

ФИЗИКА СИГНАЛА

С. Г. Басиладзе

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

ВВЕДЕНИЕ	1473
СИГНАЛЫ В МАКРОМИРЕ	1475
Классический сигнал и его параметры.	1475
Интерференция (сложение) сигналов.	1476
Разложение сигналов (дифракция).	1481
Функция отсчетов.	1483
Информационная емкость классического сигнала.	1487
Пороговые и предельные ограничения реального сигнала.	1488
Ограничения при передаче и приеме сигналов.	1492
Информационные ограничения, создаваемые шумом.	1499
СИГНАЛЫ В МИКРОМИРЕ	1501
Порог для излучения в полости.	1503
Энергия как сигнал.	1506
Размытие порога шумом неопределенности.	1509
Движение тела при наличии пороговых ограничений.	1510
Характер шума в микромире.	1515
Предельные постоянные центрально-симметричного поля.	1519
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1520
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1522

ФИЗИКА СИГНАЛА

С. Г. Басиладзе

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Классический сигнал, соответствующий представлениям математического анализа о бесконечно малых величинах, имеет бесконечную информационную емкость, что противоречит самому понятию информации, конечной по определению. Реальный сигнал должен иметь некоторый «порог» для задания конечного шага между его различимыми состояниями и «предел» для ограничения возможного количества состояний. В работе рассматривается влияние уровня требуемой энергии, быстродействия и шума приемника на его способность различать набор состояний в сигнале. Показано, что обобщенный порог есть ограничение на спектральную плотность энергии сигнала, а предел есть ограничение на плотность энергии во времени или по пространственной координате. В микромире сигналом является градиент потенциала; ограниченность скорости его восприятия при движении приводит в пределах порога по действию к неопределимости изменений кинетической энергии при изменении потенциала. В результате движение частиц оказывается определенным лишь в конечном числе «опорных» точек, отстоящих на интервалы, задаваемые информационным порогом. Между опорными точками движение носит неопределенный — случайный, т. е. шумовой характер. Обсуждается пороговое уравнение для нахождения случайных отклонений параметров движения, которое должно обобщать известные уравнения Шредингера и Клейна–Гордона. На основе анализа пороговых и предельных плотностей энергии проведена оценка информационной пропускной способности пространства для электромагнитных сигналов.

The classical signal — appropriate to representations of the mathematical analysis about infinitesimal sizes, has infinite information capacity that contradicts the concept of the information, final by definition. The real signal should have some «threshold» for the task of a final step between its states and «limit» for restriction of possible quantity of the steps. In the work, influence of a level of required energy, speed and noise of the receiver on its ability to distinguish a set of states in a signal is considered. It is shown that the generalized threshold is restriction on spectral density of energy of a signal, and the limit is restriction on density of energy in time or on spatial coordinate. In a microcosm a signal is the gradient of potential; limitation of speed of its recognition at movement results, within the limits of a threshold on action, to indefinability of changes of kinetic energy at change of potential. As a result, movement of particles appears determined only in final number of base points, available on the intervals set by an information threshold. Between base points movement is of uncertain — random, i.e. noised character. The threshold equation for a presence of random deviations of parameters of movement which should generalize known Schrödinger and Klein–Gordon equations is discussed. On the basis of the analysis of threshold and limiting density of energy the estimation of information throughput of space for electromagnetic signals is carried out.

PACS: 29.40 + 03.67

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью научных исследований является получение сведений о закономерностях природных явлений, их анализ и представление результатов в компактной и обобщенной форме для последующего использования в практической деятельности. Решение первой задачи в настоящее время обеспечивается проведением эксперимента (измерений) и неизбежно связано с использованием информационных средств, поскольку именно информация является носителем *смысловых* сведений, составляющих результат исследований; в свою очередь, носителями информации являются *различные* состояния, зафиксированные в измерениях; носителем состояний является сигнал, *воспринимаемый* измерителем; носителем сигнала является энергия исследуемых процессов.

Проблема выделения состояний, несущих информацию в аналоговом сигнале, является одной из основных при проведении измерений. Эта проблема может быть решена только с учетом физических принципов и явлений, лежащих в основе регистрации сигналов.

Наборы *возможных* состояний имеются также в самих явлениях физики (в термодинамике, статистической физике, физике микромира). Эти состояния могут переходить из одного в другое с определенной вероятностью путем обмена порциями энергии. «Снятие неопределенности», происходящее при переходе от возможного к *совершившемуся*, является вторым обстоятельством, привлекающим внимание физиков к информационным аспектам своей науки [1–5]. Действительно, энергию обмена (т. е. взаимодействия) можно интерпретировать как сигнал, а интенсивность совершившихся переходов из одного состояния в другое сопоставить с количеством информации, которую сигналы переносят в физическом взаимодействии.

Понятие сигнала пришло в физику с появлением специальной теории относительности, когда стало ясно, какие важные физические следствия имеет ограниченность скорости в виде конечности *скорости распространения* сигналов. В теории сигналов ограниченность скорости связана также и с конечностью *скорости изменения* сигналов. Практически это означает, что физический сигнал *всегда должен изменяться плавно* — без разрывов, т. е. без ступенчатых перепадов. Хотя слово «сигнал» достаточно часто используется физиками, методология теории сигналов не вошла еще в полной мере в современную физическую теорию. Несмотря на то, что фундаментальность ограничения скорости распространения сигналов была осознана 100 лет назад, фундаментальность второго ограничения скорости за прошедшее время *целенаправленно* не исследовалась.

Одна из причин этого заключается в самой теории сигналов. Дело в том, что традиционная теория сигналов, как и многие другие теории, построена по образцу «классической» науки и базируется на понятиях классического

математического анализа, могущество которого, по образному выражению Пуанкаре, состоит «в умении обращаться с бесконечностями».

В основе классического математического анализа лежит представление о «бесконечно малых» величинах, в частности, о бесконечной делимости математической оси, приводящей к существованию на ней бесконечного количества точек. Буквальное следование теории этому подходу приводит к «парадоксам бесконечности», с которыми столкнулась физика конца XIX в. («ультрафиолетовая катастрофа»). В качестве примера «безграничной» среды для передачи сигналов можно привести классический вакуум, распространение возбуждений в котором описывается линейными уравнениями Максвелла. Классический аналоговый сигнал может иметь в такой среде *бесконечное* количество состояний. Представляется маловероятным, чтобы в природе реальные сигналы и среды для их передачи не имели ограничений на число возможных состояний. Скорее, факт отсутствия ограничений говорит о неполноте существующей теории. Современной науке необходимо не столько умение «обращаться», сколько умение устранять бесконечности, т. е. четко осознавать границы изучаемых явлений.

Обратимся теперь ко второй задаче научных исследований — анализу и формулировке закономерностей. Здесь хотелось бы выделить три подхода — абстрактное описание, формальное описание и обобщение. Абстракция, как известно, основана на отвлечении от малозначительных деталей и описании главных, характерных признаков явления, составляющих его суть. Формальное описание более ориентировано на получение правильного количественного результата простейшими математическими средствами; физическое содержание явления здесь часто остается в тени, а иногда попросту игнорируется. Распространенным способом формального описания является, например, использование комплексных чисел, существенно упрощающих вычисления, хотя вряд ли кто-нибудь станет утверждать, что квадратный корень из минус единицы физически существует. И, наконец, при обобщении выделяются *типовые* — наиболее часто встречающиеся признаки явления, это основной подход в теории информации и программировании.

Теперь мы можем указать вторую причину, которая ограничивает применимость традиционной теории сигналов в физических исследованиях, она состоит в *формальности* используемых в этой теории математических средств и отвлеченности от физических особенностей реальных сигналов, которые важны для передачи и приема информации. Полагается, например, что сигналы складываются по значениям своих огибающих, но упускается из вида, что для этого необходим отвод или подвод энергии извне.

Настоящий анализ литературных источников был предпринят для того, чтобы

— показать, в чем именно заключается ограниченность традиционных методов анализа сигналов;

— продемонстрировать, чем реальный сигнал — носитель конечной информации — отличается от классического сигнала;

— выяснить особенности действия сигналов в микромире и оценить физически возможный темп передачи информации в окружающем нас пространстве.

Материал двух последних разделов базируется в основном на опубликованных работах автора [6–11].

1. СИГНАЛЫ В МАКРОМИРЕ

Для удобства последующего чтения препроводим изложение краткой справкой об основных параметрах классического сигнала.

1.1. Классический сигнал и его параметры. Аналоговый сигнал в абстрактных математических переменных может быть описан непрерывной функцией $y(x)$ либо представлен как «непрерывная» сумма гармоник $g(\chi)$, здесь χ — абстрактная спектральная переменная, обратная линейной переменной x (например, во времени — это частота, а в пространстве — волновое число, деленное на 2π). Приращение энергии сигнала может быть записано для χ сходным образом, как и для x :

$$dE = y^2(x)dx \quad \text{или} \quad dE = [g^2(\chi)/2]d\chi, \quad (1a,б)$$

где $y^2(x)$ и $g^2(\chi)$ есть линейная и спектральная плотности энергии соответственно.

Энергия любого существующего в природе сигнала должна быть ограничена. Это накладывает два ограничения на вид его спектра:

— в области нижних гармоник спектральная плотность амплитуды $g_n(\chi)$ не должна уходить в бесконечность;

— «основная» ширина полосы гармоник (несущая основную энергию) должна быть ограничена, а выше верхней гармоники χ_v спектральная плотность амплитуды $g_v(\chi)$ должна понижаться с темпом не слабее $1/\chi$.

Вообще говоря, ограничению основной полосы по ширине отвечают как спектры, плавно или круто спадающие в области высших гармоник, так и обрезанные резко. В соответствии с классическим условием причинности [12] спектр сигнала должен быть непрерывным и бесконечным. Если же он обрезанный или содержит хотя бы небольшие, но конечные интервалы $\delta\chi$, где $g_v(\chi) = 0$, то у такого сигнала имеются *начинающиеся в минус бесконечности* колебания малой амплитуды (так называемый эффект Гиббса — по сути, это сумма отрезанных гармоник с обратным знаком). Фактически это означает, что сигнал появляется *раньше вызвавшей его причины* (он не каузален). Поэтому физически реализуемыми сигналами с обрезанным или прерывным

спектром могут быть только пространственные сигналы (функции только пространственной координаты), но никак не динамические — функции времени.

Рассмотрим на двух примерах, каким образом введение понятия энергии (1а,б) изменяет условия сложения и разложения математических функций $y(x)$.

1.2. Интерференция (сложение) сигналов. Если имеются два сигнала $y_1(x)$ и $y_2(x)$, перекрывающиеся на достаточно малом интервале δx , то можно считать, что на δx они меняются слабо, т. е. $y_1 \approx \text{const}$ и $y_2 \approx \text{const}$. При этом суммарная энергия на интервале перекрытия есть

$$E_{1+2} = (y_1 + y_2)^2 \delta x = (y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2) \delta x = E_1 + E_2 + 2y_1 y_2 \delta x, \quad (2)$$

где E_1 и E_2 — энергия каждого из сигналов на интервале δx .

В зависимости от сочетания знаков y_1 и y_2 (полярности сигналов на δx) суммарная энергия может быть больше, равна или меньше суммы $E_1 + E_2$. Например, для двух синусоидальных (гармонических) сигналов с темпом колебаний χ_1 и χ_2 , если $\chi_1 \neq \chi_2$, то интеграл от перекрестного члена $2y_1 y_2 \delta x$ (2) равен нулю (в бесконечных пределах):

$$\begin{aligned} E_{1.2} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\kappa_1 \cdot x) \sin(\kappa_2 \cdot x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{\cos[(\kappa_1 - \kappa_2)x] - \cos[(\kappa_1 + \kappa_2)x]\} dx = 0 - 0, \quad (3) \end{aligned}$$

здесь $\kappa = 2\pi\chi$ — «круговая» спектральная переменная.

