*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2008. Т. 39. ВЫП. 5*

# ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

*Л. В. Прохоров*

НИИ физики им. В. А. Фока, С.-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2008. Т. 39. ВЫП. 5*

# ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

*Л. В. Прохоров*

НИИ физики им. В. А. Фока, С.-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

С целью выявления наиболее общих законов движения анализируются основы гамильтоновой механики и ее обобщения. Обсуждаются особенности вариационного принципа в гамильтоновой механике (проблемы ковариантной формулировки и начальных условий) и принципа Мопертюи. Подчеркивается связь гамильтоновой механики со статистической физикой (гамильтоновы уравнения движения сохраняют распределение Гиббса, а эволюция неравновесных состояний гармонического осциллятора в термостате описывается амплитудами вероятности). С этой точки зрения рассматриваются наиболее известные обобщения — механики Биркгофа и Намбу. Обсуждаются также механика Остроградского, в которой лагранжиан зависит от высших производных, теории на несимплектических многообразиях, теории не на многообразиях и теории с комплексными переменными. Простейшее обобщение скобок Пуассона с целью описания эволюции неравновесных состояний ведет к появлению в гравитационных уравнениях космологической постоянной.

To uncover the most general laws of mechanics, the Hamiltonian mechanics and its generalizations are analyzed. The peculiarities of variational principle in the Hamiltonian mechanics (problems of covariant formulation, the boundary conditions) and the Mopertuis principle are discussed. Connection of the Hamiltonian mechanics with the statistical physics (the Hamiltonian equations of motion preserve the Gibbs distribution, and the evolution of nonequilibrium states of a harmonic oscillator in a thermal bath is described by probability amplitudes) is stressed. The most known generalizations — the Birkhoff and Nambu mechanics are considered from this point of view. Theories not on symplectic manifolds, not on manifolds, theories with complex variables and the Ostrogradsky mechanics (a theory with the Lagrangian depending on higher derivatives) are discussed. The simplest generalization of the Poisson brackets describing evolution of nonequilibrium states leads to appearance of the cosmological constant in the gravitational equations.

PACS: 45.20.Jj, 03.65.Ta

## ВВЕДЕНИЕ

Изложение классической механики обычно начинают с лагранжева формализма. Исторически это оправданно, ибо уравнения движения Ньютона содержат вторые производные от координат по времени и весьма наглядны. Между тем появилась механика Гамильтона, оперирующая координатами $q$ и (взамен скоростей) импульсами $p$. Ясно, что без серьезных физических причин новый формализм не был бы востребован. Гамильтонова механика (ГМ) сыграла важнейшую роль при построении квантовой механики (КМ), однако еще более важно то, что она допускает нетривиальные обобщения. В связи с тем, что современная квантовая теория поля сталкивается с серьезными трудностями, данный факт представляется особенно важным. Общепринятые теории (гамильтонова механика, квантовая механика) хорошо описывают реальность лишь до определенных пределов, и поиск более общих теорий становится первоочередной задачей физики.

Со временем выяснилось, что, несмотря на схожесть формализмов (дифференциальные уравнения, вариационные принципы), гамильтонова механика сильно отличается от лагранжевой. Прежде всего, в лагранжевой теории (частица в $n$-мерном пространстве) функционал действия $S$ варьируется по $n$ функциям от времени $q^i(t)$, а в ГМ — по $2n$ функциям $(q^i(t), p_i(t))$. Поэтому, если в лагранжевой механике (ЛМ) любые две точки конфигурационного пространства $q_1$ и $q_2$, взятые в моменты времени $t_1$ и $t_2$, можно соединить кривой, экстремизирующей действие, то этого нет в гамильтоновом формализме. В ЛМ в момент $t_1$ задается $2n$ постоянных (координаты и скорости); вместо них можно фиксировать $n$ начальных координат $q(t_1)$ и $n$ конечных $q(t_2)$ (что позволяет обратить в нуль вариации координат во внеинтегральных членах). Напротив, в ГМ $2n$ постоянных (координаты и импульсы) с необходимостью фиксируются в момент времени $t_1$ (фиксация начальной точки). Конечная точка в фазовом пространстве (ФП) уже не может фиксироваться произвольно, и формулировка вариационного принципа требует уточнения. Далее, оказывается, что гамильтонов формализм необыкновенно гибок и допускает самые неожиданные обобщения. Вот несколько примеров.

1. Уравнение

$$\ddot{q}^i = \alpha e_{ijk} q^j \dot{q}^k, \quad i,j,k = 1,2,3 \quad \left(\dot{q} = \frac{dq(t)}{dt}\right), \tag{1}$$

где $e_{ijk}$ — единичный антисимметричный тензор, $e_{123} = 1$, невозможно получить в рамках лагранжева формализма [1, с. 13].

2. В рамках лагранжева формализма не удается естественным образом описать движение с трением, например, получить уравнение [1, с. 46]

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} = 0. \tag{2}$$

3. Существует так называемая механика Намбу [2] с несколькими гамильтонианами $H_1, \ldots, H_{n-1}$ и уравнениями движения

$$\dot{f} = \frac{\partial(f, H_1, \ldots, H_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{3}$$

где $x_i$ — компонента вектора $n$-мерного «фазового пространства», которое, кстати, может быть и нечетномерным.

Между тем уравнения (1), (2) легко получаются в рамках ГМ при ее простейших обобщениях. Именно, в случае уравнений (1) для свободной частицы ($H = \mathbf{p}^2/2$) в качестве антисимметричной $6 \times 6$ матрицы $\omega_{ab}(x)$, $x(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$, следует взять матрицу $\begin{pmatrix} O & I \\ -I & \omega_{ij} \end{pmatrix}$, где $O$ и $I$ — нулевая и единичная $3 \times 3$ матрицы, а $\omega_{ij} = e_{ijk} q_k$ (указано А. С. Ушаковым). Тогда гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{q}_i = p_i, \quad \dot{p}_i = e_{ijk} q_j p_k \tag{4}$$

эквивалентны уравнению (1).

Уравнения типа (2) (например, $\ddot{q} + \alpha\dot{q} + \omega^2 q = 0$) получаются в результате обобщения скобок Пуассона — добавлением к антисимметричной матрице $\omega_{ij}$, определяющей 2-форму, симметричной матрицы $g_{ij} = g_{ji}$ (см. п. 3.4). Наконец, универсальность метода демонстрирует и тот факт, что даже лагранжева теория с высшими производными ($L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots)$) допускает включение в гамильтонову схему (п. 3.8). Более того, механика с антикоммутирующими динамическими переменными (элементами алгебры Грассмана) также допускает гамильтонову формулировку [1, с. 32].

Появление в теории нескольких гамильтонианов [2] поднимает вопрос о смысле распределения Гиббса, к примеру, вопросы о том, следует ли в этом случае вводить для каждого гамильтониана свою температуру, свое время?

В данной работе принимается другая точка зрения на ГМ, развивавшаяся в работах [3–5], посвященных выяснению причин и механизмов, ведущих к квантовому описанию (т. е. к описанию с помощью амплитуд вероятности). Именно, предполагается, что на планковских расстояниях $l_P \approx 1{,}6 \cdot 10^{-33}$ см все процессы носят статистический характер, равновесные состояния описываются распределением Гиббса, а эволюция неравновесных — надлежащим кинетическим уравнением. Оказывается, что из условия стационарности распределения Гиббса фактически вытекают гамильтоновы уравнения движения, а (что не менее важно) эволюция малых отклонений от равновесного распределения для гармонического осциллятора описывается амплитудами вероятности (т. е. в рамках математического аппарата квантовой механики). В связи с тем, что именно на этом этапе скобки Пуассона появляются как новый необходимый элемент теории, проясняются пути их обобщения. В частности, описание перехода неравновесных состояний в равновесные достигается, как отмечалось, простым (но не очевидным) обобщением скобок Пуассона — добавлением к антисимметричной матрице $\omega_{ij}$ некоторой симметричной (п. 3.4). В рамках данного подхода выясняется место механики Намбу в ГМ — как механики неравновесных распределений с большим временем релаксации (пп. 3.5, 3.10).

Связь статистической физики и гамильтоновой механики, выявляющаяся в этом подходе, весьма симптоматична. Как известно, в эргодических системах чисто классическая детерминированная механика порождает элементы вероятностного описания. С другой стороны, из условия стационарности распределения Гиббса естественным образом выделяется однопараметрический класс вариаций канонических переменных, подчиняющихся уравнениям Гамильтона (при отождествлении соответствующего параметра со временем). Подобная тесная связь детерминизма и хаоса представляется особенно важной в связи с тем, что именно эти черты присущи квантовой механике: причинное уравнение Шредингера задает закон эволюции со временем волновой функции (амплитуды вероятности).

В разд. 1 формулируется и анализируется стандартная ГМ. В разд. 2 показано, как ГМ получается из условия стационарности распределения Гиббса, а КМ — при описании эволюции малых отклонений системы от равновесного состояния. Далее (разд. 3) рассматриваются различные обобщения ГМ. Почти все они связаны с теми или иными модификациями скобок Пуассона (возможность, отсутствующая в ЛМ). Механика Намбу — исключение, ибо она позволяет не только формулировать теорию с несколькими функциями Гамильтона, но и вводить в обиход системы с нечетномерными фазовыми пространствами. В заключении обсуждаются некоторые наиболее важные аспекты затронутых вопросов, в частности, возможность введения в ГМ калибровочного произвола. В приложение вынесены громоздкие вычисления, на примерах выясняются роли гамильтониана и 2-формы в динамике, особенности теорий с нетривиальной топологией, особенности механики Остроградского и другие вопросы.

## 1. СТАНДАРТНАЯ ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

**1.1. Уравнения движения.** Чтобы задать гамильтонову механику, нужно, во-первых, задать четномерное фазовое пространство $M^{2n}$ и невырожденную замкнутую 2-форму на нем $\omega^2 = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, $d\omega^2 = 0$ (невырожденность 2-формы означает, что $\det(\omega_{ij}(x)) \neq 0$; тогда пространство будет ориентируемым), во-вторых, задать функцию Гамильтона $H(p,q) \equiv H(x)$, $x \in M^{2n}$. В этом случае говорят, что функция Гамильтона задана на симплектическом многообразии [6, 7]. Дифференциальная 2-форма позволяет определить скобку Пуассона для пары функций $f(x), g(x)$:

$$\{f,g\} \equiv \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \equiv \omega^{ij} f_{,i} g_{,j}, \quad \omega^{ij}\omega_{jk} = \delta^i_k, \quad i,j,k = 1,2,\ldots,2n. \quad (5)$$

В-третьих, нужно постулировать существование «времени» (положительного параметра $t$). В-четвертых, нужно задать законы движения.

Уравнения движения записываются в виде

$$\dot f = \{f, H\}, \quad \dot f = \frac{df}{dt}, \quad (6)$$

или

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\} = \omega^{ij} H_{,j}. \tag{7}$$

Помимо очевидных свойств скобок Пуассона (линейности по каждому аргументу и антисимметрии) предполагается выполнение тождества Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{8}$$

Это тождество сводится к равенству

$$\omega^{im}\omega^{jk}_{,m} + \omega^{jm}\omega^{ki}_{,m} + \omega^{km}\omega^{ij}_{,m} = 0 \tag{9}$$

и эквивалентно утверждению о замкнутости 2-формы

$$\omega_{ij,k} + \omega_{jk,i} + \omega_{ki,j} = 0 \tag{10}$$

(см. приложение 1).

**1.2. Вариационный принцип.** Вариационный принцип в ГМ обычно выводится из принципа наименьшего действия Гамильтона в ЛМ. Если задано лагранжево действие

$$S_L = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}), \tag{11}$$

то из требования его экстремальности при варьировании фиксированных на концах функций $q^i(t)$ ($\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$) вытекают уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \tag{12}$$

(уравнения движения; здесь $i = 1, 2, \ldots, n$). Гамильтонова механика получается из лагранжевой с помощью преобразования Лежандра. Если $L(q, \dot{q})$ есть выпуклая функция от $\dot{q}$, то переход к новым переменным $q, p$ и вместо $L(q, \dot{q})$ к новой функции $H(p, q)$ определяется преобразованием Лежандра

$$H(p, q) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}), \tag{13}$$

где в правую часть вместо $\dot{q}$ следует подставить решение уравнений

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{14}$$

(переменная $\partial L/\partial \dot{q}^i$ объявляется независимой). Функция $H(p, q)$ есть функция Гамильтона, а уравнения (12) очевидным образом эквивалентны уравнениям Гамильтона

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{15}$$

Из равенства (13) напрашивается вывод, что и уравнения (15) должны получаться из некоторого вариационного принципа, если в (11) $L$ заменить на $p_i\dot{q}^i - H(p,q)$:

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} dt(p_i\dot{q}^i - H(p,q)). \tag{16}$$

Видимая простота перехода от (11) к (16) обманчива. Между вариационными принципами $\delta S_L = 0$ и $\delta S_H = 0$ имеется весьма существенная (можно сказать, принципиальная) разница. Начальная точка траектории частицы (системы) в (11) фиксируется координатами и скоростями в начальный момент времени, $q^i(t_1) = c_1^i, \dot{q}^i(t_1) = \tilde{c}_1^i$, т. е. $2n$ постоянными. Вместо скоростей $\dot{q}^i(t_1)$ можно фиксировать координаты в конечный момент времени $q^i(t_2) = c_2^i(c_1, \tilde{c}_1)$. Важность данного обстоятельства связана с тем, что тогда появляющиеся при варьировании действия $S$ пропорциональные $\delta q(t_1), \delta q(t_2)$ внеинтегральные члены обращаются в нуль. В ЛМ начальную и конечную точки $q(t_1), q(t_2)$ можно выбирать произвольно.

Этого нет в ГМ — нельзя фиксировать начальную и конечную точки в фазовом пространстве, ибо нельзя произвольно фиксировать $4n$ переменных $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в уравнениях движения (15).

Отметим, впрочем, что данное обстоятельство проявляет себя и в ЛМ. Обычно считается само собой разумеющимся, что добавление к $L$ в (11) полной производной от произвольной функции $df/dt$ не меняет уравнений движения. Здесь нередко игнорируется тот факт, что $f$ может быть функцией только координат и времени $f(q,t)$ [8, с. 13], но не координат, скоростей и времени $f(q,\dot{q},t)$, ибо последнее означало бы переход $L(q,\dot{q}) \to L(q,\dot{q},\ddot{q})$, т. е. выход за рамки исходного формализма.

Далее, полученное из (11) действие $S_H$ (16) не обладает свойством явной инвариантности. Гамильтонова механика определяется заданием симплектической формы $\omega^2$, т. е. матрицы $\omega_{ij}$, тогда как в (16) входит только часть суммы $\omega_{ij}x^i\dot{x}^j$, а переход $p_i\dot{q}^i \to (p_i\dot{q}^i - q^i\dot{p}_i)/2$ в (16) породил бы при получении уравнений движения проблему фиксации $4n$ постоянных (вместо $2n$) — $q(t_1), p(t_1), q(t_2), p(t_2)$. Правда, в (16) ценой потери ковариантности решается проблема фиксации $4n$ постоянных — действие $S_H$ не зависит от $\dot{p}_i(t)$ и не требуется фиксировать $\dot{p}_i(t_1), \dot{p}_i(t_2)$. Относительно ковариантного вариационного принципа см. п. 1.4.

Сформулируем главные особенности вариационного принципа в гамильтоновой механике.

