

УДК 539.14

ПРОСТРАНСТВО ФОКА–БАРГМАННА И КЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Г.Ф.Филиппов, С.В.Кореннов

Институт теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова, Киев, Украина

К.Като

Университет Хоккайдо, Саппоро, Япония

А.М.Сычева

Национальный университет им. Т.Шевченко, Киев, Украина

ВВЕДЕНИЕ	761
ПРОСТРАНСТВО ФОКА–БАРГМАННА	763
Орбитали Блоха–Бринка	763
Интеграл перекрытия и матрица плотности	764
Трехмерный осциллятор	768
Два трехмерных осциллятора	769
Эффект антисимметризации	770
Система трех одномерных фермионов	774
То же, но трехмерный случай	776
ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ	777
Одномерные движения	777
Свободное движение триплетной пары фермионов	779
Синглетная пара	780
УЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФЕРМИОНОВ	782
Решение квантового волнового уравнения	782
Обсуждение решений	787
Фазовые траектории для потенциала (60)	788
О проектировании в рамках АМД	789
Влияние принципа Паули на функцию Гамильтона	791
АМД и метод резонирующих групп	793
РАСПЛЫВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА	794
Волновой пакет радиальных колебаний	795

Фазовые траектории для радиальной моды	796
Расплывание волнового пакета Блоха–Бринка	798
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	800
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	801

УДК 539.14

ПРОСТРАНСТВО ФОКА–БАРГМАННА И КЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Г.Ф.Филиппов, С.В.Кореннов

Институт теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова, Киев, Украина

К.Като

Университет Хоккайдо, Саппоро, Япония

А.М.Сычева

Национальный университет им. Т.Шевченко, Киев, Украина

В последние годы развивается новый подход к теории ядерных реакций, сопровождающийся развалом взаимодействующих подсистем по различным каналам. Этот подход получил название антисимметризованной молекулярной динамики (АМД), а его главная идея состоит в сопоставлении нуклонам волновых пакетов (орбиталей Бринка) и в сведении динамической задачи к таким классическим уравнениям для центров волновых пакетов, которые принимают во внимание эффекты антисимметризации, но не учитывают других квантовых эффектов. В обзоре иллюстрируются основные положения АМД на примере простых ядерных систем, результаты АМД сравниваются с теми, которые дает точное квантово-механическое описание в пространстве Фока–Баргманна, обсуждается область применимости АМД, в том числе и для состояний дискретного спектра, и устанавливается связь классических траекторий АМД и квантовых распределений с представлениями статистической физики. Одновременно предлагается новая интерпретация орбиталей Бринка и построенных на этих орбиталях детерминантов Слейтера как собственных функций оператора координаты, определенного в пространстве Фока–Баргманна.

In recent years, a new approach to the theory of nuclear reactions accompanied by a break-down of the interacting subsystems into various channels has been developed. This approach was named the Antisymmetrized Molecular Dynamics (AMD), and its main idea consists in the description of the nucleons by wave packets in which the antisymmetrization effects (but not other quantum effects) are accounted for. In this review, the basic principles of AMD are illustrated with the examples of simplest nuclear systems, and the results are compared with those provided by an exact quantum-mechanical description in the Fock–Bargmann space. The applicability region of AMD is discussed, in particular, in the cases of systems with discrete spectrum, and a relation between the classical AMD trajectories and the quantum distributions is established. At the same time, a new interpretation of Brink orbitals and Slater determinants built on them as eigenfunctions of the coordinate operator defined in the Fock–Bargmann space is proposed.

1. ВВЕДЕНИЕ

Столкновение тяжелых ионов достаточно высокой энергии сопровождается их развалом и появлением разлетающихся ядерных фрагментов [1]. Процесс этот оказывается существенно неравновесным, и реально в нем участвует

большое число нуклонов. Поэтому уже давно была осознана необходимость обращения к представлениям кинетической теории, чтобы найти адекватное объяснение явлений, наблюдаемых при столкновении тяжелых ионов [2]. Однако если в основу стандартного статистического подхода положены законы классической механики, то исходным пунктом кинетической теории ядерных столкновений должны быть уравнения квантовой механики или такой их классический предел, который передает хотя бы наиболее важные квантовые особенности нуклонной динамики. Так, вариант кинетического подхода, учитывающего влияние квантового эффекта антисимметризации на классические траектории нуклонов, был предложен в работах [3,4] и назван антисимметризованной молекулярной динамикой (АМД).

Позже стало ясно [7], что нуклонные траектории, ставшие предметом исследования АМД, представляют собой классический предел волновых функций, определенных в гильбертовском пространстве целых аналитических функций (в пространстве Фока–Баргманна) [8,9]. Замечательное свойство этих функций состоит в том, что их независимыми переменными являются импульсы и координаты нуклонов одновременно, т.е. они заданы в фазовом пространстве. Напомним, что обычно переход от координатного к фазовому пространству осуществляется в результате введения матрицы плотности Вигнера [10], но тогда приходится мириться с тем, что функция Вигнера может быть знакопеременной, а это противоречит ее физическому смыслу. Матрица плотности, построенная на волновых функциях пространства Фока–Баргманна с учетом меры Баргманна, знакоположительна при всех значениях импульсов и координат и, следовательно, лишена недостатка, свойственного функции Вигнера. Поэтому обращение к пространству Фока–Баргманна для установления связи между квантовой и классической статистикой имеет не меньше оснований, чем введение функции Вигнера. Простое решение находится в пространстве Фока–Баргманна и проблема соотношения между классической и квантовой механикой, включая практическую оценку точности результатов классической механики в пограничной области квазиклассики. В связи с этим особое внимание мы уделяем изложению основных положений, касающихся пространства Фока–Баргманна, демонстрируя их на примерах простых точно решаемых задач.

Во втором разделе дано определение пространства Фока–Баргманна и показана связь между волновыми функциями, заданными в координатном или импульсном представлении, и их образом в пространстве Фока–Баргманна. В третьем разделе обсуждаются фазовые траектории тех систем, для которых в предыдущей главе были определены волновые функции. В четвертом разделе рассматривается влияние взаимодействия между фермионами на структуру их волновых функций и фазовых траекторий. Наконец, в пятом разделе выведены уравнения движения с учетом расщивания волновых пакетов, обычно используемых в АМД.

2. ПРОСТРАНСТВО ФОКА–БАРГМАННА

Хотя закономерности, характерные для пространства Фока–Баргманна и определенных в нем волновых функций, не относятся к числу широко известных, некоторые часто используемые в ядерной физике конструкции имеют прямое отношение к этому пространству.

2.1. Орбитали Блоха–Бринка. Среди простых примеров волновых функций, определенных в пространстве Фока–Баргманна, особо следует выделить орбиталь Блоха–Бринка

$$\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R}) = \pi^{-3/4} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{r}^2}{2} + \sqrt{2}(\mathbf{R}\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{R}^2}{2} \right\}, \quad (1)$$

предложенную в работе [11] для анализа кластерной структуры легких ядер. Здесь \mathbf{r} — трехмерный вектор нуклона, а \mathbf{R} — векторный параметр, вводимый для минимизации функционала энергии атомных ядер, когда из орбиталей (1), представляющих собой обобщение s -орбитали нуклона в поле гармонического осциллятора, строится пробная функция. В (1) в качестве единиц измерения длины, массы и действия выбрана, соответственно, осцилляторная длина, масса нуклона и постоянная Планка \hbar .

Полагая, что вектор \mathbf{R} содержит действительную и мнимую части, запишем его и комплексно-сопряженный ему вектор в виде

$$\mathbf{R} = \frac{\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{R}^* = \mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\xi} - i\boldsymbol{\eta}}{\sqrt{2}}, \quad (2)$$

где i — мнимая единица, $\boldsymbol{\xi}$ — радиус-вектор, а $\boldsymbol{\eta}$ — импульс. Как и в работе Бринка [11], используется обозначение $\mathbf{S} \equiv \mathbf{R}^*$.

Орбиталь (1) является целой аналитической функцией трех комплексных проекций R_x, R_y, R_z вектора \mathbf{R} . Поэтому ее можно рассматривать как волновую функцию этих трех переменных в гильбертовском пространстве Фока–Баргманна. Но тогда надо ответить на два вопроса: как она нормирована и не принадлежит ли она к числу собственных функций какого-либо оператора. Вопрос о нормировке решается вычислением несобственного интеграла

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \phi_{\mathbf{r}'}^*(\mathbf{R}) \phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R}) \exp \{ -(\mathbf{R}\mathbf{S}) \} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^3}$$

по всему фазовому пространству, где

$$\exp \{ -(\mathbf{R}\mathbf{S}) \} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^3}$$

является мерой Баргманна [12]. Множитель $(2\pi)^3$ в знаменателе отражает тот факт, что при интегрировании происходит подсчет числа квантовых состояний в фазовом пространстве. Несложно показать, что

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3)$$

Таким образом, функции $\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})$, соответствующие разным значениям вектора \mathbf{r} , ортогональны, а компоненты вектора \mathbf{r} являются собственными числами этих функций. Явный вид оператора $\hat{\mathbf{r}}$ следует непосредственно из выражения для орбитали (1):

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{R} + \nabla_{\mathbf{R}}). \quad (4)$$

Конечно, в результате действия оператора $\hat{\mathbf{r}}$ на его собственную функцию $\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})$ получим соотношение

$$\hat{\mathbf{r}}\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R}) = \mathbf{r}\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R}). \quad (5)$$

Как и должно быть, оператор $\hat{\mathbf{r}}$ имеет только непрерывный спектр, и по этой причине все его собственные векторы нормированы на δ -функцию.

Однако на этом значение орбитали Блоха–Бринка для пространства Фока–Баргманна не исчерпывается. Еще она играет роль ядра интегрального преобразования, осуществляющего перевод произвольной волновой функции $\Psi(\mathbf{r})$ координатного представления в соответствующую волновую функцию $\Phi(\mathbf{R})$ пространства Фока–Баргманна, так что

$$\Phi(\mathbf{R}) = \int \phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})\Psi(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (6)$$

Во многих случаях вычисление интеграла (6) может быть выполнено аналитически.

2.2. Интеграл перекрытия и матрица плотности. После интегрирования произведения собственных функций

$$\phi_{\mathbf{r}}^*(\mathbf{R})\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})$$

по всем возможным их собственным значениям мы приходим к важному выражению

$$I(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \int \phi_{\mathbf{r}}^*(\mathbf{R})\phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})d\mathbf{r} = \exp(\mathbf{R}\mathbf{S}), \quad (7)$$

которое часто называют интегралом перекрытия и которое одновременно является матрицей плотности в пространстве Фока–Баргманна. Здесь речь идет о матрице плотности чистых состояний, и сейчас мы должны убедиться в том, что выражение (7) удовлетворяет всем известным требованиям, предъявляемым к матрице плотности.

Диагональные элементы стандартной одночастичной матрицы плотности, записанной в координатном представлении (т.е. когда два ее векторных аргумента полагаются одинаковыми), переходят в выражение для вероятности

распределения координат [13]. Матрица плотности (7) также дает вероятность распределения, но в фазовом пространстве (ξ, η) и после умножения на меру Баргманна. В итоге распределение вероятности принимает вид

$$\exp(\mathbf{RS}) \cdot \exp\{-\mathbf{RS}\} \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^3} = \frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^3}, \quad (8)$$

и мы приходим к однородному распределению по импульсам и координатам с постоянной единичной плотностью. Далее, обсуждая волновые функции системы нескольких частиц, мы покажем, как воздействует на это распределение эффект антисимметризации. Представляет интерес и распределение вероятности для состояния (1):

$$\phi_{\mathbf{r}}^*(\mathbf{R}) \phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R}) \exp\{-\mathbf{RS}\} = \pi^{-3/2} \exp\{-(\mathbf{r} - \xi)^2\}. \quad (9)$$

Мы получили плотность распределения, однородного по импульсу и гауссовского по координатам с центром в точке \mathbf{r} . Когда орбиталь (1) используется в качестве пробной функции вариационного расчета, то ξ становится вариационным параметром, по которому происходит варьирование, выражение (9) рассматривается как плотность распределения по \mathbf{r} , а вариационный расчет сводится к поиску оптимального положения центра ξ гауссовского распределения.

В классическом пределе, когда $|\mathbf{r}| \gg 1$, т.е. $|\mathbf{r}|$ много больше осцилляторной длины, распределение (9) переходит в $\delta(\mathbf{r} - \xi)$, как и должно быть для распределения в состоянии с заданным значением радиуса-вектора.

Соотношение (7) между матрицей плотности и ее разложением по базису ортонормированных состояний демонстрирует известное положение [14] о диагональности матрицы плотности в энергетическом представлении. При этом собственные функции любого гамильтониана, какой бы мы ни взяли, диагональность разложения матрицы плотности по собственным состояниям гамильтониана сохранится.

