

УДК 539.1.01

ДИРАКОВСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ТЕОРИИ
ОТКРЫТЫХ СТРУН НАМБУ–ГОТО
В 4-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ
МИНКОВСКОГО

И. Н. Никитин

Фраунгоферовское общество, Санкт-Августин, Германия

ВВЕДЕНИЕ	100
ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНАЯ АБЕЛЕВА КАЛИБРОВКА СВЕТОВОГО КОНУСА (ЛИАКСК)	104
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИАКСК	111
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИАКСК	113
КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА	117
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	123
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	124

УДК 539.1.01

ДИРАКОВСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ТЕОРИИ ОТКРЫТЫХ СТРУН НАМБУ–ГОТО В 4-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ МИНКОВСКОГО

И. Н. Никитин

Фраунгоферовское общество, Санкт-Августин, Германия

Представлен подход для устранения аномалий в квантовой теории открытых релятивистских струн Намбу–Гото, сформулированной в пространстве-времени Минковского размерности $d = 4$. Ключевая идея состоит в выборе калибровки светового конуса с осью калибровки, связанной лоренц-инвариантным образом с мировым листом. В этом подходе группа Лоренца преобразует мировой лист вместе с осью калибровки и не сопровождается репараметризациями. В результате этой теории становится свободной от аномалий в группе Лоренца и в группе внутренних симметрий системы. Показано, что калибровочные условия абелева типа приводят к алгебраически простой гамильтоновой механике, удобной для канонического квантования. Построенная квантовая теория обладает спин-массовым спектром с реджевским поведением.

This paper presents an approach for elimination of anomalies in quantum theory of open Nambu–Goto relativistic strings, formulated in Minkowski space-time of dimension $d = 4$. Clue idea is a choice of the light cone gauge, whose gauge axis is related with the world sheet in Lorentz-invariant way. In this approach Lorentz transformations act both on the worldsheet and the gauge axis, and they are not followed by reparametrizations. As a result, the theory becomes free of anomalies in Lorentz group and in the group of internal symmetries of the system. It is shown that gauge conditions of Abelian type lead to algebraically simple Hamiltonian mechanics, convenient for canonical quantization. The constructed quantum theory possesses spin-mass spectrum with Regge-like behaviour.

ВВЕДЕНИЕ

Модель релятивистской струны была предложена Намбу, Хара и Гото [1–3] в начале 1970-х гг. для описания внутренней структуры сильновзаимодействующих частиц — адронов. Начальной целью было объяснение экспериментально установленного свойства дуальности амплитуд адронных взаимодействий [4–6], а также описание структуры наблюдаемых спин-массовых спектров адронов. В настоящее время построение струнных моделей адронов продолжается [7–14]. Идеализированная теоретическая модель была оснащена необходимыми физическими деталями: кварками на концах струны, обладающими массой, электрическим зарядом, спином и другими квантовыми

числами; различными механизмами разрыва струны, ответственного за распад адронов. Обзор работ в этом направлении проведен в книгах [15].

Тем временем развитие теории струн пошло другим путем. Уже из ранних исследований [16–19] было известно, что квантование модели Намбу–Гото обладает аномалиями при физической размерности пространства-времени $d = 4$ и свободно от аномалий при $d = 26$. Также было обнаружено, что включение дополнительных фермионных степеней свободы в теорию [20, 21] сокращает аномалию при меньшем значении размерности $d = 10$. Позже этот подход был объединен с другой идеей: часть измерений рассматривалась как координаты на компактном многообразии физически малого размера. В дальнейших разработках, описанных в современных учебниках по теории струн [22, 23], в теорию включались более сложные математические структуры, рассматривались многомерные расширения струн (браны), а также их суперсимметрические аналоги, и сформировалось мощное направление в теоретической физике, служащее основой для построения *теории великого объединения*. Однако этот подход не может быть непосредственно применен для моделей адронов, предметом рассмотрения которых является бозонная 4-мерная струна Намбу–Гото, в то время как введение дополнительных размерностей и дополнительных степеней свободы видоизменяет эту систему существенно.

Вопрос о возможности построения такой теории до сих пор не имеет однозначного ответа. Было бы странно, если бы такая точно сформулированная классическая модель, как 4-мерная модель струны Намбу–Гото, не допускала бы представления операторами в гильбертовом пространстве. Однако невозможность ее квантования не была доказана. Трудность такого рода доказательств состоит в том, что структура теории существенно зависит от многочисленных деталей процедуры квантования, таких как выбор канонических переменных в фазовом пространстве, представление и правила упорядочения для операторов и т. д.

Аномалии были первоначально получены в осцилляторном представлении теории струн [16–19], подобном представлению полевых теорий операторами рождения и уничтожения. Позже этот вывод был воспроизведен в других подходах [24–27], которые, однако, обладают внутренней эквивалентностью с осцилляторным представлением. В частности, в [27] аномалии были получены с использованием методов геометрического квантования [28]. Эта техника в основном не зависит от выбора координат, за исключением выбора поляризации в предквантовом гильбертовом пространстве, и использование кэлеровской поляризации в [27] делает эту теорию эквивалентной осцилляторной. Работа [29] была, по всей видимости, первой, использующей действительно координатно-независимый подход, основанный на технике континуального интегрирования. В [29] было показано, что при $d = 26$ теория допускает осцилляторное представление, в то время как при $d \neq 26$ квантовая

теория существует и является эквивалентной нелинейной полевой теории. В операторном формализме задача была решена в работе [30], где с использованием специальной параметризации мировых листов (временеподобной калибровки) была построена последовательная квантовая теория без аномалий для струн Намбу–Гото при $d = 4$. Однако некоторые элементы построения, представленные в этой работе, являются нетипичными для квантования теорий со связями по Дираку. В частности, из пары комплексно-сопряженных связей второго рода только одна была наложена на векторы состояния, следуя методу Гупты–Блейлера [31], в то время как метод Дирака в этом случае предполагает полную редукцию [32].

В терминологии Дирака теория струн обладает связями первого рода, представляющими калибровочную симметрию — группу репараметризаций мирового листа. Имеется несколько подходов для квантования таких теорий. В первом, называемом ковариантным квантованием, в теории сохраняются все возможные параметризации мирового листа, и эквивалентность между ними реализуется на квантовом уровне как инвариантность волновых функций относительно репараметризаций. Во втором накладываются калибровочные условия в дополнение к первичным связям, которые фиксируют конкретную параметризацию на мировом листе (обычно рассматриваются параметризации светового конуса [16] и Рорлиха [30]). В этом случае полный набор связей принадлежит ко второму роду, механика должна быть редуцирована на их поверхность с помощью соответствующего переопределения скобок Пуассона и после этого может быть проквантована. Промежуточное положение занимает формализм «приведенного фазового пространства» [33], в котором роль фазового пространства выполняет фактор-пространство относительно группы калибровочных симметрий.

По сути эти подходы эквивалентны. Параметрически-инвариантные волновые функции должны быть функциями параметрических инвариантов мирового листа (коммутирующих друг с другом). Другими словами, они являются элементами фактор-пространства относительно репараметризаций (в котором нужно взять максимальное лагранжевское подмногообразие). В качестве базиса в этом пространстве можно выбрать набор канонических переменных для некоторой частной калибровки. В то же время точная эквивалентность данных подходов может быть нарушена при квантовании [33, 34]. Причина этого состоит в том, что структура теории существенно зависит от деталей процедуры квантования, которые могут различаться для данных подходов. Различия становятся особенно критическими, если рассматриваемые подходы включают элементы, не типичные для метода Дирака, такие как наложение только половины комплексно-сопряженных связей в квантовой теории.

В данной работе мы рассмотрим вопрос о возможности квантования без аномалий 4-мерной теории струны Намбу–Гото без отклонений от процедуры Дирака. Ранее эта задача была решена для некоторых подмногообразий в

фазовом пространстве струны, представляющих мировые листы специальной формы, т. е. для частных классов движения струн. Первым примером является прямолинейная струна [35] — решение, для которого струна имеет форму прямого отрезка, вращающегося относительно середины с постоянной угловой скоростью в системе центра масс. Это решение допускает квантование без аномалий при произвольном значении размерности $d \geq 3$. Оно принадлежит границе классической области Редже $P^2/2\pi \geq S$ и в квантовой теории соответствует ведущей траектории Редже $P^2/2\pi = S$ (см. рис. 1, *a*), где P^2 — квадрат массы, S — орбитальный момент струны. В [12] эта квантовая модель была расширена спиновыми переменными и электрическими зарядами кварков и с ее помощью описано большинство экспериментально наблюдаемых состояний в спектре легких мезонов, а также некоторые из их радиационных переходов.

Прямолинейная струна — существенно однопараметрическое решение, единственным параметром для которого является длина струны. В работе [36] рассмотрено обобщение этой механики и показано, что произвольное двухпараметрическое семейство движений струны, содержащее прямолинейное решение, после определенного слабого топологического ограничения допускает свободное от аномалий квантование при $d = 4$. В работе [37] рассмотрен специальный класс движения, для которого струна в системе центра масс обладает осевой симметрией, и выполнено свободное от аномалий квантование этой теории при $d = 4$ с использованием калибровки светового конуса, связанной с осью симметрии. Не должно возникнуть впечатления, что существуют некоторые специальные «квантуемые» классы движения струн, в действительности это классы движения, для которых работают достаточно простые конструкции [35–37]. Общей чертой таких теорий является то, что генераторы группы Пуанкаре в

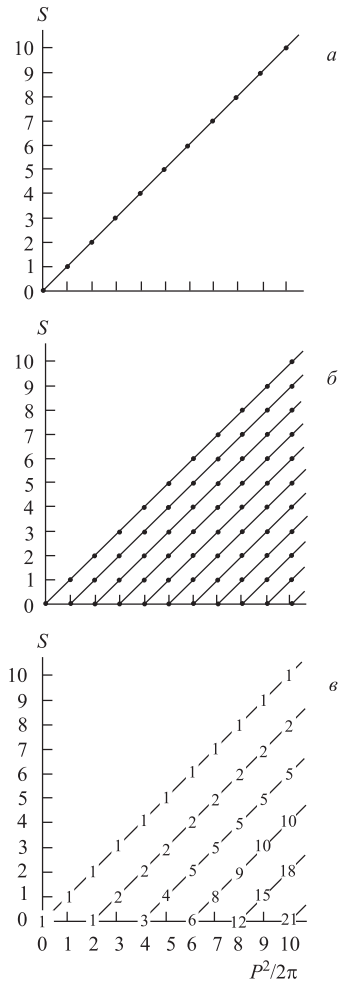


Рис. 1. Спин-массовые спектры для теорий ограниченных классов движения струн, допускающих свободное от аномалий квантование при $d = 4$: *a*) прямолинейная струна [35]; *б*) двухпараметрическая струна [36]; *в*) осесимметричная струна [37]