В этом случае $E_{1+2} = E_1 + E_2$. Этот факт является основой фурье-анализа, так как из него следует *ортогональность* гармонических функций разложения. Именно поэтому приращение энергии сигнала может быть записано для χ в той же форме, что и для x (1); разница в одну вторую в (1б) появляется лишь из-за синусоидальной формы гармоник.

При равных χ_1 и χ_2 энергия перекрестного члена принимает ненулевое значение, поскольку $\cos[(\kappa_1 - \kappa_2)x]$ в (3) обращается в единицу. Это означает, что сумма двух гармоник с $\kappa_1 = \kappa_2$ на любом достаточно большом интервале Δx имеет большую энергию, чем сумма энергий отдельных гармоник. Это же должно происходить и при суммировании двух однополярных сигналов (2).

Не стоит забывать, что формула (3) отражает равенство энергий слагаемых и суммы *в среднем* на всей протяженности оси x , из нее совсем не следует равенство *плотностей энергии* в каждой точке по x . Проблема несоответствия плотностей энергии порождается математически тем, что квадрат суммы не равен сумме квадратов (2), или, говоря по-другому (извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства), алгебраическая сумма не равна

геометрической. Природа, однако, склонна уравнивать эти суммы. Физики впервые столкнулись с этим в опыте Майкельсона, когда обнаружилось, что время прохода прямого и отраженного сигнала в продольном направлении — по направлению движения (арифметическая сумма длин) — и время прохода прямого и отраженного сигнала в поперечном направлении (геометрическая сумма длин) совпадают. Результатом, как известно, было появление теории относительности.

Попробуем показать, каким образом природа «находит пути» уравнивания линейной *плотности* энергии при интерференции гармонических ($\chi_1 = \chi_2$) или однополярных сигналов.

1.2.1. Двухкомпонентные сигналы. Перекрестный член $2y_1y_2\delta x$ в (2) не может отсутствовать, но он может быть точно скомпенсирован равным ему членом обратной полярности. Для этого сигнал должен быть не однокомпонентным, а *двухкомпонентным*:

$$y = f_Y(x), \quad (4a)$$

$$z = f_Z(x), \quad (4б)$$

причем при сложении двух сигналов должно выполняться условие «обратных знаков» (перекрестных членов):

$$E_{1,2}^y = E_1^y + E_2^y + 2y_1y_2 \delta x, \quad (5a)$$

$$E_{1,2}^z = E_1^z + E_2^z - 2z_1z_2 \delta x, \quad (5б)$$

что при наличии дополнительного условия «равенства компонентов»

$$y_1 = z_1 \text{ и } y_2 = z_2, \text{ или } y(x) = z(x), \quad (6)$$

дает

$$E_{1,2} = E_1^y + E_2^y + E_1^z + E_2^z. \quad (7)$$

Записанное в виде формул означает, что свободно интерферирующий сигнал должен иметь два компонента, одинаковых по величине, но знак у произведений y_1y_2 и z_1z_2 должен быть разным.

Для начала рассмотрим распространение сигналов во времени вдоль одной координаты (в пространстве одного измерения).

1.2.2. Интерференция сигналов в кабелях. Идеализированный кабель (с бесконечно широкой полосой пропускания) имеет всего два параметра: ρ — волновое сопротивление и задержку t_3 на фиксированную длину Δr .

Короткий импульс. При подаче короткого ($t_n \ll t_3$) электрического импульса на вход кабеля по нему начинают совместно распространяться импульс напряжения U и импульс тока I , причем они связаны между собой соотношением $I = U/\rho$.

Два компонента энергии. Соотношение $U/I = \rho$ по форме совпадает с законом Ома для сопротивления R : $U/I = R$, превращающего упорядоченную энергию импульса напряжения или тока в беспорядочную тепловую энергию. В принципе, кабель бесконечной длины является таким же поглотителем энергии, как и омическое сопротивление. Однако физический механизм «поглощения» энергии совершенно другой — это отвод (на бесконечность), а не рассеивание энергии (перевод в тепло). Для омического сопротивления из формулы для потребляемой мощности $P_R = UI$, используя $U/I = R$, можно осуществить переход

$$P_R = U^2/R, \text{ откуда } P_R = I^2R. \quad (8a,б)$$

Формулы (8a,б) являются тождественными, поскольку энергия рассеивается только в тепло. Для волнового сопротивления, используя $U/I = \rho$, формально математически можно осуществить тот же переход:

$$P_\rho = U^2/\rho, \text{ откуда } P_\rho = I^2\rho, \quad (9a,б)$$

что физически будет неверно, так как правильная формула имеет вид

$$P_\rho = 0,5U^2/\rho + 0,5I^2\rho, \quad (10)$$

поскольку половина энергии заключена в электрическом поле U , а вторая половина — в магнитном I . Для одиночных сигналов формулы (9a,б) и (10) эквивалентны, но для интерферирующих сигналов формулы (9a,б) непригодны, поскольку они не отражают двухкомпонентной природы сигнала.

Ступенчатый перепад. Через время t_3 , дойдя до конца кабеля, импульс должен отразиться обратно, так как в (идеализированном) кабеле нет поглотителей энергии. Напомним, что генератор тока (I — рис. 1, б) является для отраженного сигнала разрывом цепи, а генератор напряжения (U) — коротким замыканием. Правила отражений сигнала от концов кабеля применимы и для вводимого в кабель *ступенчатого перепада* тока или напряжения. Эпюры токов и напряжений показаны на рис. 1, в и д для средней точки кабеля. Нетрудно видеть, что эпюры для генераторов тока и напряжения одинаковы, но антисимметричны: эпюры напряжений для тока соответствуют эпюрам тока для напряжений и наоборот. Вводимые ток или напряжение из-за отражений носят колебательный характер на рис. 1, в, но энергия все время возрастает за счет ступенчатого роста (накопления) *второго компонента* — напряжения или тока соответственно.

Если отвлечься от ступенек, то картина в целом очень схожа с зарядом емкости C постоянным током или с «разгоном» тока в индуктивности L постоянным напряжением. В первом случае для кабеля $\Delta U = I\rho$, а для емкости $\Delta U = It_3/C$, откуда емкость кабеля

$$C = t_3/\rho. \quad (11)$$

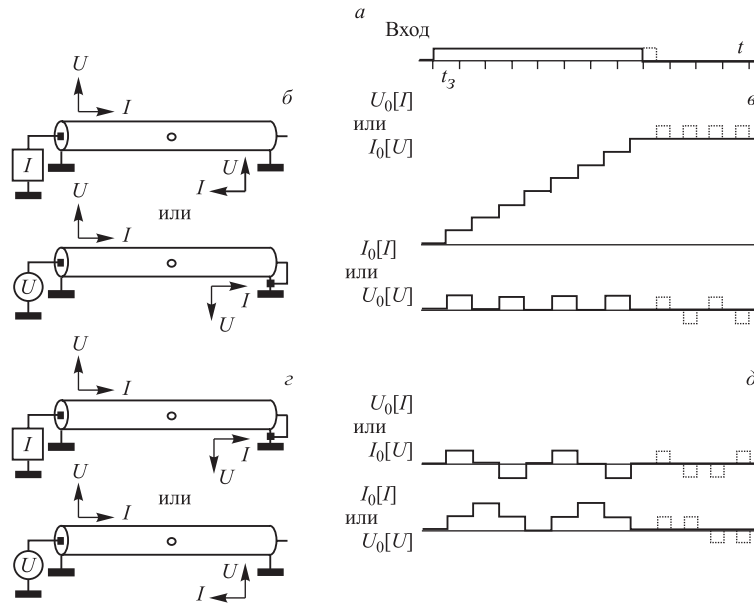


Рис. 1. Распространение длинного прямоугольного сигнала по кабелю: а) ток или напряжение на входе кабеля, t_3 — задержка кабеля; б) симметрично terminated кабель, подключенный к генератору тока (эквивалент емкости) или к генератору напряжения (эквивалент индуктивности); в) накопление энергии в виде линейно растущего напряжения (для генератора тока) или линейно растущего тока (для генератора напряжения) и пульсации тока или напряжения (соответственно) для симметрично terminated кабеля; г) несимметрично terminated кабель, подключенный к генератору тока (эквивалент «короткого замыкания») или к генератору напряжения (эквивалент «холостого хода»); д) пульсации напряжений и токов в несимметрично terminated кабеле (энергия не накапливается); эпюры напряжений и токов показаны для средней точки кабеля (о); тонкие пунктирные линии даны для сигнала длительностью $8,5t_3$

Во втором случае для кабеля $\Delta I = U/\rho$, а для индуктивности $\Delta I = Ut_3/L$, откуда индуктивность кабеля

$$L = t_3\rho. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем

$$\rho = \sqrt{L/C} \quad \text{и} \quad t_3 = \sqrt{LC}. \tag{13а,б}$$

Как видим, для достаточно протяженного сигнала разомкнутый на конце кабель работает как емкость, а замкнутый — как индуктивность. Накопление

энергии в нем происходит за счет роста амплитуды компонента, противоположного вводимому в кабель.

Линейный рост тока (а ток — это движение зарядов) отражает инерционность роста энергии движения зарядов, обусловленного фактом существования задержки в кабеле. Для интервалов времени $\Delta t \gg t_3$ становится практически справедливым дифференциальное уравнение для индуктивности:

$$dIL = U dt \quad \text{или} \quad dI(t_3\rho) \approx U dt. \quad (14a)$$

У него имеется механический аналог, а именно закон Ньютона, записанный в форме

$$dVm = F dt, \quad (14б)$$

где V — скорость; m — масса тела, а F — сила. Как видим, произведение $t_3 \cdot \rho = L$ является аналогом механической массы (создает инерционность при условии, что движение носит циклический характер), а электрическое напряжение U есть аналог силы.

1.2.3. Интерференция сигналов в пространстве. Как известно, распространение классических электромагнитных сигналов в пространстве описывается уравнениями Максвелла

$$\nabla \check{E} = \varepsilon\mu \left(\frac{\partial^2 \check{E}}{\partial t^2} \right), \quad (15a)$$

$$\nabla \hat{H} = \varepsilon\mu \left(\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial t^2} \right), \quad (15б)$$

где ∇ — оператор Лапласа (сумма вторых производных по координатам); \check{E} , \hat{H} — напряженности электрического и магнитного полей; $\varepsilon = 1,11 \times 10^{-10} \text{ А}^2 \cdot \text{с}^2/\text{Н} \cdot \text{м}^2$ — «нерационализованные» электрическая и $\mu = 1,00 \times 10^{-7} \text{ Н/м}^2$ — магнитная проницаемости вакуума.

Уравнения (15а,б) являются волновыми уравнениями и описывают распространение двух синфазных гармонических колебаний векторов \check{E} и \hat{H} [13] перпендикулярно направлению движения и друг другу. Величина, обратная произведению $\varepsilon\mu$, есть квадрат скорости распространения волны, т. е. квадрат скорости света в вакууме $c^2 = 1/\varepsilon\mu$. Заметим, что формулы (10)–(12) справедливы и для гармонического сигнала (поскольку они справедливы для каждой из гармоник прямоугольного сигнала).

Формулы (13) здесь имеют вид

$$\rho_B = 4\pi\sqrt{\mu/\varepsilon} \quad \text{и} \quad t_3 = \Delta r/\sqrt{\mu\varepsilon}, \quad (16a,б)$$

где Δr — длина пространственного интервала по пути распространения волны. Волновое сопротивление вакуума $\rho_B = 337 \text{ Ом}$, оно является предельным для волнового сопротивления кабелей, поскольку в них обычно $\varepsilon > 1$, а $\mu \geq 1$.

Сопоставив (13а,б) и (16а,б), можно найти погонную емкость и погонную индуктивность вакуума:

$$C_B = t_3 / \rho_B = \Delta r / 4\pi\mu, \quad (17a)$$

$$L_B = t_3 \rho_B = \Delta r (4\pi / \varepsilon). \quad (17b)$$

Эти величины не являются формальными, поскольку взаимная перекачка двух видов энергии *действительно происходит* в образующейся при интерференции двухкомпонентной стоячей волне [14].