Так, несложно матрицу плотности разложить по собственным состояниям гамильтониана свободного движения или, что то же самое для обсуждаемого случая, по собственным состояниям оператора импульса

$$\hat{\mathbf{k}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{R} - \nabla_{\mathbf{R}}). \quad (10)$$

Ортонормированные собственные функции последнего, или, иначе, плоские волны, соответствующие импульсу k , имеют следующий вид:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \pi^{-3/4} \exp\left\{-\frac{\mathbf{k}^2}{2} - i\sqrt{2}(\mathbf{R}\mathbf{k}) + \frac{\mathbf{R}^2}{2}\right\}, \quad (11)$$

что легко проверить, обратившись к явному выражению для оператора $\hat{\mathbf{k}}$ и решив дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Другой путь получить $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$ сводится к вычислению обеспечивающего переход к пространству Фока–Баргманна интеграла (6) с плоской волной

$$\Psi(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \exp\{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})\},$$

определенной в координатном пространстве:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \int \phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{R})(2\pi)^{-3/2} \exp\{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})\} d\mathbf{r}. \quad (12)$$

Разложение интеграла перекрытия по состояниям с определенным значением импульса аналогично разложению (7):

$$\exp(\mathbf{R}\mathbf{S}) = \int \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{R})\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) d\mathbf{k}, \quad (13)$$

а распределение вероятности для плоской волны (11)

$$\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) = \phi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{R})\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) \exp\{-(\mathbf{R}\mathbf{S})\} = \pi^{-3/2} \exp\{-(\mathbf{k} - \boldsymbol{\eta})^2\}. \quad (14)$$

Снова мы имеем гауссоидальную зависимость, но для импульса при отсутствии зависимости от координаты. В фазовой плоскости функция распределения принимает максимальное значение на прямой $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{k}$, т.е. на классической фазовой траектории свободного движения частицы с импульсом \mathbf{k} .

Уместно заметить, что функция Вигнера в том же состоянии свободного движения с импульсом \mathbf{k} и энергией $E = \mathbf{k}^2/2$ имеет вид

$$\rho_w(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \delta(\mathbf{k} - \boldsymbol{\eta}). \quad (15)$$

Она, следовательно, соответствует классическому пределу матрицы плотности в пространстве Фока–Баргманна.

Теперь обратимся к примеру гармонического осциллятора, который имеет только дискретный спектр. Чтобы максимально упростить ситуацию, но сохранить главные особенности всех важных выражений, мы ограничимся на первом этапе одномерным случаем. Пусть тогда R и S — скалярные комплексные переменные:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\eta), \quad S = R^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - i\eta),$$

где ξ — координата, а η — импульс. Общая одномерная матрица плотности $\exp(RS)$, так же, как и трехмерная (7), представима в виде разложения или по состояниям с координатой x , или по состояниям с импульсом k , или

по состояниям одномерного гармонического осциллятора. Именно последнее разложение нас сейчас интересует:

$$\exp(RS) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (RS)^n, \quad (16)$$

отсюда следует выражение для ортонормированных с мерой Баргманна волновых функций $\phi_n(R)$ одномерного гармонического осциллятора:

$$\phi_n(R) = \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n, \quad (17)$$

где n — число квантов возбуждения. Что же касается гамильтониана осциллятора \hat{H}_{osc} в пространстве Фока–Баргманна, то

$$\hat{H}_{\text{osc}} = R \frac{d}{dR} + \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Следствием (4) является выражение для оператора координаты

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(R + \frac{d}{dR} \right), \quad (19)$$

а из (10) следует выражение для оператора одномерного импульса

$$\hat{k} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left(R - \frac{d}{dR} \right) \quad (20)$$

и оператора кинетической энергии

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \hat{k}^2 = -\frac{1}{4} \left(R - \frac{d}{dR} \right)^2. \quad (21)$$

Очевидно, что

$$\hat{H}_{\text{osc}} = \hat{T} + \frac{1}{2} \hat{x}^2.$$

Заметим также, что свойства функций (17) изложены в [7].

Распределение вероятности для гармонического осциллятора с числом квантов n имеет вид

$$\rho_n(\xi, \eta) = \phi_n^*(R) \phi_n(R) \exp(-RS) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right)^n \exp \left\{ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\}. \quad (22)$$

Оно принимает только положительные значения и концентрируется вокруг окружности

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} = n, \quad (23)$$

которая представляет собой фазовую траекторию классического осциллятора, имеющего энергию n . Очевидно, что левая часть равенства (23) является классической функцией Гамильтона одномерного осциллятора.

Рассмотрим детали, касающиеся предельного перехода к большим значениям n . Справедлива следующая асимптотическая при $n \gg 1$ формула

$$\rho_n(\xi, \eta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2n} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - n \right)^2 \right\}. \quad (24)$$

Мы получили квантовую функцию распределения для одномерного осциллятора при $n \gg 1$. Обратившись к ней, несложно подсчитать среднее значение классической функции Гамильтона и ее дисперсию:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} = n, \quad \sqrt{\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - n \right)^2} = \sqrt{n}.$$

Чтобы подчеркнуть проблемы функции Вигнера $\rho_w(\xi, \eta)$, определим ее, следуя обычному алгоритму, для гармонического осциллятора в состоянии с $n = 1$. Тогда

$$\rho_w(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{2} \exp \left\{ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\}. \quad (25)$$

Последнее распределение имеет отрицательные значения всюду внутри круга $\xi^2 + \eta^2 = 1$, что, безусловно, является его недостатком. При больших значениях $\xi^2 + \eta^2$ оба распределения — $\rho_1(\xi, \eta)$ и $\rho_w(\xi, \eta)$ — оказываются идентичными.

2.3. Трехмерный осциллятор. В случае трехмерного осциллятора разложение (16) несколько усложняется и принимает вид

$$\exp(\mathbf{RS}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{RS})^n. \quad (26)$$

Опять n — число квантов возбуждения. Однако теперь мы имеем дело с волновыми пакетами $(\mathbf{RS})^n$ базисных состояний, имеющих $SU(3)$ -симметрию $(n, 0)$, и, чтобы полностью определить эти квантовые состояния, введем еще

два квантовых числа: l — орбитальный момент и m — его проекцию на внешнюю ось. Тогда

$$\exp(\mathbf{RS}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l,m} W_{n,l} \frac{1}{n!} (RS)^n D_{0,m}^l(\Omega) D_{m,0}^l(\Omega^*), \quad (27)$$

где диагональные элементы матрицы плотности

$$W_{n,l} = \frac{n!(2l+1)}{(n-l)!(n+l+1)!}. \quad (28)$$

Кроме того,

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2; \quad \mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z).$$

Поэтому произведение $R^n D_{0,m}^l(\Omega)$ является однородным гармоническим полиномом степени n .

Конечно, выполняется условие

$$\sum_l W_{n,l} = 1.$$

Заметим, что l имеет ту же четность, что и n , и не превосходит n .

В предельном случае, когда $n \gg l \gg 1$,

$$\begin{aligned} W_{n,l} &\sim (2l+1) \exp \left\{ -\ln(n+2) + \frac{3}{2} \frac{1}{n+2} \right\} \exp \left\{ -\frac{l(l+1)}{2(n+2)} \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2l+1}{2n} \exp \left\{ -\frac{l(l+1)}{2n} \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Мы пришли к матрице плотности для состояний с n квантами и орбитальным моментом l . Она имеет тот же вид, что и распределение Гиббса для ротаторов с моментом инерции, равным n , и $kT = \hbar\omega$, где ω — частота гармонического осциллятора.

2.4. Два трехмерных осциллятора. Два трехмерных осциллятора дают многообразие таких диагональных элементов матрицы плотности, для классификации которых уместно привлекать редукцию прямого произведения двух неприводимых представлений $SU(3)$ снова на $SU(3)$:

$$\exp\{(\mathbf{R}_1 \mathbf{S}_1) + (\mathbf{R}_2 \mathbf{S}_2)\} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{n_1! n_2!} (\mathbf{R}_1 \mathbf{S}_1)^{n_1} (\mathbf{R}_2 \mathbf{S}_2)^{n_2}. \quad (30)$$

Далее, произведение волновых пакетов, имеющих $SU(3)$ -симметрию $(n_1, 0)$ и $(n_2, 0)$, уместно представить в виде суперпозиции нормированных волновых пакетов $F_{(n_1,0)(n_2,0)}^{(n_1+n_2-2\mu,\mu)}$, имеющих симметрию $(n_1 + n_2 - 2\mu, \mu)$:

$$\frac{1}{n_1!n_2!}(\mathbf{R}_1\mathbf{S}_1)^{n_1}(\mathbf{R}_2\mathbf{S}_2)^{n_2} = \sum_{\mu} W_{(n_1,0)(n_2,0)}^{(n_1+n_2-2\mu,\mu)} F_{(n_1,0)(n_2,0)}^{(n_1+n_2-2\mu,\mu)}, \quad (31)$$

$$W_{(n_1,0)(n_2,0)}^{(n_1+n_2-2\mu,\mu)} = N(n_1, n_2) \frac{n_1!n_2!(n_1 + n_2 - 2\mu + 1)!}{\mu!(n_1 - \mu)!(n_2 - \mu)!(n_1 + n_2 - \mu + 1)!}, \quad (32)$$

где $N(n_1n_2)$ определяется из условия нормировки

$$\sum_{\mu=0}^{\min(n_1, n_2)} W_{(n_1,0)(n_2,0)}^{(n_1+n_2-2\mu,\mu)} = 1. \quad (33)$$

Если $n_1, n_2 \gg \mu \gg 1$, то выражение для диагональных элементов матрицы плотности существенно упрощается:

$$W_{(n_1,0)(n_2,0)}^{(n_1+n_2-2\mu,\mu)} \sim \frac{1}{\mu!} \left(\frac{n_1n_2}{n_1 + n_2} \right)^{\mu} \exp\left(-\frac{n_1n_2}{n_1 + n_2}\right). \quad (34)$$

Снова, как и в п. 2.3, мы получили обычную для статистической физики форму функции распределения, но теперь уже для состояний с разной $SU(3)$ -симметрией. Важно и то, что элементы матрицы плотности равны квадратам коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(3)$, а предельное соотношение (34) дает асимптотику этих коэффициентов.

2.5. Эффект антисимметризации. Оставаясь в рамках наглядных одномерных систем, рассмотрим влияние эффекта антисимметризации на вероятность распределения. Простейший для анализа случай — две тождественные частицы. Привлекая поначалу произведение

$$\phi_{x_1}(R_1)\phi_{x_2}(R_2)$$

двух орбиталей Блоха–Бринка, а потом, выполняя антисимметризацию и отделяя множитель центра масс, получаем следующую орбиталь для исследования движения в системе центра масс:

$$\phi_x^-(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_x(R) - \phi_x(-R)), \quad (35)$$

$$x = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad R = \frac{R_1 - R_2}{\sqrt{2}}.$$

Функция (35) является собственным вектором оператора

$$\hat{x}^2 = \frac{1}{2} \left(R + \frac{d}{dR} \right)^2, \quad (36)$$

соответствующим собственному значению x^2 . Распределение вероятности для этой антисимметричной волновой функции пространства Фока–Баргманна имеет вид

$$\phi_x^{-*}(R)\phi_x^-(R)\exp(-RS) = \pi^{-1/2} (\cosh(2x\xi) - \cos(2x\eta)) \exp(-x^2 - \xi^2). \quad (37)$$

Аналогичные изменения в результате проведения антисимметризации происходят и с плоской волной:

$$\phi_k^-(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_k(R) - \phi_k(-R)), \quad (38)$$

и с распределением вероятности, соответствующим свободному движению:

$$\begin{aligned} \rho_k^-(\xi, \eta) &= \phi_k^{-*}(R)\phi_k^-(R)\exp(-RS) = \\ &= \pi^{-1/2} (\cosh(2k\eta) - \cos(2k\xi)) \exp(-k^2 - \eta^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Только когда $k \gg 1$, последнее распределение переходит в суперпозицию установленного ранее распределения $\rho_k(R)$ и другого аналогичного распределения $\rho_{-k}(R)$. При малых значениях k приходится учитывать слагаемое, которое зависит от импульса η . Поверхности $\rho_k^-(\xi, \eta)$, отвечающие разным значениям k , представлены на рис. 1.

Симметризация волновой функции двух тождественных частиц приводит к следующему выражению для распределения вероятности:

$$\rho_k^+(\xi, \eta) = \pi^{-1/2} (\cosh(2k\eta) + \cos(2k\xi)) \exp(-k^2 - \eta^2). \quad (40)$$

Соответствующая распределению (40) поверхность изображена на рис. 2.

