

УДК 530.12, 524.423, 524.882

## О КВАНТОВОМ ГРАВИТАЦИОННОМ КОЛЛАПСЕ И КВАНТОВЫХ ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

*В. А. Березин\**

Институт ядерных исследований РАН, Москва

ВВЕДЕНИЕ	49
КЛАССИЧЕСКИЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ	52
КВАНТОВАЯ ЭРА ФИЗИКИ ЧЕРНЫХ ДЫР	59
МОДЕЛИ КВАНТОВЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР	67
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	109
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	109

---

\*E-mail: berezin@ms2.inr.ac.ru

УДК 530.12, 524.423, 524.882

## О КВАНТОВОМ ГРАВИТАЦИОННОМ КОЛЛАПСЕ И КВАНТОВЫХ ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

*В. А. Березин\**

Институт ядерных исследований РАН, Москва

В обзоре рассматривается теория квантовых черных дыр. Показано, что основным свойством черных дыр является, по-видимому, их универсальность. Это и является главным отличием квантовой черной дыры от любого другого квантового объекта.

In the review proposed the theory of quantum black holes is considered. It is shown, that the basic property of black holes is, apparently, their universality. It is the main difference of a quantum black hole from any other quantum object.

### ВВЕДЕНИЕ

Что побуждает ученого изучать квантовые черные дыры? Прежде всего, честно говоря, его собственный внутренний интерес. Но существуют и другие, более (или менее) научные резоны. Считается, что только малые черные дыры могут рассматриваться в качестве квантовых объектов. Но что значит малые? Чтобы оценить это, нужно сравнивать размеры черной дыры с соответствующей комптоновской длиной волны. Гравитационный радиус  $r_g$  черной дыры массой  $m$  равен  $r_g = (2Gm)/c^2$ , где  $G$  — ньютоновская гравитационная постоянная, а  $c$  — скорость света. Комптоновский радиус такой частицы равен  $\lambda = \hbar/mc$  ( $\hbar$  — постоянная Планка). Если  $r_g \simeq \lambda$ , то так называемая планковская масса равна  $m_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{-5}$  г, а планковская длина равна  $l_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar G/c^3} \sim 10^{-33}$  см. В дальнейшем мы будем пользоваться системой единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ , так что  $m_{\text{Pl}} = 1/\sqrt{G}$ ,  $l_{\text{Pl}} = \sqrt{G}$ . Черные дыры столь малых масс и размеров могут развиваться из больших флуктуаций метрики в очень ранней Вселенной (первичные черные дыры) или в процессе вакуумных фазовых переходов.

Человечество «знает» о черных дырах с 1784 г., когда некий священник Дж. Мичелл понял [1], что звезда станет невидимой, если вторая космическая скорость превысит скорость света. Он назвал их «темными звездами». Пятнадцатью годами позже, в 1799 г. П. С. Лаплас вывел соотношение между

---

\*E-mail: berezin@ms2.inr.ac.ru

радиусом и массой темных звезд [2]. Рассмотрим сферическое гравитирующее тело с массой  $M$  и радиусом  $R_0$ . Вторая космическая скорость  $v_e$  может быть вычислена из баланса кинетической и потенциальной энергий частицы, улетающей с поверхности этого гравитирующего тела. Пользуясь формулами нерелятивистской механики и нерелятивистской ньютоновской теории гравитации, получаем, следуя Лапласу ( $G$  — гравитационная постоянная, а  $m$  — масса улетающей частицы),

$$\frac{mv_e^2}{2} = \frac{GmM}{R_0}, \quad v_e^2 = \frac{2GM}{R_0}. \quad (1)$$

Приравняв вторую космическую скорость скорости света  $c$ , получаем максимальное значение радиуса невидимого тела

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2)$$

Мы привыкли к представлению о черных дырах как о чрезвычайно плотных телах. Действительно, черная дыра с массой порядка массы Земли имеет радиус  $\sim 3$  см, а ее плотность гораздо выше ядерной. Но благодаря линейной зависимости массы от радиуса средняя плотность  $\rho$  внутри черной дыры обратно пропорциональна квадрату ее массы:

$$\rho = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2}. \quad (3)$$

И для гигантской черной дыры, образованной, например, скоплением галактик, плотность может быть меньше плотности воздуха, а наблюдатель, падающий в такую черную дыру, никогда об этом не узнает, потому что время свободного падения в этом случае составляет 10000 лет.

История же «настоящих» черных дыр началась в 1916 г., когда К. Шварцшильд нашел ставшее знаменитым решение уравнений Эйнштейна для метрики сферически-симметричного пространства-времени вне гравитирующего точечного источника [3]. Линейный элемент такой метрики был им получен в следующем виде:

$$ds^2 = Fdt^2 - F^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (4)$$

$$F = 1 - \frac{2gm}{r}. \quad (5)$$

Здесь  $d\Omega^2$  — линейный элемент единичной сферы;  $r$  — радиус;  $m$  — полная масса (энергия) системы, называемая также массой Шварцшильда. Линейный элемент (4) имеет сингулярность на так называемом радиусе Шварцшильда  $r_g = (2Gm)/r$ , откуда свет не может достичь бесконечности. Удивительно,

что значение радиуса Шварцшильда, полученное в общей теории относительности, в точности совпадает с нерелятивистским (ньютоновским) радиусом темных звезд.

В классической общей теории относительности черные дыры — очень особенные (и потому очень интересные) объекты. Прежде всего, они универсальны, так как полностью описываются всего несколькими параметрами — массой, угловым моментом и зарядами. В процессе образования черной дыры (т. е. в процессе гравитационного коллапса) излучаются все высшие мультиполи всех полей и несохраняющиеся заряды. Это обычно формулируется в виде гипотезы: «Черные дыры не имеют волос». Поэтому образование черных дыр сопровождается, вообще говоря, потерей информации о начальном состоянии и всей предыстории. Граница черной дыры, так называемый горизонт событий, является изотропной (световой) гиперповерхностью, действующей как односторонняя мембрана. Материя может падать вовнутрь, но не может выйти обратно. Вследствие этого площадь горизонта черной дыры не может возрастать. Эти две особенности позволили Дж. Бекенштейну [4] предположить существование аналогии между физикой черных дыр и термодинамикой и отождествить (с точностью до множителя) площадь горизонта событий с энтропией. Он сделал это для простейшей, сферически-симметричной электрически нейтральной (шварцшильдовской) черной дыры. В дальнейшем четыре закона термодинамики были доказаны для черных дыр общего вида [5].

В термодинамике появление энтропии связано с понятием теплового равновесия и температурой. В то время как природа появления энтропии при образовании черных дыр была более или менее понятна, приписывание им температуры казалось чем-то мистическим до появления революционной работы С. Хокинга [6]. Хокинг показал, что введенная Бекенштейном температура совершенно реальна в том смысле, что черная дыра действительно испускает квантовое излучение, и это излучение имеет планковский спектр абсолютно черного тела. Энтропия оказалась равной одной четверти площади горизонта, деленной на квадрат планковской длины. Таким образом, даже большие (по сравнению с планковскими размерами) черные дыры обладают квантовыми свойствами. Нужно подчеркнуть, что этот квантовый эффект является глобальным, а именно: он появляется вследствие существования нетривиальных граничных условий на волновые функции квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени с нетривиальной причинной структурой.

Результатом хокинговского испарения является то, что любая (даже сверхгигантская) черная дыра в конце концов становится достаточно малой, чтобы ее можно было рассматривать как (локальный) квантовый объект. Вот почему попытки понять физику квантовых черных дыр столь увлекательны.

## 1. КЛАССИЧЕСКИЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

**1.1. Определения.** Все знают (или думают, что знают), что такое классическая черная дыра. Если коротко, то черная дыра — это область пространства-времени за горизонтом событий. Горизонт же событий есть изотропная (световая) поверхность, разделяющая области, из которых изотропные (световые) геодезические могут достичь бесконечности, и те, из которых они не могут уйти. Черная дыра самого общего типа характеризуется всего несколькими параметрами: массой, угловым моментом и сохраняющимися зарядами типа электрического. В общем случае пространство-время вне черной дыры стационарное и аксиально-симметричное, но если черная дыра не вращается, то оно сферически-симметричное и статичное. В дальнейшем мы будем иметь дело только со сферически-симметричными черными дырами.

Важно подчеркнуть, что понятие горизонта событий является глобальным, его определение требует знания не только прошлой истории, но и будущего. Чтобы лучше это понять, рассмотрим структуру сферически-симметричных пространственно-временных многообразий. Метрика такого пространства-времени может быть всегда (по крайней мере локально) записана в виде

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{01}dtdq + g_{11}dq^2 - R^2d\Omega^2. \quad (6)$$

Все четыре метрических коэффициента — функции некоторой временной координаты  $t$  и некоторой радиальной координаты  $q$ ;  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ;  $R(t, q)$  — радиус в том смысле, что площадь сферы равна  $4\pi R^2$ . Используя два допустимых координатных (калибровочных) преобразования, всегда можно привести двумерную  $(t, q)$ -часть метрики, например, к конформно-плоской метрике. Следовательно, сферически-симметричное пространство-время, по существу, описывается (локально) лишь двумя инвариантными функциями. Одна из них, разумеется, радиальная функция  $R(t, q)$ . В качестве второй удобно выбрать квадрат нормали  $\Delta$  к поверхностям постоянного радиуса  $R = \text{const}$  [7, 8]:

$$\Delta = g^{ik}R_{,i}R_{,k}. \quad (7)$$

Функция  $\Delta(t, q)$  несет нетривиальную информацию о структуре сферически-симметричного пространства-времени. Действительно, в плоском пространстве-времени Минковского  $\Delta \equiv -1$ , все поверхности  $R = \text{const}$  времениподобны, следовательно, радиус  $R$  может быть выбран в качестве пространственной координаты  $q = R$  на всем многообразии. Но в искривленном пространстве-времени  $\Delta$  не является более постоянной величиной и может быть как положительной, так и отрицательной. Область, в которой  $\Delta < 0$ , называется  $R$ -областью, и тут радиус может быть выбран в качестве радиальной

координаты  $q$ . В той же области, где  $\Delta > 0$ , поверхности  $R = \text{const}$  пространственноподобны (вектор нормали времениподобен), и радиус  $R$  может быть выбран уже в качестве временной координаты  $t$ . Такие области называются  $T$ -областями. Понятия  $R$ - и  $T$ -областей были введены И. Новиковым [9]. Но и это еще не все. Легко показать, что условие  $\dot{R} = 0$  (точка означает частную производную по времени) невыполнимо в  $T$ -области. Следовательно, в этих областях должно быть или  $\dot{R} > 0$  (такая область необратимого расширения называется  $T_+$ -областью), или  $\dot{R} < 0$  (необратимое сжатие,  $T_-$ -область). Аналогично и для  $R$ -областей. Они делятся на два класса: на те, в которых  $R' > 0$  (штрих означает частную производную по пространственной координате), они называются  $R_+$ -областями, и  $R_-$ -области, в которых  $R' < 0$ . Поверхности  $\Delta = 0$  называются горизонтами видимости и разделяют  $R$ - и  $T$ -области. Они могут быть изотропными, времени- или же пространственноподобными. Если поверхность  $R = 0$  находится внутри  $T$ -области, то граница последней образует так называемую ловушечную поверхность, изпод которой свет не может уйти на бесконечность. Эта часть горизонта видимости находится или внутри черной дыры, или частично совпадает с горизонтом событий. Ясно, что определение горизонтов видимости является локальным.

После этих приготовлений рассмотрим следующий пример. Представим, что у нас есть ловушечная поверхность, а вне ее — слой сферически-симметричной материи. Пусть этот слой удерживается на фиксированном расстоянии от центра работающими ракетными двигателями. Если двигатели работают все время, то внутри слоя мы имеем черную дыру, а горизонт видимости полностью совпадает с горизонтом событий. Если же двигатели внезапно перестанут работать (например, закончилось топливо), то внешний слой материи начнет коллапсировать и в конце концов пересечет горизонт видимости. И в этом случае образуется черная дыра, но уже с новыми параметрами (большей массой), и горизонт событий нужно определять заново. При этом часть горизонта видимости (лежащая в прошлом относительно точки пересечения) окажется внутри черной дыры, а другая, новая его часть (находящаяся в будущем относительно пересечения) будет совпадать с новым горизонтом событий. В принципе таких слоев может быть много, и заранее неизвестно, когда космонавты на ракетах захотят выключить двигатели. Наш простенький мысленный эксперимент наглядно демонстрирует глобальный характер горизонта событий.

Все введенные выше общие понятия чрезвычайно важны при изучении черных дыр, образующихся в процессе гравитационного коллапса. Но существует довольно простой, но очень важный пример так называемой вечной черной дыры, изучению которой посвящен следующий раздел.

**1.2. Черная дыра Шварцшильда.** Метрики Шварцшильда (4) образуют однопараметрическое семейство, характеризуемое значением полной мас-

сы  $m$ , причем не существует каких-либо других сферически-симметричных вакуумных решений уравнений Эйнштейна с плоской асимптотикой на бесконечности (теорема Биркгофа). Невооруженным глазом видно, что эта метрика сингулярна на гравитационном радиусе  $r_g = 2Gm$ . Природа этой сингулярности долго не была понятной. И только после работ М. Крускала [10] и И. Д. Новикова [9] стало ясно, что это координатная сингулярность, связанная со статичностью линейного элемента (4) и невозможностью синхронизировать часы статических наблюдателей на пространственной бесконечности ( $r = \text{const} \rightarrow \infty$ ) и наблюдателей (с неотвратимостью нестатических) в области  $r < 2Gm$ . Многообразие, описываемое линейным элементом (4), геодезически неполно. По определению в геодезически полном (или, другими словами, аналитически максимально расширенном) пространстве-времени любая времениподобная или световая (изотропная) геодезическая должна начинаться и заканчиваться либо на бесконечности, либо на сингулярности. Структуру максимально расширенных сферически-симметричных многообразий легко

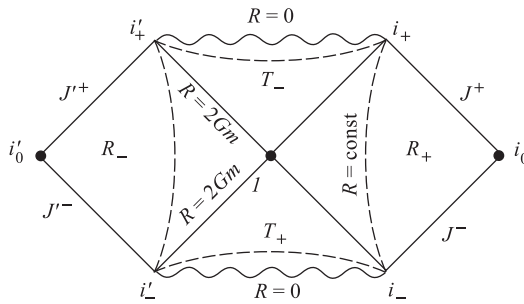


Рис. 1

представить и удобно исследовать, используя конформные диаграммы Картера–Пенроуза. На этих диаграммах бесконечности помещены на конечном расстоянии от центра, а каждая точка представляет сферу. Конформная диаграмма для геодезически полного пространства-времени Шварцшильда показана на рис. 1. Мы видим, что это многообразие имеет геометрию непроходимой кротовой норы. Имеются две асимптотически плоские области  $R_{\pm}$ , связанные мостом Эйнштейна–Розена. Если идти от левой пространственной бесконечности ( $i'_0$ ) к правой ( $i_0$ ), то радиусы сфер сначала уменьшаются в  $R_-$ -области, достигают минимума на мосту Эйнштейна–Розена, а затем начинают расти в  $R_+$ -области. Самая узкая часть моста называется горловиной, она расположена на пересечении двух изотропных (световых) поверхностей  $r = 2Gm$ -горизонтах. Для простоты мы будем часто называть  $R_+$ -область «нашей» стороной, а  $R_-$ -область — «другой» стороной моста Эйнштейна–Розена. Считается, что в полном пространстве-времени Шварцшильда гравитирующий источник сконцентрирован в  $T$ -областях в прошлом и будущем на сингулярных поверхностях нулевого радиуса  $R = 0$ . Это истинные сингулярности, поскольку (как легко показать) тензор кривизны Римана и, следовательно, приливные силы становятся здесь бесконечными. Геометрию Шварцшильда в экваториальной

плоскости в момент временной симметрии можно очень наглядно представить как геометрию поверхности вращения, вложенной в плоское трехмерное пространство (рис. 2).

В дальнейшем мы в некоторых случаях будем иметь дело с электрически заряженными источниками. Пространство-время вне таких источников описывается метрикой Рейсснера–Нордстрема, линейный элемент которой имеет тот же вид (4), но теперь  $F = 1 - (2Gm)/r + (Ge^2)/r^2$ , где  $e$  — величина электрического заряда.

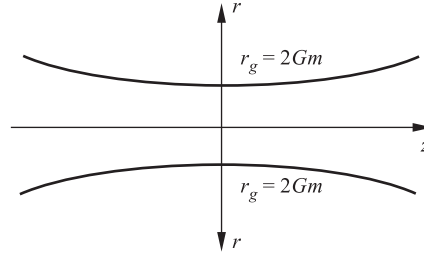


Рис. 2

**1.3. Источники.** Вечная черная дыра — изящная и ясная модель. Она оказалась очень полезной при исследовании классических черных дыр. Но ее существенным недостатком является полное отсутствие динамических степеней свободы — нет ни динамики гравитирующей материи, ни реальных сферически-симметричных гравитонов. Поэтому, имея в виду построение моделей квантовых черных дыр, мы должны включить более реалистичские гравитирующие источники. Вследствие нелинейности уравнений Эйнштейна включение источников делает задачу квантования очень сложной и, в общем случае, неразрешимой. Поэтому, с целью получения определенных результатов, мы вынуждены выбирать наиболее простые источники. Прямым обобщением точечной гравитационной массы является сферически-симметричная тонкая пылевая оболочка.

Теория тонких оболочек в общей теории относительности была развита впервые В. Израэлем [11] и применялась затем многими авторами для исследования проблем гравитационного коллапса и космологии [12, 13]. Нет нужды здесь вдаваться в детали этой теории. В нашем случае, когда как снаружи, так и внутри оболочки мы имеем вакуумную (Шварцшильда) или электровакуумную (Рейсснера–Нордстрема) метрику, полная информация о динамике оболочки содержится в одном уравнении, именно в  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ -уравнении Эйнштейна для оболочки (это так называемая энергетическая связь). Оно имеет следующий вид:

$$\sigma_{in} \sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta_{in}} - \sigma_{out} \sqrt{\dot{\rho}^2 - \Delta_{out}} = 4\pi G \rho S_0^0. \quad (8)$$

Здесь  $\rho$  — радиус оболочки как функция собственного времени наблюдателя, сидящего на этой оболочке, точка означает производную по собственному времени;  $S_0^0$  — поверхностная плотность энергии, сконцентрированной на оболочке;  $\Delta_{in,out}$  — значение введенной ранее инвариантной функции сразу



же за и под оболочкой, в нашем случае оно равно  $\Delta = -F$ . Величина  $\sigma$  имеет два значения  $\pm 1$ , в зависимости от того, увеличиваются ли радиусы в направлении внешней нормали к оболочке ( $\sigma = +1$ ) или же они уменьшаются ( $\sigma = -1$ ). Ясно, что знак  $\sigma$  — это знак той  $R$ -области, в которой движется оболочка, а изменение знака возможно лишь в  $T$ -области. Для простоты мы будем рассматривать относительно подробно только случай, когда оболочка не несет электрического заряда и внутри нее нет других гравитирующих источников. Тогда

$$\Delta_{\text{in}} = 1, \quad \sigma_{\text{in}} \equiv 1, \quad \Delta_{\text{out}} = 1 - \frac{2Gm}{\rho}. \quad (9)$$

Наша оболочка состоит из пыли, т. е. из частиц, взаимодействующих только гравитационно. Это означает, что  $S_0^0 = M/(4\pi\rho^2)$ , где  $M$  — так называемая «голая» масса оболочки (сумма масс покоя составляющих частиц без учета гравитационного дефекта масс). Таким образом, у нас остается только одно уравнение:

$$\sqrt{\rho^2 + 1} - \sigma_{\text{out}} \sqrt{\rho^2 + 1 - \frac{2Gm}{\rho}} = \frac{GM}{\rho}. \quad (10)$$

Если разрешить это уравнение относительно полной массы  $m$ , то получим

$$m = M \sqrt{\rho^2 + 1} - \frac{GM^2}{2\rho}, \quad (11)$$

и ясно, что это не что иное, как уравнение сохранения энергии, а корень квадратный — знакомый лоренц-фактор, записанный в незнакомом виде — через производную по собственному времени.

