ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2001. Т. 32. ВЫП. 5

УДК 51-7:39.12; 539.12.01

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Е.И.Бухбиндер, Б.А.Оврут

Пенсильванский университет, Филадельфия, США

И.Л.Бухбиндер

Томский государственный педагогический университет, Томск

Е.А.Иванов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С.М.Кузенко

Западно-Австралийский университет, Недландс, Австралия

«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»
2001, ТОМ 32, ВЫП. 5

УДК 51-7:39.12; 539.12.01

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Е.И.Бухбиндер, Б.А.Оврут

Пенсильванский университет, Филадельфия, США

И.Л.Бухбиндер

Томский государственный педагогический университет, Томск

Е.А.Иванов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

С.М.Кузенко

Западно-Австралийский университет, Недландс, Австралия

Дается обзор нового подхода к нахождению эффективного действия в $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметричных полевых теориях. Подход основан на формулировке этих теорий в терминах не подчиненных связям суперполей в гармоническом суперпространстве. Обсуждается построение суперполевых моделей $N = 2$ суперсимметричной теории поля (гипермультиплет, $N = 2$ суперсимметричная теория поля Янга–Миллса). Излагается $N = 2$ метод фонового поля. Рассматривается пертурбативное нахождение голоморфного эффективного потенциала в $N = 2$ моделях и нахождение неголоморфного эффективного потенциала в $N = 4$ теории поля Янга–Миллса, определяющего точное низкоэнергетическое эффективное действие в этой теории. Обсуждаются возможные приложения низкоэнергетического эффективного действия в суперсимметричных теориях и некоторые открытые проблемы. Проводится сравнение данного подхода с другими.

Review of new approach to finding effective action in $N = 2$ and $N = 4$ supersymmetric theory is given. The approach is based on the formulation of these theories in terms of unconstrained superfields in harmonic superspace. Construction of superfield models of $N = 2$ supersymmetric field theory (hypermultiplet, $N = 2$ supersymmetric Yang–Mills theory) is discussed. $N = 2$ background field method is considered. Perturbative holomorphic effective potential in $N = 2$ models and non-holomorphic effective potential in $N = 4$ Yang–Mills field theory, defining exact low-energy effective action in this theory, are studied. Possible applications of low-energy effective action in supersymmetric theories and some open problems are discussed. Comparison of given approach with others is performed.

ВВЕДЕНИЕ

Эффективное действие является одним из центральных объектов квантовой теории поля, определяющим квантовое поведение полевых моделей вне массовой оболочки. Проблема нахождения эффективного действия тесно связана с решением таких фундаментальных задач квантовой теории поля, как определение структуры вакуума, нахождение квантовых поправок к классическим уравнениям движения, исследование фазовых переходов и динамического нарушения симметрии, изучение квантовой динамики в сильных фоновых полях. Понятие эффективного действия является чрезвычайно удобным для рассмотрения многих аспектов квантования и перенормировки калибровочных теорий, включая вопросы аномалий. При этом оказывается, что построение эффективного действия в различных полевых моделях для решения различных задач основывается на использовании ряда общих или аналогичных методов. По этой причине проблема нахождения эффективного действия в настоящее время рассматривается как самостоятельное направление в рамках квантовой теории поля (обсуждение проблем эффективного действия см., например, в книгах [1–6]).

Точное нахождение эффективного действия означает точное решение в соответствующей модели квантовой теории поля и в общем случае невозможно. В связи с этим для изучения эффективного действия используются различные приближенные подходы, из которых мы отметим петлевое разложение и разложение по производным. В последнем случае эффективное действие ищется в виде ряда по пространственно-временным производным своих функциональных аргументов. Такое разложение тесно связано с понятием низкоэнергетического эффективного действия. Этот объект используется для описания физических явлений, в которых основную роль играют частицы и поля с массами, энергиями и импульсами, ограниченными сверху некоторым характерным масштабом. Примером подобной ситуации служит система взаимодействующих полей разных масс, легких и тяжелых полей. Тогда для описания квантовых аспектов легких полей достаточно рассмотреть эффективное действие, зависящее только от этих полей, а роль масштаба играют массы тяжелых полей. Поскольку разложение по производным физически означает учет все более высоких степеней энергии-импульса, то наличие обрезающего масштаба накладывает ограничение сверху на количество членов разложения эффективного действия по производным. При этом в ведущем низкоэнергетическом приближении эффективное действие содержит только первые неисчезающие члены в указанном разложении. Это могут быть члены вообще без производных, а если по каким-либо причинам они отсутствуют, то члены разложения с низшими призводными. Очевидно, что именно низкоэнергетическое эффективное действие позволяет исследовать структуру вакуума полевой модели и динамику ее низколежащих возбуждений.

Изучение феноменологических и формальных аспектов суперсимметричных полевых теорий занимает значительное место в современных работах по теоретической физике высоких энергий. Интерес к суперсимметрии в теории поля обусловлен многими причинами, из которых мы отметим три:

1. Суперсимметрия обеспечивает естественный механизм объединения бозонов и фермионов и, следовательно, должна рассматриваться как составной элемент любой теории, претендующей на роль объединенной теории фундаментальных взаимодействий (формулировка суперсимметричных теорий дана, например, в книгах [7–9]).

2. Суперсимметрия решает ряд проблем стандартной модели большого объединения, таких как, например, проблема иерархий, проблема строгого пересечения трех калибровочных бегущих констант связи в одной точке, проблема времени жизни протона (см. обсуждение феноменологических аспектов суперсимметрии в [10,11]).

3. По современным представлениям объединенной теорией всех фундаментальных взаимодействий, включая гравитационное, является теория суперструн. В этой теории суперсимметрия играет ключевую роль, обеспечивая отсутствие тахионов в спектре струны. Характерная энергетическая шкала теории суперструн задается планковской энергией. При переходе к энергиям, много меньшим планковской, мы получаем эффективную (низкоэнергетическую с точки зрения теории суперструн) суперсимметричную теорию поля (см. вывод суперсимметричной теории поля из теории суперструн в книге [12]).

Конечно, на доступных в настоящее время энергиях суперсимметрия не проявляет себя, что может означать ее нарушение на некотором масштабе. В связи с этим изучение именно низкоэнергетических квантовых аспектов суперсимметричных полевых моделей должно представлять особый интерес с точки зрения нахождения возможных феноменологических следствий существования суперсимметрии. Оказывается, что в $N = 2$ и $N = 4$ расширенных суперсимметричных теориях Янга–Миллса низкоэнергетическое эффективное действие может быть установлено точно.

В теориях, обладающих глобальными или калибровочными симметриями, не нарушенными аномалиями, эффективное действие, в частности низкоэнергетическое эффективное действие, также должно обладать симметриями. При этом возникает проблема развития методов построения эффективного действия, явно обеспечивающих наличие симметрий на всех этапах исследования. Хорошо известно, что адекватная и простая формулировка четырехмерных $N = 1$ суперсимметричных теорий поля достигается в терминах суперполей. Соответствующая квантовая формулировка, обеспечивающая явную $N = 1$ суперсимметрию, построена достаточно давно и широко используется (см., например, [7–9]).

В теориях с $N = 1$ суперсимметрией, таких как модель Весса–Зумино, $N = 1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса, структура эффективного действия изучена достаточно подробно (см., например, книги [7–9]). В частности, в работах [13–15] был найден суперполевой эффективный потенциал и эффективный потенциал вспомогательных полей в модели Весса–Зумино, в [16–18] был найден киральный эффективный потенциал в той же теории, а в [19] был развит метод фонового поля для $N = 1$ теории Янга–Миллса, который в дальнейшем был использован для исследования ренормализационных свойств и нахождения эффективного действия [20–24]. Методы нахождения эффективного действия в $N = 1$ моделях были усовершенствованы в недавних работах [92–96,104].

Однако уже в теориях с $N = 2$ суперсимметрией (и вообще в теориях с расширенной суперсимметрией) возникают существенные проблемы с построением квантовой теории. В компонентных формулировках это выражается в том, что алгебра суперсимметрии является замкнутой с точностью до уравнений движения. В суперполевом подходе требование неприводимости суперполевых представлений алгебры $N = 2$ суперсимметрии приводит к дифференциальным условиям на суперполя (связям). В итоге $N = 2$ суперсимметричные теории поля формулируются в стандартном $N = 2$ суперпространстве в терминах подчиненных связям суперполей (о $N = 2$ суперсимметрии см. книгу [8] и обзор [25]). Проблемы с решением связей через неограниченные суперполя (препотенциалы) приводят к трудностям в построении теории возмущений и исследовании эффективного действия. Для специального мультиплета материи («ослабленного» гипермультиплета Хау–Стелла–Таунсенда [26]) и калибровочного мультиплета соответствующие связи были решены в [26–29]. Однако найденные в этих работах формулировки слишком громоздки для использования в непосредственных вычислениях на квантовом уровне.

Значительными достоинствами обладает подход к суперполевому описанию $N = 2$ суперсимметричных теорий, основанный на идее гармонического суперпространства [30–34]. Связи для гипермультиплетов материи и $N = 2$ калибровочной теории оказывается возможным решить в гармоническом суперпространстве. Это приводит к тому, что $N = 2$ суперсимметричные теории поля могут быть сформулированы в гармоническом суперпространстве в терминах суперполей, не подчиненных связям. Основная идея этого подхода заключается в добавлении к стандартному $N = 2$ суперпространству сферы $SU(2)/U(1)$ и выделении замкнутого относительно преобразований $N = 2$ суперсимметрии аналитического подпространства, параметризуемого меньшим числом антикоммутирующих переменных по сравнению со стандартным $N = 2$ суперпространством. Подход гармонического суперпространства показал, что для описания мультиплетов материи с замкнутой алгеброй $N = 2$ суперсимметрии вне массовой оболочки необходимо включение бесконечного числа вспомогательных полей, а для описания калибровочного мультиплета необходимо включение бесконечного числа чисто калибровочных степеней свободы. Несмотря на то, что гармоническое суперпространство имеет более сложную структуру по сравнению со стандартным $N = 2$ суперпространством, этот подход оказывается удобным для исследования квантовых эффектов в $N = 2$ суперсимметричных теориях [32].

Одним из основных свойств низкоэнергетического эффективного действия в суперсимметричной теории поля является голоморфность (см., например, обзоры [35, 36]). Оно заключается в том, что в суперсимметричных теориях с комплексными суперполями, определенными на некотором подпространстве полного суперпространства, квантовые поправки к эффективному действию часто возникают в виде голоморфных функций от этих суперполей, интегрируемых по соответствующему подпространству. Примером голоморфности в $N = 1$ суперсимметрии является уже упоминавшийся киральный потенциал [16–18]. Гораздо более важную роль играет голоморфность в $N = 2$ суперсимметрии. Опираясь на утверждение, что низкоэнергетическое эффективное действие в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса является голоморфной функцией $N = 2$ напряженности W (его структура была предложена в [37]), Зайберг и Виттен смогли точно найти его с учетом непертурбативных вкладов в случае теории с калибровочной группой $SU(2)$, спонтанно нарушенной до $U(1)$, используя идею дуальности [38] (см. также обзоры [39–43]). Работа [38] стимулировала интерес к изучению эффективного действия в $N = 2$ суперсимметрии. Полученные Зайбергом и Виттеном результаты были обобщены на другие калибровочные группы и на теории с материей [44–59]. Было предпринято детальное исследование утверждения о голоморфности низкоэнергетического эффективного действия и вычисление первых неведущих вкладов на основе $N = 1$ суперполевых формулировок $N = 2$ суперсимметричных теорий [51–54]. Другим примером голоморфности в $N = 2$ суперсимметрии является аналитический эффективный потенциал, интегрируемый по аналитическому подпространству гармонического суперпространства [55]. Важно отметить, что как голоморфные, так и аналитические члены в эффективном действии возникают только в теориях с центральными зарядами.

Исключительное место в квантовой теории поля занимает $N = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса. Это связано с тем, что она является максимально суперсимметричной, ультрафиолетово-конечной, конформно-инвариантной теорией [23, 56–59]. Кроме того, имеются сильные аргументы в пользу того, что она самодуальна относительно непертурбативных $SL(2, Z)$-преобразований [60, 61]. $N = 4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса может быть записана в терминах $N = 2$ суперполей в гармоническом суперпространстве. Для этого необходимо к действию $N = 2$ теории Янга–Миллса прибавить действие гипермультиплета. Полученная теория обладает дополнительной $N = 2$ суперсимметрией и инвариантна относительно преобразований $N = 4$ суперсимметрии [32]. Эффективное действие в такой теории является суперфункционалом как $N = 2$ напряженности W, так и гипермультиплета. В работе [62] Дайном и Зайбергом было показано, что в $N = 4, SU(2)$ калибровочной теории в кулоновской фазе низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N = 2$ векторного мультиплета, имеет вид

$$\Gamma[W, \bar{W}] = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^8\theta \mathcal{H}(W, \bar{W}) \ ,$$
$$\mathcal{H}(W, \bar{W}) = c \ln \frac{W^2}{\Lambda^2} \ln \frac{\bar{W}^2}{\Lambda^2} \ .$$

Здесь Λ — произвольный масштаб, c — произвольная константа. Существуют сильные указания в пользу того, что $\mathcal{H}(W, \bar{W})$ возникает в теории возмущений исключительно как однопетлевой эффект [62, 63], причем непертурбативные поправки вообще отсутствуют [64, 65]. Низкоэнергетическое эффективное действие $\Gamma[W, \bar{W}]$ не зависит от масштаба Λ, то есть инвариантно относительно замены $\Lambda \to \Lambda' = \Lambda\alpha$. Это проявление конформной инвариантности теории. Коэффициент c был найден в работах [66–68], он равен $1/4(4\pi)^2$. Таким образом, низкоэнергетическое эффективное действие в данной теории найдено точно!

В последнее время выяснилось, что проблема низкоэнергетического эффективного действия в $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса тесно связана с современным развитием теории струн. Мы остановимся здесь на двух аспектах.

Теория струн предсказывает существование нового типа протяженных объектов, так называемых D-бран [106] (см. также обзоры [107, 108]), причем низкоэнергетическая динамика p-мерных D-бран описывается $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теорией поля в пространстве размерности $p+1$. Отсюда вытекает, что взаимодействие трехмерных D-бран, называемых D3-бранами, может быть изучено в рамках четырехмерной $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса. Система из n параллельных D3-бран отвечает теории поля с калибровочной группой $[U(1)]^n$ [108]. Поэтому динамика такой системы должна определяться низкоэнергетическим эффективным действием $N = 4$ теории поля Янга–Миллса, в которой калибровочная группа спонтанно нарушена до $[U(1)]^n$. Рассмотрение в рамках теории струн указывает на то, что в статическом пределе взаимодействие D-бран описывается лагранжианом Борна–Инфельда (см., например, [109]) и, как предполагается, этот лагранжиан может быть выведен из низкоэнергетического эффективного действия $N = 4$ теории поля Янга–Миллса. В настоящее время установлено, что неголоморфный эффективный потенциал в $N = 4$ теории поля Янга–Миллса воспроизводит члены четвертого порядка по напряженности абелева векторного поля в разложении лагранжиана Борна–Инфельда в ряд по степеням напряженности (см., например, [102]). Общий вывод лагранжиана Борна–Инфельда из эффективного действия $N = 4$ теории поля Янга–Миллса является открытой проблемой.

Исследование D3-бран в теории струн привело к представлению об определенной эквивалентности четырехмерной $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(n)$ и теории суперструн типа IIB (см. классификацию суперструн, например, в [12]), компактифицированной на многообразие $AdS_5 \times S^5$, где S^5 — пятимерная сфера, AdS_5 — пятимерное пространство «анти де Ситтера» [110] (см. также обзоры [111–114]). Эта эквивалентность позволяет использоать методы $N = 4$ суперсимметричной теории поля для изучения вопросов теории струн, а также использовать методы теории струн для изучения эффективного действия в теории поля. В обоих случаях проблема нахождения эффективного действия в $N = 4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса играет важную роль.

В предлагаемом обзоре излагается общий подход к вычислению низкоэнергетического эффективного действия в $N = 2, SU(2)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в кулоновской фазе, в теории массивного гипермультиплета во внешнем абелевом калибровочном суперполе, а также в $N = 4, SU(n)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой, нарушенной до максимального тора, на основе метода гармонического суперпространства. Тем самым мы охватываем все основные задачи, поставленные и изучаемые в современной литературе по $N = 2$ суперсимметричной квантовой теории поля. Под низкоэнергетическим эффективным действием понимается вклад в эффективное действие, локальный по пространственно-временным переменным и содержащий наименьшее возможное число производных в компонентах. В указанных выше теориях с $N = 2$ суперсимметрией, как показано в работе, низкоэнергетическое эффективное действие определяется голоморфной функцией. Формализм гармонического суперпространства гарантирует наличие явной $N = 2$ суперсимметрии на каждом этапе вычислений. В случае теории с $N = 4$ суперсимметрией низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N = 2$ векторного мультиплета, является вещественной функцией.

Авторы обзора ставили своей целью продемонстрировать эффективность метода гармонического суперпространства в $N = 2$ суперсимметричной квантовой теории поля. Мы разрабатываем технику работы с $N = 2$ гармоническими суперграфами и показываем, что в $N = 2$ полевых моделях она обладает теми же преимуществами и достоинствами перед другими методами, что и техника $N = 1$ суперграфов в $N = 1$ полевых моделях. При этом мы сознательно уделяем достаточно большое внимание изложению многих деталей вычислений, во-первых, потому, что в них используются новые нетривиальные приемы и, во-вторых, чтобы показать, как реально применяется метод гармонического суперпространства в $N=2$ квантовой теории поля, и привлечь внимание к богатым потенциальным возможностям этого метода.

В первом разделе дан подробный обзор формулировок $N=2$ суперсимметричных теорий поля в гармоническом суперпространстве. Хорошо известно, что основными мультиплетами, обеспечивающими неприводимое представление $N=2$ суперсимметрии вне массовой поверхности, являются гипермультиплет, объединяющий скалярные и спинорные поля, и $N=2$ векторный мультиплет, содержащий векторное поле и соответствующие суперпартнеры (см., например, [7, 8, 11]). Гипермультиплет аналогичен скалярному киральному мультиплету в $N=1$ суперсимметрии и используется для описания $N=2$ материи, а $N=2$ векторный мультиплет применяется для формулировки $N=2$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса. Все перенормируемые $N=2$ модели строятся только из двух этих мультиплетов. Построение $N=4$ суперсимметричной теории поля Янга–Миллса в терминах $N=2$ суперполей требует использования как $N=2$ векторного мультиплета, так и $N=2$ гипермультиплета в присоединенном представлении. В последующих разделах данной работы рассматриваются квантовые аспекты моделей, содержащих все указанные мультиплеты.

Второй раздел посвящен методу фонового поля для $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса и нахождению общей структуры эффективного действия. Основное достоинство метода фонового поля заключается в том, что он позволяет сохранять явно как $N=2$ суперсимметрию, так и калибровочную инвариантность на каждом этапе вычислений.

Третий раздел посвящен непосредственному вычислению голоморфного эффективного действия массивного абелева гипермультиплета и $N=2, SU(2)$ калибровочной теории в кулоновской фазе. Рассматриваемая здесь модель является простейшей $N=2$ теорией, иллюстрирующей основные свойства более общих теорий. Показано, что причина появления в них голоморфных вкладов заключается в наличии в этих теориях центрального заряда.

Четвертый раздел посвящен вычислению низкоэнергетического эффективного действия в $N=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(n)$, спонтанно нарушенной до максимальной коммутативной подгруппы $[U(1)]^{n-1}$. Показано, что низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N=2$ калибровочного мультиплета, является вещественной функцией. Ответ легко обобщается на случай произвольной полупростой калибровочной группы.

Представленный материал основан на работах [63, 68–79].

1. $N=2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ГАРМОНИЧЕСКОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Гармоническое суперпространство. Гармоническое суперпространство [30,31] получается добавлением к стандартному $N=2$ суперпространству с координатами $(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha i})$ сферы $S^2 \sim SU(2)/U(1)$. Группа $SU(2) \sim S^3$ параметризуется изоспинорными гармониками $u_i^\pm$:

$$u^{+i}u_i^- \equiv (u^+u^-) = 1\ ,\ \leftrightarrow u_i^+u_j^- - u_j^+u_j^- = \epsilon_{ij}\ ,$$
$$u_i^- = \overline{u^{+i}}\ ,\ u_i^\pm = \epsilon_{ij}u^{\pm j}\ ,\ \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}\ ,\ \epsilon_{12} = 1; i,j = 1,2\ . \quad (1.1.1)$$

Функции на сфере S^2 можно описывать как функции на сфере S^3 с фиксированным $U(1)$-зарядом [80], поэтому гармоническое суперпространство можно параметризовать координатами $(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha i}, u_i^\pm)$, при условии, что суперполя на нем переносят фиксированный $U(1)$-заряд. Например, суперполе $\Phi^{(q)}$ с зарядом q имеет следующее гармоническое разложение

$$\Phi^{(q)}(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha i}, u_i^\pm) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(i_1\ldots i_{n+q}j_1\ldots j_n)}(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar\theta^{\dot\alpha i})u_{i_1}^+\ldots u_{i_{n+q}}^+u_{j_1}^-\ldots u_{j_n}^-\ . \quad (1.1.2)$$

Коэффициенты в (1.1.2) представляют собой обычные u-независящие суперполя, реализующие неприводимые представления группы $SU(2)$.

Обычное комплексное сопряжение переводит функции с зарядом q в функции с зарядом $-q$, поэтому на множестве заряженных (супер)полей нельзя определить вещественные (супер)поля в обычном смысле. Однако можно ввести вещественные суперполя относительно обобщенного сопряжения $\sim$, которое определяется следующим образом:

$$\widetilde{u^{\pm i}} = -u_i^\pm\ , \widetilde{u_i^\pm} = u^{\pm i}\ . \quad (1.1.3)$$

Интеграл по S^2 определяется следующим образом:

$$\int \mathrm{d}u\ 1 = 1\ , \quad \int \mathrm{d}u\ u_{(i_1}^+\ldots u_{i_n}^+u_{j_1}^-\ldots u_{j_m)}^- = 0,\ n+m > 0\ , \quad (1.1.4)$$

при этом, в силу сохранения $U(1)$ заряда на S^2, интеграл от любой заряженной (супер)функции равен нулю.

Далее, на S^3 можно определить $SU(2)$-ковариантные производные, согласованные с условиями (1.1.1):

$$D^{++} = u^{+i}\frac{\partial}{\partial u^{-i}}\ ,\ D^{--} = u^{-i}\frac{\partial}{\partial u^{+i}}\ ,\ D^0 = u^{+i}\frac{\partial}{\partial u^{+i}} - u^{-i}\frac{\partial}{\partial u^{-i}}\ . \quad (1.1.5)$$

Эти производные сами образуют алгебру Ли группы $SU(2)$:

$$[D^{++}, D^{--}] = D^0\ ,\ [D^0, D^{++}] = 2D^{++}\ ,\ [D^0, D^{--}] = 2D^{--}\ . \quad (1.1.6)$$

Они имеют простую интерпретацию как генераторы правых $SU(2)$ вращений по отношению к зарядовым индексам $(+,-)$:

$$D^{\pm\pm}u^{\pm i}=0,\ D^{\pm\pm}u^{\mp i}=u^{\pm i},\ D^{0}u^{\pm i}=\pm u^{\pm i}\,. \tag{1.1.7}$$

Наряду со стандартным (или центральным) базисом $(x^\mu,\ \theta_i^\alpha,\ \bar\theta^{\dot\alpha i},\ u_i^\pm)$ в гармоническом суперпространстве можно ввести аналитический базис $(x_A^\mu,$ $\theta_\alpha^\pm,\ \bar\theta_{\dot\alpha}^\pm,\ u_i^\pm)$:

$$x_A^\mu=x^\mu-2i\theta^{(i}\sigma^\mu\bar\theta^{j)}u_i^+u_j^-\ ,\quad \theta_\alpha^\pm=\theta_\alpha^i u_i^\pm\ ,\ \bar\theta_{\dot\alpha}^\pm=\bar\theta_{\dot\alpha}^i u_i^\pm\ . \tag{1.1.8}$$

Преобразования $N=2$ суперсимметрии в аналитическом базисе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&\delta x_A^\mu=-2i(\epsilon^i\sigma^\mu\bar\theta^+ +\theta^+\sigma^\mu\bar\epsilon^i)u_i^-\ ,\quad \delta\theta_\alpha^+=\epsilon_\alpha^i u_i^+\ ,\ \delta\bar\theta_{\dot\alpha}^+=\bar\epsilon_{\dot\alpha}^i u_i^+\ ,\\ &\delta\theta_\alpha^-=\epsilon_\alpha^i u_i^-\ ,\delta\bar\theta_{\dot\alpha}^-=\bar\epsilon_{\dot\alpha}^i u_i^-\ ,\quad \delta u_i^\pm=0\ .\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Здесь ϵ_α^i — антикоммутирующий параметр.