Таким образом, симметризация (или антисимметризация) существенно влияет на поведение функций распределения в окрестности начала координат при малых значениях энергии $k^2/2$ свободного движения. В частности, если $\eta = 0$, а $|\xi|$ растет, то обе функции, оставаясь положительными, осциллируют вокруг значения $\pi^{-1/2} \exp(-k^2)$ с периодом осцилляций π/k .

Матрица плотности антисимметричных состояний вместе с мерой Баргманна есть результат интегрирования $\rho_k^-(\xi, \eta)$ по k или $\rho_x^-(\xi, \eta)$ по x :

$$\rho^-(\xi, \eta) = \int \rho_x^-(\xi, \eta) dx = \sinh(RS) \exp(-RS) = \frac{1 - \exp(-2RS)}{2}. \quad (41)$$

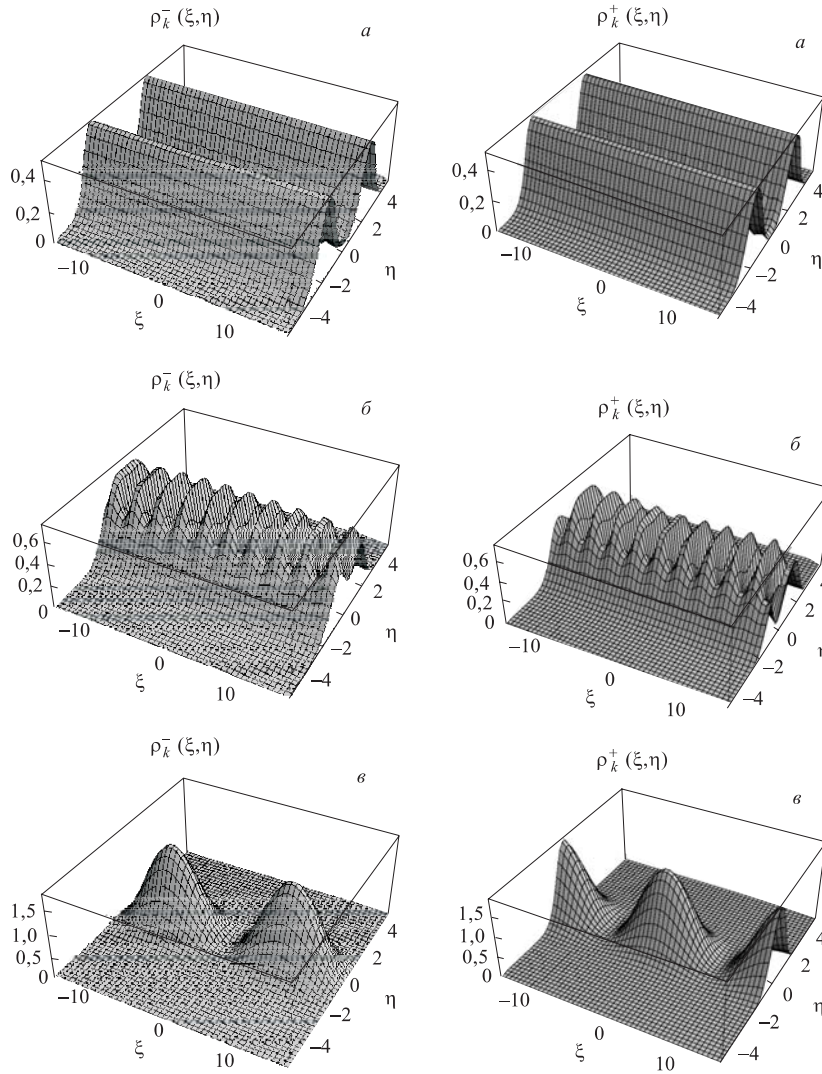


Рис. 1. Распределение вероятности $\rho_k^-(\xi, \eta)$ в представлении Фока–Баргманна для свободного движения двух тождественных частиц с параллельными спинами: а) $k = 2$, б) $k = 1$, в) $k = 0,2$

Рис. 2. Распределение вероятности $\rho_k^+(\xi, \eta)$ в представлении Фока–Баргманна для свободного движения двух тождественных частиц с антипараллельными спинами: а) $k = 2$, б) $k = 1$, в) $k = 0,2$

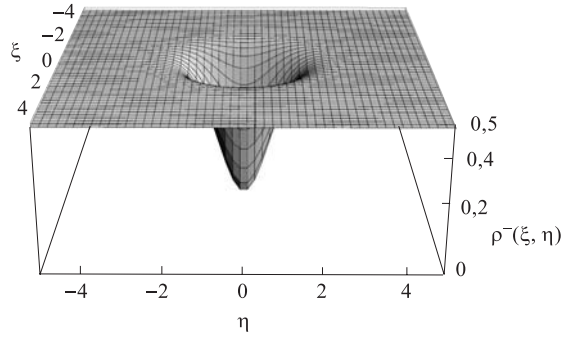


Рис. 3. Матрица плотности $\rho^-(\xi, \eta)$ антисимметричных состояний вместе с мерой Баргманна

Антисимметризация подавляет значения распределения вероятности плотности в области вокруг начала координат, но по мере удаления от начала координат фазовой плоскости плотность распределения стремится к $1/2$ (рис. 3).

Интегрирование $\rho_x^+(\xi, \eta)$ дает матрицу плотности симметричных состояний, умноженную на меру Баргманна:

$$\rho^+(\xi, \eta) = \int \rho_x^+(\xi, \eta) dx = \cosh(RS) \exp(-RS) = \frac{1 + \exp(-2RS)}{2}, \quad (42)$$

которая подчеркивает область малых значений ξ, η , а по мере удаления от начала координат выходит на тот же предел $1/2$, что и плотность распределения вероятности для антисимметричных состояний (см. рис. 4).

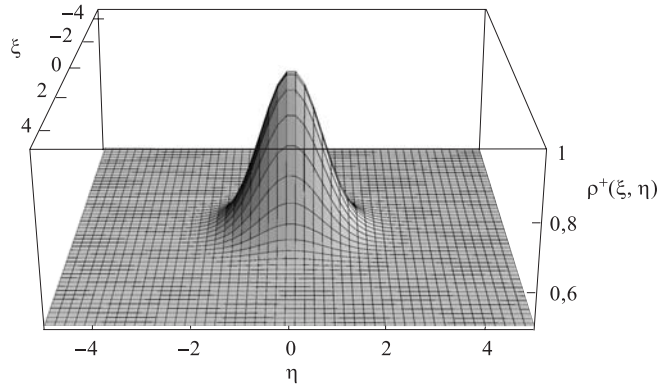


Рис. 4. Матрица плотности $\rho^+(\xi, \eta)$ симметричных состояний вместе с мерой Баргманна

Распределение вероятности для антисимметричных состояний гармонического осциллятора с числом квантов возбуждения $2n + 1$ имеет вид

$$\rho_{2n+1}^-(\xi, \eta) = \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right)^{2n+1} \exp \left\{ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\}. \quad (43)$$

Максимальные значения эта функция принимает внутри кругового кольца, которое при больших n стягивается в окружность

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} = 2n + 1,$$

представляющую собой классическую траекторию при энергии $2n + 1$.

2.6. Система трех одномерных фермионов. Рассмотрим теперь систему трех одномерных фермионов, спины которых параллельны. Пусть x_1, x_2, x_3 — координаты этих фермионов. Кроме того, положим

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \quad y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} \right).$$

В системе центра масс вместо независимых переменных R_1, R_2, R_3 пространства Фока–Баргманна введем

$$P = \sqrt{\frac{1}{2}}(R_1 - R_2) = A \cos \gamma = \xi_1 + i\eta_1, \quad (44)$$

$$Q = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(R_3 - \frac{R_1 + R_2}{2} \right) = A \sin \gamma = \xi_2 + i\eta_2, \quad (45)$$

$$P^* = \sqrt{\frac{1}{2}}(S_1 - S_2), \quad Q^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(S_3 - \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$$

Тогда интеграл перекрытия двух детерминантов Слейтера

$$\phi_{y_1, y_2}(P, Q) \quad \text{и} \quad \phi_{y_1, y_2}^*(P, Q),$$

построенных на орбиталях Блоха–Бринка в системе центра масс, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} I(P, Q; P^*, Q^*) &= \int dy_1 \int dy_2 \phi_{y_1, y_2}^*(P, Q) \phi_{y_1, y_2}(P, Q) = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \exp \{PP^* + QQ^*\} + \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}Q \right) P^* + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}P - \frac{1}{2}Q \right) Q^* \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}Q \right) P^* + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}P - \frac{1}{2}Q \right) Q^* \right\} - \exp \{ -PP^* + QQ^* \} - \\
 & - \exp \left\{ \left(\frac{1}{2}P - \frac{\sqrt{3}}{2}Q \right) P^* + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}P - \frac{1}{2}Q \right) Q^* \right\} - \\
 & - \exp \left\{ \left(\frac{1}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}Q \right) P^* + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}P - \frac{1}{2}Q \right) Q^* \right\} \Bigg\} = \\
 & = 12 \sum_n \sum_{m=0}^{[(n-3)/3]} \frac{(AA^*)^n \cos(6m+3)\gamma \cos(6m+3)\gamma^*}{(n-6m-3)!(n+6m+3)!} + \\
 & + 12 \sum_n \sum_{m=1}^{[n/6]} \frac{(AA^*)^n \sin 6m\gamma \sin 6m\gamma^*}{(n-6m)!(n+6m)!}. \tag{46}
 \end{aligned}$$

Разложение (46) дает диагональные элементы матрицы плотности в представлении гармонического осциллятора:

$$w'_{n,m}(\xi, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \frac{(AA^*)^n 2 \cos(6m+3)\gamma \cos(6m+3)\gamma^*}{(n-6m-3)!(n+6m+3)!}, \tag{47}$$

$$w''_{n,m}(\xi, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \frac{(AA^*)^n 2 \sin 6m\gamma \sin 6m\gamma^*}{(n-6m)!(n+6m)!}. \tag{48}$$

Число квантов n принимает только нечетное значение, начиная с $n = 3$, что обусловлено требованиями принципа Паули. По той же причине множители перед γ (γ^*) в аргументе синусов и косинусов кратны трем.

Снова, если $n \gg m \gg 1$, мы имеем простую предельную форму:

$$\begin{aligned}
 & \int dy_1 \int dy_2 \phi_{y_1, y_2}^*(P, Q) \phi_{y_1, y_2}(P, Q) \sim \\
 & \sim \sum_n \sum_m \frac{(AA^*)^n}{n!} \frac{2}{n} \exp \left(-\frac{(6m+3)^2}{2n} \right) \cos(6m+3)\gamma \cos(6m+3)\gamma^* +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_n \sum_m \frac{(AA^*)^n}{n!} \frac{2}{n} \exp\left(-\frac{(6m)^2}{2n}\right) \sin 6m\gamma \sin 6m\gamma^*, \quad (49)$$

подобную той, которая ранее была получена для трехмерного осциллятора.

Имея матрицу плотности $w_{n,m}^i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)$ системы трех фермионов, несложно найти одночастичную матрицу плотности $w_{n,m}^i(\xi_1, \eta_1)$, определив ее как интеграл

$$w_{n,m}^i(\xi_1, \eta_1) = \int w_{n,m}^i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \exp\left\{-\frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2}\right\} \frac{d\xi_2 d\eta_2}{2\pi}. \quad (50)$$

2.7. То же, но трехмерный случай. Для трех трехмерных фермионов с одинаково направленными спинами первые два слагаемых в разложении интеграла перекрытия имеют вид

$$I(\mathbf{P}, \mathbf{Q}; \mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*) = \frac{1}{2}([\mathbf{P}\mathbf{Q}][\mathbf{P}^*\mathbf{Q}^*]) + \frac{1}{24}\{(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)^3 - 3(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(\mathbf{Q}\mathbf{P}^*)^2 - \\ - 3(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(\mathbf{P}\mathbf{Q}^*)^2 + 9(\mathbf{P}\mathbf{P}^*)(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*)^2 - 9([\mathbf{P}\mathbf{Q}][(\mathbf{P}^*\mathbf{Q}^*)](\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*)\} + \dots \quad (51)$$

Первое слагаемое соответствует интегралу перекрытия $SU(3)$ неприводимых представлений $(0,1)$, а второе слагаемое — интегралу перекрытия $SU(3)$ неприводимых представлений $(3,0)$. Замечательный факт — неприводимое представление $(1,1)$ отсутствует.