Нас интересует только финитное движение. Обозначим через  $\rho_0$  радиус оболочки в момент покоя, и пусть  $\rho_0 > R_+$  (т. е. мы находимся вне черной дыры). Тогда из уравнений (10) и (11) следует, что  $m < M$  и

$$m = M - \frac{2GM^2}{2\rho_0}, \quad (12)$$

$$\sigma = \text{sign} \left( 1 - \frac{GM}{\rho_0} \right). \quad (13)$$

Дифференцируя уравнение (12) по голой массе  $M$ , получаем

$$\frac{\partial m}{\partial M} = 1 - \frac{GM}{\rho_0}. \quad (14)$$

Рассмотрим зависимость полной массы  $m$  от значения голой массы  $M$  при фиксированном радиусе поворота  $\rho_0$ . Как видно на рис. 3, эта кривая

имеет две ветви — возрастающую и убывающую. Полная масса вначале растет с ростом голой массы, причем параметры оболочки в этом случае таковы, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial M} &> 0, \\ \sigma &= +1, \\ \frac{1}{2} &< \frac{m}{M} < 1. \end{aligned} \quad (15)$$

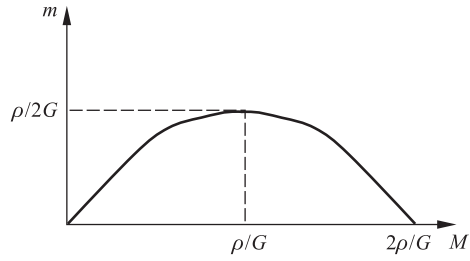


Рис. 3

Мировые линии таких оболочек начинаются на сингулярности прошлого в  $R = 0$ , проходят через  $R_+$ -область и оканчиваются в сингулярности будущего  $R = 0$ . Такую ситуацию мы будем называть случаем черной дыры (оболочка коллапсирует с образованием черной дыры). Кривая  $m(M)$  достигает своего максимума и начинает убывать. Для нисходящей ветви

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial M} &< 0, \\ \sigma &= -1, \\ \frac{m}{M} &< \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Снаружи оболочки радиусы сначала уменьшаются, достигают минимального значения  $2Gm$  в горловине, а затем начинают расти. Область кротовой норы не может быть достигнута или видна из  $R_+$ -области. В промежуточном случае

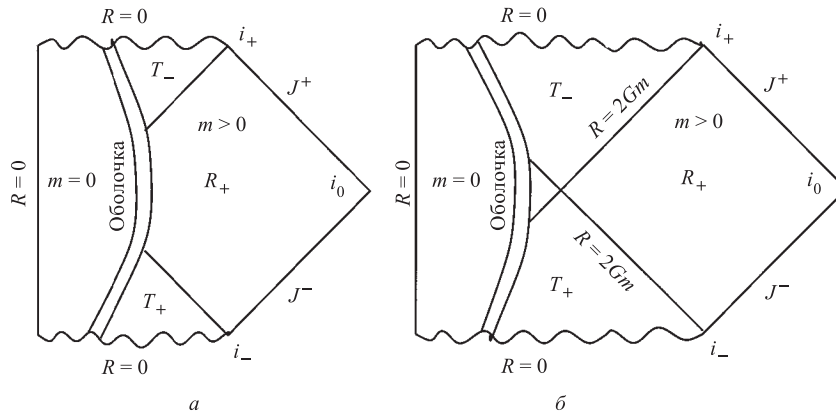


Рис. 4

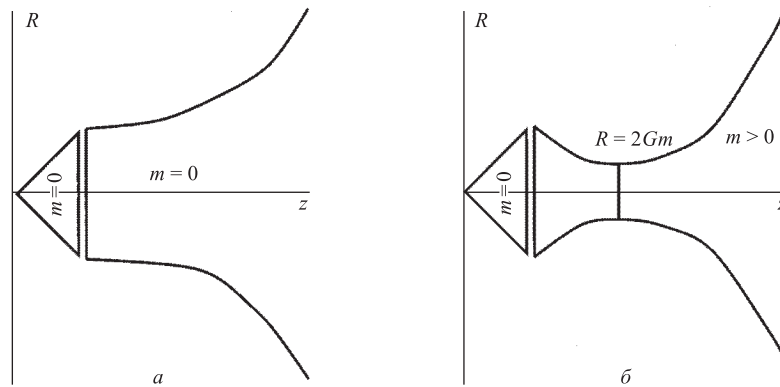


Рис. 5

$m/M = 1/2$ , и точка поворота лежит в точности в горловине при  $R = 2Gm$ . Соответствующие диаграммы Картера–Пенроуза и пространственные геометрии в момент временной симметрии показаны на рис. 4 и 5.

Полезно рассмотреть некоторые предельные случаи. Во-первых, это предел  $M \rightarrow \infty$ . С ростом голой массы  $M$  ( $m/M < 1/2$ ) точка поворота все дальше удаляется от горизонта, стремясь к «левой» бесконечности (на другой стороне моста Эйнштейна–Розена). В конечном итоге мы получаем геометрию вечной черной дыры всюду, кроме левой бесконечности, которая в этом случае сингулярна. Другой предельный случай — это полностью замкнутый мир с равной нулю полной массой, описываемый параметрами

$$m = 0, \quad M = 2\rho_0/G. \quad (17)$$

Для полноты картины рассмотрим тонкую оболочку с отрицательной полной массой  $m < 0$  (но с положительной голой массой  $M$ ). Из (10) сразу же следует, что всюду  $\sigma = -1$ , так что радиусы снаружи оболочки уменьшаются вплоть до сингулярности при  $R = 0$ . Пространство-время в этом случае имеет топологию  $S_3 \times R^3$ , а не  $R^3 \times R^1$ , как это было в случае положительной полной массы, так что пространственной бесконечности нет вовсе. В дальнейшем мы будем рассматривать только оболочки с положительной полной массой.

**1.4. Универсальность черных дыр.** Выше уже говорилось, что черная дыра наиболее общего вида есть осесимметричное пространственно-временное многообразие, описываемое ограниченным набором параметров — полной массой, угловым моментом и (локально) сохраняющимися зарядами. Но что произойдет, если начальное состояние коллапсирующей материи и полей

не является в точности сферически-симметричным (мы рассматриваем здесь только случай нулевого углового момента)? Громадная работа многих исследователей привела к следующему результату (подробный обзор этой темы есть в книге [14]). В процессе формирования черной дыры излучается все, что только может быть излучено. Это касается всех мультиполей (включая монополюсный момент) скалярных полей, высших мультиполей электромагнитного, неабелевых калибровочных полей и гравитационного поля. В некоторых теориях скалярные мультиполя не излучаются, но только тогда, когда такое поле жестко привязано к монополюсному моменту (кулоновской части) неабелевых полей. Эта особенность гравитационного коллапса была впервые понята Дж. А. Уилером и сформулирована им в виде (сейчас хорошо известного) утверждения: «Черная дыра не имеет волос». Таким образом, образование черной дыры связано, вообще говоря, с потерей информации о начальном состоянии и предыдущей истории коллапсирующей материи.

Из самого определения черной дыры ясно, что ничто не может выйти из-под горизонта событий. Но это не означает автоматически, что массу черной дыры нельзя уменьшить. Дело в том, что при ненулевом угловом моменте вокруг горизонта событий существует особая область, называемая эргосферой, внутри которой есть состояния с отрицательной энергией (с точки зрения удаленного наблюдателя), поэтому возможен следующий процесс. Частицы, попавшие в эргосферу, могут распасться на пару, одна из компонент которой, обладающая отрицательной энергией, упадет на черную дыру, а другая уйдет из эргосферы (но не из черной дыры) на бесконечность, уменьшив, таким образом, полную массу системы. В литературе такой процесс получил название «процесс Пенроуза». Если у нас вместо частиц рассматриваются поля, то аналогичный процесс также имеет место и называется «суперрадиацией». И процесс Пенроуза, и суперрадиация с необходимостью сопровождаются уменьшением величины углового момента черной дыры. А универсальным свойством классических черных дыр является тот факт, что никакой классический процесс не в состоянии уменьшить площадь поверхности границы черной дыры, т. е. площадь поверхности  $A$  горизонта событий:

$$dA \geq 0. \quad (18)$$

## 2. КВАНТОВАЯ ЭРА ФИЗИКИ ЧЕРНЫХ ДЫР

**2.1. Термодинамика черных дыр.** Черные дыры, будучи конечной стадией гравитационного коллапса, обладают очень интересными свойствами. Уже говорилось, что в процессе своего образования черная дыра излучает все, что только можно излучить, поэтому состояние черной дыры описывается очень незначительным количеством параметров. Черная дыра, таким обра-

зом, напоминает тело в термодинамическом равновесии. В 1972 г. Дж. Бекенштейн [4] предположил, что это не простое совпадение и черная дыра действительно обладает определенной энтропией и имеет определенную температуру. Такая точка зрения поддерживалась также уже известным в то время законом неубывания площади горизонта черной дыры. Это напоминает второй закон термодинамики. Бекенштейн предположил, что энтропия черной дыры пропорциональна площади горизонта  $A$ .

В этом (и только в этом) разделе мы используем формулы для общего вида стационарной осесимметричной черной дыры с полной массой  $m$ , заряженной зарядом  $Q$ , полный угловой момент которой равен  $J$ . Для такой черной дыры

$$A = 4\pi(R_+^2 + J^2/m^2), \quad (19)$$

$$R_+ = G \left( m + \sqrt{m^2 - \frac{Q^2}{G} - \frac{J^2}{m^2 G^2}} \right). \quad (20)$$

Оказалось, что для черных дыр справедлив и первый закон термодинамики, который выражается следующей массовой формулой:

$$\delta m = \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\delta A}{l_{\text{Pl}}^2} + \Omega \delta J + \Phi \delta Q. \quad (21)$$

Здесь  $\delta m$  — разность масс двух стационарных черных дыр с небольшой разностью площадей горизонтов  $\delta A$ , угловых моментов  $\delta J$  и электрических зарядов  $\delta Q$ ;  $\Omega$  — угловая скорость черной дыры;  $\Phi$  — значение кулоновского потенциала на поверхности черной дыры. Множитель  $\kappa$  перед  $\delta A$  называется поверхностной гравитацией:

$$\kappa = \frac{4\pi}{A} l_{\text{Pl}}^2 \sqrt{m^2 - Q^2/G - J^2/m^2 G^2}. \quad (22)$$

По Бекенштейну, поверхностная гравитация должна быть пропорциональна температуре черной дыры  $\Theta$ ,  $\kappa = \alpha \Theta$ . Таким образом, энтропия пропорциональна безразмерной площади горизонта.

Рассмотрим черную дыру как термодинамическую систему и поместим ее в тепловую баню при некоторой температуре. Тогда, если температура черной дыры в точности равна температуре бани, то количество поглощаемого излучения равно количеству излучаемой энергии, и черная дыра находится в тепловом равновесии с баней. Но это равновесие неустойчиво. Причина этого в том, что черная дыра Шварцшильда имеет отрицательную теплоемкость. Действительно, из определения теплоемкости имеем

$$C = \Theta \frac{\partial S}{\partial \Theta} = \alpha \frac{\kappa}{8\pi l_{\text{Pl}}^2} \frac{\partial A}{\partial \kappa} = -4\alpha G m^2 < 0. \quad (23)$$

Предположим, далее, что черная дыра первоначально находится в термодинамическом равновесии с окружающей средой. Затем, если в результате некоторой флуктуации масса черной дыры станет немного больше равновесного значения, то ее температура станет ниже температуры тепловой бани, что вызовет поглощение излучения черной дырой, дальнейшее неограниченное увеличение ее массы и, следовательно, понижение температуры до нуля. Если же начальная флуктуация приведет к небольшому уменьшению массы, черная дыра начнет излучать больше энергии, чем поглощать, еще более уменьшая массу вплоть до полного испарения.

В случае заряженной черной дыры Рейсснера–Нордстрема ситуация несколько иная. Температура равна нулю для экстремальной черной дыры, когда  $m = |Q|/G$ , затем она растет с ростом массы, достигает максимума и потом уменьшается до нуля при стремлении массы к бесконечности. Теплоемкость положительна вблизи экстремального состояния, растет сначала до бесконечности, а затем становится отрицательной, как и для черной дыры Шварцшильда. Мы видим, что заряженная, почти экстремальная черная дыра термически устойчива, подобно обычным телам.

**2.2. Излучение Хокинга.** Квантовая эра физики черных дыр началась в 1974 г. с открытием С. Хокингом явления испарения черных дыр. Хокинг исследовал квантовые вакуумные флуктуации полей материи на фоне искривленного пространства-времени Шварцшильда и показал, что само существование горизонта событий приводит к появлению потока излучения от черной дыры (нарушая тем самым классическую теорему  $dA \geq 0$ ). Удивительным оказался факт, что это излучение есть не что иное, как излучение абсолютно твердого тела с температурой

$$\Theta = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (24)$$

Таким образом, энтропия черной дыры в точности равна одной четвертой безразмерной площади горизонта

$$S_{\text{ВН}} = \frac{1}{4} \frac{A}{l_{\text{П1}}^2}, \quad (25)$$

что находится в полном согласии с предположением Бекенштейна (мы пользуемся системой единиц, в которой постоянная Планка  $\hbar$ , скорость света  $c$  и постоянная Больцмана  $k$  равны единице; планковская длина равна  $l_{\text{П1}} = \sqrt{\hbar G/c^3} = G^{1/2}$ , а планковская масса есть  $m_{\text{П1}} = \sqrt{\hbar c/G} = G^{-1/2}$ ).

Следует подчеркнуть, что появление горизонта событий приводит к потере информации. Величина потерянной информации тесно связана с энтропией системы и, следовательно, с ненулевой температурой в состоянии термодинамического равновесия. На языке математики это означает, что

граничные условия для волновых функций в квантовой теории поля видоизменяются таким образом, что вблизи горизонта есть только падающие волны. Это изменяет состояние вакуума, и на бесконечности прежнее состояние без частиц оказывается теперь заполненным частицами, образующими тепловую баню. Детали вычислений и соответствующие ссылки можно найти, например, в книге [16]. Важно также понимать, что вакуум квантованных полей в искривленном пространстве-времени может быть различным в зависимости от физического наблюдателя. В физике черных дыр есть, например, также вакуум Унру и вакуум Бульвара. Описанный выше вакуум относится к статическому наблюдателю и называется вакуумом Хартля–Хокинга.

Примечательно, что температура черной дыры может быть вычислена совершенно иным способом. Если сделать виковский поворот времени в двумерной  $(t, r)$ -части линейного элемента метрики Шварцшильда или Рейсснера–Нордстрема, записанного в координатах кривизн, мы получим евклидову двумерную полуплоскость  $(-\infty < t_E < \infty, R_+ < R < \infty)$ . Если поместить начало координат в  $R = R_+$ , предположить периодичность по евклидову времени  $t_E$  и отождествить точки по этому периоду, то получится двумерная поверхность, вообще говоря, с конической сингулярностью. Эта сингулярность может быть устранена подходящим выбором периода евклидова времени. А обратная этому периоду величина равна температуре в температурных теориях поля и в нашем случае может быть названа топологической температурой. Практически это выглядит следующим образом. Линейный элемент двумерной евклидовой поверхности равен

$$dl^2 = F d\tau^2 + \frac{1}{F} dr^2, \quad (26)$$

$$F = 1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{Ge^2}{r^2} = \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-), \quad (27)$$

$$r_{\pm} = G \left( m \pm \sqrt{m^2 - \frac{e^2}{G}} \right). \quad (28)$$

Вблизи горизонта событий  $F = (r - r_+)(r - r_-)/r_+^2$ . Вводя новую координату  $\rho = 2r_+ \sqrt{r - r_+} / \sqrt{r_+ - r_-}$ , получаем

$$dl^2 = \frac{(r_+ - r_-)^2}{4r_+^4} \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \quad (29)$$

Но это и есть метрика (локально) плоской двумерной поверхности в цилиндрических координатах. Для того чтобы убрать конусную сингулярность в точке  $\rho = 0$  (которая соответствует горизонту событий), период азимутального угла должен быть равен  $\varphi = 2\pi$ . Таким образом, для периода координат

наты мнимого времени  $\tau$  мы получаем

$$T = \frac{4\pi r_+^2}{r_+ - r_-}. \quad (30)$$

Обратная же величина

$$\Theta = \frac{2G\sqrt{m^2 - e^2/G}}{A} \quad (31)$$

в точности равна температуре черной дыры Рейсснера–Нордстрема.

Все это означает, что квантовые поля материи на фоне черной дыры описываются, фактически, теорией поля при конечной температуре. В этом смысле появление температуры у черной дыры выглядит вполне естественно.

Нарушение неравенства  $dA \geq 0$  вовсе не означает, что излучение может исходить из-под горизонта, поскольку сама черная дыра все еще рассматривается как объект чисто классический. Вычисления тензора энергии-импульса вакуумных флуктуаций на заданном фоне метрики Шварцшильда показали, что их плотность энергии отрицательна. Таким образом, отрицательный поток падает на черную дыру, уменьшая ее массу, а равный ему положительный поток уходит на бесконечность. Можно представлять дело таким образом, что квантовые флуктуации полей материи образуют вблизи горизонта нечто вроде эргосферы, внутри которой (как уже говорилось) может иметь место процесс Пенроуза (для частиц) и суперрадиация (для полей излучения).

**2.3. Пространство Риндлера.** Помимо черных дыр, есть еще один пример пространственно-временного многообразия, в котором наблюдатель «видит» чернотельное излучение. Это пространство-время Риндлера. Оно достаточно простое, поскольку локально плоское, и уравнения квантовой теории поля могут быть решены в явном виде и подробно исследованы. В то же время этот пример имеет важное значение, так как существует глубокая связь между пространством Риндлера и многообразиями, содержащими черные дыры. Рассмотрим двумерное плоское пространство-время с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \quad (32)$$

Координаты Риндлера вводятся следующим преобразованием:

$$t = \pm \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad (33)$$

$$x = \pm \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta, \quad (34)$$

причем верхний (нижний) знак используется при  $x > (<) 0$ . Метрика (33) теперь принимает вид

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2). \quad (35)$$



Риндлеровский наблюдатель, сидящий на линии  $\xi = \text{const}$ , испытывает постоянное ускорение  $\alpha = ae^{-a\xi}$ . Будучи локально плоским, пространство Риндлера отличается, тем не менее, от пространства Минковского. Оно имеет другие границы. Границы пространства Минковского — тривиальные бесконечности (пространственные, временные и световые). Координаты Риндлера покрывают лишь половину пространства Минковского  $|x| > |t|$ , линии  $x = \pm t$  являются горизонтами и служат новыми границами многообразия (в дополнение к бесконечностям). Точные квантово-полевые вычисления (подробности можно найти в книге [15]) показывают, что вакуум пространства Риндлера заполнен, на самом деле, чернотельным излучением, температура которого равна так называемой температуре Унру  $T_0 = a/2\pi$ . Каждый наблюдатель измеряет локальную температуру  $T = T_0(g_{00})^{-1/2} = T_0e^{-a\xi} = \alpha/2\pi$ .