Важнейшее свойство состоит в том, что координаты $\zeta_A^M=(x_A^\mu,\theta_\alpha^+,$ $\bar\theta_{\dot\alpha}^+)$, $u_i^\pm$ образуют подпространство, замкнутое относительно преобразований $N=2$ суперсимметрии. Оно называется аналитическим суперпространством и играет фундаментальную роль в $N=2$ суперсимметрии, подобную роли кирального суперпространства в $N=1$ суперсимметрии.

На аналитическом подпространстве можно определить аналитические суперполя. Они не зависят от θ_α^- и $\bar\theta_{\dot\alpha}^-$, т.е. удовлетворяют условию

$$D_\alpha^+\Phi^{(q)}(\zeta_A^M,u_i^\pm)=\bar D_{\dot\alpha}^+\Phi^{(q)}(\zeta_A^M,u_i^\pm)=0. \tag{1.1.10}$$

Здесь

$$D_\alpha^+=D_\alpha^i u_i^+=\frac{\partial}{\partial\theta^{-\alpha}}\ ,\quad \bar D_{\dot\alpha}^+=\bar D_{\dot\alpha}^i u_i^+=\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{-\dot\alpha}}\ , \tag{1.1.11}$$

и D_α^i, $\bar D_{\dot\alpha}^i$ — спинорные ковариантные производные в стандартном суперпространстве. Их явный вид приведен в приложении. Там же дана алгебра спинорных и гармонических ковариантных производных.

Условия аналитичности (1.1.10) порождают связи на компоненты суперполя $\Phi^{(q)}$, заданного гармоническим разложением (1.1.2). Рассмотрим условие аналитичности

$$D_\alpha^+\Phi^{(q)}(\zeta_A^M,u_i^\pm)=0.$$

Представляя D_α^+ в виде $D_\alpha^i u_i^+$ и используя определение гармоник (1.1.1), можно показать, что это условие эквивалентно следующему бесконечному набору условий на обычные $N=2$ суперполя в разложении (1.1.2):

$$D_\alpha^{(i}\Phi^{i_1\ldots i_{2n+q})}=\frac{n+1}{2n+q+3}D_{\alpha l}\Phi^{(ii_1\ldots i_{2n+q}l)}\ . \tag{1.1.12}$$

Для $\bar D_{\dot\alpha}^+$ имеет место аналогичное соотношение.

Формула (1.1.12) показывает, как аналитическое суперполе, записанное в центральном базисе, превращается в бесконечную пирамиду обычных суперполей, подчиненных связям.

В заключение этого раздела мы введем гармонические δ-функции и распределения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Гармоническая δ-функция (δ-функция на S^2) определяется условием

$$\int \mathrm{d}u_2 \delta^{(q,-q)}(u_1,u_2)\Phi^{(p)}(u_2) = \Phi^{(q)}(u_1)\delta^{pq} \tag{1.1.13}$$

и удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} &\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2) = \delta^{(-q,q)}(u_2,u_1), \\ &(u_1^+u_2^+)\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2) = (u_1^-u_2^-)\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2) = 0, \\ &\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2) = (u_1^+u_2^-)\delta^{(q-1,-q+1)}(u_1,u_2), \\ &\Phi^{(p)}(u_2)\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2) = \Phi^{(p)}(u_1)\delta^{(q-p,p-q)}(u_1,u_2). \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

Гармонические распределения $\dfrac{1}{(u_1^+u_2^+)^n}$, $n>0$, задаются соотношениями:

$$(u_1^+u_2^+)^k\frac{1}{(u_1^+u_2^+)^n} = \frac{1}{(u_1^+u_2^+)^{n-k}}\ , \tag{1.1.15}$$

$$\frac{1}{(u_1^+u_2^+)^n} = (-1)^n\frac{1}{(u_2^+u_1^+)^n}\ , \tag{1.1.16}$$

$$D_1^{--}\frac{1}{(u_1^+u_2^+)^n} = -n\frac{(u_1^-u_2^+)}{(u_1^+u_2^+)^{n+1}}\ , \tag{1.1.17}$$

$$D_1^{++}\frac{1}{(u_1^+u_2^+)^n} = \frac{1}{(n-1)!}(D_1^{--})^{n-1}\delta^{(n,-n)}(u_1,u_2)\ , \tag{1.1.18}$$

$$D_1^{0}\frac{1}{(u_1^+u_2^+)^n} = -n\frac{1}{(u_1^+u_2^+)^n}\ . \tag{1.1.19}$$

Наконец, введем δ-функцию в аналитическом суперпространстве — аналитическую δ-функцию:

$$\int \mathrm{d}\zeta_2^{(-4)}\mathrm{d}u_2\delta_A^{(q,4-q)}(\zeta_1,u_1|\zeta_2,u_2)\Phi^{(p)}(\zeta_2,u_2) = \delta^{qp}\Phi^{(p)}(\zeta_1,u_1)\ . \tag{1.1.20}$$

Выразим ее через δ-функцию полного гармонического суперпространства, определенную следующим образом:

$$\int \mathrm{d}^{12}z_2\mathrm{d}u_2\delta^{12}(z_1-z_2)\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2)\Phi^{(p)}(z_2,u_2) = \delta^{qp}\Phi^{(p)}(z_1,u_1)\ , \tag{1.1.21}$$

где $\delta^{12}(z_1 - z_2) = \delta^4(x_1 - x_2)\delta^8(\theta_1 - \theta_2)$. Рассматривая аналитическое суперполе как функцию координат полного (z^M, u) суперпространства, т.е. $\Phi^{(p)} = \Phi^{(p)}(\zeta^M(z,u), u)$, можно написать

$$\int \mathrm{d}^{12}z_2\mathrm{d}u_2\delta^{12}(z_1 - z_2)\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2)\Phi^{(p)}(\zeta(z_2,u_2),u_2) = \\ = \delta^{qp}\,\Phi^{(p)}(\zeta(z_1,u_1),u_1)\,. \qquad (1.1.22)$$

После выделения из $\mathrm{d}^{12}z$ аналитической меры

$$\mathrm{d}^{12}z = \mathrm{d}\zeta^{(-4)}\frac{1}{16}(D^{+\alpha}D^+_\alpha)(\bar D^+_{\dot\alpha}\bar D^{+\dot\alpha}) \equiv \mathrm{d}\zeta^{(-4)}(D^+)^4 \qquad (1.1.23)$$

соотношение (1.1.22) перепишется в виде

$$\int \mathrm{d}\zeta_2^{(-4)}\mathrm{d}u_2[(D_2^+)^4\delta^{12}(z_1 - z_2)]\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2)\Phi^{(p)}(\zeta_2,u_2) = \\ = \delta^{qp}\Phi^{(p)}(\zeta_1,u_1)\,. \qquad (1.1.24)$$

Здесь использована аналитичность $\Phi^{(p)}$ (1.1.10). Сравнивая (1.1.24) и (1.1.20), обнаруживаем, что

$$\begin{aligned}\delta_A^{(q,4-q)}(\zeta_1,u_1|\zeta_2,u_2) &= (D_2^+)^4\delta^{12}(z_1 - z_2)\delta^{(q,-q)}(u_1,u_2) = \\ &= (D_1^+)^4\delta^{12}(z_1 - z_2)\delta^{(q-4,4-q)}(u_1,u_2). \qquad (1.1.25)\end{aligned}$$

Выражение (1.1.25) аналитично по обоим аргументам.

1.2. Безмассовые гипермультиплеты. Гипермультиплет в его комплексной форме [81] описывается в гармоническом суперпространстве комплексным аналитическим суперполем $q^+(\zeta,u)$ без каких-либо дополнительных связей сверх условий аналитичности

$$D^+_\alpha q^+ = \bar D^+_{\dot\alpha} q^+ = 0. \qquad (1.2.1)$$

Соответствующее свободное действие и уравнение движения имеют вид

$$S = -\int \mathrm{d}\zeta^{-4}\mathrm{d}u\widetilde{q}^+D^{++}q^+, \qquad (1.2.2)$$

$$D^{++}q^+ = 0. \qquad (1.2.3)$$

Перепишем суперполе q^+ в центральном базисе:

$$q^+[\zeta(z,u),u] = q^i(z)u_i^+ + q^{(ijk)}(z)u_i^+u_j^+u_k^- + \ldots \qquad (1.2.4)$$

Как следует из формулы (1.1.12), суперполя $q^i(z), q^{(ijk)}(z)$ и т.д. не являются произвольными, они подчинены следующим условиям:

$$D^{(i}_{\alpha} q^{j)} = \frac{1}{4} D_{\alpha k} q^{(ijk)}, \quad \bar{D}^{(i}_{\dot{\alpha}} q^{j)} = \frac{1}{4} \bar{D}_{\dot{\alpha} k} q^{(ijk)} \ldots \tag{1.2.5}$$

Нетрудно видеть, что из (1.2.3) следует

$$q^{(ijk)}(z) = q^{(ijkl)}(z) = \cdots = 0.$$

Иными словами, на уравнениях движения

$$q^+[\zeta(z,u),u] = q^i(z) u^+_i. \tag{1.2.6}$$

С учетом (1.2.6) связи (1.2.5) принимают вид

$$D^{(i}_{\alpha} q^{j)} = \bar{D}^{(i}_{\dot{\alpha}} q^{j)} = 0. \tag{1.2.7}$$

В итоге получаем формулировку гипермультиплета Файе–Сониуса в обычном суперпространстве [81], приводящую к свободным уравнениям движения для компонентных полей.

Важно подчеркнуть, что в гармоническом суперпространстве стандартные гипермультиплетные суперполевые связи (1.2.7) эквивалентны одновременному наложению двух типов связей: условий грассмановой аналитичности (1.2.1) и условия «гармонической аналитичности» (1.2.3). Первый тип связей можно явно решить переходом в аналитический базис, где они просто означают независимость суперполя q^+ от половины нечетных координат, т.е. $\theta^-_\alpha, \bar{\theta}^-_{\dot{\alpha}}$, не приводя к уравнениям движения для компонентных полей. Иными словами, они являются чисто кинематическими. Уравнения движения содержатся в связи (1.2.3), которая теперь получается варьированием действия (1.2.2). Таким образом, гармоническое суперпространство дает уникальную возможность описать гипермультиплет вне массовой оболочки, возможность, которая отсутствует в стандартном описании (не существует суперполевого действия, из которого связи (1.2.7) следовали бы как уравнения движения). Это позволяет, в частности, построить самодействие гипермультиплета и его взаимодействия с другими $N = 2$ мультиплетами вне массовой оболочки посредством добавления подходящих лагранжианов взаимодействия (с гармоническим $U(1)$ зарядом $+4$) к свободному суперполевому лагранжиану в (1.2.2). Платой за такое «расщепление» стандартных связей является присутствие бесконечного числа вспомогательных полей в аналитическом q^+, возникающих из его разложения по гармоникам. На массовой поверхности, т.е. при наложении уравнения (1.2.3) (или его обобщений на случай с взаимодействием), эти поля обращаются в нуль (или выражаются через физические поля). Однако они присутствуют в действии, обеспечивая его суперсимметрию вне массовой поверхности. В дальнейшем мы будем использовать суперполевой язык, автоматически принимающий во внимание эти бесконечные наборы вспомогательных полей.

Имея лагранжево описание q^+ гипермультиплета, легко построить для него функцию Грина, пропагатор

$$G_0^{(1,1)}(\zeta_1, u_1|\zeta_2, u_2) = \langle \widetilde{q}^+(\zeta_1, u_1) q^+(\zeta_2, u_2)\rangle,$$

который подчиняется уравнению, отвечающему вставке подходящей δ-функции в правую часть свободного уравнения (1.2.3):

$$D_1^{++} G_0^{(1,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2). \qquad (1.2.8)$$

Здесь $(1|2) \equiv (\zeta_1, u_1|\zeta_2, u_2)$ и аналитическая δ-функция $\delta_A^{(3,1)}(1|2)$ определена соотношением (1.2.15). Подействуем оператором $(D_1^{--})^2$ на обе части равенства (1.2.8) и воспользуемся тем фактом, что D^{++} и $(D^{--})^2$ коммутируют при действии на (супер)поля заряда $+1$ (см. алгебру гармонических ковариантных производных (1.1.6)). Получим

$$D_1^{++}(D_1^{--})^2 G_0^{(1,1)}(1|2) = (D_1^{--})^2 \delta_A^{(3,1)}(1|2). \qquad (1.2.9)$$

Воспользовавшись выражением для аналитической δ-функции (1.1.25), а также (1.1.18), (1.2.9) можно переписать в виде

$$D_1^{++}\left[(D_1^{--})^2 G_0^{(1,1)}(1|2) - 2(D_2^{+})^4 \frac{\delta^{12}(z_1 - z_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3}\right] = 0. \qquad (1.2.10)$$

Уравнение

$$D^{++}\Phi^{(q)} = 0 \qquad (1.2.11)$$

имеет в случае заряда $q < 0$ только тривиальное решение [30]

$$\Phi^{(q)} = 0. \qquad (1.2.12)$$

С учетом вышесказанного из (1.2.10) следует, что

$$(D_1^{--})^2 G_0^{(1,1)}(1|2) = 2(D_2^{+})^4 \left[\frac{\delta^{12}(z_1 - z_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3}\right]. \qquad (1.2.13)$$

Подействуем теперь на обе части (1.2.13) оператором $(D_1^{+})^4$ и воспользуемся тем фактом, что

$$(D_1^{+})^4 (D^{--})^2 \Phi(\zeta, u) = -2\Box\Phi(\zeta, u) \qquad (1.2.14)$$

для любого аналитического суперполя $\Phi(\zeta, u)$. В результате получаем следующее выражение для пропагатора:

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = -\frac{1}{\Box_1}(D_1^+)^4(D_2^+)^4\left[\frac{\delta^{12}(z_1 - z_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3}\right]. \tag{1.2.15}$$

Заметим, что получившаяся функция Грина антисимметрична относительно одновременной перестановки аргументов и внешних $U(1)$ зарядов

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = -G_0^{(1,1)}(2|1). \tag{1.2.16}$$

Перейдем к описанию вещественной формы гипермультиплета, введенной в работе Хау–Стелла–Таунсенда [26]. В гармоническом суперпространстве эта разновидность гипермультиплета описывается неограниченным вещественным (в смысле операции $\sim$) аналитическим суперполем ω со следующим действием и уравнением движения:

$$S = -\int \mathrm{d}\zeta^{(-4)}\mathrm{d}u D^{++}\omega D^{++}\omega, \tag{1.2.17}$$

$$(D^{++})^2\omega = 0. \tag{1.2.18}$$

Как и в предыдущем случае, перепишем ω в стандартном базисе:

$$\omega[\zeta(z,u), u] = \omega(z) + \omega^{(ij)}(z)u_i^+ u_j^- + \omega^{(ijkl)}(z)u_i^+ u_j^+ u_k^- u_l^- + \ldots \tag{1.2.19}$$

Суперполя $\omega(z), \omega^{(ij)}(z)$ и т.д. подчинены связям в соответствии с формулой (1.1.12). Уравнение движения (1.2.18) зануляет все суперполя в (1.2.19), начиная с $\omega^{(ijkl)}(z)$. Оставшиеся суперполя удовлетворяют связям

$$D_\alpha^i\omega = \frac{1}{3}D_{\alpha k}\omega^{(ik)},\ D_\alpha^{(i}\omega^{jk)} = 0,\ \bar{D}_{\dot\alpha}^i\omega = \frac{1}{3}\bar{D}_{\dot\alpha k}\omega^{(ik)},\ \bar{D}_{\dot\alpha}^{(i}\omega^{jk)} = 0. \tag{1.2.20}$$

Связи (1.2.20) полностью определяют гипермультиплет Хау–Стелла–Таунсенда на массовой поверхности и совпадают со связями из [26].

Пропагатор теории

$$G_0^{(0,0)}(1|2) = \langle\omega(1)\omega(2)\rangle$$

подчиняется неоднородному уравнению

$$(D_1^{++})^2 G_0^{(0,0)}(1|2) = \delta_A^{(4,0)}(1|2). \tag{1.2.21}$$

Оно может быть решено тем же способом, что и (1.2.8):

$$G_0^{(0,0)}(1|2) = -\frac{1}{\Box_1}(D_1^+)^4(D_2^+)^4\left[\frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3}\delta^{12}(z_1 - z_2)\right]. \tag{1.2.22}$$

Заметим, что $G_0^{(0,0)}(1|2) = G_0^{(0,0)}(2|1)$.

1.3. N=2 суперсимметричная теория Янга–Миллса. В этом разделе мы введем $N=2$ калибровочный потенциал как компенсирующее суперполе, а также покажем, что подход гармонического суперпространства позволяет решить связи для $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

В действии (1.2.2)

$$S=-\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\widetilde{q}^+D^{++}q^+$$

q^+ — гипермультиплет можно поместить в некоторое комплексное представление группы внутренней симметрии: действие очевидным образом инвариантно относительно глобальных преобразований

$$q^{+\prime}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}q^+, \tag{1.3.1}$$

где вещественный константный параметр λ принимает значения в алгебре группы. Требование локализации преобразований (1.3.1) в аналитическом подпространстве (чтобы сохранить аналитичность q^+), т.е. замена $\lambda\to\to\lambda(\zeta,u)=\widetilde{\lambda}(\zeta,u)$, влечет необходимость введения калибровочного суперполя V^{++} с законом преобразования

$$V^{++\prime}=-i\mathrm{e}^{i\lambda}D^{++}\mathrm{e}^{-i\lambda}+\mathrm{e}^{i\lambda}V^{++}\mathrm{e}^{-i\lambda} \tag{1.3.2}$$

и ковариантной производной

$$\mathcal{D}^{++}=D^{++}+iV^{++}(x_A,\theta^+,u). \tag{1.3.3}$$

При этом V^{++} является вещественным суперполем

$$\widetilde{V}^{++}=V^{++}$$

и аналитическим. В результате мы приходим к калибровочно-инвариантному действию

$$S=-\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\widetilde{q}^+(D^{++}+iV^{++})q^+. \tag{1.3.4}$$

Калибровочный закон (1.3.2) позволяет перейти в калибровку Весса–Зумино, в которой V^{++} содержит конечное число полей:

$$\begin{aligned}V^{++}=&-(\theta^+)^2\bar{\phi}(x_A)-(\bar{\theta}^+)^2\phi(x_A)+i\theta^+\sigma^\mu\bar{\theta}^+A_\mu(x_A)+\\&+(\bar{\theta}^+)^2\theta^{+\alpha}\psi^i_\alpha(x_A)u^-_i+(\theta^+)^2\bar{\theta}^+_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}i}(x_A)u^-_i+\\&+(\theta^+)^2(\bar{\theta}^+)^2F^{(ij)}(x_A)u^-_iu^-_j.\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Здесь $\phi(x_A)$ — комплексный скаляр, $A_\mu(x_A)$ — калибровочное поле, $\psi^i_\alpha(x_A)$ и $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}i}(x_A)$ образуют дублет майорановских спиноров, $F^{(ij)}(x_A)$ — триплет вспомогательных полей. Все поля находятся в присоединенном представлении калибровочной группы. Этот набор полей в точности соответствует стандартному $N=2$ калибровочному мультиплету вне массовой поверхности (см., например, книгу [8]).

Покажем теперь, что V^{++} естественным образом возникает как решение связей в геометрической формулировке $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Эти связи имеют вид [82] (см. также [8]):

$$\{\mathcal{D}_{\alpha i}, \mathcal{D}_{\beta j}\} = 2i\epsilon_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}, \tag{1.3.6}$$

$$\{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}{}^{i}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}{}^{j}\} = 2i\epsilon^{ij}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}W, \tag{1.3.7}$$

$$\{\mathcal{D}_{\alpha i}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}{}^{j}\} = -2i\delta_i{}^j\mathcal{D}_{\alpha\dot\beta}. \tag{1.3.8}$$

Умножая (1.3.6)–(1.3.8) на $u_i^+u_j^+$, находим

$$\{\mathcal{D}^+_\alpha, \mathcal{D}^+_\beta\} = \{\bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\alpha}, \bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\beta}\} = \{\mathcal{D}^+_\alpha, \bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\beta}\} = 0. \tag{1.3.9}$$

Антикоммутационные соотношения (1.3.9) можно рассматривать как условия интегрируемости для существования ковариантно-аналитических суперполей

$$\mathcal{D}^+_\alpha\Phi(z,u) = \bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\alpha}\Phi(z,u) = 0. \tag{1.3.10}$$

Решения условий (1.3.9) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+_\alpha &= \mathrm{e}^{-iv}D^+_\alpha\mathrm{e}^{iv} = D^+_\alpha + \mathrm{e}^{-iv}(D^+_\alpha\mathrm{e}^{iv}),\\ \bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\alpha} &= \mathrm{e}^{-iv}\bar{D}^+_{\dot\alpha}\mathrm{e}^{iv} = \bar{D}^+_{\dot\alpha} + \mathrm{e}^{-iv}(\bar{D}^+_{\dot\alpha}\mathrm{e}^{iv}). \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Суперполе $v=v(z,u)$ называется мостом. Без потери общности его можно считать вещественным:

$$\widetilde{v}(z,u) = v(z,u). \tag{1.3.12}$$

$\mathcal{D}^+_\alpha$ и $\bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\alpha}$ являются ковариантными производными относительно преобразований с параметром, не зависящим от u. Это означает, что мост претерпевает калибровочные преобразования вида

$$\mathrm{e}^{iv'} = \mathrm{e}^{i\lambda}\mathrm{e}^{iv}\mathrm{e}^{-i\tau}. \tag{1.3.13}$$

Здесь $\lambda = \lambda(x_A, \theta^+, u)$ — аналитический параметр, вещественный в смысле сопряжения $\sim$, $\tau=\tau(z)$ — вещественный u-независящий параметр. С помощью моста мы можем определить новый базис в пространстве представления Φ, такой, что аналитичность становится в нем явной (λ-базис):

$$\Phi \quad \Rightarrow \quad \Psi(z,u) = \mathrm{e}^{iv}\Phi(z,u).$$

Суперполе $\Psi(z,u)$ является аналитическим в обычном смысле:

$$D^+_\alpha \Psi(z,u) = \bar{D}^+_{\dot\alpha} \Psi(z,u) = 0.$$

Другими словами, в λ-базисе ковариантные производные $\mathcal{D}^+_{\alpha,\dot\alpha}$ превращаются в обычные

$$(\mathcal{D}^+_\alpha)_\lambda = D^+_\alpha \ , \ (\bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\alpha})_\lambda = \bar{D}^+_{\dot\alpha}. \tag{1.3.14}$$

Далее, ковариантные производные $\mathcal{D}^+_{\alpha,\dot\alpha}$ имеют вид

$$\mathcal{D}^+_{\alpha,\dot\alpha} = u^+_i \mathcal{D}^i_{\alpha,\dot\alpha}.$$

Этот факт может быть сформулирован как дополнительная связь

$$[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^+_{\alpha,\dot\alpha}] = 0. \tag{1.3.15}$$

Рассмотрим (1.3.15) в τ-базисе, т.е. исходном базисе, в котором суперполя преобразуются с u-независящим параметром. В этом базисе, очевидно, $(\mathcal{D}^{++})_\tau = D^{++}$ и (1.3.15) принимает вид

$$[D^{++}, \mathcal{D}^+_{\alpha,\dot\alpha}] = 0. \tag{1.3.16}$$

Из (1.3.16) немедленно следует, что

$$D^{++}(\mathrm{e}^{-iv} D^+_{\alpha,\dot\alpha} \mathrm{e}^{iv}) = -\mathrm{e}^{-iv}[D^+_{\alpha,\dot\alpha}(\mathrm{e}^{iv} D^{++}(\mathrm{e}^{-iv}))]\mathrm{e}^{iv} = 0. \tag{1.3.17}$$

Введем суперполе

$$V^{++} = -i\mathrm{e}^{iv} D^{++} \mathrm{e}^{-iv} = \widetilde{V}^{++}, \tag{1.3.18}$$

являющееся в силу (1.3.17) аналитическим:

$$D^+_\alpha V^{++} = \bar{D}^+_{\dot\alpha} V^{++} = 0. \tag{1.3.19}$$

Чтобы показать, что так определенное V^{++} совпадает с введенным ранее, рассмотрим $\mathcal{D}^{++}$ в λ-базисе:

$$(\mathcal{D}^{++})_\lambda = \mathrm{e}^{iv} D^{++} \mathrm{e}^{-iv} = D^{++} + \mathrm{e}^{iv}(D^{++}\mathrm{e}^{-iv}) = D^{++} + iV^{++}. \tag{1.3.20}$$

Видно, что V^{++} является связностью в ковариантной производной $\mathcal{D}^{++}$, как и компенсирующее суперполе в действии (1.3.4). Преобразования моста (1.3.13) порождают для V^{++} как раз калибровочное преобразование с аналитическим параметром (1.3.2).