Первые члены разложения интеграла перекрытия демонстрируют поведение этого интеграла при малых значениях векторов $\mathbf{P}, \mathbf{Q}; \mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*$. Так, первое слагаемое этого разложения

$$\frac{1}{2}([\mathbf{P}\mathbf{Q}][\mathbf{P}^*\mathbf{Q}^*])$$

является интегралом перекрытия трансляционно-инвариантных волновых функций $SU(3)$ -модели Эллиотта [16] трех фермионов с одинаковым направлением спина, а четвертая степень этого слагаемого дает интеграл перекрытия той же модели для ядра ^{12}C . Если же векторы \mathbf{P} и \mathbf{Q} коллинеарны и к тому же имеют одинаковую длину, то можно положить $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{R}$. Тогда первое слагаемое разложения (51) исчезает, а второе принимает вид

$$\frac{1}{6}(\mathbf{R}\mathbf{R}^*)^3,$$

отвечающий линейной структуре волновой функции. Это слагаемое опять соответствует интегралу перекрытия для случая тех же трех фермионов, но теперь уже оккупирующих состояния

$$[0, 0, 0][1, 0, 0][2, 0, 0]$$

s -, p -, и sd -оболочек. Здесь использовано традиционное обозначение $[n_x, n_y, n_z]$ для одночастичных состояний гармонического осциллятора с числом квантов n_x вдоль оси x , n_y вдоль оси y и n_z вдоль оси z .

3. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Орбитали (1) открывают путь для построения классических фазовых траекторий волновых пакетов системы A фермионов. Чтобы реально вывести соответствующие уравнения классической динамики и найти фазовые траектории, приходится пройти через несколько этапов. Сначала из орбиталей (1) конструируются детерминанты Слейтера и тем самым удовлетворяются требования принципа Паули. Затем эти детерминанты объявляются пробными функциями вариационной задачи, а комплексные векторы

$$\mathbf{R}_i, \quad i = 1, 2, \dots, A,$$

выступают в роли вариационных параметров, которые зависят от времени t . Следующий этап — вычисление функции Лагранжа на детерминантах Слейтера. Наконец, обращение к принципу наименьшего действия, заключая процедуру, позволяет найти классические уравнения для

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\boldsymbol{\xi}(t) + i\boldsymbol{\eta}(t)}{\sqrt{2}}$$

и, в итоге, траектории в фазовом пространстве.

Каждая траектория системы фермионов находится на гиперповерхности фазового пространства для заданной энергии. Она вполне определяется, если указаны значения всех ее интегралов движения. Квадрат модуля определенной в пространстве Фока–Баргманна волновой функции той же системы, обладающей соответствующими квантовыми числами, вместе с мерой Баргманна дает плотность распределения вероятности в фазовом пространстве. Сопоставляя фазовые траектории и квантовые распределения, можно судить о том, в какой степени и при выполнении каких условий фазовые траектории передают реальную ситуацию.

3.1. Одномерные движения. Особенно просто, обратившись к (1), найти фазовые траектории одномерных движений. Для этого достаточно воспользоваться соотношением

$$\mathcal{H}(\xi, \eta) = E, \quad \frac{\langle \phi_x^*(R) | \hat{H} | \phi_x(R) \rangle}{\langle \phi_x^*(R) | \phi_x(R) \rangle} = \mathcal{H}(\xi, \eta). \quad (52)$$

Здесь \hat{H} — квантовый гамильтониан одномерной системы в координатном представлении, а $\mathcal{H}(\xi, \eta)$ — функция Гамильтона, определенная как результат

усреднения гамильтониана на орбиталях Блоха–Бринка. Так, для одномерного свободного движения, гамильтониан которого

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2},$$

функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{4}. \quad (53)$$

Из (53) следует, что волновой пакет, каковым является орбиталь (1), движется как свободная частица с импульсом η и массой нуклона. Однако поскольку $E = \mathcal{H}(\xi, \eta)$, то полная энергия волнового пакета содержит еще одно слагаемое $1/4$, которое появилось потому, что на создание одномерного волнового пакета требуется затратить именно эту энергию. Такой волновой пакет, как и всякий другой, не может существовать долгое время вне потенциального поля и должен расплываться. Пока мы пренебрегаем этим явлением и не включаем в классическое рассмотрение механизм, ответственный за расплывание волнового пакета, минимальная энергия свободного инфинитного движения оказывается равной $1/4$. И это замечание остается справедливым даже после включения потенциала притяжения, когда появляется спектр финитных состояний не только с отрицательной, но и с положительной энергией, не превосходящей $1/4$. Разумеется, квантовое описание таких проблем не имеет.

Что же касается фазовых траекторий свободного движения (53), то для них зависимость импульса от энергии, т.е.

$$\eta = \sqrt{2E - 1/2},$$

несколько отличается в области малых энергий от той, что для свободных частиц предлагает классическая механика, и от той, которая соответствует линии максимумов функции распределения (14).

Для одномерного осциллятора

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2, \quad (54)$$

поэтому

$$\mathcal{H}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (\eta^2 + \xi^2) + \frac{1}{2}, \quad (55)$$

и фазовые траектории при энергии E удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{2} (\eta^2 + \xi^2) + \frac{1}{2} = E. \quad (56)$$

Как и должно быть, при всех значениях E движения финитны, а спектр непрерывный, хотя он начинается лишь с $E = 1/2$, когда фазовая траектория вырождается в точку $\xi = 0, \eta = 0$, соответствующую началу координат. Квантовое распределение вероятности в этом же состоянии (см. (22))

$$\rho_0(\xi, \eta) = \exp \left\{ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\}$$

имеет максимум в начале координат.

3.2. Свободное движение триплетной пары фермионов. Чтобы понять, как влияет антисимметризация на фазовые траектории свободного одномерного движения двух фермионов в триплетном состоянии, построим сначала классическую функцию Гамильтона, определив ее соотношением

$$\mathcal{H}^-(\xi, \eta) = \frac{\langle \phi_x^{-*}(R) | \hat{H} | \phi_x^-(R) \rangle}{\langle \phi_x^{-*}(R) | \phi_x^-(R) \rangle}, \quad (57)$$

где

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}.$$

Простые вычисления дают следующий результат [7]:

$$\mathcal{H}^-(\xi, \eta) = \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \left(\coth \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1 \right). \quad (58)$$

Сумма двух последних слагаемых в правой части (58) изображена на рис. 5. Положив $\mathcal{H}^-(\xi, \eta) = E$, получим фазовую траекторию при энергии E . Заметим, что минимальное значение энергии равно $1/4$. Кроме того, так как

$$\coth \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1 \geq 0,$$

функция Гамильтона содержит отталкивание. Поэтому, пока $1/4 \leq E \leq 3/4$, траектория, начавшаяся при больших положительных значениях ξ и $\eta = \sqrt{2E - 1/2}$,

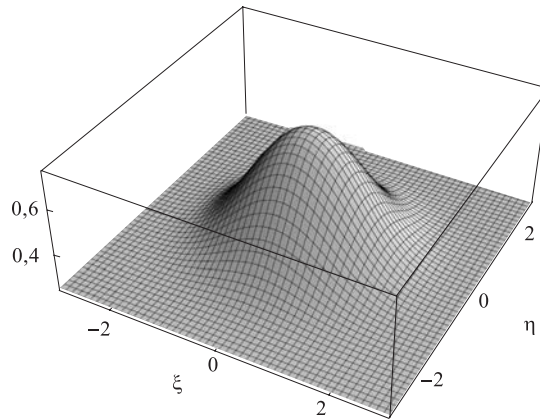


Рис. 5. Эффективные потенциальные слагаемые — два последних слагаемых в функции Гамильтона $\mathcal{H}^-(\xi, \eta)$ свободного движения двух частиц с параллельными спинами

испытываю отражение, не проникает в область отрицательных ξ . Появляется точка поворота, в которой импульс равен нулю, после чего, в результате смены знака импульса, траектория остается в области положительных ξ (см. рис.6). Если же $E \geq 3/4$, то вместо остановки наблюдается лишь замедление движения. Затем траектория уходит в область отрицательных ξ , где она может быть воспроизведена как результат зеркального отражения первой половины траектории относительно оси η .

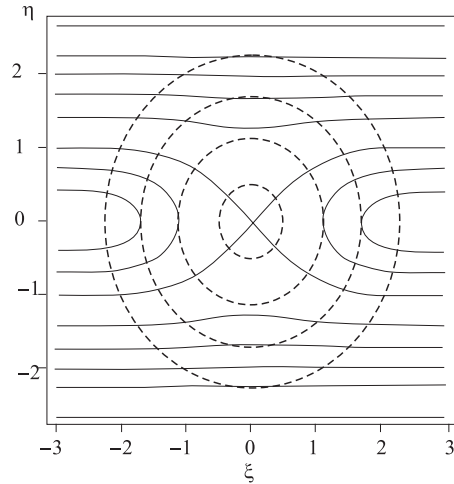


Рис. 6. Фазовые траектории свободного движения двух частиц с параллельными спинами. Сплошными линиями показаны траектории, соответствующие движению с разными значениями энергии. Штриховыми линиями показаны эквипотенциальные поверхности

3.3. Синглетная пара. В случае синглетной пары свободных фермионов функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}^+(\xi, \eta) = \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \left(\tanh \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1 \right). \quad (59)$$

затем траектория уходит в область отрицательных ξ , где она может быть воспроизведена как результат зеркального отражения первой половины траектории относительно оси η .

Отталкивание, которое демонстрируют фазовые траектории частиц триплетной фермионной пары при малых значениях ξ и η , вполне соответствует традиционному представлению о том, что учет принципа Паули запрещает фермионам с параллельными спинами находиться в одной точке и проявляется как сила, препятствующая сближению фермионов.

Полученное нами ранее распределение вероятности (39) для триплетной пары, энергия которой $E = k^2/2$, стягивается к фазовой траектории $\mathcal{H}^-(\xi, \eta) = E$, только если $E \gg 3/4$, когда роль принципа Паули и влияние антисимметризации уже несущественны.

Именно тогда асимптотическим пределом квантового результата становится классический результат. Однако при малых энергиях, когда велики те поправки к уравнениям классической динамики, которые учитывают антисимметризацию, аналогия между квантовым распределением вероятности и фазовыми траекториями не просматривается, и, чтобы эта аналогия появилась, необходима дополнительная коррекция классических уравнений, связанная в первую очередь с расплыванием волнового пакета, движение которого воспроизводят классические уравнения.

Обязанное процедуре симметризации последнее слагаемое в правой части (59), в отличие от соответствующего слагаемого в (58), отвечает притяжению, поскольку теперь

$$\tanh \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1 \leq 0.$$

Поведение суммы двух последних слагаемых в правой части (59) показано на рис. 7. Минимальное значение эта сумма имеет на окружности с центром в начале координат. Если к этой сумме мы добавим слагаемое $\eta^2/2$, то немедленно получим два минимума функции Гамильтона при

$$\xi = \pm \xi_0, \quad \xi_0 = 1,13, \quad \eta = 0,$$

когда $E_{\min} = 0,11$. В каждой из двух точек минимума фазовые траектории вырождаются в точку. Затем, когда энергия оказывается больше минимальной, появляются замкнутые фазовые траектории финитного движения. Инфинитным движение становится, если $E > 1/4$. Однако явная связь между инфинитными траекториями и квантовым распределением вероятности (40) становится очевидной, только когда $E \gg 1/4$, и влиянием симметризации как на распределение вероятности, так и на инфинитные фазовые траектории можно пренебречь. Что же касается финитных траекторий, то они есть результат приближения, появляющегося при выводе уравнений классической динамики и сводящегося к тому, что волновой пакет свободного движения не расплывается, хотя на самом деле расплывание имеет место и пренебрегать им можно лишь при больших энергиях.

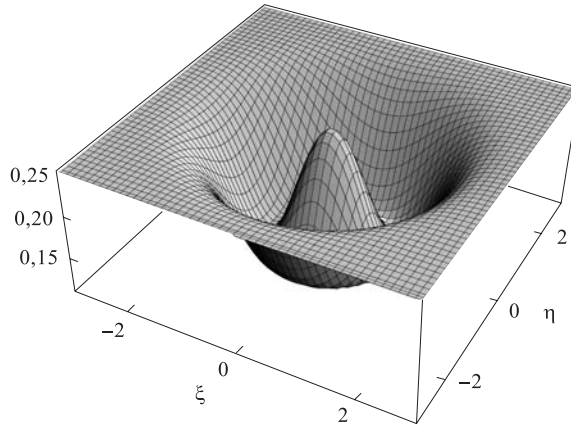


Рис. 7. Эффективные потенциальные слагаемые — два последних слагаемых в функции Гамильтона $\mathcal{H}^+(\xi, \eta)$ свободного движения двух частиц с антипараллельными спинами

4. УЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФЕРМИОНОВ

Введем потенциал взаимодействия между фермионами для того, чтобы изучить те вопросы, которые возникают, когда система имеет состояния как непрерывного, так и дискретного спектра. Взаимодействие фермионов мы будем моделировать гауссовским потенциалом притяжения

$$U(x) = -V_0 \exp\{-\alpha x^2\}. \quad (60)$$

С этим взаимодействием мы сначала построим спектр состояний, волновые функции которых определены в пространстве Фока–Баргманна, а затем выполним переход к уравнениям классической динамики и определим фазовые траектории.