Появление температуры (и тепловой бани) в пространстве Риндлера — глобальный (а не локальный) эффект, существенно зависящий от граничных условий на горизонте. Мы и здесь можем проделать тот же трюк, что и с черными дырами. Переходя к мнимому времени  $\eta \rightarrow i\eta = \tau$  (которое считается циклической переменной) и вводя новую пространственную координату  $\zeta = 1/ae^{a\xi}$ , получаем следующий евклидов линейный элемент:

$$dl^2 = a^2\zeta^2 d\tau^2 + d\zeta^2. \quad (36)$$

Евклидова поверхность имеет, вообще говоря, конусную особенность, которая исчезает, только если период мнимого времени  $\tau = 2\pi/a$ . Величина, обратная этому периоду, есть в точности температура Унру. Заметим, что описанная выше процедура носит глобальный характер, поскольку выбор периода в одной точке определяет фактически периоды «собственных» мнимых времен для всех риндлеровских наблюдателей.

Рассмотрим теперь линейный элемент статического сферически-симметричного пространства-времени, который всегда может быть записан в виде

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (37)$$

где  $\nu$  и  $\lambda$  — функции радиуса  $r$ . В силу принципа эквивалентности статический наблюдатель должен испытывать постоянное ускорение, и, действительно, прямое вычисление показывает, что это ускорение равно  $\alpha = \kappa e^{-\nu/2}$ , где

$$\kappa = \frac{\nu'}{2} \exp\left(\frac{\nu - \lambda}{2}\right) \quad (38)$$

есть поверхностная гравитация. Статический наблюдатель, сидящий на поверхности постоянного радиуса  $r = r_0 \neq 0$ , может забыть об угловой части метрики (37) и рассматривать только двумерное статическое пространство-

время. Такая двумерная поверхность может быть легко преобразована к локальным риндлеровским координатам. Действительно,

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 = e^\nu (dt^2 - e^{\lambda-\nu} dr^2) = e^\nu (d\eta^2 - d\xi^2), \quad (39)$$

где  $\eta = t$ , а  $d\xi = e^{(\lambda-\nu)/2}$ . Параметр ускорения  $a$  можно вычислить следующим образом. Пусть  $r = r_0 + \delta r$ ,  $\xi = \xi_0 + \delta\xi$ , тогда  $\xi_0 = e^{(\lambda-\nu)/2}(r_0)r_0$  и  $\delta\xi = e^{(\lambda-\nu)/2}\delta r$ . Конформный множитель вблизи  $r = r_0$  равен  $e^\nu(r_0)(1 + \nu'\delta r) = e^{2a\xi_0}(1 + 2a\delta\xi)$ . Отсюда следует, что  $e^{2a\xi_0} = e^\nu(r_0)$  и  $a = \frac{\nu'}{2} e^{(\nu-\lambda)/2}(r_0)$ , что в точности равно поверхностной гравитации  $\kappa$ .

Эквивалентность риндлеровских наблюдателей статическим в сферически-симметричном пространстве-времени вовсе не значит, что последнее всегда нагрето до определенной температуры. Эта эквивалентность лишь локальная. Для глобальной же эквивалентности (разумеется, с различными риндлеровскими наблюдателями для различных статических наблюдателей) необходимо наличие горизонта событий, что мы и имеем в случае сферически-симметричной черной дыры. Но и это еще не все. Редукция четырехмерного сферически-симметричного пространства-времени к двумерной  $(t, r)$ -поверхности может быть проведена, только если  $r \neq 0$ . Точка  $r = 0$  является координатной сингулярностью. Поэтому описанная выше эквивалентность прекрасно работает, только если двумерная евклидова поверхность не содержит начало координат. В противном случае мы были бы вынуждены рассматривать сферически-симметричное риндлеровское многообразие, которое существенно нестатическое, и потому эквивалентность теряется.

И, наконец, последнее замечание. Температура (если таковая есть), измеряемая локальным статическим наблюдателем, подчиняется закону  $\Theta\sqrt{g_{00}} = \text{const}$ . Следовательно, температура  $\Theta_0 = \kappa/2\pi$  измеряется наблюдателем, сидящим в точке с  $g_{00} = 1$ . Для асимптотически плоского пространства-времени это, разумеется, пространственная бесконечность.

**2.4. Квантованный спектр масс.** Исторически открытие квантовой природы излучения привело к построению модели атома водорода и объяснению дискретности его энергетического спектра. Аналогично квантовая природа излучения предполагает, что спектр масс черных дыр, по существу, квантован. Дж. Бекенштейн предложил эквидистантный дискретный спектр для поверхности горизонта черной дыры. Он мотивировал это следующим образом. Величина энтропии есть логарифм числа способов, с помощью которых мы можем получить черную дыру с заданными параметрами, она связана с количеством информации, спрятанной в черной дыре. Он также показал, что площадь горизонта является адиабатическим инвариантом. Количество информации, естественно, квантуется. Следовательно, поверхность горизонта, будучи пропорциональной энтропии, должна иметь эквидистантный спектр. В. Муханов дал уже количественную (феноменологическую) оценку.

Мы обобщим его результат (полученный для черной дыры Шварцшильда) на случай заряженной черной дыры Рейсснера–Нордстрема. Пусть черная дыра излучает квант энергии  $\omega$  в результате перехода из состояния  $n$  в состояние  $(n - 1)$ . «Типичная» энергия этого кванта минус работа, выполняемая против сил кулоновского притяжения, должна быть пропорциональна температуре черной дыры (напомним, что мы используем энергетическую систему единиц):

$$\omega_{n,n-1} - \Phi dQ = \pi\alpha\Theta. \quad (40)$$

Здесь  $dQ$  — заряд кванта, а  $\alpha$  — некоторая медленно меняющаяся функция квантового числа  $n$ . Подставляя затем (40) в (21), получаем ( $\omega_{n,n-1} = dm$ )

$$dA = 4\pi G\alpha, \quad (41)$$

или

$$dA = 4\pi G\alpha dn. \quad (42)$$

Интегрируя, имеем

$$A = 4\pi G\tilde{\alpha}n + 4\pi GC, \quad (43)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, а  $\tilde{\alpha}$  — некоторая другая, медленно меняющаяся функция  $n$ . Естественно предположить, что значение  $n = 0$  соответствует минимально возможному значению площади горизонта, т. е. площади горизонта экстремальной черной дыры. Это дает нам  $C = Q^2$ . Ясно, что формулы Хокинга справедливы, только если можно пренебречь обратной реакцией излучения на метрику, т. е. если температура черной дыры мала по сравнению с ее массой. Таким образом, нас интересуют два предельных случая: большие черные дыры и почти экстремальные черные дыры. В первом случае  $n \gg Q^2$ , и мы предполагаем следующее разложение в ряд по малому параметру:

$$\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \beta_1 \frac{Q^2}{n} + \gamma_1 \frac{Q^4}{n^2} + \dots, \quad \frac{Q^2}{n} \ll 1. \quad (44)$$

Во втором случае  $n \ll Q^2$ , и мы имеем

$$\tilde{\alpha} = \alpha_2 + \beta_2 \frac{n}{Q^2} + \gamma_2 \frac{n^2}{Q^4} + \dots, \quad \frac{Q^2}{n} \gg 1. \quad (45)$$

Соответствующие разложения для масс имеют следующий вид:

$$m = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{G}} \sqrt{\alpha_1} \left( 1 + \frac{\beta_1 + 3}{2\alpha_1} \frac{Q^2}{n} + \left( \frac{\gamma_1}{2\alpha_1} - \frac{(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 4)}{8\alpha_1^2} \right) \frac{Q^4}{n^2} + \dots \right), \quad n \gg Q^2 \quad (46)$$

и

$$m = \frac{|Q|}{2\sqrt{G}} \left( 2 + \frac{\alpha_2^2}{4} \frac{n^2}{Q^4} + \dots \right), \quad n \ll Q^2. \quad (47)$$

Значения для  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  будут определены для конкретной модели в следующем разделе.

### 3. МОДЕЛИ КВАНТОВЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

**3.1. Вечная черная дыра.** Мы уже описали подробно классическую черную дыру и упомянули, что у нее нет динамических степеней свободы. В этом отношении вечная черная дыра аналогична кулоновскому полю в электродинамике. Тем не менее методически полезно проквантовать такую систему. Разумеется, полную программу квантования выполнить не удастся, так как квантовая гравитация пертурбативно неперенормируема. Но в замороженном формализме квантование сферически-симметричных вакуумных многообразий может быть полностью проведено непертурбативным образом. В замороженном формализме мы оставляем только одну, радиальную степень свободы. Хотя и не полное, такое квантование может дать вполне разумные и надежные результаты, особенно в свете последних достижений [16], которые поддерживают предположение о том, что четырехмерная эйнштейновская гравитация непертурбативно перенормируема [17]. Квантование вечной черной дыры в замороженном формализме было выполнено Г. Каструпом и Т. Тиманном [18] в переменных Аштекара и К. Кухажем в геометродинамике [19]. Даже для столь простого пространственно-временного многообразия задача оказалась вовсе не тривиальной. Но конечный результат в обоих подходах оказался одинаковым — квантовый функционал от сферически-симметричных вакуумных метрик зависит только от массы Шварцшильда. И из-за отсутствия динамических степеней свободы невозможно получить какую-либо информацию о спектре масс черных дыр. Физически такой результат вполне можно понять, если сравнить вечную черную дыру с аналогичной моделью в электродинамике с атомом водорода. Представим себе, что мы позволим электрону сначала классически «упасть» на протон, а затем начнем квантовать такую систему. Что мы получим? Ровным счетом ничего. Конечно, в отличие от электродинамики, где у нас есть как положительные, так и отрицательные электрические заряды, масса вечной черной дыры может быть только положительной, поэтому вместо «ничего» в результате гравитационного коллапса образуется сингулярность кривизны, но качественно картина та же самая. Чтобы получить какой-либо физически значимый результат, мы должны включить динамические степени свободы. В последующих разделах мы рассмотрим квантование сферически-симметричных тонких пылевых оболочек, классическая теория которых была дана в разд. 1.

**3.2. Наивное квантование.** Содержание этого раздела основывается на работах [20–22].

Рассмотрим конкретную модель квантовой черной дыры. Мы будем исследовать самогравитирующую сферически-симметричную тонкую пылевую оболочку, имеющую голую массу  $M$ , полную массу  $m$  и электрический заряд  $e$ . Рассмотрение «правильной» процедуры квантования (основанной на «первых принципах») мы ненадолго отложим, а здесь исследуем очень простую квантовую модель, базирующуюся на классическом уравнении движения нашей оболочки. Так как  $m$  есть полная масса (энергия) системы, а (11) выражает закон сохранения энергии, разумно считать эту энергию численно равной гамильтониану системы. Имеем, таким образом,

$$m = M\sqrt{\dot{\rho}^2 + 1} - \frac{GM^2 - e^2}{2\rho}. \quad (48)$$

Для того чтобы проквантовать какую-либо систему, мы должны сначала построить гамильтониан, а затем заменить классические скобки Пуассона квантовыми коммутационными соотношениями. Если нам задано классическое выражение для энергии системы  $E(\dot{\rho}, \rho)$  как функции радиуса и скорости (производной радиуса по времени, в нашем случае это производная по собственному времени, так что фактически это не скорость, а быстрота), то сопряженный импульс  $p$ , лагранжиан  $L$  и гамильтониан  $H$  могут быть найдены из следующих соотношений:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}, \quad (49)$$

$$E = p\dot{\rho} - L = \dot{\rho} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - L, \quad (50)$$

$$L = \dot{\rho} \int E \frac{d\dot{\rho}}{\dot{\rho}^2} = \dot{\rho} \int \frac{\partial E}{\partial \dot{\rho}} \frac{d\dot{\rho}}{\dot{\rho}} - H, \quad (51)$$

что для сопряженного импульса дает нам

$$p = \int \frac{\partial E}{\partial \dot{\rho}} \frac{d\dot{\rho}}{\dot{\rho}}. \quad (52)$$

Подставляя для энергии  $E$  выражение (48), получаем

$$p = M \log(\dot{\rho} + \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1}) + F(\rho), \quad (53)$$

$$L = M(\dot{\rho} \log(\dot{\rho} + \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1}) - \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1}) + \dot{\rho}F(\rho), \quad (54)$$

где  $F(\rho)$  — произвольная функция радиуса. От выбора этой функции лагранжеры уравнения не зависят, а в гамильтоновом формализме это приводит к

канонически-эквивалентным системам. Этот выбор может быть важен, если принять во внимание довольно сложную структуру максимально расширенного многообразия черной дыры и пытаться построить волновую функцию, покрывающую все это многообразие. Но в этой главе нам не нужно такое усложнение, и мы положим  $F(\rho) = 0$ . Из (53) получаем

$$\dot{\rho} = \sinh \frac{p}{M}, \quad (55)$$

и после подстановки этого соотношения в (48) приходим к следующему гамильтониану:

$$H = M \cosh \frac{p}{M} - \frac{GM^2 - e^2}{2\rho}. \quad (56)$$

Удобно сделать каноническое преобразование к новым переменным ( $M$  есть голая масса оболочки):

$$x = M\rho, \quad \Pi = \frac{1}{M}\rho, \quad (57)$$

тогда

$$H = M \left( \cosh \Pi - \frac{GM^2 - e^2}{2x} \right). \quad (58)$$

Теперь наложим квантовое коммутационное соотношение

$$[\Pi, x] = -i. \quad (59)$$

В координатном представлении  $\Pi = -i\partial/\partial x$ , поэтому, используя соотношение

$$\exp \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x) = \Psi(x - i), \quad (60)$$

мы получаем следующее стационарное уравнение Шредингера:

$$H\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (61)$$

$$\frac{M}{2} \left( \Psi(x + i) + \Psi(x - i) - \frac{GM^2 - e^2}{x} \Psi(x) \right) = m\Psi(x). \quad (62)$$

Введя обозначение  $\epsilon = m/M$ , перепишем его в виде

$$\Psi(x + i) + \Psi(x - i) = \left( 2\epsilon + \frac{\kappa M^2 - e^2}{x} \right) \Psi(x). \quad (63)$$

Здесь уместно сделать некоторые замечания. Во-первых, полученное уравнение Шредингера — не привычное дифференциальное уравнение, а уравнение в конечных разностях. Это прямое следствие квантования в собственном времени, что естественно в рамках общей теории относительности. Во-вторых, полная масса  $m$  теперь уже не произвольна, а является собственным значением оператора Гамильтона, который должен быть эрмитовым на положительной полуоси. В-третьих, заметим, что шаг в нашем уравнении в конечных разностях — вдоль мнимой оси, так что «правильное» решение должно обладать определенными аналитическими свойствами на комплексной плоскости.

Полученная гамильтонова картина не эквивалентна гамильтоновой системе, которая получилась бы, если бы мы стартовали прямо из действия Эйнштейна–Гильберта. Но наша процедура самосогласованна. Мы начали с уравнения движения, уже записанного в собственном времени, затем построили новый лагранжиан, который приводит сразу же к уравнению движения в собственном времени безо всяких ограничений и/или связей. Мы не ожидаем получения правильного спектра масс. Но предлагаемая модель чрезвычайно проста и, как мы вскоре увидим, точно решается, так что кажется разумным развить здесь некоторые новые методы и идеи.

В конце этого раздела рассмотрим нерелятивистский предел. После восстановления всех размерностей сдвинутый аргумент  $(x \pm i)$  равен

$$x \pm i \rightarrow M \left( \rho \pm \frac{1}{M} i \right) \rightarrow \rho \pm \frac{\hbar}{Mc} i, \quad (64)$$

так что нерелятивистский предел получается при  $\rho \gg \hbar/Mc$ . Разлагая (63) до второго порядка по параметру  $(\hbar/Mc)$ , получаем

$$-\frac{1}{2M} \frac{d^2 \Psi}{d\rho^2} - \frac{GM^2 - e^2}{2\rho} \Psi = (E - M) \Psi, \quad (65)$$

а это есть как раз нерелятивистское уравнение Шредингера для радиальной  $s$ -волновой функции, причем  $(E - M)$  есть нерелятивистская энергия системы, для отрицательных значений которой приемлемые решения существуют только для дискретного спектра:

$$(E - M)_n = -\frac{M(GM^2 - e^2)^2}{8n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (66)$$

При  $G = 0$  это сводится к известной формуле Ридберга для атома водорода.

Покажем теперь, как решать полученное уравнение Шредингера в конечных разностях. И сделаем это сначала в импульсном представлении. Оказывается удобным ввести следующие параметры:  $\lambda$  и  $\beta$ ,

$$\epsilon = \cos \lambda, \quad \alpha = GM^2 - e^2 = 2\beta \sin \lambda, \quad (67)$$

в терминах которых наше уравнение Шредингера принимает вид

$$\Psi(x+i) + \Psi(x-i) = 2 \left( \cos \lambda + \frac{\beta \sin \lambda}{x} \right) \Psi(x). \quad (68)$$

Так как для черной дыры  $\alpha > 0$ , знаки  $\lambda$  и  $\beta$  одинаковы. Мы выбираем  $\lambda > 0$  и, следовательно,  $\beta > 0$ . Вернемся теперь к операторной форме уравнения

$$(\cosh \hat{p} - \beta \sin \lambda \hat{x}^{-1}) \Psi = \cos \lambda \Psi. \quad (69)$$

В импульсном представлении операторы  $\hat{p}$  и  $\hat{x}$  действуют следующим образом:

$$\hat{p}\Psi_p = p\Psi_p, \quad \hat{x}\Psi_p = i \frac{\partial}{\partial p} \Psi_p, \quad (70)$$

здесь  $\Psi_p$  — волновая функция в импульсном представлении. Оператор  $\hat{x}^{-1}$  не является хорошо определенным. Неопределенность можно ликвидировать добавлением нужных слагаемых в потенциал, пропорциональных  $\delta$ -функции и ее производным в начале координат. Но мы можем вместо этого просто умножить наше уравнение слева на оператор  $\hat{x}$ . В результате получаем

$$i \frac{\partial}{\partial p} (\cosh p - \cos \lambda) \Psi_p = \beta \sin \lambda \Psi_p \quad (71)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p} \log \Psi_p = - \frac{\sinh p + i\beta \sin \lambda}{\cosh p - \cos \lambda}. \quad (72)$$

Если ввести новую переменную  $z = e^p$ , то уравнение (72) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \Psi_p = - \frac{z^2 + 2i\beta \sin \lambda z_1}{z(z^2 - 2 \cos \lambda z + 1)} = \frac{1}{z} - \frac{\beta + 1}{z - z_0} + \frac{\beta - 1}{z - \bar{z}_0}, \quad (73)$$

где  $z_0 = e^{i\lambda}$ ,  $\bar{z}_0 = e^{-i\lambda}$ .

Это уравнение легко решить:

$$\Psi_p = C \frac{z}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)} \left( \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)^\beta, \quad z = e^p. \quad (74)$$

Полученное решение обладает важным свойством: оно периодически с чисто мнимым периодом  $2\pi i$ , и это свойство мы сейчас используем.

Мы нашли решение в импульсном представлении. Теперь нам нужно сделать обратное преобразование Фурье, чтобы получить решение в координатном представлении:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \Psi_p dp. \quad (75)$$



Полученное нами решение (74) для  $\Psi_p$  единственно с точностью до постоянного множителя. Но, благодаря упомянутой выше периодичности, мы можем сдвинуть аргумент по мнимой оси:  $p \rightarrow p + 2\pi ki$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), что приводит к сдвигу пути интегрирования в комплексной плоскости импульса с действительной оси на параллельную ей прямую. И после такого сдвига мы опять получаем решение в координатном представлении. Но

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \Psi_p dp,$$

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p+2\pi ki)x} \Psi_{p+2\pi ki} dp = e^{-2\pi kx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \Psi_p dp, \quad (76)$$

$$\Psi_2(x) = e^{-2\pi kx} \Psi_1(x).$$

Таким способом мы можем построить счетное число решений, зная одно из них (скажем,  $\Psi_0$ ), и, вообще говоря,

$$\Psi_{\text{gen}}(x) = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-2\pi kx} \right) \Psi_0(x). \quad (77)$$

Бесконечная сумма в скобках есть не что иное, как ряд Фурье для периодической функции с чисто мнимым периодом  $i$ . И это воспроизводит следующее свойство решений в координатном представлении (общее, кстати, для уравнений в конечных разностях): имея решение  $\Psi_0$ , мы можем построить другое решение  $\Psi_1$ , умножив первоначальное решение на любую периодическую функцию с чисто мнимым (в нашем случае) периодом  $i$ .