Покажем, как в этом подходе строится ковариантная суперполевая напряженность. Ее удобно выразить через новое неаналитическое суперполе

V^{--}, связность для несохраняющей аналитичность гармонической производной D^{--} [83]. Рассмотрим D^{--} в λ-базисе

$$\mathcal{D}^{--} = D^{--} + iV^{--}, \quad V^{--} = -i\mathrm{e}^{iv} D^{--} \mathrm{e}^{-iv} = \widetilde{V}^{--} \qquad (1.3.21)$$

и потребуем, чтобы для ковариантизованных гармонических производных выполнялось первое из «плоских» соотношений (1.1.6)

$$[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}] = D^0. \qquad (1.3.22)$$

Производная D^0 не ковариантизуется, так как мы рассматриваем только суперполя с фиксированным $U(1)$-зарядом. Связь (1.3.22) можно переписать в виде уравнения на V^{--}:

$$D^{++}V^{--} - D^{--}V^{++} + i[V^{++}, V^{--}] = 0. \qquad (1.3.23)$$

Решение этого уравнения дается следующим рядом:

$$V^{--}(x,\theta,u) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n \frac{(-i)^{n+1} V^{++}(x,\theta,u_1) \ldots V^{++}(x,\theta,u_n)}{(u^+u_1^+)(u_1^+u_2^+) \ldots (u_n^+u^+)}. \qquad (1.3.24)$$

Действительно, для $n > 0$ производная D^{++}, действуя на n-й член в (1.3.24), дает

$$D^{++}V^{--}_{(n)} = D^{++} \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n \frac{(-i)^{n+1} V^{++}(x,\theta,u_1) \ldots V^{++}(x,\theta,u_n)}{(u^+u_1^+)(u_1^+u_2^+) \ldots (u_n^+u^+)} =$$
$$= \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n (-i)^{n+1} V^{++}(x,\theta,u_1) \ldots V^{++}(x,\theta,u_n) \times$$
$$\times \left[\delta(u,u_1) \frac{1}{(u_1^+u_2^+) \ldots (u_n^+u^+)} - \delta(u,u_n) \frac{1}{(u^+u_1^+) \ldots (u_{n-1}^+u_n^+)} \right] =$$
$$= iV^{--}_{(n-1)} V^{++} - iV^{++} V^{--}_{(n-1)} = -i[V^{++}, V^{--}_{n-1}], \quad n \geq 2. \qquad (1.3.25)$$

При $n = 1$ имеем

$$D^{++}V^{--}_{(1)} = D^{++} \int \mathrm{d}u_1 \frac{V^{++}(u_1)}{(u^+u_1^+)^2} = D^{--}V^{++}. \qquad (1.3.26)$$

Объединяя (1.3.25) и (1.3.26), получаем (1.3.23).

Перейдем теперь к нахождению выражения для напряженности. Умножим (1.3.6) на $u^{+i}u^{-j}$:

$$\{(\mathcal{D}^+_\alpha)_\tau, (\mathcal{D}^-_\beta)_\tau\} = -2i\epsilon_{\alpha\beta} \bar{W}_\tau. \qquad (1.3.27)$$

Индекс τ означает, что соответствующий объект является тензором относительно τ-преобразований. Перепишем (1.3.27) в λ-базисе:

$$\{D^+_\alpha, (\mathcal{D}^-_\beta)_\lambda\} = -2i\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}_\lambda. \tag{1.3.28}$$

Здесь, в соответствии с (1.3.14), производная D^+_α не ковариантизуется, $\bar{W}_\lambda$ является тензором λ-группы:

$$\bar{W}'_\lambda = \mathrm{e}^{i\lambda}\bar{W}_\lambda\mathrm{e}^{-i\lambda}.$$

Учитывая, что

$$(\mathcal{D}^-_\alpha)_\lambda = [(\mathcal{D}^{--})_\lambda, D^+_\alpha] = D^-_\alpha - iD^+_\alpha V^{--}, \tag{1.3.29}$$

из (1.3.28), пользуясь алгеброй плоских ковариантных производных (см. приложение), находим

$$\bar{W}_\lambda = -\frac{i}{4}\{D^{+\alpha}, (\mathcal{D}^-_\alpha)_\lambda\} = -\frac{1}{4}D^{+\alpha}D^+_\alpha V^{--}, \tag{1.3.30}$$

$$W_\lambda = -\frac{1}{4}\bar{D}^+_{\dot\alpha}\bar{D}^{+\dot\alpha}V^{--}. \tag{1.3.31}$$

Переходя в τ-базис, получаем

$$\bar{W}_\tau = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-iv}(D^{+\alpha}D^+_\alpha V^{--})\mathrm{e}^{iv}, \quad W_\tau = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-iv}(\bar{D}^+_{\dot\alpha}\bar{D}^{+\dot\alpha}V^{--})\mathrm{e}^{iv}. \tag{1.3.32}$$

Полученные напряженности обладают следующими свойствами:

$$\mathcal{D}^i_\alpha\bar{W} = \bar{\mathcal{D}}^i_{\dot\alpha}W = 0, \tag{1.3.33}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha i}\mathcal{D}^j_\alpha W = \bar{\mathcal{D}}^i_{\dot\alpha}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha j}\bar{W}, \tag{1.3.34}$$

$$\mathcal{D}^{++}W = \mathcal{D}^{++}\bar{W} = \mathcal{D}^{--}W = \mathcal{D}^{--}\bar{W} = 0. \tag{1.3.35}$$

Соотношения (1.3.33)–(1.3.35) справедливы как в λ-, так и τ-базисах. Условие (1.3.35) в τ-базисе означает, что W_τ не зависит от u.

Действие $N = 2$ теории Янга–Миллса имеет вид ([8])

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta W^2_\tau = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta W^2_\lambda = \\ &= -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \bar{W}^2_\tau = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \bar{W}^2_\lambda \end{aligned} \tag{1.3.36}$$

(g — константа связи). С учетом (1.3.31) и (1.3.24) его можно переписать в виде интеграла по гармоническому суперпространству [83]:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n}\times \\ &\times\int \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_n\frac{V^{++}(z,u_1)V^{++}(z,u_2)\ldots V^{++}(z,u_n)}{(u^+_1u^+_2)(u^+_2u^+_3)\ldots(u^+_nu^+_1)}. \end{aligned} \tag{1.3.37}$$

В абелевом случае выражения для V^{--}, напряженностей и действия выглядят особенно просто:

$$V^{--}(z,u) = \int \mathrm{d}u_1 \frac{V^{++}(z,u_1)}{(u^+ u_1^+)^2}, \tag{1.3.38}$$

$$W(z) = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}u \bar{D}^-_{\dot\alpha} \bar{D}^{-\dot\alpha} V^{++}(z,u), \tag{1.3.39}$$

$$\bar{W}(z) = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}u D^{-\alpha} D^-_{\alpha} V^{++}(z,u), \tag{1.3.40}$$

$$S = \frac{1}{2g^2} \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^8\theta \mathrm{d}u V^{++}(z,u) V^{--}(z,u). \tag{1.3.41}$$

W_λ и W_τ в абелевом случае совпадают.

1.4. Массивный гипермультиплет. В этом разделе мы покажем, как в гармоническом суперпространстве можно ввести массовый член для гипермультиплета [69, 55, 70].

Рассмотрим взаимодействие q^+-гипермультиплета с абелевым полем специального вида:

$$V_0^{++} = -(\theta^+)^2 \bar{a} - (\bar{\theta}^+)^2 a. \tag{1.4.1}$$

Здесь $a, \bar{a} = \mathrm{const}$. Напряженности, вычисленные с помощью (1.3.39) и (1.3.40), совпадают с этими константами:

$$W_0 = a = \mathrm{const},\ \bar{W}_0 = \bar{a} = \mathrm{const}.$$

Поэтому V_0^{++} можно переписать в виде

$$V_0^{++} = -(\theta^+)^2 \bar{W}_0 - (\bar{\theta}^+)^2 W_0. \tag{1.4.2}$$

Действие гипермультиплета и его уравнения движения на таком внешнем фоне имеют вид

$$S = -\int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4\theta^+ \mathrm{d}u \tilde{q}^+ (D^{++} + iV_0^{++}) q^+, \tag{1.4.3}$$

$$\begin{aligned} (D^{++} + iV_0^{++} I) q^+ &\equiv \mathcal{D}_0^{++} q^+ = 0, \\ (D^{++} + iV_0^{++} I) \tilde{q}^+ &\equiv \mathcal{D}_0^{++} \tilde{q}^+ = 0, \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

где I — генератор фазовых $U(1)$-преобразований q^+:

$$I\, q^+ = q^+, \quad I\, \tilde{q}^+ = -\tilde{q}^+.$$

Подействуем на (1.4.4) оператором $(\mathcal{D}_0^{--})^2$. Воспользовавшись коммутационным соотношением (1.3.22), получим

$$\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}_0^{--})^2 q^+ = 0 \Rightarrow (\mathcal{D}_0^{--})^2 q^+ = 0 \tag{1.4.5}$$

(второе соотношение следует из первого после перехода в τ-базис и учета того свойства, что уравнение $D^{++}f^q = 0$ при $q < 0$ имеет только тривиальное решение $f^q = 0$). Применяя теперь $(D^+)^4$ и пользуясь алгеброй ковариантных производных, приходим к уравнению

$$(\Box + W_0 \bar{W}_0) q^+ = 0. \tag{1.4.6}$$

Оно означает, что суперполе q^+ реализует неприводимое представление супергруппы Пуанкаре с массой $m = \sqrt{W_0 \bar{W}_0}$. Таким образом, действие (1.4.3) описывает свободный массивный гипермультиплет.

Важным является тот факт, что действие (1.4.3) инвариантно относительно $N = 2$ суперсимметрии с центральным зарядом. Действительно, ковариантные спинорные производные, соответствующие фоновому калибровочному суперполю V_0^{++} (1.4.2)

$$\mathcal{D}^i_\alpha = D^i_\alpha + i\theta^i_\alpha \bar{W}_0\, I, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha i} = \bar{D}_{\dot\alpha i} - i\bar\theta_{\dot\alpha i} W_0\, I, \tag{1.4.7}$$

антикоммутируют не с генераторами обычной $N = 2$ суперсимметрии, а с генераторами, которые содержат добавку, зависящую от константных напряженностей:

$$Q^i_\alpha = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha_i} + \bar\theta^{\dot\alpha i}\partial_{\alpha\dot\alpha} + \theta^i_\alpha \bar{W}_0\, I,\ \bar{Q}_{\dot\alpha i} = -i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha i}} - \theta^\alpha_i \partial_{\alpha\dot\alpha} - \theta_{\dot\alpha i} W_0\, I. \tag{1.4.8}$$

Эти генераторы образуют $N = 2$ супералгебру с центральными зарядами

$$\begin{aligned} &\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2i\epsilon_{ij}\epsilon_{\alpha\beta}\bar{W}_0\, I, \quad \{\bar{Q}_{\dot\alpha}{}^i, \bar{Q}_{\dot\beta}{}^j\} = 2i\epsilon^{ij}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} W_0\, I, \\ &\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}_{\dot\beta}{}^j\} = -2i\delta_i{}^j \partial_{\alpha\dot\beta}. \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Используя ковариантность (1.4.9) относительно преобразований глобальной группы $U(1)$ автоморфизмов $N = 2$ супералгебры (R-симметрии), действующей как фазовые преобразования генераторов Q, $\bar{Q}$, можно выбрать «калибровку», в которой $W_0 = \bar{W}_0$ (или, альтернативно, $W_0 = -\bar{W}_0$). Таким образом, в данном случае мы в действительности имеем теорию с одним центральным зарядом. Он пропорционален генератору I фазовых глобальных $U(1)$ преобразований суперполя q^+, которые оставляют инвариантным действие (1.4.3). Рассмотренный механизм генерации массы q^+ и возникновения центрального заряда является частным случаем механизма Шерка–Шварца [84], в котором массы возникают из высших измерений отождествлением генераторов трансляций по дополнительным координатам (в нашем случае центрального заряда, который можно рассматривать как генератор трансляций по некоторой дополнительной координате x^5) с генераторами внутренних симметрий (в нашем случае с $U(1)$-генератором I).

Пропагатор массивного гипермультиплета удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}_0^{++} G_0^{(1,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2) \tag{1.4.10}$$

и имеет вид

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = -\frac{1}{\Box + W_0 \bar{W}_0} (D_1^+)^4 (D_2^+)^4 \left(\frac{\mathrm{e}^{iv_0(1)} \mathrm{e}^{-iv_0(2)}}{(u_1^+ u_2^+)^3} \delta^{12}(z_1 - z_2) \right). \tag{1.4.11}$$

В отличие от безмассового случая пропагатор не обладает свойством антисимметрии относительно перестановки аргументов.

2. МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ В $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

2.1. Идея метода. Поясним формализм фонового поля на примере обычной теории Янга–Миллса, для которой он был впервые введен в [85] (см. также [86]).

Действие теории суть функционал от векторного потенциала со значениями в алгебре Ли $\widetilde{A}_\mu$, который запишем в виде двух слагаемых

$$\widetilde{A}_\mu = A_\mu + a_\mu. \tag{2.1.1}$$

Поле A_μ назовем фоновым, а поле a_μ — квантовым. Классическое действие $S[A_\mu + a_\mu]$ содержит вершины, включающие как квантовые, так и фоновые поля. Идея метода фонового поля заключается в том, чтобы построить теорию возмущений, в которой диаграммы Фейнмана содержали бы только внешние A_μ-линии и внутренние a_μ-линии. Это достигается следующим образом. Калибровочное преобразование поля $\widetilde{A}_\mu$, оставляющее инвариантным действие, имеет вид

$$\delta \widetilde{A}_\mu = \frac{1}{g} \partial_\mu \Lambda + [\widetilde{A}_\mu, \Lambda]. \tag{2.1.2}$$

Здесь g — константа связи, Λ — бесконечно малый параметр. Выразим это преобразование в терминах полей A_μ и a_μ. Эта процедура является неоднозначной. Рассматривают два вида калибровочных преобразований.

1) Фоновые преобразования:

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda + [A_\mu, \Lambda] \equiv D_\mu \Lambda, \quad \delta a_\mu = [a_\mu, \Lambda]. \tag{2.1.3}$$

2) Квантовые преобразования:

$$\delta A_\mu = 0, \quad \delta a_\mu = D_\mu \Lambda + [a_\mu, \Lambda]. \tag{2.1.4}$$

Квантовые поправки вычисляются с использованием действия $S[A_\mu + a_\mu]$, но квантуется только поле a_μ, поле A_μ считается внешним. Поэтому необходимо выбрать калибровку так, чтобы фиксация калибровки нарушала только квантовую калибровочную инвариантность, но сохраняла при этом фоновую. Например, наложим калибровку

$$F = D^\mu a_\mu = \frac{1}{g}\partial^\mu a_\mu + [A^\mu, a_\mu] = 0. \tag{2.1.5}$$

Проверим, что она ковариантно преобразуется при фоновых калибровочных преобразованиях. При преобразованиях (2.1.3) имеем

$$\delta F = \frac{1}{g}[\partial_\mu a^\mu, \Lambda] + \frac{1}{g}[a^\mu, \partial_\mu \Lambda] + [D^\mu \Lambda, a_\mu] + [A^\mu, [a_\mu, \Lambda]\,]. \tag{2.1.6}$$

С помощью тождества Якоби эту вариацию можно переписать в виде

$$\delta F = \left[\frac{1}{g}\partial_\mu a^\mu + [A^\mu, a_\mu], \Lambda\right] = [F, \Lambda]. \tag{2.1.7}$$

Таким образом, F преобразуется как тензор относительно фоновых калибровочных преобразований. Закон преобразований (2.1.7) легко обобщить на случай конечных преобразований:

$$F' = \mathrm{e}^{-\Lambda} F \mathrm{e}^{\Lambda}. \tag{2.1.8}$$

Согласно общей схеме квантования калибровочных теорий (см., например, книги [1,87]) член фиксации калибровки в лагранжиане пропорционален $\operatorname{tr} F^2$. Равенство (2.1.8) показывает, что член фиксации калибровки является инвариантным относительно фоновых калибровочных преобразований. С другой стороны, выражение $\operatorname{tr} F^2$ неинвариантно относительно квантовых калибровочных преобразований, как и должно быть.

Действие духов Фаддеева–Попова вводится точно так же, как и в обычном формализме квантования калибровочных теорий. Найдем вариацию калибровки при квантовых калибровочных преобразованиях

$$\delta F = D^\mu(D_\mu \Lambda + [a_\mu, \lambda]). \tag{2.1.9}$$

В итоге действие духов имеет вид

$$S_{gh} = \int \mathrm{d}^4x\, \bar{c}\, D^\mu (D_\mu c + [a_\mu, c]). \tag{2.1.10}$$

Это действие, так же как и член фиксации калибровки, инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований, поскольку оно построено исключительно из тензоров фоновых преобразований, и неинвариантно относительно квантовых калибровочных преобразований.

Описанная процедура гарантирует калибровочную инвариантность эффективного действия.

2.2. Квантово-фоновое разделение. Закон преобразования $N = 2$ калибровочного суперполя имеет вид (1.3.2):

$$V^{++\prime} = \mathrm{e}^{i\lambda} V^{++} \mathrm{e}^{-i\lambda} - i\mathrm{e}^{i\lambda} D^{++} \mathrm{e}^{-i\lambda}.$$

Разобъем V^{++} на квантовую и фоновую части:

$$V^{++} \to V^{++} + gv^{++}, \tag{2.2.1}$$

где V^{++} — фоновое суперполе, v^{++} — квантовое суперполе. Квантовые и фоновые калибровочные преобразования определяются по аналогии с (2.1.3), (2.1.4).

1) Фоновые преобразования:

$$V^{++\prime} = \mathrm{e}^{i\lambda} V^{++} \mathrm{e}^{-i\lambda} - i\mathrm{e}^{i\lambda} D^{++} \mathrm{e}^{-i\lambda}, \quad v^{++\prime} = \mathrm{e}^{i\lambda} v^{++} \mathrm{e}^{-i\lambda}. \tag{2.2.2}$$

2) Квантовые преобразования:

$$V^{++\prime} = V^{++}, \quad v^{++\prime} = \mathrm{e}^{i\lambda} \left(\frac{1}{g} V^{++} + v^{++} \right) \mathrm{e}^{-i\lambda} - \frac{1}{g} i\mathrm{e}^{i\lambda} D^{++} \mathrm{e}^{-i\lambda}. \tag{2.2.3}$$

Найдем коэффициенты в разложении действия $N = 2$ теории Янга–Миллса в ряд по квантовому суперполю v^{++}:

$$\begin{aligned} S \quad = \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tr} \int \mathrm{d}^{12}z_1 \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}^{12}z_n \mathrm{d}u_n \frac{g^n}{n!} \frac{\delta^n S}{\delta v^{++}(1) \ldots \delta v^{++}(n)} |_{v^{++}=0} \times \\ & \times v^{++}(1) \ldots v^{++}(n) \; . \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Вариация действия $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

$$S = -\frac{1}{2g^2} \mathrm{tr} \int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^4\bar{\theta} \bar{W}_\lambda^2$$

дается выражением:

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \bar W_\lambda \delta \bar W_\lambda = \\ &= -\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \mathrm{d}u\left(-\frac{1}{4}\right)[D^{+\alpha}D^+_\alpha \delta V^{--}]\bar W_\lambda, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

где $\bar W_\lambda$ выражена через V^{--} по формуле (1.3.30). Для дальнейших преобразований представим V^{--} в виде (см. (1.3.21))

$$V^{--} = -i\mathrm{e}^{iv}[D^{--}\mathrm{e}^{-iv}], \tag{2.2.6}$$

учтем киральность $\bar W_\lambda$ (условие (1.3.33)) и независимость $\bar W_\tau = \mathrm{e}^{-iv}\bar W_\lambda \mathrm{e}^{iv}$ от гармоник, а также воспользуемся тождеством

$$\mathrm{e}^{-iv}\delta[\mathrm{e}^{iv}D^{--}\mathrm{e}^{-iv}]\mathrm{e}^{iv} = -D^{--}(\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv}). \tag{2.2.7}$$

Вариацию (2.2.5) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{i}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \mathrm{d}u\left(-\frac{1}{4}\right)(D^{+\alpha}D^+_\alpha)\left(\mathrm{e}^{-iv}\delta[\mathrm{e}^{iv}D^{--}\mathrm{e}^{-iv}]\mathrm{e}^{iv}\bar W_\tau\right) = \\ &= -\frac{i}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \mathrm{d}u\left(-\frac{1}{4}\right)(D^{+\alpha}D^+_\alpha)D^{--}[\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv}]\bar W_\tau = \\ &= -\frac{i}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \mathrm{d}u\left(-\frac{1}{4}\right)(D^{+\alpha}D^+_\alpha)D^{--}[\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv}\bar W_\tau]. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Используя тождество

$$(D^+)^2D^{--} + (D^-)^2D^{++} = D^{--}(D^+)^2 + D^{++}(D^-)^2, \tag{2.2.9}$$

опуская члены с полными гармоническими производными под интегралом и вспоминая, что $\mathrm{e}^{iv}D^{++}\mathrm{e}^{-iv} = iV^{++}$, окончательно находим

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \mathrm{d}u\left(-\frac{1}{4}\right)(D^{-\alpha}D^-_\alpha)\delta V^{++}\bar W_\lambda = \\ &= \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\bar\theta \mathrm{d}u\left(-\frac{1}{4}\right)(D^{-\alpha}D^-_\alpha)(D^{+\alpha}D^+_\alpha)\delta V^{++}V^{--} = \\ &= \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^8\theta \mathrm{d}u\delta V^{++}V^{--}. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Здесь мы восстановили полную грассманову меру и перешли к интегрированию по полному суперпространству. Сравнивая (2.2.10) с (2.2.4), находим, что член, линейный по квантовому суперполю v^{++}, имеет вид

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{g}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^8\theta \mathrm{d}u v^{++}V^{--} = \\ &= -\frac{1}{4g}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+ \mathrm{d}u v^{++}\bar{D}^+_{\dot\alpha}\bar{D}^{+\dot\alpha}\bar{W}_\lambda. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Этот член в дальнейшем не понадобится, так как для вычисления эффективного действия в петлевом разложении используется конструкция

$$\Delta S[\psi,\phi] = S[\psi+\phi] - S[\psi] - S'[\psi]\phi\ ,$$

где линейный член отсутствует (см., например, книгу [2]). Здесь ψ означает множество полей теории, $\psi \to \psi+\phi$ есть квантово-фоновое разделение с фоновым полем ψ и квантовым ϕ.

Для вычисления второй вариации действия S снова представим V^{--} в виде (2.2.6) и в очередной раз воспользуемся тождеством (2.2.7):

$$\begin{aligned} \delta^2 S &= -\frac{i}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u\delta V^{++}\delta(\mathrm{e}^{iv}D^{--}\mathrm{e}^{-iv}) = \\ &= -\frac{i}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-iv}\delta V^{++}\mathrm{e}^{iv}\mathrm{e}^{-iv}\delta(\mathrm{e}^{iv}D^{--}\mathrm{e}^{-iv})\mathrm{e}^{iv} = \\ &= \frac{i}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-iv}\delta V^{++}\mathrm{e}^{iv}D^{--}(\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv}). \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Вариация суперполя V^{++} является λ-тензором*:

$$(\delta V^{++})' = \mathrm{e}^{i\lambda}\delta V^{++}\mathrm{e}^{-i\lambda}. \tag{2.2.13}$$

Объект

$$\delta V^{++}_\tau \equiv \mathrm{e}^{-iv}\delta V^{++}\mathrm{e}^{iv} \tag{2.2.14}$$

является тензором τ-группы:

$$\delta V^{++}_\tau = \mathrm{e}^{i\tau}\mathrm{e}^{-iv}\mathrm{e}^{-i\lambda}\mathrm{e}^{i\lambda}\delta V^{++}\mathrm{e}^{-i\lambda}\mathrm{e}^{i\lambda}\mathrm{e}^{iv}\mathrm{e}^{-i\tau} = \mathrm{e}^{i\tau}\delta V^{++}_\tau\mathrm{e}^{-i\tau}, \tag{2.2.15}$$

где был использован закон преобразования моста (1.3.13). Найдем $\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv}$. Вариацию δV^{++} можно представить в виде

$$\delta V^{++} = i\mathrm{e}^{iv}D^{++}(\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv})\mathrm{e}^{-iv}$$

*Хотя калибровочное поле тензором не является, его вариация — тензор.