4.1. Решение квантового волнового уравнения. Для реализации квантового подхода найдем интеграл перекрытия

$$\langle S|U(x)|R\rangle = \int \phi_x(S)U(x)\phi_x(R)dx$$

оператора потенциальной энергии (60) и одномерных орбиталей Блоха–Бринка

$$\phi_x(R) = \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}Rx - \frac{R^2}{2}\right\}, \quad (61)$$

$$\phi_x(S) = \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}Sx - \frac{S^2}{2}\right\}. \quad (62)$$

Несложно найти выражение для этого интеграла перекрытия:

$$\langle S|U(x)|R\rangle = -z^{1/2}V_0 \exp\left\{zRS + \frac{z-1}{2}(R^2 + S^2)\right\}, \quad (63)$$

где $z^{-1} = 1 + \alpha$. Интеграл перекрытия с оператором кинетической энергии мы уже вычисляли:

$$\langle S|\hat{T}|R\rangle = \left(-\frac{1}{4}(R-S)^2 + \frac{1}{4}\right) \exp(RS). \quad (64)$$

Интегралы перекрытия (63) и (64) являются матричными элементами соответствующих операторов на орбиталях (61) и (62) Блоха–Бринка. Но эти орбитали представляют собой суперпозицию всех ортонормированных базисных функций одномерного гармонического осциллятора, определенных в обычном координатном пространстве, а коэффициенты этой суперпозиции —

базисные функции того же осциллятора, но в пространстве Фока–Баргманна. Так, для (61)

$$\phi_x(R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(x) \exp\{-x^2/2\} \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n, \quad (65)$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита. Аналогичная суперпозиция имеет место для (62). Интегрируя по x при вычислении интегралов перекрытия, мы нашли линейную комбинацию всех интересующих нас ненулевых матричных элементов. Но теперь из этой линейной комбинации мы должны извлечь каждый из матричных элементов, входящих в ее состав.

Матричный элемент $\langle S|\hat{O}|R\rangle$ любого оператора \hat{O} представим в виде

$$\langle S|\hat{O}|R\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n \langle n|\hat{O}|\tilde{n}\rangle \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}!}} S^{\tilde{n}}, \quad (66)$$

где, как обычно,

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{O}|\tilde{n}\rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(x) \exp\{-x^2/2\} \hat{O} \frac{1}{\sqrt{2^{\tilde{n}} \tilde{n}!} \sqrt{\pi}} H_{\tilde{n}}(x) \exp\{-x^2/2\}, \end{aligned}$$

что и указывает путь к решению проблемы. В самом деле, так как

$$\langle S|\hat{U}(x)|R\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n \langle n|\hat{U}(x)|\tilde{n}\rangle \frac{1}{\sqrt{\tilde{n}!}} S^{\tilde{n}}, \quad (67)$$

то парциальные матричные элементы

$$\langle n|\hat{U}(x)|\tilde{n}\rangle = -V_0 \sum_{m=0}^{\min(n, \tilde{n})} \frac{n! \tilde{n}!}{m!(n-m)!(\tilde{n}-m)!} z^{m+1/2} (z-1)^{n+\tilde{n}-2m}. \quad (68)$$

Из (64) и (66) немедленно следуют три основных хорошо известных выражения для матричных элементов оператора кинетической энергии одномерного осциллятора:

$$\langle n+2|\hat{T}|n\rangle = -\frac{1}{4} \sqrt{(n+1)(n+2)}, \quad (69)$$

$$\langle n-2|\hat{T}|n\rangle = -\frac{1}{4} \sqrt{(n-1)n}, \quad (70)$$

$$\langle n|\hat{T}|n\rangle = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}. \quad (71)$$

Для подсчета всех представленных матричных элементов были использованы матричные элементы на орбиталях Блоха–Бринка и базисные волновые функции, определенные в пространстве Фока–Баргманна. Мы намеренно ограничились простым одномерным случаем, где все вычисления не содержат второстепенных деталей. Однако и в более сложной ситуации представленный алгоритм остается справедливым, если только найдены интегралы перекрытия и построены образы базисных функций в пространстве Фока–Баргманна. Теперь, имея в своем распоряжении матричные элементы гамильтониана, обратимся к системе алгебраических уравнений

$$\sum_{\bar{n}}^{\infty} (\langle n | \hat{H} | \bar{n} \rangle - E \delta_{n, \bar{n}}) C_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (72)$$

для коэффициентов разложения C_n волновой функции $\Psi(R)$ по базису гармонического осциллятора. Конечно,

$$\Psi(R) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n. \quad (73)$$

Те же коэффициенты C_n определяют и разложение

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \exp \{-x^2/2\} \quad (74)$$

той волновой функции в координатном представлении, образом которой является (73).

Решение системы уравнений (72) дает нам дискретный и непрерывный спектр, соответствующий потенциалу $U(x)$. Вопросы, которые обычно возникают при изучении разложения (73), касаются его применимости для состояний непрерывного спектра и связаны с тем, что в координатном представлении одномерные волновые функции непрерывного спектра осциллируют при росте x , а амплитуда осцилляций не убывает. Между тем базисные функции гармонического осциллятора быстро убывают с ростом x , и возникает вопрос о возможности неубывающую осциллирующую функцию разложить в ряд по функциям гармонического осциллятора, точнее, вопрос о сходимости такого ряда.

Обсуждение проблемы начнем с замечания, касающегося разложения (73) — ряда Тейлора целой функции $\Psi(R)$. Из определения целой функции следует, что ее разложение по степеням R сходится всюду в комплексной плоскости R , кроме бесконечно удаленной точки, где эта функция имеет особенность. Общее утверждение о сходимости ряда (73) подтверждает поведение коэффициентов степенного ряда: $|C_n|$ ограничены, а значения множителей $1/\sqrt{n!}$ быстро стремятся к нулю. В круге любого радиуса с центром

в точке $R = 0$ эта сходимость равномерная. Сходимость перестает быть равномерной вне такого круга.

Анализ реальной ситуации уместно продемонстрировать на простом примере разложения волновой функции свободного движения, когда потенциал $U(x)$ равен нулю. Как и в общем случае, для этого потенциала непрерывный спектр двукратно вырожден, и, чтобы снять вырождение, наряду с энергией E введем в качестве интеграла движения четность. Очевидно, что волновая функция четного состояния

$$\Psi^+(R) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} R^{2n} \quad (75)$$

содержит базисные состояния только с четными степенями R , а волновая функция нечетного состояния

$$\Psi^-(R) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- \frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}} R^{2n+1} \quad (76)$$

только нечетные степени.

Значения коэффициентов разложения C_n^+ и C_n^- волновой функции свободного движения непосредственно следуют из выражения

$$\phi_k(R) = \pi^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} - i\sqrt{2}Rk + \frac{R^2}{2} \right\}, \quad (77)$$

являющегося одномерным аналогом плоской волны (11) с импульсом k . Обратим внимание на то, что (77) является не только важной волновой функцией свободного одномерного движения, но и производящей функцией для полиномов Эрмита $H_n(k)$, а R — генераторный параметр этой функции. Поэтому (см. [19])

$$\phi_k(R) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(k) \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} \right\} \frac{1}{\sqrt{n!}} R^n, \quad (78)$$

$$C_n^+(k) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^{2n} (2n)!} \sqrt{\pi}} H_{2n}(k) \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} \right\}, \quad (79)$$

$$C_n^-(k) = \frac{(-1)^n i}{\sqrt{2^{2n+1} (2n+1)!} \sqrt{\pi}} H_{2n+1}(k) \exp \left\{ -\frac{k^2}{2} \right\}. \quad (80)$$

Отметим целый ряд важных для последующего анализа системы уравнений (72) результатов. Во-первых, как и должно быть, коэффициенты C_n^+ и C_n^-

удовлетворяют системе уравнений (72) при $U(x) = 0$. Это следствие известных рекуррентных соотношений для полиномов Эрмита [19], к которым тогда сводится система (72). Во-вторых, эти коэффициенты являются собственными функциями гармонического осциллятора, определенными в импульсном представлении. Наконец, асимптотика C_n^+ и C_n^- в пределе $n \gg 1$ [19]:

$$C_n^+(k) \sim (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-1/4} \cos(k\sqrt{4n+1}), \quad (81)$$

$$C_n^-(k) \sim (-1)^n \frac{i}{\sqrt{\pi}} n^{-1/4} \sin(k\sqrt{4n+3}) \quad (82)$$

тождественна асимптотике решений одномерного уравнения Шредингера в координатном представлении для свободного движения с энергией $E = k^2/2$. При этом в качестве модуля координаты выступает значение точки поворота при движении в поле гармонического осциллятора, т.е. $\sqrt{4n+1}$, когда энергия осциллятора равна $2n + 1/2$, и $\sqrt{4n+3}$, когда энергия равна $2n + 3/2$.

Обратим внимание и на нормировку коэффициентов разложения:

$$\sum_n^{\infty} C_n^+(k) C_n^+(k') = \delta(E - E'). \quad (83)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для коэффициентов нечетных состояний.

Разумеется, учет потенциала $U(x)$ изменяет значение коэффициентов разложения, но остается априорная возможность указать их асимптотику, которая теперь принимает обычный для непрерывного спектра с учетом потенциала вид

$$C_n^+(k) \sim (-1)^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-1/4} \cos(k\sqrt{4n+1} + \delta^+(k)), \quad (84)$$

$$C_n^-(k) \sim (-1)^n \frac{i}{\sqrt{\pi}} n^{-1/4} \sin(k\sqrt{4n+3} + \delta^-(k)). \quad (85)$$

Таким образом, при всех $n \geq n_0$, когда с заданной точностью справедливы асимптотические выражения, все коэффициенты определяются только одной неизвестной величиной — фазовым сдвигом $\delta^+(k)$ ($\delta^-(k)$), который мы должны найти вместе с коэффициентами C_n^+ (C_n^-), имеющими индекс $n < n_0$. В итоге, вместо системы бесконечного числа уравнений мы приходим к системе $n_0 + 1$ уравнений. Выбор значения n_0 зависит от точности, с которой ведутся вычисления.

Все основные положения, сформулированные выше, остаются справедливыми и в трехмерном случае, и при исследовании систем многих частиц, а также многоканальных систем, и тогда, когда учитывается кулоновское взаимодействие. Необходимо лишь установить явный вид асимптотики, содержащей в общем случае элементы K -матрицы или S -матрицы рассеяния, и записать ее через квантовые числа многомерного гармонического осциллятора (см., например, [20]).

4.2. Обсуждение решений. Пусть притягивающему потенциалу (60) соответствует только одно связанное состояние, энергия которого равна $-\epsilon$, четность положительна, а коэффициенты разложения $\{C_n^\epsilon\}$. Что же касается состояний непрерывного спектра, то их мы будем характеризовать импульсом на бесконечности k и четностью. Коэффициенты разложения этих состояний суть $\{C_n^+(k)\}$ (четных и, следовательно, синглетных) и $\{C_n^-(k)\}$ (нечетных, т.е. триплетных).

Энергия и структура волновой функции основного состояния зависят от глубины потенциала V_0 . Если $V_0 \gg 1$, то

$$-\epsilon \sim -V_0 + \sqrt{V_0/2}, \quad (86)$$

а волновая функция и в координатном представлении и в фазовом пространстве локализована в окрестности начала координат. Если же V_0 приближается к нулевому значению, то $-\epsilon \rightarrow 0$, а волновая функция, медленно убывающая по мере увеличения расстояния до начала координат, становится существенно дельта-локализованной и простирающейся далеко от начала координат.