При $\Delta r \rightarrow 0$ получаем, что $C_B \rightarrow 0$ и $L_B \rightarrow 0$, т.е. становятся бесконечно малыми. Здесь явно имеется противоречие с реальностью, поскольку и индуктивность, и емкость образуются в результате согласованного поведения множества зарядов, которые *дискретны* по своей природе. Это определенно указывает на то, что должны существовать некие «ячейки быстроты», обладающие конечными (и, как показывает опыт, соизмеримыми) величинами задержки и времени изменения сигнала.

Резюмируя весь раздел, можно отметить следующее. У свободно интерферирующих сигналов до тех пор, пока они не перекрываются, соблюдается равенство мощности обоих компонентов, следовательно, оба компонента имеют одинаковые состояния как носители информации. Это равенство нарушается в зоне пересечения сигналов, тем не менее *равенство плотностей* энергии суммарного и суммируемых сигналов продолжает сохраняться. В зоне пересечения сигналов, где один из двух компонентов становится нулевым или близким к нулю, второй компонент несет информацию, общую для обоих сигналов, а первый — их разность (различие в информации). Интересно то, что после выхода из зоны пересечения «второй» компонент *разлагается сам* таким образом, что форма каждого из сигналов восстанавливается без искажений. Более подробно с вариантами сложения сигналов можно познакомиться в работе [8].

1.3. Разложение сигналов (дифракция). Перейдем теперь к однокомпонентным сигналам. Попробуем рассмотреть «из чего они состоят» на примере разложения сигналов, т.е. явления дифракции.

Рассмотрим поток излучения, падающий на зеркальную полосу с резкими краями, в результате чего он разбивается на две части — проходящую и отраженную — рис. 2. Каждая из частей регистрируется на верхней и нижней измерительных плоскостях. Рассмотрим, к чему приводит высказанное во введении предположение о плавности изменения сигнала. Тогда «полосы отображения» на обеих плоскостях не могут быть столь же резкими, как отражатели; они будут иметь *затянутые* и *сглаженные* края, как это показано на рис. 2, а. Сглаженность краев должна иметь определенную симметрию (сверху вниз и справа налево), потому что сумма огибающих верхней и нижней частей должна давать исходную — *постоянную* — величину интенсив-

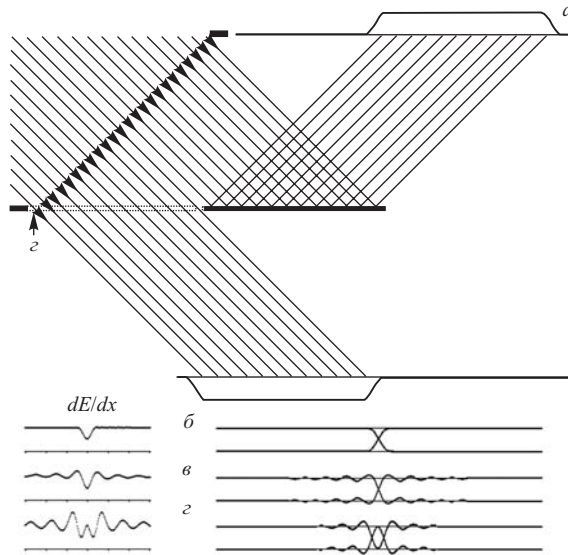


Рис. 2. Расщепление излучения зеркальной полосой с резким краем (*a*); полосы «отображения» на верхней и нижней регистрирующих плоскостях не могут быть ступенчатыми ввиду конечности перепадов, но они должны быть симметричными, поскольку сумма верхней и нижней картин (*b*) должна давать исходную постоянную величину поперечного профиля излучения. Условие сохранения энергии требует, чтобы и сумма квадратов была постоянной, но для «гладких» сигналов (*b*) это выполняться не может (см. график плотности энергии слева); сигналы должны иметь (затухающие) колебательные выбросы в начале и конце перепада (*a*), тогда сумма квадратов сохраняется постоянной, но лишь в пределах достаточно большого интервала. Дифракционная картина от узкой щели (*z*) представляется производной от кривой (*a*) и является функцией отсчетов; в этом случае график суммарной плотности энергии (слева) также не является постоянным, хотя *в целом* (в среднем) энергия сохраняется

ности входного излучения в поперечном направлении. Это иллюстрируется наложением верхней и нижней полос отображения друг на друга на рис. 2, *b* (сумма огибающих должна «восстанавливать» поперечный профиль входного потока).

Ясно, что суммарная энергия, попадающая на верхнюю и нижнюю регистрирующие плоскости, также должна быть равна энергии входного излучения. Однако, если просуммировать квадраты огибающих на рис. 2, *b*, то этого явно не получится. На участках пересечения затянутых краев δx сумма квадратов огибающих (плотность энергии) будет неизбежно меньше плотности энергии в исходном потоке, ибо для любой функции $0 < y(x) < a$ и симметричной ей функции $a - y(x)$ сумма их квадратов $y^2 + (a - y)^2 = a^2 - 2y(a - y)$

явно меньше a^2 . Например, при линейной аппроксимации краев энергия растет как $\delta x^3/3$ и доходит только до 0,33 вместо 0,5 для каждого края.

Появление колебаний при разложении сигналов. Если в зоне разделения невозможно получить *баланса плотностей* энергии, то попробуем посмотреть, как можно обеспечить хотя бы *баланс энергий* в среднем, на малых (локальных) интервалах. Если в начале и в конце каждого сглаженного перепада добавить небольшой выброс, как показано на рис. 2, в (первый выброс), то сумма огибающих от этого не изменится, но приращение энергии на вершине и в основании перепада будут совершенно разными. Это дает возможность увеличить энергию каждого из сигналов при неизменной энергии их суммы, т. е. добиться баланса. При линейной аппроксимации уравнение для половины одиночного выброса (по x) имеет вид $0,33\delta x^3 - (\delta x - 1) = (0,5 - 0,33)/2$, решая которое, имеем $\delta x = 1,3$, и выброс на 30 % превышает основную интенсивность. В действительности одним выбросом дело не ограничивается, и, как известно, дифракционная картина от края щели содержит показанные на рис. 2, в затухающие выбросы. Для затухающих колебаний точное решение есть $\delta x = 1,25$ и (первый) выброс 18 %. Эти колебания в точности соответствуют эффекту Гиббса [15], что однозначно свидетельствует не просто об ограниченности, а об *обрезанности спектра* пространственных сигналов отображения. Это действительно так, поскольку поток реального электромагнитного излучения, создающего отображение, представляет собой гармоническое колебание, спектр которого имеет всего одну линию. Как видим, «обрезанность» спектра *необходима* для обеспечения баланса энергий и отвечает за колебательный характер переходного процесса (от «света» к «тени»).

1.4. Функция отсчетов. Отображение ступенчатого перепада должно описываться интегралом свертки от исходной (ступенчатой) функции и некоторой функции, дающей реакцию на очень короткое (импульсное) возбуждение. Поскольку оригиналом является ступенька, то функция — элемент разложения — должна описываться обычной *производной* от огибающей, показанной на рис. 2, в. Тогда она должна выглядеть так, как изображено на рис. 2, г справа.

При физическом явлении дифракции «коротким пространственным импульсом» служит узкая щель, через которую проходит излучение; она является линейной суперпозицией двух перепадов: «оканчивающегося» (показан на рис. 2, а пунктирной кривой) и «начинающегося», отстоящих на очень малый промежуток. Как известно, огибающая мощности (дифракционная картина Фраунгофера [13]) от узкой щели описывается квадратом именно такой функции, как показано для верхней и нижней плоскостей регистрации на рис. 2, г.

В теории сигналов эта функция вида $\sin(x)/x$ является одной из самых известных и называется функцией отсчетов (sample function) [15–20].

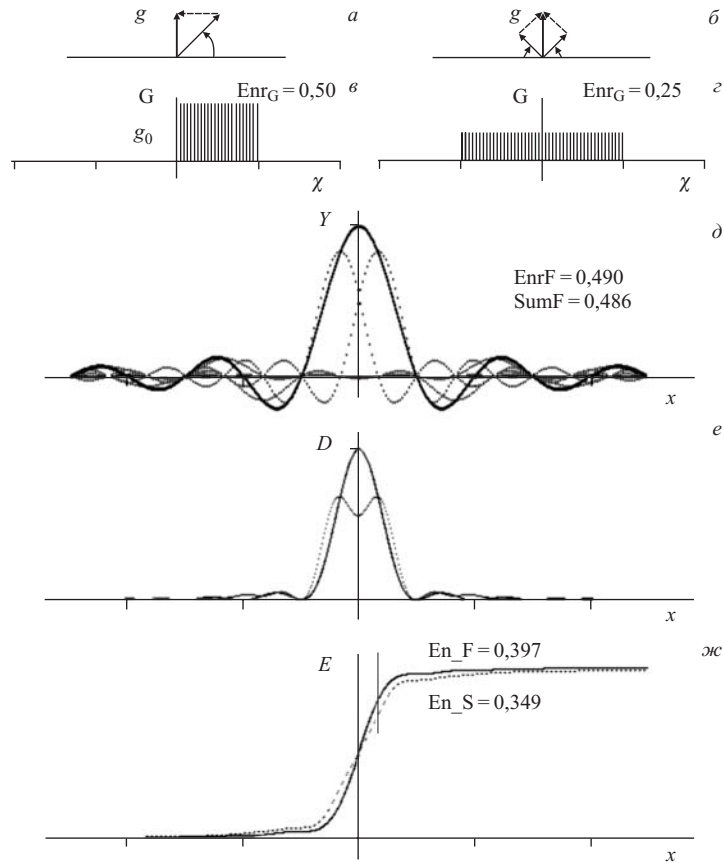


Рис. 3. Векторные диаграммы гармоник однополосного (а) и двухполосного (б) спектров Фурье, сами спектры показаны на рис. в и з; для примера взят плоский спектр функции отсчетов, построенной на рис. д. Как видно из рис. з, энергия в двухполосном спектре вдвое ниже (для функции отсчетов) ее реальной энергии $E = 0,5$; на рис. д энергия функции отсчетов $EnrF$ и ее площадь $SumF$ несколько меньше 0,5 за счет обрезания ее бесконечных «крыльев» (в центральном пике содержится 90% энергии). Пунктирными линиями показано разложение функции отсчетов на две субфункции отсчетов. Если разложение по огибающей является точным, то график энергии разлагаемой функции (ж) и сумма энергий функций разложения (пунктирные кривые) разнятся до 11%, уравниваясь только на бесконечности — $En_S = En_F$. На рис. е приведена плотность энергии функции отсчетов, представляющая собой картину дифракции от узкой щели (см. для сравнения рис. 2, з). Эту картину может давать как сама функция, показанная на рис. д толстой линией, так и суперпозиция ее субфункций разложения. Сумма плотностей энергии функций разложения приведена на рис. е пунктирной линией

В абстрактных математических переменных ее полная запись $\text{Sinc}(x) = A \sin(\Delta\kappa \cdot x) / (\Delta\kappa \cdot x)$, где $\Delta\kappa = 2\pi\Delta\chi$ — «круговая» ширина ее спектра; вид функции и ее спектра иллюстрируются рис. 3, в, д. Спектр функции отсчетов является необычным для классического сигнала не столько в том, что он плоский, а в том, что он *строго обрезан* в области высших частот (не каузален). Поэтому как сигнал функция отсчетов *нереализуема во времени*.

Здесь уместно сделать еще одно замечание по поводу формализма в представлении спектров. Как известно, существуют две формы записи преобразования Фурье — тригонометрическая и комплексная [15]. В первом случае каждая гармоника представляется одним вращающимся вектором (рис. 3, а), а во втором — двумя (рис. 3, б), вращающимися в противоположных направлениях. Последнее интерпретируется как наличие двух зеркальных спектров — положительных и «отрицательных» частот половинной амплитуды (рис. 3, г). При всем удобстве второго представления не следует забывать, что оно *нефизично*, ибо дает неправильное, для плоского спектра вдвое меньшее, значение для энергии сигнала (см. п.1.2).