или

$$\delta V_\tau^{++} = iD^{++}(\mathrm{e}^{-iv}\delta \mathrm{e}^{iv}). \tag{2.2.16}$$

Уравнение (2.2.16) решается относительно $\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv}$ следующим образом:

$$\mathrm{e}^{-iv}\delta\mathrm{e}^{iv} = -i\int \mathrm{d}u_1 \frac{(u^+u_1^-)}{(u^+u_1^+)}\delta V_\tau^{++}(z,u_1). \tag{2.2.17}$$

Чтобы убедиться, что это действительно общее решение, достаточно подействовать на обе части (2.2.17) оператором D^{++} и использовать выражения (1.1.7), (1.1.18) и свойства гармонических δ-функций (1.1.13), (1.1.14). После подстановки (2.2.17) в формулу (2.2.12) вторая вариация действия принимает вид

$$\delta^2 S = \frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\delta V_\tau^{++}(1)D_1^{--}\frac{(u_1^+u_2^-)}{(u_1^+u_2^+)}\delta V_\tau^{++}(2). \tag{2.2.18}$$

Здесь $\delta V_\tau^{++}(1)$ и $\delta V_\tau^{++}(2)$ зависят от одного x и от разных u. Поскольку

$$D_1^{--}\frac{(u_1^+u_2^-)}{(u_1^+u_2^+)} = \frac{1}{(u_1^+u_2^+)^2} \tag{2.2.19}$$

в силу (1.1.17), (1.1.7) и тождества

$$(u_1^+u_2^+)(u_1^-u_2^-) - (u_1^+u_2^-)(u_1^-u_2^+) = 1, \tag{2.2.20}$$

то для второй вариации действия получаем окончательный ответ в виде

$$\delta^2 S = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{d}^{12}z\frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2}{(u_1^+u_2^+)^2}\delta V_\tau^{++}(1)\delta V_\tau^{++}(2). \tag{2.2.21}$$

Обозначим мост, зависящий от фонового суперполя V^{++}, через V, т.е. $V = v|_{v^{++}=0}$. В результате действие во втором порядке по квантовому суперполю дается выражением

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2}{(u_1^+u_2^+)^2}\mathrm{e}^{-iV(1)}v^{++}(1)\mathrm{e}^{iV(1)}\mathrm{e}^{-iV(2)}v^{++}(2)\mathrm{e}^{iV(2)} = \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2}{(u_1^+u_2^+)^2}v_\tau^{++}(1)v_\tau^{++}(2), \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

где мы ввели

$$v_\tau^{++} = \mathrm{e}^{-iV}v^{++}\mathrm{e}^{iV}. \tag{2.2.23}$$

Относительно фоновых калибровочных преобразований (2.2.2) v^{++} является λ-тензором. Это значит, что v^{++}_τ является τ-тензором.

Перейдем к нахождению третьей вариации действия S. Имеем

$$\delta^3 S = \frac{2}{g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z \frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2}{(u^+_1u^+_2)^2}\delta[\delta V^{++}_\tau(1)]\delta V^{++}_\tau(2)\ . \tag{2.2.24}$$

Вычислим $\delta[\delta V^{++}_\tau(1)]$:

$$\begin{aligned}&\delta[\delta V^{++}_\tau(1)] = \delta[\mathrm{e}^{-iv(1)}\delta V^{++}(1)\mathrm{e}^{iv(1)}] = \\ &= \delta\mathrm{e}^{-iv(1)}\delta V^{++}(1)\mathrm{e}^{iv(1)} + \mathrm{e}^{-iv(1)}\delta V^{++}(1)\delta\mathrm{e}^{iv(1)} = \\ &= [\delta V^{++}_\tau(1), \mathrm{e}^{-iv(1)}\delta\mathrm{e}^{-iv(1)}].\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Выражение для $\mathrm{e}^{-iv(1)}\delta\mathrm{e}^{iv(1)}$ дается соотношением (2.2.17). Подставляя (2.2.25) с учетом (2.2.17) в (2.2.24), получим следующее выражение для третьей вариации

$$\delta^3 S = \frac{2i}{g^2}\,\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z \frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3}{(u^+_1u^+_2)(u^+_2u^+_3)(u^+_1u^+_3)}\delta V^{++}_\tau(1)\delta V^{++}_\tau(2)\delta V^{++}_\tau(3). \tag{2.2.26}$$

При выводе (2.2.26) мы воспользовались тождеством

$$\frac{(u^+_2u^-_3)}{(u^+_2u^+_3)} - \frac{(u^+_1u^-_3)}{(u^+_1u^+_3)} = \frac{(u^+_1u^+_2)}{(u^+_2u^+_3)(u^+_1u^+_3)}. \tag{2.2.27}$$

Сравнивая (2.2.26) с (2.2.4), заключаем, что действие в третьем порядке по квантовому суперполю имеет вид

$$S_3 = \frac{i}{3}g\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z \frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3}{(u^+_1u^+_2)(u^+_2u^+_3)(u^+_1u^+_3)}v^{++}_\tau(1)v^{++}_\tau(2)v^{++}_\tau(3). \tag{2.2.28}$$

Аналогично можно найти действие в произвольном n-м порядке по квантовому суперполю v^{++}. Запишем окончательный ответ:

$$\begin{aligned}S_n \quad = \quad & -\frac{(-ig)^{n-2}}{n}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z \frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_n}{(u^+_1u^+_2)(u^+_2u^+_3)\ldots(u^+_nu^+_1)}\times \\ & \times v^{++}_\tau(1)v^{++}_\tau(2)\ldots v^{++}_\tau(n).\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Здесь v^{++}_τ определено соотношением (2.2.23).

2.3. Фиксация калибровки и процедура Фаддеева–Попова. Следующий шаг состоит в закреплении квантовой калибровочной инвариантности. Выберем калибровку для квантового суперполя в виде

$$F_\tau^{(4)} = D^{++} v_\tau^{++}. \tag{2.3.1}$$

$F_\tau^{(4)}$ можно переписать как

$$F_\tau^{(4)} = \mathrm{e}^{-iV} F^{(4)} \mathrm{e}^{iV}, \quad F^{(4)} = D^{++} v^{++} + i[V^{++}, v^{++}] = \mathcal{D}^{++} v^{++}. \tag{2.3.2}$$

Доказательство проводится непосредственно

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{iV}(D^{++} v_\tau^{++})\mathrm{e}^{-iV} = \mathrm{e}^{iV} D^{++}(\mathrm{e}^{-iV} v_\tau^{++} \mathrm{e}^{iV})\mathrm{e}^{-iV} = \\ &= D^{++} v^{++} + [(\mathrm{e}^{iV} D^{++} \mathrm{e}^{-iV}), v^{++}] = \mathcal{D}^{++} v^{++}, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

где учтено выражение для V^{++} (1.3.18). Представление (2.3.2) позволяет проверить, что калибровка (2.3.1) преобразуется ковариантно при фоновых калибровочных преобразованиях:

$$F_\tau^{(4)\prime} = D^{++} v_\tau^{++\prime} = D^{++}(\mathrm{e}^{i\tau} v_\tau^{++} \mathrm{e}^{-i\tau}) = \mathrm{e}^{i\tau} F_\tau^{(4)} \mathrm{e}^{-i\tau}. \tag{2.3.4}$$

Чтобы фиксировать калибровку в функциональном интеграле, необходимо, согласно процедуре Фаддеева–Попова, вставить в него единицу, представленную в виде

$$1 = \Delta_{\mathrm{FP}}^{-1} \delta[F^{(4)} - f^{(4)}]. \tag{2.3.5}$$

После этого функциональный интеграл перепишется как

$$Z = N \int \mathcal{D}v^{++} \mathrm{e}^{iS} \Delta_{\mathrm{FP}}^{-1} \delta[F^{(4)} - f^{(4)}], \tag{2.3.6}$$

где N — нормировочный множитель, $\Delta_{\mathrm{FP}}^{-1}$ — детерминант Фаддеева–Попова, $f^{(4)}$ — аналитическое суперполе со значениями в алгебре Ли калибровочной группы, не содержащее зависимости от фонового суперполя V^{++}, $\delta[F^{(4)}]$ — функциональная δ-функция. Чтобы найти детерминант Фаддеева–Попова, необходимо найти вариацию калибровки при квантовых калибровочных преобразованиях. С учетом (2.2.3)

$$\delta F_\tau^{(4)} = \mathrm{e}^{-iV}(\mathcal{D}^{++} \delta v^{++})\mathrm{e}^{iV} = -\frac{1}{g}\mathrm{e}^{-iV}\{\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}^{++} + ig[v^{++}, \lambda])\}\mathrm{e}^{iV}. \tag{2.3.7}$$

В результате детерминант Фаддеева–Попова имеет вид

$$\Delta_{\mathrm{FP}} = \mathrm{Det}\,[\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}^{++} + igv^{++})]. \tag{2.3.8}$$

Величина $\Delta_{\rm FP}^{-1}$ представляется в виде функционального интеграла по аналитическим фермионным суперполям со значениями в алгебре Ли — духам Фаддеева–Попова:

$$\Delta_{\rm FP}^{-1} = \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c\, {\rm e}^{iS_{gh}[b,c,v^{++},V^{++}]}, \tag{2.3.9}$$

где

$$S_{gh} = {\rm tr}\int {\rm d}^4x{\rm d}^4\theta^+{\rm d}u\; b\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}^{++} + ig[v^{++}, c]). \tag{2.3.10}$$

Нетрудно проверить, что действие (2.3.10) инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований.

Далее, вставим в функциональный интеграл (2.3.6) единицу в виде

$$1 = \Delta \int \mathcal{D}f^{(4)}{\rm exp}\left\{\frac{i}{2\alpha}{\rm tr}\int {\rm d}^{12}z{\rm d}u_1{\rm d}u_2 f_\tau^{(4)}(1)\frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3}f_\tau^{(4)}(2)\right\}, \tag{2.3.11}$$

где α — калибровочный параметр, Δ — детерминант Нильсена–Каллош, $f_\tau^{(4)} = {\rm e}^{-iV}f^{(4)}{\rm e}^{iV}$. Выражение, стоящее в правой части (2.3.11), требует специального комментария. Мы обязаны в нем писать $f_\tau^{(4)}$, а не $f^{(4)}$, так как в противном случае показатель экспоненты в (2.3.11) не будет инвариантен относительно фоновых калибровочных преобразований. Величина

$${\rm tr}\,[f^{(4)}(z,u_1)f^{(4)}(z,u_2)]$$

не является калибровочно-инвариантной в силу нелокальности по гармоническим переменным, тогда как величина

$${\rm tr}\,[f_\tau^{(4)}(z,u_1)f_\tau^{(4)}(z,u_2)]$$

является калибровочно-инвариантной, так как $f_\tau^{(4)}$ — тензор τ-группы, параметры которой не зависят от гармоник. Нелокальность по u также является вынужденным шагом, иначе нельзя сделать заряд равным нулю под интегралом. Обратим внимание на то, что

$${\rm tr}\,[f_\tau^{(4)}(z,u_1)f_\tau^{(4)}(z,u_2)] = {\rm tr}\,[{\rm e}^{-{\rm e}V(1)}f^{(4)}(z,u_1){\rm e}^{{\rm e}V(1)}{\rm e}^{-{\rm e}V(2)}f^{(4)}(z,u_2){\rm e}^{{\rm e}V(2)}]$$

зависит от фонового суперполя V^{++}. Следовательно, детерминант Δ также включает зависимость от V^{++}, что означает присутствие третьего духа Нильсена–Каллош.

Второй множитель в (2.3.11) ведет к действию фиксации калибровки. Проинтегрировав по $f^{(4)}$ с помощью стоящей в (2.3.6) функциональной δ-функции, получим

$$Z = N\int \mathcal{D}v^{++}\mathcal{D}b\mathcal{D}c\Delta\, {\rm e}^{i(S+S_{gh}+S_{gf})}, \tag{2.3.12}$$

где действие фиксации калибровки дается выражением

$$S_{gh} = \frac{1}{2\alpha}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 D^{++}v_\tau^{++}(1)\frac{(u_1^- u_2^-)}{(u_1^+ u_2^+)^3}D^{++}v^{++}(2). \qquad (2.3.13)$$

Использование выражений (1.1.7), (1.1.14), (1.1.17) позволяет привести действие (2.3.13) к виду

$$\begin{aligned} S_{gf} &= \frac{1}{2\alpha}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\frac{v_\tau^{++}(1)v_\tau^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} - \\ &- \frac{1}{2\alpha}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u\frac{1}{2}[(D^{--})^2 v_\tau^{++}]v_\tau^{++}. \end{aligned} \qquad (2.3.14)$$

В результате $S_2 + S_{gf}$ записывается как

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 = S_2 + S_{gf} &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\frac{v_\tau^{++}(1)v_\tau^{++}(2)}{(u_1^+ u_2^+)^2} - \\ &- \frac{1}{2\alpha}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u\frac{1}{2}[(D^{--})^2 v_\tau^{++}]v_\tau^{++}. \end{aligned} \qquad (2.3.15)$$

Выражение (2.3.15) показывает, что наиболее удачным выбором калибровочного параметра является $\alpha = -1$. При таком выборе

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u[(D^{--})^2 v_\tau^{++}]v_\tau^{++}. \qquad (2.3.16)$$

Действие (2.3.16) записано через τ-тензоры. Перейдем в λ-базис:

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u v^{++}(\mathcal{D}^{--})^2 v^{++}, \qquad (2.3.17)$$

где

$$\mathcal{D}^{--}v^{++} = D^{--}v^{++} + i[V^{--}, v^{++}]. \qquad (2.3.18)$$

Действие (2.3.17) удобно переписать в виде интеграла по аналитическому подпространству

$$\begin{aligned} \hat{S}_2 &= \frac{1}{4}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u(D^+)^4\{v^{++}(\mathcal{D}^{--})^2 v^{++}\} = \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u v^{++} \breve{\Box}\, v^{++}. \end{aligned} \qquad (2.3.19)$$

Оператор $\breve{\Box} = (D^+)^4(\mathcal{D}^{--})^2$ переводит аналитические суперполя в аналитические и на их множестве имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \breve{\Box} &= \mathcal{D}^\mu\mathcal{D}_\mu - \frac{i}{2}(D^{+\alpha}W)\mathcal{D}_\alpha^- - \frac{i}{2}(\bar{D}_{\dot\alpha}^+\bar{W})\bar{\mathcal{D}}^{-\dot\alpha} + \\ &+ \frac{i}{4}(\bar{D}_{\dot\alpha}^+\bar{D}^{+\dot\alpha}\bar{W})\mathcal{D}^{--} - \frac{i}{4}(\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}^-\bar{D}^{+\dot\alpha}\bar{W}) + \frac{1}{2}\{W, \bar{W}\}. \end{aligned} \qquad (2.3.20)$$

Все ковариантные производные здесь записаны в λ-базисе. В этом базисе ковариантные производные $\mathcal{D}^+_\alpha$ и $\bar{\mathcal{D}}^+_{\dot\alpha}$ совпадают с плоскими. Ковариантные производные $\mathcal{D}^{--}$ и $\mathcal{D}^-_{\alpha,\dot\alpha}$ даются выражениями (1.3.21), (1.3.29). Векторная производная $\mathcal{D}^\mu = -\frac{1}{2}(\sigma^\mu)^{\alpha\dot\alpha}\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}$ находится из (1.3.8):

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{4}(\sigma_\mu)^{\alpha\dot\alpha}D^+_\alpha \bar{D}^+_{\dot\alpha}V^{--}\,. \tag{2.3.21}$$

Во всех ковариантных производных связности зависят от фонового суперполя V^{++}. Подстановка явных выражений ковариантных производных в (2.3.20) приводит к следующему выражению для оператора $\breve{\Box}$:

$$\begin{aligned}
\breve{\Box} &= \Box + \frac{1}{4}D^+_\alpha\bar{D}^+_{\dot\alpha}\partial^{\alpha\dot\alpha}V^{--} + \frac{1}{4}D^+_\alpha\bar{D}^+_{\dot\alpha}V^{--}\partial^{\alpha\dot\alpha} + \\
&+ \frac{1}{4}(D^{+\alpha}\bar{D}^{+\dot\alpha}V^{--})(D^+_\alpha\bar{D}^+_{\dot\alpha}V^{--}) - \frac{i}{2}(\bar{D}^+_{\dot\alpha}\bar{W})\bar{D}^{-\dot\alpha} - \frac{i}{2}(D^{+\alpha}W)D^-_\alpha - \\
&- \frac{1}{2}(\bar{D}^+_{\dot\alpha}\bar{W})(\bar{D}^{+\dot\alpha}V^{--}) - \frac{1}{2}(D^{+\alpha}W)(D^+_\alpha V^{--}) + \\
&+ \frac{i}{4}(\bar{D}^+_{\dot\alpha}\bar{D}^{+\dot\alpha}\bar{W})D^{--} - \frac{1}{4}(\bar{D}^+_{\dot\alpha}\bar{D}^{+\dot\alpha}\bar{W})V^{--} - \frac{i}{4}(\bar{D}^-_{\dot\alpha}\bar{D}^{+\dot\alpha}\bar{W}) - \\
&- \frac{1}{4}(\bar{D}^+_{\dot\alpha}V^{--})(\bar{D}^{+\dot\alpha}\bar{W}) + \frac{1}{2}\{W,\bar{W}\}.
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Действие (2.3.19) инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований (2.2.2). Оператор $\breve{\Box}$ является тензором относительно преобразований (2.2.2), так как построен из ковариантных производных. Поэтому

$$\begin{aligned}
\hat{S}'_2 &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u(\mathrm{e}^{i\lambda}v^{++}\mathrm{e}^{-i\lambda})(\mathrm{e}^{i\lambda}\,\breve{\Box}\,\mathrm{e}^{-i\lambda})(\mathrm{e}^{i\lambda}v^{++}\mathrm{e}^{-i\lambda}) = \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u v^{++}\,\breve{\Box}\,v^{++} = \hat{S}_2.
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

С другой стороны, действие (2.3.19) очевидным образом неинвариантно относительно квантовых калибровочных преобразований (2.2.3).

Перейдем к вычислению Δ. Мы будем исходить из определения (2.3.11).

$$\begin{aligned}
1 &= \Delta\int\mathcal{D}f^{(4)}\exp\left\{\frac{i}{2\alpha}\mathrm{tr}\int\mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 f^{(4)}_\tau(1)\frac{(u^-_1u^-_2)}{u^+_1u^+_2)^3}f^{(4)}_\tau(2)\right\} \equiv \\
&\equiv \Delta\int\mathcal{D}f^{(4)}\exp\left\{\frac{i}{2\alpha}\mathrm{tr}\int\mathrm{d}\zeta_1^{-4}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}\zeta_2^{-4}\mathrm{d}u_2 f^{(4)}(1)A(1|2)f^{(4)}(2)\right\} = \\
&= \Delta\,\mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}}A.
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Отсюда

$$\Delta = \mathrm{Det}^{\frac{1}{2}} A. \tag{2.3.25}$$

Чтобы найти $\mathrm{Det}\ A$, представим его в виде функционального интеграла по аналитическим суперполям

$$\mathrm{Det}^{-1} A = \int \mathcal{D}\chi^{(4)}\mathcal{D}\rho^{(4)}\exp\left\{i\mathrm{tr}\int \mathrm{d}\zeta_1^{-4}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}\zeta_2^{-4}\mathrm{d}u_2\chi^{(4)}(1)A(1|2)\rho^{(4)}(2)\right\} \tag{2.3.26}$$

и произведем в нем замену переменных

$$\rho^{(4)} = (\mathcal{D}^{++})^2\sigma,\ \mathrm{Det}\left(\frac{\delta\rho^{(4)}}{\delta\sigma}\right) = \mathrm{Det}\,(\mathcal{D}^{++})^2. \tag{2.3.27}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\int \mathrm{d}\zeta_1^{-4}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}\zeta_2^{-4}\mathrm{d}u_2\chi^{(4)}(1)A(1|2)\rho^{(4)}(2) = \\ &= \mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\chi_\tau^{(4)}(1)\frac{(u_1^-u_2^-)}{(u_1^+u_2^+)^3}(D_2^{++})^2\sigma_\tau(2) = \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\mathrm{d}u\chi_\tau^{(4)}(D^{--})^2\sigma_\tau = -\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\chi_\tau^{(4)}\,\breve{\Box}\,\sigma_\tau. \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

В цепочке равенств (2.3.28) использованы определение оператора A (2.3.24), соотношения (1.1.7), (1.1.14), (1.1.18), а также правила перехода от τ-базиса к λ-базису аналогично тому, как это было сделано при преобразовании (2.3.16) к (2.3.17). Возникший оператор $\breve{\Box}$ дается выражением (2.3.20). Заметим, что операторы $\breve{\Box}$ в (2.3.19) и в (2.3.28) действуют в пространствах разных суперполей и имеют разные функции Грина. Поэтому оператор в действии (2.3.19) мы будем обозначать в дальнейшем $\breve{\Box}_{(2,2)}$, а оператор, стоящий в действии (2.3.28), будем обозначать $\breve{\Box}_{(4,0)}$. Функция Грина оператора $\breve{\Box}_{(2,2)}$ $G^{(2,2)}(1|2) = \langle v^{++}(1)v^{++}(2)\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\breve{\Box}_{(2,2)}\, G^{(2,2)}(1|2) = \delta_A^{(2,2)}(1|2), \tag{2.3.29}$$

в то время как функция Грина $G^{(4,0)}(1|2) = \langle\chi^{(4)}(1)\sigma(2)\rangle$ оператора $\breve{\Box}_{(4,0)}$ — уравнению

$$\breve{\Box}_{(4,0)}\, G^{(4,0)} = \delta_A^{(4,0)}(1|2). \tag{2.3.30}$$

Функции Грина $G^{(2,2)}(1|2)$ и $G^{(4,0)}(1|2)$ различны.

В силу вышесказанного оператор Δ представляется следующим функциональным интегралом:

$$\Delta = \int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{iS_{\mathrm{NK}}[\phi, V^{++}]}\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}\, \breve{\Box}_{(4,0)}, \qquad (2.3.31)$$

где действие Нильсена–Каллош имеет вид

$$S_{\mathrm{NK}}[\phi, V^{++}] = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\mathcal{D}^{++}\phi\mathcal{D}^{++}\phi\;. \qquad (2.3.32)$$

Переменная интегрирования ϕ является бозонным аналитическим суперполем со значениями в алгебре Ли калибровочной группы и представляет собой дух Нильсена–Каллош. Нетрудно видеть, что действие (2.3.32) инвариантно относительно фоновых калибровочных преобразований.

Окончательное выражение для функционального интеграла можно записать в следующем виде:

$$Z = N\int \mathcal{D}v^{++}\mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{i(\hat{S}_2 + S_{gh} + S_{\mathrm{NK}} + \tilde{S})}\mathrm{Det}^{\frac{1}{2}}\, \breve{\Box}_{(4,0)}, \qquad (2.3.33)$$

где действия $\hat{S}_2, S_{gh}, S_{\mathrm{NK}}, \tilde{S}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}uv^{++}\,\breve{\Box}\,v^{++},\\
&S_{gh} = \mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}ub\mathcal{D}^{++}(\mathcal{D}^{++}c + ig[v^{++}, c]),\\
&S_{\mathrm{NK}} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\mathcal{D}^{++}\phi\mathcal{D}^{++}\phi, \qquad (2.3.34)\\
&\tilde{S} = S[V^{++}] - \frac{1}{4g}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}uv^{++}\bar{D}^+_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{+\dot{\alpha}}\bar{W}_\lambda -\\
&-\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^{12}z\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-ig)^{n-2}}{n}\frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_n}{(u_1^+u_2^+)(u_2^+u_3^+)\ldots(u_n^+u_1^+)}\times\\
&\times v_\tau^{++}(1)v_\tau^{++}(2)\ldots v_\tau^{++}(n).
\end{aligned}$$

Через $S[V^{++}]$ здесь обозначено действие $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (1.3.36), зависящее только от фонового суперполя V^{++}. Оно представляет собой константу, не зависящую от переменных интегрирования. Более того, в петлевом разложении оно вообще отсутствует (см. комментарий после выражения для линейного по квантовому суперполю члена (2.2.11)).

2.4. Общая структура эффективного действия. Выражения (2.3.33), (2.3.34) дают возможность исследовать петлевые поправки к эффективному действию. Рассмотрим однопетлевое приближение, в котором эффективное действие имеет следующую структуру:

$$\Gamma[V^{++}] = S[V^{++}] + \Gamma^{(1)}[V^{++}] \,, \tag{2.4.1}$$

где $\Gamma^{(1)}[V^{++}]$ описывает однопетлевые квантовые поправки. Чтобы исследовать $\Gamma^{(1)}[V^{++}]$, необходимо удержать только квадратичную часть по квантовому суперполю v^{++} во всех действиях (2.3.34):

$$\begin{aligned} S_2[V^{++}, v^{++}, b, c, \phi] &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u v^{++} \breve{\Box}\, v^{++} + \\ &+ \mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u b(\mathcal{D}^{++})^2 c + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\phi(\mathcal{D}^{++})^2\phi. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Кроме того, необходимо учесть детерминант оператора $\breve{\Box}_{(4,0)}$ в функциональном интеграле (2.3.33). В результате однопетлевое эффективное действие определяется выражением

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}[V^{++}] &= -i\left[\mathrm{Tr}\,\ln(\mathcal{D}^{++})^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln(\mathcal{D}^{++})^2\right] + \\ &+ i\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln\breve{\Box}_{(2,2)} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln\breve{\Box}_{(4,0)}\right] = \\ &= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\,\ln(\mathcal{D}^{++})^2 + i\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln\breve{\Box}_{(2,2)} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln\breve{\Box}_{(4,0)}\right]. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

В следующем разделе будет показано, что $\mathrm{Tr}\,\ln\breve{\Box}$ не содержит голоморфных вкладов, поэтому однопетлевое эффективное действие определяется исключительно духами. Однопетлевое эффективное действие духов совпадает с точностью до коэффициента с эффективным действием ω гипермультиплета во внешнем калибровочном суперполе. Действие этого гипермультиплета получается заменой плоских производных в свободном действии (1.2.17) на ковариантные:

$$S_\omega = -\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u(\mathcal{D}^{++}\omega)(\mathcal{D}^{++}\omega)\,. \tag{2.4.4}$$

Эффективные действия q^+- и ω-гипермультиплетов будут найдены в следующем разделе. Это заодно решит задачу о нахождении однопетлевого голоморфного эффективного действия в калибровочной теории.

