

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНЫХ U(2)-СОЛИТОНОВ

В.Г.Маханьков, Х.Т.Холмуродов *

Исследована устойчивость одно- и двухсолитонных решений векторного уравнения Шредингера с компактной U(2)-группой внутренней симметрии. С помощью вычислительного эксперимента показано, что N=1 векторный солитон ("мелкая яма") устойчив по отношению как к начальным возмущениям, вносимым ЭВМ, так и к структурным возмущениям, связанным с дискретизацией модели. N=2 векторный солитон ("глубокая яма") оказывается неустойчивым, причем скорость его распада на два скалярных N=1 солитона зависит как от амплитуды солитона, так и шага сетки. Последнее указывает на структурный характер неустойчивости.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Numerical Study of Stability of Vector U(2)-Solitons

V.G.Makhankov, Kh.T.Kholmurodov

The stability of one- and two-soliton solutions of vector Schrödinger equation with a compact group U(2) of internal symmetry is investigated. The computational experiment has shown that the N=1 vector soliton ("shallow pit") is stable with respect to initial excitations made by computer and structural excitations connected with discretization of the model. The N=2 vector soliton ("deep pit") is unstable, moreover, the speed of his decay on two scalar N=1 solitons depends on both a soliton amplitude and a lattice step. The latter points to the structural character of unsteadiness.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

1. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i\psi_t + \psi_{xx} + U(x, t) \cdot \psi = 0, \quad (1a)$$

$$\square U = F(U, |\psi|^2) \quad (1b)$$

* Таджикский государственный университет им. В.И.Ленина, Душанбе

с самосогласованным потенциалом U , подчиняющимся некоторому неоднородному волновому уравнению, описывает широкий класс нелинейных явлений физики конденсированного состояния, плазмы и т.д. Во многих физических приложениях система (1а,б) естественно возникает при описании взаимодействия пакетов ВЧ-волн ψ с НЧ-волной U , линейной и нелинейной.

Различные варианты условия согласования (1б), при которых модель (1а) будет интегрируемой, рассмотрены в работах ^{/1-2/}. На основе метода, изложенного в ^{/2/}, можно не только описать в принципе класс условий согласования, порождающих интегрируемые системы, но и построить точные (многосолитонные) решения соответствующих уравнений и изучить взаимодействие солитонов.

Наиболее простые из них, полученные в ^{/3,4/}, одно- и двухсолитонные решения $U(2)$ НУШ имеют в системе покоя ($v=0$) вид

$$\psi^I = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{i\lambda^2 t} \cdot \operatorname{sech} \lambda(x - x_0), \quad |C_1|^2 + |C_2|^2 = 2\lambda^2, \quad (2a)$$

$$\psi^{II} = \begin{pmatrix} C_1 e^{4i\lambda^2 t} \cdot \operatorname{sh} \lambda(x - x_0) \\ C_2 e^{i\lambda^2 t} \end{pmatrix} \cdot \operatorname{sech}^2 \lambda(x - x_0), \quad (2б) \\ |C_1|^2 = |C_2|^2 = 6\lambda^2.$$

Представляет интерес исследовать устойчивость (начальную и структурную) таких объектов, чему и посвящена настоящая работа.

2. $U(2)$ НУШ аппроксимировалось с помощью следующей системы явных разностных схем типа "leap frog":

$$i \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + (|u_m^n|^2 + |v_m^n|^2) \cdot u_m^n = 0, \quad (3a)$$

$$i \frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2 \cdot \Delta t} + \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{(\Delta x)^2} + (|u_m^n|^2 + |v_m^n|^2) \cdot v_m^n = 0, \quad (3б)$$

где $u_m^n = \psi_1(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$, $v_m^n = \psi_2(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$. Для контроля точности расчетов вычислялись значения следующих интегралов движения $U(2)$ НУШ:

а) энергия системы

$$E = \int_{-L}^L \left\{ \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 \right\} dx,$$

б) число частиц

$$N_i = \int_{-L}^L |\psi_i|^2 dx, \quad i = 1, 2.$$

Их сохранение проверялось по следующим оценкам

$$\frac{\delta E}{E_0} = \frac{E(t) - E_0}{E_0}, \quad \frac{\delta N_i}{N_{0i}} = \frac{N_i(t) - N_{0i}}{N_{0i}}. \quad (4)$$

Мы не вносили в систему никаких специальных возмущений; роль структурных возмущений играли естественные погрешности аппроксимации непрерывной задачи (1а) разностной (3а,б), а начальные возмущения вносились самой ЭВМ. Расчеты проводились при различных значениях параметра λ , определяющего амплитуду и ширину солитонов. Результаты даны в табл. 1 и 2, а также на рис. 1-3.