1. Нельзя произвольно фиксировать начальную и конечную точки траектории системы в ФП.

2. Варьируются не $n$ функций $q^i(t)$, а $2n$ функций $q^i(t), p_i(t)$.

Выводы.

1. Гамильтонова механика несравненно богаче лагранжевой, ибо помимо функции Гамильтона независимо задается 2-форма, также влияющая на динамику. Именно с ее модификациями связаны обобщения ГМ (одно из исключений — механика Намбу, в которой фигурирует несколько гамильтонианов).

2. Формулировка вариационного принципа в ГМ требует дополнительного анализа.

**1.3. Вариационный принцип и квантовая механика.** Представляется, что особенности вариационного принципа в ГМ и связанные с ними затруднения может прояснить квантовая механика. Хотя КМ обычно получается «квантованием» классической, в основе всех изученных явлений природы лежит квантовая механика. Классическая механика получается из нее в пределе при стремлении постоянной Планка $\hbar$ к нулю.

Рассмотрим амплитуду перехода $|q,t\rangle \to |q',t+\epsilon\rangle$, $\epsilon \to 0$,

$$U_{q'q} = \langle q', t+\epsilon | \mathrm{e}^{-i\hat{H}\epsilon/\hbar} | q, t\rangle \approx \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}[p(q'-q) - \epsilon H(p,q)] \right\}. \quad (17)$$

Справа в экспоненте стоит инфинитезимальное действие (16) ($t_2 - t_1 = \epsilon, t_1 = t$), умноженное на $i/\hbar$. Из теории асимптотических разложений интегралов [9] известно, что при $\hbar \to 0$ главный вклад в асимптотику интеграла (17) дает стационарная точка показателя экспоненты

$$S_{1H} = \int\limits_t^{t+\epsilon} dt[p\dot{q} - H(p,q)]. \quad (18)$$

Интегрируя в (17) по $p$, в случае $H(p,q) = p^2/2 - V(q)$ имеем

$$U_{q'q} = (2\pi i\epsilon\hbar)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\left[ \frac{(q'-q)^2}{2\epsilon} - \epsilon V(q) \right] \right\} \approx$$
$$\approx (2\pi i\epsilon\hbar)^{-1/2} \exp\left( \frac{i}{\hbar} \int\limits_t^{t+\epsilon} dt L \right), \quad (19)$$

т. е. решения классических уравнений движения, вытекающих из вариационного принципа Гамильтона, дают определяющий вклад в асимптотику амплитуд перехода при стремлении постоянной Планка к нулю. Ответ на вопрос, почему проведенная выкладка привела к несимметричному действию (18), очевиден: рассмотрение велось в $q$-представлении. Квантовая механика и здесь приходит на помощь.

Рассмотрим матричный элемент оператора эволюции между состояниями $\langle p|$ и $|q\rangle$, взяв *два* инфинитезимальных интервала времени $\epsilon_1$ и $\epsilon_2$:

$$\langle p|\hat{U}_{\epsilon_1+\epsilon_2}|q\rangle = \langle p|\mathrm{e}^{-i\hat{H}\epsilon_2/\hbar}\,\mathrm{e}^{-i\hat{H}\epsilon_1/\hbar}|q\rangle \approx$$
$$\approx \int \frac{dq'dp'}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\mathrm{e}^{-iq'p/\hbar}\,\mathrm{e}^{-iH(p,q')\epsilon_2/\hbar}\,\mathrm{e}^{i(q'-q)p'/\hbar}\,\mathrm{e}^{-iH(p',q)\epsilon_1/\hbar}. \quad (20)$$

Главный вклад в интеграл по $p'$ при $\hbar \to 0$ дает экстремум действия (18) при варьировании его по $p(t)$, тогда как главный вклад в интеграл по $q'$ определяется асимптотикой интеграла

$$\int dq'\mathrm{e}^{-i[q'(p-p')+H(p,q')\epsilon_2]/\hbar}, \quad (21)$$

т. е. экстремумом действия

$$S_{2H} = -\int\limits_t^{t+\epsilon} dt[q\dot{p} + H(p,q)] \quad (22)$$

при варьировании его по $q(t)$.

Итак, квантовая механика подсказывает такое решение проблемы. Поскольку в ГМ неизвестными являются $2n$ функций $q(t), p(t)$, для получения уравнений движения из условия минимальности действия можно пользоваться *двумя* разновидностями действий — $S_{1H}$ (18) и $S_{2H}$ (22); в первом следует варьировать функции $p(t)$, а во втором — $q(t)$. Это разрешает вопрос о фиксации начальных и конечных значений функций $q(t)$, $p(t)$ и восстанавливает их равноправность. Остается проблема инвариантной формулировки принципа наименьшего действия, который обсуждается в следующем пункте.

Квантовая механика проливает свет и на другой вопрос. Преобразования называются каноническими, если они сохраняют симплектическую форму $\hat{\omega}$, $(\hat{\omega})_{ij} \equiv \omega_{ij}$; например, преобразование $x' = \hat{C}x$ каноническое, если

$$\hat{C}^T\hat{\omega}\hat{C} = \hat{\omega} \quad (23)$$

(в [7] оно именуется симплектическим, $\hat{C} \in \mathrm{Sp}(2n)$). Подобные преобразования сохраняют скобки Пуассона, что существенно при переходе к квантовому описанию, ибо согласно рецепту Дирака [10] коммутатор канонических переменных фиксируется правилом

$$[\hat{q}^j, \hat{p}_k] = i\hbar\{q^j, p_k\}; \quad (24)$$

здесь $\{f,g\} = \dfrac{\partial f}{\partial q^j}\dfrac{\partial g}{\partial p_j} - \dfrac{\partial f}{\partial p_j}\dfrac{\partial g}{\partial q^j}$. Подчеркнем, впрочем, что данный рецепт применим только в декартовых координатах.

Между тем в КМ важную роль играют переменные, связанные с $q$ и $p$ *неканоническим* преобразованием. Для гармонического осциллятора с гамильтонианом $H = (p^2 + q^2)/2$, $\{q, p\} = 1$, таким преобразованием будет переход к комплексным переменным $z = (q + ip)/\sqrt{2}, \bar{z} = (q - ip)/\sqrt{2}$, поскольку

$$\{\bar{z}, z\} = i. \tag{25}$$

Но при квантовании $\bar{z}, z$ превращаются в операторы $\hat{\bar{z}}, \hat{z}$, известные как операторы рождения и уничтожения $\hat{a}^+ = \hat{\bar{z}}$, $\hat{a} = \hat{z}$, подчиняющиеся согласно (24) коммутационному соотношению

$$[\hat{\bar{z}}, \hat{z}] = i\hbar\{\bar{z}, z\} = -\hbar. \tag{26}$$

Именно собственные значения $a^*$ оператора $\hat{a}^+$ (т. е. $\bar{z}$ для $\hat{\bar{z}}$) являются аргументами векторов в пространстве Фока (целые аналитические функции состояний $\Phi(a^*)$ или $\Phi(\bar{z})$).

Рассмотренные примеры, во-первых, указывают на возможность привлечения КМ для анализа проблем ГМ, позволяя взглянуть на них с новой точки зрения, а во-вторых, показывают необходимость изучения и неканонических преобразований в гамильтоновой механике [1].

**1.4. Ковариантная формулировка вариационного принципа.** В п. 1.2 отмечалось принципиальное отличие вариационных принципов в лагранжевой и гамильтоновой механиках. Если в первой всегда можно задать начальную и конечную точки $q_1^i, q_2^i$ в конфигурационном пространстве ($2n$ постоянных), то в ФП это сделать невозможно, ибо пришлось бы фиксировать $4n$ постоянных в системе $2n$ уравнений 1-го порядка. Отсюда и затруднения с инвариантной формулировкой вариационного принципа — задание действия в виде

$$S_{\omega H} = \int \left[\frac{1}{2}(p_i\dot{q}^i - q^i\dot{p}_i) - H(p, q)\right] dt = \int \left(\frac{1}{2}\omega_{ij}x^i\dot{x}^j - H(x)\right) dt \tag{27}$$

влечет при варьировании $S_{\omega H}$ появление внеинтегрального члена

$$\frac{1}{2}(p_i\delta q^i - q^i\delta p_i)\Big|_{t_1}^{t_2}, \tag{28}$$

и чтобы обратить его в нуль, нужно наложить $4n$ условий на $2n$ функций $q^i, p_i$.

Разрешение проблемы требует ясного понимания того, что вариационный принцип $\delta S = 0$ выступает в двух разных качествах.

1. Как свойство классического движения (из всех траекторий, соединяющих начальную и конечную точки, только физические экстремизируют действие).

2. Как средство для получения уравнений движения (из условия экстремальности действия находят уравнения движения).

В ЛМ эти два аспекта вариационного принципа эквивалентны: из экстремальности действия на физических траекториях можно найти уравнения движения, а действие экстремально на их решениях. Этого нет в ГМ. Если первое условие остается неизменным, то второе требует выполнения дополнительных условий: для получения уравнений движения в ГМ из действия $S_{\omega H}$ нужно ограничить класс вариаций, именно, ограничиться вариациями, отличными от нуля лишь в интервале времен $\Delta_t$: $t_1 \leqslant t < t_2$ или $t_1 < t \leqslant t_2$ ($\Delta_t \subset [t_1, t_2)$ или $\Delta_t \subset (t_1, t_2]$), т. е.

$$\delta x(t) = 0, \quad \text{если} \quad t \notin \Delta_t. \tag{29}$$

При этом внеинтегральные члены (28) обращаются в нуль. Используя решения полученных уравнений, убеждаемся, что они экстремизируют действие $S_{\omega H}$ в стандартном понимании, т. е. при фиксированных $x(t_1)$ и $x(t_2)$.

Итак, при инвариантном формулировании вариационного принципа в ГМ для получения уравнений движения необходимо изменить класс допустимых вариаций. Тем не менее все еще остается вопрос: почему не вполне удовлетворительная (ввиду общей ковариантности ГМ) формулировка вариационного принципа (16) дает полный комплект уравнений (15)? Оказывается, что в ГМ всегда можно перейти к таким каноническим переменным (правда, с помощью неканонического преобразования), что действие будет иметь вид (16). Действительно, в выражении (27) перейдем сперва к комплексным каноническим переменным $\bar{z}_j, z_j = (q_j + ip_j)/\sqrt{2}$ (для этих переменных нет смысла различать верхние и нижние индексы $j$, ибо роль антисимметричной матрицы играет мнимая единица $i$, см. п. 3.11). Тогда сумма $\sum(p_i\dot{q}^i - q^i\dot{p}_i)/2$ в (27) превращается в $i\sum(\bar{z}_j\dot{z}_j - z_j\dot{\bar{z}}_j)/2$. Переходя теперь к новым каноническим переменным $r_j, \varphi_j, z_j = r_j\, \mathrm{e}^{i\varphi_j}$ (преобразование неканоническое!), обнаруживаем, что эта сумма приобретает вид

$$\frac{1}{2}\sum(p_i\dot{q}^i - q^i\dot{p}_i)/2 = -\sum r_j^2\dot{\varphi}_j, \tag{30}$$

т. е., как и в формуле (16), в сумму входят производные по времени только от половины канонических переменных. Фактически данная особенность общепринятого выражения для действия (16) не нарушает ковариантности формализма. Сказанное можно пояснить и по-другому. Группа инвариантности (23) для $n = 1$ есть $\mathrm{Sp}(2) = SO(2)$, т. е. разность $x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2$ есть инвариант. Предположим, что с помощью неканонического преобразования можно перейти к новым переменным $y(y_1, y_2)$, таким, что $y_1 = \mathrm{inv}, \dot{y}_2 = \mathrm{inv}$. Тогда выражение $x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2 = f(y_1)y_1\dot{y}_2$ инвариантно относительно симплектических преобразований ($\dot{y}_1y_2$ не есть инвариант, в (30) $y_2 = \varphi$, и

$\varphi \to \varphi + \alpha, \dot{\alpha} = 0$). Но согласно теореме Дарбу форма $\omega_{ij} x^i \dot{x}^j$ всегда может быть приведена к стандартному виду, что и доказывает общность утверждения.

## 2. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

**2.1. Сохранение энергии и уравнения движения. Принцип Мопертюи.** Тривиальным следствием уравнений Гамильтона является сохранение энергии, т. е. постоянство $H(p,q)$ при условии $\partial H/\partial t = 0$:

$$\dot{H} = \{H, H\} = 0. \tag{31}$$

Полезно задать вопрос: какие условия на вариации канонических переменных $\delta x^i$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, накладывает требование постоянства функции Гамильтона

$$\delta H(x) = \frac{\partial H}{\partial x^i} \delta x^i \equiv \nabla H \delta \mathbf{x} = 0, \tag{32}$$

если $\partial H/\partial t = 0$? Решение уравнения (32) очевидно — $2n$-вектор $\delta \mathbf{x}$ ортогонален $2n$-вектору $\nabla H$, поэтому

$$\delta \mathbf{x} = \hat{\omega} \nabla H \delta s, \tag{33}$$

где $\hat{\omega}$ — некоторая антисимметричная $2n \times 2n$ матрица, а $s$ — некоторый скалярный параметр. Отождествляя его со временем ($s \equiv t$), переписываем решение (33) в виде

$$\dot{x}^i = \omega^{ij} \partial_j H, \quad \omega^{ij} = (\hat{\omega})^{ij}, \tag{34}$$

идентичном (7). Если матрица $\hat{\omega}$ невырождена и для нее выполняется тождество Якоби (9), то система уравнений (34) идентична уравнениям Гамильтона. Если же не отождествлять $s$ со временем, то эти уравнения есть уравнения траектории изображающей точки системы в фазовом пространстве, т. е. их решения задают траекторию в параметрической форме. Данный факт (связь (32) с (34)) может показаться малозначительным, поскольку уравнения (7), (34) хорошо известны. Небольшой анализ показывает, однако, что это не так. Оказывается, что изучение различных вариаций канонических переменных $x^i$ позволяет по-новому взглянуть на квантовую механику и на механику вообще, если включить в рассмотрение статистическую физику (распределение Гиббса). Последнее условие вообще может показаться искусственным, не имеющим отношения к механике. С точки зрения классической механики как самодостаточной науки, заданной системой аксиом, это действительно так. Если же речь идет о поиске законов, управляющих миром, то, как мы увидим (п. 2.3, заключение), это оправданно, учитывая вероятностную природу квантовой механики.

Но даже в рамках стандартной ГМ указанное обстоятельство позволяет разобраться в вопросе о физическом смысле принципа Мопертюи. Еще К. Якоби писал [11, с. 39]: «Почти во всех учебниках, даже и в лучших, как Пуассона, Лагранжа и Лапласа, этот принцип представлен так, что, по моему мнению, его нельзя понять». Дело в том, что делается утверждение о минимуме интеграла («укороченное действие»)

$$S_M = \int dt p_r(t)\dot{q}^r(t), \quad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{35}$$

на траектории действительного движения системы. Между тем интеграл (35) не содержит никакой конкретной информации о рассматриваемой системе, заключенной в лагранжиане или гамильтониане. В этом первопричина затруднения. Далее К. Якоби продолжает: «При этом, правда, говорится, что теорема применима только в том случае, если имеет место теорема живых сил [закон сохранения энергии], но при этом забывают сказать, что при помощи теоремы живых сил необходимо исключить из предыдущего интеграла [т. е. из (35)] время и все свести к пространственным элементам». Жалобы на трудности понимания этого принципа звучат и по сей день (см. [6, с. 211]).