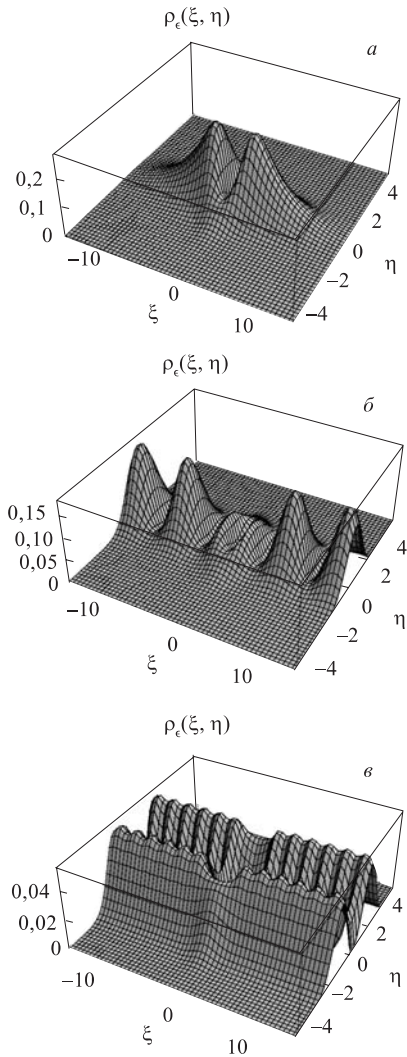


Рис. 8. Плотность распределения вероятности $\rho_\epsilon(\xi, \eta)$ в фазовом пространстве для движения триплетной пары фермионов с разными значениями энергии. Потенциал взаимодействия $V = -33e^{-x^2}$. Основное состояние с энергией: а) $\epsilon = -0,22$ МэВ, б) $\epsilon = 4,5$ МэВ, в) $\epsilon = 41$ МэВ

Плотность распределения вероятности $\rho_\epsilon(\xi, \eta)$ в фазовом пространстве (рис. 8) определяется двукратной суммой

$$\rho_\epsilon(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} C_n^\epsilon \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} R^{2n} C_{\bar{n}}^\epsilon \frac{1}{\sqrt{(2\bar{n})!}} S^{2\bar{n}} \exp \left\{ -\frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \right\}. \quad (87)$$

В отличие от результата классических функций Гамильтона (58) и (59) для фазовых траекторий, инфинитное движение имеет место не при $E \geq 1/4$, а при $E \geq 0$, как тому и следует быть.

4.3. Фазовые траектории для потенциала (60). Если исследуется движение одной частицы в поле потенциала $U(x) = -V_0 \exp \{-\alpha x^2\}$, когда принцип Паули не вносит каких-либо усложнений, к функции Гамильтона свободного движения (53) должно быть добавлено слагаемое

$$\frac{\langle \phi_x^*(R) | U(x) | \phi_x(R) \rangle}{\langle \phi_x^*(R) | \phi_x(R) \rangle} = -z^{1/2} V_0 \exp \left\{ \frac{z-1}{2} (R+S)^2 \right\}. \quad (88)$$

В результате

$$\mathcal{H}(\xi, \eta) = \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{4} - z^{1/2} V_0 \exp \{-(1-z)\xi^2\}. \quad (89)$$

Опять, как и в случае свободного движения, инфинитные траектории существуют лишь тогда, когда $E \geq 1/4$. Заметим, что гауссовский потенциал и после усреднения на орбиталях Блоха–Бринка остается гауссовским. Однако в силу того, что $1 \geq z \geq 0$, глубина усредненного потенциала оказывается в \sqrt{z} меньше глубины исходного, а радиус — в \sqrt{z} больше. Поэтому даже в пределе больших энергий, когда можно пренебречь слагаемым $1/4$ в выражении для функции Гамильтона, рассеяние на новом потенциале должно отличаться от того, что в классическом случае дает потенциал (60). В частности, это касается коэффициентов прохождения и отражения на новом потенциале. Следовательно, проводя расчеты траекторий инфинитных движений в рамках АМД, необходимо вводить какие-либо корректирующие факторы, чтобы иметь адекватные результаты. Фактически коррекция расчетов производится, когда изучается столкновение тяжелых ионов. Как мы теперь понимаем, уточнение используемого нуклон-нуклонного потенциала (обычно одного из потенциалов Волкова [21]) не может дать правильного результата ни при малых энергиях, когда классические траектории даже качественно не воспроизводят поведение квантовой волновой функции, ни при больших, когда происходит искажение потенциала. Вместо такого уточнения в АМД вводится дополнительное двухнуклонное рассеяние [3]. Фактически при этом нуклон-нуклонное рассеяние учитывается два раза — через потенциал Волкова и через дополнительно вводимое сечение рассеяния, значение которого согласовано с экспериментом.

Минимальная энергия финитного движения частицы соответствует значению $R = 0$. Тогда фазовая траектория вырождается в точку — начало координат фазовой плоскости. В координатном представлении волновая функция АМД сводится к гауссоиду основного состояния гармонического осциллятора

$$\phi_x^*(R = 0) = \pi^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}. \quad (90)$$

Это приближение может быть удовлетворительным, если оптимально значение осцилляторного радиуса, а глубина потенциала V_0 достаточно большая. Однако точность приближения понижается по мере уменьшения V_0 .

4.4. О проектировании в рамках АМД. Проектирование на состояние с определенным орбитальным моментом является одной из проблем АМД. В качестве иллюстрации этой проблемы рассмотрим движение трехмерной частицы в поле центрального потенциала

$$U(\mathbf{r}) = -V_0 \exp \{-\alpha r^2\}. \quad (91)$$

Стандартная функция Гамильтона в фазовом пространстве (\mathbf{r}, \mathbf{p}) тогда имеет вид

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + U(\mathbf{r}), \quad \mathbf{p}^2 = p_r^2 + \frac{M^2}{r^2}, \quad (92)$$

где p_r — радиальная проекция импульса, $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ — орбитальный момент количества движения. Проектирование сводится к тому, что фиксируется значение M . Затем определяется точка $r = r_M$, в которой минимальна функция

$$F(r, M^2) = \frac{M^2}{r^2} + U(\mathbf{r}), \quad (93)$$

и вычисляется минимальная энергия при заданном M :

$$E_0(M^2) = \frac{M^2}{2r_M^2} - V_0 \exp \{-\alpha r_M^2\}. \quad (94)$$

Еще одна замечательная точка r_{\max} — второй экстремум функции $F(r, M^2)$, где она имеет максимум $F_{\max}(M^2)$ и положительна.

В плоскости (r, p_r) фазовая траектория стягивается в точку при энергии $E_0(M^2)$. Если $F_{\max}(M^2) > E(M^2) > E_0(M^2)$, то фазовые траектории представляют собой замкнутые линии вокруг точки $r = r_M, p_r = 0$. Если же $E(M^2) > F_{\max}(M^2)$, то движение становится инфинитным и фазовые траектории уходят на бесконечность.

Функция Гамильтона \mathcal{H} для волнового пакета в поле потенциала (91) лишь обозначениями и некоторыми деталями отличается от (92):

$$\mathcal{H} = \frac{\eta^2}{2} + \frac{3}{4} - z^{3/2} V_0 \exp \left\{ -\frac{1-z}{2} \xi^2 \right\}, \quad \eta^2 = \eta_\xi^2 + \frac{\mathbf{M}^2}{\xi^2}, \quad \mathbf{M} = [\xi \eta]. \quad (95)$$

Этими деталями являются энергия $3/4$, необходимая для создания волнового пакета, фактор $z^{3/2}$ перед экспонентой и замена фактора α на $1-z$ в показателе экспоненты. В остальном все обстоит так же, как и в предыдущем случае. Минимальную энергию и, следовательно, энергию основного состояния E_0 мы получим, если η_ξ и \mathbf{M} равны нулю. Тогда минимум соответствует нулевому значению ξ , что дает в итоге

$$E_0 = \frac{3}{4} - z^{3/2} V_0,$$

т.е. вырождающаяся в точку фазовая траектория существует при любом сколь угодно малом положительном V_0 . Между тем из квантовой механики известно, что связанное состояние существует лишь тогда, когда V_0 превышает некоторое критическое значение.

Далее, функция Гамильтона (95) дает непрерывный спектр финитных состояний, и необходимы дополнительные условия, чтобы среди этих состояний выделить те, которые удовлетворяют требованиям квантовой механики. Такими условиями могут быть условия квантования Бора–Зоммерфельда (см. [13]) в рассматриваемом случае или же их обобщение, предложенное в [17].

Кроме того, функция Гамильтона (95) допускает не только целочисленные значения орбитального момента M , но и все остальные. Чтобы обойти эту трудность, следует выполнить проектирование на состояние с определенным орбитальным моментом орбитали Блоха–Бринка. Такую процедуру обычно называют проектированием до варьирования. Проследим за ее реализацией на простом примере состояния с нулевым орбитальным моментом. В этом случае интеграл перекрытия принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp \{RSt\} dt = \frac{\sinh RS}{RS}. \quad (96)$$

Интегрирование выполняется по t — косинусу угла между векторами \mathbf{R} и \mathbf{S} . При этом, по существу, мы следуем известному методу проектирования Пайерлса–Йоккоза [18]. Функция Гамильтона \mathcal{H}_0 , построенная после проектирования, имеет вид

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\eta^2}{2} + \frac{5}{4} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \left(\coth \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1 \right) -$$

$$-z^{1/2}V_0 \frac{1 - \exp\{-z(\xi^2 + \eta^2)\}}{1 - \exp\{-(\xi^2 + \eta^2)\}} \exp\left(-\frac{1-z}{2}\xi^2\right), \quad (97)$$

где, как и в одномерном случае,

$$R = \xi + i\eta, \quad S = R^*.$$

Минимизация функции Гамильтона (97) приводит к той же энергии основного состояния, которая была получена ранее. Однако изменение потенциала (91) путем добавления к нему слагаемого

$$V_1 \exp\{-\alpha_1 r^2\},$$

соответствующего отталкиванию, существенно влияет на результат для энергии основного состояния. Тогда, чтобы определить энергию основного состояния, мы должны найти минимум функции

$$\begin{aligned} & \frac{5}{4} - \frac{\xi^2}{4} \left(\coth \frac{\xi^2}{2} - 1 \right) - z^{1/2}V_0 \frac{1 - \exp\{-z\xi^2\}}{1 - \exp\{-\xi^2\}} \exp\left(-\frac{1-z}{2}\xi^2\right) + \\ & + z_1^{1/2}V_1 \frac{1 - \exp\{-z_1\xi^2\}}{1 - \exp\{-\xi^2\}} \exp\left(-\frac{1-z_1}{2}\xi^2\right) \end{aligned} \quad (98)$$

на полуоси $0 \leq \xi < \infty$. Если же не проводить предварительного проектирования, то надо минимизировать функцию

$$\frac{3}{4} - z^{3/2}V_0 \exp\left\{-\frac{1-z}{2}\xi^2\right\} + z_1^{3/2}V_1 \exp\left\{-\frac{1-z_1}{2}\xi^2\right\}. \quad (99)$$

Конечно, и в том и в другом случае минимум достигается при ненулевых и к тому же различных значениях ξ . Очевидно, что проектирование опускает минимум ниже.

4.5. Влияние принципа Паули на функцию Гамильтона. Приняв во внимание потенциал (60), мы должны будем несколько усложнить функции Гамильтона (58) и (59). Теперь для синглетной пары в функцию Гамильтона необходимо ввести слагаемое:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle \phi_x^{+*}(R) | U(x) | \phi_x^+(R) \rangle}{\langle \phi_x^{+*}(R) | \phi_x^+(R) \rangle} = \\ & = -z^{1/2}V_0 \left(\exp\left\{-\frac{1-z}{2}(R+S)^2\right\} + \exp\left\{-\frac{1-z}{2}(R-S)^2\right\} \right) - \\ & - z^{1/2}V_0 \tanh(RS) \left(\exp\left\{-\frac{1-z}{2}(R+S)^2\right\} - \exp\left\{-\frac{1-z}{2}(R-S)^2\right\} \right) = \end{aligned}$$

$$= -z^{1/2}V_0 \frac{\exp\{-(1-z)\xi^2\} + \exp\{-\xi^2 - z\eta^2\}}{1 + \exp\{-\xi^2 - \eta^2\}}. \quad (100)$$

Таким образом, усреднение гауссовского потенциала на симметризованных орбиталях Блоха–Бринка приводит к такому взаимодействию в фазовом пространстве, которое зависит не только от координаты ξ , но и от импульса η . Однако на больших расстояниях между частицами, когда $\xi \gg 1$, это взаимодействие снова становится гауссовским, как в предыдущем примере, когда не было необходимости учитывать принцип Паули.

В итоге функция Гамильтона синглетной пары принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+(\xi, \eta) = & \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \left(\tanh \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1 \right) - \\ & - z^{1/2}V_0 \frac{\exp\{-(1-z)\xi^2\} + \exp\{-\xi^2 - z\eta^2\}}{1 + \exp\{-\xi^2 - \eta^2\}}. \end{aligned} \quad (101)$$

Аналогичные изменения происходят и с функцией Гамильтона триплетной пары:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^-(\xi, \eta) = & \frac{\eta^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{4} \left(\coth \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} - 1 \right) - \\ & - z^{1/2}V_0 \frac{\exp\{-(1-z)\xi^2\} - \exp\{-\xi^2 - z\eta^2\}}{1 - \exp\{-\xi^2 - \eta^2\}}. \end{aligned} \quad (102)$$

Мы уже отмечали зависимость результатов АМД от глубины потенциала. На рис. 9 для триплетной пары фермионов представлены волновая функция АМД и точная волновая функция для случая $V_0 = 33,0$, $\alpha = 1$, когда точное значение энергии близко к нулю. Минимальная энергия в приближении АМД тогда положительна и равна 4,58. На том же рисунке приведена и точная волновая функция, соответствующая $E = -0,22$.