Анализ расчетов показывает, что при малых амплитудах ($\lambda \leq 0,5$) начальное состояние из двух нелинейно связанных волн

$$u_m^0 = C_1 \cdot \operatorname{sh} \lambda (m \cdot \Delta x - x_0) \cdot \operatorname{sech}^2 \lambda (m \cdot \Delta x - x_0), \quad (5a)$$

$$v_m^0 = C_2 \cdot \operatorname{sech}^2 \lambda (m \cdot \Delta x - x_0), \quad |C_1|^2 = |C_2|^2 = 6\lambda^2 \quad (5b)$$

живет в течение длительного времени ($\tau \sim 300$).

В табл. 1 приведен пример такого "устойчивого" режима при $\lambda = 1/6$. Параметры разностной схемы для данного примера суть $\Delta x = 0,4$, $\Delta t = 0,01$, а $(-40, 40)$ — интервал интегрирования.

Ниже для наглядности будем рассматривать начальный пакет (2б), состоящий из двух "солитонов" поля u_m^0 амплитуды которых в табл. 1 обозначены через $a^{(l)}$ и $a^{(r)}$ (левый и правый горбы на рис. 1а), и "солитона" поля v_m^0 с амплитудой A , связанных между собой.

При достаточно больших амплитудах $a^{(l)}$ за время счета происходит непрерывное усиление одного из горбов с одновременным уменьшением другого (в разных экспериментах равновероятно усиливается либо левый, либо правый горб). С увеличением амплитуды, например, $a^{(l)}$ левого "солитона" и умень-

Таблица 1

T	0	50	100	150	200	250	350
$a^{(n)}$	0,20408	0,20413	0,20451	0,20392	0,20454	0,20477	0,20435
$a^{(n)}$	0,20408	0,20413	0,20451	0,20392	0,20445	0,20469	0,20463
A	0,40825	0,40923	0,40891	0,40840	0,40936	0,40901	0,40925
$\delta N_1 / N_{01}$	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00000	0,00003	0,00033
$\delta N_2 / N_{02}$	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00000	0,00000	0,00000	-0,0000
$\delta E / E_0$	0,00000	-0,00001	-0,00009	-0,00026	-0,00060	-0,0018	-0,0197

Таблица 2

T	0	10	20	40	55	65	75
$a^{(n)}$	1,22259	1,22504	1,22560	1,22685	1,28154	1,41396	1,41698
$a^{(n)}$	1,22259	1,22504	1,22552	1,22155	1,15151	0,61605	0,093
A	2,44949	2,46055	2,47188	2,45595	2,48405	2,73583	2,85105
$\delta N_1 / N_{01}$	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$\delta N_2 / N_{02}$	0,00000	0,00001	0,000020	0,00011	0,00017	0,00018	0,00018
$\delta E / E_0$	0,00000	0,004	0,007	0,0012	0,006	0,008	0,012

шением амплитуды $a^{(n)}$ правого происходит разделение "солитонов": они начинают двигаться в противоположных направлениях. При этом третий "солитон" v_m^n движется вместе с затухающим u_m^n "солитоном". Пример такого режима при $\lambda = 1$, параметрах схемы $\Delta x = 0,12$, $\Delta t = 0,001$ и интервал интегрирования $(-15,15)$ приведен в табл. 2, а сам процесс изображен на рис. 1 а-в.

Таким образом, покоящееся начальное состояние из трех "солитонов" распадается на два движущихся в противоположных направлениях солитона. Этот процесс схематически можно изобразить как

$$\begin{pmatrix} C_1 \cdot \text{sh} \\ C_2 \end{pmatrix} \text{sech}^2 \rightarrow (\text{sech}, 0)^T + (0, \text{sech})^T.$$

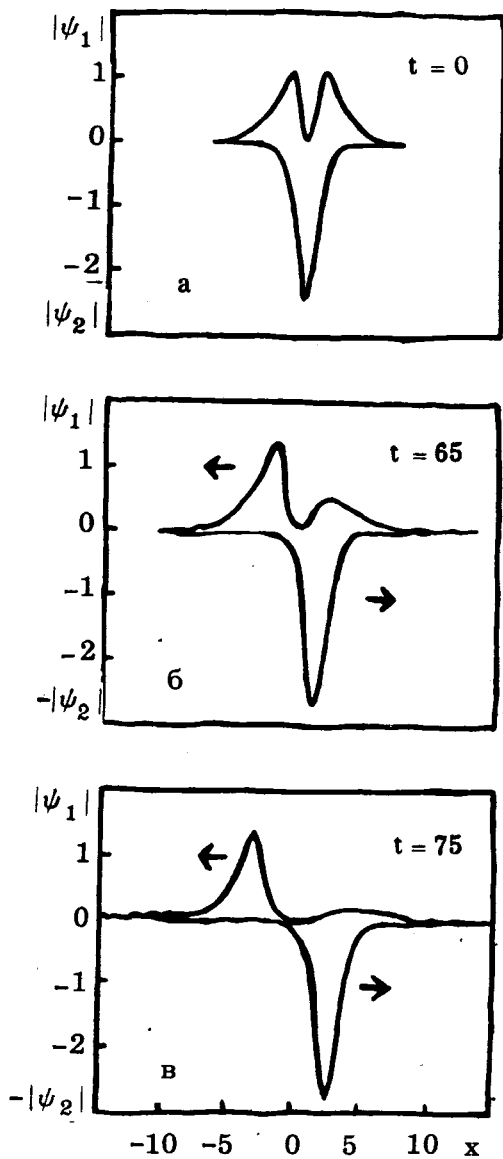


Рис. 1. Эволюция начального состояния (5) при $\lambda = 1$.