Между тем связь условия (32) с (33) проясняет смысл принципа Мопертюи. Действительно, если минимум $S_M$ (35) ищется при условии $H = \mathrm{const} = E$, то необходимо прибегнуть к методу множителей Лагранжа $\lambda(t)$, т. е. искать минимум действия

$$S'_M = \int dt[p_r(t)\dot{q}^r(t) - \lambda(t)(H - E)], \tag{36}$$

в котором варьирование ведется и по $\lambda(t)$. Переписывая (36) в виде

$$S'_M = \int d\tau[p_r(\tau)q'^r(\tau) - (H - E)], \tag{37}$$

где $d\tau = \lambda(t)dt$, $q'^r = dq^r/d\tau$, обнаруживаем, что минимум достигается на решениях уравнений

$$q'^r(\tau) = \frac{\partial H}{\partial p_r(\tau)}, \quad p'_r(\tau) = -\frac{\partial H}{\partial q^r(\tau)}, \tag{38}$$

задающих траекторию движения системы. Варьирование (36) по $\lambda(t)$ фиксирует энергию системы. Тем самым связь условия (32) с уравнениями движения (34) позволяет разобраться с физическим содержанием принципа Мопертюи. В следующих разделах выясняется, что данное обстоятельство (цепочка равенств (32)–(34)) имеет еще более далеко идущие последствия.

**2.2. Гамильтонова механика и статистическая физика.** Привлечение статистической физики позволяет увидеть новые аспекты гамильтоновой механики.

1. Если взять равновесное распределение для системы в термостате (распределение Гиббса)

$$W_G = Z^{-1}\mathrm{e}^{-\beta H(p,q)}, \tag{39}$$

где $1/\beta = kT$, $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — температура, то условие (32) для $H(p,q)$ эквивалентно условию

$$\delta W_G = 0. \tag{40}$$

Можно сказать, что эволюция механической системы в термостате, не меняющая ее функции распределения, описывается уравнениями, вытекающими из (33), в частности, уравнениями (34), т. е. классическими уравнениями движения.

Данный факт крайне важен. Во-первых, он позволяет рассматривать Вселенную как динамическую систему в термостате, эволюция которой согласно классическим уравнениям движения не меняет равновесного распределения. Что касается природы термостата, то это отдельный вопрос. Во-вторых, возникает проблема описания эволюции неравновесных состояний системы, задаваемых распределением [12, с. 7]

$$W(p,q) = Z^{-1}\rho(p,q)\,\mathrm{e}^{-\beta H(p,q)}, \tag{41}$$

где $\rho(p,q)$ — некоторая неотрицательная функция в ФП, такая, что

$$\int d\Gamma W(p,q) = 1, \quad d\Gamma \equiv d^n p d^n q. \tag{42}$$

Очевидно, со временем неравновесное состояние переходит в равновесное, а при большом времени релаксации $t_r$ в интервале времен $\Delta t \ll t_r$ эволюция системы сводится к эволюции $\rho(p,q)$ согласно классическому уравнению

$$\dot\rho = \{\rho, H\}. \tag{43}$$

Данное обстоятельство заслуживает особого внимания в связи с тем, что в основе всей физики лежит квантовая механика, теория принципиально вероятностная. То, что движение свободной частицы (например, электрона) в пустом пространстве описывается в рамках вероятностной теории, вызывало удивление, недоумение, несогласие (вспомним эйнштейновское «Бог не играет в кости»), но не находило никакого рационального объяснения. Замечательно, что именно уравнения (32), (40), (41) позволяют построить классическую модель механической системы, эволюция которой со временем описывается комплексными амплитудами вероятности, т. е. квантовой механикой (см. [3, 5, 13] и п. 2.3).

2. Условие нормировки

$$Z^{-1}\int d\Gamma\, \mathrm{e}^{-\beta H(p,q)} = 1 \tag{44}$$

накладывает определенные ограничения на класс допустимых гамильтонианов, не оговариваемые при формулировании ГМ. Тем самым, казалось бы, исключаются физически важные гамильтонианы, описывающие, например, движение свободной частицы ($H = p^2/2$). Из класса таких *статистически допустимых механик* исключаются и теории с вырожденными гамильтонианами, у которых $\det(\partial^2 H/\partial p_r \partial p_s) = 0$. Подобные гамильтонианы возникают в теориях со связями. В действительности следует различать конкретные частные случаи (например, движение свободной частицы) от проблемы описания Вселенной в целом. В последнем случае интеграл (44) должен существовать. А для изучения законов движения свободной частицы ее можно поместить в ящик достаточно больших размеров, подставив в интеграл (44) функцию $\theta(L^2 - q^2)$. Это касается и вырожденных систем, у которых часть степеней свободы — нефизические (например, $p_1, q_1$). Они исключаются из рассмотрения подстановкой в интеграл функции $\delta(p_1)\delta(q_1)$, что напоминает рецепт П. Дирака для перехода к квантовому описанию подобных систем.

3. Получают объяснение следующие особенности стандартной ГМ.

а) Положительность энергии — требование существования интеграла (44).

б) Четномерность фазового пространства. В случае его нечетномерности всегда существует «каноническая переменная», любая вариация которой не сохраняет распределение Гиббса (пример — одномерное фазовое пространство). Подобные нефизические переменные не обсуждаются в механике Гамильтона, а требование четномерности ФП в ней постулируется — это условие невырожденности 2-формы (определитель антисимметричной нечетномерной матрицы равен нулю).

в) Наконец, в ГМ функция Гамильтона $H(x)$ определена с точностью до постоянной. Статистическая физика устраняет этот произвол (нормировка (44)).

Таким образом, привлечение статистики, мотивируемое вероятностной природой КМ, ограничивает класс допустимых гамильтонианов, характеризующих Вселенную в целом, и проясняет природу некоторых постулатов ГМ.

**2.3. Статистическая физика и квантовая механика.** Связь гамильтоновой механики и статистической физики, обсуждавшаяся в п. 2.2, позволяет установить связь статистической физики с квантовой механикой и тем самым прямую связь гамильтоновой механики с квантовой. Покажем, что амплитуды вероятности описывают эволюцию неравновесных распределений гармонического осциллятора в термостате [3, 5, 13]. Рассмотрим соответствующее распределение Гиббса

$$W_G(q,p) = h^{-1}\,\mathrm{e}^{-\beta H(q,p)}, \quad H = \frac{\omega}{2}(p^2+q^2), \quad \beta = \frac{1}{kT}, \quad h = \frac{2\pi}{\beta\omega}. \quad (45)$$

Нормировочная размерная постоянная $h$ есть универсальная постоянная теории, она имеет размерность действия, и ее, как мы увидим, можно отождествить с постоянной Планка $\hbar$.

Возьмем гамильтонову теорию, в которой ФП есть сфера радиусом $R$ (координаты $\varphi, \theta$, дифференциальная 2-форма $R^2 \sin\theta d\varphi \wedge d\theta$). Помимо стереографического отображения сферы на комплексную плоскость $z$ имеется следующее, менее тривиальное «стереологарифмическое» отображение [5]:

$$|z|^2 = -(1/\beta)\ln(2\beta R^2 \sin^2\theta/2), \quad \arg z = \varphi,$$

которое порождает 2-форму

$$\frac{d\bar z \wedge dz}{i}\mathrm{e}^{-\beta\bar z z}.$$

Переменные $z, \bar z$ можно рассматривать как комплексные канонические переменные $z = (q+ip)/\sqrt{2}$, $\bar z = (q-ip)/\sqrt{2}$ из п. 1.3; тогда эта 2-форма задает распределение Гиббса для гамильтониана $(p^2+q^2)/2$ и меру в ФП. Его объем равен $4\pi R^2 = h$, т. е. здесь $h$ есть фундаментальная постоянная классической теории, характеризующая ФП. Тем самым распределение (45) допускает красивую геометрическую интерпретацию, а постоянная $h$ приобретает наглядный геометрический смысл.

Распределение (45) задает следующую меру $\mu$ в фазовом пространстве:

$$d\mu(q,p) = \frac{dq\wedge dp}{h}\mathrm{e}^{-\beta\omega(p^2+q^2)/2} = \frac{d\bar z\wedge dz}{ih}\mathrm{e}^{-\bar z z/\hbar} = \\ = d\mu(\bar z, z),\ H = \omega\bar z z,\ \hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{1}{\beta\omega}. \quad (46)$$

Строго говоря, (46) есть бивектор, но, поскольку ФП есть ориентируемое многообразие, эта нестрогость терминологии не приведет к недоразумениям. В преобразовании

$$\begin{pmatrix} \bar z \\ z \end{pmatrix} = \hat U \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad \hat U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad (47)$$

матрица $\hat U$ унитарна ($\hat U^+ \hat U = 1$), и $H$ можно записать в виде

$$H = \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} \bar z \\ z \end{pmatrix} U^* U^+ \begin{pmatrix} \bar z \\ z \end{pmatrix} = \\ = \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} \bar z \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar z \\ z \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Скобки Пуассона в комплексных переменных выглядят так:

$$\{f,g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}\right) \equiv \frac{\partial(f,g)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(\bar z,z)}\frac{\partial(\bar z,z)}{\partial(q,p)} = i\frac{\partial(f,g)}{\partial(\bar z,z)}. \quad (49)$$

Преобразование $(q,p)\to(\bar z,z)$ неканоническое. Переход к комплексным каноническим переменным в классической механике играет принципиальную роль в выявлении ее связи с квантовой механикой. В случае комплексных переменных можно ограничиться лишь одним из двух гамильтоновых уравнений движения

$$\dot z = \{z,H\} = -i\omega z. \quad (50)$$

Второе уравнение $\dot{\bar z} = i\omega\bar z$ получается комплексным сопряжением. Это — одна из существенных особенностей КМ: достаточно найти решение уравнения Шредингера для $\psi$; $\bar\psi$ получается комплексным сопряжением.

Мера (46) задает равновесное распределение для гармонического осциллятора в термостате. Любая другая мера $\mu_p$,

$$d\mu_p = p(x)d\mu, \quad (x_1,x_2)=(q,p), \quad p(x)\geqslant 0, \quad \int d\mu_p = 1,$$

описывает некоторое неравновесное распределение [12, с. 7]. Неравновесные распределения можно генерировать различными способами, например, варьируя канонические переменные $x$. Произвольная вариация $\delta x$ представляется суммой

$$\delta x = \delta x_\perp + \delta x_\parallel, \quad (51)$$

где $\delta x_\perp$ по определению сохраняет распределение Гиббса, т. е. удовлетворяет уравнению (32); решения этого уравнения определяются формулами (33), (34).

Напротив, вариации $\delta\mathbf{x}_\parallel$ не сохраняют равновесное распределение. Взяв, например, вариации $z\to z+c$, находим

$$d\mu(\bar z,z)\to d\mu_f(\bar z,z) = |f_c(z)|^2 d\mu(\bar z,z), \;\; f_c(z) = \mathrm{e}^{-\bar c z/\hbar}\,\mathrm{e}^{-\bar c c/2\hbar}, \quad \int d\mu_f = 1. \quad (52)$$

Мера $\mu_f(\bar z,z)$ описывает неравновесное распределение, которое с течением времени стремится к равновесному ($|f_c|^2\to 1$); $|f_c|^2$ есть плотность вероятности $p$ в $d\mu_p$.

Вариации $\delta x_\perp$, сохраняющие распределение Гиббса, будем называть *гамильтоновыми*, а вариации $\delta x_\parallel$, деформирующие его, — *негамильтоновыми*. Необходимо различать малые и большие негамильтоновы вариации.

*Малые вариации* порождают новые распределения со старым гамильтонианом (малость в указанном смысле имеет место, например, в (52), где $c$ произвольно).

*Большие вариации* порождают распределения с новым гамильтонианом, т. е. новую динамику в рамках нового (квази)равновесного распределения в интервале времен $\Delta t \ll t_r$ ($t \ll t_r$). Новый гамильтониан должен содержать более высокие степени импульсов. Классическая механика изучает эволюцию гамильтоновых вариаций. Она не влечет изменения $W_G$ (39) и описывается *причинными* уравнениями.

Тем самым можно говорить о больших и малых деформациях гамильтониана. В квантовой теории поля и теории твердого тела примером больших деформаций может служить фазовый переход (перестройка основного состояния). И большие, и малые деформации распределения Гиббса могут появиться в результате флуктуаций или внешнего воздействия. Поскольку равновесное состояние задается распределением Гиббса, большие и малые деформации порождают, вообще говоря, неравновесные распределения. Если исходное состояние неустойчиво (как в модели Хиггса), то оно может возникнуть только в результате внешнего воздействия.

Обратимся к малым деформациям. Отметим два важных обстоятельства.

1. Для описания эволюции меры $\mu_f(\bar{z}, z)$ достаточно знать закон эволюции лишь одной функции $f$ в (52) [5]

$$\dot{f} = \{f, H\} = -i\omega z \frac{df}{dz} \tag{53}$$

(а не $\rho(q,p) = |f(z)|^2$, как в (43)).

2. Если время релаксации $t_r$ велико, $\omega^{-1} \ll t_r$, то в интервале времен $0 < t \ll t_r$ можно использовать классические уравнения движения (53). Умножая (53) на $i\hbar$, фактически приходим к уравнению Шредингера (относительно «вакуумной энергии» $\hbar\omega/2$ см. ниже).

Важно установить класс допустимых функций $f(z)$. Обозначая $\varphi = \arg z$ ($z = |z|\mathrm{e}^{i\varphi}$) и учитывая, что фиксация энергии эквивалентна фиксации $|z|$ ($d|z|/dt = 0$), перепишем уравнение (53) в виде

$$(\partial_t + \omega\partial_\varphi) f = 0.$$

Его решением будет любая функция $f(\varphi - \omega t)$. «Квадрируя» это уравнение, получаем волновое уравнение на окружности $|z| = \mathrm{const}$

$$(\partial_t - \omega\partial_\varphi)(\partial_t + \omega\partial_\varphi) f = (\partial_t^2 - \omega^2\partial_\varphi^2) f = 0.$$

Отсюда немедленно заключаем, что функции $f(z)$, описывающие (квази)стационарное движение, должны быть периодическими, $z(t) = |z| \exp[i(\varphi - \omega t)]$, и ввиду (52) (нормировка) допускать разложение в ряд по степеням $z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (подробнее см. [5]).

Поскольку $z^n(t) = z^n(0) \exp[-in\omega t]$, при больших временах релаксации имеют место осцилляции с частотами $n\omega$; они доминируют при $\omega^{-1} \ll t_r$,

$t \ll t_r$. Мера (52) позволяет определить гильбертово пространство целых аналитических функций $f(z)$ порядка $\rho \leqslant 2$. Счетное множество функций $f_{c_i}(z)$ даже для произвольно малых, но конечных $\bar{c}_i$ ($\bar{c}_i \to \bar{c}$, $i \to \infty$) образует переполненный базис в пространстве Фока [14] со скалярным произведением

$$(g(z), f(z)) = \int d\mu(\bar{z}, z)\overline{g(z)}f(z). \tag{54}$$

Отметим попутно, что в ФП с мерой Гиббса всегда можно ввести скалярное произведение (54) и гильбертово пространство для фазовых функций общего вида $f(\bar{z}, z)$ (или $f(q,p)$), но они уже не будут амплитудами вероятности, ибо зависят от обеих канонических переменных.

Итак, аналитические функции $f(z)$

а) есть фазовые функции;

б) есть динамические переменные;

в) могут считаться случайными функциями;

г) могут быть отождествлены с амплитудами вероятности (элементами гильбертова пространства).