Как много фундаментальных решений необходимо для построения общего решения? Тот факт, что в импульсном представлении мы получили, по существу, лишь одно решение, доказывает, что мы имеем лишь одно фундаментальное решение  $\Psi_0$  (которое заслуживает, конечно же, названия суперфундаментального). Сейчас мы построим конкретное фундаментальное решение, выбрав определенным образом контур интегрирования в интеграле Фурье. Заметим, прежде всего, что наше решение (75) имеет счетное число точек ветвления в комплексной плоскости импульса, которые могут быть объединены в пары  $(i\lambda + 2\pi ki, -i\lambda + 2\pi(k+1)i)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Соединив две точки ветвления в каждой паре разрезом, мы получим комплексную плоскость со счетным числом разрезов. На соответствующей римановой поверхности наше решение является однозначной функцией комплексного переменного. Наш выбор контура интегрирования следующий: мы сначала проинтегрируем вдоль действительной оси слева направо (т.е. от  $-\infty$  к  $+\infty$ ), затем вдоль

короткой кривой ( $p \rightarrow p + 2\pi i, p \rightarrow +\infty$ ) на правой бесконечности, затем вдоль прямой  $y = 2\pi i$ , параллельной действительной оси, справа налево, и, наконец, вдоль короткой кривой на левой бесконечности обратно к действительной оси. Интегрирование вдоль коротких кривых на бесконечностях дает нулевые вклады для положительных значений  $x$  (для отрицательных  $x$  мы можем выбрать прямую  $y = -2\pi i$  вместо  $y = 2\pi i$ ). Интегралы вдоль каждой прямой дают нам решение, а их линейная комбинация есть тоже решение. Таким образом, обратный интеграл Фурье по такому замкнутому контуру есть решение нашего уравнения в конфигурационном пространстве. Этот контур можно сжать, превратив его в замкнутый контур вокруг разреза  $(\lambda i, (2\pi - \lambda)i)$ , если  $x > 0$  (или вокруг разреза  $(-\lambda i, -(2\pi - \lambda)i)$  при  $x < 0$ ). Таким образом,

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{C_+} e^{ipx} \Psi_p dp, \quad x > 0, \quad (78)$$

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{C_-} e^{ipx} \Psi_p dp, \quad x < 0, \quad (79)$$

где

$$\Psi_p = C \frac{z}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)} \left( \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)^\beta, \quad (80)$$

$$z = e^p, \quad z_0 = e^{i\lambda}, \quad \bar{z}_0 = e^{-i\lambda}.$$

В последующем мы ограничимся только положительными значениями  $x$ . Полученное интегральное представление для  $\Psi_0$  можно упростить, проинтегрировав (78) по частям. Используя тождество

$$\frac{z dp}{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)} = -\frac{1}{2i \sin \lambda} d \left( \log \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right), \quad (81)$$

получаем

$$\Psi_0(x) = x \oint_{C_+} e^{ipx} \left( \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)^\beta dp, \quad x > 0 \quad (82)$$

(дополнительное слагаемое исчезает, поскольку наш контур не имеет границы, и для удобства мы опустили постоянный множитель). Мы будем использовать (82) в качестве интегрального представления фундаментального решения нашего уравнения (68) в конечных разностях.

Исследуем фундаментальное решение подробнее. Наша цель — свести интегрирование по замкнутому контуру  $C_+$  вокруг разреза к интегрированию

по конечному отрезку между соответствующими точками ветвления. Но если  $\beta \geq 1$  (напомним, что мы выбрали  $\beta$  положительным), то на нижнем пределе интегрирования мы имеем неинтегрируемую особенность. Чтобы обойти эту трудность, нам нужно вывести некоторые рекуррентные соотношения, понижающие значение  $\beta$ . Для этого мы проинтегрируем по частям (82). Получим в результате

$$\Psi_\beta(x) = \Psi_{\beta-1}(x) + \frac{ix}{\beta-1} \{ \Psi_{\beta-1}(x) - e^{-i\lambda} \Psi_{\beta-1}(x+i) \}. \quad (83)$$

Из этого соотношения легко увидеть структуру  $\Psi_\beta$  для произвольного значения  $\beta > 1$ . Пусть  $\beta = n + \tilde{\beta}$ , а  $\tilde{\beta} \leq 1$ . Тогда  $\Psi_\beta$  есть сумма двух слагаемых, каждое из которых является произведением многочлена степени  $n$  и  $\Psi_{\tilde{\beta}}(x)$  или  $\Psi_{\tilde{\beta}}(x+i)$ . Таким образом, мы можем считать, что  $\beta \leq 1$ . Прежде всего, рассмотрим отдельно случай  $\beta = 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= x \oint_{C_+} e^{ipx} \frac{e^p - e^{-i\lambda}}{e^p - e^{i\lambda}} dp = 2\pi i x \lim_{p \rightarrow i\lambda} \frac{e^{ipx} (e^p - e^{-i\lambda})(p - i\lambda)}{e^p - e^{i\lambda}} = \\ &= - (4\pi e^{-i\lambda} \sin \lambda) x e^{-\lambda x}. \end{aligned} \quad (84)$$

Отсюда следует, что все функции  $\Psi_\beta$  для целых положительных  $\beta = n$  имеют вид

$$\Psi_n = P_n(x) e^{-\lambda x}, \quad (85)$$

где  $P_n(x)$  — некоторые многочлены степени  $n$ . В случае же  $0 < \beta < 1$  подынтегральное выражение в (82) интегрируемо на обоих концах разреза в комплексной плоскости импульса, и мы действительно можем свести интеграл по замкнутому контуру  $C_+$  в интеграл по конечному отрезку. В результате получаем

$$\Psi_\beta(x) = \oint_{C_+} e^{ipx} f_p dp = (1 - e^{2\pi i \beta}) x \Phi_\beta(x), \quad (86)$$

где

$$\Phi_\beta(x) = \int_{i\lambda}^{i(2\pi-\lambda)} e^{ipx} \left( \frac{e^p - e^{-i\lambda}}{e^p - e^{i\lambda}} \right)^\beta dp, \quad x > 0. \quad (87)$$

Сделаем замену переменной:

$$e^q - e^{i\lambda} = -(2i \sin \lambda) y, \quad (88)$$

получим

$$\Phi_\beta = (1 - e^{-2i\lambda}) e^{-2\lambda x} \int_0^1 (1 - (1 - e^{-2i\lambda}) y)^{ix-1} \left( \frac{y-1}{y} \right)^\beta dy. \quad (89)$$

Сравнивая это с хорошо известным интегральным представлением для гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (90)$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

видим, что интеграл в (89) есть гипергеометрическая функция Гаусса  $F(a, b; c; z)$  со следующими значениями параметров:

$$a = 1 - ix, \quad b = 1 - \beta; \quad c = 2; \quad z = 1 - e^{-2i\lambda} \quad (91)$$

и

$$B(b, c-b) = B(1-\beta, 1+\beta) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\beta}. \quad (92)$$

Окончательно для фундаментального решения  $\Psi_\beta(x)$  получаем

$$\Psi_\beta(x) = (-4\pi\beta e^{-i\lambda} \sin \lambda) x e^{-\lambda x} F(1 - ix, 1 - \beta; 2; 1 - e^{-2i\lambda}). \quad (93)$$

Это выражение было получено только для  $0 < \beta < 1$ , но оно верно и для любого  $\beta > 0$ . И, наконец, несложно показать, что первоначальное уравнение в конечных разностях (68) является прямым следствием следующего рекуррентного соотношения Гаусса:

$$(2a - c - az + bz)F(a, b; c; z) + (c - a)F(a - 1, b; c; z) + a(z - 1)F(a + 1, b; c; z) = 0. \quad (94)$$

**3.3. Дискретный спектр масс.** В предыдущем разделе мы нашли общее решение уравнения в конечных разностях с кулоновским потенциалом:

$$\Psi(x+i) + \Psi(x-i) = 2 \left( \cos \lambda + \frac{\beta}{x} \sin \lambda \right) \Psi(x). \quad (95)$$

Теперь вспомним, что это уравнение на самом деле является радиальным уравнением Шредингера для нулевого углового момента, а координата  $x$  принимает только положительные значения. Таким образом, гамильтониан

$$\hat{H} = \cosh\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\beta}{2x} \sin \lambda \quad (96)$$

должен быть самосопряженным оператором на положительной полуоси, как этого требуют постулаты квантовой механики. Соответствующее расширение было найдено П. Хаичеком. Оказалось, что волновая функция должна удовлетворять следующим граничным условиям в нуле,  $x = 0$ :

$$\Psi^{(2n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (97)$$

т. е. сама функция и все ее производные четного порядка должны быть равны нулю в начале координат. Появление бесконечного числа граничных условий связано с тем, что оператор конечного сдвига может быть представлен в виде дифференциального оператора бесконечного порядка. Хаичек нашел также сохраняющийся ток вероятности  $J(x)$  для нашего уравнения Шредингера в конечных разностях. Этот ток определяется, как обычно, уравнением

$$J'(x) = i\left(\Psi^* \hat{H} \Psi - \Psi \hat{H} \Psi^*\right), \quad (98)$$

так что

$$(\Psi^* \Psi)' + J' = 0. \quad (99)$$

Записывая гамильтониан (96) в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \Psi^{(2k)}(x) - \frac{\beta \sin \lambda}{2x}, \quad (100)$$

получаем

$$J(x) = i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} \left[ \Psi^{*(l-1)} \Psi^{(2k-l)} - \Psi^{(l-1)} \Psi^{*(2k-l)} \right]. \quad (101)$$

Хаичек показал, что из граничных условий (97) следует, что

$$J(0) = 0. \quad (102)$$

Граничные условия (97) являются естественным обобщением известного граничного условия для нерелятивистского уравнения Шредингера, которое есть дифференциальное уравнение второго порядка. В этом случае граничные

условия (97) сводятся к единственному условию  $\Psi(0) = 0$ , которое вместе с условием интегрируемости с квадратом волновой функции гарантирует существование дискретного спектра для энергии связанных состояний. И в общем случае, если мы разложим гамильтониан (96) в ряд по производным и рассмотрим усеченный гамильтониан, оборвав ряд на порядке  $2N$ , то соответствующее уравнение Шредингера становится дифференциальным уравнением порядка  $2N$ . Можно показать, что асимптотика решений такого уравнения в точке  $x = 0$  имеет следующий вид:

$$\Psi \sim x, x^2, \dots, x^{2N-1}, 1 + x^{2N-1} \log x, \quad (103)$$

а асимптотика на бесконечности

$$\Psi \sim e^{\pm \lambda_k x} e^{\alpha_k \log x}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (104)$$

причем  $\lambda_k$  для связанных состояний действительны. Общее решение определено с точностью до нормировки и зависит, в действительности, от  $(2N - 1)$  произвольных констант, которые должны определяться из граничных условий. Условие интегрируемости с квадратом уменьшает число неизвестных констант до  $(N - 1)$ . Но для усеченного оператора порядка  $2N$  мы имеем  $N$  условий в нуле. Эти условия могут быть удовлетворены только для дискретного спектра собственных значений. Заметим, что последняя из асимптотик (103) исключается граничными условиями в нуле. Мы можем обратиться к предыдущему рассуждению и начать с асимптотического поведения решений в нуле. Чтобы удовлетворить граничным условиям, мы должны исключить последнюю из асимптотик в нуле и все четные члены в разложении до порядка  $(2N - 2)$ . При этом мы определяем  $N$  из  $(2N - 1)$  неизвестных констант. У нас остается, таким образом, лишь  $(N - 1)$  констант для  $N$  граничных условий на бесконечности. Но ситуация не столь проста в случае дифференциального оператора бесконечного порядка. Прежде всего, как избавиться от логарифмического члена в асимптотике? Проблема в том, что если мы сначала перейдем к бесконечному пределу по порядку оператора, то логарифмический член исчезнет ( $|x| < 1!$ ) полностью, не накладывая при этом никаких условий, а асимптотика станет равна 1. Но такая асимптотика может быть воспроизведена бесконечной линейной суперпозицией остальных асимптотик. Вычитая их, мы получим решение, которое будет формально удовлетворять всем граничным условиям, все еще имея достаточно свободных констант для удовлетворения граничным условиям на бесконечности. Если же мы сначала продифференцируем  $2N$  раз решение, содержащее логарифмический член в асимптотике, то получим член, пропорциональный  $(1/x)$ . Таким образом, требуя, чтобы «хорошее» решение было бесконечно дифференцируемым, мы можем достичь нашей цели. Более того, мы должны потребовать аналитичности волновой функции, по крайней мере, на действительной оси, потому что

мы уже использовали неявно аналитичность решений при переходе от дифференциального уравнения бесконечного порядка к уравнению в конечных разностях. Ситуация так же нехороша и с граничными условиями на бесконечности. Мы видели, что, умножая решение на функцию  $\exp(-2\pi kx)$ , мы получаем новое решение. Выбирая достаточно большое значение  $k$ , можно превратить «плохое» решение на бесконечности в «хорошее». Ниже мы увидим, что условие аналитичности решает эту проблему.

Найдем асимптотики общего решения при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$ . Из гипергеометрического ряда

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+k-1)b(b+1) \cdots (b+k-1)}{c(c+1) \cdots (c+k-1)k!} z^k \quad (105)$$

и вида общего решения

$$\Psi_{\text{gen}} = \Psi_0(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-2\pi kx},$$

$$\Psi_0 \propto x e^{-\lambda x} F(1 - ix, 1 - \beta; 2; 1 - e^{-2i\lambda})$$

тогда следует, что асимптотики при  $x \rightarrow 0$  имеют вид

$$x^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (106)$$

Для получения асимптотик при  $x \rightarrow \infty$  мы воспользуемся следующей формулой преобразования для гипергеометрической функции:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) + \\ + (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z),$$

где  $\Gamma(\dots)$  — функция Эйлера. Получаем, что

$$\Psi_\beta = \left( -4\pi\beta e^{-i\lambda(\beta+1)} \sin \lambda \right) x + \\ + \left\{ \frac{\Gamma(ix + \beta) e^{i\lambda\beta} e^{-\lambda x}}{\Gamma(1+ix)\Gamma(1+\beta)} F(1-ix, 1-\beta; 1-ix-\beta; e^{-2i\lambda}) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(-ix-\beta) e^{-i\lambda\beta} e^{\lambda x}}{\Gamma(1-ix)\Gamma(1-\beta)} F(1+ix, 1+\beta; 1+ix+\beta; e^{-2i\lambda}) \right\}. \quad (107)$$

Записав гипергеометрическую функцию в виде

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!} z^k \quad (108)$$

и воспользовавшись соотношением

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (109)$$

можем переписать  $\Psi_\beta$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_\beta = & \frac{4\pi\beta e^{-i\lambda(\beta+1)} \sin \lambda}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)} \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi x - i\pi\beta} - e^{-\pi x + i\pi\beta}} \times \\ & \times \left\{ e^{i\lambda\beta} e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-ix+k)\Gamma(1+k-\beta)}{\Gamma(1+k-ix-\beta)k!} e^{-2i\lambda k} - \right. \\ & \left. - e^{-i\lambda\beta} e^{\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+ix+k)\Gamma(1+k+\beta)}{\Gamma(1+k+ix+\beta)k!} e^{-2i\lambda k} \right\}. \end{aligned}$$

Используя затем асимптотическое разложение для функции Эйлера

$$\Gamma(z) = z^{z-1/2} \sqrt{2\pi} \phi\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (110)$$

мы получаем асимптотическое поведение нашего фундаментального решения  $\Psi_\beta(x)$ :

$$\begin{aligned} \Psi_\beta = & \frac{4\pi\beta e^{-i\lambda(\beta+1)} e^{i\pi\beta} \sin \lambda}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)} \left\{ e^{i\lambda\beta} e^{-\lambda x} e^{(i\pi\beta)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k-\beta)}{k!} e^{-2i\lambda k} - \right. \\ & \left. - e^{-i\lambda\beta} e^{\lambda x} e^{(-i\pi\beta)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k+\beta)}{k!} e^{-2i\lambda k} \right\}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k-\beta)}{k!} e^{-2i\lambda k} &= \Gamma(1-\beta)(1 - e^{-2i\lambda})^{\beta-1} = \\ &= \Gamma(1-\beta) e^{-i\lambda(\beta-1)} 2^{\beta-1} e^{(i\pi/2)(\beta-1)} \sin \lambda^{\beta-1}, \end{aligned}$$

и мы имеем окончательно

$$\begin{aligned} \Psi_\beta = & -2\pi i \beta e^{-i\lambda\beta} e^{i\pi\beta} \left\{ \frac{(2 \sin \lambda)^\beta}{\Gamma(1+\beta)} x^\beta e^{-\lambda x} - \right. \\ & \left. - \frac{(2 \sin \lambda)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} x^{-\beta} e^{\lambda x} \right\} \phi\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (111) \end{aligned}$$



Интересно, что точно такие же асимптотики могут быть получены прямо из первоначального уравнения Шредингера в конечных разностях без знания точного решения.