1.4.1 Функция отсчетов как элемент разложения. Теорема отсчетов, носящая в отечественной литературе имя Котельникова [18], корректно формулируется следующим образом: любой сигнал с обрезанным спектром шириной $\Delta\chi_S$ может быть точно представлен последовательностью амплитудных значений функций отсчетов, отстоящих на интервалы $\delta x \leq 1/2\Delta\chi_S$ (т. е. функции разложения должны иметь как минимум вдвое более широкий спектр, чем у аппроксимируемого сигнала). Все промежуточные точки (между указанными *опорными* амплитудными значениями) находятся из суммы значений всех функций отсчетов при заданном x . В качестве примера на рис. 3, д пунктирной линией показано саморазложение функции отсчетов на две субфункции отсчетов со спектрами, ширина которых в 1,5 раза больше. Этот пример приведен и для иллюстрации того, что в частных случаях условие *удвоения* (кратности) ширины спектра функций разложения не является обязательным.

Квадрат функции отсчетов (т. е. плотность ее энергии D , рис. 3, е) дает хорошо известную картину дифракции от узкой щели (уже обсуждавшуюся выше), ее характерный вид является следствием обрезанности спектра.

Из сказанного выше по поводу дифракции (см. рис. 2, г слева) можно заключить, что функция отсчетов как элемент разложения не может обеспечивать равенства *плотностей* энергий. На рис. 3, ж пунктирной линией дана суммарная энергия функций разложения. Она действительно не совпадает в пределах центрального пика с энергией разлагаемой функции, разность достигает около 11%. Оба приведенных факта свидетельствуют о том, что математическое разложение сигналов является *формальным* — результирующий сигнал есть сумма огибающих гармоник, но физически он *не состоит* из этих гармоник.

Смысл теоремы отсчетов (для сигналов с обрезанным спектром) состоит в *предсказуемости* положения каждой из бесконечного количества точек, находящихся *между опорными*, в результате чего, не имея свободы, они не могут нести информацию. Таким образом, *отсчеты* сигнала (события, несущие информацию) определяются только положением опорных точек. Фактически теорема отсчетов задает классическую информационную *единицу длины* по оси абсцисс, а интервал $\delta x = 1/2\Delta\chi_S$ является информационным *критерием непрерывности функции* $y(x)$ как сигнала — ее короткие всплески или переходы в нуль не могут иметь меньшую протяженность.

1.4.2. Теорема отсчетов в спектральной области. Преобразование Фурье обладает свойством взаимной заменяемости безразмерных переменных x и χ [15], в силу которого обратное преобразование Фурье от спектра сигнала дает его огибающую. Это, в частности, говорит о том, что как носители информации сигнал и его спектр совершенно равноценны.

Соответственно, к спектру можно применить теорему отсчетов: любой спектр может быть точно представлен последовательностью амплитудных значений функций отсчетов, отстоящих на интервалы $\delta\chi \leq 1/2\Delta x_S$, где Δx_S — длительность всего сигнала либо его вырезанной части (тогда и спектр является частным). Заметим, что при *вырезании части сигнала* образующиеся по краям ступенчатые перепады порождают дополнительные верхние гармоники в частном спектре, свидетельствующие о том, что и до, и после выделенного интервала сигнал отсутствует.

Таким образом, форма спектра определяется тем же количеством опорных точек $n = 2\Delta x_S\Delta\chi_S$, что и на самом сигнале; опорные гармоники расположены тем гуще, чем длиннее сигнал.

1.4.3. Сигналы и спектры, состоящие только из опорных точек. Некоторые сигналы или спектры состоят *только* из опорных точек; они характерны тем, что их фурье-отображение носит циклически повторяющийся характер. Если спектр состоит из набора точек, идущих с шагом $\delta\chi \leq 1/\Delta x_S$, то повторяется сам сигнал с периодом Δx_S . Поскольку спектр такого сигнала *линейчатый*, а не сплошной, то в нем каждая гармоника имеет *конечную* амплитуду — $G(\chi)$, рис. 3, в. Если же сигнал состоит из набора точек, идущих с шагом $\delta x_S \leq 1/\Delta\chi_S$, то тогда (бесконечно) повторяется его спектр с периодом $\Delta\chi_S$.

Может показаться, что в этом случае сигнал и его спектр имеют разное число опорных точек. Дело, однако, в том, что повторяющиеся точки (как сигнала, так и спектра) *не несут информации* [6] и поэтому не могут считаться опорными.

1.4.4. Информация за пределами основной полосы спектра. Теорема отсчетов применима (и то не совсем строго) только для радиосигнала, у которого спектр *практически обрезан* (представлен узкой полосой вокруг несущей

гармоники). Что касается остальных динамических сигналов, то теорема отсчетов имеет прямое отношение только к «основной полосе» спектра сигнала, по которой спектр ограничивается «по умолчанию». За пределами основной полосы, однако, может находиться до половины энергии сигнала; странно было бы думать, что эта энергия не способна нести информацию. Количественный анализ плотности потока информации за пределами основной полосы проведен ниже — в конце п. 1.7.3.

1.5. Информационная емкость классического сигнала. В классической теории нет никаких *внутренних* ограничений на малость отклонений сигнала по оси y (*внешние* ограничители, такие как шумы и наводки, пока не рассматриваются). Как мы уже говорили, в математическом анализе каждая точка по определению различима, поэтому любое очень малое приращение δy обнаружимо. Различимость бесконечно малых приращений классического сигнала означает, что он обладает *бесконечным числом* состояний в каждом отсчете, и с его помощью можно закодировать всю мыслимую информацию. Сделать это можно, например, следующим образом.

Положим, что необходимо передавать сигнал с собственным разрешением по амплитуде, равным $1/m$ (т.е. имеющим m градаций по амплитуде). Каждый из интервалов в шкале m можно разбить в свою очередь на m частей. Прделав указанное иерархическое деление шкалы m последовательно s раз (где s удовлетворяет уравнению $n = m^s$), мы получим возможность закодировать s последовательных отсчетов сигнала с разрешением $1/m$ в *одном отсчете* сигнала с разрешением $1/n$. Описанная процедура реально используется в так называемом арифметическом кодировании [21]. Таким образом, видно, что при отсутствии внешних воздействий — шумов и наводок, классический сигнал способен нести бесконечное количество информации в каждом отсчете.

Этот же вывод следует из утверждения Винера [12]: количество информации, получаемое в результате нахождения (с точностью δy) положения точки на интервале Y , ограничено сверху величиной

$$I \leq \log (Y/\delta y). \tag{18}$$

Здесь отношение $Y/\delta y$ есть число доступных обнаружению (различимых) *состояний* положения точки. В определении Винера по умолчанию полагается, что каждая «порция» информации приобретается в результате некоторого *события* (например, акта измерения). Повторим, что для сигнала таким «событием» является отсчет, следующий из теоремы отсчетов.

Если Y неограниченно возрастает либо δy неограниченно уменьшается, то количество получаемой информации стремится к бесконечности. Однако этого не должно быть в принципе — информация как логарифм вероятности конечна по определению. Следовательно, для значений Y должен существо-

вать некоторый *предел*, а значение δy , в свою очередь, не может быть меньше некоторой *пороговой* величины.

1.6. Пороговые и предельные ограничения реального сигнала. Представить, как могли бы выглядеть пороговое и предельное ограничения, можно на основе достаточно абстрактных рассуждений. Можно утверждать, что математическая функция $y(x)$, у которой различима каждая точка, имеет «трижды бесконечное» количество состояний, поскольку

а) Y может принимать бесконечно большие значения (они неизбежны, если определена операция деления применительно к бесконечно малой);

б) δy может принимать бесконечно малые значения;

в) на каждом конечном интервале δx количество точек в функции $y(x)$ бесконечно.

Нетрудно представить, какое ограничение надо наложить «сверху» на математическую функцию $y(x)$, чтобы устранить бесконечность типа а). Очевидно, что необходимо наличие *предельного ограничения* [7] на величину Y (18):

$$Y \leq \sqrt{R}. \quad (19a)$$

Предельная постоянная

$$R = Y_{\max}^2 = (E/\delta x)_{\max} \quad (19b)$$

есть наибольшая величина *линейной плотности* энергии сигнала.

Несколько сложнее обстоит ситуация с наложением ограничения «снизу». Теорема отсчетов частично снимает ограничение в) для некаузальных сигналов, но дело еще и в том, что порог должен устранять пункты б) и в) совместно. Следовательно, в это ограничение должно входить произведение δx на δy (сумма входить не может из-за разной размерности x и y у физических сигналов). Тогда мы имеем две реальные возможности для введения *порогового ограничения*:

— ограничение, связанное с площадью сигнала, — $\delta y \delta x$;

— ограничение, связанное с энергией сигнала, — $\delta y^2 \delta x$.

1.6.1. Пороговое ограничение по спектральной плотности. Если физический смысл второго ограничения достаточно очевиден, то первое нуждается в некотором пояснении. По аналогии с (19a) оно может быть введено следующим образом:

$$\delta x \delta y \geq \sqrt{Q}. \quad (20a)$$

Если взять «первое отклонение» (от нуля), где $\delta y = y$, то с учетом того, что $\delta x = 1/\Delta\chi$, получим, что пороговая постоянная

$$Q = \left(\frac{y}{\Delta\chi} \right)_{\min}^2 = \left(\frac{E}{\Delta\chi} \right)_{\min} \quad (20b)$$

есть наименьшая величина спектральной плотности энергии сигнала. Введенные в (19а) и (20а) квадратные корни отражают как раз то, что и порог, и предел определяются плотностью энергии.

Вообще говоря, формулы (19б) и (20б) дают усредненные по δx или по $\delta \chi$ значения линейной или спектральной плотности энергии. Поэтому более точный смысл величины Q — это *квадрат площади огибающей* сигнала, что прямо следует из (20а). Площадь сигнала [15] есть спектральная плотность амплитуды его нулевой гармоники g_0 , откуда $Q = g_0^2$.

1.6.2. Пороговая и предельная асимптоты сигнала. На плоскости «энергия–быстродействие» $[E, \delta x]$ (рис. 4, а, где δx характеризует *наибольший темп изменения* сигнала, а E — энергию сигнала на этом минимальном интервале) классический сигнал может быть представлен любой точкой первого квадранта. Зона же существования реального сигнала ограничена и находится между двумя линиями: пороговой гиперболой $E = Q/\delta x$ и предельной прямой $E = R\delta x$, выходящей из начала координат. Абсолютный минимум величины δx достигается в точке пересечения пороговой и предельной линий. Тогда

$$\delta x \geq \sqrt{Q/R} \quad \text{или} \quad \Delta \chi \leq \sqrt{R/Q}, \quad (21a)$$

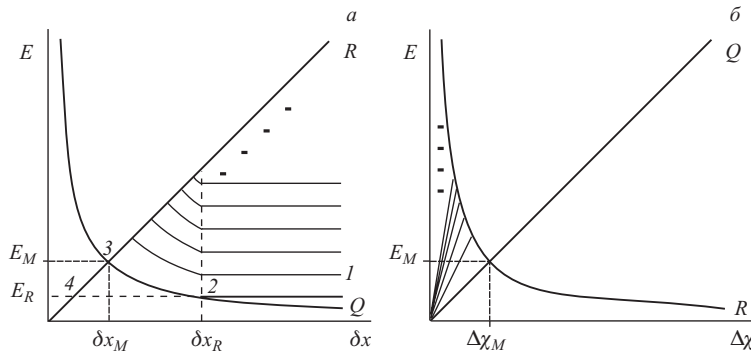


Рис. 4. Пороговые (Q) и предельные (R) асимптоты сигнала для интервалов, характеризующих быстродействие δx (а), характеристической ширины спектров $\Delta \chi$ (б) при разных величинах энергии (короткого) сигнала E . Тонкими кривыми показаны пять первых линий nQ в области существования реальных сигналов. Горизонтальная линия двойной ширины на рис. а показывает положение классического порога по энергии E_R , который располагается выше порога по площади. 1 — зона, соответствующая современному уровню технических средств по передаче информации (показана не в масштабе); 2 — точка теоретического максимума увеличения скорости в классике и достижимого минимума энергозатрат; 3 — дальнейший рост скорости при переходе к микромасштабам будет, вплоть до абсолютного предела, неизбежно связан с увеличением расхода энергии на один бит информации; 4 — точка теоретического максимума увеличения скорости при наличии порога только по энергии восприятия

а произведение Q на R дает энергию в точке пересечения

$$QR = E_M^2. \quad (216)$$

В спектральной форме $E(\Delta\chi)$ пороговая и предельная линии меняются местами (см. рис. 4, б), и эта симметрия кривых весьма показательна. Если, с одной стороны, предельная постоянная есть линейная плотность энергии (19б), а пороговая постоянная есть ее спектральная плотность (20б), то, с другой стороны, предел — это квадрат площади полной огибающей спектра сигнала: $R = (g\Delta\chi)^2$, а порог — это квадрат площади сигнала. Заметим, что совокупность пороговых сигналов с $g_0 = \text{const}$ образуется в процессе формирования (или в обратном процессе «размазывания») дельта-функции Дирака [22].

