среды, наиболее близкую к b , и проведем касательную сферу с центром в точке b . Тогда сумма (28) распадется на два слагаемых, соответствующих атомам a , находящимся внутри указанной сферы и вне ее. Вследствие сферической симметрии первое слагаемое равно нулю, поскольку величины $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab})$ составлены из шаровых функций, соответствующих моменту $l=2$. Таким образом, остается только второе слагаемое, откуда и следует сформулированное выше утверждение.

Поскольку основной вклад в $\tau_{\alpha\beta}$ дают области среды с масштабом порядка размера самой среды, то сумму по a в (28) можно заменить интегралом:

$$\sum_a \rightarrow n \int d^3 r_a \dots,$$

то есть перейти к континуальному пределу. Следовательно,

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_a) \approx n \int d^3 r_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}). \quad (\text{П4.1})$$

Согласно (22) $b \neq a$. Это означает, что при $\mathbf{r} = 0$ сингулярность отсутствует и следует доопределить $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab})$ при $a = b$: $G_{\alpha\beta}(0) = 0$. Отсюда заключаем, что в континуальном пределе

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) = (\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\beta \left(\frac{1}{r_{ab}} \right) + \frac{4\pi}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}_{ab}). \quad (\text{П4.2})$$

Сингулярное слагаемое в (П4.2) уничтожает соответствующее слагаемое, возникающее при расчете первого члена, и поэтому сингулярность при $\mathbf{r}_{ab} = 0$ в (П4.2) отсутствует, как и должно быть.

Из (П4.1) и (П4.2) находим

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = n \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi(\mathbf{r}) + \frac{4\pi}{3} n \delta_{\alpha\beta}; \quad (\text{П4.3})$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{П4.4})$$

Отсюда уже нетрудно получить формулу (36).

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Доказательство формулы (48)

Рассмотрим бесконечную среду ($N \rightarrow \infty$).

Аналогично величине $\tau_{\alpha\beta}$ (см. приложение 4) основной вклад в сумму по b в (48) вносит область изменения \mathbf{r}_b с характерным размером $\sim L$, поэтому сумму можно заменить интегралом. При этом, естественно, теряются слагаемые $\sim 1/N$, которые в бесконечной среде равны нулю. С учетом (П4.2) получаем

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\gamma} &\equiv \sum_b G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_{ab}) G_{\beta\gamma}(\mathbf{r}_{bc}) = \\ &= n \int d^3r_b \left[(\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\beta \left(\frac{1}{r_{ab}} \right) + \frac{4\pi}{3} \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}_{ab}) \right] \left[(\nabla_b)_\beta (\nabla_b)_\gamma \left(\frac{1}{r_{bc}} \right) + \frac{4\pi}{3} \delta_{\beta\gamma} \delta(\mathbf{r}_{bc}) \right] = \\ &= n \int d^3r_b (\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\beta \left(\frac{1}{r_{ab}} \right) (\nabla_b)_\beta (\nabla_b)_\gamma \left(\frac{1}{r_{bc}} \right) + \\ &\quad + \frac{4\pi n}{3} (\nabla_a)_\alpha (\nabla_a)_\gamma \left(\frac{1}{r_{ac}} \right) + \frac{4\pi n}{3} G_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_{ac}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &n (\nabla_a)_\alpha (\nabla_c)_\gamma \int d^3r_b \left[(\nabla_b)_\beta \left(\frac{1}{r_{ab}} \right) \right] (\nabla_b)_\beta \left(\frac{1}{r_{bc}} \right) = \\ &= n (\nabla_a)_\alpha (\nabla_c)_\gamma \int d^3r_b (\nabla_b)_\beta \left[\frac{1}{r_{ab}} (\nabla_b)_\beta \frac{1}{r_{bc}} \right] - n (\nabla_a)_\alpha (\nabla_c)_\gamma \int d^3r_b \frac{1}{r_{ab}} \nabla_b^2 \left(\frac{1}{r_{bc}} \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом выражении преобразуется в интеграл по поверхности, охватывающей среду. Поскольку среда бесконечна, то он равен нулю (здесь снова теряются слагаемые $\sim 1/N$). Учитывая соотношение

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r}),$$

после несложных преобразований получаем формулу (48). При этом используется правило замены, справедливое при переходе к континуальному пределу

$$\delta_{ab} \rightarrow n \delta(\mathbf{r}_{ab}).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Волны в замагниченной плазме с $T_{\perp} = 0$, $T_{\parallel} = T$

Покажем, что волны, движущиеся почти поперек магнитного поля, в плазме с $T_{\perp} = 0$ не затухают.