Сравнивая асимптотики при  $x = 0$  и на бесконечности, мы видим, что фундаментальное решение является аналитической функцией, только если

$$\beta = n \quad (112)$$

(напомним, что мы выбрали  $\beta > 0$ ). Это приводит к дискретному спектру для полной массы  $m$ . Действительно, имеем

$$\beta = \frac{\alpha}{2 \sin \lambda} = n, \quad \alpha = \kappa M^2, \quad \epsilon = \frac{m}{M} = \cos \lambda, \quad \epsilon = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4n^2}}. \quad (113)$$

При  $\beta = n$  гипергеометрический ряд в (93) обрывается, и мы получаем следующее фундаментальное решение:

$$\Psi_n(x) = P_n(x) e^{-\lambda x}, \quad (114)$$

где  $P_n$  — некоторые многочлены порядка  $n$ . Они могут быть вычислены прямо из определения:

$$P_n(x) = (-4\pi n e^{-i\lambda} \sin \lambda) x e^{-\lambda x} F(1 - ix, 1 - n; 2; 1 - e^{-2i\lambda}). \quad (115)$$

Мы можем воспользоваться найденным ранее рекуррентным соотношением, которое для наших многочленов  $P_n$  принимает вид

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{ix}{n} \{P_n(x) - e^{-2i\lambda} P_n(x+i)\}. \quad (116)$$

Этим способом мы можем вычислить  $P_n(x)$  шаг за шагом, начиная с  $P_1$ :

$$P_1(x) = (-4\pi e^{-i\lambda} \sin \lambda) x. \quad (117)$$

Эти полиномы могут быть также получены и из производящей функции. Мы не будем приводить подробности, а выпишем сразу результат. Вводя перенормированные многочлены

$$\Pi_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} (e^{i\lambda} \sin \lambda)^n P_n(x), \quad (118)$$

мы получаем следующую производящую функцию:

$$\begin{aligned} \Phi(z, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(0, x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(x) z^n = \\ &= 2\pi e^{2\lambda x} \left( \frac{z + \cot \lambda + i}{z + \cot \lambda - i} \right)^{ix}. \end{aligned} \quad (119)$$

В конце настоящего раздела мы приведем пример решения граничных условий и найдем волновую функцию основного состояния (т. е. для  $n = 1$ ). Фундаментальное решение  $n = 1$  имеет вид

$$\Psi_1 = x e^{-\lambda x} \quad (120)$$

(мы опустили несущественный здесь постоянный множитель). Общее решение, удовлетворяющее граничному условию на бесконечности (экспоненциальное спадание) имеет вид

$$\Psi_{1\text{gen}} = x e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-2\pi k x}, \quad (121)$$

а коэффициенты  $c_k$  должны быть найдены из граничных условий в нуле:

$$\Psi^{(2l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots \quad (122)$$

Дифференцируя (121)  $2l$  раз, получаем следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$2l \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\lambda + 2\pi k)^{2l-1} = 0, \quad l = 0, 1, \dots \quad (123)$$

Детерминант этой системы тождественно равен нулю, поскольку первая строка состоит сплошь из нулей. Мы можем оборвать эту систему на некотором значении  $l$ , вычислить все детерминанты и миноры, а затем, после подходящей перенормировки (скажем, положив  $c_0 = 1$ ), перейти к пределу  $l \rightarrow \infty$ . В нашем простейшем случае основного состояния оказывается возможным полностью выполнить эту программу, и в результате получаем

$$c_k = \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda/\pi + k)}{k! \Gamma(\lambda/\pi)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (124)$$

Подставляя это в (121), мы можем записать волновую функцию основного состояния (с точностью до нормировочного множителя) в очень простой и изящной форме:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= x e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-2\pi k x} = \\ &= x e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda}{k! \pi} \left(\frac{\lambda}{\pi} + 1\right) \cdots \left(\frac{\lambda}{\pi} + k - 1\right) e^{-2\pi k x} = \\ &= x e^{-\lambda x} (1 + e^{-2\pi x})^{-\lambda/\pi} = 2^{-\lambda/\pi} \frac{x}{(\cosh \pi x)^{\lambda/\pi}}. \end{aligned} \quad (125)$$

Легко увидеть, что, сдвигая параметр  $\lambda \rightarrow \lambda + 2\pi l$ , где  $l$  — положительное целое, мы получаем снова решение, удовлетворяющее всем граничным условиям (технически такое решение может быть получено приравнением нулю первых  $l$  коэффициентов  $c_m, m = 0, \dots, (l-1)$  в рассмотренной выше бесконечной системе линейных уравнений). Более того, введенный выше сохраняющийся ток вероятности тождественно равен нулю для любой суперпозиции (с комплексными коэффициентами) этих функций. Это означает, что каждое собственное значение полной массы (энергии) бесконечно вырождено, а появление бесконечного числа точек ветвления в волновой функции основного состояния как раз и отражает этот факт. Очевидно, что причина этого вырождения лежит в замораживании всех степеней свободы, кроме одной. Наш опыт в квантовой механике говорит, что после включения замороженных степеней свободы вырождение снимается. Мы ожидаем, в результате, что «настоящий» спектр масс тонких оболочек будет зависеть от более чем одного квантового числа. Вследствие бесконечной вырожденности «замороженного» спектра «правильный» спектр будет, фактически, квазинепрерывным. И, следовательно, спектр испарения Хокинга будет также квазинепрерывным. Существование основного состояния с ненулевой массой означает, что процесс испарения должен останавливаться, когда масса черной дыры приближается к минимально возможной массе ( $\approx 0,9M_{\text{Pl}}$ ). И мы можем предположить, что конечное состояние испаряющейся черной дыры будет характеризоваться минимальным значением массы, но при этом различными волновыми функциями основного состояния, зависящими от деталей распределения массы и процесса испарения. Это неожиданное свойство спектра масс черных дыр (его бесконечное вырождение) напоминает проблему так называемых скрытых параметров в квантовой механике и может оказаться полезным в разрешении известного информационного парадокса в физике черных дыр. И в конце раздела мы приведем результат вычисления нормировки волновой функции основного состояния. Скалярное произведение двух любых волновых функций основного состояния с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  равно

$$\begin{aligned} N_{\lambda_1, \lambda_2}^2 &= 2^{(-\lambda_1 + \lambda_2)/\pi} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(\cosh \pi x)^{(\lambda_1 + \lambda_2)/\pi}} = \\ &= \frac{1}{4\pi^{5/2}} 2^{(-\lambda_1 + \lambda_2)/\pi} \frac{\Gamma((\lambda_1 + \lambda_2)/2\pi)}{\Gamma(1/2 + (\lambda_1 + \lambda_2)/2\pi)} \zeta\left(2, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi}\right), \end{aligned} \quad (126)$$

где  $\zeta(x, y)$  есть функция Римана двух переменных. Таким образом, для волновой функции с данным параметром  $\lambda$  мы получаем следующую нормировку:

$$N_\lambda^2 = \frac{1}{4\pi^{5/2}} 2^{(-2\lambda)/\pi} \frac{\Gamma(\lambda/\pi)}{\Gamma(1/2 + \lambda/\pi)} \zeta\left(2, \frac{\lambda}{\pi}\right). \quad (127)$$

**3.4. Квантовые черные дыры и излучение Хокинга.** Мы получили общее решение уравнения Шредингера в конечных разностях, описывающее квантово-механическое поведение самогравитирующей электрически заряженной сферически-симметричной пылевой оболочки. Для связанных состояний мы нашли дискретный спектр масс, совпадающий с дираковским спектром, если в последнем положить равным нулю так называемое радиальное квантовое число. Как и в случае водородоподобного атома, спектр которого получается из нашего спектра в нерелятивистском пределе, мы можем заключить, что оболочка не коллапсирует без излучения. Однако начальная классическая ситуация совершенно другая. Классический атом водорода коллапсирует, излучая непрерывный спектр, тогда как классическая сферически-симметричная оболочка коллапсирует без всякого излучения. Однако без такого коллапса горизонт событий и, следовательно, черная дыра не образуются вовсе. Более того, если вычислить среднее значение радиуса квантовой оболочки, то окажется, что, по крайней мере для больших значений главного квантового числа, он лежит далеко от классического горизонта событий, так что оболочка проводит большую часть «жизни» вне классической черной дыры. Следовательно, чтобы получить решение для квантовой черной дыры, нужен новый критерий, и мы должны подробнее изучить полученный спектр. Рассмотрим зависимость полной массы  $m$  от величины голой  $M$  при фиксированных остальных параметрах  $e$  и  $n$ . Оказывается, существуют две ветви: возрастающая при

$$(GM^2 - e^2)(3GM^2 - e^2) < 4n^2 \quad (128)$$

и убывающая при противоположном знаке неравенства. Заметим, что теперь

$$\frac{m}{M} > \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1 + \frac{e^2}{3GM^2 - e^2}}, \quad (129)$$

и это значение больше соответствующего классического значения. Растущая ветвь соответствует «случаю черной дыры», а убывающая — «случаю кротовой норы». Используя квазиклассическую аргументацию, мы можем сказать, что для состояний, удовлетворяющих неравенству (128), средний радиус находится вне горизонта событий на «нашей» стороне моста Эйнштейна–Розена (заменяя, таким образом, понятие «классическая точка поворота» на «среднее значение радиуса»). Для убывающей ветви то же самое происходит на «другой» стороне моста Эйнштейна–Розена. Теперь понятно, почему в максимуме кривой отношение полной массы к голой массе в квантовом случае выше соответствующего классического значения. Все дело как раз в замене классической точки поворота на (меньшее) значение среднего радиуса, что приводит к большему значению полной массы. Следуя этой логике, мы должны предположить, что максимально возможная полная масса  $m$  при

фиксированных электрическом заряде  $e$  и квантовом числе  $n$  соответствует ситуации, когда среднее значение радиуса равно радиусу горизонта событий, делая возможным коллапс оболочки. Дальнейшее увеличение голой массы  $M$  означает появление кротовой норы с меньшей полной массой. Обобщая, мы можем ввести понятие состояния квантовой черной дыры. Для заданных значений электрического заряда  $e$  и главного квантового числа  $n$  состояние квантовой черной дыры — это состояние с наибольшей возможной полной массой  $m$ . Таким образом, для квантовых черных дыр вместо неравенства (128) имеем следующее уравнение:

$$3(GM^2)^2 - 4GM^2e^2 + e^4 - 4n^2 = 0, \quad (130)$$

решение которого, удовлетворяющее условию  $GM^2 - e^2 > 0$ , есть

$$GM^2 = \frac{2}{3}e^2 + \frac{1}{3}\sqrt{e^4 + 12n^2}. \quad (131)$$

Окончательно получаем следующий спектр масс черных дыр:

$$m_{\text{BH}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{9}n \left(1 + \frac{e^4}{12n^2}\right)^{3/2} + \frac{2}{3}e^2 - \frac{e^6}{54n^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (132)$$

Для незаряженной черной дыры  $e = 0$ , и мы немедленно получаем

$$m = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \sqrt{n} m_{\text{Pl}}. \quad (133)$$

Интересны два предельных режима. В первом случае

$$\frac{e^4}{12n^2} \ll 1, \quad m_{\text{BH}} = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{G}} \left(1 + \frac{\sqrt{3}e^2}{4n} - \frac{1}{32} \frac{e^4}{n^2} + \dots\right), \quad (134)$$

и заряд черной дыры дает лишь малые поправки к спектру масс черной дыры Шварцшильда. Значения для голой массы  $M$  и отношения  $m/M$  соответственно равны

$$M = \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{G}} \left(1 + \frac{\sqrt{3}e^2}{6n} - \frac{1}{48} \frac{e^4}{n^2} + \dots\right), \quad (135)$$

$$\frac{m}{M} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{\sqrt{3}e^2}{12n} - \frac{5}{96} \frac{e^4}{n^2} + \dots\right).$$

Во втором случае

$$\frac{e^4}{12n^2} \gg 1, \quad m_{\text{BH}} = \frac{|e|}{\sqrt{G}} \left(1 + \frac{n^2}{2e^4} + \dots\right), \quad (136)$$

а  $M$  и  $m/M$  равны

$$M = \frac{|e|}{\sqrt{G}} \left( 1 + \frac{n^2}{e^4} + \dots \right), \quad \frac{m}{M} = 1 - \frac{n^2}{2e^4} + \dots \quad (137)$$

Интересно, что в этом втором предельном случае масса черной дыры почти равна массе экстремальной черной дыры Рейсснера–Нордстрема. Легко видеть, что в обоих предельных случаях  $|\Delta m|/m \ll 1$ , где  $|\Delta m|$  — разность масс близлежащих уровней. Таким образом, эти пределы существенно квазиклассические, и соответствующие спектры масс должны быть совместны с излучением Хокинга. И это действительно так. Выпишем еще раз спектры, которые следуют из термодинамики черных дыр в таких же предельных случаях:

$$m = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{G}} \sqrt{\alpha_1} \left( 1 + \frac{\beta_1 + 3}{2\alpha_1} \frac{e^2}{n} + \left( \frac{\gamma_1}{2\alpha_1} - \frac{(\beta_1 + 1)(\beta_1 + 4)}{8\alpha_1^2} \right) \frac{e^4}{n^2} + \dots \right), \quad n \gg e^2 \quad (138)$$

и

$$m = \frac{|e|}{2\sqrt{G}} \left( 2 + \frac{\alpha_2^2 n^2}{4 e^4} + \dots \right), \quad n \ll e^2. \quad (139)$$

Сравнивая это с разложением, полученным из нашего спектра масс черной дыры, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{16}{3\sqrt{3}}, & \beta_1 &= -\frac{1}{3}, & \gamma_1 &= \frac{5\sqrt{3}}{144}, \dots, \\ \alpha_2 &= 2, & \beta_2 &= 2, & \gamma_2 &= -15, \dots \end{aligned} \quad (140)$$

Сравнивая значения для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , мы видим, что  $\tilde{\alpha}$  действительно является медленно меняющейся функцией. Таким образом, в предельном случае низких температур наш спектр масс черных дыр действительно совместим с существованием излучения Хокинга. Заметим, наконец, что наш спектр уважает и третий закон термодинамики. Действительно, для почти экстремальной черной дыры Рейсснера–Нордстрема масса наименьшего энергетического уровня ( $n = 1$ ) всегда превышает критическое значение ( $= |e|/\sqrt{\kappa}$ ), так что нулевая температура недостижима.

**3.5. Геометродинамика.** Этот раздел посвящен «правильному» квантованию сферически-симметричной гравитации с тонкой оболочкой [23]. «Правильное» означает, что исходным для нас является действие Эйнштейна–Гильберта, редуцированное на сферически-симметричное многообразие, и мы

используем формализм Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ) для получения канонических уравнений связи, гамильтоновых уравнений движения и формул квантовой теории.

Наша физическая модель остается неизменной — это самогравитирующая сферически-симметричная тонкая пылевая оболочка с голой массой  $M$ . Полное пространство-время разделено на три части: внутреннюю (I) и внешнюю (II) без полей материи, разделенных тонким слоем (III), заполненным пылевой материей оболочки. Метрику сферически-симметричного пространства-времени удобно записать в следующем общем виде:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + L^2(dr + N^r dt)^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (141)$$

где  $(t, r, \theta, \phi)$  — пространственно-временные координаты, а  $N, N^r, L, R$  — некоторые функции только  $t$  и  $r$ . Траектория тонкой оболочки описывается некоторой трехмерной поверхностью  $\Sigma$  в пространстве-времени, задаваемой некоторой функцией  $\hat{r}(t)$ :  $\Sigma^3 = \{(t, r, \theta, \phi) : r = \hat{r}(t)\}$ . В области I:  $r < \hat{r} - \epsilon$ , в области II:  $r > \hat{r} + \epsilon$ , а область III есть тонкий слой:  $\hat{r} - \epsilon < r < \hat{r} + \epsilon$ . Мы требуем, чтобы метрические коэффициенты  $N, N^r, L$  и  $R$  были непрерывными функциями, но их производные могут испытывать скачки в точках поверхности  $\Sigma$  в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Функционал действия для сферически-симметричной гравитации с тонкой оболочкой равен

$$S = S_{\text{gr}} + S_{\text{shell}} = \frac{1}{16\pi G} \times \\ \times \int_{\text{I+II+III}} {}^{(4)}R\sqrt{-g}d^4x + (\text{surface terms}) - M \int_{\Sigma} d\tau. \quad (142)$$

Он состоит из стандартного действия Эйнштейна–Гильберта для гравитационного поля и действия материи для тонкой пылевой оболочки. Поверхностные члены в гравитационной части действия и поведение метрических коэффициентов и их производных на пространственной бесконечности были подробно исследованы Кухажем, так что мы не будем рассматривать их здесь и просто воспользуемся готовыми результатами, где это будет необходимо. Нас интересует поведение действия и уравнений связи на поверхности  $\Sigma^3$ , описывающей траекторию оболочки. Полное множество степеней свободы нашей системы состоит из метрических коэффициентов  $N(r, t), N^r(r, t), L(r, t), R(r, t)$ , описывающих гравитационное поле, и радиальной координаты оболочки  $\hat{r}(t)$  как функции времени. Метрика (141) имеет стандартную АДМ-форму для 3+1-разбиения пространства-времени с функцией хода  $N$ , вектором сдвига  $N^i = (N^r, 0, 0)$  и пространственной метрикой  $h_{ik} = \text{diag}(L^2, R^2, R^2 \sin^2\theta)$ , которые задают расслоение многообразия на пространство и время. Скаляр-

ная плотность кривизны равна

$${}^{(4)}R\sqrt{-g} = N\sqrt{h}({}^{(3)}R + ((\text{Tr } K)^2 - \text{Tr } K^2)) - 2(\sqrt{h}K)_{,0} + 2(\sqrt{h}KN^i - \sqrt{h}h^{ij}N_{,j})_{,i}, \quad (143)$$

где  ${}^{(3)}R$  и  $K^{ij}$  — соответственно скалярная кривизна пространственной метрики  $h_{ij}$  и тензор внешней кривизны поверхности  $t = \text{const}$ . Подставляя выражение (141) для метрики в (143), получаем следующие выражения для внутренней и внешней кривизны поверхности  $t = \text{const}$ :

$${}^{(3)}R = \frac{2}{R^2} \left( 1 - \frac{(R')^2}{L^2} - \frac{2RR''}{L^2} + \frac{2RR'L'}{L^3} \right) \quad (144)$$

и

$$\begin{aligned} K_j^i &= \text{diag}(K_r^r, K_\theta^\theta, K_\phi^\phi), \\ K_r^r &= \frac{1}{NL}(\dot{L} - L'N^r - L(N^r)'), \\ K_\theta^\theta &= K_\phi^\phi = \frac{1}{NR}(\dot{R} - R'N^r). \end{aligned} \quad (145)$$

Здесь точка и штрих означают дифференцирование по  $t$  и  $r$  соответственно. Вклады в гравитационное действие в (143) от членов, содержащих полные производные, приводят к поверхностным членам, которые взаимно уничтожаются на общих границах областей I, II и III. Так что остаются только поверхностные члены на бесконечности, которые мы рассмотрим позднее. Существенной для гравитационного поля является АДМ-часть действия (142) с лагранжианом

$$L_{\text{gr}} = \frac{1}{16\pi G} NLR^2({}^{(3)}R - (\text{Tr } K)^2 - \text{Tr } K^2). \quad (146)$$

Вклад в действие от области III в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  дает лишь член, содержащий вторую производную  $R$ , именно

$$\int_{\text{III}} \frac{1}{16\pi G} NLR^2({}^{(3)}R) = - \int_{\text{II}} \frac{NRR''}{GL} = - \int_{\Sigma} \frac{\hat{N}\hat{R}[R']}{G\hat{L}}. \quad (147)$$

Мы будем отмечать шляпкой переменные на поверхности  $\Sigma$  и квадратными скобками  $[\mathcal{A}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\mathcal{A}(\hat{r} + \epsilon) - \mathcal{A}(\hat{r} - \epsilon))$  скачок переменной  $\mathcal{A}(r)$  через поверхность оболочки. Подставляя выражение (141) в «оболочечную» часть действия, получаем

$$S_{\text{shell}} = -M \int_{\Sigma} \sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2(\hat{N}^r + \dot{\hat{r}})^2} dt. \quad (148)$$



В результате имеем следующий явный вид действия (142) с метрикой (141):

$$S = \frac{1}{G} \int_{\text{I+II+III}} \left( N \frac{L}{2} \frac{(R')^2}{2L} - \left( \frac{RR'}{L} \right)' + \frac{R}{N} (\dot{R} - R'N^r) ((LN^r)' - \dot{L}) + \right. \\ \left. + \frac{L}{2N} (\dot{R} - R'N^r)^2 \right) - \int_{\Sigma} \left( \frac{\hat{N}\hat{R}[R']}{\hat{L}} - m\sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2(\hat{N}^r + \hat{r})^2} \right) dt. \quad (149)$$

Канонический формализм для такого действия может быть описан следующим образом. Импульсами, сопряженными соответствующим динамическим переменным, являются

$$\begin{aligned} P_N &= \delta S / \delta \dot{N} = 0, \\ P_{N^r} &= \delta S / \delta \dot{N}^r = 0, \\ P_L &= \delta S / \delta \dot{L} = \frac{R}{GN} (R'N^r - \dot{R}), \\ P_R &= \delta S / \delta \dot{R} = \frac{L}{GN} (R'N^r - \dot{R}) + \frac{R}{GN} ((LN^r)' - \dot{L}), \\ P_{\hat{R}} &= \delta S / \delta \dot{\hat{R}} = 0, \\ P_{\hat{L}} &= \delta S / \delta \dot{\hat{L}} = 0, \\ \hat{\pi} &= \delta S / \delta \dot{\hat{r}} = \frac{m\hat{L}^2(N^r + \hat{r})}{\sqrt{\hat{N}^2 - \hat{L}^2(N^r + \hat{r})^2}}. \end{aligned} \quad (150)$$

Действие (149), записанное в гамильтоновой форме, принимает вид

$$S = \int_{\text{I+II}} \left( P_L \dot{L} + P_R \dot{R} - NH - N^r H_r \right) dr dt + \int_{\Sigma} \hat{\pi} \dot{\hat{r}} - \\ - \hat{N} \left( \hat{R}[R'] / (G\hat{L}) + \sqrt{m^2 + \hat{\pi}^2 / \hat{L}^2} \right) - \hat{N}^r (-\hat{L}[P_L] - \hat{\pi}) dt, \quad (151)$$

где

$$H = G \left( \frac{LP_L^2}{2R^2} - \frac{P_L P_R}{R} \right) + \frac{1}{G} \left( -\frac{L}{2} - \frac{(R')^2}{2L} + \left( \frac{RR'}{L} \right)' \right), \\ H_r = P_R R' - LP_L'. \quad (152)$$

Здесь  $N$ ,  $N^r$ ,  $\hat{N}$  и  $\hat{N}^r$  — лагранжевы множители гамильтонова формализма. Система связей содержит две поверхностные связи, вдобавок к известным гамильтоновой и импульсной связям в формализме АДМ.