Для изучения эффективного действия в более высоких порядках необходимо принять во внимание в действиях (2.3.34) члены третьего и более высоких порядков по квантовому суперполю. В работе [63] было показано в контексте рассмотренного выше метода фонового поля, что, начиная с двух петель, голоморфные вклады отсутствуют. Поэтому выражение (2.4.3) содержит всю информацию о голоморфном эффективном действии $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

3. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N=2$ СУПЕРСИММЕТРИИ

3.1. Эквивалентность q^+- и ω-гипермультиплетов. В этом разделе, следуя [32], будет показано, что между двумя типами гипермультиплетов — q и ω, существует определенная связь, которая, по сути, приводит к тому, что достаточно изучать эффективное действие только q-гипермультиплета.

Рассмотрим действие комплексного ω-гипермультиплета в некотором представлении калибровочной группы:

$$\bar{S}_\omega = -\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u(D^{++}-iV^{++})\widetilde{\omega}(D^{++}+iV^{++})\omega. \qquad (3.1.1)$$

Введем дублет q-гипермультиплетов типа q_i^+, $i=1,2$ в том же представлении (индексы i не имеют отношения к калибровочной группе, на них реализована глобальная группа $SU(2)$, носящая название группы Паули–Гюрси). Разложим этот комплексный дублет по гармоникам $u_i^\pm$, воспользовавшись свойством их полноты (см. определение (1.1.1)):

$$q_i^+ = u_i^+\omega + u_i^- f^{++}, \quad \widetilde{q}^{+i} = u^{+i}\widetilde{\omega} + u^{-i}\widetilde{f}^{++}. \qquad (3.1.2)$$

Подставим (3.1.2) в действие для гипермультиплета q_i^+, имеющее вид (см. (1.3.4)):

$$S_q = -\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\widetilde{q}^{+i}(D^{++}+iV^{++})q_i^+. \qquad (3.1.3)$$

Получим

$$\begin{aligned} S_q \;\; = \;\; & -\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\{f^{++}(D^{++}-iV^{++})\widetilde{\omega} + \\ & +\widetilde{f}^{++}(D^{++}+iV^{++})\omega + \widetilde{f}^{++}f^{++}\}. \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

Мы видим, что суперполя f^{++} и $\widetilde{f}^{++}$ являются вспомогательными. Если их исключить с помощью уравнений движения

$$(D^{++}-iV^{++})\widetilde{\omega} = -\widetilde{f}^{++}, \quad (D^{++}+iV^{++})\omega = -f^{++}, \qquad (3.1.5)$$

то приходим к действию (3.1.1).

Рассмотрим теперь эффективное действие теории (3.1.3):

$$\mathrm{e}^{i\Gamma_q[V^{++}]} = \int \mathcal{D}\widetilde{q}^{+}\mathcal{D}q^{+}\mathrm{e}^{iS_q[\widetilde{q}^{+i},q_i^{+},V^{++}]}\ . \tag{3.1.6}$$

Функциональный интеграл в правой части (3.1.6) после линейной замены переменных (3.1.2) (заметим, что якобиан этой замены является константой и может быть опущен) переходит в интеграл

$$\int \mathcal{D}\widetilde{\omega}\mathcal{D}\omega\mathcal{D}\widetilde{f}^{++}\mathcal{D}f^{++}\mathrm{e}^{iS[\widetilde{\omega},\omega,\widetilde{f}^{++},f^{++},V^{++}]}\ ,$$

где

$$S[\widetilde{\omega},\omega,\widetilde{f}^{\ ++},f^{++},V^{++}] = S_q[\widetilde{q}^{\ +i},q_i^{+},V^{++}]\ ,$$

при условии, что $q_i^{+},\widetilde{q}^{\ +i}$ заменены на $\omega,\widetilde{\omega},f^{++},\widetilde{f}^{\ ++}$ с помощью (3.1.2). На самом деле, $S[\widetilde{\omega},\omega\ \widetilde{f}^{\ ++},f^{++},V^{++}]$ имеет вид (3.1.4), как уже было показано. Интегрируя по суперполям $\widetilde{f}^{\ ++},f^{++}$ (то есть исключая их из действия $S[\widetilde{\omega},\omega\ \widetilde{f}^{\ ++},f^{++},V^{++}]$ с помощью уравнений движения (3.1.5)), мы приходим к функциональному интегралу

$$\int \mathcal{D}\ \widetilde{\omega}\ \mathcal{D}\omega\ \mathrm{e}^{iS_\omega[\widetilde{\omega},\omega,V^{++}]},$$

где $S_\omega[\widetilde{\omega},\omega,V^{++}]$ имеет вид (3.1.1). В итоге получаем

$$\Gamma_q[V^{++}] = \Gamma_\omega[V^{++}], \tag{3.1.7}$$

где

$$\mathrm{e}^{\Gamma_\omega[V^{++}]} = \int \mathcal{D}\ \widetilde{\omega}\ \mathcal{D}\omega\ \mathrm{e}^{iS_\omega[\widetilde{\omega},\omega,V^{++}]}. \tag{3.1.8}$$

С другой стороны, очевидно,

$$\Gamma_q[V^{++}] = 2\Gamma[V^{++}], \tag{3.1.9}$$

где

$$\mathrm{e}^{i\Gamma[V^{++}]} = \int \mathcal{D}\ \widetilde{q}^{\ +}\mathcal{D}q^{+}\mathrm{e}^{iS[\widetilde{q}^{+},q^{+},V^{++}]}, \tag{3.1.10}$$

а действие $S[\widetilde{q}^{\ +},q^{+},V^{++}]$ есть действие одного q-гипермультиплета (1.3.4).

Проведенный анализ показывает, что между эффективными действиями одного комплексного q-гипермультиплета и одного комплексного ω-гипермультиплета имеет место следующая связь:

$$\Gamma_\omega[V^{++}] = 2\Gamma[V^{++}]. \tag{3.1.11}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать теорию возмущений и вычислять эффективное действие только q-гипермультиплета. Соотношение (3.1.11) позволит обобщить полученные результаты на ω-гипермультиплет.

3.2. Голоморфность и центральный заряд. Прежде чем приступать к нахождению голоморфного эффективного действия, необходимо понять критерий его существования. Таким критерием является центральный заряд.

Алгебра $N = 2$ суперсимметрии согласно теореме Хаага–Лопушанского–Сониуса [88] в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2i\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}Z, \quad \{\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, \bar{Q}^j_{\dot\beta}\} = 2i\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon^{ij}\bar{Z}, \\ &\{Q_{\dot\alpha i}, \bar{Q}^j_{\dot\alpha}\} = 2i\delta_i{}^j P_{\alpha\dot\alpha}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Здесь $Q_{\alpha i}$ и $\bar{Q}^j_{\dot\alpha}$ — генераторы преобразований суперсимметрии, $P_{\alpha\dot\alpha}$ — генератор пространственно-временных трансляций, Z — комплексный оператор, коммутирующий со всеми генераторами супералгебры Пуанкаре, Z — центральный заряд. Алгебра (3.2.1) в общем случае обладает группой автоморфизмов $SU(2)_R \times U(1)_R$, где фактор $SU(2)_R$ осуществляет вращение по индексу i, а $U(1)_R$ — фазовые преобразования генераторов Q, $\bar{Q}$, Z, $\bar{Z}$. В частности,

$$Q_{\alpha i} \to \mathrm{e}^{ib} Q_{\alpha i},\ \bar{Q}^i_{\dot\alpha} \to \mathrm{e}^{-ib}\bar{Q}^i_{\dot\alpha}, \tag{3.2.2}$$

где b — параметр преобразования. При этом

$$\begin{aligned} &\theta^\alpha_i \to \mathrm{e}^{-ib}\theta^\alpha_i, \quad \bar\theta^{i\dot\alpha} \to \mathrm{e}^{ib}\bar\theta^{i\dot\alpha}, \\ &\mathrm{d}^4\theta \to \mathrm{e}^{4ib}\mathrm{d}^4\theta, \quad \mathrm{d}^4\bar\theta \to \mathrm{e}^{-4ib}\mathrm{d}^4\bar\theta. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

При обсуждении $N = 2$ калибровочной теории в предыдущих разделах, в частности, соответствующей дифференциальной геометрии в суперпространстве, мы исходили из $N = 2$ суперсимметрии без центральных зарядов. В этом случае из определения суперполевых напряженностей W, $\bar{W}$ (1.3.7), (1.3.6) следует, что они преобразуются в $U(1)_R$ по закону

$$W \to \mathrm{e}^{-2ib}W, \quad \bar{W} \to \mathrm{e}^{2ib}\bar{W}. \tag{3.2.4}$$

Единственный голоморфный суперфункционал, инвариантный относительно преобразований (3.2.3), (3.2.4), — само классическое действие $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса

$$\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta\, W^2. \tag{3.2.5}$$

Лагранжианы безмассовых q- и ω-гипермультиплетов, взаимодействующих с $N = 2$ калибровочным суперполем, инвариантны относительно $U(1)_R$-преобразований, причем это свойство инвариантности выполняется в отдельности для кинетических членов и членов взаимодействия (то же справедливо и для самодействия калибровочного суперполя). Таким образом, в случае $N = 2$ суперсимметрии без центральных зарядов $U(1)_R$ является точной симметрией теории возмущений, из чего, в частности, следует отсутствие нетривиальных голоморфных вкладов в квантовое эффективное действие $N = 2$ калибровочной теории (поскольку единственный $U(1)_R$ инвариантный голоморфный функционал — классическое действие (3.2.5)).

Как мы видели в п. 1.4 на примере абелевой $N = 2$ теории, наличие нетривиального постоянного конденсата $a \equiv W_0 = \mathrm{const}$, $\bar{a} \equiv \bar{W}_0$ в калибровочных напряженностях W, $\bar{W}$ радикально меняет свойства инвариантности теории, а именно: после отделения этого конденсата (включая выделение V_0^{++} (1.4.2) из V^{++}) кинетическая часть действия $q^+ - V^{++}$ (1.3.4) приобретает массовый член $\sim W_0, \bar{W}_0$ (см. (1.4.4), (1.4.6)), а ее симметрией становится $N = 2$ суперсимметрия с алгеброй (3.2.1), в которой

$$Z = \bar{W}_0 I, \quad \bar{Z} = W_0 I, \tag{3.2.6}$$

и I — генератор паули-гюрсеевской $U(1)$-симметрии, реализованной как фазовые преобразования суперполей $q^+, \tilde{q}^+$ (эта симметрия коммутирует с суперсимметрией и не имеет отношения к $U(1)_R$-симметрии). Симметрия $U(1)_R$ в такой алгебре с необходимостью нарушена (из группы автоморфизмов выживает только $SU(2)_R$). Нет такой симметрии и у свободного действия массивного q-гипермультиплета (1.4.3). Действительно, член, содержащий V_0^{++}, явно нарушает эту инвариантность:

$$V_0^{++} \to -\mathrm{e}^{-2ib}(\theta^+)^2\bar{a} - \mathrm{e}^{2ib}(\bar{\theta}^+)^2 a,$$

так как a, $\bar{a}$ — константы и не преобразуются при действии $U(1)_R$. В результате приходим к выводу, что в теории возмущений, соответствующей массивному q-гипермультиплету с массой, индуцированной ненулевым конденсатом скалярного поля $N = 2$ векторного мультиплета (первой компоненты в $W, \bar{W}$), $U(1)_R$-симметрия с необходимостью нарушена, и поэтому оказываются допустимыми голоморфные вклады в эффективное действие, отличные от (3.2.5). Ясно, что эти вклады должны пропадать в пределе нулевого центрального заряда, т.е. нулевых $a, \bar{a}$.

Таким образом, критерием наличия голоморфных вкладов в эффективном действии, зависящем от V^{++}, является наличие в теории центрального заряда. Более того, в работе Зайберга [37] было показано, что голоморфное эффективное действие однозначно восстанавливается по нарушению $U(1)_R$-автоморфизма, то есть по константному центральному заряду, который является мерой этого нарушения. Иными словами, существование голоморфных квантовых вкладов есть проявление наличия в теории центрального заряда, индуцированного ненулевыми вакуумными средними скалярного поля в калибровочном $N = 2$ мультиплете.

Итак, мы выяснили, что голоморфные квантовые поправки следует искать только в теориях с индуцированным центральным зарядом. Заметим, что в неабелевом случае, т.е. в $N = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, имеет место тот же механизм возникновения центральных зарядов за счет ненулевых вакуумных средних скалярных полей, как и в абелевом примере. При этом спонтанно нарушается и калибровочная симметрия, поскольку эти скаляры принадлежат присоединенному представлению калибровочной группы [89] (см. также обзор [40]). Этим обусловлено наличие в этих теориях голоморфных вкладов, которые будут найдены в последующих разделах. Безмассовый q-гипермультиплет не имеет центрального заряда, вследствие чего в теории с такими гипермультиплетами голоморфные вклады не возникают.

3.3. Теория возмущений для массивного гипермультиплета. Массивный гипермультиплет во внешнем абелевом калибровочном суперполе V_1^{++} описывается действием

$$S = -\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u \,\tilde{q}{}^+(D^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++})q^+. \tag{3.3.1}$$

Фоновое суперполе V_0^{++} определяет массовый член гипермультиплета и характеризуется тем, что соответствующие напряженности W_0 и $\bar{W}_0$ — константы. Оно нарушает $U(1)_R$-автоморфизм $N = 2$ супералгебры. Его явный вид дан в (1.4.2). Таким образом, первые два члена в (3.3.1) есть свободное действие (1.4.3) массивного гипермультиплета с индуцированным центральным зарядом, а третий член — минимальное взаимодействие с внешним абелевым калибровочным суперполем V_1^{++}.

Функция Грина $G^{(1,1)}(1|2)$ гипермультиплета во внешнем суперполе V_1^{++} удовлетворяет уравнению

$$[D_1^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++}]G^{(1,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2). \tag{3.3.2}$$

Введем аналитическое суперядро $Q^{(3,1)}(1|2)$ по правилу

$$G_0^{(1,1)}(1|2) = \int \mathrm{d}\zeta_3^{(-4)}\mathrm{d}u_3 G^{(1,1)}(1|3)Q^{(3,1)}(3|2)\ , \tag{3.3.3}$$

где $G_0^{(1,1)}(1|2)$ — массивный пропагатор (1.4.11). Эффективное действие

$$\Gamma[V^{++}] = i\,\mathrm{Tr}\ln(D^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++}) = -i\,\mathrm{Tr}\ln G^{(1,1)} \tag{3.3.4}$$

определено с точностью до аддитивной константы; так как $Q^{(3,1)}(1|2)$ содержит всю информацию о взаимодействии, то определим эффективное действие как

$$\Gamma[V^{++}] = i\,\mathrm{Tr}\ln Q^{(3,1)}. \tag{3.3.5}$$

Операция Tr здесь понимается в смысле

$$\mathrm{Tr}\,\Phi^{(q,4-q)} = \int \mathrm{d}\zeta_1^{(-4)}\mathrm{d}u_1\Phi^{(q,4-q)}(1|1) \tag{3.3.6}$$

для любого аналитического суперядра $\Phi^{(q,4-q)}(1|2)$.

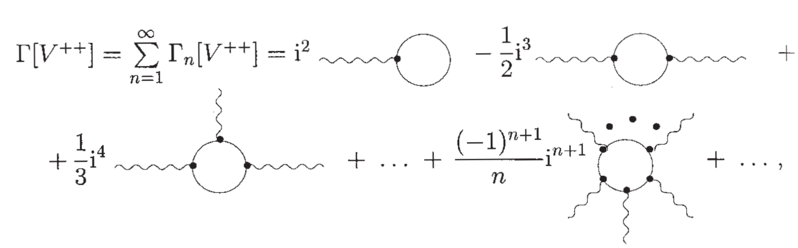
Подействуем оператором $[D_1^{++} + iV_0^{++} + iV_1^{++}]$ на обе части (3.3.3). С учетом уравнений (3.3.2) и (1.4.10) имеем

$$Q^{(3,1)}(1|2) = \delta_A^{(3,1)}(1|2) + iV_1^{++}(1)G_0^{(1,1)}(1|2). \tag{3.3.7}$$

На языке диаграмм разложение выражения

$$\ln\left(\delta_A^{(3,1)}(1|2) + iV_1^{++}(1)G_0^{(1,1)}(1|2)\right)$$

в ряд по степеням взаимодействия имеет вид:



где n-й член этого ряда $\Gamma_n[V^{++}]$ описывается суперграфом с n внешними линиями V^{++}. Уравнение (3.3.5) ведет к следующей структуре $\Gamma_n[V^{++}]$:

$$\Gamma_n[V^{++}] = i\,\frac{(-1)^n}{n}\mathrm{Tr}\,(iV_1^{++}G_0^{(1|1)})^n. \tag{3.3.8}$$

Вся зависимость от массового члена гипермультиплета V_0^{++} заключена в пропагаторе.

3.4. Вычисление низкоэнергетического эффективного действия векторного мультиплета. Первый член $\Gamma_1[V^{++}]$ в ряде теории возмущений равен нулю, так как он пропорционален $\delta^8(\theta_1 - \theta_2)|_{\theta_1=\theta_2} = 0$.

Эффективное действие во втором порядке имеет вид

$$\Gamma_2[V^{++}] = -\frac{i^3}{2}\int d^4x_1 d^4\theta_1^+ du_1 d^4x_2 d^4\theta_2^+ du_2 V_1^{++}(1)V_1^{++}(2)\times$$
$$\times\frac{1}{\Box_1+m^2}(D_1^+)^4(D_2^+)^4\left(\frac{e^{iv_0(1)}e^{-iv_0(2)}}{(u_1^+u_2^+)^3}\delta^{12}(z_1-z_2)\right)\times$$
$$\times\frac{1}{\Box_2+m^2}(D_2^+)^4(D_1^+)^4\left(\frac{e^{iv_0(2)}e^{-iv_0(1)}}{(u_2^+u_1^+)^3}\delta^{12}(z_2-z_1)\right), \quad (3.4.1)$$

где мы воспользовались явным выражением для пропагатора (1.4.11), $m^2 = W_0\bar{W}_0$. Мост v_0 связан с V_0^{++} соотношением (1.3.18). Восстановим в (3.4.1), по правилу (1.1.23), полную грассманову меру:

$$\Gamma_2[V^{++}] = \frac{i^3}{2}\int d^4x_1 d^8\theta_1 du_1 d^4x_2 d^4\theta_2 du_2 \frac{V_1^{++}(1)V_1^{++}(2)}{(u_1^+u_2^+)^6}\times$$
$$\times e^{iv_0(1)}e^{-iv_0(2)}\frac{1}{\Box_1+m^2}[\delta^4(x_1-x_2)]\delta^8(\theta_1-\theta_2)\times$$
$$\times\frac{1}{\Box_2+m^2}(D_2^+)^4(D_1^+)^4 e^{iv_0(2)}e^{-iv_0(1)}[\delta^{12}(z_2-z_1)]. \quad (3.4.2)$$

Все восемь производных $(D_2^+)^4(D_1^+)^4$ должны оказаться на грассмановой δ-функции, в противном случае получим нуль. Имеет место тождество

$$\delta^8(\theta_1-\theta_2)(D_1^+)^4(D_2^+)^4\delta^{12}(z_2-z_1) = (u_1^+u_2^+)^4\delta^4(x_2-x_1)\delta^8(\theta_2-\theta_1). \quad (3.4.3)$$

С учетом этого, и вспоминая связь между V^{++}и V^{--} (1.3.38), найдем

$$\Gamma_2[V^{++}] = \frac{i^3}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 d^8\theta du \frac{1}{\Box_1+m^2}[\delta^4(x_1-x_2)]\times$$
$$\times\frac{1}{\Box_2+m^2}[\delta^4(x_2-x_1)]V_1^{++}(x_1,\theta,u)V_1^{--}(x_2,\theta,u). \quad (3.4.4)$$

Производя преобразование Фурье

$$\delta^4(x_1-x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{ip(x_1-x_2)}, \quad (3.4.5)$$

выражение (3.4.4) можно привести к виду

$$\Gamma_2[V^{++}] = \frac{i^3}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4(p^2-m^2)^2}\int d^4x d^8\theta du\,\times$$
$$\times V_1^{++}(x,\theta,u)V_1^{--}(x,\theta,u) = \frac{i^3}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4(p^2-m^2)^2}\int d^4x d^4\theta W_1^2. \quad (3.4.6)$$

Здесь W_1 — напряженность, построенная по суперполю V_1^{++}. Эффективное действие в n-м порядке имеет вид

$$\Gamma_n[V^{++}] = \frac{(-i)^n}{n} \int \mathrm{d}^4x_1 \mathrm{d}^4\theta_1^+ \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}^4x_n \mathrm{d}^4\theta_n^+ \mathrm{d}u_n \times$$
$$\times \frac{-1}{\Box_1 + m^2}(D_1^+)^4 (D_2^+)^4 [\mathrm{e}^{iv_0(1)} \mathrm{e}^{-iv_0(2)} \delta^{12}(z_1 - z_2)] \times$$
$$\times \frac{-1}{\Box_2 + m^2}(D_2^+)^4 (D_3^+)^4 [\mathrm{e}^{iv_0(2)} \mathrm{e}^{-iv_0(3)} \delta^{12}(z_2 - z_3)] \times$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times \frac{-1}{\Box_n + m^2}(D_n^+)^4 (D_1^+)^4 [\mathrm{e}^{iv_0(n)} \mathrm{e}^{-iv_0(1)} \delta^{12}(z_n - z_1)] \times$$
$$\times \frac{V_1^{++}(1) V_1^{++}(2) \dots V_1^{++}(n)}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_2^+ u_3^+)^3 \dots (u_n^+ u_1^+)^3}. \tag{3.4.7}$$

С помощью моста v_0 перейдем к τ-производным $\mathcal{D}^+$ по правилу (1.3.11), восстановим полную грассманову меру, интегрируя по $\theta_3, \dots \theta_n$, и перейдем в импульсное представление. Выражение (3.4.7) примет вид

$$\Gamma_n[V^{++}] = \frac{(-i)^{n+1}}{n} \int \frac{\mathrm{d}^4p_1 \dots \mathrm{d}^4p_n \mathrm{d}^8\theta_1 \mathrm{d}^8\theta_2 \mathrm{d}u_1 \dots \mathrm{d}u_n}{(2\pi)^{4n}(p_1 - m^2) \dots (p_n^2 - m^2)} \times$$
$$\times \frac{\delta^8(\theta_1 - \theta_2) V_1^{++}(\theta_1, u_1) V_1^{++}(\theta_2, u_2)}{(u_1^+ u_2^+)^3 (u_2^+ u_3^+)^3 \dots (u_n^+ u_1^+)^3} [\mathcal{D}_1^+(\theta_1)]^4 \{V_1^{++}(\theta_1, u_n) \times$$
$$\times [\mathcal{D}_2^+(\theta_2)]^4 \{V_1^{++}(\theta_2, u_3) [\mathcal{D}_3^+(\theta_2)]^4 \{V_1^{++}(\theta_2, u_4) \dots \times$$
$$\times [\mathcal{D}_{n-1}^+(\theta_2)]^4 [\mathcal{D}_n^+(\theta_1)]^4 \delta^8(\theta_2 - \theta_1)\} \dots \}\}. \tag{3.4.8}$$

Здесь и далее зависимость от импульсов не выписывается. Теперь перейдем к локальному пределу. Суперполе V_1^{++} удобно выбрать в виде

$$V_1^{++} = -(\theta^+)^2 \bar{W}_1 - (\bar{\theta}^+)^2 W_1, \tag{3.4.9}$$

где $W_1, \bar{W}_1$ — константы. Это означает, что единственные члены, дающие вклад в низкоэнергетическое эффективное действие, имеют вид*

*Мы используем одно и то же обозначение как для полного эффективного действия, так и для его частей.

$$\Gamma_n[V^{++}] = \frac{(-i)^{n+1}}{n} \int \frac{\mathrm{d}^4 p_1 \ldots \mathrm{d}^4 p_n \mathrm{d}^8\theta_1 \mathrm{d}^8\theta_2 \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n}{(2\pi)^{4n}(p_1 - m^2)\ldots(p_n^2 - m^2)} \times$$
$$\times \frac{\delta^8(\theta_1-\theta_2)V_1^{++}(\theta_1,u_1)V_1^{++}(\theta_2,u_2)}{(u_1^+u_2^+)^3(u_2^+u_3^+)^3\ldots(u_n^+u_1^+)^3}[\bar{\mathcal{D}}_1^+(\theta_1)]^2 V_1^{++}(\theta_1,u_n)\times$$
$$\times[\bar{\mathcal{D}}_2^+(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2,u_3)[\bar{\mathcal{D}}_3^+(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2,u_4)\ldots\times \tag{3.4.10}$$
$$\times[\bar{\mathcal{D}}_{n-2}^+(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2,u_{n-1})\times$$
$$\times[\mathcal{D}_2^+(\theta_2)]^2[\mathcal{D}_3^+(\theta_2)]^2\ldots[\mathcal{D}_n^+(\theta_2)]^2[\mathcal{D}_1^+(\theta_1)]^2\times$$
$$\times[\bar{\mathcal{D}}_{n-1}^+(\theta_1)]^2[\bar{\mathcal{D}}_n^+(\theta_2)]^2\delta^8(\theta_2-\theta_1) + \text{к.с.}$$