Из (54) следует (если брать осциллятор), что умножение функции $\overline{f(z)}$ на $z$ эквивалентно применению к ней оператора $\hbar d/d\bar{z}$ (проверяется интегрированием в (54) по частям). Следовательно, в пространстве функций $\overline{f(z)}$ можно определить операторы $\hat{a}^+\overline{f(z)} \equiv \bar{z}\overline{f(z)}$, $\hat{a}\overline{f(z)} \equiv \hbar d\overline{f(z)}/d\bar{z}$ (т. е. $z \leftrightarrow \hat{a}$, $\bar{z} \leftrightarrow \hat{a}^+$), $[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar$. Поскольку канонические переменные $z$, $\bar{z}$ становятся операторами, операторами становятся и все физические величины. Во избежание недоразумений подчеркнем, что в (54) $z$, $\bar{z}$, $f(z)$, $\overline{g(z)}$ есть обычные комплексные переменные — операторные свойства выявляются лишь при отождествлении $f(z)$, $\overline{g(z)}$ с векторами в пространстве Фока и при анализе результатов их умножения на функции от $z$, $\bar{z}$. Несложно убедиться, что если состояние осциллятора описывается функцией $f$, то $|(g,f)|^2$ есть вероятность нахождения осциллятора в «состоянии $g$» [5].

В квантовой механике стохастическая по своей природе волновая функция удовлетворяет причинному уравнению Шредингера. Данная модель проясняет природу этого феномена. Рассмотрим неканоническое преобразование $(\bar{z}, z) \to (\varphi, r)$, $z = r\exp{(i\varphi)}$. Тогда

$$\{f, g\} = i\frac{\partial(f,g)}{\partial(\bar{z},z)} = i\frac{\partial(f,g)}{\partial(\varphi,r)}\frac{\partial(\varphi,r)}{\partial(\bar{z},z)} = -\frac{1}{2r}\frac{\partial(f,g)}{\partial(\varphi,r)}.$$

Теперь $H = \omega r^2$, и уравнения движения для $\varphi, r$ выглядят так:

$$\dot{\varphi} = -\omega, \quad \dot{r} = 0 \tag{55}$$

(разумеется, они эквивалентны стандартному уравнению $\dot{z} = -i\omega z$). Это означает, что в случае неравновесного распределения одна из канонических переменных ($\varphi$) удовлетворяет «нетривиальному» классическому уравнению движения (55), тогда как другая не меняется со временем: будучи чисто стохастической, переменная $r$ характеризуется распределением вероятности Гаусса $\exp(-r^2/\hbar)$. В выражении для энергии $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ первый член отвечает вкладу классического движения: взяв в (53) $f = z^n$, получим $\omega_n = n\omega$. Второй член в сумме есть результат влияния термостата; он одинаков для всех состояний, поскольку $r$ — независимая каноническая переменная. Энергия квантуется ($\hbar\omega_n = n\hbar\omega$) благодаря классическому движению!

Главное отличие задач о классическом гармоническом осцилляторе и о неравновесном состоянии осциллятора в термостате заключается в следующем. В первом случае $H = \omega\bar{z}z$ и

$$\dot{f}(z) = -i\omega z\frac{d}{dz}f(z),$$

если $f(z)$ есть произвольная функция (динамическая переменная). Во втором случае $f(z)$ характеризует неравновесное распределение для осциллятора в термостате (неравновесное состояние), т. е. 1) $f(z)$ не произвольна (нормировка); 2) термостат должен влиять на изменение $f(z)$ со временем. Функция $f(z)$ оказывается вектором из пространства Фока, и, как подчеркивалось выше, смысл $\bar{z}, z$ в гамильтониане меняется радикально — теперь это операторы $z \leftrightarrow \hat{a}$, $\bar{z} \leftrightarrow \hat{a}^+$, $\hat{a}^+\overline{f(z)} \equiv \bar{z}\overline{f(z)}$, $\hat{a}\overline{f(z)} \equiv \hbar d\overline{f(z)}/d\bar{z}$. Классическое уравнение движения (53) можно записать в операторной форме

$$i\hbar\dot{f} = \hat{H}_{\mathrm{cl}}f, \quad \hat{H}_{\mathrm{cl}} = \hbar\omega z\frac{d}{dz}.$$

Если $f$ есть вектор гильбертова пространства, то в $H$, очевидно, нужно учесть некоммутативность $\hat{a}^+, \hat{a}$ (или $\hat{\bar{z}}, \hat{z}$). Формула (48) явно задает порядок следования операторов $\hat{\bar{z}}, \hat{z}$ в гамильтониане, т. е. при переходе к описанию эволюции векторов состояния в классическом уравнении движения следует сделать замену

$$\hat{H}_{\mathrm{cl}} \to \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{\bar{z}}\hat{z} + \hat{z}\hat{\bar{z}}) = \hbar\omega\left(\bar{z}\frac{d}{d\bar{z}} + \frac{1}{2}\right).$$

Вычисляя среднее от $\hat{H}$ (48) для различных состояний $z^n/\sqrt{n!}$, еще раз убеждаемся, что первое слагаемое в $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ отвечает вкладу классического движения ($\hbar\omega n$), а второе отражает влияние термостата на сохраняющуюся каноническую переменную $r$ («нулевая энергия» $\hbar\omega/2$, в полном соответствии с (55)). Уравнение движения для случайной величины $f(z)$ выглядит так:

$$i\hbar\dot{f}(z) = \hat{H}f(z).$$

Это и есть уравнение Шредингера для волновой функции осциллятора в пространстве Фока.

Итак, в рамках чисто классической теории получается описание с помощью амплитуд вероятности $f(z)$ (квантовая механика), ибо $|f(z)|^2 \equiv p(x)$ может быть отождествлено с плотностью вероятности. Это верно для квазистационарных неравновесных состояний. Присутствуют все необходимые элементы квантовой механики: постоянная Планка $\hbar$, комплексные амплитуды вероятности $f(z)$, пространство Фока и уравнение Шредингера. Классические уравнения движения для осциллятора получаются фактически из условия сохранения распределения Гиббса (они конкретизируются выбором матрицы $\hat{\omega}$ в (33)).

Могут возникнуть вопросы. 1) Получающаяся квантовая теория описывает нестационарные состояния, тогда как стандартная КМ — стационарные; в чем дело? Но, во-первых, экспериментально «стационарность» КМ подтверждена лишь с определенной точностью, а во-вторых, здесь речь идет не о модели, а об универсальной теории, о законах эволюции Вселенной в целом. Это напоминает ситуацию в космологии до открытия Хаббла: Вселенная представлялась статической, расстояния между галактиками — неизменными. 2) В чем причина выделенности гармонического осциллятора? Ответ: математически — распределение Гиббса для него есть предельное распределение теории вероятностей (двумерное распределение Гаусса); физически — все известные поля есть совокупности гармонических осцилляторов. Выделенность осцилляторов среди прочих механических систем очевидна.

## 3. ОБОБЩЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ МЕХАНИКИ

**3.1. Простейшие обобщения.** Учитывая важность гамильтоновой механики для фундаментальной физики, рассмотрим некоторые ее обобщения. Как уже подчеркивалось, для этого в ГМ имеются широкие возможности. На первый взгляд постановка вопроса может показаться надуманной, поскольку стандартная механика успешно описывает все (или почти все) известные явления внешнего мира. С прагматической точки зрения, характерной для XX в., подобное сомнение оправданно. Если же взглянуть шире, учитывая уникальность Вселенной и управляющих ею законов, то поиск и перечисление *всех* (в определенных рамках, конечно) допустимых механик заслуживает самого серьезного внимания. Это может помочь найти самые фундаментальные законы природы, определяющие физику на планковских расстояниях, а тем самым установить единство законов природы во всех ее проявлениях (обобщение программы единых теорий). Имеется в виду не только «объединение всех полей и взаимодействий», но и установление законов, определяющих как динамику микромира (вплоть до планковских расстояний), так и эволюцию Вселенной в целом, включая инфляционный период. Есть основания полагать, что на этом пути удастся прояснить природу темной материи и объяснить феномен темной энергии.

В стандартной ГМ задаются три основных ее составляющих.

I. Фазовое пространство — четномерное многообразие $M^{2n}$.

II. Замкнутая невырожденная 2-форма $\omega^2 = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$ на нем, $x \in M^{2n}$.

III. Функция Гамильтона $H(x) \equiv H(p,q)$.

При этом молчаливо предполагается наличие неотрицательного параметра $t$ (времени), от которого зависят все функции $f(x)$ $(= f(x(t)))$ согласно уравнениям

$$\dot{f} = \omega^{ij} f_{,i} H_{,j}, \quad \omega^{ik}\omega_{kj} = \delta^i_j. \tag{56}$$

Любое отступление от перечисленных условий ведет к модификации механики. Возможны следующие изменения условия I.

$\mathrm{I}_1$. Многообразие берется нечетномерным.

$\mathrm{I}_2$. Рассматривается динамика не на многообразии.

$\mathrm{I}_3$. Берется многообразие с границей.

Наиболее богатые возможности обобщений связаны с симплектической формой $\omega^2$.

$\mathrm{II}_1$. Форма $\omega^2$ не замкнутая.

$\mathrm{II}_2$. Форма $\omega^2$ точная.

$\mathrm{II}_3$. Форма $\omega^2$ вырожденная.

$\mathrm{II}_4$. Матрица $\omega^{ij}$ не антисимметричная.

$\mathrm{II}_5$. Матрица $\omega^{ij}$ зависит от $t$.

Условие $\mathrm{II}_2$ может показаться не обобщением механики, а, наоборот, переходом к частному случаю. Но в комбинации с $\mathrm{II}_5$ это позволяет сформулировать механику Биркгофа (п. 3.3).

Что касается гамильтониана, то его модификация означает переход к описанию другой динамической системы в рамках данной ГМ, скажем, $H_0(p) = p^2/2 \to H(p,q) = p^2/2 + V(q)$ (напомним, что гамильтониан определен с точностью до аддитивной постоянной). Но и здесь существуют нетривиальные обобщения, например, переход к механике Намбу (п. 3.5).

$\mathrm{III}_1$. Механика с несколькими гамильтонианами $H_1(x), H_2(x), \ldots, H_k(x)$, $1 < k \leqslant n-1$, и уравнениями движения (3).

$\mathrm{III}_2$. Гамильтониан зависит от $t$.

Другие модификации связаны с изменением природы канонических переменных и с изменением лагранжевой механики.

IV. Механика с комплексными переменными $z, \bar{z}$, $z = (q+ip)/\sqrt{2}$.

V. Механика с грассмановыми переменными $\theta_\alpha$, $\theta_\alpha\theta_\beta + \theta_\beta\theta_\alpha = 0$.

VI. Гамильтонова механика, полученная из лагранжевой теории с высшими производными в лагранжиане $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots)$.

Далее,

VII. Теории, получающиеся из ГМ с помощью неканонических неособенных преобразований.

Найденные таким образом механики могут отличаться от исходной и 2-формой, и гамильтонианом, хотя описывают одну и ту же динамическую систему.

Наконец,

VIII. Теории не на многообразиях.

Следует выделить также

IX. Теории с топологически нетривиальными фазовыми пространствами.

Полезно различать случаи многообразий с тривиальной и нетривиальной топологиями. Хотя условие II явным образом допускает последнее, вопрос исследован мало.

X. Теории со связями.

Механики со связями хорошо известны, и нет необходимости обсуждать их в деталях. Обратим лишь внимание на то, что ФП с нетривиальной топологией может появиться как результат наличия в теории связей.

Поскольку перечисленные возможности являются базисными, возможны их комбинации, порождающие новые механики. Имеются и более сложные обобщения, например, механика Биркгофа, связанная с модификацией вариационного принципа (см. п. 3.3).

Следует различать *собственные* модификации, не меняющие уравнений движения, и *несобственные*, меняющие и стандарт I–III, и уравнения движения. Приведем некоторые из них.

**3.2. Гамильтонова механика, группы и деформации.** Рассмотрим теорию, в которой

$$\omega^{ij} = f_k^{ij} x^k, \tag{57}$$

где $f_k^{ij}$ — структурные постоянные некоторой простой группы. Тогда

$$\{x^i, x^j\} = f_k^{ij} x^k, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, N, \tag{58}$$

т. е. канонические переменные $x^i$ удовлетворяют тем же алгебраическим соотношениям, что и генераторы группы, поскольку

$$[\hat{f}^i, \hat{f}^j] = f_k^{ij} \hat{f}^k; \tag{59}$$

здесь $\hat{f}^i$ — матрицы $(\hat{f}^i)_k^j = f_k^{ji}$, $(\hat{f}^i \hat{f}^j)_k^l = f_n^{li} f_k^{nj}$. Условие (59) идентично тождеству Якоби (9). Очевидно, задаваемая матрицей (57) 2-форма вырождена. Фазовое пространство, образуемое каноническими переменными $x^i$, в данной теории может быть нечетномерным (например, $N = 3$ в случае группы $SO(3)$).

Различные варианты ГМ могут получаться друг из друга с помощью *деформации* скобок Пуассона, т. е. модификацией симплектической формы. Примером может служить замена

$$\omega^2 = dq^i \wedge dp_i \to \Omega^2 = dq^i \wedge dp_i + F_{ij}(q) dq^i \wedge dq^j, \tag{60}$$

где форма $F = F_{ij} dq^i \wedge dq^j$ замкнута ($dF = 0$) [15, с. 185]. Деформация (60) с незамкнутой формой $F$ также дает содержательную теорию. Примером служит система (4) с симплектической матрицей $\omega_{ab}$.

Наиболее известный пример деформации — переход к $q$-осцилляторам [1, с. 48]. В этом случае стандартная скобка Пуассона $\{q,p\} = 1$ заменяется [16] (в соответствующих единицах) на

$$\{q,p\} = 1 + \frac{p^2+q^2}{c}, \quad c = \mathrm{const}. \tag{61}$$

Все это примеры несобственных модификаций ГМ. В [1] имеются и другие примеры подобных деформаций.

Приведем теперь примеры собственных деформаций. В работе [17] был рассмотрен случай двух гармонических осцилляторов

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2), \quad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Показано, что в теории

$$H' = p_x p_y + xy, \quad \hat{\omega}' = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

переменные $x, y, p_x, p_y$ удовлетворяют тем же самым уравнениям движения, что и переменные $q_1, q_2, p_1, p_2$. Аналогичное утверждение сделано и для теории, в которой

$$H'' = \frac{1}{2}(p_y^2 - p_x^2 + y^2 - x^2), \quad \hat{\omega}'' = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Модели (63), (64) выглядят странно, поскольку гамильтонианы $H', H''$ не дают нормируемые распределения $W_G$ (39).