1.6.3. Особенности сигналов вблизи порога. Пороговый сигнал обладает свойством *элементарности* — неразложимости на реальные составляющие. Поскольку он регистрируется только как единое целое, то для него понятие формы фактически не определено. Можно с уверенностью говорить лишь об энергии сигнала и/или его пороговой площади. Понятие формы появляется лишь у надпороговых сигналов.

Следует отметить, что сигнал может быть зарегистрирован лишь конечное число раз, ибо на каждую регистрацию «тратится» один пороговый интервал. Хорошим примером является фотон, энергия которого непосредственно подчиняется пороговому соотношению, он регистрируется только однократно.

Еще одна особенность касается противоречия канонам классического математического анализа. Помимо представления о лишенной размера точке в его основе лежит утверждение о линеаризации дифференцируемой функции при входе в зону бесконечно малых: $\delta y \approx f'(x)\delta x$, где $f'(x)$ есть производная функции $f(x)$. Тогда при $\delta x \rightarrow 0$ имеем $\delta y \rightarrow 0$. Однако соотношение (20а) означает, что при наличии предельных ограничений пороговые отклонения (здесь и далее δx и δy) не могут одновременно быть бесконечно малыми. Поэтому математическое понятие *производной* в околопороговой области фактически *теряет смысл* для реального сигнала.

Исходя из соотношения (21а) есть основания считать спектр реального сигнала обрезанным. Внимательный читатель может усомниться в каузальности реального сигнала, поскольку при обрезанном спектре неизбежен эффект Гиббса. Дело, однако, в том, что спектр не обрезан физически, он просто *неизвестен* в области высших гармоник. Тем не менее реальный сигнал всегда совпадает со своим классическим оригиналом (с определенным спадающим спектром) в *конечном* числе точек (рис. 5). Именно эти точки несут ту *конечную* информацию, которой обладает реальный сигнал. Во всех остальных точках у реального сигнала остается небольшая «свобода неопределимости» (выделена серым цветом на рис. 5, е).

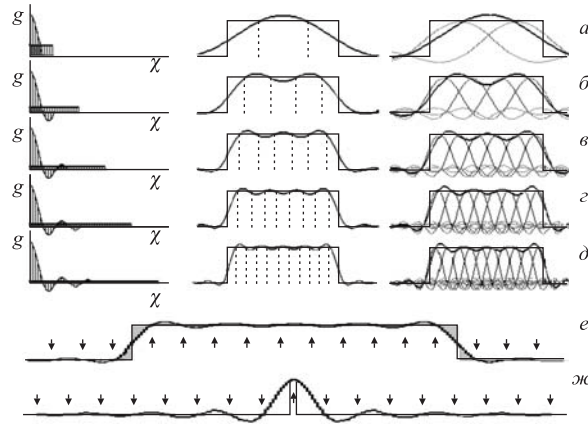


Рис. 5. *a–д)* Разложение прямоугольного сигнала. Левая колонка: обрезанный фурье-спектр прямоугольного сигнала (вида $\sin(\chi)/\chi$) и спектр (плоский) функции отсчетов, используемой для разложения; на каждом шаге ширина обоих спектров растет пропорционально его номеру и точность разложения возрастает. Средняя колонка: форма квазипрямоугольного сигнала, полученного из фурье-спектра; пунктирные линии показывают положение опорных точек, где сигнал совпадает с оригиналом. Правая колонка: тот же квазипрямоугольный сигнал, полученный как сумма функций отсчетов (вида $\sin(x)/x$, максимумы последних совпадают с опорными точками). Здесь суммарная огибающая на рис. *д* справа есть отображение «широкой» щели с резкими краями при дифракции. *е)* Зона, где сигнал имеет «свободу неопределенности», заполнена серым цветом. Опорные точки (помечены стрелками) за границей щели находятся там, где огибающая проходит через нуль, поскольку за своими границами щель непрозрачна; в пределах щели они также совпадают с классическим отображением. *ж)* Дифракция от узкой щели с резкими краями. Функции отсчетов как элементу отображения здесь явно не хватает ширины спектра с рис. *д* слева, поэтому отображением является сама функция отсчетов

Приведенные рассуждения о порогах и пределах, хотя они и абстрактны, наглядно показывают, что анализ функций, в основе которого лежит ограниченность числа их различных состояний, принципиально отличается от классического математического анализа, основанного на предположении о существовании бесконечного количества бесконечно малых (но полагаяемых различимыми) точек по каждой координате.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных физических механизмов, вызывающих обсуждаемые ограничения. Говоря об ограничениях, следует рассматривать не только сигнал сам по себе, но и все элементы триады: передатчик–передающая среда–приемник, формирующих или влияющих на сигнал и дающих вклад в указанные ограничения.

1.7. Ограничения при передаче и приеме сигналов. Со стороны передатчика очевидным предельным ограничением является мощность, отдаваемая в канал передачи. Именно мощность P играет роль предела в известной формуле Шеннона [19] для плотности потока передаваемой информации:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \Delta\nu \log \left[1 + \left(\frac{P}{\langle P_N \rangle} \right) \right], \quad (22a)$$

где $\Delta\nu$ — диапазон частот. Чтобы получить мощность, в формуле (19) достаточно заменить абстрактную переменную x на время t .

Ограничителем снизу на число различных состояний в (22a) является средняя мощность шума $\langle P_N \rangle$, неизбежно присутствующая в тракте передачи (индекс N от noise). Поскольку мощность есть квадрат огибающей сигнала, то эту формулу при большом числе состояний можно представить в виде

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \Delta\nu \log \left[1 + \left(\frac{Y}{\delta y} \right)^2 \right] \approx 2\Delta\nu \log \left(\frac{Y}{\delta y} \right) = \frac{\log(Y/\delta y)}{\delta t}. \quad (22b)$$

В результате, в числителе дроби справа имеем количество информации по Винеру (18), а в знаменателе — единичную длину по Котельникову.

Широкая распространенность формулы Шеннона порождает у многих иллюзию того, что шум является единственным или по крайней мере всегда основным фактором количественного ограничения δy снизу. Однако далеко не всегда это так, даже при наличии шума.

Наиболее наглядной является газовая акустическая среда: мы не воспринимаем шума хаотического движения молекул в газе, однако прекрасно слышим упорядоченные звуки, распространяющиеся по среде, образованной случайными столкновениями молекул. Основой является *порог слышимости* (не будь его, не было бы децибелов), который не имеет прямого отношения к уровню шума передающей среды и отражает физиологические особенности слухового тракта человека.

Сходная ситуация имеется и в микромире: вероятностный (случайный) характер динамики микрочастиц не исключает существования точно заданных квантованных состояний и уровней энергии, которые могут использоваться, в частности, в «компьютерах квантовой механики» (выражение Фейнмана [3]).

Следует упомянуть и о пространственных сигналах, где шум практически отсутствует, но информация тем не менее теряется за счет обрезания спектра *волновых чисел*. Например, если информация передается в виде текста на экран через проектор, то при *расфокусировке* объектива проектора текст на экране станет нечитаемым. Обуживание спектра частот динамического сигнала также есть его своеобразная «расфокусировка» во времени.

Наконец, шум, поскольку он не имеет постоянной составляющей, *не является принципиальным ограничением* для приема информации; скорее он ограничивает *темп* ее приема. Влияние шума можно низвести теоретически до нуля, если производить его *усреднение* путем многократного повторения сигналов. Например, вся квантовая механика есть наука о средних величинах, где экспериментальная информация получается длительным «набором статистики», т. е. усреднением шумов (неопределенностей) микромира.

Смысл того, что мы называем *информационным порогом*, состоит в том, что подпороговыми сигналами вообще нельзя передать информацию. В сказанном нет ничего удивительного, ибо каждому интуитивно понятно, что распознавание состояний сигнала может зависеть не только от наличия шума, но и от такого понятия, как *чувствительность* приемника. Наивно было бы полагать, что «зона нечувствительности» может быть бесконечно малой или всегда меньшей, чем шум.

1.7.1. Определение чувствительности приемника. Нетрудно декларировать наличие у приемника (измерительного прибора) порога чувствительности, сложнее понять, в чем именно заключается его физический механизм. К счастью, возможных вариантов не так уж много:

- 1) ограничителем снизу может быть значение огибающей сигнала (или амплитуда короткого импульса);
- 2) значение мощности, точнее, энергия на единичном интервале по t ;
- 3) ширина спектра сигналов во времени или в пространстве $\Delta\chi$;
- 4) ограничения по ширине спектра и по энергии могут действовать совместно.

К первому определению прямо подталкивает формула Винера (18). Порог по амплитуде обычно подразумевает *нелинейность* входной характеристики приемника. Мы будем рассматривать ниже только *линейные* приемники; тогда, как будет показано, невозможность регистрации сигналов малой амплитуды есть *следствие* наличия порогов 2)–4) и пункт 1) можно исключить из списка причин. Энергоограничение 2) является очевидным, поскольку невозможно изменить состояние приемника, не передав ему никакой энергии. Фундаментальность ограничения 3), связанного с ограниченностью градиента сигнала $Y/\delta x$, также не нуждается в особых пояснениях, ибо отражает универсальное свойство инертности. Во времени ограничение 4) является порогом по *действию* [9], оно также является всеобщим, поскольку принцип наименьшего действия — один из основных законов природы.

1.7.2. Обобщенная функциональная схема приемника. Следуя традициям электронной техники, можно представить ограничения 2) и 3) в виде отдельных функциональных узлов приемника (хотя можно ввести и соответствующие математические операторы). Тогда функция 4) отобразится последовательным соединением узлов 3) и 2), т. е. произведением некоммутируемых операторов «быстроты» и энергии. В результате получим достаточно простую

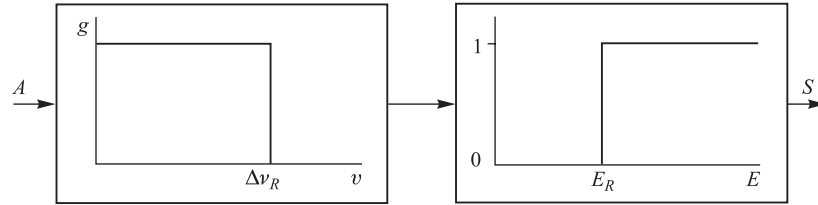


Рис. 6. Обобщенная функциональная схема логического регистратора отклонений сигнала: A — аналоговый вход, S — логический выход; первое звено — фильтр гармоник $\nu > \nu_R$, второе звено — дискриминатор по энергии на уровне E_R . Величины $\Delta\nu_R$ и E_R определяют пороговую постоянную регистратора: $H_R = E_R/2\Delta\nu_R$, которая равна квадрату спектральной плотности амплитуды нулевой гармоники g_0^2 порогового входного сигнала или квадрату его площади

и наглядную обобщенную блок-схему, показанную на рис. 6. Ее функциями обеспечивается *различимость* состояний сигнала, а на уровне порога — сам факт регистрации.