них представляются независимыми переменными или простыми функциями независимых переменных, что обуславливает отсутствие аномалий в квантовых теориях. Возможность построения таких наборов переменных следует из теоремы Дарбу гамильтоновской механики [40], которая обеспечивает построение канонического базиса, начиная с произвольного, заранее заданного подмножества канонических переменных, например, генераторов группы Пуанкаре и сопряженных к ним угловых переменных. Теорема Дарбу имеет локальный характер, существуют разнообразные топологические препятствия для ее распространения на все фазовое пространство. В работе [38] использовалась калибровка Рорлиха [30] и метод вспомогательной спектральной задачи [41] для построения необходимого набора переменных. Эта работа представляет перспективный подход для неаномального квантования теории струн. Техническая трудность реализации этого подхода связана прежде всего с тем, что переменные [38] обладают топологически нетривиальной областью изменения. Здесь мы распространим методы [35–37] на мировые листы общего вида. Для этой цели будем использовать определенную модификацию калибровки светового конуса, описанную в разд. 1. В разд. 2 и 3 исследуем алгебраические и геометрические свойства этой калибровки. Разд. 4 посвящен квантованию теории. В разд. 5 приводятся полученные результаты.

1. ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНАЯ АБЕЛЕВА КАЛИБРОВКА СВЕТОВОГО КОНУСА (ЛИАКСК)

Мы рассматриваем теорию открытой струны Намбу–Гото. Калибровка светового конуса связывает параметризацию мирового листа с некоторым светоподобным вектором (осью калибровки). В стандартном подходе этот вектор является нединамическим, например, $n_\mu = (1, 1, 0, 0)$. Поскольку преобразования Лоренца изменяют положение мирового листа относительно этой оси, они сопровождаются репараметризациями мирового листа. На квантовом уровне группа репараметризаций имеет аномалию, которая появляется также в группе Лоренца и нарушает лоренц-ковариантность теории. В этом состоит основная проблема теории струн в стандартной калибровке светового конуса.

Для того чтобы преодолеть эту проблему, можно использовать следующую простую идею: ось калибровки должна быть связана с самим мировым листом. Например, ось калибровки можно связать с некоторыми *динамическими* векторами в теории струн, описывающими такие характеристики мирового листа, как полный импульс, орбитальный момент и др. В этом случае преобразования Лоренца перемещают ось калибровки вместе с мировым листом, и параметризация на мировом листе не меняется. Группа Лоренца в этом подходе будет свободна от аномалий.

Реализация этой идеи включает следующие компоненты.

Геометрическое описание мирового листа [38, 39]. *Определение.* Введем функцию, связанную с координатами и плотностью импульса струны выражениями

$$\begin{aligned} Q_\mu(\sigma) &= x_\mu(\sigma) + \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} p_\mu(\tilde{\sigma}), \\ x_\mu(\sigma) &= (Q_\mu(\sigma) + Q_\mu(-\sigma))/2, \\ p_\mu(\sigma) &= (Q'_\mu(\sigma) + Q'_\mu(-\sigma))/2 \end{aligned}$$

(x, p — четные функции σ). В терминах осцилляторных переменных, обычно используемых в теории струны,

$$Q_\mu(\sigma) = X_\mu + \frac{P_\mu}{\pi}\sigma + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{a_\mu^n}{in} e^{in\sigma}.$$

Лемма 1. Кривая, определенная функцией $Q_\mu(\sigma)$ (далее называемая *опорной кривой*), имеет следующие свойства: (i) кривая светоподобна: $Q'^2(\sigma) = 0$, это свойство эквивалентно связям Вирасоро для осцилляторных переменных; (ii) кривая является периодической: $Q(\sigma + 2\pi) - Q(\sigma) = 2P$; (iii) кривая совпадает с мировой линией одного конца струны: $x(0, \tau) = Q(\tau)$; мировая линия другого конца описывается той же кривой, сдвинутой на полупериод: $x(\pi, \tau) = Q(\pi + \tau) - P$; (iv) мировой лист восстанавливается по этой кривой следующим образом: $x(\sigma, \tau) = (Q(\sigma_1) + Q(\sigma_2))/2$, $\sigma_{1,2} = \tau \pm \sigma$; (v) скобки Пуассона для функции $Q_\mu(\sigma)$ и симплектическая форма, соответствующая этим скобкам:

$$\begin{aligned} \{Q_\mu(\sigma), Q_\nu(\tilde{\sigma})\} &= -2g_{\mu\nu}\vartheta(\sigma - \tilde{\sigma}), \\ \Omega &= \frac{1}{2} dP_\mu \wedge dQ_\mu(0) + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \delta Q'_\mu(\sigma) \wedge \delta Q_\mu(\sigma); \end{aligned} \quad (1)$$

(vi) связи Вирасоро генерируют репараметризацию опорной кривой: $H = \int d\sigma F(\sigma) Q'^2(\sigma)/4$, $\dot{Q}_\mu(\sigma) = \{Q_\mu(\sigma), H\} = F(\sigma) Q'_\mu(\sigma)$. Гамильтониан с $F = 1$ генерирует однородные сдвиги аргумента $Q(\sigma) \rightarrow Q(\tau + \sigma)$, соответствующие эволюции струны в конформной параметризации мирового листа: $(\dot{x} \pm x')^2 = 0$. Здесь $\vartheta(\sigma) = [\sigma/2\pi] + 1/2$; $[x]$ — целая часть x ; производная $\vartheta(\sigma)' = \Delta(\sigma)$ — периодическая дельта-функция; P_μ — полный импульс струны.

Лемма доказана в [38] и другим методом — в [39].

Замечание. Формализм симплектической геометрии [35, 40] удобен для описания структуры фазового пространства в гамильтоновых теориях со связями. Фазовое пространство — гладкое многообразие, снабженное замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой $\Omega = \frac{1}{2} \omega_{ij} dX^i \wedge dX^j$ (в

некоторых локальных координатах X^i , $i = 1, \dots, 2n$). Скобки Пуассона определяются как $\{X^i, X^j\} = \omega^{ij}$, где $\|\omega^{ij}\|$ является обратной к $\|\omega_{ij}\|$: $\omega_{ij}\omega^{jk} = \delta_i^k$. Рассмотрим поверхность в фазовом пространстве, заданную связями второго рода: $\chi_\alpha(X) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, r$), $\det \|\{\chi_\alpha, \chi_\beta\}\| \neq 0$. Редукция на эту поверхность состоит в подстановке ее явной параметризации $X^i = X^i(u^a)$ ($a = 1, \dots, 2n - r$) в форму

$$\Omega = \frac{1}{2}\Omega_{ab}du^a \wedge du^b, \quad \Omega_{ab} = \frac{\partial X^i}{\partial u^a}\omega_{ij}\frac{\partial X^j}{\partial u^b}, \quad \det \|\Omega_{ab}\| \neq 0.$$

Матрица $\|\Omega^{ab}\|$, обратная $\|\Omega_{ab}\|$, определяет скобки Пуассона на поверхности: $\{u^a, u^b\} = \Omega^{ab}$. Этот метод эквивалентен обычно используемому формализму скобок Дирака:

$$\{u^a, u^b\}^D = \{u^a, u^b\} - \{u^a, \chi_\alpha\}\Pi^{\alpha\beta}\{\chi_\beta, u^b\} = \Omega^{ab},$$

где $\|\Pi^{\alpha\beta}\|$ является обратной к $\|\Pi_{\alpha\beta}\|$: $\Pi_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$. В теории струн канонические скобки Пуассона $\{x_\mu(\sigma), p_\nu(\tilde{\sigma})\} = g_{\mu\nu}\delta(\sigma - \tilde{\sigma})$ соответствуют симплектической форме $\Omega = \int_0^\pi d\sigma \delta p_\mu(\sigma) \wedge \delta x_\mu(\sigma)$. Ее можно преобразовать к виду (1) подстановкой выражений $x_\mu(\sigma), p_\mu(\sigma)$ через $Q_\mu(\sigma)$.

Механика в системе центра масс [38]. Введем ортонормальную тетраду векторов, зависящую от полного импульса: $N_\mu^\alpha(P)$, $N_\mu^\alpha N_\mu^\beta = g^{\alpha\beta}$, с $N_\mu^0 = P_\mu/\sqrt{P^2}$. Разложим опорную кривую по этой тетраде: $Q_\mu(\sigma) = N_\mu^\alpha Q^\alpha(\sigma)$.

Лемма 2. Проекция опорной кривой в с. ц. м., определяемая пространственноподобными компонентами $Q^i(\sigma)$, является замкнутой кривой. Полная длина этой кривой равна $2\sqrt{P^2}$. Полный вектор площади для ориентируемой поверхности, натянутой на эту кривую, не зависит от поверхности и равен $2\mathbf{S}$, где \mathbf{S} — орбитальный момент* струны в с. ц. м.

Лемма доказана в [38, 39].

Лоренц-инвариантная калибровка светового конуса [37]. Связи Вирасоро генерируют репараметризации опорной кривой, калибровки к связям Вирасоро фиксируют конкретную параметризацию на этой кривой. Обычно рассматриваются следующие калибровочные условия: $\sigma = \pi(nQ)/(nP) + \text{const}$, т. е. в качестве параметра σ выбирается компонента Q_μ в направлении n_μ .

*В этой работе мы рассматриваем бозонную теорию струны и не вводим дополнительных спиновых степеней свободы. Термины «орбитальный момент», «генератор вращений» и «спин» обозначают одну и ту же переменную, которая в конечном итоге определяет спин элементарных частиц, т. е. дискретных возбужденных состояний в квантовой теории. Мы используем систему единиц $2\pi\alpha' = c = \hbar = 1$, где α' — постоянная, определяющая натяжение струны, c — скорость света, \hbar — постоянная Планка; метрика в пространстве-времени Минковского имеет сигнатуру $(+---)$.