Следуя разделам 6—8, применим приближение сплошной среды. При $T_{\parallel} \neq 0$ движение электронов вдоль силовых линий учтем, заменяя в (158) вектор $\xi_{\perp}(\mathbf{r}, t)$ на $\xi_{\nu}(\mathbf{r}, t)$, где $\nu \equiv v_z$, $\xi_{\nu} \perp \mathbf{B}$. Кроме того, ξ_{\perp} следует заменить на выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi_{\nu}.$$

Учтем также слабый релятивизм по движению вдоль z . Для этого к левой части первого уравнения из (158) добавим множитель γ :

$$\gamma = (1 - v_z^2/c^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v_z^2}{2c^2}.$$

Вместо (158) получаем уравнения

$$m\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \xi_{\nu} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \xi_{\nu} \times \mathbf{B}_0 + e \mathbf{E};$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi r e \xi; \quad (\text{П6.1})$$

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \xi_{\nu} f(v_z), \quad (\text{П6.2})$$

где $f(v_z)$ — функция распределения электронов по v_z , $\int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) = 1$.

Теперь наша задача состоит в расчете диэлектрической проницаемости плазмы и определении длины затухания распространяющихся по ней волн. Аналогично (159) получаем уравнение

$$-(\omega - q_z v_z) \xi_{\nu} \approx -\frac{i\omega_B}{\gamma} (\xi_{\nu} \times \mathbf{K}) + \frac{e}{m\omega_B} \mathbf{E}.$$

Распишем его в компонентах:

$$\xi_{\nu x} \approx -\frac{e}{m\Delta_0} (E_x + iE_y);$$

$$\xi_{vy} \approx \frac{ie}{m\Delta_0} (E_x + iE_y); \quad \xi_{vz} \approx -\frac{e}{m\omega^2} E_z,$$

где $\Delta_0 = (\omega - q_z v_z)^2 - \omega_B^2 / \gamma^2 \approx 2\omega_B(\omega - \omega_B) - 2q_z v_z + \omega_B^2 v_z^2 / c^2$.

Отсюда и из (Пб.1), (Пб.2) для ненулевых компонент получаем (ср. с компонентами (161), соответствующими $T_{\perp} = T_{\parallel} = 0$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= 1 - \omega_p^2 A \equiv \varepsilon; \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &= -if, \quad f = \omega_p^2 A; \quad \varepsilon_{zz} = \eta, \end{aligned}$$

где $A = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \frac{1}{\Delta_0}$.

Рассчитывая A , следует произвести обычную замену $\omega \rightarrow \omega + i\delta$, $\delta \rightarrow +0$ [18,19], что дает затухание:

$$\begin{aligned} A &= A' + iA''; \quad A' \approx \frac{1}{\omega^2 - \omega_B^2}; \\ A'' &= -\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left[(\omega - q_z v_z)^2 - \frac{\omega_B^2}{\gamma^2} \right] \approx \\ &\approx -\frac{\pi}{2\omega_B} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left(\omega - q_z v_z - \frac{\omega_B}{\gamma} \right) \approx \\ &\approx -\frac{\pi}{2\omega_B} \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left(\omega - \omega_B - q_z v_z + \frac{\omega_B v_z^2}{2c^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{Пб.3})$$

Поскольку нас интересуют волны, которые распространяются почти перпендикулярно магнитному полю \mathbf{B}_0 , в дисперсионном соотношении (162) везде, кроме функции A , можно положить $q_z = 0$, что значительно упрощает расчет. Из (162) получаем:

$$(1 - \omega_p^2 A)(1 - \omega_p^2 A - \frac{q^2 c^2}{\omega^2}) - A^2 = 0. \quad (\text{Пб.4})$$

Вывод об отсутствии затухания для волн из интервала (165), (166) следует из (Пб.3), (Пб.4). Длина затухания $L_d = 1/(2q'')$ получается при подстановке в (Пб.4) $q = q' + iq''$.