(5а-б) на два расходящихся скалярных солитона с ростом Δx — шага сетки по координате.

На рис. 3 изображена зависимость времени распада t_p (времени, при котором $|\Delta| = |\Delta_1 - \Delta_2|$ становится равным 10%, где

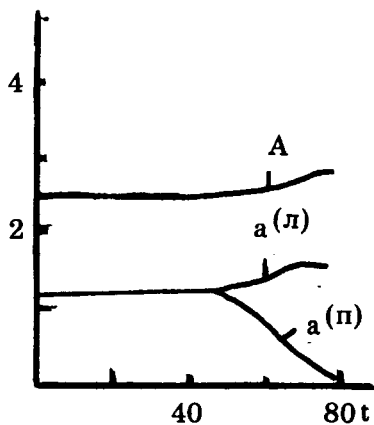


Рис. 2. Зависимость амплитуд "солитонов" (5) от времени.

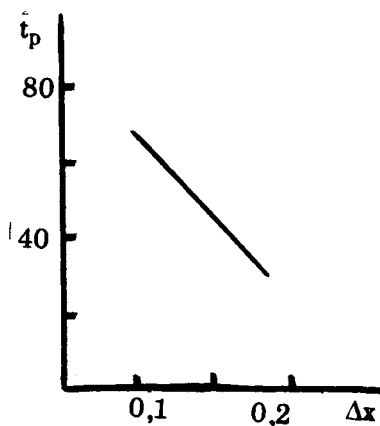


Рис. 3. Зависимость времени распада начального состояния (5) от шага сетки.

На рис. 2. приведена зависимость амплитуд "солитонов" от времени.

Отметим, что время распада начального состояния

уменьшается с ростом Δx — шага сетки по координате.

На рис. 3 изображена зависимость времени распада t_p (времени, при котором $|\Delta| = |\Delta_1 - \Delta_2|$ становится равным 10%, где

$$\Delta_{1(2)} = \frac{a^{n(n)}(t) - a^{n(n)}(t=0)}{a^{n(n)}(t=0)},$$

100% — относительное изменение амплитуды горбов) начального состояния от шага сетки при заданной амплитуде.

Исследование начального состояния (2а) указывает на устойчивость такого солитона. За время счета на ЭВМ каких-либо заметных изменений его не происходило. Заметим, что аналогичный результат был получен ранее^{/5/} при исследовании устойчивости и взаимодействий векторных солитонов U(1,1) НУШ, в том числе для смешанных солитонов капельно-дырочного типа^{/6/}

$$\psi = \begin{pmatrix} a \operatorname{sech} \kappa \xi \cdot \exp \{i(vx/2 - \omega t)\} \\ b(\operatorname{th} \kappa \xi + iv/2\kappa) \end{pmatrix},$$

$$\omega = \frac{v^2}{4} - \kappa^2 - 2\mu,$$

$$\kappa^2 = a^2 + b^2.$$

Полученные нами результаты не позволяют с достаточной достоверностью утверждать, что состояние (5а-б) неустойчиво в рамках исходной континуальной (интегрируемой) модели (1а), скорее наоборот, поскольку время развития неустойчивости растет при уменьшении шага дискретизации, т.е. при уменьшении структурного возмущения. С полной уверенностью можно говорить, что двойной солитон (5а) является структурно неустойчивым состоянием. Временем развития неустойчивости и ее направлением (в смысле роста правого или левого горба) можно управлять с помощью начального возмущения.

Все это указывает на необходимость осторожности, с которой надо подходить к физической интерпретации многосолитонных решений векторных версий НУШ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Makhankov V.G. — *Phys. Rep.*, 1978, 35 с, p.1.
2. Кричевер И.М. — *Функциональный анализ*, 1986, 20, с.42.
3. Манаков С.В. — *ЖЭТФ*, 1973, 65, с.505.
4. Маханьков В.Г., Мырзакулов Р. *ОИЯИ, P5-86-356, Дубна, 1986.*
5. Маханьков В.Г., Панова Е.Ю., Швачка А.Б. *ОИЯИ, P11-83-870, Дубна, 1983.*
6. Makhankov V.G. — *Phys. Lett*, 1981, 81A, p.156.

Рукопись поступила 2 октября 1987 года.