Если подать на такой регистратор низкочастотный сигнал (например, импульс с очень пологим фронтом), то момент срабатывания регистратора будет соответствовать достижению *энергии входного сигнала* пороговой величины, т. е. пункту 2).

Если же подать «быстро-медленный» ступенчатый испытательный сигнал малой амплитуды, то задержка его срабатывания также будет достаточно велика, поскольку на накопление *необходимой второму узлу* энергии (после фильтрации «быстрой» части энергии, например, паразитной емкостью в первом узле) потребуется значительное время. Так, при токе входного сигнала 1 нА, паразитной емкости $C_{\text{п}} \approx 1$ пФ и уровне различимости сигнала $U_{\text{п}} \approx 1$ мВ (требуемой входной энергии $E_{\text{п}} = C_{\text{п}}U_{\text{п}}^2/2 = 5 \cdot 10^{-19}$ Дж) это произойдет не ранее, чем через 1 мкс. Этот случай соответствует пункту 3), регистратор будет обнаруживать ступеньку сколь угодно малой амплитуды, т. е. для этого типа сигнала его порог по амплитуде равен нулю.

Пункт 4) реализуется, если в качестве испытательного взять «быстрый» сигнал (например, прямоугольный импульс длительностью 10 нс). Тогда у регистратора появится порог по амплитуде (не менее 100 нА); он будет тем больше, чем уже входной сигнал. При увеличении амплитуды сигнала задержка срабатывания будет уменьшаться сначала быстро, а затем все медленней, стремясь к нулю. Этот «эффект гуляния» (walking) электронных дискриминаторов, вносящий аппаратную погрешность в измерение как времени, так и амплитуды, хорошо известен в наносекундной технике [23].

Таким образом, приведенная на рис. 6 обобщенная функциональная схема покрывает все возможные физические варианты ограничений при приеме сигналов (включая первый в списке, как следствие). Оценим, задавшись единич-

ным интервалом времени $\delta t = 1$ нс, порог по действию 4): $H_{\text{п}} = \delta t E_{\text{п}} = 5 \cdot 10^{-28}$ Дж · с; как видим, он на 6 десятичных порядков выше постоянной Планка. В численных примерах нами в разных вариациях использовалась комбинация $P = 1$ нВт, $\delta t = 1$ нс, которая ориентировочно соответствует уровню восприятия сигналов массовой продукцией современной электронной техники.

Перейдем теперь к выводу общих формул, описывающих те или иные варианты информационных ограничений. Мы и далее будем иллюстрировать их графиками на плоскости параметров $[E, \delta t]$. Ограничение мощности передатчика задается на этой плоскости прямой линией, проходящей через начало координат. Рассмотрим возможные режимы работы регистратора, которые, как мы выяснили, определяются соотношением между быстротой сигнала (S) и быстродействием самого регистратора (R).

1.7.3. «Быстрый» регистратор. Повторим, что если сигнал имеет значительно меньшую ширину спектра, чем у приемника: $\delta t_S \gg \delta t_R$ (или $\Delta \nu_S \ll \Delta \nu_R$), то он не фильтруется и целиком проходит во второе звено. В этом случае срабатывание регистратора определяется *текущей* величиной энергии сигнала и наступает сразу же, как только последняя становится больше E_R .

Тогда на плоскости параметров $[E_R, \delta t_R]$ различаемые приемником состояния есть горизонтальные линии, идущие с шагом E_R вплоть до предельной прямой P (рис. 7, а). Для сигнала с быстродействием δt_S количество таких

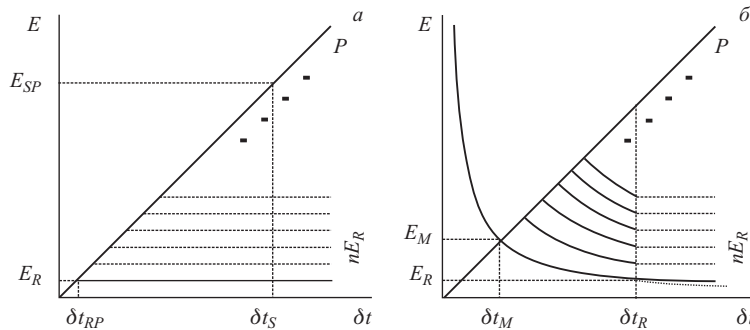


Рис. 7. Информационные ограничения при практическом отсутствии шумов (задаются сверху пределом мощности сигнала P , а снизу зависят от быстродействия приемника): а) если приемник «быстрый» ($\delta t_R \ll \delta t_S$), то он воспринимает $n = E_{SP}/E_R$ состояний в сигнале (плюс 0), при увеличении быстроты сигнала количество различных состояний снижается, но темп передачи информации растет (снижению δt_S действует сильнее) и достигает максимума при $\delta t_S = \delta t_{RP} = E_R/P$; б) если приемник «медленный» ($\delta t_R > \delta t_S > \delta t_M$), то ограничение снизу идет по пороговым гиперболам и число различных состояний снижается, кроме того, приемник воспринимает информацию с темпом, определяемым δt_R , а не входным сигналом

состояний $n = E_{SP}/E_R$, где $E_{SP} = P \delta t_S$. Соответственно, возможная плотность передачи информации во времени

$$\frac{\Delta I_S}{\delta t} = \log \left[1 + \frac{P \delta t_S}{E_R} \right] / \delta t_S. \quad (23a)$$

Здесь дополнительная единица появляется, как и в формуле Шеннона (22a), из учета «состояния отсутствия» сигнала.

Информационный приоритет отсчетов над состояниями. Как видно из (23a), при уменьшении δt_S , несмотря на то, что количество различных состояний снижается, возможная плотность передаваемой информации тем не менее возрастает (поскольку логарифм меняется медленнее, чем $1/\delta t_S$). Наибольшая плотность информации будет достигнута при повышении скорости сигнала, т. е. снижении δt_S до величины $\delta t_{RP} = E_R/P$, где различаются только два состояния:

$$\left(\frac{\Delta I_S}{\delta t} \right)_{\max} = \frac{\log[2]P}{E_R}. \quad (23б)$$

Если сигнал сопоставим по ширине спектра с приемником, то на плоскости параметров $[E_R, \delta t_R]$ зона, где регистратор является «быстрым», а сигнал «медленным», лежит правее вертикальной прямой, проходящей через точку δt_R на оси абсцисс (рис. 7, б, продолжение пунктирных горизонтальных прямых толстыми линиями).

Точка δt_R определяет основную полосу пропускания приемника. Если отношение δt_R к δt_{RP} равно n , то в пределах основной полосы появляется не 2, а $(n + 1)$ возможных состояний (горизонтальные линии на рис. 7, б). Тогда отношение $n/\log_2[n + 1]$ показывает, во сколько раз количество информации в основной полосе частот меньше полной информации, которую сигнал способен переносить реально. Сказанное можно проиллюстрировать правой колонкой рис. 5, а–д. Когда приемник пропускает только основную полосу частот сигнала (см. рис. 5, а слева), то показанный справа сигнал может быть поделен на n частей по вертикали (по квадрату амплитуды, т. е. по энергии). Тогда он будет иметь $(n + 1)$ состояний и переносить $\log_2[n + 1]$ бит информации. При увеличении полосы пропускания приемника до показанной на рис. 5, д сигнал будет разбиваться по энергии на те же n частей, но уже по горизонтали, и каждая часть будет нести один бит информации. В итоге приходим к соотношению того же вида $n/\log_2[n + 1]$ для роста количества информации в расширяемой полосе частот. Увеличивать n можно до тех пор, пока не будет достигнут порог по энергии, т. е. численно n будет такой же, как для рис. 7, б.

1.7.4. «Медленный» регистратор. Если сигнал имеет большую ширину спектра, чем приемник (выходит за пределы основной полосы частот последнего): $\delta t_S < \delta t_R$ (или $\Delta \nu_S > \Delta \nu_R$), то только часть энергии сигнала,

содержащаяся в его нижних гармониках, пройдет во второе звено (рис. б):

$$E_{\text{рег}} = \frac{g_n^2}{2} \Delta\nu_R, \quad (24a)$$

где g_n — спектральная плотность амплитуды сигнала в области низших гармоник. Для реальных сигналов спектральная плотность амплитуды в области самых нижних гармоник практически постоянна, поэтому (24a) эквивалентно условию

$$E_{\text{рег}} = g_0^2 2\Delta\nu_R, \quad (24б)$$

где $g_0 = g_n/2$ — спектральная плотность амплитуды нулевой гармоники.

По мере роста $\Delta\nu_S$ все большая и большая часть энергии сигнала будет отфильтрована, т. е. потеряна для регистрации. Как следствие, все больше и больше информации, содержащейся в коротких деталях сигнала, будет утеряно.

Пороговое соотношение неопределимости. Для регистрации короткого сигнала «воспринимаемая» энергия $E_{\text{рег}}$ должна быть больше или равна E_R . Это можно записать в виде неравенства, вытекающего из (24б):

$$g_0^2 \geq E_R/2\Delta\nu_R. \quad (25a)$$

Это значит, что для коротких (для него) сигналов приемник имеет пороговую информационную постоянную

$$H_R = \frac{E_R}{2\Delta\nu_R} = E_R \delta t_R \quad (25б)$$

с размерностью *действия*.

Для сигнала величина g_0^2 , как уже говорилось, есть квадрат его площади; она имеет размерность действия, в данном случае это действие сигнала: $g_0^2 = H_S$. Тогда пороговое условие принимает весьма простой вид

$$H_S \geq H_R. \quad (25в)$$

Соответственно, область сигналов, регистрируемых медленным приемником, на рис. 7, б будет располагаться над пороговой гиперболой, проходящей через точку $[E_R, \delta t_R]$, поскольку $E_S \approx g_0^2 2\Delta\nu_S = H_S/\delta t_S$.

Легко также видеть из рис. 7, б, что условие (25в) справедливо и для быстрого регистратора, поскольку горизонтальная прямая $E_R = \text{const}$ проходит выше пороговой гиперболы H . Таким образом, условие (25в) задает *обобщенный порог* приемника (точнее, является его необходимым условием).

Интервал обнаружения порогового сигнала. Как видим, короткие (для приемника) сигналы все же могут быть зарегистрированы за счет роста их

площади (квадрат площади сигнала H_S должен быть больше квадрата «пороговой площади» H_R [9]). Однако медленный регистратор срабатывает не в интервале наличия сигнала, а заведомо *позже* — по прошествии интервала

$$\delta t_R = \frac{H_R}{E_R} = 1/2\Delta\nu_R, \quad (26)$$

требуемого для «набора пороговой площади». Для чувствительных, но медленных регистраторов, интервал обнаружения может быть достаточно большим. Хорошим примером является «регистрация» вспышки молнии глазом — сама вспышка длится доли миллисекунды (но она очень яркая), а глаз воспринимает ее через десятки миллисекунд.

Биполярные короткие сигналы. Входной сигнал в интервале, меньшем δt_R , интегрируется приемником (поскольку величина $2/\delta t_R$ находится выше границы спектральной полосы приемника). Если в интервале, меньшем δt_R , появится несколько входных сигналов, то для регистратора они будут суммироваться не по амплитудам огибающих, а *по площадям*.