Мы ищем условие полного отсутствия затухания, поэтому, преобразуя (Пб.4), полагаем:

$$|A''| \ll |A'|, \quad q'' \ll q'.$$

Далее q' обозначим снова через q .

Приравнявая к нулю вещественную часть уравнения (Пб.4), получаем дисперсионное соотношение (164), а из равенства нулю мнимой части определяем затухание:

$$q'' = \frac{q^3 \omega_p^2 c^2}{4\omega_B^4} \delta;$$

$$\delta = \pi \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_z) \delta \left(\frac{v_z^2}{2c^2} - \frac{q_z}{\omega_B} v_z + \frac{\omega_p^2}{2\omega_B^2} \right).$$

При расчете в выражение (Пб.3) в соответствии с (164) произведена подстановка

$$\omega - \omega_B = \frac{\omega_p^2}{2\omega_B} - \frac{\omega_p^2 \omega_B}{2q^2 c^2} \approx \frac{\omega_p^2}{2\omega_B}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Прохождение медленной циклотронной волны через границу плазмы

Покажем, что волна проходит сквозь границу плазмы практически без отражения. Для этого достаточно границу плазмы считать плоской и рассмотреть нормальное падение волны на границу: $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$. Граница представляет собой плоскость $x = 0$.

Согласно разд.8 (см. текст после формулы (163)) решение уравнений (158) ищем в виде

$$\mathbf{E} = (E_x(x), E_y(x), 0) e^{-i\omega t};$$

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x)) e^{-i\omega t};$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_x(x), \xi_y(x), 0) e^{-i\omega t}.$$

Отсюда и из (158) получаем уравнения (160), а также

$$E_x = \frac{if}{\varepsilon} E_y; \quad (\text{П7.1})$$

$$B_z = -\frac{ic}{\omega} E_y'(x); \quad (\text{П7.2})$$

$$E_y''(x) + q^2(x) E_y(x) = 0; \quad (\text{П7.3})$$

$$q^2(x) = \frac{\omega^4 - (\omega_B^2 + 2\omega_p^2)\omega^2 + \omega_p^4}{c^2(\omega^2 - \omega_B^2 - \omega_p^2)}. \quad (\text{П7.4})$$

При $\omega_p \ll \omega_B$

$$q^2(x) \approx \frac{\omega^2(\omega_B^2 + 2\omega_p^2 - \omega^2)}{c^2(\omega_B^2 + \omega_p^2 - \omega^2)}. \quad (\text{П7.5})$$

Внутри и снаружи плазмы величина $q(x)$ определяется, соответственно, соотношениями (151) (назовем его q_i) и $q = q_e = \omega/c \approx \omega_B/c$. Согласно [17] ширина границы плазмы составляет

$$d \sim c/\omega_p. \quad (\text{П7.6})$$

При большом набеге фазы на размере границы движение волны будет квазиклассическим и поэтому отражение будет малым. Поскольку

$$q_i d \sim \frac{c}{v_T} \frac{\omega_B}{\omega_p} \sim 10, \quad q_e d \sim \frac{\omega_B}{\omega_p} \sim 2,$$

то движение волны сквозь границу действительно является квазиклассическим. Отметим, что реальное значение d значительно превышает оценку (П7.6), так как в действительности плотность плазмы плавно уменьшается до нуля при движении от ее центра к границе [22]. Таким образом, реально $d \sim a$, $qa \gg 1$, следовательно, отражением волн можно пренебречь.

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Диффузионный режим переноса когерентного циклотронного излучения в неоднородной плазме

Пусть λ — характерный размер неоднородности замагниченной плазмы (например, магнитный остров [25]). Поскольку $r_H \ll \lambda$, то в плазме осуществляется перенос когерентного циклотронного излучения поперек силовых линий, только теперь, в отличие от разд.8, оно не может уйти на расстояние, большее λ .