АДМ-связи:

$$\begin{cases} H = 0, \\ H_r = 0. \end{cases} \quad (153)$$

Связи на оболочке:

$$\begin{cases} \hat{H}_r = \hat{\pi} + \hat{L}[P_L] = 0, \\ \hat{H} = \frac{R[R']}{GL} + \sqrt{M^2 + \hat{\pi}^2/L^2} = 0. \end{cases} \quad (154)$$

Кухаж придумал следующее специфическое преобразование переменных  $(R, P_R, L, P_L)$  к новым каноническим переменным  $(R, \bar{P}_R, M, P_M)$ , в которых гамильтонова и импульсная связи, задаваемые уравнением (152), эквивалентны очень простой системе связей:

$$\bar{P}_R = 0, \quad M' = 0. \quad (155)$$

Идея этого преобразования — в использовании для метрики пространства-времени шварцшильдовского анзаца вместо метрики (141):

$$ds^2 = -F(R, m)dT^2 + \frac{1}{F(R, m)}dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (156)$$

Здесь  $T$ ,  $R$  и  $m$  — некоторые функции  $(r, t)$  и  $F(R, m) = 1 - 2Gm/R$ , а  $m$ , вообще говоря, функция  $r$ ,  $m = m(r)$ . Приравнявая две формы метрики (141) и (156), получаем связь двух систем динамических переменных. В явном виде

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\frac{(R')^2}{F} - FP_m^2}, \\ P_L &= \frac{RFP_m}{G} \sqrt{\frac{(R')^2}{F} - FP_m^2}, \\ R &= R, \end{aligned} \quad (157)$$

$$\bar{P}_R = P_R + \frac{P_m}{2G} + \frac{FP_m}{2G} + \frac{(RFP_m)'RR' - RFP_m(RR)'}{GRF((R')^2/F - FP_m^2)},$$

где  $P_m = -T'$ . Форма Лиувилля

$$\Theta = \int P_R \dot{R} + P_L \dot{L} \quad (158)$$

может быть следующим образом выражена через новые переменные:

$$\Theta = \int P_m \dot{m} + \bar{P}_R \dot{R} + \frac{\partial}{\partial t} \left( LP_L + \frac{1}{2G} RR' \ln \left| \frac{RR' - LP_L G}{RR' + LP_L G} \right| \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2G} R \dot{R} \ln \left| \frac{RR' + LP_L G}{RR' - LP_L G} \right| \right). \quad (159)$$

Там, где нет оболочки, полные производные в (159) приводят к появлению некоторых поверхностных членов на бесконечности. Как показал Кухаж, подходящие граничные условия на бесконечности делают последний поверхностный член в (159) равным нулю. Тогда из (159) следует, что множество  $(R, \bar{P}_R, m, P_m)$  образует каноническую систему переменных, а (157) описывает каноническое преобразование между  $(R, P_R, L, P_L)$  и  $(R, \bar{P}_R, m, P_m)$ .

В присутствии оболочки ситуация меняется. Теперь поверхностными членами уже нельзя пренебречь. Произведем преобразование (157) в областях I и II нашего пространства-времени. Форма Лиувилля нашей гамильтоновой системы (151) имеет вид

$$\tilde{\Theta} = \int_{I+II} P_R \dot{R} + P_L \dot{L} + \int_{\Sigma} \hat{\pi} \dot{r}. \quad (160)$$

После интегрирования полные производные в (159) дают некоторый вклад в форму Лиувилля на поверхности  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta} &= \int_{I+II} \bar{P}_R \dot{R} + P_m \dot{m} + \int_{\Sigma} \left[ LP_L + \frac{1}{2G} RR' \ln \left| \frac{RR' - LP_L G}{RR' + LP_L G} \right| \right] \dot{r} dt - \\ &\quad - \int_{\Sigma} \left[ \frac{1}{2G} R \dot{R} \ln \left| \frac{RR' + LP_L G}{RR' - LP_L G} \right| \right] + \int_{\Sigma} \hat{\pi} \dot{r} = \\ &= \int_{I+II} P_m \dot{m} + \bar{P}_R \dot{R} + \int_{\Sigma} \hat{p} \dot{r} + \int_{\Sigma} \hat{P}_{\hat{R}} \dot{R}, \quad (161) \end{aligned}$$

где мы ввели обозначения

$$\hat{p} = \hat{\pi} + L[P_L], \quad (162)$$

$$\hat{P}_{\hat{R}} = \pm \left[ \frac{1}{2G} R \ln \left| \frac{RR' - GLP_L}{RR' + GLP_L} \right| \right]$$

и использовали следующее тождество:

$$\dot{\hat{R}} = \frac{d}{dt}R(t, \hat{r}(t)) = (\dot{R}(t, r) + R'(t, r)\dot{\hat{r}}(t)) \Big|_{r=\hat{r}(t)}. \quad (163)$$

Знак перед логарифмом в определении импульса  $P_{\hat{R}}$  зависит от того, пересекаем ли мы оболочку изнутри наружу, двигаясь по времени из прошлого в будущее (знак «+») или наоборот (знак «-»). Видим, что это каноническое преобразование затрагивает все множество координат фазового пространства  $\Pi = \{(R(r, t), P_R(r, t), L(r, t), P_L(r, t), \hat{r}(t), \hat{\pi}(t))\}$  в соответствии с формулами (157) и (162). Более того, оно вводит дополнительную пару канонических переменных  $(\hat{R}, \hat{P}_{\hat{R}})$  на оболочке. Во внутренней и внешней областях I и II в результате канонического преобразования связи упрощаются, как это было и в отсутствие оболочки (см. (155)). Импульсная связь (154) на поверхности  $\hat{H}_r = 0$  принимает вид

$$\hat{p} = 0. \quad (164)$$

Чтобы двигаться дальше, нам нужно знать гамильтонову связь на оболочке как функцию новых канонических переменных. Для этого посмотрим внимательнее на уравнение (163), которое есть не что иное, как полная производная по времени от радиуса оболочки. Используя определение  $P_L = -R/(GN)(\dot{R} - R'N^r)$ , получаем

$$\dot{\hat{R}} = -\frac{GNP_L}{R} + R'(\dot{r} + N^r). \quad (165)$$

Вспоминая, что

$$\pi \equiv \frac{ML^2(N^r + \dot{r})}{\sqrt{N^2 - L^2(N^r + \dot{r})^2}},$$

находим

$$L(N^r + \dot{r}) = \frac{\pi N}{L\sqrt{M^2 + \pi^2/L^2}}.$$

Уравнение (165) теперь имеет вид

$$\frac{\dot{\hat{R}}}{N} = -\frac{GP_L}{R} + \frac{R'}{L} \frac{\pi}{L\sqrt{M^2 + \pi^2/L^2}}. \quad (166)$$

Легко заметить теперь, что скачок производной радиуса  $\dot{\hat{R}}$  при переходе через оболочку есть линейная комбинация связей

$$\left[ \dot{\hat{R}} \right] = \frac{GN}{R} \left( \chi_H - \frac{H^r}{L} \right), \quad (167)$$

где

$$\chi = \frac{\pi}{L\sqrt{M^2 + \pi^2/L^2}}.$$

Далее, определение импульса  $\dot{R}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \beta \equiv \exp\left(\pm \frac{G\hat{P}_R}{R}\right) \frac{F_{\text{out}}}{F_{\text{in}}} &= \frac{(\dot{R}/N + GP_L/R(1+\chi))_{\text{in}}}{(\dot{R}/N + GP_L/R(1+\chi))_{\text{out}}} \equiv \\ &\equiv \frac{\alpha + y_{\text{in}}(1+\chi)}{\alpha + y_{\text{out}}(1+\chi)}, \end{aligned} \quad (168)$$

где  $\alpha = \dot{R}/N$  и  $y = GP_L/R$ .

Следующим шагом будет получение соотношения между  $\alpha$  и  $y$ . Из определения  $P_L$  и  $\dot{R}$  имеем

$$\frac{R'^2}{L^2} = F + y^2 = \left(\frac{\alpha}{\chi} + \frac{y}{\chi}\right).$$

Решая это уравнение относительно  $y$ , получаем

$$y = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - (\chi^2 - 1)(F\chi^2 - \alpha^2)}}{\chi^2 - 1}. \quad (169)$$

Подставляя последнее выражение обратно в (168), находим после простых алгебраических преобразований

$$\beta = \frac{z - \sigma_{\text{in}}\sqrt{z^2 + F_{\text{in}}}}{z - \sigma_{\text{out}}\sqrt{z^2 + F_{\text{out}}}}, \quad (170)$$

где

$$z^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \chi^2}. \quad (171)$$

С помощью импульсной связи мы можем записать скачок  $y$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{out}}\chi\sqrt{\alpha^2 + (1 - \chi^2)F_{\text{out}}} &= \\ &= \sigma_{\text{in}}\chi\sqrt{\alpha^2 + (1 - \chi^2)F_{\text{in}}} - G\frac{M}{R}\chi\sqrt{1 - \chi^2}. \end{aligned} \quad (172)$$

Заметим, что это как раз то уравнение, с которого мы начинали (см. (10)), если выбрать собственное время (подставляя  $\dot{R}^2$  вместо  $z^2$ ). Квадрируя его,

получаем

$$\begin{cases} \sigma_{\text{in}} \sqrt{z^2 + F_{\text{in}}} = -\frac{R[F]}{2MG} + \frac{MG}{2R}, \\ \sigma_{\text{out}} \sqrt{z^2 + F_{\text{out}}} = -\frac{R[F]}{2MG} - \frac{MG}{2R}, \end{cases} \quad (173)$$

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{R[F]}{2MG}\right)^2 - \frac{1}{2}(F_{\text{out}} + F_{\text{in}}) + \frac{M^2 G^2}{4R^2}}. \quad (174)$$

Знак  $z$  противоположен знаку  $\dot{R}$ . Окончательно для связи на оболочке имеем

$$\beta - \frac{z + R[F]/2MG - MG/2R}{z + R[F]/2MG + MG/2R} = 0. \quad (175)$$

Легко показать, что полученная связь эквивалентна гамильтоновой связи (154). В последующем в качестве классической связи, из которой получится затем квантовое уравнение для волновой функции  $\Psi$ , мы будем рассматривать следующую квадрированную версию гамильтоновой связи:

$$C = F_{\text{out}} + F_{\text{in}} - \sqrt{F_{\text{out}}}\sqrt{F_{\text{in}}} \left( \exp \frac{G\dot{P}_R}{R} + \exp -\frac{G\dot{P}_R}{R} \right) - \frac{M^2 G^2}{R^2}. \quad (176)$$

Гамильтонова связь (176) была получена в предположении, что  $F_{\text{in}}$  и  $F_{\text{out}}$  положительны. Можно, разумеется, вывести аналогичные связи и в  $T_{\pm}$ -областях, где  $F < 0$ . Но мы вместо этого сделаем замену

$$\sqrt{F} \rightarrow F^{1/2} \quad (177)$$

и будем рассматривать эту функцию как функцию комплексной переменной. Тогда точка на горизонте  $F = 0$  становится точкой ветвления, и нам необходимы правила обхода. Положим

$$\begin{aligned} F^{1/2} &= |F| e^{i\phi}, \\ \phi = 0 &\quad \text{в } R_+ \text{-области,} \\ \phi = \pi/2 &\quad \text{в } T_- \text{-области,} \\ \phi = \pi &\quad \text{в } R_- \text{-области,} \\ \phi = -\pi/2 &\quad \text{в } T_+ \text{-области} \end{aligned} \quad (178)$$

для черных дыр, и

$$\begin{aligned} \phi = \pi &\quad \text{в } R_+ \text{-области,} \\ \phi = -\pi/2 &\quad \text{в } T_- \text{-области,} \\ \phi = 0 &\quad \text{в } R_- \text{-области,} \\ \phi = \pi/2 &\quad \text{в } T_+ \text{-области} \end{aligned} \quad (179)$$

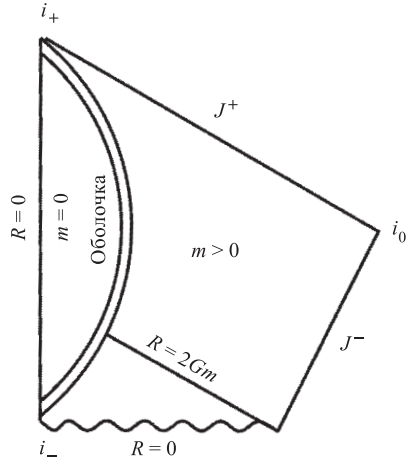


Рис. 6

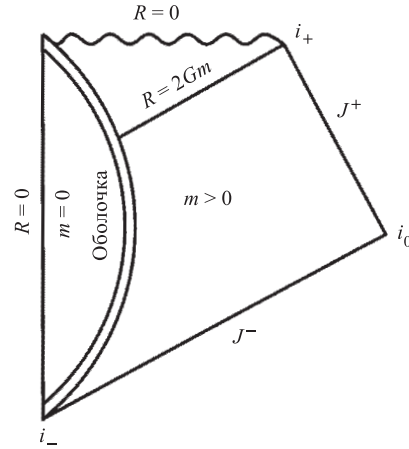


Рис. 7

для кротовых нор. Причина такого аналитического продолжения состоит в том, что таким образом мы получаем уравнение для волновой функции, которое покрывает все четыре куса полной диаграммы Картера–Пенроуза для многообразия Шварцшильда. Некоторые важные следствия этого станут вскоре очевидными.

Следует подчеркнуть, что мы рассматриваем тонкую самогравитирующую оболочку вместе с пространством-временем, которое она «создает». Поэтому для разных видов движения оболочки мы должны выбрать различные формы гамильтоновой связи. Для оболочки, уходящей на бесконечность, мы выбираем связь в следующем виде (см. рис. 6 для соответствующей диаграммы Картера–Пенроуза в случае  $F_{\text{in}} = 1$ ):

$$\exp\left(\pm \frac{Gp}{R}\right) = \frac{1/2(F_{\text{out}} + F_{\text{in}}) - (M^2 G^2)/2R^2 \pm (MG)/Rz}{\sqrt{F_{\text{in}}}\sqrt{F_{\text{out}}}}, \quad (180)$$

в то время как для оболочки, приходящей из бесконечности (диаграмма Картера–Пенроуза показана на рис. 7), мы имеем

$$\exp\left(\pm \frac{Gp}{R}\right) = \frac{1/2(F_{\text{out}} + F_{\text{in}}) - (M^2 G^2)/2R^2 \mp (MG)/Rz}{\sqrt{F_{\text{in}}}\sqrt{F_{\text{out}}}}. \quad (181)$$

Финитное движение симметрично относительно изменения знака импульса, поэтому в качестве гамильтоновой связи мы выберем сумму связей (180) и (181):

$$\exp\left(\frac{Gp}{R}\right) + \exp\left(-\frac{Gp}{R}\right) = \sigma \frac{F_{\text{out}} + F_{\text{in}} - (M^2 G^2)/R^2}{\sqrt{F_{\text{in}}}\sqrt{F_{\text{out}}}} \quad (182)$$

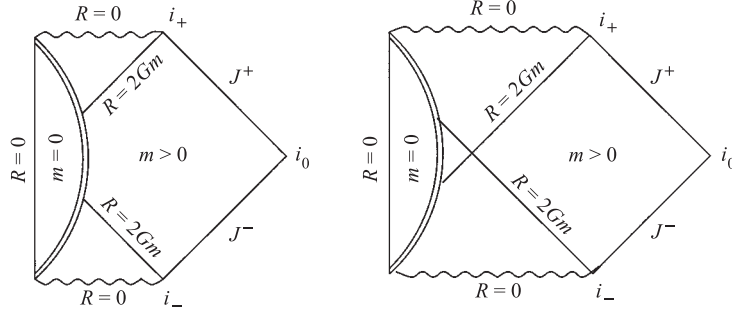


Рис. 8

с диаграммами Картера–Пенроуза для различных значений  $\sigma = \pm 1$  (случай черной дыры и кротовой норы), приведенными на рис. 8.

**3.6. Квантовая геометродинамика черных дыр и кротовых нор.** Обратимся теперь к процедуре квантования теорий со связями по Дираку.

Удобно сделать каноническое преобразование от переменных  $(\hat{R}, \hat{P}_{\hat{R}})$  к переменным  $(\hat{S}, \hat{P}_{\hat{S}})$ :

$$\begin{cases} \hat{S} = \frac{\hat{R}^2}{R_0^2}, \\ \hat{P}_{\hat{S}} = R_0^2 \frac{\hat{P}_{\hat{R}}}{2\hat{R}}. \end{cases} \quad (183)$$

Здесь  $R_0$  — некое конкретное значение радиуса. Переменная  $\hat{S}$  есть безразмерная площадь поверхности оболочки.

Фазовое пространство состоит из координат  $(R(r), \tilde{P}_R(r), m(r), P_m(r), \hat{S}, \hat{P}_{\hat{S}}, \hat{r}, \hat{p}_r)$ ,  $r \in (-\infty, \hat{r} - \epsilon) \cup (\hat{r} + \epsilon, \infty)$ . Волновая функция в координатном представлении зависит от координат конфигурационного пространства

$$\Psi = \Psi(R(r), m(r), \hat{S}, \hat{r}), \quad (184)$$

а все импульсы становятся операторами вида

$$\begin{aligned} \tilde{P}_R(r) &= -i \delta / \delta R(r), & P_m(r) &= -i \delta / \delta m(r), \\ \hat{P}_{\hat{S}} &= -i \partial / \partial \hat{S}, & \hat{p}_r &= -i \partial / \partial \hat{r}. \end{aligned} \quad (185)$$

Связи АДМ (153) и связи на оболочке (154) становятся операторами, действующими на  $\Psi$ . Система связей АДМ эквивалентна системе связей (155) в переменных Кухажа, которые могут быть легко решены на квантовом уровне.