Вектор n_μ называется *осью калибровки*. Выбор оси калибровки в направлении полного импульса $n_\mu = P_\mu/\sqrt{P^2}$ соответствует времениподобной калибровке Рорлиха [30]. Выбор оси калибровки в светоподобном направлении $n^2 = 0$ называется калибровкой светового конуса. В последнем случае, рассматривая светоподобные векторы $n_\pm = (1, \pm \mathbf{n})/\sqrt{2}$, $\mathbf{n}^2 = 1$, $n_\pm^2 = 0$, $n_+n_- = 1$, определяя компоненты Q'_μ вдоль n_\pm как $Q'_\pm = (n_\mp Q')$ и пространственноподобную компоненту, ортогональную \mathbf{n} , как \mathbf{Q}'_\perp , выбирая ось калибровки в направлении n_- : $Q'_+ = P_+/\pi$ и используя условия $Q'^2 = 2Q'_+Q'_- - \mathbf{Q}'_\perp{}^2 = 0$, мы можем выразить оставшуюся компоненту в терминах P и \mathbf{Q}'_\perp : $Q'_- = \pi(\mathbf{Q}'_\perp)^2/2P_+$. Далее, подставляя разложение Фурье для \mathbf{Q}'_\perp , мы выражаем всю механику через полный импульс, среднюю координату и коэффициенты Фурье (поперечные осцилляторные переменные).

Определим следующую параметризацию на опорной кривой:

$$Q^\alpha(\sigma) = Q^\alpha(0) + \int_0^\sigma d\sigma' a^\alpha(\sigma'),$$

$$a^\alpha(\sigma) = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{P^2}} \left(\frac{P^2}{\pi^2} + |a(\sigma)|^2 \right), \frac{a(\sigma) + a^*(\sigma)}{2} \mathbf{e}_1 + \right. \\ \left. + \frac{a(\sigma) - a^*(\sigma)}{2} i\mathbf{e}_2 + \frac{\pi}{2\sqrt{P^2}} \left(\frac{P^2}{\pi^2} - |a(\sigma)|^2 \right) \mathbf{e}_3 \right),$$

где $a(\sigma) = \sqrt{2/\pi} \sum_{n \neq 0} a_n e^{-in\sigma}$ и \mathbf{e}_k — ортонормальный базис в с. ц. м. Здесь мы легко узнаем калибровку светового конуса $Q^+(\sigma) \equiv n_\mu^- Q_\mu(\sigma) = Q^+(0) + 1/\pi\sqrt{P^2/2} \sigma$ с осью калибровки $n_\mu^- = 1/\sqrt{2}(N_\mu^0 - N_\mu^i e_3^i)$. Отличие от стандартного подхода состоит в том, что n_μ^- теперь *динамический* вектор, поскольку мы интерпретируем \mathbf{e}_k как динамические переменные.

Подставляя эту параметризацию в общую симплектическую форму (1), мы получаем следующую механику: бесконечный набор осцилляторов $a_k, a_k^* + P_\mu, Z_\mu$ + волчок \mathbf{e}_i, \mathbf{S} со скобками Пуассона

$$\begin{aligned} \{Z_\mu, P_\nu\} &= g_{\mu\nu}, \\ \{a_k, a_n^*\} &= ik\delta_{kn}, \quad k, n \in \mathbf{Z}/\{0\}, \\ \{S^i, S^j\} &= -\epsilon^{ijk} S^k, \quad \{S^i, e_n^j\} = -\epsilon^{ijk} e_n^k \end{aligned} \quad (2)$$

и эквивалентной симплектической формой

$$\Omega = dP_\mu \wedge dZ_\mu + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik} da_k^* \wedge da_k + \frac{1}{2} d\mathbf{e}_i \wedge d(\mathbf{S} \times \mathbf{e}_i). \quad (3)$$

Здесь $Z_\mu = \frac{1}{2\sqrt{P^2}} \int_0^{2\pi} d\sigma a^0(\sigma) \left(Q_\mu(\sigma) - \left(\frac{\sigma}{\pi} - 1 \right) P_\mu \right) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \Gamma_\mu^{ij} S^k$ — средняя координата, сопряженная P_μ ; $\Gamma_\mu^{ij} = N_\nu^i \partial N_\nu^j / \partial P_\mu$ — символы Кристоффеля и $\mathbf{S} = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^\sigma d\sigma' \mathbf{a}(\sigma) \times \mathbf{a}(\sigma')$ — орбитальный момент струны в с. ц. м.

Механика ограничена четырьмя связями первого рода:

$$\{\chi_0, \chi_i\} = 0, \quad \{\chi_i, \chi_j\} = \epsilon_{ijk} \chi_k,$$

которые включают условие массовой поверхности и требования вида «спин волчка равен спину струны»:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{P^2}{2\pi} - L_0 = 0, & L_0 &= \sum_{n \neq 0} a_n^* a_n, \\ \chi_3 &= S_3 - A_3 = 0, & A_3 &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} a_n^* a_n, \\ \chi_+ &= S_+ - A_+ = 0, & \chi_- &= S_- - A_- = 0, \\ \chi_\pm &= \chi_1 \pm i\chi_2, & S_\pm &= S_1 \pm iS_2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_- = \sqrt{\frac{2\pi}{P^2}} \sum_{k,n,k+n \neq 0} \frac{1}{k} a_k a_n a_{k+n}^*,$$

$$A_+ = \sqrt{\frac{2\pi}{P^2}} \sum_{k,n,k+n \neq 0} \frac{1}{k} a_k^* a_n^* a_{k+n},$$

где $S_i = S^k e_i^k$ — проекция \mathbf{S} на \mathbf{e}_i . Согласно теории Дирака механических систем со связями [32], связи первого рода генерируют калибровочные преобразования:

- χ_0 генерирует фазовый сдвиг осцилляторных переменных E_0 : $a_n \rightarrow a_n e^{-in\tau}$ и трансляции средней координаты $Z \rightarrow Z + P\tau/\pi$; эти преобразования сдвигают аргумент $Q(\sigma) \rightarrow Q(\sigma + \tau)$; они производят репараметризацию мирового листа, отвечающую эволюции струны;

- χ_3 генерирует фазовый сдвиг R_3 : $a_n \rightarrow a_n e^{-i\alpha}$ и вращения $\mathbf{e}_{1,2}$ вокруг \mathbf{e}_3 : $\mathbf{e}_i \rightarrow R(\mathbf{e}_3, -\alpha)\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$; эти преобразования сохраняют $Q(\sigma)$ и точки на мировом листе;

- $\chi_{1,2}$ генерируют вращения базиса \mathbf{e}_i относительно осей $\mathbf{e}_{1,2}$ и некоторые нелинейные преобразования осцилляторных переменных; эти преобразования изменяют направление оси калибровки и производят соответствующие репараметризации опорной кривой и мирового листа; более детально эти преобразования будут рассмотрены в разд. 3.

В нашем построении мы ввели шесть дополнительных переменных $(\mathbf{e}_i, \mathbf{S})$, образующих механику волчка, и три связи первого рода, которые непосредственно исключают три степени свободы и генерируют калибровочные преобразования, отождествляющие три других. В результате этого мы получаем эквивалентную механическую систему. Главное отличие этой механики от стандартного описания калибровки светового конуса состоит в том, что ось калибровки включена в набор динамических переменных. Ее положение в системе центра масс описывается единичным 3-вектором \mathbf{e}_3 , в то время как ось калибровки в пространстве Минковского — это определенный выше светоподобный 4-вектор n_μ^- .

Генераторы группы Лоренца [38] определяются выражением

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} &= \int_0^\pi d\sigma (x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu + \epsilon_{ijk} N_\mu^i N_\nu^j S^k, \\ X_\mu &= Z_\mu - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Gamma_\mu^{ij} S^k, \end{aligned} \quad (5)$$

они генерируют преобразования Лоренца системы координат $(N_\mu^0, N_\mu^k e_i^k)$, по которой опорная кривая разложена со скалярными коэффициентами. Таким образом, $M_{\mu\nu}$ генерирует «жесткие» преобразования Лоренца мирового листа, не изменяющие его параметризацию. Генераторы Лоренца находятся в инволюции со связями: $\{M_{\mu\nu}, \chi_{0,i}\} = 0$. Это означает одновременно, что генераторы калибровочных преобразований $\chi_{0,i}$ лоренц-инвариантны и генераторы группы Лоренца $M_{\mu\nu}$ калибровочно-инвариантны.

Генераторы Лоренца описываются простыми функциями переменных (Z, P, \mathbf{S}) , которые в нашем подходе являются независимыми, т. е. их квантовые коммутаторы постулируются непосредственно из скобок Пуассона.

Лемма 3. При этих условиях в квантовой механике коммутаторы $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$, $[M_{\mu\nu}, Q_\rho]$ свободны от аномалий.

Лемма доказывается прямым вычислением [35]. Этот результат вполне естественный, поскольку генераторы вращений в с. ц. м. стали независимыми каноническими переменными после выполненных формальных подстановок. На данном этапе аномалии еще не устранены из теории, но *перенесены* из алгебры Лоренца в алгебру связей χ_i . Связи являются кубическими по осцилляторным переменным, и при квантовании их алгебра приобретает ту же самую аномалию, которая ранее была в группе Лоренца. Чтобы разрешить эту проблему, мы должны продолжить устранение калибровочных степеней свободы в классической теории, налагая дополнительные калибровочные условия на χ_i . Эти условия эквивалентны фиксации оси калибровки \mathbf{e}_3 относительно других динамических векторов в системе. В результате этой процедуры калибровочный произвол в теории будет уменьшен, и остаток не будет иметь аномалий.