Таким образом, области размера λ (далее — ячейки) обмениваются между собой энергией, и весь процесс приобретает характер диффузии энергии на периферию плазмы. Это вовсе не означает, что плазма будет

излучать, главным образом, на циклотронной частоте: по мере диффузии упорядоченная коллективная энергия может преобразоваться в энергию хаотического теплового движения частиц плазмы, в обычное тормозное излучение и т.д. Эти вопросы требуют детального изучения, и поэтому все изложенное в данном разделе следует считать не более чем предположением, суть которого состоит в том, что диффузия когерентных циклотронных колебаний дает основной вклад в перенос энергии в токамаке.

Плотность потока энергии q из ячейки оценим из соотношения

$$q\lambda^2 \sim I_b n \lambda^3,$$

где $I_b \sim Tr/\tau_c$ — интенсивность излучения, приходящаяся на один электрон (см. разд.8). Следовательно,

$$q \sim \frac{nT\lambda}{\tau_c} \rho.$$

Суммарный крупномасштабный поток энергии равен

$$q_D \sim \frac{nT\lambda}{\tau_c} \Delta\rho,$$

где $\Delta\rho$ — разность параметров ρ для соседних ячеек:

$$\Delta\rho \sim \frac{\lambda}{a} \rho_0,$$

ρ_0 — значение параметра ρ для центра плазмы (формулы (167), (168)).

Таким образом,

$$q_D \sim \frac{nT\lambda^2\rho_0}{\tau_c a}.$$

Время жизни энергии τ_E оцениваем из уравнения баланса энергии единицы длины плазменного цилиндра:

$$\frac{nTa^2}{\tau_E} \sim q_D a.$$

Отсюда

$$\tau_E \sim \frac{\tau_c}{\rho_0} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2. \quad (\text{П8.1})$$

Таким образом, по сравнению с τ_E для однородной плазмы (см. разд.8) в неоднородной плазме время жизни энергии больше в $(a/\lambda)^2$ раз. Подставляя типичные для токамака параметры, находим (в секундах)

$$\tau_E \sim 3 \cdot 10^{-3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2.$$

Согласие с экспериментом достигается при $a/\lambda \sim 10$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dicke R.H. — Phys. Rev., 1954, т.93, с.99.
2. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. — Кооперативные явления в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы. М.: Наука, 1988.
3. Боголюбов Н.Н. (мл.), Шумовский А.С. — Сверхизлучение. ОИЯИ, Дубна, 1987.
4. Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлпатов В.Г. — Изв. вузов. Сер. Радиофизика, 1967, т.10, с.1414.
5. Гиротрон. Под ред. А.В.Гапонова-Грехова. Горький, 1981.
6. Спрэнгл Ф., Корфи Т. — УФН, 1985, т.146, вып.2, с.303.
7. Ильинский Ю.А., Маслова Н.С. — ЖЭТФ, 1988, т.94, с.171.
8. Гинзбург Н.С., Сергеев А.С. — ЖЭТФ, 1991, т.99, с.438.
9. Кобелев Ю.А., Островский Л.А., Соустова И.А. — ЖЭТФ, 1991, т.99, с.470.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Теория поля. М.: Наука, 1967.
11. Паули В. — Теория относительности. М.: Наука, 1983.
12. Киттель Ч. — Элементарная физика твердого тела. М.: Наука, 1965.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
14. Бейтмен Г., Эрдейн А. — Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.
15. Давыдов А.С. — Теория твердого тела. М.: Наука, 1976.
16. Атомная техника за рубежом, 1996, №3, с.3.
17. Арцимович Л.А. — Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1963.
18. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. — Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
19. Шафранов В.Д. — Электромагнитные волны в плазме. В сб.: Вопросы теории плазмы, вып.3. Под ред. М.А.Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963.
20. Кадомцев Б.Б., Шафранов В.Д. — УФН, 1983, т.139, вып.2, с.399.
21. Цытович В.Н. и др. — УФН, 1996, т.166, вып.2, с.113.
22. Кадомцев Б.Б. — Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988.
23. Гапонов А.В. — ЖЭТФ, 1960, т.39, с.326.
24. Смирнов Б.М. — Физика слабоионизированного газа в задачах с решениями. М.: Наука, 1972.
25. Кадомцев Б.Б. — УФН, 1987, т.151, с.3.
26. Меньшиков Л.И. — Классическая модель сверхизлучения и ее приложения. Препринт ИАЭ-6022/1, М., 1997.