Действительно, в областях I и II уравнения

$$\begin{cases} \partial\Psi/\partial R(r) = 0, \\ m'(r)\Psi = 0 \end{cases} \quad (186)$$

выражают тот факт, что волновая функция не зависит от  $R(r)$ , а зависимость от  $m(r)$  сводится в каждой из областей I и II к  $\Psi \equiv \delta(m - m_{\pm})$ , где величины  $m_{\pm}$ , определенные в областях I (-) и II (+), не зависят от  $r$ . Они равны шварцшильдовским массам  $m_{\text{in}}$  и  $m_{\text{out}}$  в (68) во внутренней и внешней областях. Система связей на оболочке (154) накладывает дополнительные ограничения на  $\Psi$ . Первое из них в соответствии с (164) имеет следующий вид в новых переменных:

$$\partial\Psi/\partial\hat{r} = 0. \quad (187)$$

Так что единственным нетривиальным уравнением является гамильтонова связь (176):

$$\begin{aligned} \hat{C}(m_+, m_-, \hat{S}, -i\hbar\partial/\partial\hat{S})\Psi &= 0, \\ \Psi &= \Psi(m_+, m_-, \hat{S}). \end{aligned} \quad (188)$$

Оператор  $\hat{C}$  содержит экспоненту от импульса  $\hat{P}_S$ . Эта экспонента становится оператором конечного сдвига, когда  $\hat{P}_S$  становится дифференциальным оператором:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{G\hat{P}_R}{R}\right) &= \exp\left(\frac{2G\hat{P}_S}{R_0^2}\right)\Psi = \\ &= \exp\left(-i\zeta\frac{\partial}{\partial\hat{S}}\right)\Psi = \Psi(m_+, m_-, \hat{S} - \xi i). \end{aligned} \quad (189)$$

Здесь  $\zeta = 2G/R_0^2$ .

Простоты ради мы подробно рассмотрим лишь финитное движение единственной оболочки, голая масса которой равна  $M$ . Это означает, что  $m_{\text{in}} = 0$ , и мы должны использовать симметричную форму гамильтоновой связи. В этом случае естественно выбрать для нормировочного значения радиуса  $R_0$  радиус Шварцшильда оболочки  $R_0 = R_g = 2Gm$  ( $m = m_{\text{out}}$ ). Для  $\zeta$  мы получаем теперь  $\zeta = (12)(m_{\text{Pl}}/m)^2$ , а гамильтонова связь может быть записана в виде

$$\Psi(s + i\zeta) + \Psi(s - i\zeta) = \frac{2 - 1/\sqrt{s} - M^2/(4m^2s)}{(1 - 1/\sqrt{s})^{1/2}}\Psi(s). \quad (190)$$

Хорошо известно, что классически эквивалентные связи приводят, вообще говоря, к неэквивалентным квантовым теориям. Мы полагаем, что критерием для правильной квантовой теории является поведение волновой функции в квазиклассическом режиме. Действительно, параметр  $\zeta$  становится малым для больших черных дыр, и разложение по этому параметру эквивалентно разложению по постоянной Планка  $\hbar$  ( $m_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar/Gc}$ ). В дальнейшем мы рассмотрим этот квазиклассический предел и покажем, что наш выбор квантовой связи является хорошим. Но прежде мы хотели бы сделать одно важное замечание. Наше квантовое уравнение (190) — это уравнение в конечных разностях, а не привычное дифференциальное уравнение, причем сдвиг аргумента — вдоль мнимой оси. Обычно мы требуем от решений дифференциального уравнения достаточной степени дифференцируемости. Аналогично мы должны потребовать, чтобы решение уравнения в конечных разностях (190) было аналитической функцией. Это очень жесткое, но неизбежное требование. Наш предыдущий опыт (см. [22]) показывает, что именно требование аналитичности, а не граничные условия, приводят к дискретному спектру масс (энергий).

Уравнение в конечных разностях (190) становится обыкновенным дифференциальным уравнением в квазиклассическом пределе, который совпадает с пределом больших черных дыр ( $m \gg m_{\text{Pl}}$ ). Действительно, параметр конечного сдвига  $\zeta = 1/2(m_{\text{Pl}}/m)$  в аргументе волновой функции  $\Psi$  в уравнении (190) становится малым, и мы можем оборвать ряд Тэйлора на втором порядке,

$$\Psi(\hat{S} + \zeta i) = \Psi(\hat{S}) + i\zeta\Psi'(\hat{S}) - \frac{\zeta^2}{2}\Psi''(\hat{S}) + \dots \quad (191)$$

Теперь мы можем исследовать поведение решений в особых точках нашего уравнения в этом квазиклассическом пределе. Имеем

$$\Psi|_{S \pm \zeta i} \approx \Psi(S) \pm \Psi'(S)\zeta i - \frac{\zeta^2}{2}\Psi''(S) \dots,$$

$$\begin{aligned} F^{1/2}|_{S \pm \zeta i} &= \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{s \pm \zeta i}}} \approx \\ &\approx F^{1/2} \left( 1 \pm \frac{1}{2FS^{3/2}}\zeta i + \left( \frac{3}{8FS^{5/2}} + \frac{1}{8F^2S^3} \right) \zeta^2 \right) \dots \end{aligned} \quad (192)$$

Это приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые имеют различный вид в  $R_{+-}$ ,  $R_{-}$ ,  $T_{+-}$  и  $T_{-}$ -областях из-за различных фаз функции  $F^{1/2}$ . Нас интересуют особые точки  $S = \infty$  и  $S = 1$ .

В квазиклассическом пределе наше требование аналитичности решений точного уравнения (190) трансформируется в условие, чтобы точки ветвления лидирующих членов в разложении решений вблизи особых точек приближенного уравнения были одного порядка. Поэтому мы должны удерживать только те члены в соответствующих уравнениях, которые дают нам нужные лидирующие члены в решениях. Ниже мы рассмотрим только случай черной дыры, полученные результаты легко переформулируются для случая кротовой норы.

Сингулярная точка  $S = \infty$  в области  $R_+$  лежит в классически запрещенной области, поскольку мы интересуемся только финитным движением. Для анализа поведения здесь волновой функции мы должны взять уравнение (190) с  $\phi = 0$  и разложить все члены в ряд по  $y$ , где  $s = (1 + y)^2$ . В результате получаем

$$\Psi_{yy} - \frac{1}{y}\Psi_y + \frac{1}{\zeta^2} \left( 1 - \frac{M^2}{m^2} + \frac{1}{2y} \left( 2 - \frac{M^2}{m^2} \right) \right) \Psi = 0, \quad (193)$$

и главный член решения равен

$$\begin{aligned} \Psi &\sim y^{1/2 - \frac{M^2/m^2 - 2}{4\mu\zeta^2}} \exp(-\mu y), \\ \mu &= \frac{1}{\zeta} \sqrt{\frac{M^2}{m^2} - 1}, \quad y \gg \zeta. \end{aligned} \quad (194)$$

В другой сингулярной точке в  $R_+$ -области, т. е. в точке  $S \rightarrow 1 + 0$ , имеем ( $s = (1 + z^2)^2$ )

$$\Psi_{zz} - 3z\Psi_z + \frac{16z}{\zeta^2} \left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right) \Psi = 0, \quad (195)$$

а главный член равен

$$\begin{aligned} \Psi &\sim 1 - \frac{8}{3\zeta^2} \left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right) y^{3/2}, \\ y &= \sqrt{z}, \quad s \gg \zeta, \quad y \gg \zeta, \quad \zeta \ll 1. \end{aligned} \quad (196)$$

Сравнивая порядок ветвления в  $s \rightarrow \infty$  и  $s \rightarrow 1 + 0$ , заключаем, что

$$\frac{2 - M^2/m^2}{4\zeta\sqrt{M^2/m^2 - 1}} = n, \quad n = \text{integer}. \quad (197)$$

Это первое квантовое условие.

Мы не рассматриваем здесь отдельно асимптотику в  $R_-$ -области вблизи горизонта ( $s \rightarrow 1 + 0$ ), поскольку она отличается от соответствующего решения в  $R_+$ -области только знаком перед вторым слагаемым.

Рассмотрим теперь асимптотики решений в  $R_-$ -области при  $s \rightarrow \infty$ . Вследствие знака «минус» перед  $F^{1/2}$  уравнение для волновой функции в  $R_-$ -области существенно отличается от уравнения в  $R_+$ -области:

$$\Psi_{yy} - \frac{1}{y}\Psi_y - \frac{1}{\zeta^2} \left( 16y^2 + \left( 1 - \frac{M^2}{m^2} \right) \right) \Psi = 0. \quad (198)$$

Главный член асимптотики теперь имеет вид

$$\Psi \sim y^{\frac{M^2/m^2-1}{8\zeta}} \exp\left(-\frac{2}{\zeta}y^2\right). \quad (199)$$

Заметим, что волновая функция в  $R_-$ -области спадает гораздо быстрее, чем в  $R_+$ -области. Это вполне разумный результат, потому что он означает, что квантовая оболочка в случае черной дыры может проникать в  $R_-$ -область (что абсолютно запрещено для классического движения), но вероятность такого события ничтожно мала.

И снова, сравнивая порядок ветвления в точках  $s \rightarrow 1 + 0$  и  $s \rightarrow \infty$  в  $R_-$ -области, получаем

$$\frac{M^2/m^2-1}{8\zeta} = \frac{1}{2} + p, \quad p = \text{positive integer}. \quad (200)$$

Появление второго квантового числа является сюрпризом и связано оно с нетривиальной причинной структурой пространства-времени Шварцшильда. Классическая оболочка в черной дыре (например) не может двигаться в  $R_-$ -области, и на полной диаграмме Картера–Пенроуза данная область просто не существует. Но квантовая оболочка с параметрами, соответствующими черной дыре, «чувствует» как  $R_-$ , так и  $R_+$ -области, и именно здесь второе квантовое число начинает играть свою роль. Полезно сравнить наш результат с известной кулоновской задачей для атома водорода. Параметрами кулоновской задачи являются электрические заряды протона и электрона и масса электрона, причем все они с самого начала квантованы. Поэтому для получения дискретного спектра энергий в случае финитного движения достаточно иметь одно квантовое условие. Но в нашем случае есть два первоначально непрерывных параметра: полная масса  $m$  и голая масса  $M$ . И теперь для того, чтобы получить дискретный спектр масс (энергий), мы должны иметь два квантовых условия. И это как раз то, что у нас получилось!

Рассмотрим поведение решения вблизи горизонта (на субпланковских расстояниях), где  $|y| \gg \zeta$  ( $s \sim 1$ ). Точнее, нас интересуют решения в

$R_+$ - и  $T_-$ -областях. Разложение (192) здесь уже не действует для функции  $F^{1/2}(s \pm i\zeta)$ , но оно все еще справедливо для функции  $\Psi$ . Удерживая только главные члены, имеем в этом случае

$$\Psi_{ss}(s) - \frac{2}{\zeta}\Psi_s(s) + \left( \frac{4}{\alpha\zeta^{5/2}} \left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right) - \frac{2}{\zeta^2} \right) \Psi(s) = 0, \quad (201)$$

а решение имеет вид

$$\Psi \sim e^{ks}, \quad k \approx -\frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{-\frac{4}{\alpha\zeta^{5/2}} \left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right)}. \quad (202)$$

Коэффициент  $\alpha$  равен 1 в  $R_+$ -области и мнимой единице  $i$  в  $T_-$ -области.

В  $R_+$ -области

$$k \approx -\frac{1}{\zeta} \pm i \sqrt{-\frac{4}{\zeta^{5/2}} \left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right)}, \quad (203)$$

и мы получаем суперпозицию двух волн (падающей и выходящей) с относительно равными амплитудами.

В  $T_-$ -области

$$\begin{aligned} k &\approx -\frac{1}{\zeta} \pm \sqrt{-\frac{4i}{\zeta^{5/2}} \left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right)} = -\frac{1}{\zeta} \pm \frac{\sqrt{2}}{\zeta^{5/4}} \sqrt{\left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right)} (1 + i) = \\ &= \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{\zeta^{5/4}} \sqrt{\left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right)} - \frac{1}{\zeta} \right) \pm i \frac{\sqrt{2}}{\zeta^{5/4}} \sqrt{\left( 1 - \frac{M^2}{4m^2} \right)}. \end{aligned} \quad (204)$$

Появление двух волн в  $T_-$ -области отражает явление квантового дрожания горизонта. Но выходящая волна чудовищно подавлена по сравнению с падающей волной (разумеется, в  $T_+$ -области ситуация в точности обратная). Именно это подавление является причиной (в квазиклассическом режиме) существования только одной падающей волны в  $T_-$ -области на расстояниях, больших планковских.

Обсудим кратко основные свойства полученного дискретного спектра масс (уравнения (197) и (200)).

1. Прежде всего, из (197) в пределе  $n \gg 1$  ( $M^2/m^2 - 1 \ll 1$ ) легко получить гравитационный аналог знаменитой формулы Ридберга:

$$E_{\text{nonrel}} = m - M = -\frac{G^2 M^5}{8n^2}. \quad (205)$$

2. Мы уже видели ранее, что случай черной дыры можно отличить от случая кротовой норы по знаку частной производной  $\gamma = \partial m / \partial M$  при постоянном значении радиуса точки поворота  $\rho_0$ . Теперь роль точки поворота играет квантовое число  $n$ . Поэтому, вычислив знак  $\gamma$ , но уже при постоянном  $n$ , мы сможем отличить случай черной дыры ( $\gamma > 0$ ) от случая кротовой норы ( $\gamma < 0$ ) и в квантовой теории. Оказывается, мы имеем вариант черной дыры при  $n \geq n_0$ ,  $n_0 \leq 0$ , и

$$|n_0| = E \left[ \sqrt{2} \sqrt{13\sqrt{5} - 29(1+2p)} \right], \quad (206)$$

где  $E[\dots]$  означает «целая часть от  $\dots$ ». Интересно, что при  $n \geq 0$  асимптотическое поведение волновых функций в точности такое же и в кулоновской задаче, при отрицательных же  $n_0$  такого аналога нет.

3. Существует минимально возможное значение для массы черной дыры, оно соответствует значениям  $p = n = n_0 = 0$  и равно

$$m_{\min} = \sqrt{2} m_{P1}. \quad (207)$$

Интересно исследовать предельный случай  $M \rightarrow \infty$ ,  $m$  — конечное, соответствующий вечной черной дыре. Из нашего спектра легко вывести, что

$$m = \lim_{n,p \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{\sqrt{p}} \right) m_{P1}, \quad (208)$$

в результате масса квантовой вечной черной дыры может быть произвольной.

4. Наш спектр не является универсальным в том смысле, что соответствующие волновые функции образуют двухпараметрическое семейство  $\Psi_{n,p}$ . Но для квантовых шварцшильдовских черных дыр мы ожидали бы лишь однопараметрическое семейство. Квантовые черные дыры не должны иметь волос, иначе не получится гладкого предела к классическим черным дырам. Это означает, что наш спектр на самом деле не является спектром квантовых черных дыр, а наша оболочка, вообще говоря, не коллапсирует (как и электрон в атоме водорода). Физически это совершенно понятно, потому что мы еще не «включили» излучение. Но прежде чем приступить к этому, мы хотели бы сделать одно важное замечание.

До сих пор мы рассматривали только равную нулю массу внутри оболочки. Обобщение делается несложно, и результат получается следующий:

$$\frac{2(\Delta m)^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - (\Delta m)^2}} = \sqrt{2m_{P1}^2 n}, \quad (209)$$

$$M^2 - (\Delta m)^2 = 2m_{P1}^2(1 + 2p),$$

где  $M$  — голая масса оболочки;  $M = m_{\text{out}}$ , а  $\Delta m = m_{\text{out}} - m_{\text{in}}$ . Более того, этот спектр является точным спектром нашего уравнения в конечных разностях. Причина того, что формулы, полученные в пределе больших черных дыр, дают точный спектр, чисто математическая, и мы не будем обсуждать это здесь, но одно важное свойство точного спектра (209) упомянуть следует. Мы уже знаем, что линейные уравнения в конечных разностях обладают тем свойством, что любое решение, умноженное на периодическую функцию с периодом, равным сдвигу аргумента в уравнении, тоже является решением. Это приводит, вообще говоря, к бесконечной вырожденности спектра. Но спектр (209) не является вырожденным. Дело в том, что аргументом уравнения в конечных разностях (190), из которого он был получен, служит квадрат радиуса, и главный член асимптотики решений на правой бесконечности в общем случае имеет вид  $\Psi \sim e^{\alpha r^2}$ , но есть одно исключение. Это исключительное решение имеет асимптотику  $\Psi \sim e^{\lambda r}$ , и именно такую асимптотику имеют волновые функции нерелятивистской кулоновской задачи. Поэтому, если мы требуем существования правильного нерелятивистского предела, то «правильная» волновая функция должна иметь главную асимптотику  $\Psi \sim e^{\lambda r}$ , и этим требованием вырождение снимается.

**3.7. Излучение и динамика квантового коллапса.** Чтобы исследовать квантовый коллапс, мы должны включить процесс квантового излучения. Для моделирования такого излучения мы опять воспользуемся развитой выше теорией тонких оболочек, но на этот раз оболочки являются изотропными (световыми), и движутся они со скоростью света. Соответствующее классическое уравнение — это наша несимметричная связь (180), но при нулевом значении голой массы  $M$ . Квантовое уравнение выглядит следующим образом [24]:

$$\Psi(m_{\text{in}}, m_{\text{out}}, s - i\zeta) = \sqrt{\frac{1 - \mu/\sqrt{s}}{1 - 1/\sqrt{s}}} \Psi(m_{\text{in}}, m_{\text{out}}, s), \quad (210)$$

где  $\mu = m_{\text{in}}/m_{\text{out}}$ ,  $\zeta = 1/2m_{\text{Pl}}^2/m_{\text{out}}^2$ . Существование второй бесконечности на другой стороне моста Эйнштейна–Розена приводит к появлению следующего квантового условия ( $m = m_{\text{out}}$ ), которое отсутствует в обычной квантовой механике:

$$\delta m = m_{\text{out}} - m_{\text{in}} = -2m + \sqrt{m^2 + km_{\text{Pl}}^2}, \quad (211)$$

где  $k$  — целое положительное число. Интересно, что если мы положим  $k = 1$  (минимальная излучаемая энергия) и потребуем, чтобы  $\delta m < m$  (т. е. излучаемая энергия не может быть больше полной энергии системы), то получим

$$m = m_{\text{out}} > \frac{2}{\sqrt{5}} m_{\text{Pl}}. \quad (212)$$

Значит, черная дыра с такой массой вовсе не может излучать и, в частности, не может превратиться в полужамкнутый мир (кратовую нору).

Полученный нами дискретный спектр излучения (211) является универсальным в том смысле, что он не зависит от структуры и спектра масс гравитирующего источника. Это означает, что энергия излучаемых квантов не совпадает с разностью энергетических уровней источника. Наиболее простой и естественный путь преодоления этого парадокса — это предположить, что кванты рождаются парами. Одна компонента пары излучается на бесконечность, а вторая падает вовнутрь (причем эта компонента не обязательно безмассовая). Таким образом, квантовый коллапс не может идти без излучения даже в случае сферической симметрии, и это излучение сопровождается рождением новых оболочек внутри первоначальной. Мы видим, таким образом, что внутренняя структура квантовой черной дыры формируется в самом процессе квантового гравитационного коллапса. И если вначале мы знали буквально все о гравитирующем источнике (в нашем случае это одна единственная тонкая оболочка), то уже после первого импульса излучения рождение внутреннего кванта может происходить более чем одним способом. Таким образом, энтропия системы, будучи сначала равной нулю, начинает расти в процессе квантового коллапса. Если бы этот процесс мог как-то прекратиться, мы могли бы без всякой натяжки назвать получившийся объект «квантовая черная дыра». Таким естественным пределом является квантовый переход от черноты к оболочке к кратовой норе. Дело в том, что такой переход (по крайней мере в квазиклассическом режиме) требует рождения бесконечно большого объема, и поэтому соответствующая квазиклассическая амплитуда равна нулю.