Вначале мы представим прямолинейное решение [35] в построенной калибровке светового конуса. Для этого решения проекция опорной кривой в с. п. м. является окружностью. Это соответствует одной возбужденной моде a_1 , для оси калибровки e_3 , направленной вдоль спина \mathbf{S} :

$$a_n = 0, \quad n \neq 1, \quad S_{\pm} = 0, \quad P^2/2\pi = S = S_3 = |a_1|^2. \quad (6)$$

Далее мы будем называть этот случай северным полюсом решения (в то время как окружность $\mathbf{Q}(\sigma)$ определяет экватор). Имеется калибровочно-эквивалентное одномодовое решение с возбужденной (a_{-1}) -модой и e_3 , противоположным \mathbf{S} (южный полюс). Другие направления оси калибровки для прямолинейной струны дают бесконечно-модовые решения. Далее мы будем использовать решение (6) для изучения структуры общей теории в его окрестности.

Дополнительные калибровочные условия имеют вид

$$a_s + a_{-s} = 0, \quad a_s^* + a_{-s}^* = 0 \quad (7)$$

для некоторого $s > 0$. Прямолинейное решение (6) удовлетворяет этим условиям при $s > 1$. Далее, в разд. 3 мы покажем, что условия (7) могут быть наложены на любое решение теории струны.

Калибровочные условия (7) сохраняются при преобразованиях R_3 . Они не сохраняются при преобразованиях E_0 , однако имеется остаток E_0 -симметрии, дискретное преобразование

$$D_{2s} : a_n \rightarrow a_n e^{-in\pi/s},$$

сохраняющее (7): $a_s + a_{-s} = 0 \rightarrow -a_s - a_{-s} = 0$. Поэтому R_3 , D_{2s} -симметрии присутствуют в теории после фиксации калибровки.

Подставляя (7) в симплектическую форму (3), мы видим, что $a_{\pm s}$ -члены сокращают друг друга: $\frac{1}{is}(da_s^* \wedge da_s - da_{-s}^* \wedge da_{-s}) = 0$. После редукции мы получаем тот же самый канонический базис (2), но без $a_{\pm s}$ -осцилляторов.

Чтобы изучить это свойство более подробно, мы вводим переменные $q_1 = \text{Re}(a_s + a_{-s})/2$, $q_2 = -\text{Im}(a_s + a_{-s})/2$, $p_1 = \text{Im}(a_s - a_{-s})/2$, $p_2 = \text{Re}(a_s - a_{-s})/2$ и переписываем $a_{\pm s}$ -члены симплектической формы как $\frac{4}{s}(dp_1 \wedge dq_1 - dp_2 \wedge dq_2)$. Калибровочные условия (7) переписываются как $q_1 = q_2 = 0$, теперь мы видим, что переменные $p_{1,2}$, канонически сопряженные к $q_{1,2}$, выпадают из симплектической формы. Переменные $p_{1,2}$ необходимо выразить через другие динамические переменные из χ -связей, и, независимо от сложности этих выражений, скобки Пуассона в данной механике остаются простыми. Это исключительное свойство следует из того, что два калибровочных условия (7) находятся в инволюции друг с другом:

$\{a_s + a_{-s}, a_s^* + a_{-s}^*\} = 0$, т. е. генерируют абелеву группу преобразований. Данное свойство отличает наш подход от неабелевых калибровок, рассмотренных в [42, ч. I], которые обладают сложными скобками Пуассона.

Далее мы видим, что вклад $a_{\pm s}$ в A_3 также обращается в нуль: $\frac{1}{s}(|a_s|^2 - |a_{-s}|^2) = 0$, в результате этого $a_{\pm s}$ -члены также выпадают из $\chi_3 = S_3 - A_3$. Этот результат следует из того, что калибровочные условия (7) сохраняются при преобразованиях R_3 и поэтому находятся в инволюции с χ_3 .

Калибровочные условия (7) не находятся в инволюции с χ_0 , и $a_{\pm s}$ -члены в L_0 не обращаются в нуль: $|a_s|^2 + |a_{-s}|^2 = 2|a_s|^2$. Скобки Пуассона (7) с χ_{\pm} также не обращаются в нуль. Мы заключаем, что (7) является калибровкой к (χ_{\pm}, χ_0) , и $a_{\pm s}$ должны быть определены из этих трех связей.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИАКСК

Изолируя вклад $a_{\pm s}$ -осцилляторов в (4) и используя соотношение $a_{-s} = -a_s$, мы получаем

$$\begin{aligned} a_s^2 d + \frac{1}{2} a_s a_s^* d^* + a_s f + a_s^* g + \Sigma_- - \sqrt{\frac{P^2}{2\pi}} S_- &= 0, \\ a_s^{*2} d^* + \frac{1}{2} a_s a_s^* d + a_s^* f^* + a_s g^* + \Sigma_+ - \sqrt{\frac{P^2}{2\pi}} S_+ &= 0, \\ \frac{P^2}{2\pi} &= L_0^{(s)} + 2a_s a_s^*, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} d &= d_+ - d_-, \quad f = f_+ - f_-, \quad g = g_- - g_+, \\ d_+ &= a_{2s}^*/s, \quad d_- = a_{-2s}^*/s, \quad L_0^{(s)} = \sum' a_k^* a_k, \\ g_- &= \sum' \frac{1}{k} a_k a_{s-k}, \quad g_+ = \sum' \frac{1}{k} a_k a_{-s-k}, \\ f_+ &= \sum' \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{k} \right) a_k a_{s+k}^*, \\ f_- &= \sum' \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{k} \right) a_k a_{-s+k}^*, \\ \Sigma_- &= \sum' \frac{1}{k} a_k a_n a_{k+n}^*, \quad \Sigma_+ = \sum' \frac{1}{k} a_k^* a_n^* a_{k+n}, \\ \Sigma_-^* &= \Sigma_+. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь в суммах \sum' исключаются члены с $a_0^{(*)}$ и $a_{\pm s}^{(*)}$. Вводя обозначения

$$\lambda = \sqrt{\frac{P^2}{2\pi}}, \quad n_s = (\lambda^2 - L_0^{(s)})/2,$$

$$k = \Sigma_- + \frac{1}{2}n_s d^* - \lambda S_-,$$

мы рассматриваем (8) как переопределенную полиномиальную систему на неизвестные (a_s, a_s^*) при заданных значениях коэффициентов (d, f, g, k, n_s) :

$$\begin{aligned} a_s^2 d + a_s f + a_s^* g + k &= 0, \\ a_s^{*2} d^* + a_s^* f^* + a_s g^* + k^* &= 0, \\ a_s a_s^* - n_s &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В [42] эта система была решена аналитически с использованием техники базисов Гребнера [44]. В результате получаются полиномиальное условие совместности для системы (10) и рациональные выражения для a_s . Условие совместности представляет дираковскую связь, оставшуюся после наложения двух калибровочных условий (7) на три исходные связи χ_0, χ_{\pm} , это полиномиальное уравнение 8-го порядка по $\lambda = \sqrt{P^2/2\pi}$, выполняющее роль нового условия массовой поверхности. Будучи используемым в качестве гамильтониана, оно генерирует правильную эволюцию струны, состоящую из сдвигов $\sigma \rightarrow \sigma + \tau$ и таких репараметризаций, которые поддерживают калибровочные условия (7) постоянно выполненными. Дальнейший анализ этой механики можно найти в [42].

Для построения квантовой теории более удобна другая форма механики, использующая разложение решений в окрестности прямолинейной струны (6).

Решения в окрестности прямолинейной струны. Приведенные ниже леммы 4–14 доказаны в [42].

Лемма 4. При $s = 2$ в окрестности прямолинейного решения на северном полюсе (6) система (8) имеет единственное решение, представимое в виде C^∞ -гладкой аналитической функции коэффициентов системы.

Лемма 5 (структурная). Разложение a_2 в окрестности (6) имеет вид

$$a_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{P_n a_1^2}{|a_1|^{4n}}, \quad (11)$$

где P_n — полиномы от $a_1, \Sigma_-, S_-, d, f, g'$, их сопряженных и γ, γ^{-1} . Здесь $g'_- = g_- - a_1^2$, $g' = g'_- - g_+$, $\gamma = (L_0^{(2)})^{-1/2}$. Полиномы обладают следующими свойствами: (i) каждый моном в P_n содержит, считая степени, n переменных из группы $(\Sigma_-, S_-, d, f, g'$ и их сопряженные) и $2(n-1)$ переменных из группы (a_1, a_1^*) ; (ii) каждый моном содержит, по крайней мере, одну

переменную из группы (Σ_{\pm}, S_{\pm}) ; (iii) переменные a_1 и a_1^* входят в четных степенях; (iv) каждый моном, содержащий S_- , также содержит $(a_1^*)^{2k}$ с $k \geq 1$; (v) $P_n = O(\gamma^{-(n+1)/2})$ при $\gamma \rightarrow 0$; (vi) преобразование D_4 : $a_n \rightarrow a_n i^{-n}$ сохраняет мономы P_n , преобразование R_3 : $a_n \rightarrow a_n e^{-i\alpha}$, $S_{\pm} \rightarrow S_{\pm} e^{\pm i\alpha}$ умножает мономы на $e^{i\alpha}$.

Эти свойства важны для анализа структуры решений в квантовой механике. Для целей дальнейшего рассмотрения удобно извлечь из a_2 общий фазовый множитель $a_1^2/|a_1|^2$ и определить $a_2 = \alpha_2 \cdot a_1^2/|a_1|^2$, так что $|a_2| = |\alpha_2|$ и

$$\alpha_2 = \sum_{n \geq 1} \frac{P_n}{|a_1|^{4n-2}}, \quad \frac{P^2}{2\pi} = L_0^{(2)} + 2|\alpha_2|^2. \quad (12)$$

Явные выражения для первых трех полиномов P_n имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= -\Sigma_+ + S_+/\gamma, \\ P_2 &= a_1^{*2} f^* \Sigma_- + a_1^2 g'^* \Sigma_+ - a_1^{*2} f^* S_-/\gamma - a_1^2 g'^* S_+/\gamma, \\ P_3 &= -a_1^{*4} f^* g' \Sigma_- - a_1^2 a_1^{*2} f^* g'^* \Sigma_- - a_1^{*4} d^* \Sigma_-^2 - \\ &\quad - a_1^2 a_1^{*2} f f^* \Sigma_+ - a_1^4 g'^{*2} \Sigma_+ - a_1^2 a_1^{*2} d \Sigma_- \Sigma_+ / 2 + \\ &\quad + a_1^{*4} f^* g' S_- / \gamma + a_1^2 a_1^{*2} f^* g'^* S_- / \gamma + 2a_1^{*4} d^* \Sigma_- S_- / \gamma + \\ &\quad + a_1^2 a_1^{*2} d \Sigma_+ S_- / 2\gamma - a_1^{*4} d^* S_-^2 / \gamma^2 + a_1^2 a_1^{*2} f f^* S_+ / \gamma + \\ &\quad + a_1^4 g'^{*2} S_+ / \gamma + a_1^2 a_1^{*2} d \Sigma_- S_+ / 2\gamma + a_1^2 a_1^{*2} \gamma \Sigma_- \Sigma_+ S_+ - \\ &\quad - a_1^2 a_1^{*2} d S_- S_+ / 2\gamma^2 - a_1^2 a_1^{*2} \Sigma_+ S_- S_+ - a_1^2 a_1^{*2} \Sigma_- S_+^2 + \\ &\quad + a_1^2 a_1^{*2} S_- S_+^2 / \gamma. \end{aligned}$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИАКСК

Опишем подробно преобразования, генерируемые связями χ_0, χ_i . Вначале введем несколько определений.