Представим, что имеется короткий биполярный сигнал или два коротких одинаковых сигнала противоположной полярности, отстоящих на расстояние, *существенно меньшее* δt_R . В подобной паре оба сигнала не будут зарегистрированы, даже если они надпороговые (каждый имеет большую площадь), ибо их *суммарная площадь* в интервале обнаружения нулевая.

Количество «пороговых» состояний. Предположим, что сигнал несет только подпороговые «детали», тогда они, как и сам сигнал, будут потеряны при регистрации. Точно так же не будут восприняты детали, лежащие между гиперболами H и $2H$ на рис. 7 (хотя сам сигнал уже будет воспринят), потому что невозможно определить *разность* между пороговым сигналом и сигналом, лежащим ниже гиперболы $2H$. Следующий «слой» неразличимости лежит в границах от $2H$ до $3H$ и т. д.

Следовательно, линии nH (n — целое число) задают информационные *состояния сигнала* (начиная с порогового), и только они являются различимыми. На рис. 7, б ограничиваемая пороговой и предельной асимптотами область, где реальный сигнал удовлетворяет информационным ограничениям, заполнена линиями (гиперболы), идущими с шагом H .

Информационная пропускная способность. На пороговой гиперболе сигнал имеет только два состояния (он есть или его нет). Это значит, что на *каждом интервале* δt он может нести 1 бит информации, а на интервале $L\delta t$ — L бит (независимо от того, сколько раз он появился — один или L раз).

При движении вертикально вверх от точки $[E_R, \delta t_R]$ до предельной прямой количество возможных состояний сигнала, как нетрудно убедиться, равно $n = (\delta t_R/\delta t_M)^2$, где $\delta t_M = \sqrt{H/P}$ есть абсцисса точки пересечения пороговой гиперболы и предельной прямой на рис. 7, б.

Если сигнал становится быстрее ($\delta t_S < \delta t_R$), то количество состояний снижается до $n = \delta t_S \delta t_R / \delta t_M^2$, соответственно, возможная плотность информации во времени принимает вид

$$\frac{\Delta I_R}{\delta t} = \log \left[1 + \frac{\delta t_S \delta t_R}{\delta t_M^2} \right] / \delta t_R. \quad (27)$$

В отличие от (23а) значение δt в знаменателе (27) равно δt_R (потому что на регистрацию сигнала тратится интервал δt_R). При уменьшении δt_S величина под знаком логарифма снижается, а знаменатель в (27) неизменен, в результате информационная способность тракта передачи уменьшается.

Этот эффект делает энергетически невыгодным использование «слишком быстрых» сигналов в технике, поэтому описанный режим передачи информации до сих пор не привлекал особого внимания в теории сигналов. Однако практически он используется весьма широко — достаточно упомянуть кино и телевидение: в каждой точке экрана сигнал в каждом кадре очень короткий, намного меньший, чем δt_R зрительного тракта человека. Этот пример также иллюстрирует высказанное в п. 1.4.1. утверждение, что пороговый интервал является информационным критерием непрерывности сигнала.

1.8. Информационные ограничения, создаваемые шумом. Все известные физические носители сигналов обладают определенным уровнем шума, т. е. содержат некоторую неупорядоченную фоновую энергию. Для электрических сигналов имеется два основных вида шумов: тепловой, средняя мощность которого [24]

$$\langle P_N \rangle = 4kT \Delta \nu_N, \quad (28a)$$

где $\Delta \nu_N$ — полоса частот шума, а также дробовой шум, порождаемый дискретностью носителей заряда, со средней мощностью [25]

$$\langle P_N \rangle = 2e \Delta U \Delta \nu_N, \quad (28б)$$

где e — заряд электрона; ΔU — проходимая носителями разность потенциалов. В обоих случаях параметром шума является некоторая величина энергии E_N ; для теплового шума это $2kT$, а для дробового $e \Delta U$. Из (28) ясно, что E_N — это средняя энергия шумовой линии на «быстром» интервале $\delta t_N = 1/2 \Delta \nu_N$.

При комнатной температуре характеристическая энергия дробового шума превосходит энергию теплового шума при $\Delta U > 50$ мВ. Поэтому при генерации сигналов основной вклад дает дробовой шум, а при их приеме — тепловой.

1.8.1. Быстрый чувствительный регистратор. При постоянных условиях ($T = \text{const}$, $\Delta U = \text{const}$) энергия $E_N = \text{const}$ постоянна, поэтому в обоих случаях на плоскости $[E, \delta t]$ линия шума есть горизонтальная прямая, рис. 8, а (так же, как при приеме медленных сигналов, рис. 7, а). На этой

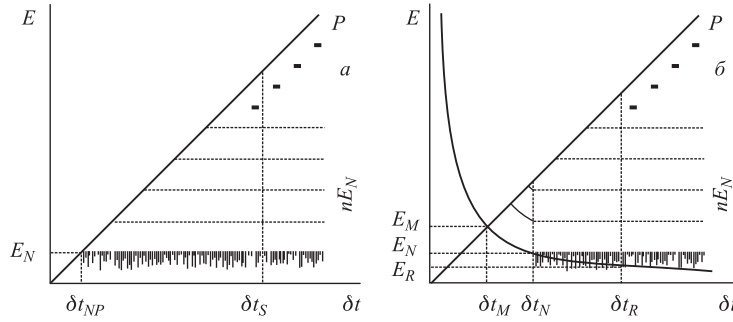


Рис. 8. Информационные ограничения при подавляющем влиянии шумов (задаются сверху пределом мощности сигнала P , а снизу зависят от E_N шума и H приемника): а) при пренебрежимо малых E_R и δt_R (весьма малом H) количество регистрируемых состояний определяется формулой Шеннона (22), а темп передачи информации зависит только от скорости сигнала δt_S (вплоть до $\delta t_S = \delta t_{NP}$); б) если же приемник медленный, но чувствительный ($\delta t_R > \delta t_S$, но $E_R < E_N$), то шум действует вплоть до уровня порога δt_N , а далее положение и количество регистрируемых состояний определяется гиперболами, идущими с шагом $H = E_R \delta t_R$. Левее вертикали δt_N рост быстродействия сопряжен с возрастанием энергозатрат на передачу одного бита информации. При снижении уровня шума диаграмма а неизбежно переходит в диаграмму б, поскольку быстродействие приемника принципиально ограничено. До границы перехода а в б темп приема информации растет, однако при снижении уровня E_N ($E_N > E_R$) в диаграмме б быстродействие на уровне порога по энергии падает

прямой средняя мощность $\langle P_N \rangle$ и среднее действие $\langle H_N \rangle$ не являются константами и определяются из уравнений (записанных совместно)

$$\frac{\langle P_N \rangle}{2\Delta\nu_N} = E_N = \langle H_N \rangle 2\Delta\nu_N. \quad (29a, б)$$

С учетом (29а) для быстрого регистратора достаточно высокой чувствительности по аналогии с (23а) получаем формулу Шеннона (22а):

$$\frac{\Delta I_N}{\delta t} = \log \left(1 + \frac{P}{\langle P_N \rangle} \right) / \delta t_S. \quad (30a)$$

Это вполне логично, поскольку именно размытость шумовой линии задает здесь ширину интервалов между вертикальными линиями состояний nE_N . При увеличении скорости сигнала возможная плотность передачи информации возрастает и наибольшая плотность будет достигнута, если δt_S снизить до величины $\delta t_{NP} = E_N/P$, где различаются только два состояния:

$$\left(\frac{\Delta I_N}{\delta t} \right)_{\max} = \frac{\log[2]P}{E_N}. \quad (30б)$$

На практике этот режим далеко не всегда используется по причине нехватки быстродействия, но к нему следует стремиться.

1.8.2. Медленный чувствительный регистратор. Если $\delta t_S < \delta t_R$ (или $\Delta\nu_S > \Delta\nu_R$) и $E_R < E_N$, то, как видно из рис. 8, б, картина в целом повторяет показанную на рис. 7, б. Правее вертикали δt_N линии состояний идут горизонтально, а левее — переходят в гиперболы, идущие с шагом $H = E_R \delta t_R$. Заметим, что и на рис. 7, б темп (частота) распознавания сигналов определяется величиной δt_R , т.е. может быть низкой по сравнению с возможной частотой входных сигналов — $1/2\delta t_S$.

Граница классического шума. Пороговая постоянная приемника H зависит от его физических размеров: чем они меньше, тем она ниже. При подходе к «пикотехнологиям» неизбежно проявится *природное* физическое ограничение на уменьшение величины H в виде постоянной Планка h .

Как видно из рис. 8, б, граница обрезания классического шума проходит по пороговой гиперболе. Заменяв H на h , получаем ограничение на полосу частот классического шума

$$2\Delta\nu_N = \frac{E_N}{h}. \quad (31a)$$

Для теплового шума $E_N = 2kT$ (28а), тогда условие обрезания можно записать в следующем виде:

$$\frac{h\Delta\nu_N}{kT} = 1. \quad (31б)$$

Именно отношение $h\Delta\nu_N/kT$ входит как обрезавший параметр в известную формулу Планка [26] для нахождения верхней границы спектра *теплового излучения* (теплового шума) в полости.

Для температуры $T = 300$ К граница обрезания классического теплового шума находится на уровне $\Delta\nu_N = 1,3 \cdot 10^{13}$ Гц. Этот диапазон частот всего на 2–3 десятичных порядка выше освоенного современной техникой передачи сигналов, поэтому он представляется достижимым в недалеком будущем. При $T = 300$ К на границе обрезания энергозатраты на передачу информации составляют $1,6 \cdot 10^{-20}$ Дж/бит, а мощность на входе приемника находится на уровне $4,2 \cdot 10^{-7}$ Вт. Однако ниже указанной границы (ниже δt_N на рис. 8, б) энергия, затрачиваемая на каждый бит передаваемой информации, в силу наличия порога должна существенно возрастать.

2. СИГНАЛЫ В МИКРОМИРЕ

Ниже используются следующие обозначения для различных видов энергии: E — полная энергия частицы; E_k — кинетическая энергия; W — по-

тенциальная энергия частицы,

$$E_p = pc = \frac{mVc}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad E_m = mc^2.$$

Здесь m , p , V есть масса (покоя) частицы, ее импульс и скорость, а c — скорость света. Как известно [27], $(E - W)$ является алгебраической суммой E_m и E_k :

$$E - W = E_m + E_k, \quad (32a)$$

и «геометрической» суммой E_m и E_p :

$$(E - W)^2 = E_m^2 + E_p^2 = E_m^2 + 2E_mE_k + E_k^2. \quad (32б)$$

Из (32a), (32б) имеем

$$E_p^2 = (E_m + E_k)^2 - E_m^2, \quad (32в)$$

откуда для нерелятивистских энергий $E_p^2 = 2E_mE_k$, здесь $E_k = mV^2/2$.

В физических переменных обобщенный параметр x — это пространственная координата r или время t ; а χ — это волновое число, деленное на 2π ($k/2\pi$), или частота ν . Здесь, как и ранее, пороговую информационную постоянную Q в пространственных переменных будем обозначать через B , а во временной области — через H . Предельную информационную постоянную R в пространственной области будем обозначать через D (плотность энергии по координате), а для временных переменных — через P (предельная мощность).

Пороговые и предельные информационные постоянные неизбежно существуют как в макроявлениях, так и в микромире. При уменьшении масштабов величины H и B снижаются до природного минимума (h и b), предельные же постоянные, напротив, растут вплоть до физического максимума. Именно это порождает ответный «информационный интерес» к физике малых масштабов, поскольку именно она предопределяет наибольшую плотность информации в пространстве и времени.

Физика микромира, как известно, существенно отличается от классической физики проявлением так называемых волновых свойств частиц, вероятностным (случайным) характером их динамики, наличием постоянной действия, дискретностью уровней энергии и состояний. Многие базовые положения квантовой механики были либо постулированы (формула Планка $E = h\nu$, волновое уравнение Шредингера), либо выявились в эксперименте, довольно неожиданно для самих физиков. Заметим в связи с этим, что 100 лет назад все началось с решения задачи о конечности *ширины спектра* излучения в полости, а ведь именно ограниченность ширины спектра лежит в основе конечности скорости изменения сигналов. Следовательно, в физике микромира

вполне *можно ожидать* эффектов ограниченности «быстроты второго рода». Попробуем показать, что перечисленные выше особенности являются прямым следствием существования информационного порога, т. е. с рассматриваемых позиций они вполне *предсказуемы*.