Для вычисления этого выражения прежде всего заметим, что

$$\mathcal{D}^{++}V_1^{++} = D^{++}V_1^{++},$$

поскольку V_1^{++} — инвариант относительно глобальной $U(1)$-симметрии (действующей только на гипермультиплет) или, другими словами, инвариант относительно центрального заряда, который пропорционален генератору I этой симметрии (напомним (3.2.6)). Разложим производные по тем гармоникам, от которых зависят соответствующие суперполя. Например, рассмотрим $(\bar{D}_1^+)^2 V_1^{++}(u_n)$. Имеем [30]

$$\bar{D}_{1\dot\alpha}^+ = \bar{D}_{\dot\alpha}^i u_{1i}^+ = \bar{D}_{n\dot\alpha}^-(u_n^+u_1^+) - \bar{D}_{n\dot\alpha}^+(u_n^-u_1^+). \tag{3.4.11}$$

В силу аналитичности V_1^{++} (1.3.19) только один член в (3.4.11) существен:

$$(\bar{D}_1^+)^2 V_1^{++}(u_n) = (\bar{D}_n^-)^2 V_1^{++}(u_n)(u_1^+u_n^+)^2. \tag{3.4.12}$$

Поэтому выражение (3.4.10) может быть переписано в виде

$$\Gamma_n[V^{++}] = \frac{(-i)^{n+1}}{n} \int \frac{\mathrm{d}^4 p_1 \ldots \mathrm{d}^4 p_n \mathrm{d}^8\theta_1 \mathrm{d}^8\theta_2 \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n}{(2\pi)^{4n}(p_1 - m^2)\ldots(p_n^2 - m^2)} \times$$
$$\times \frac{\delta^8(\theta_1-\theta_2)V_1^{++}(\theta_1,u_1)V_1^{++}(\theta_2,u_2)}{(u_1^+u_2^+)^3(u_2^+u_3^+)(u_3^+u_4^+)\ldots(u_{n-2}^+u_{n-1}^+)(u_{n-1}^+u_n^+)^3(u_n^+u_1^+)^3}\times$$
$$\times[\bar{\mathcal{D}}_3^-(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2,u_3)[\bar{\mathcal{D}}_4^-(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2,u_4)\ldots[\bar{\mathcal{D}}_n^-(\theta_2)]^2 V_1^{++}(\theta_2,u_n)\times$$
$$\times[\mathcal{D}_2^+(\theta_2)]^2[\mathcal{D}_3^+(\theta_2)]^2\ldots[\mathcal{D}_n^+(\theta_2)]^2[\mathcal{D}_1^+(\theta_1)]^2\times$$
$$\times[\bar{\mathcal{D}}_{n-1}^+(\theta_1)]^2[\bar{\mathcal{D}}_n^+(\theta_2)]^2\delta^8(\theta_2-\theta_1) + \text{к.с.} \tag{3.4.13}$$

Производные $\mathcal{D}^+$ могут быть исключены из цепочки производных, действующих на δ-функцию, с помощью тождества

$$\bar{\delta}^4(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)(\mathcal{D}^+_{n-1})^2(\mathcal{D}^+_n)^2\bar{\delta}^4(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)=(u^+_{n-1}u^+_n)^2\bar{\delta}^4(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2).$$

После ряда алгебраических преобразований (детали даны в [72]) эта цепочка сводится к оператору

$$\frac{(-1)^{n-2}i^{n-2}}{4^{n-1}}\bar{W}_0^{n-2}(u_2^+u_3^+)\ldots(u^+_{n-1}u^+_n)(\mathcal{D}_2^{+\alpha}\mathcal{D}^+_{n\alpha_2}).$$

Так как

$$\delta^4(\theta_1-\theta_2)\frac{1}{4}(\mathcal{D}_2^+\mathcal{D}_n^+)(\mathcal{D}_1^+)^2\delta^4(\theta_2-\theta_1)=-(u_1^+u_2^+)(u_n^+u_1^+)\delta^4(\theta_1-\theta_2),$$

то мы можем проинтегрировать в (3.4.13) по θ_2. В итоге получим

$$\Gamma_n[V^{++}]=\frac{(-i)(-1)^n}{n}\int\frac{\mathrm{d}^4p_1\ldots\mathrm{d}^4p_n\mathrm{d}^8\theta\mathrm{d}u_1\ldots\mathrm{d}u_n}{(2\pi)^{4n}(p_1-m^2)\ldots(p_n^2-m^2)}\bar{W}_0^{n-2}\times$$
$$\times\frac{V_1^{++}(1)V_1^{++}(2)}{(u_1^+u_2^+)^2}(\bar{D}_3^-)^2V_1^{++}(3)\ldots(\bar{D}_n^-)^2V_1^{++}(n)+\text{к.с.}\qquad(3.4.14)$$

В низкоэнергетическом пределе имеем

$$\Gamma_n[V^{++}]=\frac{(-i)(-1)^n}{n}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4(p_1-m^2)^n}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^8\theta\frac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2}{(u_1^+u_2^+)^2}\bar{W}_0^{n-2}\times$$
$$\times V_1^{++}(1)V_1^{++}(2)\int\mathrm{d}u_3(\bar{D}_3^-)^2V_1^{++}(3)\int\mathrm{d}u_4(\bar{D}_4^-)^2V_1^{++}(4)\cdots\times$$
$$\times\int\mathrm{d}u_n(\bar{D}_n^-)^2V_1^{++}(n)+\text{к.с.}\qquad(3.4.15)$$

Учитывая (1.3.38), (1.3.39), выражение (3.4.15) можно переписать в явно калибровочно-инвариантном виде

$$\Gamma_n[V^{++}]=\frac{(-i)}{n}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4(p_1-m^2)^n}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^8\theta\mathrm{d}uV_1^{++}V_1^{--}\bar{W}_0^{n-2}W_1^{n-2}+$$
$$+\text{к.с.}=\frac{(-i)}{n}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4(p_1-m^2)^n}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta\bar{W}_0^{n-2}W_1^n+\text{к.с.}\qquad(3.4.16)$$

Таким образом, низкоэнергетическое эффективное действие представляет собой сумму голоморфного и антиголоморфного членов. Существенно, что эти члены отсутствуют в безмассовом случае $W_0=0$, отвечающем нулевому центральному заряду. Это согласуется с утверждением, что все голоморфные вклады, кроме приводящих к перенормировке исходного классического действия, возникают исключительно за счет ненулевого индуцированного центрального заряда.

Выражение (3.4.16) позволяет заключить, что полное голоморфное эффективное действие массивного гипермультиплета во внешнем абелевом калибровочном суперполе имеет вид

$$\Gamma[W]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-i}{n}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4(p^2-m^2)^n}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta\bar{W}_0^{n-2}W_1^n. \tag{3.4.17}$$

Добавляя к (3.4.17) интеграл от полной производной

$$-i\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4(p^2-m^2)^n}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta\frac{W_1}{\bar{W}_0}$$

и совершая евклидов поворот, можно привести (3.4.17) к виду

$$\Gamma[W]=-\frac{1}{(4\pi)^2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta\frac{1}{\bar{W}_0^2}\int\mathrm{d}p^2p^2\ln\left(1+\frac{W_1\bar{W}_0}{p^2+m^2}\right). \tag{3.4.18}$$

Регуляризованный импульсный интеграл

$$I=\int_0^A\mathrm{d}p^2p^2\ln\left(1+\frac{W_1\bar{W}_0}{p^2+m^2}\right), \tag{3.4.19}$$

где A — ультрафиолетовое обрезание, датся выражением

$$\begin{aligned} I \;=\;& \frac{1}{2}A^2\ln\left(1+\frac{W_1\bar{W}_0}{A+m^2}\right)+\frac{1}{2}(W_1\bar{W}_0+m^2)^2\ln\frac{W_1\bar{W}_0+m^2}{\mu}-\\ &-\frac{1}{2}(W_1\bar{W}_0+m^2)^2\ln\frac{W_1\bar{W}_0+m^2+A}{\mu}+\frac{W_1\bar{W}_0}{2}A+\\ &+\frac{m^4}{2}\left(\ln\frac{A+m^2}{\mu}-\ln\frac{m^2}{\mu}\right), \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

где μ — произвольный параметр. Предпоследнее и последнее слагаемые представляют собой полную производную и константу и не дают вклада в (3.4.18). В пределе $A\to\infty$ первое слагаемое ведет себя как

$$\frac{1}{2}A^2\ln\left(1+\frac{W_1\bar{W}_0}{A+m^2}\right)=\frac{1}{2}W_1\bar{W}_0-\frac{1}{4}(W_1\bar{W}_0)^2\Rightarrow-\frac{1}{4}\bar{W}_0^2W_1^2. \tag{3.4.21}$$

Далее, учитывая, что $m^2=W_0\bar{W}_0$ (см. (1.4.6)), можно записать

$$W_1\bar{W}_0+m^2=\bar{W}_0W, \tag{3.4.22}$$

где

$$W = W_0 + W_1. \tag{3.4.23}$$

Выражение

$$-\frac{1}{2}W_0^2 W^2 \ln\frac{A^2}{\mu^2}$$

представляет собой логарифмическую расходимость и сокращается соответствующим контрчленом. В итоге перенормированное голоморфное эффективное действие имеет вид

$$\Gamma[W] = -\frac{1}{64\pi^2}\int d^4x d^4\theta \left(W^2 \ln\frac{W^2}{\mu^2} - W^2\right), \tag{3.4.24}$$

где учтено, что

$$\int d^4x d^4\theta W_1^2 = \int d^4x d^4\theta W^2. \tag{3.4.25}$$

Ренормгрупповым произволом в выборе точки нормировки можно воспользоваться, чтобы привести (3.4.24) к окончательному виду

$$\Gamma[V^{++}] = \int d^4x d^4\theta \mathcal{F}(W) + \text{к.с.},$$
$$\mathcal{F}(W) = -\frac{1}{64\pi^2} W^2 \ln\frac{W^2}{M^2}, \tag{3.4.26}$$

где M — точка нормировки.

Заметим, что в работе [70] это же эффективное действие было вычислено в рамках суперполевой теории возмущений с безмассовым гипермультиплетом посредством учета ненулевого вакуумного среднего калибровочного суперполя как дополнительного возмущения. В таком подходе остается завуалированным тот факт, что истинной симметрией теории является $N = 2$ суперсимметрия с центральным зарядом.

3.5. Голоморфное эффективное действие $N = 2$, $SU(2)$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Рассмотрим $N = 2$ суперсимметричную неабелеву калибровочную теорию с группой $SU(2)$. Пусть третья компонента суперполя V^{++} обладает ненулевым вакуумным средним:

$$\mathcal{V}^{++} \equiv V^{++3} = V_0^{++3} + V_1^{++3}, \quad \langle \mathcal{V}^{++} \rangle = V_0^{++3}. \tag{3.5.1}$$

Это означает, что калибровочная симметрия $SU(2)$ спонтанно нарушена до $U(1)$ (о спонтанном нарушении симметрии в $N = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях см. обзор [40]). Найдем голоморфное эффективное действие в этой теории.

Общее выражение для однопетлевого эффективного действия $N=2$ калибровочной теории дается соотношением (2.4.3). Прежде всего, покажем, что

$$\Gamma_1^{(1)} = \mathrm{Tr}\ln \breve{\Box}_{(2,2)} \tag{3.5.2}$$

не содержит голоморфных вкладов. Правую часть выражения (3.5.2) можно представить в виде

$$\mathrm{Tr}\ln \breve{\Box}_{(2,2)} = -\mu^{2\epsilon}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^{1-\epsilon}}\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-s\breve{\Box}_{(2,2)}}, \tag{3.5.3}$$

где мы ввели параметры регуляризации μ и ϵ, $\epsilon\to 0$ в конце вычислений. Операция Tr определена следующим образом:

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-s\breve{\Box}_{(2,2)}} = \mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4\theta_1^+\mathrm{d}u_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4\theta_2^+\mathrm{d}u_2\delta_A^{(2,2)}(1|2)\mathrm{e}^{-s\breve{\Box}}\delta_A^{(2,2)}(2|1). \tag{3.5.4}$$

Подставим в (3.5.4) явное выражение для аналитических δ-функций (1.1.25):

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-s\breve{\Box}_{(2,2)}} \quad = \quad & \mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4\theta_1^+\mathrm{d}u_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4\theta_2^+\mathrm{d}u_2 \times \\ & \times (D_1^+)^4[\delta^{12}(z_1-z_2)\delta^{(-2,2)}(u_1,u_2)] \times \\ & \times \mathrm{e}^{-s\breve{\Box}}(D_2^+)^4[\delta^{12}(z_2-z_1)\delta^{(-2,2)}(u_2,u_1)].\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Представляя первую аналитическую δ-функцию в виде [90]

$$\delta_A^{(2,2)}(1|2) = -\frac{1}{2\Box_1}(D_1^+)^4(D_2^+)^4[\delta^{12}(z_1-z_2)(D_2^{--})^2\delta^{(-2,2)}(u_1,u_2)], \tag{3.5.6}$$

можно восстановить полную грассманову меру в (3.5.5), учитывая аналитические свойства оператора $\breve{\Box}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-s\breve{\Box}_{(2,2)}} \quad = \quad & -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4\theta_1^+\mathrm{d}u_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4\theta_2^+\mathrm{d}u_2\frac{1}{\Box_1}[\delta^4(x_1-x_2)] \times \\ & \times \delta^8(\theta_1-\theta_2)\mathrm{e}^{-s\breve{\Box}}\Big((D_2^+)^4[\delta^{12}(z_1-z_2)]\delta^{(-2,2)}(u_2,u_1)\Big) \times \\ & \times (D_2^{--})^2[\delta^{(-2,2)}(u_1,u_2)].\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

При вычислении голоморфных вкладов необходимо в выражении для оператора $\breve{\Box}$ (2.3.20) положить

$$W = W_0 + W_1\ ,\ \bar W = \bar W_0 + \bar W_1\ ,\ \bar W_1 = 0\ . \tag{3.5.8}$$

В результате оператор $\breve{\Box}$ принимает вид

$$\breve{\Box} = \mathcal{D}^{\mu}\mathcal{D}_{\mu} + (D^{+\alpha}W)\mathcal{D}^{-}_{\alpha} + \frac{1}{2}\{W, \bar{W}_0\}. \tag{3.5.9}$$

Для получения ненулевого ответа в (3.5.7) необходимо, чтобы в обкладках грассмановых δ-функций оказалось по четыре производных разной киральности. Однако оператор $\breve{\Box}$ (3.5.9) содержит только производные одной киральности. Поэтому выражение (3.5.7) при условии, что оператор $\breve{\Box}$ имеет вид (3.5.9), равно нулю. Это и доказывает отсутствие голоморфных вкладов в эффективном действии (3.5.2). Аналогичным образом можно доказать, что $\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(4,0)}$ также не содержит голоморфных вкладов. В результате голоморфное эффективное действие $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса определяется выражением

$$\Gamma^{(1)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln(\mathcal{D}^{++})^2. \tag{3.5.10}$$

Эффективное действие $\Gamma^{(1)}[V^{++}]$ запишем в виде

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}] = -\Gamma_{\phi}[V^{++}], \tag{3.5.11}$$

где $\Gamma_{\phi}[V^{++}]$ — эффективное действие вещественного ω-гипермультиплета в присоединенном представлении

$$\exp(i\Gamma_{\phi}[V^{++}]) = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{i}{2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta^+\mathrm{d}u\mathcal{D}^{++}\phi\mathcal{D}^{++}\phi\right\}. \tag{3.5.12}$$

В случае калибровочной группы $SU(2)$

$$\begin{gathered}\phi = \phi^a\tau^a,\ \mathcal{D}^{++}\phi = D^{++}\phi + i[V^{++}, \phi],\\ \tau^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^a,\ [\tau^a, \tau^b] = i\sqrt{2}\epsilon^{abc}\tau^c,\ \mathrm{tr}(\tau^a\tau^b) = \delta^{ab}.\end{gathered} \tag{3.5.13}$$

При спонтанном нарушении $SU(2)$ до $U(1)$ эффективное действие есть функционал только абелева суперполя $\mathcal{V}^{++}$ (3.5.1). На таком фоне

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{++}\phi^1 = D^{++}\phi^1 + \sqrt{2}\mathcal{V}^{++}\phi^2, \quad \mathcal{D}^{++}\phi^2 = D^{++}\phi^2 - \sqrt{2}\mathcal{V}^{++}\phi^1,\\ \mathcal{D}^{++}\phi^3 = D^{++}\phi^3.\end{gathered} \tag{3.5.14}$$

При функциональном интегрировании в (3.5.12) суперполе ϕ^3 полностью отщепляется. Суперполя ϕ^1 и ϕ^2 можно объединить в один комплексный ω-гипермультиплет $\omega = \phi^1 - i\phi^2$:

$$\mathcal{D}^{++}\omega = D^{++}\omega + i\sqrt{2}\mathcal{V}^{++}\omega, \tag{3.5.15}$$

где $U(1)$-заряд суперполя ω равен $\sqrt{2}$. В п. 3.1. было показано, что эффективные действия заряженного ω-гипермультиплета и заряженного q-гипермультиплета во внешнем $U(1)$ калибровочном суперполе $\mathcal{V}^{++}$ связаны сотношением $\Gamma_{\omega}[\mathcal{V}^{++}] = 2\Gamma_q[\mathcal{V}^{++}]$. Эффективное действие $\Gamma_q[\mathcal{V}^{++}]$ определяется равенством (3.4.26), где $U(1)$-заряд q-гипермультиплета положен равным 1. В случае $U(1)$-заряда e

$$\mathcal{F}(\mathcal{W}) = -\frac{e^2}{64\pi^2}\mathcal{W}^2 \ln\frac{\mathcal{W}^2}{M^2}. \tag{3.5.16}$$

Эти соображения приводят к следующему выражению для голоморфного эффективного действия $N=2, SU(2)$ калибровочной теории:

$$\Gamma^{(1)}_{SU(2)} = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta\mathcal{W}^2 \ln\frac{\mathcal{W}^2}{M^2}. \tag{3.5.17}$$

Оно совпадает с эффективным действием, найденным Зайбергом [37] путем интегрирования $U(1)_R$-аномалии.

Заметим, что то же выражение для однопетлевого эффективного действия $N=2$, $SU(2)$ теории Янга–Миллса в кулоновской фазе было получено в работе [74] без использования формализма фонового поля, на основе теории возмущений, аналогичной той, которая была применена в п. 3.3. Голоморфный вклад возникает за счет учета во внутренних линиях заряженных недиагональных компонент калибровочного суперполя, которые при ненулевом центральном заряде приобретают массу по тому же механизму, как и заряженные гипермультиплеты. Вычисление было обобщено на случай произвольной полупростой калибровочной группы (см. также [75,105]) и было явно продемонстрировано, что в $N=4$ теории Янга–Миллса этот вклад точно сокращает аналогичную поправку, возникающую за счет заряженных гипермультиплетов, в соответствии с утверждением об отсутствии нетривиального голоморфного эффективного действия в этой теории (см. разд. 4).

4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $N=4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

4.1. Структура эффективного действия. $N=4$ суперсимметричная теория Янга–Миллса в гармоническом суперпространстве получается добавлением к действию $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса действия вещественного ω-гипермультиплета в присоединенном представлении калибровочной группы. Эквивалентность q- и ω-гипермультиплетов позволяет представить действие $N=4$ теории Янга–Миллса в виде

$$S[V^{++}, q^+, \tilde{q}^+] = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4\theta W^2 - \frac{1}{2g^2}\mathrm{tr}\int \mathrm{d}\zeta^{-4}\mathrm{d}u q^{+i}\mathcal{D}q_i^+, \tag{4.1.1}$$

где

$$q_i^+ = (q^+, \widetilde{q}^+), \; q^{+i} = \epsilon^{ij} q_j^+ = (\widetilde{q}^+, -q^+). \tag{4.1.2}$$

Преобразования дополнительной $N = 2$ суперсимметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \delta V^{++} &= (\epsilon^{\alpha i}\theta^+_\alpha + \bar{\epsilon}^i_{\dot\alpha}\bar\theta^{+\dot\alpha}) q_i^+ \,, \\ \delta q^{+i} &= -\frac{1}{4}\{(D^+)^2[(\epsilon^i\theta^-)W_\lambda] + (\bar D^+)^2[(\bar\epsilon^i\bar\theta^-)\bar W_\lambda]\} \,. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Однопетлевое эффективное действие в теории с действием (4.1.2) согласно (2.4.3) и (3.3.3) имеет вид

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}] = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln(\mathcal{D})^2 + i\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(2,2)} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(4,0)}\right] + \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln(\mathcal{D})^2 =$$

$$= i\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(2,2)} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(4,0)}\right]. \tag{4.1.4}$$

Как было показано в разд. 3, выражение $\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}$ не содержит голоморфных вкладов, поэтому низкоэнергетическое эффективное действие является неголоморфной функцией напряженности W. Согласно [62, 63] неголоморфный вклад только однопетлевой и не содержит инстантонных вкладов. Поэтому неголоморфное эффективное действие полностью содержится в (4.1.4). Прямое исследование выражения $\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}$ затруднено из-за наличия в нем гармонических сингулярностей вида $\delta(u_1, u_2)$. Однако, как будет показано в следующем разделе, разность $\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(2,2)} - \mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(4,0)}$ несингулярна.

4.2. Устранение гармонических сингулярностей. Итак, однопетлевое эффективное действие в $N = 4$ теории Янга–Миллса имеет вид

$$\Gamma^{(1)}[V^{++}] = \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(2,2)} - \frac{i}{2}\mathrm{Tr}\ln\breve{\Box}_{(4,0)}, \tag{4.2.1}$$

где оператор $\breve{\Box}$ определен равенством (2.3.20).