Рассмотрим в 3-мерном пространстве гладкую замкнутую кривую $\mathbf{Q}(\sigma)$ с отмеченной точкой O и единичным вектором \mathbf{e}_3 . Введем переменные

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \oint d\mathbf{Q}(\sigma) \exp \left[\frac{2\pi i n}{L_t} (L(\sigma) - (\mathbf{Q}(\sigma) - \mathbf{Q}(0))\mathbf{e}_3) \right], \quad (13)$$

где $L(\sigma)$ — длина дуги между точками O и $\mathbf{Q}(\sigma)$ вдоль кривой; L_t — полная длина кривой. Два свойства очевидно следуют из определения: $\mathbf{a}_{-n} =$

\mathbf{a}_n^* , $\mathbf{a}_0 = 0$. Разложим векторы \mathbf{a}_n на компоненты, параллельные и ортогональные \mathbf{e}_3 : $\mathbf{a}_n = a_{n3}\mathbf{e}_3 + \mathbf{a}_{n\perp}$, и обозначим вещественные и мнимые части $\mathbf{a}_{n\perp}$ через $\mathbf{q}_{n\perp}$ и $\mathbf{p}_{n\perp}$: $\mathbf{a}_{n\perp} = \mathbf{q}_{n\perp} + i\mathbf{p}_{n\perp}$. Зафиксируем некоторое $n = s > 0$ и запишем $\mathbf{q}_{s\perp} = \mathbf{q}$ и $\mathbf{p}_{s\perp} = \mathbf{p}$. Функции $\mathbf{q}(\mathbf{e}_3), \mathbf{p}(\mathbf{e}_3)$ определяют гладкие векторные поля на единичной сфере \mathbf{e}_3 (касательные к сфере). В силу топологической теоремы «о еже», эти поля имеют особые точки на сфере, в которых соответствующее поле обращается в нуль, например, $\mathbf{q} = 0$.

Замечание. Кривая \mathbf{Q} является проекцией опорной кривой в с. ц. м. Ось калибровки \mathbf{e}_3 связывает с этой кривой следующую параметризацию:

$$\sigma = \frac{2\pi}{L_t}(L(\sigma) - Q_3(\sigma) + Q_3(0)), \quad (14)$$

где $Q_3 = \mathbf{Q}\mathbf{e}_3$. Теперь мы узнаем в (13) фурье-моды функции $\mathbf{a}(\sigma) = \mathbf{Q}'(\sigma)$, где σ — параметр калибровки светового конуса (14). Это выражение записано в параметрически-инвариантном виде как интеграл циркуляции. Векторы $\mathbf{a}_{n\perp}$ связаны с введенными ранее осцилляторными переменными a_n следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n\perp} &= a_{n1}\mathbf{e}_1 + a_{n2}\mathbf{e}_2, \\ a_{n1} &= (a_n + a_{-n}^*)/2, \quad a_{n2} = i(a_n - a_{-n}^*)/2. \end{aligned}$$

Лемма 6. χ_3 генерирует преобразования, сохраняющие \mathbf{e}_3 и $\mathbf{a}_{n\perp}$; $\chi_{1,2}$ генерируют вращения \mathbf{e}_3 и соответствующие изменения $\mathbf{a}_{n\perp}$ по формуле (13). Калибровочные условия (7) соответствуют особым точкам $\mathbf{q} = 0$. Эволюция, генерируемая χ_0 , представляется фазовым вращением $\mathbf{a}_{n\perp} \rightarrow \mathbf{a}_{n\perp} e^{-in\tau}$,

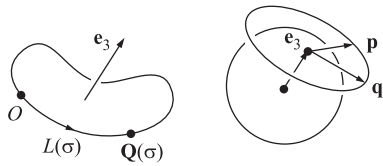


Рис. 2. Определение векторных полей $\mathbf{q}(\mathbf{e}_3), \mathbf{p}(\mathbf{e}_3)$

эквивалентным движению векторов \mathbf{q} и \mathbf{p} по эллипсу, показанному на рис. 2 справа. В течение эволюции вектор $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ сохраняется, и особые точки $\mathbf{q} = 0$ двигаются по кривым нулевого уровня функции $F(\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_3 = 0$. На этих кривых эллипс, показанный на рис. 2 справа, вырождается в отрезок.

Эта лемма означает, что калибровочные условия (7) могут быть наложены на любое решение в теории струны, а именно: для любой кривой $\mathbf{Q}(\sigma)$ этим условиям можно удовлетворить, направляя ось калибровки светового конуса \mathbf{e}_3 в особую точку $\mathbf{q}(\mathbf{e}_3) = 0$ векторного поля на сфере, построенного по этой кривой.

В общем положении векторные поля на сфере имеют четное число особых точек, которое ≥ 2 . Невырожденные особые точки двумерных векторных полей [45] показаны на рис. 3.



Определение 1. Для каждого типа *индекс особенности* определен как алгебраическое число вращений вектора $\mathbf{q}(\mathbf{e}_3)$ при обходе \mathbf{e}_3 вокруг особой точки (больше нуля, если направления вращений \mathbf{q} и \mathbf{e}_3 совпадают; меньше нуля в противном случае). Для точек типа центр, узел, фокус это число равно $+1$, для седла -1 .

Сумма всех индексов равна эйлеровской характеристике поверхности, определенной как «число вершин – число ребер + число граней» для любого разбиения поверхности. Для сферы эта характеристика равняется двум, таким образом, на сфере векторное поле общего вида имеет две особые точки индекса $+1$ и произвольное число компенсирующихся пар $(+1, -1)$. В специальных случаях могут возникать вырожденные особенности более сложной формы, например, мультиседла, полученные при объединении нескольких седел.

Наличие нескольких особых точек $\mathbf{q}(\mathbf{e}_3) = 0$ приводит к тому, что орбита калибровочной группы, генерируемая χ -связями, пересекает поверхность калибровочных условий (7) в нескольких точках фазового пространства. Поскольку эти точки калибровочно-эквивалентны, механика обладает *дискретной* калибровочной симметрией. Это явление также встречается в теории неабелевых калибровочных полей, где оно было изучено В. Н. Грибовым [43]. В полной общности этот вопрос рассматривался в работе [33]. Мы будем называть такие эквивалентные точки *грибовскими копиями* (рис. 4).

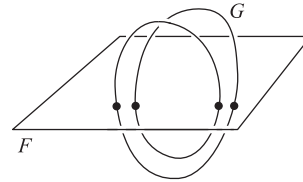


Рис. 4. Грибовские копии: орбита калибровочной группы G пересекает поверхность калибровочного условия F в нескольких точках

Следующий топологический инвариант может быть введен для грибовских копий.

Определение 2. Пусть фазовое пространство M является гладким ориентируемым многообразием. Пусть орбита калибровочной группы G и поверхность калибровочного условия F являются его гладкими ориентируемыми подмногообразиями с $\dim(G) = \text{codim}(F)$. Пусть P является точкой их трансверсального пересечения. Это означает, что в точке P касательные пространства к G и F линейно порождают касательное пространство к M . Пусть $\tau(F, P)$, $\tau(G, P)$ и $\tau(M, P)$ — базисы в касательных пространствах, определяющие ориентацию F , G и M в точке P . *Индекс пересечения* F и G в точке P определен как число ν , равное $+1$, если базисы $\tau(F, P)$, $\tau(G, P)$ имеют такую же ориента-

цию, как базис $\tau(M, P)$, и равное -1 , если эти ориентации противоположны.

Лемма 7 (топологические заряды). Для рассматриваемых в данной работе грибовских копий определения 1 и 2 совпадают.

В ЛИАКСК копии представляют различные наборы осцилляторных переменных $\{a_n\}$, которые воспроизводят одни и те же, но по-разному параметризованные кривые $\mathbf{Q}(\sigma)$. В результате этого грибовские копии соответствуют дискретной репараметризации мирового листа. Чтобы отождествить эквивалентные состояния, в классической теории фазовое пространство должно быть факторизовано по этой симметрии. Аналогичные процедуры могут быть применены в квантовой механике, например, с помощью построения неприводимых представлений для операторов, обладающих этой дискретной симметрией, и формулировки соответствующих правил отбора. Однако на квантовом уровне дискретная нелинейная репараметризация мирового листа может сопровождаться аномалиями, исключаящими эту симметрию из теории.

Явные формулы для векторных полей даются (13). Имеется несколько иное определение:

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \oint d\mathbf{Q}(\sigma) \exp \left[\frac{2\pi i n}{L_t} (L(\sigma) - (\mathbf{Q}(\sigma) - \mathbf{X})\mathbf{e}_3) \right], \quad (15)$$

где $\mathbf{X} = \oint dL(\sigma)\mathbf{Q}(\sigma)/L_t$ определяет среднее положение кривой $\mathbf{Q}(\sigma)$ и совпадает с определением средней координаты (5), спроецированной в с.ц.м. Отличие (13) и (15) состоит в \mathbf{e}_3 -зависимом фазовом множителе $e^{in\varphi(\mathbf{e}_3)}$, $\varphi(\mathbf{e}_3) = 2\pi(\mathbf{X} - \mathbf{Q}(0))\mathbf{e}_3/L_t$. Поскольку эволюция \mathbf{a}_n является фазовым вращением, этот множитель фактически вводит различие «локального времени» для эволюции векторных полей на сфере. Этот множитель сохраняет орбиты грибовских копий и изменяет их эволюционный параметр от конусного (14) к натуральному (длина кривой). В следующей лемме мы используем определение (15), более удобное для описания эволюции грибовских копий.