Следует отметить, что обсуждаемые результаты имеют прямое отношение к вариационным вычислениям, выполненным на основе АМД, и подсказывают путь уточнения таких расчетов. Типичным объектом исследования в рамках АМД являются легкие ядра, обладающие α -кластерной структурой. Последняя есть результат сильного взаимодействия нуклонов, входящих в состав каждого α -кластера, и слабого взаимодействия нуклонов, принадлежащих разным кластерам, которое, в свою очередь, является следствием принципа Паули и обменного характера ядерных сил, способствующих насыщению ядерной материи. Можно сослаться и на экспериментальный факт, состоящий в том, что энергия связи легких ядер близка по величине к сумме

энергий связи α -кластеров. Поправка к этой сумме невелика и обусловлена существованием слабого взаимодействия между α -кластерами. В приближении АМД достаточно хорошо воспроизводится энергия связи каждого из α -кластеров, но занижается вклад взаимодействия между кластерами в энергию связи.

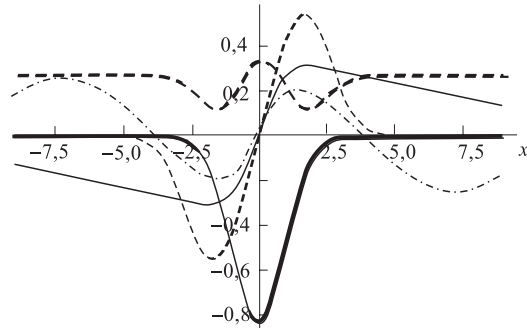


Рис. 9. Волновая функция основного состояния триплетной пары фермионов, взаимодействующих по закону $V = -33e^{-x^2}$ в координатном представлении (сплошная жирная линия). Пунктирной жирной линией показан полный эффективный потенциал из формулы (102), в котором происходит движение волновых пакетов. Глубина потенциалов уменьшена в 40 раз. Пунктирной линией показана волновая функция, найденная в рамках АМД и отвечающая энергии $E_{gs} = 4,58$ МэВ, сплошной — квантово-механическая функция основного состояния, отвечающая точному значению $E_{gs} = -0,22$ МэВ, штрихпунктирной — квантово-механическая функция непрерывного спектра, отвечающая энергии связи АМД

4.6. АМД и метод резонирующих групп. Чтобы пояснить положение, представленное в предыдущем пункте, уместно сопоставить АМД и метод резонирующих групп (МРГ), в основу которого тоже положены орбитали Блоха–Бринка. Пусть, для простоты, мы имеем α -кластерное ядро, состоящее из n кластеров, $A = 4n$ нуклонов. Если волновая функция АМД для такого ядра представляет собой детерминант Слейтера, построенный на A различных орбиталях Бринка, то МРГ имеет дело с таким числом различных орбиталей, которое в четыре раза меньше. Четыре нуклона каждого кластера имеют в случае МРГ одинаковые орбитали. После отделения волновой функции центра масс и соответствующего выбора новых векторных параметров (аналога векторов Якоби) в виде линейной комбинации исходных параметров орбиталей Блоха–Бринка АМД позволяет исследовать как движение нуклонов каждого кластера, так и относительное движение кластеров. При этом вариационные расчеты в рамках АМД с потенциалом Волкова показывают, что

оптимальные для нуклонов каждого кластера значения векторных параметров их орбиталей одинаковы, а векторные параметры относительного расположения кластеров отличны от нуля. Вывод, следующий из этих вычислений, сводится к утверждению о существовании α -кластеризации легких ядер. С другой стороны, они подтверждают адекватность выбора орбиталей МРГ.

Конечно, заключение о кластеризации справедливо лишь в той степени, в какой силы Волкова можно полагать воспроизводящими реальную ситуацию. Известно, что эти силы не удовлетворяют условиям насыщения, и расчеты с ними ядер sd -оболочки указывают на отсутствие какой-либо кластеризации, хотя на самом деле у этих ядер ожидается существование кластерных структур.

Профиль нуклон-нуклонной функции АМД практически не зависит от того, идет ли речь о двух нуклонах одного кластера или о нуклонах, принадлежащих разным кластерам. Этот профиль выбирается оптимальным для нуклонов α -кластеров, что немедленно вносит ошибку в расчет энергии взаимодействия кластеров. В рамках МРГ волновые функции относительного движения кластеров определяются путем их оптимизации. Поэтому удастся избежать проблемы, характерной для АМД, и существенно уточнить расчеты*.

В работе [15] орбитали МРГ использованы для вывода и последующего анализа классических уравнений движения задачи рассеяния α -частицы на ядре ^{12}C , составленном из трех α -кластеров.

Важно отметить, что АМД и МРГ являются обобщением модели оболочек, точнее, модели $SU(3)$ Эллиотта [16]. Последняя соответствует пределу детерминантов Слейтера АМД и МРГ, когда векторные параметры всех орбиталей стремятся к нулю.

5. РАСПЛЫВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Расплывание волнового пакета — хорошо известное для квантовой механики явление. Однако когда мы переходим к динамическим уравнениям АМД, то этим явлением, решая задачи непрерывного спектра, приходится пренебрегать. Не учитывать распыление волнового пакета представляется оправданным тогда, когда время взаимодействия сталкивающихся нуклонов много меньше, чем время распыления их волновых пакетов. Последнее тем больше, чем меньше энергия, затраченная при создании волновых пакетов. Если речь идет об одной частице, то эта энергия равна $3/4$. На простом примере одной частицы покажем сначала, как, используя классические предста-

*Мы не обсуждаем здесь новые варианты АМД, существенно изменяющие простую физическую идею метода и представляющие собой гибрид разных подходов [5,6].

вления, описать расплывание волнового пакета и оценить время, необходимое для этого процесса.

5.1. Волновой пакет радиальных колебаний. Введем волновой пакет

$$\phi_r(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} r^2 \right\} \quad (103)$$

для частицы в трехмерном пространстве [22]. Обычно его связывают с модой радиальных колебаний. Ширина пакета зависит от величины генераторного параметра ε . Волновой пакет размывается, если ε приближается к -1 .

Интеграл перекрытия

$$\langle \phi_r(\varepsilon) | \phi_r(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{(1-\varepsilon\varepsilon^*)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(n+1)} \varepsilon^n \varepsilon^{*n} \quad (104)$$

дает нам определенный в комплексной плоскости ε образ

$$\phi_n(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(n+1)}} \varepsilon^n \quad (105)$$

базисных функций трехмерного гармонического осциллятора с орбитальным моментом $L=0$. В этом можно убедиться, разложив (103) по степеням ε :

$$\phi_r(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\varepsilon) \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi\Gamma(n+3/2)}} L_n^{1/2}(r^2) \exp\{-r^2/2\}, \quad (106)$$

где $L_n^{1/2}(r^2)$ — полиномы Лагерра.

Функции (105) ортонормированы с мерой

$$(1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-1/2} \frac{d\alpha d\beta}{\pi}, \quad \varepsilon = \alpha + i\beta,$$

в круге единичного радиуса $|\varepsilon| < 1$. В самом деле,

$$\int_{|\varepsilon|<1} \phi_{n'}^*(\varepsilon) \phi_n(\varepsilon) (1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-1/2} \frac{d\alpha d\beta}{\pi} = \delta_{n,n'}. \quad (107)$$

Подобно орбитали (1), волновой пакет (103) является собственной функцией оператора квадрата радиуса

$$\hat{r}^2 = -(1-\varepsilon)^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{3}{2}(1-\varepsilon), \quad (108)$$

определенного в ε -представлении (в единичном круге комплексной плоскости), т.е.

$$\hat{r}^2 \phi_r(\varepsilon) = r^2 \phi_r(\varepsilon). \quad (109)$$

Далее мы будем рассматривать свободное движение, гамильтониан которого в координатном представлении сводится к выражению

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{r}}. \quad (110)$$

Тот же гамильтониан, но в ε -представлении, имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{3}{2}(1 + \varepsilon). \quad (111)$$

Собственные функции последнего, соответствующие энергии $E = k^2/2$:

$$\phi_k(\varepsilon) = \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} k^2 \right\}. \quad (112)$$

Теперь, как и ранее, после введения орбитали Блоха–Бринка, мы оказываемся перед дилеммой: или, записав в ε -представлении волновое уравнение, искать точное решение квантовой задачи о радиальном движении частицы, или же, ограничившись рассмотрением эволюции волнового пакета, свести исследование к более простой задаче классической динамики. Разумеется, во втором случае мы будем иметь лишь приближенное описание и вместо квантовой функции распределения в фазовой плоскости построим лишь фазовую траекторию. Далее мы изучим классический вариант подхода.

5.2. Фазовые траектории для радиальной моды. Несложно убедиться в том, что классическая функция Гамильтона для движения без потенциала

$$\mathcal{H} = \frac{\langle \phi_r(\varepsilon) | \hat{H} | \phi_r(\varepsilon) \rangle}{\langle \phi_r(\varepsilon) | \phi_r(\varepsilon) \rangle} = \frac{3}{4} \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^*)}{1 - \varepsilon^* \varepsilon}. \quad (113)$$

Из (113) следует уравнение для фазовой траектории с положительной энергией E :

$$\left(\alpha + \frac{1}{1 + \chi} \right)^2 + \beta^2 = \left(1 - \frac{1}{1 + \chi} \right)^2, \quad (114)$$

где $\chi = 4E/3$. Каждая из таких траекторий представляет собой окружность с центром в точке $-1/(1 + \chi)$ на действительной оси α (см. рис. 10). Радиус окружности равен $1 - 1/(1 + \chi)$.

Все фазовые траектории идут в точку $\alpha = -1, \beta = 0$, при приближении к которой ширины волновых пакетов неограниченно возрастают и, в итоге, они полностью расплываются. Как уже отмечалось ранее, на создание волнового пакета Блоха–Бринка необходима энергия $E = 3/4$. В этом случае $\chi = 1$, радиус окружности фазовой траектории равен $1/2$, и она соединяет точку $\varepsilon = 0$ комплексной плоскости с точкой $\alpha = -1, \beta = 0$.

Чтобы оценить время, необходимое для полного расплывания волнового пакета, обратимся к уравнениям классической динамики. Последние следуют из принципа наименьшего действия и явного выражения для функции Лагранжа [7]:

$$\mathcal{L} = \frac{\langle \phi_r(\varepsilon) | -i\partial/\partial t | \phi_r(\varepsilon) \rangle - \langle \phi_r(\varepsilon) | \hat{H} | \phi_r(\varepsilon) \rangle}{\langle \phi_r(\varepsilon) | \phi_r(\varepsilon) \rangle}. \quad (115)$$

В результате варьирования по ε^* приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для ε :

$$-i\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)^2 \quad (116)$$

или же системе уравнений для α и β :

$$\dot{\alpha} = -(1 + \alpha)\beta, \quad \dot{\beta} = \frac{1}{2}\{(1 + \alpha)^2 - \beta^2\}. \quad (117)$$

Интегрирование уравнения (116) при начальном условии $\varepsilon(0) = 0$ дает следующее решение:

$$\alpha(t) = -\frac{t^2}{4 + t^2}, \quad \beta(t) = \frac{2t}{4 + t^2}. \quad (118)$$

Минимальное значение функция $\beta(t)$ имеет при $t = 2$, когда фазовая траектория завершает первую четверть окружности. Вторая четверть окружности преодолевается лишь в предельный момент времени $t = \infty$.

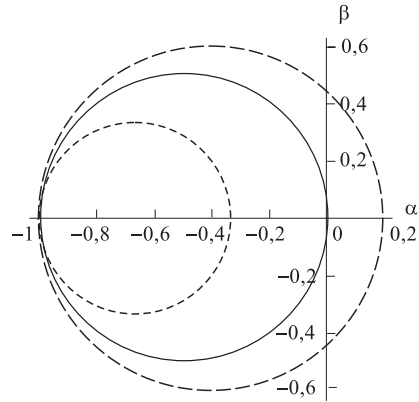


Рис. 10. Фазовые траектории для радиальной моды. Пунктирной линией показана траектория для $\chi = 0,5$ (или $k = \sqrt{3/4}$), сплошной — для $\chi = 1$ (или $k = \sqrt{3/2}$), что соответствует орбитали Блоха–Бринка при $t = 0$, и штриховой — для $\chi = 2$ (или $k = \sqrt{3}$)

Подставив (118) в (103) и приняв во внимание нормировочный множитель, получим зависимость от времени плотности вероятности значений r в координатном представлении:

$$\frac{\phi_r(\varepsilon)\phi_r(\varepsilon)}{\langle\phi_r(\varepsilon)|\phi_r(\varepsilon)\rangle} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{1+t^2}\right). \quad (119)$$

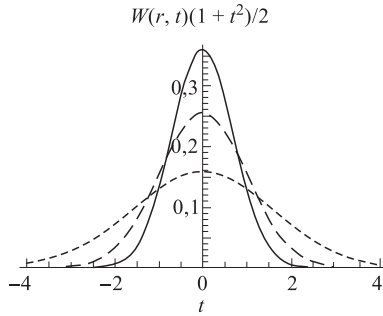


Рис. 11. Плотность распределения вероятности $W(r, t)$ в координатном представлении, умноженная на фактор $(1+t^2)/2$, благодаря чему в каждый момент сохраняется нормировка функции на 1. Сплошной линией показано распределение в начальный момент времени $t = 0$, пунктирной — в момент $t = 1$, штриховой — в $t = 2$

Таким образом, изменение во времени ширины покоящегося волнового пакета подчиняется простым закономерностям. Их иллюстрирует формула (119) и рис. 11.