Суть дела проста. Модели (63), (64) получаются из (62) переходом к комплексным переменным. Действительно, в уравнениях модели (62)

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -q_1, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -q_2 \tag{65}$$

перейдем к комплексным переменным

$$x = \frac{q_1 + iq_2}{\sqrt{2}} = \zeta,\; y = \frac{q_1 - iq_2}{\sqrt{2}} = \bar{\zeta},\; p_x = \frac{p_1 - ip_2}{\sqrt{2}} = p_\zeta,\; p_y = \frac{p_1 + ip_2}{\sqrt{2}} = p_{\bar{\zeta}}, \tag{66}$$

уравнения для которых вытекают из (65)

$$\dot{q}_1 + i\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_1} + i\frac{\partial H}{\partial p_2} = p_1 + ip_2 \to \dot{x} = p_y = \frac{\partial H'}{\partial p_x},$$

$$\dot{p}_1 - i\dot{p}_2 = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_1} - i\frac{\partial H}{\partial q_2}\right) = -(q_1 - iq_2) \to \dot{p}_x = -y = -\frac{\partial H'}{\partial x}, \tag{67}$$

т. е.

$$\dot{\zeta} = p_{\bar{\zeta}} = \frac{\partial H'''}{\partial p_\zeta}, \quad \dot{p}_\zeta = -\bar{\zeta} = -\frac{\partial H'''}{\partial \zeta}, \tag{68}$$

$$H''' = p_{\bar{\zeta}} p_\zeta + \bar{\zeta}\zeta.$$

Вторая пара уравнений получается из (67) комплексным сопряжением. Здесь, в отличие от переменных $z, \bar{z}, z = (q + ip)/\sqrt{2}$ п. 2.3, комплексифицируют плоскость $(q_1, q_2)$, т. е. переходят к комплексным *координатам* и комплексным импульсам.

Теория (64) получается из (62) переходом к переменным

$$x = iq_1, \quad y = q_2, \quad p_x = ip_1, \quad p_y = p_2. \tag{69}$$

Оба этих преобразования ((66) и (69)) неканонические, поскольку меняются матрицы $\hat{\omega}$. Во втором $\{x, p\} = -1$, в первом меняется порядок нумерации канонических переменных: $(q_1, q_2, p_1, p_2) \to (x, y, p_y, p_x)$.

То, что при таких преобразованиях радикальным образом меняются гамильтонианы — неудивительно. При переходе к комплексным переменным $\bar{z}, z$ гамильтониан $(p^2 + q^2)/\sqrt{2} \to \bar{z}z$. Далее, как известно [18, 1, с. 33], переход к грассмановым переменным $(q, p) \to (\xi_1, \xi_2)$ для гармонического осциллятора не меняет уравнений движения, но не является каноническим преобразованием. Примеры механических систем (63), (64) связаны с неявным переходом к алгебраически новым переменным (появление $i$, $i^2 = -1$). Отметим также, что если даже рассматривать $q_1, q_2$ как вещественные компоненты комплексных координат, то переход $q_1 \to iq_1, q_2 \to q_2$ с точки зрения распределения Гиббса (поворот в комплексной плоскости) недопустим.

**3.3. Теория Биркгофа.** Так называемая теория Биркгофа [19–21] по существу базируется на обобщенном гамильтоновом действии (27) (вариационный принцип Пфаффа–Биркгофа [19, с. 95]):

$$S_B = \int_1^2 [A_\mu(x,t)\dot{x}^\mu + B(x,t)]dt, \tag{70}$$

где $A_\mu$, $B$ есть функции канонических переменных $x$ и времени $t$. Функция $B$ играет роль гамильтониана (в (70) $B = -H$). Уравнения движения получаются из вариационного принципа $\delta S_B = 0$ (проблема фиксации граничных значений $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ игнорируется)

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = \partial_\mu B - \partial_t A_\mu, \quad \Omega_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu, \tag{71}$$

т. е. формализм охватывает случаи неконсервативных систем (п. $\mathrm{III}_2$) и зависящих от времени 2-форм (п. $\mathrm{II}_5$). Отметим, что матрице $\Omega_{\mu\nu}$ отвечает точная 2-форма (п. $\mathrm{II}_2$). Данный факт исключает из теории случаи фазовых пространств с нетривиальной топологией. Впрочем, следует иметь в виду и то, что в звездной области замкнутая 2-форма есть дифференциал 1-формы.

Примечательно, что уравнения (71) инвариантны относительно «калибровочных преобразований»

$$A'_\mu(x,t) = A_\mu(x,t) + \partial_\mu\Lambda(x,t), \quad B'(x,t) = B(x,t) + \partial_t\Lambda(x,t), \tag{72}$$

$\Lambda(x,t)$ — произвольная функция. Действие (70) при преобразованиях (72) меняется следующим образом:

$$\Delta S_B = S_B(\Lambda) - S_B(0) = \int_1^2 [\partial_\mu\Lambda dx^\mu + \dot{\Lambda}dt] = \Lambda|_{x_1}^{x_2} + \Lambda|_{t_1}^{t_2}, \tag{73}$$

т. е. $\Delta S_B = 0$ для $\Lambda(x_{1,2},t) = \Lambda(x,t_{1,2}) = 0$ — получается нечто вроде ограниченного принципа калибровочной инвариантности (функция $\Lambda$ оказывается не вполне произвольной).

Еще более примечательно то, что вариационный принцип Биркгофа можно трактовать как обобщение принципа Мопертюи (35). Действительно, вводя «инвариантный» параметр $\tau$ и полагая $t$ динамической переменной $t(\tau)$, переписываем (70) в виде

$$S_B = \int_1^2 (A_\mu(x,t)dx^\mu + B(x,t)dt) = \int_1^2 (A_\mu(x,t)\overset{\circ}{x}{}^\mu + B(x,t)\overset{\circ}{t})d\tau, \quad \overset{\circ}{x} = \frac{dx}{d\tau}. \tag{74}$$

Фазовое пространство будет нечетномерным ($N = 2n+1$), но если посчитать $B$ величиной, канонически сопряженной $t(\tau)$, то аналогия будет полной.

Это напоминает придание явно инвариантного вида действию для релятивистской частицы

$$S = -m\int\sqrt{1-\dot{\mathbf{x}}^2}dt = -m\int\sqrt{\overset{\circ}{t}{}^2 - \overset{\circ}{\mathbf{x}}{}^2}d\tau = -m\int\sqrt{\overset{\circ}{x}{}^2}d\tau. \tag{75}$$

Таким образом, теория Биркгофа является примером несобственной модификации (п. 3.1).

В заключение отметим, что переход $t \to t(\tau)$ в лагранжевом формализме приводит к связи $p_0 + H(x) = 0$ [1, с. 136], а действие записывается в виде

$$\int \left( p^i \overset{\circ}{q}{}^i + p_0 \overset{\circ}{t} \right) d\tau,$$

аналогичном (74). Отметим также, что если функции $A_\mu, B$ зависят от времени, то это позволяет описать и процессы, в которых энергия не сохраняется. Сюда относится важный пример гармонического осциллятора с трением (см. п. 3.4, П. 6).

**3.4. Теории на несимплектических многообразиях.** Оказывается, что даже отказ от симплектичности многообразия (фазового пространства) ведет к физически содержательным теориям. Это позволяет описать в рамках общей идеологии гамильтоновой механики диссипативные системы. Простейший пример такой системы упоминался во введении — это движение свободной частицы в среде с трением, описываемое уравнением (2). Более интересный пример — диссипативный осциллятор, описываемый уравнением

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + \omega^2 q = 0. \tag{76}$$

Уравнение (76) решается точно и описывает экспоненциально затухающие осцилляции. Для получения уравнения типа (76) в рамках гамильтонова формализма нужно взять стандартный гамильтониан $H = \omega(p^2 + q^2)/2$, но видоизменить скобку Пуассона [4, 5]

$$\{f, g\} \to \{f, g\}_\alpha = \{f, g\}_- - \alpha \{f, g\}_+, \quad \alpha > 0, \tag{77}$$

где $\{f, g\}_- = \{f, g\}$ — обычная скобка Пуассона, а

$$\{f, g\}_+ = \sum_{i,j} h^{ij} \partial_i f \partial_j g, \quad h^{ij} = h^{ji}. \tag{78}$$

Если записать $H = \sum\limits_{i,j} h_{ij} x^i x^j$, $2h_{ij} = \omega \delta_{ij}$, то в качестве $h^{ij}$ можно взять матрицу, обратную $h_{ij}$, $h^{ik} h_{kj} = \delta^i_j$. Гамильтоновы уравнения движения с обобщенными скобками Пуассона $\{f, g\}_\alpha$ выглядят теперь следующим образом:

$$\dot{q} = \{q, H\}_\alpha = \omega p - \alpha q, \quad \dot{p} = \{p, H\}_\alpha = -\omega q - \alpha p, \tag{79}$$

откуда, исключая $\dot{p}$ и $p$, находим

$$\ddot{q} + 2\alpha \dot{q} + (\omega^2 + \alpha^2) q = 0. \tag{80}$$

Теории с $\alpha < 0$, очевидно, описывают процессы формирования неравновесных состояний. Заслуживает внимания тот факт, что при этом меняется частота осцилляций ($\omega^2 \to \omega^2 + \alpha^2$). В применении к полям данное обстоятельство ведет к нетривиальным следствиям — безмассовые поля приобретают массу. Применительно к гравитационному полю это ведет к появлению космологического члена $\Lambda = \alpha^2/2$, что открывает новые возможности в решении проблемы темной энергии [4, 5]. Ранее подобные обобщения рассматривались Сантилли [20, II, с. 97].

В работах [20, 21] в качестве $h^{ij}$ бралась матрица $\mathrm{diag}(1{,}0)$; частота осцилляций при этом не меняется (получается уравнение (76)). С точки зрения ГМ переменные $q, p$ для осциллятора равноправны, поэтому естественно ожидать воздействия силы трения и на $q$, и на $p$. Примечательно, что такой же результат (изменение частоты) дает механика Биркгофа. Чтобы убедиться в этом, подынтегральное выражение в (27) необходимо умножить на $\mathrm{e}^{2\alpha t}$ и отождествить соответствующие функции с $A_\mu$ и $B$ в (70) (см. П. 6).

На первый взгляд кажется, что обобщение (77) не может иметь аналога в КМ и здесь их пути расходятся. Если бы это было так, то скобка (77) не могла бы играть никакой роли в фундаментальной физике (например, в физике на планковских расстояниях), а связь уравнения (80) с проблемой космологической постоянной выглядела бы неубедительной. В действительности все обстоит наоборот [5]. Амплитуды вероятности (квантовая механика) появляются как раз при описании неравновесных состояний, а постоянная $\alpha^{-1}$ равна времени их жизни (времени релаксации $t_r$).

**3.5. Механика Намбу.** Как уже говорилось во введении, отличительной особенностью механики Намбу (МН) [2] является наличие нескольких гамильтонианов $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$. Уравнения движения для функций $f(x)$, определенных на $n$-мерном фазовом пространстве $M^n$, $x \in M^n$, определяются формулой

$$\dot{f} = \frac{\partial(f, H_1, \ldots, H_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = e_{i_1 i_2 \cdots i_n} \partial_{i_1} f \partial_{i_2} H_1 \cdots \partial_{i_n} H_{n-1}, \tag{81}$$

где $e_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ — единичный антисимметричный тензор, $e_{12\cdots n} = 1$. Чтобы теория была содержательной, должно выполняться условие

$$e_{i_1 i_2 \cdots i_n} \partial_{i_2} H_1 \cdots \partial_{i_n} H_{n-1} \neq 0. \tag{82}$$

Может показаться, что такая механика радикально отличается от стандартной ГМ. Прежде всего она разрушает ряд сложившихся стереотипов, а именно: гамильтониан генерирует сдвиги во времени (здесь же несколько гамильтонианов), гамильтониан задает распределение Гиббса (следует ли в этом случае вводить несколько температур?), фазовое пространство четномерно (здесь оно может быть нечетномерным).

В действительности отличия МН от гамильтоновой не столь радикальны. Прежде всего, все гамильтонианы сохраняются ($\dot{H}_i = 0$, см. (81)). Далее, все они должны быть независимы; если, например, $H_2 = F(H_1)$, то $\dot{f} = 0$, т. е. теория тривиальна. Правда, вместо одного условия $\delta x_\perp \perp \nabla H$ теперь появляются несколько: $\delta x_\perp$ перпендикулярны $n-1$ независимым векторам $\nabla H_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Введение дополнительных гамильтонианов ограничивает динамику системы. К примеру, если взять $H_{n-1} = |p_n|$, то $\dot{p}_n = 0$, $p_n = \mathrm{const}$ и размерность ФП фактически уменьшается на единицу. Аналогичный эффект достигается введением $H_{n-1} = |q_n|$, $q_n = \mathrm{const}$. В этом отношении МН может оказаться полезной в задаче о компактификации пространства в теории Калуцы–Клейна–Манделя–Фока [22–25] и в теории струн [26].

Тем не менее механика Намбу вполне укладывается в схему п. 2.2. Если из условия сохранения распределения Гиббса (40) вытекает ГМ (уравнения движения (34)), то из условия неизменности аналогичного распределения $\exp\left(-\sum \beta_i H_i\right)$ получается уравнение Намбу (81).

**3.6. Теории не на многообразиях.** Сравнительно недавно появилась необходимость умения формулировать механику не на многообразиях. Речь идет о переднем фронте физики — наноструктурах и теории струн.

В физике твердого тела изучаются, в частности, квантовые точки (трехмерные объекты размером $L$ — порядка десятков ангстрем), квантовые проволоки (трубки радиусом $L$) и квантовые ямы (диски толщиной $L$). Квантовые проволоки могут ветвиться, т. е. образовывать тройные вершины, из квантовой ямы могут исходить одна или несколько квантовых проволок, по которым могут перемещаться электроны. Между тем подобные структуры в пределе при $L \to \infty$ не есть многообразия — окрестности точек соединения проволок не допускают взаимно-однозначного отображения в евклидово пространство. Отсюда и возникает необходимость умения формулировать механику не на многообразиях.

Аналогичная ситуация имеет место в теории струн. С открытием D-бран (это $p$-мерные объекты — $p$-браны, $p \geqslant 1$, на которых могут оканчиваться струны, — D1-браны, $p = 1$ [26]) появилась необходимость рассматривать структуры, образуемые, например, тремя струнами с одной общей точкой («трехлучевая звезда»). Задача приобрела особую актуальность в связи с моделированием 3-мерного физического пространства сетью, построенной из суперструн [5, 13, 27]. Описание распространения струнных возбуждений по сети предполагает наличие соответствующего гамильтонова формализма.

В настоящее время как классическая, так и квантовая теории подобных процессов фактически отсутствуют. Можно привести лишь некоторые соображения относительно основных черт соответствующей механики.

В классической теории для получения хоть каких-то указаний на характер соответствующей динамики можно перейти от линий (полуосей звезды) к полосам шириной $a$. Тогда движение становится двумерным. Но при этом а) отсутствует гамильтониан, б) появляются границы произвольной формы. Следовательно, для получения динамики на звезде нужно изучить следующие вопросы: 1) выяснить зависимость предельной динамики ($a \to 0$) от вида гамильтониана, 2) ее зависимость от характера границ (скажем, от их гладкости), 3) учесть, что задача приобретает совершенно новый характер — например, если нет внешних сил, то получается биллиард Синая [28, с. 33]. Таким образом, в классической задаче (детерминированная механика) появляются вероятности. Известно появление вероятностей в эргодических теориях при изучении динамики в фазовом пространстве. В данном случае вероятности появляются при попытке описать движение в конфигурационном пространстве. Это дает основание полагать, что динамика не на многообразии может иметь вероятностный характер.