Лемма 8 (структура грибовских копий вблизи прямолинейного решения). Для прямолинейной струны $\mathbf{Q}_0(\sigma) = (\cos \sigma, \sin \sigma, 0)$ векторное поле $\mathbf{q}_{s\perp}(\mathbf{e}_3)$ имеет следующие особые точки: при $s = 1$ два узла на экваторе; при $s = 2$ седла на северных и южных полюсах и четыре узла на экваторе; при $s > 2$ мультиседла на северных и южных полюсах и $2s$ узлов на экваторе. При эволюции узлы двигаются по экватору, в то время как особые точки на полюсах остаются неподвижными и полевые распределения вращаются вокруг них. После малой деформации струны от прямолинейной конфигурации $\mathbf{Q}(\sigma) = \mathbf{Q}_0(\sigma) + \delta\mathbf{Q}(\sigma)$ узлы двигаются по общей траектории в окрестности экватора; при $s = 2$ седла двигаются по малым замкнутым контурам вблизи полюсов; при $s > 2$ мультиседла распадаются на $(s-1)$ невырожденных седел, двигающихся вблизи полюсов. По истечении времени $\Delta\tau_s = \pi/s = (\text{период эволюции})/2s$ векторное поле обращает свое направление, и распределение

особенностей возвращается в исходное состояние (D_{2s} -симметрия). В течение этого времени экваториальные особенности перемещаются в соседние, полюсные особенности при $s = 2$ выполняют один оборот вдоль замкнутых контуров.

4. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Канонические операторы обладают следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 [Z_\mu, P_\nu] &= -ig_{\mu\nu}, \\
 [a_k, a_n^\dagger] &= k\delta_{kn}, \quad k, n \neq 0, \pm s, \\
 [S^i, S^j] &= i\epsilon_{ijk}S^k, \quad [S^i, e_j^k] = i\epsilon_{ikl}e_j^l, \\
 [S_i, S_j] &= -i\epsilon_{ijk}S_k, \quad [S_i, e_j^k] = -i\epsilon_{ijl}e_l^k, \\
 [S^i, S_j] &= 0, \quad e_i^k e_j^k = \delta_{ij}, \quad S_i = e_i^j S^j.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Пространство состояний является прямым произведением трех следующих компонент:

Пространство функций $\Psi(P)$ с определением $Z = -i\partial/\partial P$.

Пространство Фока с вакуумом

$$a_k |0\rangle = 0, \quad k > 0, \quad a_k^\dagger |0\rangle = 0, \quad k < 0 \tag{17}$$

и состояниями, порождаемыми из вакуума операторами

$$|\{n_k\}\rangle = \prod_{k>0, k \neq s} \frac{1}{\sqrt{k^{n_k} n_k!}} (a_k^\dagger)^{n_k} \prod_{k<0, k \neq -s} \frac{1}{\sqrt{(-k)^{n_k} n_k!}} (a_k)^{n_k} |0\rangle.$$

Например, мы будем записывать $|1_1 2_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1^\dagger a_{-1}^2 |0\rangle$ и т. д. Так определенные векторы состояния имеют положительную норму. Числа заполнения

$$n_k = \frac{1}{|k|} : a_k^\dagger a_k : = \frac{1}{|k|} \begin{cases} a_k^\dagger a_k, & k > 0 \\ a_k a_k^\dagger, & k < 0 \end{cases} = 0, 1, 2, \dots$$

Замечание. Однокомпонентные осцилляторные переменные a_k , используемые в данной работе, связаны с обычно применяемыми двухкомпонентными осцилляторами $a_{k1,2}$ формулами из разд. 3, которые на квантовом уровне становятся: $a_k = a_{k1} - ia_{k2}$, $a_k^\dagger = a_{-k1} + ia_{-k2}$. Обратные формулы: $a_{k1} = (a_k + a_{-k}^\dagger)/2$, $a_{k2} = i(a_k - a_{-k}^\dagger)/2$. Здесь из *двух наборов* осцилляторных переменных a_{ki} , $i = 1, 2$, обладающих свойством $a_{ki}^\dagger = a_{-ki}$, мы

строим *один набор* без этого свойства. Использование однокомпонентных осцилляторов упрощает вычисления. Легко проверить, что определение вакуума (17) эквивалентно стандартному $a_{ki}|0\rangle = 0, k > 0$, и состояния $\{|n_k\rangle\}$ являются линейными комбинациями $\prod_{k>0} (a_{k1}^+)^{n_{k1}} (a_{k2}^+)^{n_{k2}} |0\rangle$.

Квантовый волчок: пространство состояний образовано функциями $\Psi(e), e_i^j \in SO(3)$. Для группы вращений возможны два представления: однозначное и двузначное [46]. Спин определяется как дифференциальный оператор $S^i = -i\epsilon_{ijk} e_l^j \partial / \partial e_l^k$, в то время как проекция спина на систему координат e_i равна $S_i = i\epsilon_{ijk} e_j^l \partial / \partial e_k^l$. Оператор S^i генерирует вращения системы координат e_i во внешнем пространстве, в то время как S_i генерирует вращения относительно осей e_i . Эти преобразования действуют на различные индексы в e_j^k . Они коммутируют, поэтому S^3 и S_3 одновременно наблюдаемы. Матричные элементы компонент спина не зависят от представления алгебры и имеют известный вид [48]:

$$\begin{aligned} \langle S(S_3 - 1)S^3 | S_+ | S S_3 S^3 \rangle &= \sqrt{S(S+1) - S_3(S_3 - 1)}, \\ \langle S(S_3 + 1)S^3 | S_- | S S_3 S^3 \rangle &= \sqrt{S(S+1) - S_3(S_3 + 1)}, \end{aligned}$$

другие элементы обращаются в нуль. Конкретное представление квантового волчка описывается функциями Вигнера [47, 48]:

$$|S S_3 S^3\rangle = \mathcal{D}_{S_3 S^3}^S(e), \quad S_3, S^3 = -S, -S+1, \dots, S.$$

Здесь S характеризует собственное значение оператора Казимира $\mathbf{S}^2 = S^i S^i = S_i S_i = S(S+1)$, коммутирующего со всеми спиновыми компонентами. S — целое число для однозначного представления $SO(3)$ и полуцелое число для двузначного. В дальнейшем связь $S_3 = A_3 \in \mathbf{Z}$ отберет только целые значения S . В работе [42, ч. III] объясняется более подробно, почему в данной задаче имеются только целые значения S . Связи, будучи функциями S_i и осцилляторных переменных, коммутируют с \mathbf{S}^2 , поэтому определение массового спектра может производиться отдельно для каждого значения S .

Генераторы группы Лоренца определены выражениями (5). Эти операторы эрмитовы и образуют замкнутую алгебру Лоренца в силу леммы 3.

Связи $\chi_3 |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle = 0$ наложены на состояния согласно теории Дирака динамических систем со связями [32]. Здесь $\chi_3 = S_3 - A_3^{(s)}$,

$$\begin{aligned} A_3^{(s)} &= \sum_{k \neq 0, \pm s} \frac{1}{k} : a_k^+ a_k : = \sum_{k \neq 0, \pm s} \text{sign } k \cdot n_k, \\ L_0^{(s)} &= \sum_{k \neq 0, \pm s} : a_k^+ a_k : = \sum_{k \neq 0, \pm s} |k| \cdot n_k, \end{aligned}$$

и гамильтониан H — условие массовой поверхности, построенное ниже. Операторы χ_3 и H эрмитовы. Для операторов, входящих в гамильтониан,

$d_{\pm}, f_{\pm}, g_{\pm}, \Sigma_{\pm}$ и их сопряженных мы используем термин *элементарные операторы*. Они определяются непосредственно по классическим выражениям (9), с заменой комплексного сопряжения на эрмитово. Эти определения не имеют неоднозначностей упорядочения.

Лемма 9. Для состояний с конечным числом заполненных мод матричные элементы $\langle \{n'_k\} | \text{op} | \{n_k\} \rangle$ элементарных операторов *ор* описываются конечными суммами.

Симметрия R_3, D_{2s} в квантовой теории генерируются операторами

$$R_3 = e^{-i\chi_3\alpha}, \quad \tilde{D}_{2s} = e^{iL_0\pi/s},$$

где тильда указывает, что симметрия действует в пространстве внутренних переменных, не включающем среднюю координату X (так как в генераторе опущен P^2). Удобно ввести понятие $(\Delta S_3, \Delta A_3, \Delta L_0)$ -зарядов для операторов, удовлетворяющих соотношениям $[S_3, \text{op}] = \Delta S_3 \cdot \text{op}$, $[A_3, \text{op}] = \Delta A_3 \cdot \text{op}$, $[L_0, \text{op}] = \Delta L_0 \cdot \text{op}$, т.е. операторов, которые увеличивают или уменьшают квантовые числа $(S_3, A_3^{(s)}, L_0^{(s)})$ на $(\Delta S_3, \Delta A_3, \Delta L_0)$ единиц:

$$\text{op} | S_3, A_3^{(s)}, L_0^{(s)} \rangle = | S_3 + \Delta S_3, A_3^{(s)} + \Delta A_3, L_0^{(s)} + \Delta L_0 \rangle.$$

В частности, $\Delta S_3(a_n) = 0$, $\Delta A_3(a_n) = -1$, $\Delta L_0(a_n) = -n$. Эрмитово сопряжение операторов обращает знак их зарядов. Элементарные операторы имеют $\Delta S_3 = 0$ и определенные $(\Delta A_3, \Delta L_0)$ -заряды (см. табл. 1). Дискретная симметрия D_{2s} характеризуется зарядом $Q = L_0^{(s)} \bmod 2s$, так что подпространства с заданным Q являются собственными пространствами $\tilde{D}_{2s} | Q \rangle = e^{i\pi Q/s} | Q \rangle$, и D_{2s} -симметричные операторы оставляют эти подпространства инвариантными.