Чтобы изучить подробнее вышеупомянутое предельное состояние, выпишем спектр масс оболочки в общем случае, когда шварцшильдовская масса внутри нее не равна нулю:

$$\frac{2(\Delta m)^2 - M^2}{\sqrt{M^2 - (\Delta m)^2}} = \frac{2m_{\text{pl}}^2}{\Delta m + m_{\text{in}}} n, \quad (213)$$

$$M^2 - (\Delta m)^2 = 2(1 + 2p)m_{\text{pl}}^2. \quad (214)$$

Здесь  $\Delta m$  — полная масса оболочки;  $M$  — ее голая масса, а полная масса системы равна  $m = m_{\text{out}} = \Delta m + m_{\text{in}}$ . Для случая черной дыры мы имеем неравенство  $M^2 < 4m\Delta m$ , или

$$\frac{\Delta m}{M} > \frac{1}{2} \left( \sqrt{\left(\frac{m_{\text{in}}}{M}\right)^2 + 1} - \frac{m_{\text{in}}}{M} \right). \quad (215)$$

После «включения» излучения начинается процесс квантового коллапса, управляемого уравнением (211). Компьютерное моделирование [25] показывает,



что процесс идет в «правильном» направлении, т. е. мы подходим все ближе и ближе к порогу (215), и при этом число «нежелательных состояний» с отрицательными значениями главного квантового числа  $n$  становится все меньше и меньше. Процесс останавливается в точности при  $n = 0$ !

Точка  $n = 0$  в нашем спектре — очень специфическая. Только в таком состоянии, как видно из (213), оболочка «не чувствует» не только внешнюю область (что естественно для сферической симметрии), она ничего не «знает» и о том, что происходит внутри нее. Она «чувствует» лишь самое себя. Такая ситуация напоминает классический (несферический) коллапс. В конце концов, когда все оболочки (как первоначальная, так и народившиеся в процессе) окажутся в соответствующих состояниях  $n_i = 0$ , вся система перестанет «помнить» историю. «Иван, родства не помнящий!» Это и есть квантовая черная дыра. При этом массы всех оболочек подчиняются соотношению

$$\Delta m_i = \frac{1}{\sqrt{2}} M_i. \quad (216)$$

Квантовое же излучение Хокинга, которое должно последовать затем, может вызываться некими коллективными возбуждениями с образованием, например, длинной цепочки микроскопических полужамкнутых миров (кротовых нор). Внешний вид такой цепочки (изображаемой как поверхность вращения в трехмерном пространстве) в какой-то момент времени должен напоминать чурчелу.

**3.8. Классический аналог квантовой черной дыры.** Рассмотрим теперь большие ( $m \gg m_{\text{Pl}}$ ) квантовые черные дыры. Число оболочек (первоначальной и народившихся в процессе коллапса) должно быть очень большим, и можно надеяться построить некое классическое распределение материи, которое бы отражало свойства квантовых черных дыр. Прежде всего мы должны понять, что на языке классической физики означает состояние «беспамятства» ( $n = 0$  для всех оболочек). Запишем уравнение для оболочки, внутри которой есть гравитирующий источник массой  $m_{\text{in}}$ :

$$\sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2Gm_{\text{in}}}{\rho}} - \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1 - \frac{2Gm_{\text{out}}}{\rho}} = \frac{GM}{\rho}, \quad (217)$$

и посмотрим на точку поворота ( $\dot{\rho} = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ):

$$\Delta m = m_{\text{out}} - m_{\text{in}} = M \sqrt{1 - \frac{2Gm_{\text{in}}}{\rho_0} - \frac{GM^2}{2\rho_0}}. \quad (218)$$

Ясно теперь, что для того, чтобы параметры оболочки ( $\Delta m$  и  $M$ ) не зависели от того, что делается внутри, мы должны положить  $m_{\text{in}} = a\rho_0$ .

Наша квантовая черная дыра находится в стационарном состоянии, поэтому и классическое распределение метрики должно быть статическим. Мы рассмотрим статическое распределение идеальной жидкости с плотностью энергии  $\varepsilon$  и давлением  $p$ . Статическая сферически-симметричная метрика может быть записана в виде

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (219)$$

где  $\nu$  и  $\lambda$  — функции лишь одной переменной — радиальной координаты  $r$ . Уравнения Эйнштейна в этом случае имеют следующий вид (штрих означает дифференцирование по  $r$ ):

$$\begin{aligned} 8\pi G\varepsilon &= -e^\lambda \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ -8\pi Gp &= -e^\lambda \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ -8\pi Gp &= -\frac{1}{2} e^\lambda \left( \nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right). \end{aligned} \quad (220)$$

Первое из этих уравнений может быть проинтегрировано:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad (221)$$

где

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon r'^2 dr' \quad (222)$$

есть массовая функция, которую следует идентифицировать с  $m_{\text{in}}$ . Таким образом,  $m(r) = ar$  и

$$\varepsilon = \frac{a}{4\pi r^2}, \quad e^{-\lambda} = 1 - 2Ga. \quad (223)$$

Мы можем также ввести функцию голой массы

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon e^{\lambda/2} r'^2 dr', \quad (224)$$

и из (223) получаем

$$M(r) = \frac{ar}{\sqrt{1 - 2Ga}}. \quad (225)$$

Оставшиеся два уравнения могут быть разрешены относительно  $p(r)$  и  $e^\nu$ . Решение для  $p(r)$  должно иметь правильный нерелятивистский предел, и при этом условии мы получаем

$$p(r) = \frac{b}{4\pi r^2}, \quad b = \frac{1}{G}(1 - 3Ga - \sqrt{1 - 2Ga}\sqrt{1 - 4Ga}), \quad (226)$$

а для  $e^\nu$  имеем

$$e^\nu = Cr^{2G(a+b)/(1-2Ga)}. \quad (227)$$

Константа интегрирования  $C$  должна находиться из сшивки внешней и внутренней метрик на некоторой границе  $r = r_0$ . Предположим, что при  $r > r_0$  пространство-время пустое, поэтому внутренняя метрика должна сшиваться с метрикой Шварцшильда. Разумеется, для компенсации скачка давления на границе ( $\Delta p = p(r_0) = p_0$ ) мы должны ввести поверхностное натяжение  $\Sigma$ . Из условий сшивки (см., например, [11]) следует, что

$$\begin{aligned} C &= (1 - 2Ga)r_0^{-2G(a+b)/(1-2Ga)}, \\ e^\nu &= (1 - 2Ga) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2G(a+b)/(1-2Ga)}, \\ \Sigma &= \frac{2\Delta p}{r_0} = \frac{b}{2\pi r_0^3}. \end{aligned} \quad (228)$$

Нужно подчеркнуть, что давление  $p$  в нашей классической модели — лишь эффективное, так как оно было введено для того, чтобы смоделировать стационарные квантовые состояния. Из (226) видно, что коэффициент  $b$  становится комплексным при  $a > 1/4G$ . Следовательно, мы должны потребовать выполнения неравенства  $a \leq 1/4G$ , и в предельном случае получаем наиболее жесткое из возможных уравнение состояния  $\varepsilon = p$ . Это означает также, что гипотетические коллективные квантовые возбуждения (фононы) будут распространяться со скоростью света, и их можно рассматривать как безмассовые квазичастицы. Примечательно, что в предельной точке мы имеем  $m(r) = M(r)/\sqrt{2}$  — точно такое же соотношение между полной и голой массой, что и в состоянии «беспамятства»  $n = 0$ ! Полная масса  $m_0 = m(r_0)$  и радиус  $r_0$  в этом случае связаны соотношением  $4Gm_0 = r_0$ , что ровно в два раза больше размера горизонта.

Вычисление тензора кривизны Римана  $R_{klm}^i$  и тензора Риччи  $R_{ik}$  показывает, что если  $p < \varepsilon$  ( $a \neq b$ ), то при  $r = 0$  существует истинная сингулярность. Но, удивительное дело, и тензор Римана, и тензор Риччи имеют конечный предел при  $r \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon = p$  ( $a = b = 1/4G$ ). Следовательно, мы можем ввести так называемую топологическую температуру точно таким же способом,

как это было сделано для классических черных дыр. Напомним процедуру. Нужно сделать виковский поворот, чтобы привести метрику к евклидову виду, и сгладить конусную особенность подходящим выбором евклидова времени, которое считается пропорциональным некоторой угловой координате. В нашем случае точка  $r = 0$  уже является координатной сингулярностью. Азимутальный угол  $\phi$  имеет период  $2\pi$ . Поэтому все остальные угловые координаты должны быть циклическими с периодом  $\pi$ . Топологическая же температура обратна этому периоду. Несложное вычисление показывает, что температура

$$T = \frac{1}{2\pi r_0} = \frac{1}{8\pi G m_0} = T_{\text{ВН}} \quad (229)$$

в точности равна температуре Хокинга  $T_{\text{ВН}}$  [5]! Сам факт появления температуры позволяет нам выделить однопараметрическое семейство моделей с универсальным распределением плотности энергии и давления

$$\varepsilon = p = \frac{1}{16\pi G r^2}, \quad (230)$$

а этим параметром может быть полная масса  $m_0$  или размер  $r_0 = 4Gm_0$ . Следует отметить, что двумерная часть метрики (219) в предельном случае  $a = b$  есть не что иное, как метрика Риндлера, причем горизонтом служит изотропная (световая) поверхность  $r = 0$ . Диаграмма Картера–Пенроуза для этого случая приведена на рис. 9.

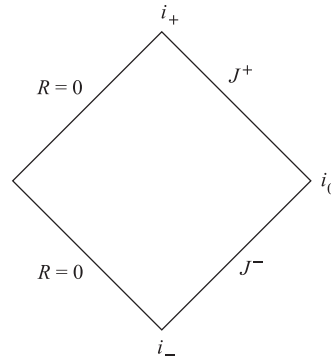


Рис. 9

Теперь мы можем исследовать термодинамику модели. Прежде всего нужно отметить, что следует различать глобальные и локальные термодинамические величины. Глобальные величины измеряются удаленным наблюдателем. Он измеряет полную массу (энергию) системы, температуру чернотельного излучения  $T_{\text{ВН}} = T_\infty$  и больше ничего не знает. Предположим, что этот наблюдатель достаточно образован и может сообразить, что он на самом деле измеряет параметры черной дыры и потому может написать основное термодинамическое соотношение

$$dm = T dS. \quad (231)$$

После этого он поймет, что черной дыре нужно приписать некоторую энтропию, а именно энтропию Бекенштейна–Хокинга [3, 5]:

$$S = \frac{1}{4} \frac{(4\pi r_g)^2}{l_{\text{Pl}}^2} = 4\pi G m_0^2 = 4\pi \left( \frac{m_0}{m_{\text{Pl}}} \right)^2. \quad (232)$$

Предположим, что локальный наблюдатель, который измеряет распределение плотности энергии, давления и температуры, также достаточно образован и может написать основное термодинамическое уравнение, но уже совершенно другое:

$$\varepsilon(r) = T(r)s(r) - p(r) - \mu(r)n(r). \quad (233)$$

Здесь  $\varepsilon(r)$  и  $p(r)$  — плотность энергии и давление соответственно;  $T(r)$  — локальное распределение температуры;  $s(r)$  — плотность энтропии;  $\mu(r)$  — химический потенциал;  $n(r)$  — плотность числа некоторых (квази)«частиц». Для плотности энергии и давления локальный наблюдатель получит, конечно же, соотношение (230), а для температуры — распределение

$$T(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}r}, \quad (234)$$

совместимое с известным законом  $T(r)e^{\nu/2} = \text{const}$  и граничным условием  $T_\infty = T_{\text{ВН}}$ . Такое распределение замечательно тем, что если снять некоторый внешний слой нашей идеальной жидкости, внутренние слои останутся в термодинамическом равновесии. А что можно сказать о плотности энтропии? Разумеется, локальный наблюдатель не может измерять ее непосредственно, но он может получить информацию от удаленного наблюдателя. Эта информация и измеренное распределение температуры (234) позволит ему сделать заключение, что

$$S(r) = \frac{1}{8\sqrt{2}Gr} \quad (235)$$

и

$$S(r)T(r) = \frac{1}{16\pi Gr^2}. \quad (236)$$

Примечательно, что в основном термодинамическом уравнении вклад от давления в точности компенсируется вкладом от температуры и энтропии. Здесь нелишне напомнить, что давление в нашей классической модели, на самом-то деле, имеет квантовое происхождение, так же, как и температура черной дыры. И что в действительности остается — это пылевая материя, из которой и строилась наша квантовая модель, а именно

$$\varepsilon = \mu n = \frac{1}{16\pi Gr^2}. \quad (237)$$

Поэтому мы можем предположить, что квантовая черная дыра представляет собой ансамбль неких коллективных возбуждений — чернотырных фононов, а  $n(r)$  есть плотность числа этих самых фононов. Химический потенциал,

как и температура, изменяется по закону  $\mu e^{\nu/2} = \text{const}$  [15]. Следовательно,  $\mu \sim 1/r$ , и для плотности числа частиц мы можем написать следующее соотношение:

$$n = \frac{1}{32\pi G\alpha^2 r}, \quad (238)$$

где  $\alpha$  — какой-то численный коэффициент. Интегрируя по объему, мы получаем для числа фононов

$$N = 4\pi \int_0^{r_0} nr^2 dr = \frac{r_0^2}{16\pi G\alpha^2} = \frac{Gm_0^2}{\alpha^2} = \frac{m_0^2}{\alpha^2 m_{\text{Pl}}^2}. \quad (239)$$

Так мы приходим к знаменитому спектру Бекенштейна–Муханова:

$$m_{\text{BH}} = \alpha m_{\text{Pl}} \sqrt{N}. \quad (240)$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

И снова тот же вопрос, который уже прозвучал во введении. Зачем нужно изучать черные дыры? Какой в этом прок? Есть надежда, что кое-что стало понятным в процессе чтения этой статьи. Основным свойством черных дыр является их универсальность. Видимо, именно это должно отличать квантовые черные дыры от всех других квантовых объектов, независимо от того, какой будет квантовая гравитация — фундаментальной, эффективной, индуцированной или же какой-либо другой теорией. В отсутствие развитой квантовой теории мы вынуждены строить модели. Желательно, чтобы эти модели допускали точные решения — именно точно решаемые модели являются основой нашей физической интуиции, которая, в свою очередь, позволяет отделять модельно-зависимые свойства объекта (в нашем случае — квантовой черной дыры) от истинно фундаментальных. И, вообще, автор глубоко убежден, что в будущем свойства квантовых черных дыр станут той лакмусовой бумажкой, которая позволит отбирать «правильные» варианты теорий. Это как великая теорема Ферма, многочисленные попытки доказательства которой привели к созданию новых направлений в теории чисел. Так что исследование квантовых черных дыр не является просто увлекательной игрой ума.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Michell J.* Physical Transaction of the Royal Society. 1784. V. 74. P. 35–37.
2. *Laplace P. S.* Le Systeme du monde. Paris, 1795. V. II.
3. *Schwarzschild K.* Sitzber Deut. Akad. Wiss. Berlin, 1916. P. 189.

4. *Bekenstein J.* PhD Thesis. Princeton University, 1972; *Lett. Nuovo Cim.* 1972. V. 4. P. 737; *Phys. Rev. D.* 1973. V. 7. P. 2333; 1974. V. 9. P. 3292.
5. *Bardeen J. M., Carter B., Hawking S. W.* // *Commun. Math. Phys.* 1973. V. 31. P. 161.
6. *Hawking S. W.* // *Nature.* 1974. V. 248. P. 30; *Commun. Math. Phys.* 1975. V. 43. P. 199.
7. *Berezin V. A., Kuzmin V. A., Tkachev I. I.* // *Phys. Rev. D.* 1987. V. 36. P. 2919.
8. *Berezin V. A.* Vector-like Einstein's equation for  $D$ -dimensional spherical gravity with  $(D-2)$ -dimensional sphere. gr-qc/0010083.
9. *Novikov I. D.* // *Comm. Shternberg Astron. Inst. (Moscow).* 1964. V. 132. P. 3; 43.
10. *Kruskal M.* // *Phys. Rev.* 1960. V. 119. P. 1743.
11. *Israel W.* // *Nuovo Cim. B.* 1966. V. 44. P. 1; 1967. V. 48. P. 463.
12. *de la Cruz V., Israel W.* // *Nuovo Cim.* 1967. V. 51. P. 744;  
*Bekenstein J. D.* // *Phys. Rev. D.* 1971. V. 4. P. 2185;  
*Chase J. E.* // *Nuovo Cim. B.* 1970. V. 67. P. 136;  
*Boulware D. G.* // *Phys. Rev. D.* 1973. V. 8. P. 2363;  
*Frolov V. P.* // *Sov. Phys. JETP.* 1974. V. 38. P. 393.
13. *Voloshin M. B., Kobzarev I. Yu., Okun' L. B.* // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1975. V. 20. P. 644;  
*Coleman S.* // *Phys. Rev. D.* 1977. V. 15. P. 2922;  
*Lake K.* // *Phys. Rev. D.* 1979. V. 19. P. 2847; 1984. V. 29. P. 1861;  
*Coleman S., Deluccia F.* // *Phys. Rev. D.* 1980. V. 21. P. 3305;  
*Sato K. et al.* // *Prog. Theor. Phys.* 1981. V. 65. P. 3;  
*Parke S.* // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 121. P. 313;  
*Berezin V. A., Kuzmin V. A., Tkachev I. I.* // *Ibid.* V. 120. P. 91; V. 124. P. 479; V. 130. P. 23; *Sov. Phys. JETP.* 1984. V. 59. P. 459; *JETP Lett.* 1985. V. 41. P. 547; *Phys. Rev. D.* 1987. V. 36. P. 2919; *Intern. J. Mod. Phys.* 1990. V. 5. P. 4639; *Phys. Rev. D.* 1991. V. 43. P. R3112;  
*DeGrand T., Kajantie K.* // *Phys. Lett. B.* 1984. V. 147. P. 273;  
*Aurilia A. et al.* // *Ibid.* P. 258; *Nucl. Phys. B.* 1985. V. 252. P. 523;  
*Linet B.* // *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II «Mec. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre».* 1985. V. 301. P. 1333;  
*Laguna-Castillo P., Matzner R. A.* // *Phys. Rev. D.* 1986. V. 34. P. 2913;  
*Farhi E., Guth A.* // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 183. P. 149;  
*Blau S. K., Guendelman E. I., Guth A.* // *Phys. Rev. D.* 1987. V. 35. P. 1747;  
*Farhi E., Guth A. H., Guven J.* // *Nucl. Phys. B.* 1990. V. 339. P. 417.
14. *Chandrasekhar S.* *The mathematical theory of black holes.* Oxford: Oxford University Press, 1983.
15. *Бирелл Н., Девис П.* *Квантовые поля в искривленном пространстве-времени.* М.: Мир, 1984;  
*Birrell H. N. D., Davies P. C. W.* *Quantum fields in curved space.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.
16. *Lauscher H. O., Reuter M.* hep-th/0108040.
17. *Weinberg H. S.* *General Relativity, an Einstein Centenary Survey.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1979; hep-th/97020227.
18. *Thiemann T., Kastrup H. A.* // *Nucl. Phys. B.* 1993. V. 339. P. 211.
19. *Kuchar K.* // *Phys. Rev. D.* 1994. V. 50. P. 3961.

20. *Berezin V. A. et al.* // Phys. Lett. B. 1988. V. 212. P. 415.
21. *Berezin V. A.* Quantum Black Holes and Hawking's Radiation. Preprint IHES/P/91/76.
22. *Berezin V. A.* // Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 2139.
23. *Berezin V. A., Boyarsky A. M., Neronov A. Yu.* // Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 1118.
24. *Berezin V. A., Boyarsky A. M., Neronov A. Yu.* // Phys. Lett. B. 1999. V. 455. P. 109.
25. *Berezin V. A.* Towards a theory of quantum black hole. gr-qc/0112022.