Не менее важен вопрос о законах сохранения. Если требование сохранения энергии представляется бесспорным, то сохранение импульса совсем не очевидно. Сама постановка вопроса вызывает затруднения. Частица, дойдя до точки ветвления, может продолжать двигаться лишь по одной ветви, поэтому встает вопрос выбора — по какой именно? Можно допустить возможность дробления частицы, предположив, что она превращается в две частицы с массами $m_1$ и $m_2$, $m_1+m_2=1$. Или, допуская ее движение по одному из лучей, допустить и возможность отражения от вершины звезды. Тогда опять появляются вероятности. Если вероятность движения по какому-то лучу равна $w_1$, то вероятность попадания на другой луч равна $w_2$, а вероятность отражения — $w_3$, $w_1+w_2+w_3=1$. В зависимости от ответов на эти вопросы решается и проблема сохранения импульса. Если частица дробится, то ответ будет один, если же переходить к вероятностному описанию, то, очевидно, другой.

Можно было бы ожидать, что в квантовой теории задача облегчается, поскольку эта теория изначально вероятностная. Но и здесь имеется нюанс. Если рассматривать импульсы частиц как двумерные векторы в плоскости звезды, то, казалось бы, между начальным вектором $\mathbf{p}$ и конечными векторами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$ должно существовать равенство $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$. Но этого нет. Можно рассмотреть одномерную теорию скалярного поля, моделировав его цепочкой осцилляторов, колеблющихся ортогонально плоскости. Изучение движения одночастичных возбуждений в такой модели показывает, что, во-первых, помимо прошедших центр звезды волн будут и отраженные, а во-вторых, вероятности рассеяния на центре (отражение и прохождение) не зависят от углов между лучами. Это согласуется с чисто математическими исследованиями квантовых процессов на сетях [29, 30].

Таким образом, приходится констатировать, что в данном случае строго детерминированная гамильтонова механика невозможна, если не задавать дополнительно правила прохождения частиц через вершины. Но с точки зрения динамики в плоскости импульс сохраняться не будет. Вершина звезды выступает как силовой центр.

**3.7. Теории с алгебраически нетривиальными динамическими переменными.** Оказалась востребованной ГМ, в которой динамические переменные $q^i$, в отличие от стандартного случая ($q \in R^n$), являются элементами некоторой алгебры. Изучение подобных систем стимулировалось квантовой теорией поля, в которой рассматриваются и комплексные, и фермионные поля.

Переход к комплексным динамическим переменным $\zeta = (q_1 + iq_2)/\sqrt{2}$, $i^2 = -1$, не представляет труда. Если гамильтониан зависит от $\zeta, \bar{\zeta}, p_\zeta, p_{\bar{\zeta}}$, то уравнения движения получаются тривиальным обобщением уравнений (15)

$$\dot{\zeta}^i = \frac{\partial H}{\partial p_{\zeta^i}}, \quad \dot{p}_{\zeta^i} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta^i}. \tag{83}$$

Остальные уравнения получаются из (83) комплексным сопряжением. Гамильтониан $H$ берется вещественным, $p_\zeta = (p_1 - ip_2)/\sqrt{2}$. Простота обобщения связана с коммутативностью алгебры ($[\zeta^i, \zeta^j]_- = 0$). Фактически такие переменные использовались в работе [17] (см. п. 3.2).

Другой пример — появление комплексных канонических переменных $\bar{z}, z = (q + ip)/\sqrt{2}$ — рассматривался в пп. 1.3, 2,3. Они играют принципиальную роль при переходе к квантовому описанию. Подчеркнем, что преобразование $q, p \to z, \bar{z}$, в отличие от перехода $q_1, q_2 \to \zeta, \bar{\zeta}$, не является каноническим.

Гораздо более важный пример связан с переходом к грассмановым (антикоммутирующим) переменным — алгебре с образующими $\xi^i, \xi^i\xi^j + \xi^j\xi^i = 0$. В квантовой теории поля подобные переменные появляются при описании полей с полуцелым спином. В этом случае имеются две различные лагранжевы формулировки [18, 1, с. 24].

**3.8. Теории с высшими производными в лагранжиане. Механика Остроградского.** В связи с проблемой расходимостей в теории квантованных полей внимание привлекли динамические системы, описываемые лагранжианами с высшими производными по времени от координат. Применительно к полям это могло бы решить проблему бесконечностей в рядах теории возмущений. Каноническое квантование подобных систем предполагает умение строить для них гамильтонов формализм.

Гамильтонова формулировка теории, в которой лагранжиан зависит не только от координат и скоростей, но и от производных более высокого порядка от координат по времени ($L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(k)})$), рассматривалась еще М. В. Остроградским [31]. Идея заключается в том, чтобы объявить скорости, ускорения и т. д. новыми переменными: $(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(k-1)}, q^{(k)}) \equiv (q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{k-1}, \dot{q}_k)$, т. е. $\dot{q}_i = q^{(i)}, i = 1, \ldots, k$, а импульсы и гамильтониан определить следующим образом:

$$p_j = \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial L}{\partial q^{(i+j)}}, \quad q^{(j-1)} = q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{84}$$

$$H(q_i, p_i) = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + \ldots + p_k \dot{q}_k - L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{k-1}, \dot{q}_k) \tag{85}$$

при условии, что соотношение (84) для $j = k$ можно разрешить относительно $\dot{q}_k$, а вместо остальных $\dot{q}_j$ в (85) подставить $q_{j+1} = \dot{q}_j$. Лагранжиан называется невырожденным, если $\det \partial^2 L / \partial q_r^{(k)} \partial q_s^{(k)} \neq 0$ (в случае нескольких степеней свободы). Тогда из определений (84), (85) следует

$$dH = \sum_{j=1}^{k} (dp_j \dot{q}_j + p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial q_1} dq_1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_1^{(i)}} d\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right). \tag{86}$$

Равенство (86) означает, что $H$ зависит только от $q_j, p_j$. Лагранжевы уравнения движения записываются в виде

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} = 0. \tag{87}$$

Приравнивая в (86) коэффициенты при $dp_i$, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{88}$$

Из равенства коэффициентов при $dq_{j+1} = d\dot{q}_j$ находим следующие $k - 2$ уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = p_{j-1} - \frac{\partial L}{\partial q^{(j-1)}} = -\dot{p}_j, \quad j = 2, \ldots, k-1. \tag{89}$$

К уравнениям (89) необходимо добавить уравнение, вытекающее из равенства коэффициентов при $dq_1$, в котором $\partial L / \partial q_1$ следует заменить на сумму в (87)

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} = -\dot{p}_1. \tag{90}$$

В правой части (86) отсутствует член $\dot{q}_k$, поэтому

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial q^{(k)}}. \tag{91}$$

В (89), (90) использованы равенства

$$p_1 = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}}, \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dot{p}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

вытекающие из определения (84). Тем самым демонстрируется, что задаваемая формулой (85) функция $H(q_i, p_i)$ зависит только от канонических переменных. Получающуюся механику уместно именовать механикой Остроградского.

Переход к новой механике требует выполнения ряда неочевидных операций. Для иллюстрации сказанного рассмотрим теорию с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + \ddot{q}^2 - q^2). \tag{92}$$

Имеем, согласно (84),

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = \dot{q} - \dddot{q}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = \ddot{q}. \tag{93}$$

Спрашивается, как с помощью уравнений (93) исключить из лагранжиана $\dot{q}, \ddot{q}$, избежав появления в нем $\dddot{q}$? Поступают следующим образом. В определение $H$ (85) вместо $\dot{q}$ подставляют $q_2$, т. е. первое уравнение (93) не используется. Используется только второе: $\ddot{q} = \dot{q}_2 = p_2$. После этого нетрудно продемонстрировать, что полученный гамильтониан (с учетом сделанных обозначений) дает уравнение для $q$, эквивалентное уравнению Эйлера–Лагранжа с функцией $L$ (92). Определение импульсов (84) также далеко не очевидно (оно вытекает из условия (86)).

Другая трудность связана с тем, что $\dot{q}$ можно трактовать и как $\dot{q}_1$, и как $q_2$. В последнем случае $L = (q_2^2 + \dot{q}_2^2 - q_1^2)/2$ и $q = q_1$ оказывается нефизической переменной. Возможный выход из положения — введение дополнительных параметров в лагранжиан (92) подстановкой

$$\dot{q} = \alpha \dot{q}_1 + \beta q_2, \quad \ddot{q} = \dot{q}_2, \quad \alpha + \beta = 1. \tag{94}$$

Теперь лагранжиан зависит от $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$ и допускает стандартную процедуру перехода к гамильтонову формализму. Получающиеся уравнения эквивалентны уравнениям Эйлера–Лагранжа с $L$ (92), а параметры $\alpha, \beta$ выпадают из конечного уравнения. Более подробно особенности механики Остроградского обсуждаются в П. 5. В работе [32] рассмотрен случай вырожденных лагранжианов ($\det \partial^2 L / \partial \dot{q}_r^{(k)} \partial \dot{q}_s^{(k)} = 0$).

**3.9. Симплектические многообразия и их геометрия.** Четномерные симплектические многообразия, фигурирующие в ГМ, не нуждаются в метризации. Наделение их дополнительной структурой, например, метрикой, допустимо, но с точки зрения стандартной ГМ необязательно. Между тем уже в простейших калибровочных теориях [1, 33] ФП физических переменных есть конус, т. е. плоское пространство с бесконечной кривизной в вершине конуса. Кривизна зависит от ранга калибровочной группы [1, с. 166], поэтому, вообще говоря, появляется необходимость определения кривизны во внутренних терминах симплектических многообразий.

Более того, в калибровочных теориях появляются и фазовые пространства с нетривиальной топологией. Например, сфера $S^2$ в теории с $M^8 = R^8$ и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2R}\sqrt{R^2 - (p_1^2 + q_1^2)} + q_3(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - R^2) + q_4 p_2. \qquad (95)$$

Связи:

$$\phi_1 = p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - R^2 = 0, \quad \phi_2 = p_2 = 0. \qquad (96)$$

Это связи 1-го рода:

$$\{\phi_1, H\} = 2q_4 q_2 = 0 \to q_4 = 0,$$

$$\{\phi_2, H\} = -2q_3 q_2 = 0 \to q_3 = 0,$$

т. е. физические переменные подчиняются условию

$$p_1^2 + q_1^2 + q_2^2 = R^2, \qquad (97)$$

эквивалентному условию $M^2 = S^2$. Несколько экзотический гамильтониан (95) превращается в гамильтониан (119), если положить $q_2 = R\cos\theta$ (при $\bar{\omega} = 1$), последний же эквивалентен гамильтониану (48) (см. П. 4).

Итак, в случае ФП с нетривиальной топологией можно

1) отобразить ФП на плоское пространство с нетривиальной 2-формой (П. 4);

2) трактовать ФП $S^2$ как результат проявления связей в теории с плоским пространством.

**3.10. Обобщение механики Намбу.** Обращение к статистической физике подсказывает естественное обобщение механики Намбу. Пусть неравновесное распределение задается экспонентой

$$\exp\left(-\beta\sum_{n=1}^{n-1} H_i\right). \qquad (98)$$

Допустим, что равновесное состояние системы описывается экспонентой с гамильтонианом $H_1$. Тогда в процессе перехода к равновесному состоянию остальные гамильтонианы вымирают, т. е. на конечном этапе их можно положить равными нулю. Допустим также, что чем старше номер гамильтониана, тем раньше его можно исключить. Отсюда напрашиваются обобщения механики Намбу.

1. Уравнение движения (3) заменяется на

$$\dot{f} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial(f, H_1, \ldots, H_k)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})}. \tag{99}$$

2. Видоизменяется скобка Намбу (3) — по аналогии со скобкой (77) к антисимметричным тензорам, определяющим $(k+1)$-мерные детерминанты, добавляются симметричные тензоры, так что при $t \to \infty$ уравнения движения обобщенной механики переходят в гамильтоновы уравнения (6).

3. Можно предложить и еще более общую схему с уравнениями движения

$$\dot{f} = \frac{\partial(f, H_1)}{\partial(x_1, x_2)} + \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{(i_1 \cdots i_k)} \alpha(i_1 \cdots i_k) \frac{\partial(f, H_1, H_{i_1}, \ldots, H_{i_k})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})}; \tag{100}$$

в сумме фигурируют не только гамильтонианы $H_1, H_2, \ldots, H_k$, но и сочетания любых их $k$ из множества $(H_2, \ldots, H_{n-1})$ — скобка $(i_1 \cdots i_k)$ это и символизирует.

**3.11. Гамильтонова механика и расслоенные пространства.** Определим *гамильтоново многообразие* $M_H^{2n}(x, \hat{\omega}, H)$ как $2n$-мерное ФП, оснащенное замкнутой 2-формой $\hat{\omega}(x)$ и скалярной функцией $H(x)$, а расслоенное пространство $T(t, M_H^{2n})$ — как структуру с одномерным пространством $t$ в качестве базы и многообразием $M_H^{2n}$ в качестве слоя. На многообразии задана $2n$-параметрическая группа сдвигов. В пространстве функций $f(x(t)) \equiv f_t$ определим операцию параллельного переноса из точки $t$ в точку $t' = t + dt$

$$f_t \to \tilde{f}_{t'} = f_t + \hat{p} f_t dt = (\hat{I} + \hat{p} dt) f_t, \tag{101}$$

где $\hat{I}$ — единичный оператор; $\hat{p}$ — генератор сдвига в $M_H^{2n}$, а $\tilde{f}_{t'}$ — функция $f_t$, перенесенная в точку $t'$. Абсолютный дифференциал $D_t$ определяется стандартным образом

$$D_t f_t = f_{t'} - \tilde{f}_{t'} \approx f_t + \frac{df}{dt} dt - (\hat{I} + \hat{p} dt) f_t,$$

т. е.

$$\frac{D_t f}{dt} \equiv \hat{\nabla}_t f = \left(\frac{d}{dt} - \hat{p}\right) f, \tag{102}$$

где $\hat{\nabla}_t$ — оператор абсолютного дифференцирования.

Оказывается, что уравнения Гамильтона для физических переменных $f(x)$ можно интерпретировать как требование равенства нулю абсолютной производной $D_t f/dt$ (если $t$ — время). Действительно, определим

$$\hat{p} = \omega^{ij}(x) H_{,j}(x) \partial_i. \tag{103}$$

Тогда условие

$$\frac{D_t f}{dt} = 0 \tag{104}$$

записывается в виде

$$\dot{f} - \omega^{ij} H_{,j} f_{,i} = 0. \tag{105}$$

Но это и есть уравнение Гамильтона (6). Как известно, в калибровочных теориях оператор ковариантного дифференцирования определяется формулой $\hat{\nabla}_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, $A_\mu$ — вектор-потенциал. Роль $i$ в (105) играет антисимметричная матрица $\omega^{ij}$. При переходе к комплексным каноническим переменным $z, \bar{z}$ (п. 2.3) роль матрицы $\omega^{ij}$ играет мнимая единица $i$.

Итак, в механике Гамильтона эволюцию системы со временем можно рассматривать как процесс «параллельного перемещения» в ФП вдоль оси $t$ изображающей ее точки. Это напоминает инерциальное движение свободной частицы в конфигурационном пространстве ($d\mathbf{v}/dt = 0$, $\mathbf{v}$ — скорость) или движение пробного тела в теории гравитации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Даже при беглом взгляде на гамильтонову механику поражает гибкость теории, ее предрасположенность к самым неожиданным модификациям. И это на фоне ее несомненной фундаментальности, поскольку все известные динамические теории сводятся к более или менее простым (хотя, может быть, не всегда очевидным) ее обобщениям. Бросается в глаза связь ГМ со статистической физикой и квантовой механикой. Напрашивается мысль, что все эти разделы физики являются проявлениями некоторых более общих закономерностей, обязательных и для микромира (вплоть до планковских расстояний), и для макромира (космологические масштабы).