Для спиновых компонент коммутационные соотношения (16) соответствуют повышающим и понижающим операторам

$$\begin{aligned} S^{\pm} &= S^1 \pm iS^2, \quad [S^3, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}, \quad [S^+, S^-] = 2S^3, \\ S_{\pm} &= S_1 \pm iS_2, \quad [S_3, S_{\pm}] = \mp S_{\pm}, \quad [S_+, S_-] = -2S_3, \end{aligned}$$

т.е. $\Delta S^3(S^{\pm}) = \pm 1$, $\Delta S_3(S_{\pm}) = \mp 1$. В дальнейшей механике участвуют только операторы с нижним индексом S_i . Линейные комбинации $l_{\pm} = \lambda_1 S_{\pm} + \lambda_2 \Sigma_{\pm}$ не имеют определенных ΔS_3 - и ΔA_3 -зарядов, но имеют определенный $\Delta \chi_3 = \Delta S_3 - \Delta A_3 = \mp 1$. Поскольку классические симметрии определяются полиномиальной структурой, они сохраняются на квантовом уровне. В частности, квантовый гамильтониан обладает R_3, D_{2s} -симметрией, в результате этого его матричные элементы образуют ненулевые блоки, расположенные на $(\chi_3 Q)$ -диагонали: $\langle \chi_3 = 0, Q | H | \chi_3 = 0, Q \rangle$.

Квантовый гамильтониан. Далее мы зафиксируем $s = 2$. Квантовый аналог (12) строится следующим образом:

$$\alpha_2 = \sum_{n \geq 1} \tilde{n}_1^{-2n+1} : P_n :, \quad (18)$$

где $\tilde{n}_1 = a_1^\dagger a_1 + c_1$. Здесь мы вводим постоянный член c_1 , вклад которого обращается в нуль на классическом уровне (в пределе больших чисел заполнения $a_1^\dagger a_1$), и добавляем аналогичные члены в квантовое определение $\gamma = (L_0^{(2)} + c_2)^{-1/2}$ и в определение условия массовой поверхности, которое мы зафиксируем следующим образом:

$$\frac{P^2}{2\pi} = L_0^{(2)} + 2\alpha_2 \alpha_2^\dagger + c_3. \quad (19)$$

Оператор α_2 имеет заряды $\Delta\chi_3 = -1, \Delta Q = 0$, в то время как для P^2 $\Delta\chi_3 = 0, \Delta Q = 0$. Полиномы P_n определены выражениями из разд. 2, в которые мы подставляем определения (9) элементарных операторов и фиксируем упорядочение, показанное в табл. 1. Это упорядочение помещает $L_0^{(2)}$ -понижающие элементарные операторы справа от $L_0^{(2)}$ -повышающих, таким образом обеспечивая лучшие свойства сходимости для разложения (18). В частности, матричные элементы α_2 между состояниями с конечными $L_0^{(2)}$ даются конечными суммами, и члены с большими n в (18) вносят вклад только в матричные элементы с большими $L_0^{(2)}$ в силу следующей леммы.

Таблица 1. $L_0^{(2)}$ -нормально упорядоченные элементарные операторы

	a_1^\dagger	$(d_-)^+$	d_+	$(f_-)^+$	f_+	$(g_-)^+$	g_+	Σ_-	Σ_+	$(g_+)^+$	g_-'	$(f_+)^+$	f_-	$(d_+)^+$	d_-	a_1
$\Delta L_0^{(2)}$	1	4	4	2	2	2	2	0	0	-2	-2	-2	-2	-4	-4	-1
$\Delta A_3^{(2)}$	1	-1	1	0	0	2	-2	-1	1	2	-2	0	0	-1	1	-1

Лемма 10 (сходимость). $\langle L_0^{(2)} = N_1, S | : P_n : | L_0^{(2)} = N_2, S \rangle = 0$, если $n > \min \{1 + (N_1 + N_2)/2, (4 + 2(N_1 + N_2) + 4S)/5\}$.

В произведениях спиновых компонент S_\pm , коммутирующих с элементарными операторами, мы выбираем упорядочение $S_+ S_-$, так что S_3 -повышающий оператор S_- стоит справа и аннулирует состояние с максимальной проекцией спина $S_3 = S$. Мы напоминаем, что классически $S_3 = S = P^2/2\pi$ отвечает одномодовому решению (прямолинейной струне), соответствующему ведущей реджевской траектории.

Введенное упорядочение обладает другой особенностью, удобной для вычислений: матричные элементы нормально упорядоченных операторов, ограниченных в конечномерные подпространства, ведут себя регулярно при увеличении размерности подпространств, а именно: матрица в большем пространстве включает матрицу в меньшем пространстве как точную подматрицу. Без нормального упорядочения это простое поведение было бы нарушено.

Лемма 11. Пусть $\text{op}_i(N) = \langle L_0^{(2)} \leq N, S | \text{op}_i | L_0^{(2)} \leq N, S \rangle$ — ограниченные элементарных операторов op_i в конечномерное пространство $L_0^{(2)} \leq N$ при заданном S . Пусть $P(\text{op}_i)$: обозначает $L_0^{(2)}$ -нормально упорядоченный полином от op_i . Тогда (i) при $N_1 < N_2$ матрица $P(\text{op}_i(N_1))$: является подматрицей $P(\text{op}_i(N_2))$: и (ii) $P(\text{op}_i(N)) := \langle L_0^{(2)} \leq N, S | P(\text{op}_i) : | L_0^{(2)} \leq N, S \rangle$. Практически мы вычисляем матричные элементы элементарных операторов в $(L_0^{(2)} \leq N, S)$ -подпространстве. Размерность этого подпространства быстро растет с N, S , например, $\dim = 281216$ для $N = 20, S = 6$, так что элементарные операторы представлены матрицами очень большого размера ($\dim \times \dim$). Эти матрицы имеют очевидную блочную структуру, соответствующую их $(\Delta S_3, \Delta A_3, \Delta L_0)$ -зарядовым свойствам. В результате этого ненулевые матричные элементы α_2 , необходимые для вычисления P^2 , расположены в блоках $\langle S_3 = A_3^{(2)}, Q | \alpha_2 | S_3 = A_3^{(2)} + 1, Q \rangle$, в то время как сам P^2 расположен в $\langle S_3 = A_3^{(2)}, Q | P^2 | S_3 = A_3^{(2)}, Q \rangle$. В дополнение к этим свойствам мы используем тот факт, что элементарные матрицы внутри $(S_3, A_3^{(2)}, L_0^{(2)})$ -блоков являются чрезвычайно разреженными (при больших N, S их ненулевое содержимое занимает менее 1% блоков), и реализуем специальные алгоритмы вычислений с разреженными блочными матрицами, описанные более детально в [42].

В конечном итоге, мы определяем спектр $P^2/2\pi$ вплоть до значений $N = 20, S = 6$ и числа членов в разложении (18) $n = 3$. Полученный спектр $(P^2/2\pi, S)$ показан на рис. 6. Спектр имеет общие черты с верхней частью спектра $(L_0^{(2)}, A_3^{(2)})$, показанного на

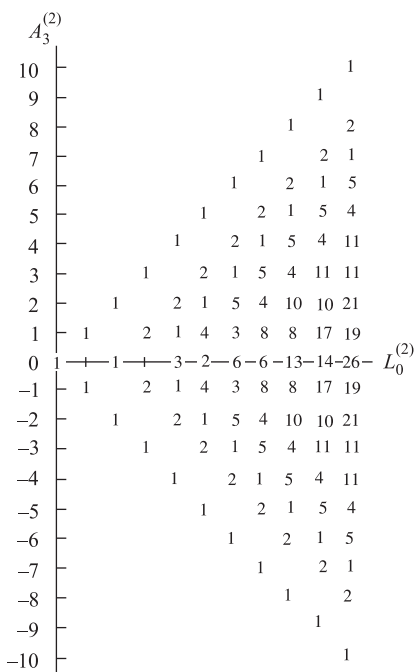


Рис. 5. Спектр $(L_0^{(2)}, A_3^{(2)})$

В конечном итоге, мы определяем спектр $P^2/2\pi$ вплоть до значений $N = 20, S = 6$ и числа членов в разложении (18) $n = 3$. Полученный спектр $(P^2/2\pi, S)$ показан на рис. 6. Спектр имеет общие черты с верхней частью спектра $(L_0^{(2)}, A_3^{(2)})$, показанного на

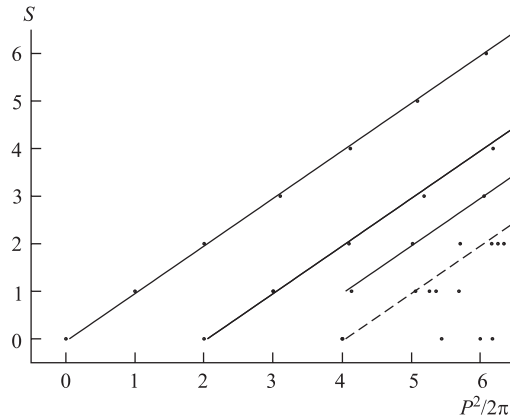
Рис. 6. Спектр $(P^2/2\pi, S)$

рис. 5. Начало спектра $(P^2/2\pi, S)$ состоит из трех почти линейных реджевских траекторий. Между первой и второй траекториями имеется промежуток в две единицы. Третья траектория начинается с $S = 1$ уровня. Для следующих траекторий вырожденные состояния рис. 5 становятся расщепленными на рис. 6. Состояния в $(P^2/2\pi, S) = (3, 1)$ и $(4, 0)$ представляют две численно близкие пары с $P^2/2\pi = 3; 3,0046$ и $P^2/2\pi = 4; 4,0066$, в то время как другие состояния на рис. 6 являются невырожденными (не учитываются тривиальные вырождения по верхнему индексу $S^3 = -S \cdot \dots \cdot S$ и направлению P_μ). Спектр вычислен для значений $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 0$. Меньшие значения c_1, c_2 соответствуют большим нелинейностям в спектре, в то время как большие значения c_1, c_2 делают спектр более линейным и близким к спектру $(L_0^{(2)}, A_3^{(2)} \geq 0)$. Это поведение характеризуется следующими леммами, где для ясности формулировок мы зафиксировали $c_3 = 0$.