Представим детерминанты операторов $\breve{\Box}$ в виде функциональных интегралов по бозонным суперполям без связей v^{++}, u^{++} и $\rho^{(+4)}, \sigma$:

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Det}\;\breve{\Box}_{(2,2)}\right)^{-1} &= \int \mathcal{D}v^{++}\mathcal{D}u^{++}\,\exp\left\{-i\,\mathrm{tr}\int d\zeta^{(-4)}du\, v^{++}\,\breve{\Box}_\lambda\, u^{++}\right\}, \\ \left(\mathrm{Det}\;\breve{\Box}_{(4,0)}\right)^{-1} &= \int \mathcal{D}\rho^{(+4)}\mathcal{D}\sigma\,\exp\left\{-i\,\mathrm{tr}\int d\zeta^{(-4)}du\,\rho^{(+4)}\,\breve{\Box}_\lambda\,\sigma\right\}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Индекс λ у операторов $\breve{\Box}$ в правых частях равенств (4.2.2) означает, что в выражении для $\breve{\Box}$ все ковариантные производные и суперполя заданы в λ-представлении. Наша цель — найти низкоэнергетическое эффективное действие. Выберем фоновое поле, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{D}^{\alpha(i}\mathcal{D}^{j)}_{\alpha} W = 0. \tag{4.2.3}$$

При этих условиях операторы $\mathcal{D}^{++}$ и $\breve{\Box}$ коммутируют, поскольку

$$[\mathcal{D}^{++}, \breve{\Box}]\Phi^{(q)} = \frac{i}{4}(1-q)(\mathcal{D}^{+\alpha}\mathcal{D}^{+}_{\alpha}W)\,\Phi^{(q)} \tag{4.2.4}$$

для любого аналитического суперполя $\Phi^{(q)}$ с $U(1)$-зарядом q. Выполним в (4.2.2) следующую невырожденную замену переменных:

$$\begin{aligned} v^{++} &= \mathcal{F}^{++} + \mathcal{D}^{++}\sigma, \\ u^{++} &= \mathcal{G}^{++} + \mathcal{D}^{++}\int \mathrm{d}\tilde{\zeta}^{(-4)}\, \mathbf{G}^{(0,0)}(\zeta,\tilde{\zeta})\rho^{(+4)}(\tilde{\zeta}), \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

где v^{++}, u^{++} и σ, $\rho^{(+4)}$ являются общими аналитическими вещественными суперполями, тогда как $\mathcal{F}^{++}$ и $\mathcal{G}^{++}$ — аналитические вещественные суперполя, подчиненные связям

$$\mathcal{D}^{++}\mathcal{F}^{++} = 0, \qquad \mathcal{D}^{++}\mathcal{G}^{++} = 0. \tag{4.2.6}$$

$\mathbf{G}^{(0,0)}(\zeta_1,\zeta_2)$ — функция Грина ω-гипермультиплета, взаимодействующего с $N=2$ калибровочным суперполем. Она удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{D}^{++}_1)^2\mathbf{G}^{(0,0)}(1,2) = \delta_A^{(4,0)}(1,2) \tag{4.2.7}$$

и в τ-базисе имеет вид

$$\mathbf{G}^{(0,0)}_{\tau}(1,2) = \frac{1}{\breve{\Box}_1}(\overrightarrow{\mathcal{D}^{+}_1})^4\left\{\delta^{12}(z_1-z_2)\frac{(u^-_1u^-_2)}{(u^+_1u^+_2)^3}\right\}(\overleftarrow{\mathcal{D}^{+}_2})^4. \tag{4.2.8}$$

Чтобы найти якобиан J преобразования (4.2.5), выполним последнее в правой части тождества

$$1 = \int \mathcal{D}v^{++}\mathcal{D}u^{++}\,\exp\left\{-i\,\mathrm{tr}\int \mathrm{d}\zeta^{(-4)}\mathrm{d}u\, v^{++}\,u^{++}\right\}. \tag{4.2.9}$$

Имеем

$$\begin{aligned} 1 &= J\int \mathcal{D}\rho^{(+4)}\mathcal{D}\sigma\exp\left\{-\mathrm{i}\,\mathrm{tr}\int \mathrm{d}\zeta^{(-4)}\mathrm{d}u\,\rho^{(+4)}\,\sigma\right\}\times \\ &\times\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}\mathcal{D}\mathcal{G}^{++}\exp\left\{-i\,\mathrm{tr}\int \mathrm{d}\zeta^{(-4)}\mathrm{d}u\,\mathcal{F}^{++}\,\mathcal{G}^{++}\right\} = \\ &= J\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}\mathcal{D}\mathcal{G}^{++}\exp\left\{-i\,\mathrm{tr}\int \mathrm{d}\zeta^{(-4)}\mathrm{d}u\,\mathcal{F}^{++}\,\mathcal{G}^{++}\right\}, \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

откуда

$$J = \left(\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}\mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp\left\{ -i \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++}\, \mathcal{G}^{++} \right\} \right)^{-1} . \tag{4.2.11}$$

Делая теперь замену переменных (4.2.5) в (4.2.2), получим

$$\left(\mathrm{Det}_{(2,2)} \breve{\Box}_\lambda\right)^{-1} = J \int \mathcal{D}\rho^{(+4)}\mathcal{D}\sigma \exp\left\{ -i \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \rho^{(+4)} \breve{\Box}_\lambda\, \sigma \right\} \times$$
$$\times \int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}\mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp\left\{ -i \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++} \breve{\Box}_\lambda\, \mathcal{G}^{++} \right\}. \tag{4.2.12}$$

Тогда

$$\exp\{2i\,\Gamma^{(1)}_{N=4}\} = \frac{[\mathrm{Det}\ \breve{\Box}_{(2,2)}]^{-1}}{[\mathrm{Det}\ \breve{\Box}_{(4,0)}]^{-1}} =$$
$$= J \int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}\mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp\left\{ -i \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++}\ \breve{\Box}_{(4,0)}\ \mathcal{G}^{++} \right\} =$$
$$= \frac{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}\mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp\left\{ -i \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++} \breve{\Box}_\lambda\, \mathcal{G}^{++} \right\}}{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}\mathcal{D}\mathcal{G}^{++} \exp\left\{ -i \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++}\, \mathcal{G}^{++} \right\}}. \tag{4.2.13}$$

Полученное выражение можно переписать в другом виде:

$$\exp\{i\,\Gamma^{(1)}_{N=4}\} = \frac{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \exp\left\{ -i/2 \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++} \breve{\Box}_\lambda\, \mathcal{F}^{++} \right\}}{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++} \exp\left\{ -i/2 \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++}\, \mathcal{F}^{++} \right\}}. \tag{4.2.14}$$

Оба функциональных интеграла в (4.2.14) берутся по суперполю $\mathcal{F}^{++}$, подчиненному нетривиально зависящей от V^{++} связи (4.2.6). Перейдем в (4.2.14) к τ-базису:

$$\exp\{i\,\Gamma^{(1)}_{N=4}\} = \frac{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}_\tau \exp\left\{ -i/2 \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++}_\tau \breve{\Box}_\tau\, \mathcal{F}^{++}_\tau \right\}}{\int \mathcal{D}\mathcal{F}^{++}_\tau \exp\left\{ -i/2 \,\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u\, \mathcal{F}^{++}_\tau\, \mathcal{F}^{++}_\tau \right\}}. \tag{4.2.15}$$

Суперполе $\mathcal{F}^{++}_\tau$ подчинено связи

$$D^{++}\mathcal{F}^{++}_\tau = 0, \tag{4.2.16}$$

поскольку ковариантная производная $\mathcal{D}^{++}$ в τ-базисе совпадает с обычной. Связь (4.2.16) точно решается:

$$\mathcal{F}^{++}_\tau(z,u) = \mathcal{F}^{ij} u^+_i u^+_j, \quad \bar{\mathcal{F}}^{ij} = \mathcal{F}_{ij}. \tag{4.2.17}$$

Из условия аналитичности следует (см. п. 1.1.):

$$\mathcal{D}^{(i}_{\alpha}\mathcal{F}^{jk)} = \bar{\mathcal{D}}^{(i}_{\dot\alpha}\mathcal{F}^{jk)} = 0\ . \tag{4.2.18}$$

Поскольку в выбранном нами фоне (4.2.3) оператор $\breve{\Box}$ коммутирует с $\mathcal{D}^{++}$, он переводит пространство таких суперполей само в себя:

$$\breve{\Box}\ \mathcal{F}^{ij} = \left(\mathcal{D}^a\mathcal{D}_a + \frac{1}{2}\{W,\bar{W}\}\right)\mathcal{F}^{ij} + \\ +\frac{i}{3}\mathcal{D}^{\alpha(i}W\mathcal{D}_{\alpha k}\mathcal{F}^{j)k} + \frac{i}{3}\bar{\mathcal{D}}^{(i}_{\dot\alpha}\bar{W}\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}_{k}\mathcal{F}^{j)k}. \tag{4.2.19}$$

Далее будет удобно перейти к $N=1$ суперполевому формализму.

4.3. Переход к $N=1$ суперполям. Введем грассмановы координаты $N=1$ суперпространства $(\theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha})$ как часть координат $(\theta^\alpha_i, \bar\theta^j_{\dot\alpha})$, параметризующих его $N=2$ расширение

$$\theta^\alpha = \theta^\alpha_1, \qquad \bar\theta_{\dot\alpha} = \bar\theta^1_{\dot\alpha}, \tag{4.3.1}$$

и определим $N=1$ проекции $N=2$ суперполей по правилу

$$U| = U(x^m, \theta^\alpha_i, \bar\theta^j_{\dot\alpha})|_{\theta_2=\bar\theta^2=0}. \tag{4.3.2}$$

$N=1$ калибровочные ковариантные производные имеют вид

$$\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}^1_\alpha| = D^1_\alpha + i\,\mathcal{A}^1_\alpha|, \qquad \bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha} = \bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha}_1| = \bar{D}^{\dot\alpha}_1 + i\,\bar{\mathcal{A}}^{\dot\alpha}_1|. \tag{4.3.3}$$

Ковариантно-киральная $N=2$ напряженность W порождает два ковариатно-киральных $N=1$ суперполя

$$\begin{aligned} \Phi &= W|\ , & \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Phi &= 0, \\ 2i\ W_\alpha &= \mathcal{D}^2_\alpha W|, & \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}W_\alpha &= 0, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

причем W_α удовлетворяет тождеству Бианки

$$\mathcal{D}^\alpha W_\alpha = \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}. \tag{4.3.5}$$

Алгебра $N=1$ производных имеет вид

$$\begin{aligned} \{\mathcal{D}_\alpha, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\} &= -2i\ \mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}\ , & \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} &= \{\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}\} = 0, \\ [\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}, \mathcal{D}_\beta] &= -2i\ \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{W}_{\dot\alpha}, & [\mathcal{D}_{\alpha\dot\alpha}, \bar{\mathcal{D}}_{\dot\beta}] &= -2i\ \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}W_\alpha. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Определим $N=1$ проекции суперполя $\mathcal{F}^{ij}$:

$$\Psi = \mathcal{F}^{22}|, \qquad \bar\Psi = \mathcal{F}^{11}|, \qquad F = \bar{F} = -2i\mathcal{F}^{12}|. \tag{4.3.7}$$

Тот факт, что $\mathcal{F}^{ij}$ подчинен связям (4.3.7), означает, что $\Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{F}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot\alpha}\Psi = 0, \qquad -\frac{1}{4}\bar{\mathcal{D}}^2 F + [\Phi, \Psi] = 0. \tag{4.3.8}$$

Таким образом, Ψ — ковариантно-киральное суперполе, а F подчинено модифицированному условию линейности.

Переход в (4.2.15) к $N = 1$ суперполям осуществляется по следующей схеме. Пусть $L^{(+4)}(\zeta)$ — калибровочно-ковариантное вещественное аналитическое суперполе, удовлетворяющее связи

$$D^{++}L^{(+4)} = 0 \tag{4.3.9}$$

(условию аналитичности по гармоникам). Такая связь точно решается:

$$L^{(+4)}(\zeta) = L^{ijkl}(z)u_i^+ u_j^+ u_k^+ u_l^+. \tag{4.3.10}$$

Грассманова гармоническая аналитичность суперполя $L^{(+4)}(\zeta)$ тогда эквивалентна следующим связям для обычных $N = 2$ суперполей L^{ijkl}:

$$D_\alpha^{(i_1} L^{i_2 \cdots i_5)} = \bar{D}_{\dot\alpha}^{(i_1} L^{i_2 \cdots i_5)} = 0. \tag{4.3.11}$$

Отсюда следует, что

$$\int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u L^{(+4)} = 6 \int \mathrm{d}^8 z L^{1122}|, \qquad \mathrm{d}^8 z = \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^2\theta \mathrm{d}^2\bar{\theta}. \tag{4.3.12}$$

В качестве $L^{(+4)}$ выберем

$$L^{(+4)} = \mathrm{tr}\,(\mathcal{F}^{++}\mathcal{F}^{++}) = \mathrm{tr}\,(\mathcal{F}_\tau^{++}\mathcal{F}_\tau^{++}). \tag{4.3.13}$$

Тогда получим

$$\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u \mathcal{F}_\tau^{++}\mathcal{F}_\tau^{++} = \mathrm{tr} \int \mathrm{d}^8 z \left(2\mathcal{F}^{11}|\, \mathcal{F}^{22}| + 4\mathcal{F}^{12}|\, \mathcal{F}^{12}|\right). \tag{4.3.14}$$

Аналогично

$$\mathrm{tr} \int \mathrm{d}\zeta^{(-4)} \mathrm{d}u \mathcal{F}_\tau^{++}\, \breve{\Box}_\tau\, \mathcal{F}_\tau^{++} = \mathrm{tr} \int \mathrm{d}^8 z \Big(2\mathcal{F}^{11}|(\breve{\Box}\, \mathcal{F}^{22})| + 4\mathcal{F}^{12}|(\breve{\Box}\, \mathcal{F}^{12})|\Big). \tag{4.3.15}$$

Следуя [68], сравним результат для однопетлевого эффективного действия $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теории в $N = 2$ суперпространстве с результатом, полученным в рамках метода фонового поля в $N = 1$ суперпространстве [19]. Для этого положим

$$\Phi = 0\,. \tag{4.3.16}$$

Выражение (4.2.19) принимает вид

$$\left(\breve{\square}\mathcal{F}^{ij}\right)| = \tilde{\square}\mathcal{F}^{ij}|, \qquad \tilde{\square} = \mathcal{D}^a\mathcal{D}_a - W^\alpha\mathcal{D}_\alpha + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}}. \tag{4.3.17}$$

Как видно, оператор $\tilde{\square}$ не перемешивает компоненты $\mathcal{F}^{ij}|$. Оператор $\tilde{\square}$ является в точности тем оператором, который входит в квадратичную по квантовому калибровочному суперполю часть действия в $N = 1$ методе фонового поля [19]. Эффективное действие в этом случае определяется выражением

$$\exp\{i\,\Gamma^{(1)}_{N=4}\} = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}F \exp\left\{i \operatorname{tr}\int \mathrm{d}^8z \left(-\bar{\Psi}\tilde{\square}\Psi + \frac{1}{2}F\tilde{\square}F\right)\right\}}{\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}F \exp\left\{i \operatorname{tr}\int \mathrm{d}^8z \left(-\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2}F^2\right)\right\}}. \tag{4.3.18}$$

Из (4.3.8) при $\Phi = 0$ следует, что F — ковариантно-линейное суперполе.

В рамках $N = 1$ метода фонового поля [19]:

$$\exp\{i\,\Gamma^{(1)}_{N=4}\} = \int \mathcal{D}U \exp\left\{\frac{i}{2}\operatorname{tr}\int \mathrm{d}^8z\, U\tilde{\square}U\right\}, \tag{4.3.19}$$

где U является общим $N = 1$ суперполем. Представим его в виде суммы кирального, антикирального и линейного суперполей:

$$U = \Psi + \bar{\Psi} + F, \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Psi = 0, \qquad \bar{\mathcal{D}}^2F = 0. \tag{4.3.20}$$

Якобиан J такого преобразования определяется из соотношения

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}U \exp\left\{\frac{i}{2}\operatorname{tr}\int \mathrm{d}^8z\, U^2\right\} = \\ &= J\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}F \exp\left\{i \operatorname{tr}\int \mathrm{d}^8z \left(\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2}F^2\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Если выполнить замену переменных (4.3.20) в (4.3.19) и учесть якобиан, то мы получим в точности (4.3.18).

До этого момента $N = 2$ суперполевая напряженность была подчинена связи (4.2.3). Теперь потребуем, чтобы W лежала в подалгебре Картана:

$$[W, \bar{W}] = 0. \tag{4.3.22}$$

Заметим, что неголоморфное эффективное действие

$$\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^8\theta\mathcal{H}(W, \bar{W})$$

хорошо определено, если W лежит в подалгебре Картана. В противном случае, тождество

$$\{\mathcal{D}^i_\alpha, \mathcal{D}^j_\beta\}W = 2i\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{ij}[\bar{W}, W] \tag{4.3.23}$$

означает, что члены с производными могут давать вклад в $\mathcal{H}(W, \bar{W})$.

Дополнительно потребуем

$$\mathcal{D}_\alpha \Phi = 0,\ \mathcal{D}_\alpha W_\beta = 0. \tag{4.3.24}$$

Такой выбор достаточен для вычисления $\mathcal{H}(W,\bar{W})$ в силу равенства

$$\int \mathrm{d}^4x \mathrm{d}^8\theta \mathcal{H}(W,\bar{W}) = \int \mathrm{d}^8 z\, \mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha \bar{\mathcal{W}}_{\dot\alpha} \bar{\mathcal{W}}^{\dot\alpha}\ \frac{\partial^4 \mathcal{H}(\Phi,\bar{\Phi})}{\partial \Phi^2 \partial \bar{\Phi}^2} + \text{производные}. \tag{4.3.25}$$

Для нахождения $\mathcal{H}(W,\bar{W})$ достаточно найти первый член в правой части (4.3.25). Остальные члены восстанавливаются по суперсимметрии. В выбранном фоне

$$(\breve{\Box}\, \mathcal{F}^{ij})| = \Delta(\mathcal{F}^{ij}|), \tag{4.3.26}$$

где

$$\Delta = \mathcal{D}^m \mathcal{D}_m - W^\alpha \mathcal{D}_a + \bar{W}_\alpha \bar{\mathcal{D}}^\alpha + \frac{1}{2}\{\Phi,\bar{\Phi}\}. \tag{4.3.27}$$

С учетом (4.3.14), (4.3.15), выражение для эффективного действия сведется к следующему функциональному интегралу по $N=1$ суперполям:

$$\exp\{i\,\Gamma^{(1)}_{N=4}\} = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}F \exp\left\{i \operatorname{tr}\int \mathrm{d}^8 z\ \left(-\bar{\Psi}\Delta\Psi + \frac{1}{2}F\Delta F\right)\right\}}{\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}F \exp\left\{i \operatorname{tr}\int \mathrm{d}^8 z\ \left(-\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2}F^2\right)\right\}}. \tag{4.3.28}$$

Выражение (4.3.28) выведено из представления для эффективного действия (4.2.15), которое явно $N=2$ суперсимметрично и инвариантно относительно $SU(2)_R$-автоморфизмов $N=2$ супералгебры. Мы вправе использовать любую технику для вычисления специальных вкладов в $\Gamma^{(1)}$, в частности, редуцировать $\Gamma^{(1)}$ к $N=1$ суперполям. В этом состоит отличие от случая, когда $N=2$ или $N=4$ теории формулируются с самого начала в $N=1$ суперполях. В последнем случае только $N=1$ суперсимметрия реализована вне массовой оболочки.

Следующий шаг состоит в вычислении правой части (4.3.28) в низкоэнергетическом пределе в случае $SU(n)$ калибровочной группы, спонтанно нарушенной до максимального тора $[U(1)]^{n-1}$.

4.4. Вычисление низкоэнергетического эффективного действия в теории с калибровочной группой $SU(n)$. До этого момента калибровочная группа не фиксировалась. Теперь в качестве калибровочной группы выберем $SU(n)$. Введем базис Вейля в ее алгебре Ли [91]:

$$(e_{kl})_{pq} = \delta_{kp}\delta_{lq}, \qquad k,l,p,q = 1,2,\ldots,n. \tag{4.4.1}$$

Произвольный элемент $a \in su(n)$ выглядит следующим образом:

$$a = \sum_{k=1}^{n} a^k e_{kk} + \sum_{k \neq l} a^{kl} e_{kl}, \qquad a^{kl} = \overline{a^{lk}}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a^k = 0, \tag{4.4.2}$$

где a^i вещественны. Элемент r подалгебры Картана является диагональной матрицей с нулевым следом:

$$r = \sum_{k=1}^{n} r^k e_{kk} = \operatorname{diag}(r^1, r^2, \ldots, r^n), \qquad \sum_{i=1}^{n} r^i = 0. \tag{4.4.3}$$

Для любых элементов базиса Вейля имеем

$$\operatorname{tr}(e_{pq} e_{kl}) = 2n \operatorname{tr}_F (e_{pq} e_{kl}) = 2n\, \delta_{pl}\, \delta_{qk}. \tag{4.4.4}$$

Здесь tr_F означает след в фундаментальном представлении. Отсюда вытекает важное следствие

$$\operatorname{tr}(e_{kl} e_{lk}) = 2n; \qquad \operatorname{tr}(e_{pq} e_{kl}) = 0, \qquad p \neq l,\ q \neq k. \tag{4.4.5}$$

Коммутатор элемента r из подалгебры Картана с базисным элементом имеет вид

$$[r, e_{kl}] = (r^k - r^l) e_{kl}. \tag{4.4.6}$$

Величина $(r^k - r^l)$ представляет собой корень алгебры $su(n)$.

Для выбранной калиброчной группы напряженности $W, \bar{W}$ лежат в подалгебре Картана алгебры $su(n)$

$$W = \operatorname{diag}(W^1, W^2, \ldots, W^n), \qquad \sum_{k=1}^{n} W^k = 0. \tag{4.4.7}$$

Так как нас интересует случай, когда калибровочная группа $SU(n)$ нарушена до максимального тора $[U(1)]^{n-1}$, мы должны потребовать $W^k - W^l \neq 0$ для $k \neq l$. В случае, когда некоторые собственные значения W^k совпадают, уже некоторая неабелева подгруппа $H \in SU(n)$ остается ненарушенной. Вводя $N = 1$ проекции $\Phi = W|$ и $W_\alpha = -\frac{i}{2}\mathcal{D}^2_\alpha W|$, ассоциированные с W, мы находим $N = 1$ суперполевые корни $\Phi^k - \Phi^l$ и $W^k_\alpha - W^l_\alpha$. Ограничения на W^k, сформулированные выше, эквивалентны условиям $\Phi^k - \Phi^l \neq 0$ для $k \neq l$.

Вернемся к выражению (4.3.28). Так как суперполя Φ и W_α принадлежат подалгебре Картана, компоненты квантовых суперполей $\bar{\Psi}$, Ψ, F, которые лежат в подалгебре Картана, не взаимодействуют с фоновыми суперполями и, следовательно, отщепляются. Заметим, что связи (4.3.8) на компоненты суперполей $\Phi, \bar{\Phi}, F$, которые лежат в подалгебре Картана, превращаются, соответственно, в обычные условия (анти)киральности и линейности. С другой стороны, связи (4.3.28) позволяют выразить компоненты Ψ и $\bar{\Psi}$, лежащие вне подалгебры Картана, через F:

$$\Psi^{kl} = \frac{\bar{\mathcal{D}}^2 F^{kl}}{4(\Phi^k - \Phi^l)}, \qquad \bar{\Psi}^{kl} = \frac{\mathcal{D}^2 F^{kl}}{4(\bar{\Phi}^k - \bar{\Phi}^l)}. \tag{4.4.8}$$

Эти соотношения можно трактовать как определение кирального и антикирального суперполей Φ^{kl} и $\bar{\Phi}^{kl}$ в терминах суперполей без связей

$$V^{kl} \equiv F^{kl}, \qquad \bar{V}^{kl} \equiv F^{lk}, \qquad\qquad k < l. \tag{4.4.9}$$

В итоге функциональные интегралы в (4.3.28) сводятся к интегралам по суперполям без связей $V^{kl}, \bar{V}^{kl}$.