Наконец, чтобы понять соотношение между квантовым результатом в пространстве Фока–Баргманна и результатом классической механики, уместно фазовую траекторию (114) сопоставить с квантовым распределением в фазовой плоскости для состояния $\phi_k(\varepsilon)$ с кинетической энергией $k^2/2$:

$$\begin{aligned} & \phi_k^*(\varepsilon)\phi_k(\varepsilon)(1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-1/2} = \\ & = \pi^{-3/2} \left(\frac{1}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^*)} \right)^{3/2} \times \\ & \times \exp\left\{ -\frac{1-\varepsilon\varepsilon^*}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^*)} k^2 \right\} (1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (120)$$

На рис. 10 представлены три фазовые траектории при разных значениях энергии, а на рис. 12 три плотности распределения, соответствующие тем же значениям энергии.

5.3. Расплывание волнового пакета Блоха–Бринка. Покажем теперь, как следует уточнить выражение для волнового пакета Блоха–Бринка, чтобы наиболее полным образом учесть его эволюцию, обязанную расплыванию пакета по мере движения в трехмерном пространстве. Пусть

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) = & \frac{1}{\pi^{3/4}} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} r^2 + \frac{\sqrt{2}}{1-\varepsilon} (\mathbf{Rr}) - \right. \\ & \left. -\frac{1}{2} \frac{1-2\varepsilon^* + \varepsilon\varepsilon^*}{1-\varepsilon} \frac{R^2}{1-\varepsilon\varepsilon^*} \right\}. \end{aligned} \quad (121)$$

Рис. 12. Плотности распределения вероятности $W(\xi, \eta; k^2/2)$ в фазовом пространстве дыхательной моды при разных значениях энергии: а) $k = \sqrt{3/4}$, б) $k = \sqrt{3/2}$, в) $k = \sqrt{3}$

Интеграл перекрытия (121) с единицей

$$\langle \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) | \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) \rangle = \frac{1}{(1 - \varepsilon\varepsilon^*)^{3/2}} \times \exp \left\{ \frac{(\mathbf{R}\mathbf{S}) + \varepsilon^* R^2/2 + \varepsilon S^2/2}{1 - \varepsilon\varepsilon^*} \right\}. \quad (122)$$

Кинетическая энергия волнового пакета теперь имеет вид

$$\frac{\langle \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) | \hat{T} | \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) \rangle}{\langle \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) | \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) \rangle} = \frac{3}{4} \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon^*)}{1 - \varepsilon\varepsilon^*} - \frac{1}{4} \frac{[(1 + \varepsilon^*)\mathbf{R} - (1 + \varepsilon)\mathbf{S}]^2}{(1 - \varepsilon\varepsilon^*)^2}. \quad (123)$$

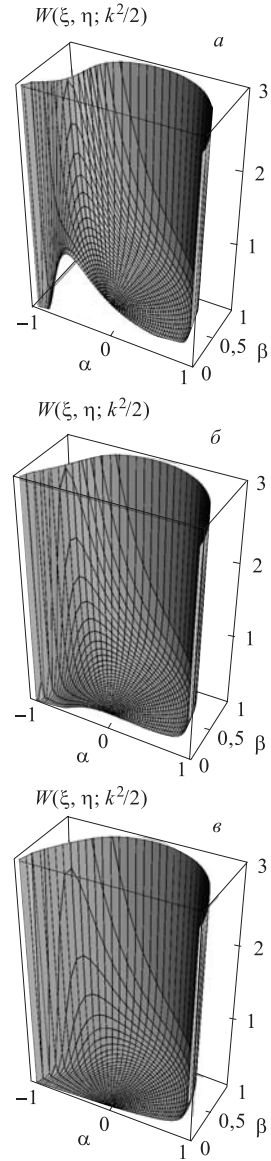
Наконец, потенциальная энергия

$$\frac{\langle \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) | -V_0 \exp \{ -(z-1)/z r^2 \} | \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) \rangle}{\langle \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) | \phi_{\mathbf{r}}(\varepsilon, \mathbf{R}) \rangle} = -z^{3/2} V_0 \left(\frac{\Delta}{\Delta_z} \right)^{3/2} \times \exp \left\{ -\frac{(1-z)}{2} \frac{\Delta}{\Delta_z} \left(\frac{(1-\varepsilon^*)\mathbf{R} + (1-\varepsilon)\mathbf{S}}{1 - \varepsilon\varepsilon^*} \right)^2 \right\}, \quad (124)$$

где

$$\Delta = 1 - \varepsilon\varepsilon^*, \quad \Delta_z = z(1 - \varepsilon\varepsilon^*) + (1-z)(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^*).$$

Представленных выражений достаточно, чтобы на их основе получить уравнения классической динамики для исследования вопроса о влиянии расплывания волнового пакета Блоха-Бринка на его свободное движение и движение в поле потенциала гауссовской формы.



Интегралами свободного движения являются кинетическая энергия (она равна полной энергии E)

$$\frac{3}{4} \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^*)}{1-\varepsilon\varepsilon^*} - \frac{1}{4} \frac{[(1+\varepsilon^*)\mathbf{R} - (1+\varepsilon)\mathbf{S}]^2}{(1-\varepsilon\varepsilon^*)^2} = E, \quad (125)$$

а также импульс

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{(1+\varepsilon^*)\mathbf{R} - (1+\varepsilon)\mathbf{S}}{1-\varepsilon\varepsilon^*} = \mathbf{P}. \quad (126)$$

Из (125) и (126) следует, что

$$\frac{3}{4} \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^*)}{1-\varepsilon\varepsilon^*} = E - \frac{1}{2} \mathbf{P}^2. \quad (127)$$

Итак, мы пришли к такой формулировке задачи, когда непрерывный спектр начинается при нулевом значении энергии и нет необходимости обращаться к специальным рецептам, чтобы на больших расстояниях подавлять энергию, затраченную на создание волнового пакета. В результате, оставаясь в рамках АМД, но несколько переопределив орбитали Блоха–Бринка путем введения степеней свободы, ответственных за расплывание волновых пакетов, можно рассматривать не только рассеяние, но и резонансные состояния в области относительно малых энергий.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, пытаясь описать столкновение ядер как столкновение составляющих эти ядра нуклонов, и обращаясь при этом к уравнениям классической динамики, мы оказываемся перед целым рядом проблем. Перечислим эти проблемы.

Учет принципа Паули при выводе уравнений динамики несколько изменяет эти уравнения в области малых значений импульсов и координат, где должны быть существенны квантовые поправки. Однако поправок, обусловленных принципом Паули, недостаточно, чтобы фазовые траектории воспроизводили самые важные особенности в поведении волновых функций, когда энергия относительного движения нуклонов мала. В то же время с увеличением энергии классические результаты приближаются к квантовым.

Кинетическая энергия классического движения нуклонов содержит постоянные слагаемые, сумма которых существенно повышает значение пороговой энергии развала ядер по тому или иному каналу, а также энергию порога полного развала атомных ядер. Устранить это нежелательное явление можно путем введения тех дополнительных степеней свободы, которые

обеспечивают расплывание нуклонных волновых пакетов. Это расплывание существенно влияет на процесс, пока мала скорость движения волновых пакетов, и они успевают изменить свою ширину за то время, когда происходит ядерная реакция.

Нуклон-нуклонное взаимодействие учитывается в рамках АМД дважды. Во-первых, оно формирует траекторию движения каждого нуклона. Во-вторых, оно ответственно за эффективное сечение нуклон-нуклонного столкновения. Это напоминает ситуацию, возникающую при обращении к уравнению Власова при описании системы частиц, когда наряду с потенциалом среднего поля учитывается еще интеграл столкновений. Но последний тогда должен быть выражен через эффективные сечения рассеяния, обусловленные взаимодействием, дополнительным к тому, которое формирует среднее поле. Конечно, уравнение Власова или уравнение Больцмана справедливы, когда плотность нуклонов невелика. Поэтому их использование при столкновении тяжелых ионов требует аргументации.

Для основных состояний четно-четных ядер волновая функция АМД имеет α -кластерную структуру или же, если число протонов меньше числа нейтронов, часть кластеров представляет собой синглетные пары нейтронов. К этому выводу приводят потенциалы типа потенциала Волкова. Поэтому, чтобы описать столкновения таких ядер, необходимо привлечь эффективные сечения упругого и неупругого столкновений α - и динейтронных кластеров. Если для сечений $\alpha\alpha$ -рассеяния есть экспериментальные данные, то сечения рассеяния синглетных динейтронов должны быть вычислены теоретически. Собственно нуклоны появляются с определенной вероятностью лишь после первого столкновения. Кроме того, неупругие столкновения порождают дейтронные, тритонные и гелионные кластеры. Затем они участвуют в процессе взаимодействия наряду с α -кластерами и динейтронами. В итоге происходит стохастизация и процесс перестает быть детерминированным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jakobsson B. et al. // Z. Phys. A. 1982. V.307. P.293; Nucl. Phys. A. 1990. V.509. P.195. Gutbrod H. et al. // Phys. Lett. B. 1989. V.216. P.267; Phys. Rev. C. 1990. V.42. P.640. Hagel K. et al. // Phys. Rev. C. 1994. V.50. P.2017.*
2. *Aichelin J., Stöcker H. // Phys. Lett. B. 1986. V.176. P.14. Aichelin J. // Phys. Rep. 1991. V.202. P.235.*
3. *Ono A. et al. // Progr. Theor. Phys. 1992. V.87. P.1185.*
4. *Ono A. et al. // Phys. Rev. Lett. 1992. V.68. P.2898. Maruyama T. et al. // Progr. Theor. Phys. 1992. V.87. P.1367. Ono A., Horiuchi H., Maruyama T. // Phys. Rev. C. 1993. V.48. P.2946. Ono A., Horiuchi H. // Phys. Rev. C. 1995. V.51. P.299. Kanada-En'yo Y., Horiuchi H., Ono A. // Phys. Rev. C. 1996. V.52. P.628.*

-
- Ono A., Horiuchi H.* // Phys. Rev. C. 1996. V.53. P.844.
Ono A., Horiuchi H. // Phys. Rev. C. 1996. V.53. P.2958.
5. *Doté A., Horiuchi H.* // Progr. Theor. Phys. 2000. V.103. P.91.
Doté A., Horiuchi H. // Progr. Theor. Phys. 2000. V.103. P.261.
 6. *Itagaki N., Aoyama S.* // Phys. Rev. C. 2000. V.61. P.024303-1.
 7. *Филиппов Г.Ф. и др.* // ЯФ. 1999. Т.62. С.100.
 8. *Fock V.A.* // Z. Phys. 1982. V.49. P.339.
Bargmann V. // Rev. Mod. Phys. 1962. V.34. P.829.
 9. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
 10. *Фейнман Р.* Статистическая механика. М.: Мир, 1975.
 11. *Brink D.M.* // Proc. of Intern. School of Phys. «Enrico Fermi», Course 37, Varenna, Italy. N.Y., 1965.
 12. *Bargmann V.* // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V.14. P.187.
 13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
 14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
 15. *Saurier E., Grammaticos B., Sami T.* // Phys. Lett. B. 1982. V.109. P.150.
 16. *Elliott J.P.* // Proc. Roy. Soc. A. 1958. V.245. P.128.
 17. *Gutzwiller M.C.* // J. Math. Phys. 1971. V.12. P.343.
 18. *Peierls R.E., Yoccoz J.* // Proc. Roy. Soc. A. 1957. V.70. P.3811.
 19. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Ч.II.
 20. *Filippov G.F.* // Riv. Nuovo Cim. 1989. V.9. P.1.
 21. *Volkov A.* // Nucl. Phys. 1965. V.75. P.33.
 22. *Филиппов Г.Ф.* // ЯФ. 1995. V.58. P.1963.