Лемма 12. Состояния из табл. 2 аннулируются α_2^+ и имеют целочисленный $P^2/2\pi$.

Таблица 2. Собственные векторы с $P^2/2\pi \in \mathbf{Z}$

$P^2/2\pi = L_0^{(2)}$	$S = S_3 = A_3^{(2)}$	$ \{n_k\}\rangle$
0	0	$ 0\rangle$
2	0	$ 1_1 1_{-1}\rangle$
4	0	$ 2_1 2_{-1}\rangle$
1	1	$ 1_1\rangle$
3	1	$ 1_3\rangle$

Лемма 13 (ведущий член). Сохраним в α_2^+ только ведущий $(1/\tilde{n}_1)$ -член: $\alpha_2^+|_{n=1} = (-\Sigma_- + S_-/\gamma)/\tilde{n}_1$. Состояния с первых двух реджевских траекторий аннулируются $\alpha_2^+|_{n=1}$. В этом приближении первые две реджевские траектории обладают целочисленным $P^2/2\pi$ и являются линейными: $P^2/2\pi = S + k$, $k = 0, 2$.

Лемма 14. В пределе $1 \ll c_1^2 \ll c_2 \ll c_1^4$ спектр $(P^2/2\pi, S)$ стремится к спектру $(L_0^{(2)}, A_3^{(2)} \geq 0)$.

Замечание. Первая реджевская траектория соответствует прямолинейному решению на северном полюсе (6), дальнейшие траектории соответствуют разложению (11) в окрестности северного полюса. Классически имеются калибровочно-эквивалентные решения вблизи южного полюса и экватора, которые обладают теми же самыми (P^2, S) . В квантовой механике мы не видим этих дополнительных решений в спектре. В частности, первая реджевская траектория является невырожденной. Мы заключаем, что эквивалентность между этими решениями теряется в квантовой механике. Спектры для дополнительных решений могут быть смещены в область больших масс, квантовые разложения (18) могут даже расходиться на этих решениях. Действительно, классические решения в окрестности северного полюса (6) обладают большим n_1 и малыми n_k , $k \in \mathbf{Z}/\{0, 1, \pm 2\}$, обеспечивая сходимость $(1/n_1)$ -разложения (11). В квантовой механике сходимость разложения (18) обеспечивается конечным числом заполненных мод в $(L_0^{(2)} \leq N)$ -пространствах и нормальным упорядочением операторов. Для решений вблизи южного полюса $n_1 \rightarrow 0$, и использование $(1/n_1)$ -разложений проблематично. Можно использовать $(1/n_{-1})$ -разложения и построить условие массовой поверхности, альтернативное (19), однако эти определения будут существенно отличаться на квантовом уровне и фактически создадут две различные теории. Для решений на экваторе возбуждено бесконечное число осцилляторных мод, и для этих решений сходимость разложений не гарантируется ни на классическом, ни на квантовом уровне. Эта аргументация объясняет, почему использование $(1/n_1)$ -разложений в окрестности северного полюса сохраняет только одну грибовскую копию в квантовой теории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы построили квантовую теорию открытой струны Намбу-Гото в пространстве-времени размерности $d = 4$. Общий подход состоит в выборе калибровки светового конуса с осью калибровки, связанной лоренц-инвариантным образом с мировым листом. В этом подходе группа Лоренца преобразует мировой лист вместе с осью калибровки и не сопровождается репараметризациями. В результате этого теория становится свободной от аномалий как в группе Лоренца, так и в группе внутренних симметрий

системы. Построенная квантовая теория обладает спин-массовым спектром с реджевским поведением.

Некоторые проблемы все еще имеются в этой теории, которые, впрочем, не препятствуют ее использованию, например, для построения струнных моделей адронов. Полученные в данной теории результаты зависят от упорядочения операторов и других деталей процедуры квантования. Теория не содержит *алгебраических аномалий*, но обладает особенностями, которые можно назвать *спектральными аномалиями*. В частности, гамильтониан $P^2/2\pi$, классически производящий 2π -периодическую эволюцию, в квантовой теории зависит от правил упорядочения и не обладает строго эквидистантным спектром. Данное свойство не создает проблем для адронных моделей, в которых этот спектр подвергается феноменологическим поправкам и экспериментально также не является строго эквидистантным. Кроме того, теория обладает топологическим дефектом, проявляющимся как дискретная калибровочная симметрия, отождествляющая точки в фазовом пространстве (грибовские копии). Эта классическая симметрия связана с дискретной нелинейной репараметризацией мирового листа и не сохраняется на квантовом уровне. В нашем построении мы использовали разложение в окрестности одной грибовской копии, таким образом выделив ее в квантовой теории. Мы также показали, что ведущего члена разложения, который имеет минимальную неоднозначность упорядочения и наиболее прост для вычислений, достаточно, чтобы воспроизвести реджевское поведение спектра. Практически можно сохранить этот член для описания основного эффекта и включить дальнейшие члены в виде феноменологических поправок, наряду с вкладами другого рода [7–15], источниками которых являются ненулевая толщина глюонной трубки, массы и заряды кварков, спин-орбитальное взаимодействие и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nambu Y.* Quark Model and Factorization of the Veneziano Amplitude // Lectures at the Copenhagen Symp. on Symmetries and Quark Models. N. Y., 1970. P. 269.
2. *Hara O.* // Prog. Theor. Phys. 1971. V. 46. P. 1549.
3. *Goto T.* // Ibid. P. 1560.
4. *Dolen R., Horn D., Schmidt C.* // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19, No. 7. P. 402.
5. *Veneziano G.* // Nuovo Cim. A. 1968. V. 57, No. 1. P. 190.
6. *Mandelstam S.* // Phys. Rep. 1974. V. 13, No. 6. P. 259.
7. *Nambu Y.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10, No. 12. P. 4262.
8. *Pron'ko G. P.* // Nucl. Phys. B. 1980. V. 165. P. 269.
9. *Migdal A. A.* // Nucl. Phys. B. 1981. V. 189. P. 253.
10. *Artru X.* // Phys. Rep. 1983. V. 97. P. 147.
11. *Гедалин Э. В., Гурвич Е. Г.* // ЯФ. 1990. Т. 52. С. 240.

12. *Berdnikov E. B., Nanobashvili G. G., Pron'ko G. P.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8, No. 14. P. 2447; No. 15. P. 2551.
13. *Плющай М. С., Пронько Г. П., Разумов А. В.* // ТМФ. 1985. Т. 63. С. 97;
Клименко С. В. и др. // ТМФ. 1986. Т. 64. С. 245;
Плющай М. С., Пронько Г. П., Разумов А. В. // Там же. С. 396.
14. *Sharov G. S.* // Phys. Rev. D. 2000. V. 62, No. 9. P. 094015.
15. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987;
Barbashov B. M., Nesterenko V. V. Introduction to the Relativistic String Theory. Singapore: World Scientific, 1990.
16. *Goddard P. et al.* // Nucl. Phys. B. 1973. V. 56. P. 109.
17. *Brouwer R. C.* // Phys. Rev. D. 1972. V. 6. P. 1655.
18. *Goddard P., Thorn C. B.* // Phys. Lett. B. 1972. V. 40. P. 235.
19. *Scherk J.* // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 123.
20. *Ramond P.* // Phys. Rev. D. 1971. V. 3, No. 9. P. 2415.
21. *Neveu A., Schwarz J. H.* // Nucl. Phys. B. 1971. V. 312, No. 1. P. 86; Phys. Rev. D. 1971. V. 4, No. 4. P. 1109.
22. *Green M., Schwarz J., Witten E.* Superstring Theory. Cambridge Univ. Press, 1987. V. 1, 2.
23. *Brink L., Henneaux M.* Principles of String Theory. N. Y.; London: Plenum Press, 1988.
24. *Fujikawa K.* // Phys. Rev. D. 1982. V. 25. P. 2584.
25. *Kato M., Ogawa K.* // Nucl. Phys. B. 1983. V. 212. P. 443.
26. *Hwang S.* // Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2614.
27. *Bowick M. J., Rajeev S. G.* The Complex Geometry of String Theory and Loop Space // Proc. of the 11th John Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory, Lanzhou, China, June 17–19, 1987. Singapore, 1987.
28. *Hurt N. E.* Geometric Quantization in Action. Dordrecht: D. Reidel Publ., 1983.
29. *Polyakov A. M.* // Phys. Lett. B. 1981. V. 103. P. 207.
30. *Rohrlich F.* // Phys. Rev. Lett. 1975. V. 34. P. 842.
31. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
32. *Dirac P. A. M.* Lectures on Quantum Mechanics. N. Y., 1964.
33. *Plyushchay M. S., Razumov A. V.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 1427.
34. *Del Giudice E., Di Vecchia P., Fubini A.* // Ann. Phys. 1972. V. 70. P. 378.
35. *Бородулин В. И. и др.* // ТМФ. 1985. Т. 65, № 1. С. 119.
36. *Никитин И. Н.* // ТМФ. 1996. Т. 109, № 2. С. 202.
37. *Никитин И. Н.* // ЯФ. 1993. Т. 56, № 9. С. 230.
38. *Pron'ko G. P.* // Rev. Math. Phys. 1990. V. 2, No. 3. P. 355.
39. *Klimenko S. V., Nikitin I. N.* // Nuovo Cim. A. 1998. V. 111. P. 1431.
40. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
41. *Zakharov V. E., Faddeev L. D.* // Functional Analysis and Its Applications. 1971. V. 5, No. 4. P. 18.

42. *Nikitin I. N., Nikitina L. D.* String Theory in Lorentz-Invariant Light Cone Gauge. Parts I–III; hep-th/9906003; hep-th/0301204; hep-th/0306010;
Клименко С. В., Никитин И. Н. Релятивистские струны: математические основы, визуализация, квантование. М.; Протвино: Изд-во ИФТИ, 2004.
43. *Gribov V. N.* // Nucl. Phys. B. 1978. V. 139. P. 1.
44. *Cox D., Little J., O'Shea D.* Ideals, Varieties, and Algorithms. Springer, 1998.
45. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979.
46. *Weyl H.* The Theory of Groups and Quantum Mechanics. N. Y.: Dover, 1950.
47. *Wigner E.* Group Theory. N. Y.: Academic Press, 1959.
48. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.