По существу, одним из наиболее серьезных обобщений стандартной гамильтоновой механики является механика Биркгофа (п. 3.3). Обобщается малоупотребительная формулировка вариационного принципа (70) на случай неконсервативных систем, причем допускается зависимость от времени не только гамильтониана, но и 2-формы. Так как форма $\omega^2$ замкнутая, в звездной области она точная, $\omega^2 = d\omega^1$, $\omega^1 = A_\mu dx^\mu$, и локальное представление (71) $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ не является выходом за рамки стандартной ГМ. Многозначительной представляется возможность трактовки гамильтониана как дополнительной компоненты $A_\mu$ в пространстве высшей размерности (см. (74)). Тем самым два объекта совершенно разной природы $A_\mu$ и $H$ становятся компонентами обобщенного вектора $(A_\mu, H)$.

Важность включения в анализ статистической механики и распределения Гиббса объясняется несколькими причинами.

1. Из стационарности распределения Гиббса вытекает гамильтонов формализм (см. (40), (34)).

2. В теории естественным образом появляется новый тип состояний — неравновесные состояния, отвечающие неравновесным распределениям.

3. Появляется возможность включения в общий формализм квантовой механики (п. 2.3).

Естественность связи статистической физики с гамильтоновой механикой подчеркивает требование положительности $H$ (положительность энергии) — необходимое условие существования распределения Гиббса. О фундаментальном характере распределения Гиббса свидетельствует и тот факт, что оно не выводится из других, более общих законов физики и базируется на законах теории вероятностей.

Оказывается, что для описания эволюции неравновесных состояний достаточно отказаться от симплектичности многообразия, т. е. отказаться от антисимметричности матрицы $\hat{\omega}$ и соответствующим образом изменить скобку Пуассона (см. (77)). Более того, в рамках данного общего формализма находится место и для механики Намбу, если допустить, что в результате большой деформации (флуктуация, внешнее воздействие) распределение Гиббса заменяется неравновесным распределением

$$W_N = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i H_i\right) \tag{106}$$

(постоянные $\beta_i$ необязательно одинаковы); здесь только $H_1$ есть гамильтониан динамической системы (т. е. функция, характеризующая равновесное распределение). В случае большого времени релаксации $t_r$ существует класс вариаций канонических переменных $\delta x_\perp$, сохраняющих распределение (106) при $t \ll t_r$. Теперь, как отмечалось в п. 3.5, они должны быть ортогональны $n-1$ векторам $\nabla H_i$, вместо одного вектора $\nabla H$, и скобка Пуассона требует обобщения (см. (81)). Предполагается, что с течением времени распределение (106) превратится в распределение Гиббса и вместо механики Намбу появится стандартная гамильтонова механика.

**Гамильтоновы калибровочные преобразования.** При формулировании стандартной гамильтоновой механики заметную роль играет утверждение, что преобразованием координат антисимметричную четномерную матрицу $\omega_{ij}$ локально можно всегда привести к стандартному виду $\begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$, где $O$ и $I$ — нулевая и единичная $n \times n$ матрицы (теорема Дарбу [6, 7]). Гамильтониан фиксируется после совершения этого преобразования. Между тем преобразование Дарбу заведомо неканоническое, т. е. $\hat{\omega}' \neq \hat{\omega}$, и оно может существенно изменить функцию Гамильтона. Тот факт, что подобная общепринятая практика оказывается успешной, свидетельствует о том, что существует *приви-*

*легированная* система канонических переменных, в которой и матрица $\hat{\omega}$, и гамильтониан $H$ максимально упрощаются. Данное обстоятельство напоминает выбор инерциальной системы в ОТО. Поэтому уместно говорить о *специальных* преобразованиях переменных $(q, p)$, сохраняющих 2-форму $\omega^2$ (именуемых обычно каноническими), и о неособенных преобразованиях, меняющих 2-форму, но сохраняющих вид гамильтоновых уравнений движения.

Разумеется, выбор координат в ФП не может влиять на физический процесс. Поскольку можно говорить о специальных канонических преобразованиях (т. е. о собственно канонических преобразованиях) и о канонических преобразованиях общего вида, то, по аналогии с калибровочными преобразованиями, в последнем случае можно допустить зависимость параметров преобразований от времени. Тогда и $\hat{\omega}$, и $H$ также будут зависеть от времени. Имеется альтернатива: 1) фиксировать зависимость параметров преобразования от времени, 2) положить их динамическими переменными. В первом случае получается разновидность механики Биркгофа (локально), во втором — теория нового типа. Если гамильтониан инвариантен относительно некоторого класса таких преобразований, то эти новые нефизические переменные в него не войдут, и их динамика будет произвольной. Тем самым мы приходим к гамильтоновой калибровочной теории, в которой роль калибровочных объектов играют добавленные канонические переменные. Это будет обобщением калибровочной симметрии механики Биркгофа (72) с ее единственной калибровочной переменной $\Lambda(x, t)$. Теперь число калибровочных функций будет зависеть от симметрии гамильтониана.

Гамильтонова механика формулируется аксиоматически, независимо от лагранжевой механики. Однако теория систем с калибровочной симметрией достаточно хорошо разработана лишь в рамках ЛМ. Соответствующий гамильтонов формализм выводится из лагранжева по стандартным правилам. Представляется важным иметь теорию гамильтоновых калибровочных систем с указанием четких признаков локальной симметрии. Например, в лагранжевом формализме первопричиной наличия связей является вырожденность лагранжиана ($\det \partial^2 L/\partial \dot{q}^i \dot{q}^j = 0$). В ГМ вопрос практически не исследован — отсутствуют не только соответствующие критерии, но и само определение гамильтоновой механики с калибровочной симметрией. Правда, в работе [34] изучался вопрос о механике, в которой время $t$ объявляется динамической переменной $t(\tau)$, зависящей от некоторого параметра $\tau$ (см. также [35]). Но эти исключения лишь подчеркивают неудовлетворительность ситуации в целом.

**Другие особенности гамильтоновой механики.** О фундаментальном характере ГМ, ее важности в поиске наиболее общих законов природы свидетельствует и тот факт, что именно с модификацией механики связаны попытки решения проблемы темной материи. Довольно давно было предложено обобщить второй закон Ньютона для малых ускорений (много меньших $a_0 \sim 10^{-8}$ см/с$^2$) [36] (это MOND — modified Newtonian dynamics). Несмотря на нерелятивистскую формулировку, модель объясняет некоторые нетривиальные особенности излучения галактик (см. [37])*. Релятивизация MOND потребовала привлечения помимо тензорного поля $g_{\mu\nu}$ еще и векторного и скалярного полей (теория TeVeS [37]). Данное обобщение в настоящее время изучается [39]. Представляется несомненным, что решение проблемы темной материи должно содержаться и в теории суперструн [26].

При аксиоматическом формулировании ГМ необходимо знание теории симплектических многообразий. Теория метрических пространств (задается метрический тензор $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) начала разрабатываться еще в XIX в. (Н. И. Лобачевский, К. Гаусс, Б. Риман). В начале XX в. было введено понятие параллельного переноса (Т. Леви-Чивита, Г. Вейль, Э. Картан). Тот факт, что содержательная геометрия может базироваться на антисимметричном тензоре, был осознан только в середине XX в. [40–42]. В этой геометрии естественным образом появляется тензор кривизны. Пространства, которые помимо 2-формы оснащены связностью, называются пространствами Федосова [43, 44]. Теория подобных пространств в контексте гамильтоновой механики представляется недостаточно востребованной.

Наконец, отметим, что разрабатывается даже гамильтонова механика на пространствах петель [45], актуальная, в частности, для теории замкнутых бозонных струн в псевдоевклидовых пространствах.

**Стрела времени.** Еще одним преимуществом (и признаком фундаментальности) ГМ является то, что ее уравнения (6) не инвариантны относительно операции обращения времени. В середине XIX в. был поднят вопрос: почему уравнения Ньютона инвариантны относительно обращения времени, а опыт показывает, что перемещения вспять во времени невозможны? В связи с этим А. Эддингтон ввел термин «стрела времени». В рамках ГМ ответ на этот вопрос почти очевиден. В ней помимо линейности уравнений движения и отсутствия вторых производных по времени требуется, чтобы фазовое пространство было ориентируемым [6, 7]. Точнее, нужно потребовать, чтобы 2-форма сохраняла свой знак на ФП, что гарантируется требованием ее невырожденности. Тогда 2-форма задает направление эволюции динамической системы во времени. Уравнения (7) инвариантны только относительно преобразований $t \to -t$, $\omega^{ij} \to -\omega^{ij}$. Данное обстоятельство еще более выпукло проявляется в квантовой механике. Операция $t \to -t$ требует замены $\psi \to \psi^*$ ($i \to -i$), но это не есть линейная операция, ибо $\psi^*$ не принадлежит гильбертову пространству функций $\psi$. Более того, поскольку амплитуды вероятности появляются в ГМ только при описании неравновесных состояний системы (п. 2.3), проблема необратимости времени в квантовой механике вообще не

*Отметим, впрочем, что лабораторный эксперимент [38] подтверждает справедливость второго закона Ньютона вплоть до $a \sim 5 \cdot 10^{-12}$ см/с$^2$.

возникает. Инвариантность же лагранжевых уравнений относительно замены $t \to -t$ связана с тем, что при переходе от гамильтоновых уравнений к лагранжевым теряется часть информации (как это происходит, например, при интегрировании по импульсу в (17)). Отметим еще, что матрица $\omega_{ij}$ все же может обращаться в нуль, но только на границе многообразия — например, на сфере $\omega^2 = R^2 \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$, $\sin\theta = 0$ в точках $\theta = 0, \pi$.

Несмотря на свой всеобъемлющий характер, стандартная ГМ не может считаться адекватной теорией и на малых, и на больших расстояниях. Дело в том, что подпространства $M_q^n$ и $M_p^n$ фазового пространства $M^{2n}$ совершенно равноправны, тогда как в природе конфигурационное пространство очевидным образом выделено. Разъясняет ситуацию модель 3-мерного пространства как сети, построенной из суперструн [5], которые, в свою очередь, моделируются упорядоченными наборами осцилляторов [5], а для них подпространства $M_q$ и $M_p$ равноправны, т. е. наше 3-мерное пространство и механика на нем есть еще и проявление особенностей сложной структуры, образующей *физическое* пространство. Подчеркнем, речь здесь (и в п. 2.3) идет о физике на планковских расстояниях. Попытки связать КМ со статистической физикой предпринимались и раньше [46], но не связывались с планковским масштабом. Предположение о существовании глобального термостата («универсального резервуара») высказана в недавней работе [47], причем в ней постоянная Планка $\hbar$ также ассоциируется с температурой термостата (ср. (45), (46)), правда, в виде соответствия «$i\hbar \leftrightarrow k_B T$».

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**П.1. Тождество Якоби и условие замкнутости 2-формы.** Задавая скобку Пуассона функций $A(x), B(x)$

$$\{A, B\} = \omega^{ij} A_{,i} B_{,j}, \quad \omega^{ij} = -\omega^{ji}, \tag{107}$$

требуют выполнения тождества Якоби

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0, \tag{108}$$

что эквивалентно требованию замкнутости 2-формы $d\omega^2 = 0$, $\omega^2 = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$; матрица $\hat{\omega}$ предполагается невырожденной, т. е.

$$\omega^{ij}\omega_{jk} = \delta^i_k, \quad \omega^{ij}_{,m}\omega_{jk} + \omega^{ij}\omega_{jk,m} = 0. \tag{109}$$

В случае, когда матрица $\hat{\omega}$ не зависит от канонических переменных, проверка тождества элементарна, однако в общем случае это требует некоторых вычислений. Воспроизведем основные формулы соответствующих выкладок. Равенство (108) переписывается в виде

$$\omega^{lm}\omega^{jk}_{,m}[A_{,l}B_{,j}C_{,k}+A_{,k}B_{,l}C_{,j}+A_{,j}B_{,k}C_{,l}]+\omega^{lm}\omega^{jk}[A_{,l}(B_{,j}C_{,k})_{,m}+ \\ +B_{,l}(C_{,j}A_{,k})_{,m}+C_{,l}(A_{,j}B_{,k})_{,m}]=0. \quad (110)$$

Второй член в сумме (110) есть

$$\omega^{lm}\omega^{jk}[\ldots]=(\omega^{lm}\omega^{jk}+\omega^{jm}\omega^{kl}+\omega^{km}\omega^{lj})(A_{,l}B_{,j}C_{,k})_{,m}:= \\ =\epsilon^{lmjk}(A_{,l}B_{,j}C_{,k})_{,m}=0, \quad (111)$$

где $\epsilon^{lmjk}$ — полностью антисимметричный тензор, из чего и вытекает равенство (111). Теперь (110) превращается в равенство

$$(\omega^{lm}\omega^{jk}_{,m}+\omega^{jm}\omega^{kl}_{,m}+\omega^{km}\omega^{lj}_{,m})A_{,l}B_{,j}C_{,k}=0,$$

откуда получаем искомое условие на матрицу $\hat{\omega}$:

$$\omega^{lm}\omega^{jk}_{,m}+\omega^{jm}\omega^{kl}_{,m}+\omega^{km}\omega^{lj}_{,m}=0. \quad (112)$$

Из (112) вытекает условие замкнутости 2-формы

$$\omega_{ij,k}+\omega_{jk,i}+\omega_{ki,j}=0. \quad (113)$$

Для его получения равенство (112) нужно умножить на произведение $\omega_{i_1l}\omega_{j_1j}$ $\omega_{k_1k}$ и воспользоваться определением (109).

**П.2. Гамильтониан и 2-форма — их роли в динамике системы.** Для выяснения ролей матрицы $\hat{\omega}$ и функции Гамильтона $H$ рассмотрим простейшую модель, в которой

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}h_{ij}x^ix^j, \quad h_{ij}=h_{ji}. \quad (114)$$

Преобразованием гамильтоновых координат $x^i$ матрицу $h_{ij}$ можно свести к диагональной и даже сделать пропорциональной единичной матрице. Рассмотрим простейший случай $n=1$. Тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\dot{q}=\alpha h_2p, \quad \dot{p}=-\alpha h_1q, \quad h_{ij}=h_i\delta_{ij}, \quad \omega^{ij}=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ -\alpha & 0\end{pmatrix}. \quad (115)$$

Отсюда ясно, что матрица $\hat{\omega}$ определяет абсолютное значение вектора скорости $\dot{\mathbf{x}}=(\dot{q},\dot{p})$, тогда как $H$ влияет не только на его абсолютную величину, но и на направление в ФП. Например, если $h_1 = 0$, то частица движется по оси $q$, причем только от знака $\alpha$ зависит направление движения. В стандартном случае $\alpha = 1$ и, так как $h_2 > 0$ (знак $h_2$ фиксирован знаком $H$), знаки $\dot{q}$ и $\dot{p}$ одинаковы. Более того, можно переопределить $h_i \to h'_i = \alpha h_i$, $\omega^{ij} \to \alpha^{-1}\omega^{ij}$; тогда для задания всей информации о движении достаточно задать $H$. Утверждение справедливо и для произвольной постоянной матрицы $\hat{\omega}$, $\partial\hat{\omega}/\partial x^i = 0$. Преобразованием Дарбу $\hat{\omega}$ приводится к стандартному виду, и *вся* содержащаяся в ней информация о динамике переносится в $H(x)$. Обратное невозможно, ибо число независимых компонент $N$ матриц $\hat{\omega}$ и $\hat{h}$ разное ($N_h > N_\omega$). Кроме того, гамильтониан (114) допускает обобщения, например, добавления более высоких степеней канонических переменных, т. е. подключения симметричных тензоров более высоких рангов. Стандартная матрица $\hat{\omega}$ устанавливает взаимосвязь $q$- и $p$-подпространств.