С учетом (4.4.5), (4.4.8) и (4.4.9) получаем

$$\operatorname{tr} \int \mathrm{d}^8 z \left(-\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2} F^2 \right) = 2n \int \mathrm{d}^8 z \sum_{k<l} \bar{V}^{kl} B_{kl} V^{kl}, \tag{4.4.10}$$

где

$$B_{kl} = \frac{1}{16} \frac{\{\bar{\mathcal{D}}^2, \mathcal{D}^2\}}{|\Phi^k - \Phi^l|^2} + 1. \tag{4.4.11}$$

Заметим, что суммирование в (4.4.10) идет только по положительным корням. В результате

$$\begin{gathered} \int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}F \exp \left\{ i \operatorname{tr} \int \mathrm{d}^8 z \left(-\bar{\Psi}\Psi + \frac{1}{2}F^2 \right) \right\} = \\ = \int \mathcal{D}\bar{V}^{kl}\mathcal{D}V^{kl} \exp\left\{ 2n\, i \int \mathrm{d}^8 z \sum_{k<l} \bar{V}^{kl} B_{kl} V^{kl} \right\} = \prod_{k<l} \operatorname{Det}^{-1}(B_{kl}). \end{gathered} \tag{4.4.12}$$

Перейдем теперь к числителю в (4.3.28). Прежде всего найдем действие Δ (4.3.27) на суперполя F^{kl}. Результат имеет вид

$$\Delta(F^{kl} e_{kl}) = (\Delta_{kl} F^{kl}) e_{kl} \qquad \text{(нет} \quad \text{суммирования)}, \tag{4.4.13}$$

где

$$\Delta_{kl} = \mathcal{D}^m \mathcal{D}_m - (W^{k\alpha} - W^{l\alpha})\mathcal{D}_\alpha + (\bar{W}^k_{\dot{\alpha}} - \bar{W}^l_{\dot{\alpha}})\bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} + |\Phi^k - \Phi^l|^2. \tag{4.4.14}$$

В результате получаем

$$\operatorname{tr} \int \mathrm{d}^8 z \left(\frac{1}{2} F \Delta F - \bar{\Psi} \Delta \Psi \right) = 2n \int \mathrm{d}^8 z \sum_{k<l} \bar{V}^{kl} B_{kl} \Delta_{kl} V^{kl}, \tag{4.4.15}$$

где B_{kl} определен в (4.4.11). Тогда ответ для функционального интеграла в (4.3.28) имеет вид

$$\int \mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}F \exp\left\{i\,\mathrm{tr}\int \mathrm{d}^8 z\left(-\bar{\Psi}\Delta\Psi + \frac{1}{2}F\Delta F\right)\right\} =$$
$$= \int \mathcal{D}\bar{V}^{kl}V^{kl}\exp\Big\{2n\,i\int \mathrm{d}^8 z\sum_{k<l}\bar{V}^{kl}B_{kl}\Delta_{kl}V^{kl}\Big\} =$$
$$= \prod_{k<l}\mathrm{Det}^{-1}(B_{kl})\mathrm{Det}^{-1}(\Delta_{kl}). \qquad (4.4.16)$$

Окончательно

$$\mathrm{e}^{i\Gamma^{(1)}} = \prod_{k<l}\mathrm{Det}^{-1}(\Delta_{kl}). \qquad (4.4.17)$$

Однопетлевая квантовая поправка $\Gamma^{(1)}$ определяется функциональным детерминантом оператора (4.4.14) в пространстве $N = 1$ суперполей, не подчиненных связям. Равенство (4.4.17) можно переписать в следующем виде:

$$\Gamma^{(1)}_{N=4} = \sum_{k<l}\Gamma_{kl}, \qquad \Gamma_{kl} = i\,\mathrm{Tr}\,\ln\Delta_{kl}. \qquad (4.4.18)$$

Теперь необходимо вычислить $\mathrm{Tr}\ln\Delta_{kl}$ при фиксированных k и l. Представим Γ_{kl} как

$$\Gamma_{kl} = -i\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s}\mathrm{e}^{-i|\Phi^k-\Phi^l|^2 s}\int \mathrm{d}^8 z\,\mathcal{U}(z,z|s), \qquad (4.4.19)$$

где $\mathcal{U}(z,z'|s)$ представляет собой швингеровское ядро [9]:

$$\mathcal{U}(z,z'|s) = \exp\{-is(\mathcal{D}^a\mathcal{D}_a - (W^{\alpha k} - W^{\alpha l})\mathcal{D}_\alpha + (\bar{W}^k_{\dot\alpha} - \bar{W}^l_{\dot\alpha})\bar{\mathcal{D}}^{\dot\alpha})\}\times$$
$$\times\,\delta^8(z-z'). \qquad (4.4.20)$$

Для вычисления неголоморфного вклада достаточно использовать приближение

$$\mathcal{U}(z,z'|s) \approx \exp\left\{is[(W^{\alpha k} - W^{\alpha l})D_\alpha - (\bar{W}^k_{\dot\alpha} - \bar{W}^l_{\dot\alpha})\bar{D}^{\dot\alpha}]\right\}\mathcal{U}_0(z,z'|s), \qquad (4.4.21)$$

где $\mathcal{U}_0(z,z'|s)$ — свободное швингеровское ядро [9]:

$$\mathcal{U}_0(z,z'|s) = \mathrm{e}^{-is\partial^a\partial_a}\delta^8(z-z') = \frac{i}{(4\pi is)^2}\delta^4(\theta-\theta')\,\mathrm{e}^{-i(x-x')^2/4s}. \qquad (4.4.22)$$

В силу тождества
$$\frac{1}{16}D^2\bar{D}^2\delta^4(\theta-\theta')=1$$
находим
$$\Gamma_{kl}=\frac{1}{(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^8z\, W^{\alpha kl}W^{kl}_{\alpha}\bar{W}^{kl}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha kl}\int_0^\infty \mathrm{d}s\, s\, \mathrm{e}^{-s\,|\Phi^{kl}|^2}, \tag{4.4.23}$$
где
$$W^{kl}_\alpha=W^k_\alpha-W^l_\alpha,\ \Phi^{kl}=\Phi^k-\Phi^l. \tag{4.4.24}$$
Вычисляя интеграл по s в (4.4.23), окончательно получаем
$$\Gamma_{kl}=\frac{1}{(4\pi)^2}\int \mathrm{d}^8z\frac{W^{\alpha kl}W^{kl}_{\alpha}\bar{W}^{kl}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha kl}}{(\Phi^{kl})^2(\bar\Phi^{kl})^2}. \tag{4.4.25}$$

Выражение (4.4.25) определяет неголоморфный потенциал $\mathcal{H}(W,\bar{W})$ в $N=4$ теории Янга–Миллса в терминах $N=1$ проекций W и $\bar{W}$. Из равенств (4.3.25), (4.4.18), (4.4.24) и (4.4.25) можно восстановить $\mathcal{H}(W,\bar{W})$:
$$\begin{aligned}&\Gamma^{(1)}=\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^8\theta\ \mathcal{H}(W,\bar{W}),\\ &\mathcal{H}(W,\bar{W})=\frac{1}{(8\pi)^2}\sum_{k<l}\ln\left(\frac{\bar{W}^k-\bar{W}^l}{\Lambda}\right)^2\ln\left(\frac{W^k-W^l}{\Lambda}\right)^2,\end{aligned} \tag{4.4.26}$$
где напряженности W^k принадлежат подалгебре Картана (4.4.7) и $W^k-W^l\neq$ $\neq 0$ при $k\neq l$. Выражение (4.4.26) представляет собой низкоэнергетическое эффективное действие в $N=4$ калибровочной теории с калибровочной группой $SU(n)$, спонтанно нарушенной до $[U(1)]^{n-1}$. Неголоморфная функция $\mathcal{H}(W,\bar{W})$, как и голоморфный эффективный потенциал в $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса [44–46], строится из корней группы $SU(n)$ и инвариантна относительно группы Вейля.

В случае теории с калибровочной группой $SU(2)$ имеем
$$W=\mathrm{diag}\,(W^1=\mathcal{W},W^2=-\mathcal{W}). \tag{4.4.27}$$
Единственный положительный корень равен $2\mathcal{W}$, и функция $\mathcal{H}(\mathcal{W},\bar{\mathcal{W}})$, согласно (4.4.26), имеет вид
$$\mathcal{H}(\mathcal{W},\bar{\mathcal{W}})=\frac{1}{(8\pi)^2}\ln\left(\frac{\bar{\mathcal{W}}}{\Lambda}\right)^2\ln\left(\frac{\mathcal{W}}{\Lambda}\right)^2, \tag{4.4.28}$$
что совпадает с найденной в [66–68].

Описанный выше метод вычисления неголоморфного эффективного потенциала $\mathcal{H}(W,\bar{W})$ пригоден для произвольной полупростой группы. В произвольной полупростой калибровочной группе G ранга r введем базис Вейля $\{h_{\hat{i}},\ e_{+\hat{\alpha}},\ e_{-\hat{\alpha}}\}$, где элементы $h_{\hat{i}}$ принадлежат подалгебре Картана, $\hat{i} = 1,\ldots,r$, $\pm\hat{\alpha}$ — положительные (отрицательные) корни. Когда калибровочная группа нарушена до максимального тора $U(1)^r$, $N=2$ напряженность имеет вид $W = \sum W_{\hat{i}} h_{\hat{i}}$, $[W, e_{+\hat{\alpha}}] = W_{+\hat{\alpha}}\, e_{+\hat{\alpha}}$, и все $W_{+\hat{\alpha}}$ — ненулевые. Неголоморфный эффективный потенциал

$$\mathcal{H}(\bar{W},W) = \frac{1}{(8\pi)^2}\sum_{+\hat{\alpha}} \ln\left(\frac{\bar{W}_{+\hat{\alpha}}}{\Lambda}\right)^2 \ln\left(\frac{W_{+\hat{\alpha}}}{\Lambda}\right)^2, \tag{4.4.29}$$

где сумма берется по положительным корням.

Соотношение (4.4.26) было также получено другими методами в работах [98, 99]. Ведущая бозонная компонента в выражении (4.4.26) найдена в работе [97]. Вывод соотношения (4.4.28), не апеллирующий к $N=1$ суперполям, предложен в недавней работе [103]. В работах [62, 99, 100] приведены аргументы в пользу того, что в $N=4$, $SU(2)$ теории поля Янга–Миллса любые пертурбативные и непертурбативные поправки к низкоэнергетическому эффективному действию (4.4.28) отсутствуют, и однопетлевой неголоморфный эффективный потенциал представляет собой точное низкоэнергетическое эффективное действие. Аналогичные аргументы в $N=4$, $SU(n)$ теории $(n>2)$ привели к заключению [99, 100] о том, что в высших петлях возможны нелогарифмические вклады в неголоморфный эффективный потенциал. Однако прямые вычисления [101] не показали наличие таких вкладов в в трех- и четырехпетлевом приближениях.

Интересно выписать ведущую бозонную компоненту в суперполевом эффективном потенциале (4.4.28). Ее легко найти, если рассмотреть выражение (4.4.28) для группы $SU(2)$. Это ведет к ведущей бозонной компоненте в форме $\dfrac{F^4}{|\varphi|^2}$, где F_{mn} — обычная абелева напряженность, а φ — скалярная компонента, входящие в суперполевую $N=2$ напряженность $\mathcal{W}$. Отметим, что в недавней работе [102] удалось построить обобщение эффективного потенциала (4.4.28), содержащее точную зависимость от постоянной напряженности F_{mn} и обладающее явной $N=2$ суперсимметрией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем основное содержание обзора.

1. Изложен метод фонового поля в $N=2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса в гармоническом суперпространстве. Показано, что однопетлевое эффективное действие определяется функциональным интегралом

по квантовому калибровочному суперполю, фермионным духам Фаддеева–Попова и бозонному духу Нильсена–Каллош. Обсуждена общая структура однопетлевого эффективного действия и показано, что голоморфные квантовые поправки в калибровке Фейнмана обусловлены исключительно вкладом духов, причем однопетлевое эффективное действие духов совпадает с точностью до коэффициента с эффективным действием ω-гипермультиплета.

2. Построен массивный гипермультиплет, в котором масса генерируется через взаимодействие с абелевым калибровочным суперполем постоянной напряженности. Такая связь нарушает $U(1)_R$-автоморфизм $N=2$ супералгебры и ведет к появлению центрального заряда. В неабелевой калибровочной $N=2$ теории аналогичный механизм возникновения центрального заряда за счет ненулевых вакуумных значений суперполевых напряженностей, принадлежащих картановской подалгебре, помимо нарушения $U(1)_R$ приводит к спонтанному нарушению калибровочной группы до подгруппы Картана.

3. В теории массивного q-гипермультиплета, взаимодействующего с абелевым калибровочным суперполем, построена теория возмущения для вычисления эффективного действия калибровочного суперполя в гармоническом суперпространстве в кулоновской фазе. В ее рамках вычислено низкоэнергетическое эффективное действие абелева калибровочного суперполя. Показано, что оно является голоморфным.

4. Описан $N=2$ суперполевой метод вычисления голоморфного эффективного действия Зайберга в $N=2, SU(2)$ калибровочной теории в кулоновской фазе на основе метода фонового поля в гармоническом суперпространстве.

5. Найдено низкоэнергетическое эффективное действие, зависящее от $N=2$ векторного мультиплета, в $N=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(n)$, спонтанно нарушенной до максимального тора $[U(1)]^{n-1}$. В отличие от рассмотренных ранее теорий с $N=2$ суперсимметрией оно является неголоморфным и строится в терминах корней группы $SU(n)$. Полученный результат может быть обобщен на случай произвольной полупростой группы Ли.

Авторы признательны С.Дж.Гэйтсу, М.Грисару, Б.де Виту, Н.Драгону, Б.М.Зупнику, Д.Люсту, Э.Сокачеву, С.Тайзену, А.А.Цейтлину за обсуждение проблем, рассмотренных в обзоре. Исследования И.Л.Б. и С.М.К. были частично поддержаны РФФИ, проект No 99-02-16617, и грантовым центром МО РФ, проект № 97-6.2-43; исследования И.Л.Б., Е.А.И. и С.М.К. были частично поддержаны совместным грантом РФФИ-DFG, проект № 99-02-04022; исследования Е.И.Б., И.Л.Б., Е.А.И. и С.М.К. были частично поддержаны грантом ИНТАС, INTAS-96-0308; исследования Б.А.О. были частично поддержаны грантом Министерства энергетики США, контракт № DE-AC02-76-ER-03072; исследования Е.А.И. были частично поддержаны РФФИ, проект № 99-02-18417.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Алгебра ковариантных производных. Стандартное $N = 2$ суперпространство параметризуется координатами $(x^\mu, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i})$. Ковариантные производные, антикоммутирующие с генераторами преобразований суперсимметрии, имеют вид

$$D_\alpha^i = \frac{\partial}{\partial \theta_i^\alpha} + i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha} i}\ ,\ \bar{D}_{\dot{\alpha} i} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha} i}} - i\theta_i^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}}$$

и удовлетворяют алгебре

$$\{D_\alpha{}^i, \bar{D}_{\dot{\alpha} j}\} = -2i\delta^i{}_j \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \{D_\alpha{}^i, D_\beta{}^j\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha} j}, \bar{D}_{\dot{\beta} j}\} = 0.$$

Их можно разложить на гармонические проекции $D_\alpha^\pm$ и $\bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm$:

$$D_\alpha{}^i = u^{+i} D_\alpha^- - u^{-i} D_\alpha^+, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha} i} = u_i^+ \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- - u_i^- \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+,$$

$$D_\alpha^\pm = D_\alpha^i u_i^\pm\ ,\ \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^i u_i^\pm.$$

Единственные ненулевые антикоммутаторы этих проекций

$$\{D_\alpha^+, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^-\} = -2i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\ ,\ \{D_\alpha^-, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+\} = 2i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}.$$

Коммутаторы спинорных и гармонических производных

$$[D^{\pm\pm}, D_\alpha^\pm] = [D^{\pm\pm}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm] = 0, \quad [D^{\pm\pm}, D_\alpha^\mp] = D_\alpha^\pm\ ,\ [D^{\pm\pm}, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\mp] = \bar{D}_{\dot{\alpha}}^\pm.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля: В 2 т. М.: Мир, 1984.
2. *Buchbinder I.L., Odintsov S.D., Shapiro I.L.* Effective Action in Quantum Gravity. Bristol; Philadelphia: IOP Publishing, 1992.
3. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of Gauge Systems. Princeton Univ. Press, 1992.
4. *Zinn-Justin J.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1994.
5. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields. V.II: Modern Applications. Cambridge Univ. Press, 1996.
6. *Bertlmann R.A.* Anomalies in Quantum Field Theory. Oxford: Clarendon Press, 1996.
7. *Gates S.J., Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* Superspace. Benjamin: Cummings, 1983.
8. *Уэст П.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1989.
9. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. IOP Publishing, 1995.

10. *Mohapatra R.N.* Unification and Supersymmetry. Springer, 1992.
11. *D'Hoker, Phong D.H.* Lectures on Supersymmetric Yang–Mills Theory and Integrable Systems. hep-th/9912271.
12. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Е.* Теория суперструн. В 2 т. М.: Мир, 1990.
13. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Yarevskaya J.* // Nucl. Phys. B. 1994. V.411. P.665–692.
14. *Бухбиндер И.Л., Кузенко С.М., Яревская Ж.В.* // ЯФ. 1993. Т.56. С.202–216.
15. *Pickering A., West P.* // Phys. Lett. B. 1996. V.383. P.54–62.
16. *West P.* // Phys. Lett. B. 1991. V.261. P.396–401.
17. *Jack I., Jones D.R.T., West P.* // Phys. Lett. B. 1991. V.258. P.383–386.
18. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Petrov A.Yu.* // Phys. Lett. B. V.321. P.372–377.
19. *Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* // Nucl. Phys. B. 1979. V.159. P.429–451.
20. *Grisaru M.T., Milewski B., Zanon D.* // Phys. Lett. B. 1985. V.155. P.357–367.
21. *Grisaru M.T., Riva F., Zanon D.* // Nucl. Phys. B. 1982. V.214. P.465–486.
22. *Grisaru M.T., Siegel W.* // Nucl. Phys. B. 1981. V.187. P.149–183.
23. *Grisaru M.T., Siegel W.* // Nucl. Phys. B. 1982. V.201. P.293–314.
24. *Grisaru M.T., Zanon D.* // Nucl. Phys. B. 1985. V.252. P.587–620.
25. *Sohnius M.* // Phys. Rept. 1985. V.128. P.39–204.
26. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* // Nucl. Phys. B. 1983. V.214. P.519–531.
27. *Мезинческу Л.* О суперполевой формулировке $O(2)$-суперсимметрии. Препринт ОИЯИ Р2-12572. Дубна, 1979.
28. *Siegel W., Gates S.J.* // Nucl. Phys. B. 1981. V.189. P.295–316.
29. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* // Nucl. Phys. B. 1984. V.236. P.125–166.
30. *Galperin A. et al.* // Class. Quant. Grav. 1984. V.1. P.469–498.
31. *Galperin A. et al.* // Class. Quant. Grav. 1985. V.2. P.601–616.
32. *Galperin A. et al.* // Class. Quant. Grav. 1985. V.2. P.617–630.
33. *Sokatchev E.* Harmonic Superspace and its Application in Extended Supersymmetry // Supersymmetry and Applications: Superstrings, Anomaly and Supergravity. Cambridge University Press, 1986. P.283–309.
34. *Ivanov E.* // Chinese J. of Phys. 1996. V.34. P.862–873.
35. *Seiberg N.* The Power of Holomorphy: Exact Results in 4D SUSY Field Theories. hep-th/9408013.
36. *Shifman M.* // Prog. Part. Nucl. Phys. 1997. V.39. P.1–116.
37. *Seiberg N.* // Phys. Lett. B. 1988. V.206. P.75–80.
38. *Seiberg N., Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1994. V.426. P.19–52.
39. *Bilal A.* Duality in $N = 2$ SUSU $SU(2)$ Yang–Mills Theory. hep-th/9601007.
40. *Alvarez-Gaume L., Hassan S.F.* // Fortsch. Phys. 1997. V.45. P.159–236.
41. *Gomez C., Hernandez R.* Electric-Magnetic Duality and Effective Field Theories. hep-th/9510023.
42. *Di Vecchia P.* Duality in $N = 2, 4$ Supersymmetric Gauge Theories. hep-th/9803026.
43. *Lerche W.* // Fortsch. Phys. 1997. V.45. P.293–340.

44. *Klemm A. et al.* // Phys. Lett. B. 1995. V.344. P.169–175.
45. *Klemm A., Lerche W., Theisen S.* // Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V.11. P.1929–1974.
46. *Argyres P., Faraggi A.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V.74. P.3931–3934.
47. *Douglas M.R., Shenker S.H.* // Nucl. Phys. B. 1995. V.447. P.271–296.
48. *Danielsson U.H., Sundborg B.* // Phys. Lett. B. 1995. V.358. P.273–280.
49. *Brandhuber A., Landsteiner K.* // Phys. Lett. B. 1995. V.358. P.73–80.
50. *Seiberg N., Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1994. V.431. P.484–550.
51. *de Wit B., Grisaru M.T., Roček M.* // Phys. Lett. B. 1996. V.374. P.297–303.
52. *Grisaru M.T., Roček M., von Unge R.* // Phys. Lett. B. 1996. V.383. P.415–421.
53. *Lindström U. et al.* // Phys. Lett. B. 1996. V.374. P.297–303.
54. *Clark T.E., Love S.T.* // Phys. Lett. B. 1996. V.388. P.577–580.
55. *Ivanov E., Ketov S., Zupnik B.* // Nucl. Phys. B. 1997. V.509. P.53–82.
56. *Howe P.S., Stelle K.S., West P.S.* // Phys. Lett. B. 1983. V.144. P.55–58.
57. *Brink L., Lindgren O., Nilsson B.* // Phys. Lett. B. 1983. V.123. P.323–328.
58. *Mandelstam S.* // Phys. Lett. B. 1983. V.213. P.149–168.
59. *Sohnius M., West P.* // Phys. Lett. B. 1981. V.100. P.245–256.
60. *Montonen C., Olive D.* // Phys. Lett. B. 1977. V.72. P.117–127.
61. *Osborn H.* // Phys. Lett. B. 1979. V.83. P.321–330.
62. *Dine M., Seiberg N.* // Phys. Lett. B. 1997. V.409. P.239–244.
63. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Ovrut B.A.* // Phys. Lett. B. 1998. V.433. P.335–345.
64. *Dorey N. et al.* // Phys. Lett. B. 1997. V.408. P.213–221.
65. *Bellisai D. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V.56. P.5218–5232.
66. *Gonzalez-Rey F., Roček M.* // Phys. Lett. B. 1998. V.434. P.303–311.
67. *Periwal V., von Unge R.* // Phys. Lett. B. 1998. V.430. P.71–76.
68. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V.13. P.1623–1635.
69. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* // Class. Quant. Grav. 1998. V.14. P.L157–L162.
70. *Buchbinder I.L. et al.* // Phys. Lett. B. 1997. V.412. P.309–319.
71. *Buchbinder I.L. et al.* // Phys. Lett. B. 1998. V.417. P.61–71.
72. *Buchbinder E.I. et al.* // Mod. Phys. Lett. A. 1998. V.13. P.1071–1082.
73. *Buchbinder E.I., Buchbinder I.L., Kuzenko S.M.* // Phys. Lett. B. 1999. V.446. P.216–223.
74. *Eremin S., Ivanov E.* // Mod. Phys. Lett. A. 2000. V.15. P.1859–1878.
75. *Buchbinder I.L., Samsonov I.B.* // Mod. Phys. Lett. A. 1999. V.14. P.2537–2544.
76. *Buchbinder E.I.* Holomorphic Effective Action in Massive Hypermultiplet Theory // Proc. of the 2nd Intern. Conf. «Quantum Field Theory and Gravity», July 28 – Aug. 2, 1997. Tomsk, 1997. P.159–163.
77. *Buchbinder I.L.* Effective Action of $N = 2$ Supersymmetric Field Theories in Harmonic Superspace Approach // Proc. of the 2nd Intern. Conf. «Quantum Field Theory and Gravity», July 28 – Aug. 2, 1997. Tomsk, 1997. P.41–52.

78. *Buchbinder I.L., Ovrut B.A.* Background Field Method and Structure of Effective Action in $N = 2$ Super Yang–Mills Theories // Proc. of the 31st Intern. Symp. «Theory of Elementary Particles», Ahrenshoop, Sept. 2–6, 1997. Buckow; Berlin; Weinheim; New York; Chichester; Brisbane; Singapore; Toronto, 1998. P.33–39.
79. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Ovrut B.A.* Covariant Harmonic Supergraphity for $N = 2$ Super Yang–Mills Theories // Proc. of the Intern. Sem. Dedicated to the Memory of V.I.Ogievetsky, «Supersymmetries and Quantum Symmetries», Dubna, Russia, July 22–26, 1997. Springer, 1999. P.21–36.
80. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
81. *Sohnius M.* // Nucl. Phys. B. 1978. V.138. P.109–121.
82. *Grimm R., Sohnius M., Wess J.* // Nucl. Phys. B. 1978. V.133. P.275–295.
83. *Zupnik B.* // Phys. Lett. B. 1987. V.183. P.175–176.
84. *Scherk J., Schwarz J.* // Nucl. Phys. B. 1979. V.153. P.61–88.
85. *Де Витт Б.С.* Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
86. *Арефьева И.Я., Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* // ТМФ. 1974. Т.21. С.311–321.
87. *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
88. *Haag R., Lopuszanski J.T., Sohnius M.* // Nucl. Phys. B. 1975. V.88. P.257–274.
89. *Witten E., Olive D.* // Phys. Lett. B. 1978. V.78. P.97–106.
90. *Galperin A., Ky N.A., Sokatchev E.* // Mod. Phys. Lett. A. 1987. V.2. P.33–36.
91. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. В 2 т. М.: Мир, 1980.
92. *McArthur I.N., Gargett T.D.* // Nucl. Phys. B. 1997. V.479. P.525.
93. *Pletnev N.G., Banin A.T.* // Phys. Rev. D. 1999. V.60. P.105017.
94. *Buchbinder I.L., Petrov A.Yu., Cvetic M.* // Mod. Phys. Lett. A. 2000. V.15. P.783.
95. *Buchbinder I.L., Petrov A.Yu., Cvetic M.* // Nucl. Phys. B. 2000. V.571. P.358.
96. *Banin A.T., Buchbinder I.L., Pletnev N.G.* // Nucl. Phys. B. 2001. V.598. P.371.
97. *Chepelev I., Tseytlin A.A.* // Nucl. Phys. B. 1998. V.511. P.629.
98. *Gonzalez-Rey F. et al.* // Nucl. Phys. B. 1999. V.544. P.218.
99. *Love D.A., von Unge R.* // JHEP. 1998. V.9811. P.014.
100. *Dine M., Gray J.* // Phys. Lett. B. 2000. V.481. P.427.
101. *Buchbinder I.L., Petrov A.Yu.* // Phys. Lett. B. 2000. V.482. P.429.
102. *Buchbinder I.L., Kuzenko S.M., Tseytlin A.A.* // Phys. Rev. D. 2000. V.62. P.045001.
103. *Kuzenko S.V., McArthur I.N.* Effective Action of $N = 4$ Super Yang–Mills: $N = 2$ Superspace Approach. hep-th/0101127.
104. *Бухбиндер И.Л., Кузенко С.М., Петров А.Ю.* // ЯФ. 1996. Т.59. С.157.
105. *Бухбиндер И.Л., Самсонов И.Б.* // ТМФ. 2000. Т.122. С.444.
106. *Polchinski J.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V.75. P.4724.
107. *Polchinski J.* Tasi Lectures on D-Branes. hep-th/9611050.
108. *Taylor W.* Lectures on D-Branes, Gauge Theory and M(atrices). hep-th/9801182.
109. *Tseytlin A.A.* Born–Infeld Action, Supersymmetry and String Theory. hep-th/9908105.

110. *Maldacena J.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V.2. P.231.

111. *Akhmetov E.T.* Introduction to the AdS/CFT Correspondence. hep-th/9911095.

112. *Petersen J.L.* Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT. hep-th/9902131.

113. *Aharony O. et al.* // Phys. Rept. 2000. V.323. P.183.

114. *Di Veccia P.* Large N Gauge Theories and AdS/CFT Correspondence. hep-th/9908148.