**П.3. Роль канонических преобразований.** Полезно представлять себе, как сказываются на уравнениях движения канонические и неканонические преобразования. Ясно, что даже при неканонических преобразованиях, во-первых, в силу ковариантности формализма общий вид уравнений движения не меняется; во-вторых, если преобразование неособенное, то содержание уравнений не меняется. При канонических преобразованиях не меняется матрица $\hat{\omega}$, но конкретный вид уравнений может измениться. Например, возьмем каноническое преобразование $q' = \lambda q, p' = p/\lambda$ для гармонического осциллятора ($H = (p^2 + q^2)/2$). Тогда исходные уравнения $\dot{q} = p, \dot{p} = -q$ превращаются в

$$\dot{q}'/\lambda = \lambda p, \quad \lambda\dot{p}' = -q'/\lambda, \tag{116}$$

т. е. канонические преобразования, вообще говоря, меняют вид конкретных уравнений. Напротив, перейдем от $\hat{\omega}$ к $\lambda\hat{\omega}$, не меняя гамильтониана. Тогда уравнения движения для осциллятора изменятся: $\dot{q}_\lambda = p_\lambda/\lambda$, $\dot{p}_\lambda = -q_\lambda/\lambda$. Но точно такие же уравнения получаются при изменении $H \to H_\lambda = (p^2 + q^2)/2\lambda$ и неизменной матрице $\hat{\omega}$. В общем виде данный факт следует из уравнения (56).

Итак, масштабные преобразования $\hat{\omega}$ и $H$

$$\hat{\omega} \to \lambda\hat{\omega}, \quad H \to H/\lambda \tag{117}$$

эквивалентны, т. е. информация об абсолютных значениях скоростей $\dot{x}$ может помещаться и в $\hat{\omega}$, и в $H$.

Отметим, что в литературе можно встретить самые разные определения канонических преобразований. В [20, II, с. 187] их перечислено более полудюжины. В [48] каноническим считается преобразование, сохраняющее 1-форму $\sum p_i dq_i$.

**П.4. Механика на многообразиях с нетривиальной топологией.** Выясним, как топология влияет на механику. Рассмотрим простейший случай нетривиальной топологии, когда ФП есть сфера $S^2$ с радиусом $R$. Естественные координаты на сфере — углы $\theta, \varphi$; тогда симплектическая форма задается элементом площади $dS = R^2 \sin\theta d\varphi \wedge d\theta$, т. е. скобка Пуассона определяется равенством

$$\{f, g\} = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\theta} - \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right). \tag{118}$$

Гамильтониан берем в виде

$$H = \frac{\bar{\omega}}{2}\cos\theta, \quad \bar{\omega} = \mathrm{const}, \tag{119}$$

откуда, с учетом (118), находим

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, H\} = -\frac{\bar{\omega}}{2R^2}, \quad \dot{\theta} = 0. \tag{120}$$

Уравнения (120) описывают свободное движение по параллелям.

Поучительно рассмотреть эту же механику в формализме, полученном стереологарифмической проекцией сферы на комплексную плоскость (п. 2.3). Из (119) имеем

$$H = \frac{\bar{\omega}}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta R^2}\mathrm{e}^{-\beta\bar{z}z}\right), \quad \omega^2 = -i\,\mathrm{e}^{-\beta\bar{z}z} d\bar{z}\wedge dz, \tag{121}$$

и

$$\{f, g\} = i\,\mathrm{e}^{\beta\bar{z}z}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\right). \tag{122}$$

Уравнение движения

$$\dot{z} = i\,\mathrm{e}^{\beta\bar{z}z}\left(\frac{\bar{\omega}}{2R^2\beta}(-\beta z)\mathrm{e}^{-\beta\bar{z}z}\right) = -i\frac{\bar{\omega}}{2R^2}z \tag{123}$$

совпадает с уравнением (50), полученным в механике с гамильтонианом $H = \bar{\omega}\bar{z}z$ и 2-формой $\omega^2 = -id\bar{z}\wedge dz$ (скобка Пуассона (49)), если положить $2R^2 = \hbar = 1$ (напомним, что $h = 4\pi R^2$). Из уравнения (50) вытекают уравнения (120), ибо $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ и $\dot{r} = 0$.

Таким образом, общий формализм в случае компактного ФП не меняется, хотя внешне конкретные уравнения могут выглядеть достаточно экзотически.

**П.5. Особенности механики Остроградского.** Хотя описание перехода от лагранжевой теории с высшими производными к соответствующей гамильтоновой перекочевало уже на страницы учебных пособий [49, с. 692], соответствующий формализм исследован явно недостаточно. Само утверждение, что функция $H$, задаваемая формулой (85), зависит только от канонических переменных, определяемых равенствами

$$q_j = q^{(j-1)}, \quad q^{(k)} = \dot{q}_k, \quad p_j = \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial L}{\partial q^{(i+j)}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{124}$$

является бесспорным (см. (86)). Но переход к новым переменным $q_j$ вызывает вопросы. Во-первых, нередко оказывается, что новый лагранжиан $L(q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k)$ описывает несколько независимых систем. Очевидно, предложенный Остроградским рецепт должен быть дополнен явным учетом *связей* (124) (равенства $q_{i+1} = \dot{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, есть лагранжевы связи). Модифицированный лагранжев формализм может считаться эквивалентным исходному только с учетом данного обстоятельства. Во-вторых, рецепт содержит элемент произвола. Действительно, например, с равным правом $\dot{q}$ можно объявить новой переменной $q_2$, а можно и $\dot{q}_1$. Но можно совершить и замену $\dot{q} = \alpha\dot{q}_1 + \beta q_2$, а при наличии старших производных ($k > 2$) замены

$$q^{(i)} = \alpha_i \dot{q}_i + \beta_i q_{i+1}, \quad \alpha_i + \beta_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \quad q^{(k)} = \dot{q}_k, \quad q^{(0)} = q_1.$$

Отмеченные особенности вносят в механику Остроградского произвол, характерный для калибровочных теорий. В первом случае — это $k-1$ лагранжевых множителей, необходимых для учета $k-1$ вводимых связей. Во втором случае — это $k-1$ произвольных параметров (например, $\alpha_i$).

Корректное описание лагранжевой динамики со связями $\dot{q}_j = q_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$ требует перехода к более общему лагранжиану

$$L \to L + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j(t)(\dot{q}_j - q_{j+1}). \tag{125}$$

Разумеется, итоговое уравнение для $q(t)$ будет совпадать с уравнением Эйлера–Лагранжа для $L$. Но в теории появляется $k-1$ независимых степеней свободы $\lambda_j(t)$, произвольных функций времени, т. е. теория становится калибровочной.

Во втором случае лагранжиан записывается в виде

$$L = L(q_1, \alpha_1\dot{q}_1 + \beta_1 q_2, \alpha_2\dot{q}_2 + \beta_2 q_3, \ldots, \alpha_{k-1}\dot{q}_{k-1} + \beta_{k-1}q_k, \dot{q}_k),$$
$$\alpha_i + \beta_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{126}$$

И здесь после исключения переменных $\alpha_i, \beta_i$ уравнение для $q_1 = q(t)$ будет идентично исходному. Особенность получающейся динамики в том, что параметры $\alpha_i, \beta_i$ могут зависеть от времени. Тем самым вновь получается калибровочная теория с $k-1$ нефизическими степенями свободы (скажем, $\alpha_i(t)$).

Наконец, может возникнуть вопрос: как угадать выражения для импульсов (84)? Ответ таков. В лагранжевом формализме нужно найти первый интеграл движения (энергию), предполагая, что $\partial L/\partial t = 0$. Имеем

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} \dot{q}^{(i)}. \tag{127}$$

С помощью уравнения движения (87) исключается член $\partial L/\partial q_1$, по определению полагается $p_k = \partial L/\partial q^{(k)}$, $q^{(k)} = \dot{q}_k$ и $\partial L/\partial q^{(j)} = p_j + \dot{p}_{j+1}$. Тогда с учетом равенств $q_i = q^{(i-1)}$ правая часть (127) приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j, \tag{128}$$

где импульсом $p_1$ объявляется коэффициент при $\dot{q}_1$. Отсюда и получается сохраняющаяся величина (энергия)

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j - L\right) \equiv \frac{d}{dt} H = 0, \tag{129}$$

которая, как уже несложно показать (п. 3.8), зависит только от $q_j, p_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

В работе В. В. Нестеренко [50] рассматривается вопрос об устойчивости теорий с высшими производными. Для осциллятора Пайса–Юленбека (см., например, лагранжиан (92) с измененным знаком при $\ddot{q}^2$) показано, что в этом случае энергия системы не ограничена снизу.

Отметим в заключение, что имеет смысл и обратная задача: превратить гамильтонову теорию с фазовым пространством $M^{2n}$ в теорию с лагранжианом $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ldots, q^{(n-1)}, q^{(n)})$.

В замечательном мемуаре М. В. Остроградского имеется и раздел, посвященный принципу Мопертюи [31, с. 422], в котором факт сохранения энергии, как и в п. 2.1, также учитывается с помощью множителей Лагранжа.

Механика Остроградского обсуждается также в книге [51]. Перевод мемуара [31] опубликован в [52, 53].

**П.6. Осциллятор с трением в теории Биркгофа.** Оказывается, что для осциллятора с затуханием теория Биркгофа дает фактически тот же самый результат, что и гамильтонова механика с обобщенными скобками Пуассона (77). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим модифицированное действие (27), а именно, таковое, умноженное на $v(t) = \mathrm{e}^{2\alpha t}$. Новое действие имеет вид (70), в котором $x^\mu = (q, p)$, $A_\mu(x, t) = (p, -q)v(t)/2$, $B(x, t) = -H(x)v(t) =$

$-\omega(p^2+q^2)v(t)/2$. Имеем

$$\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2\alpha t}, \quad \partial_\mu B = -\omega \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2\alpha t}, \quad \partial_t A_\mu = \alpha \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2\alpha t}, \tag{130}$$

и уравнения движения (71) записываются в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot q \\ \dot p \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix}; \tag{131}$$

полученная пара уравнений

$$\dot p = -\omega q - \alpha p, \quad -\dot q = -\omega p + \alpha q$$

идентична уравнениям (79). Итак, теория Биркгофа также ведет к уравнению (80), т. е. она предсказывает и затухание осцилляций, и изменение их частоты.

Автор выражает благодарность В. В. Нестеренко, обратившему его внимание на работы [46, 48–52], и А. С. Ушакову за полезные замечания.

**Примечание при корректуре.** В работе S. G. Rajeev «A canonical formulation of dissipative mechanics using complex-volued Hamiltonian» (Ann. Phys. 2007. V. 322. P. 1541) показано, что в рамках гамильтонова формализма осциллятор с трением можно описать комплексным гамильтонианом

$$H_1 + iH_2.$$

Роль мнимой единицы в ГМ осциллятора играет симплектическая матрица $i\tau_2$ ($\tau_2$ — матрица Паули, см. [5, с. 701]), поэтому при надлежащем выборе $H_2$ данный подход (уравнение (7) упомянутой работы) эквивалентен механике со скобкой (77).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прохоров Л. В., Шабанов С. В.* Гамильтонова механика калибровочных систем. 2-е изд. КомКнига, 2006.
2. *Nambu Y.* // Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 2405.
3. *Prokhorov L. V.* quant-ph/0406079.
4. *Prokhorov L. V.* gr-qc/0602023.
5. *Прохоров Л. В.* // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38. С. 696.
6. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
7. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1. Ижевск: Изд-во Удмурдск. ун-та, 1999.

8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Физматгиз, 1958.
9. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
10. *Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики: Пер. с англ. / Под ред. В. А. Фока. М.: Физматлит, 1960.
11. *Якоби К.* Лекции по динамике: Пер. с нем. / Под ред. проф. Н. С. Кошлякова. Л.; М.: Гл. ред. общетехн. лит., 1936.
12. *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: ФАЗИС, 1996.
13. *Прохоров Л. В.* // Вестн. СПбГУ. Сер. 4. 2005. Вып. 4. С. 3.
14. *Bargmann V.* // Commun. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 187.
15. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1985. Т. 4. С. 179.
16. *Shabanov S. V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. V. 25. P. L1245.
17. *Martinez-Merino A. A., Montesinos M.* // Ann. Phys. 2006. V. 321. P. 318.
18. *Finkelstein R., Villasante M.* // Phys. Rev. D. 1986. V. 33. P. 1666.
19. *Birkhoff G. D.* Dynamical Systems. AMS Colloq. Publ. V. IX, Hamburg, 1927.
20. *Santilli M.* Foundations of Theoretical Mechanics. V. I, II. Berlin: Springer, 1978; 1983.
21. *McEwan J.* // Found. Phys. 1993. V. 23. P. 313.
22. *Kaluza Th.* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. 1921. S. 966.
23. *Klein O.* // Z. Phys. 1926. Bd. 37. S. 895.
24. *Mandel H.* // Ibid. Bd. 39. S. 136.
25. *Fock V.* // Ibid. S. 226.
26. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
27. *Прохоров Л. В.* Пространство как сеть. СПб.: НИИХ СПбГУ, 2004.
28. *Заславский Г. М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.; Ижевск, 2004.
29. *Герасименко Н. И., Павлов Б. С.* // ТМФ. 1988. Т. 74. С. 345.
30. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004.
31. *Ostrogradsky M.* // Mem. Ac. St. Petersburg. 1850. V. 4. P. 385.
32. *Nesterenko V. V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V. 22. P. 1673.
33. *Прохоров Л. В.* // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 229.
34. *Mondragon M., Montesinos M.* // Intern. J. Mod. Phys. A. V. 19. P. 2473.
35. *Sergi A.* cond-mat/0508193.
36. *Milgrom M.* // Astrophys. J. 1983. V. 270. P. 365; 371; 384.
37. *Bekenstein J. D.* // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 083509.

38. *Gundlach J. H. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. P. 150801.
39. *Dodelson S., Liguori M.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 231301.
40. *Lee H.-C.* // Am. J. Math. 1943. V. 65. P. 433.
41. *Лемлейн В. Г.* // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115. С. 655.
42. *Tondeur Ph.* // Commun. Math. Helvetici. 1961. V. 36. P. 234.
43. *Fedosov B. V.* // J. Diff. Geom. 1994. V. 40. P. 213.
44. *Gelfand I., Retakh V., Shubin M.* // Advan. Math. 1998. V. 136. P. 104.
45. *Мохов О. И.* Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые уравнения. М.; Ижевск, 2004.
46. *Блохинцев Д. И.* // УФН. 1977. Т. 122. С. 745.
47. *Lisi A. G.* Quantum Mechanics from a Universal Action Reservoir. Physics/0605068.
48. *Ланцош К.* Аналитическая динамика. М.: Мир, 1965.
49. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
50. *Nesterenko V. V.* // Phys. Rev. D. 2007. V. 75. P. 087703.
51. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гл. ред. техн.-теор. лит., 1937.
52. Вариационные принципы механики / Под ред. Л. С. Полака. М.: Физматгиз, 1959.
53. *Остроградский М. В.* Полн. собр. тр. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. Т. 2.