2.1. Порог для излучения в полости. Согласно классическим представлениям задача об энергии теплового излучения черного тела (физической полости) сводится к подсчету стоячих волн в полости, которые и задают набор возможных физических состояний. Ограничимся «одномерной полостью», т. е. колебаниями вдоль одной пространственной оси, показанными на рис. 9, *a–з* слева (мы и далее будем ограничиваться пространством одного измерения, если переход к трехмерным координатам не вносит принципиальных изменений в рассматриваемые вопросы).

Ограниченная в пространстве стоячая волна имеет размытый спектр волновых чисел; их средние (некруговые) значения равны $n/2L$, где L — размер полости, а n — порядковый номер стоячей волны. Во времени колебания являются гармоническими (синусоида, идущая от $-\infty$ до $+\infty$ по оси времени), поэтому их спектр чисто линейчатый, как показано на рис. 9, *a–з* справа. Шаг между спектральными линиями по частоте ν зависит помимо L еще и от фазовой скорости волн v : $\delta\nu = v/2L$. Согласно принципу равномерного распределения энергии по степеням свободы энергия каждой стоячей волны будет равна двум половинкам kT (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Тогда имеет место равенство

$$\left(\frac{G^2}{2}\right) \Delta t = \frac{G^2 L}{2v} = kT, \quad (33a)$$

где G — амплитуда стоячей волны в спектрах, показанных на рис. 9, *a–з*; Δt — время распространения волны на расстояние L . При увеличении числа стоячих волн энергия в одномерной полости линейно растет с увеличением ν_{\max} . Для классического непрерывного поля (рис. 9, *u*) не существует ограничений на количество стоячих волн в полости, поэтому как ν_{\max} , так и энергия стремятся к бесконечности. При большом числе гармоник $n \gg 1$ линейчатый по частоте спектр можно считать практически непрерывным, как показано на рис. 9, *к*. Тогда можно перейти к спектральной плотности амплитуды $g(\nu) = G/\delta\nu$ в уравнении (33a):

$$\left(\frac{g^2}{2}\right) \delta\nu = 2kT. \quad (33б)$$

Нетрудно видеть, что теперь его левая часть соответствует (1б).

Реальное излучение имеет *дискретный* характер и переносится частицами (в рассматриваемом случае фотонами), распределение которых по энергии спадает по экспоненте, а средняя энергия равна kT . Поскольку энергия одной

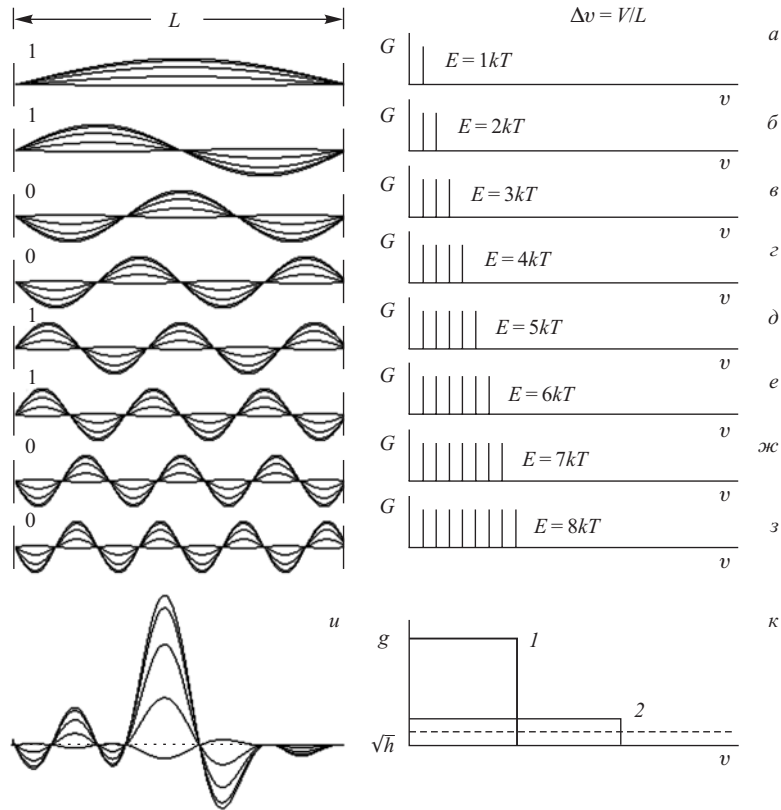


Рис. 9. Стоячие волны (слева) в одном из трех измерений физической «полости». Каждое следующее колебание смещено по частоте на $\nu/2L$, в результате чего образуется непрерывно расширяющийся спектр гармоник. Энергия каждого колебания (каждой степени свободы) равна kT , и при отсутствии ограничений на количество «колебаний» (синусоид, т. е. на ширину спектра) это ведет к бесконечной концентрации энергии в полости. Вид суммарной огибающей гармоник (*u*) зависит от соотношения их фаз (обозначены цифрами 0/1 на рис. *a–з* слева). На рис. *к* показан суммарный, считающийся непрерывным спектр гармоник (*1*) и спектр сигналов разложения (*2* — спектр функции отсчетов). При понижении температуры в полости спектральная плотность амплитуды сигналов разложения уменьшается и достигает порога $\sqrt{\hbar}$, что соответствует «вымерзанию колебаний». В физической классике этот пороговый эффект «окончания делимости» площади сигнала $s = g_0 \approx g(\nu)/2$ не имеет места

стоячей волны и средняя энергия фотона равны, то число фотонов равно числу стоячих волн n . Это значит, что энергия спектра на рис. 9, *к* должна делиться между фотонами на n частей по вертикали: $(g_n/2)^2 n = (g/2)^2$.

Тогда для каждого отдельного фотона формула (33б) принимает вид

$$\left(\frac{g_n}{2}\right)^2 \Delta\nu = g_0^2 \Delta\nu = kT, \quad (33в)$$

где $\Delta\nu = n\delta\nu$ — полная ширина спектра на рис. 9,к, а $g_0 = g_n/2$ — спектральная плотность амплитуды нулевой гармоники [15].

Ограничение сверху на ширину спектра излучения в полости $\Delta\nu$ (при $kT = \text{const}$) может наступить только при ограничении снизу на величину g_0^2 . Это и есть информационный порог, ограничивающий реальное число состояний в полости, поскольку порогом является квадрат площади сигнала, а это и есть g_0^2 [15].

Из (16) и (33б), (33в) видно, что размерность g^2 есть произведение энергии на время, т. е. *действие*. Это дает нам основание на уровне порога заменить g_0^2 на постоянную Планка h (пороговую постоянную электромагнитного излучения).

Тогда, во-первых, получаем для энергии элемента, т. е. фотона, соотношение $E = h\Delta\nu$. Во-вторых, формула (33в), как и (31б), действительно ограничивает ширину спектра излучения в полости, т. е. не допускает «ультрафиолетовой катастрофы», неизбежной в классической физике. Это естественным образом *вытекает* из условия наличия порога у реального сигнала.

С точки зрения математики нет большой разницы в записи энергии фотона обычным для теории сигналов образом: $E = h\Delta\nu$, и по формуле Планка: $E = h\nu$, но физически второе соотношение формально, поскольку привязывает энергию фотона к *одной единственной гармонике*. В формуле Планка частоту ν можно рассматривать как *старшую гармонику* ν_{\max} широкого (от нуля частоты) элементарного сигнала. Важно и то, что соотношение $E = h\Delta\nu$ дает возможность вести анализ не на языке «квантовых осцилляторов», а в терминах длин интервалов, поскольку $\delta t \approx 1/\Delta\nu$, тогда как для формулы Планка $\Delta t = \infty$ (ν есть бесконечная гармоника с $\Delta\nu = 0$).

Очевидно, что при наличии порога «первое приращение» функции (от нуля) и ее абсолютное значение равны: $\delta y = y$. Следовательно, пороговое значение энергии E можно записать как δE , тогда получаем

$$\delta E \delta t = h \quad (34)$$

— физическое пороговое *соотношение неопределимости*. Как будет показано ниже, его не следует смешивать с известным *статистическим* соотношением неопределенности (Гейзенберга) [28].

О неопределенности частоты. Как хорошо известно, ограниченное в пространстве и/или времени синусоидальное колебание имеет неопределенность частоты колебаний, точнее, его спектральная линия слегка размыта и

представляет собой *узкополосный волновой пакет* [13, 15, 29], ширина центрального пика которого (при $g(\nu) = \text{const}$) описывается следующим соотношением:

$$\delta\nu\Delta t \geq 2, \quad \text{где } \delta\nu \ll \nu \quad (35a)$$

(имеется в виду, что количество периодов колебаний намного больше единицы). Знак равенства здесь относится к нулевой разнице фаз, т. е. когда все синусоиды спектра совпадают своими горбами (в точке начала координат). При уменьшении числа колебаний $\delta\nu$ растет и в пределе (когда уже нельзя говорить о периодичности) занимает собой весь спектр от нуля частоты. Тем самым осуществляется переход к функции отсчетов — рис. 3, *в, д*, которая является *широкополосным волновым пакетом*. Тогда (35a) переходит в

$$\Delta\nu\Delta t \geq 1, \quad \text{где } \Delta\nu = \nu_{\text{max}}. \quad (35b)$$

Именно (35b) мы использовали выше при рассмотрении свойств сигналов.

Соотношение (35a) иногда называют соотношением неопределенности [2, 29, 30]. Аналогия с соотношением неопределенности Гейзенберга здесь не совсем правомерна хотя бы потому, что в (35a) не входит энергия, вследствие чего, при заданных $\delta\nu$ и Δt , оно справедливо для *любой* амплитуды сигнала. Если огибающая волнового пакета выдерживается точно, то ограниченность «длины колебаний» не является препятствием для получения высокого разрешения (получения «сверхразрешения» по терминологии [29]).

Когда спектральная плотность энергии узкополосного волнового пакета близка к (пороговой) постоянной Планка $g^2(\nu) = h$, тогда из (16) получаем

$$\delta E = h\delta\nu/2. \quad (36)$$

Теперь, если подставить в (36) $\delta\nu$ из (35a), то получим $\delta E\Delta t = h$, что *лишь похоже* на соотношение неопределенности Гейзенберга или на порог по действию. На самом деле порог определенности *узкополосного* волнового пакета (и, как следствие, сигнала, *модулирующего* несущую гармонику) определяется *порогом по энергии* полуволны, но никак не действием, ибо площадь под огибающей для одного периода колебаний практически нулевая. Это значит, что и действие каждого периода нулевое (см. пункт «Биполярные короткие сигналы»).

Читатель, интересующийся сигналами, получающимися в результате модулирования несущей частоты, может дополнительно познакомиться с так называемой *функцией неопределенности* [31], вводимой в радиолокации при измерении расстояния до наблюдаемого объекта и скорости его движения.

2.2. Энергия как сигнал. Потенциальная энергия W является обобщенным понятием для распределенной в пространстве-времени *взаимодействующей* энергии. При наложении (пересечении) двух однокомпонентных сигналов

энергия взаимодействия есть перекрестный член $2y_1y_2\delta x$ в формуле (2). К такой энергии применимы практически все рассуждения о реальном сигнале (оглабающая сигнала взаимодействия есть корень квадратный от производной W по времени или по пространственной координате).

Если энергия W равномерно распределена в пространственном интервале Δr (линейное изменение W с увеличением r соответствует прямоугольному сигналу — рис. 10, а, б), тогда в движении она обладает *собственным* действием

$$H = (W\Delta r)/V. \quad (37a)$$

При малых скоростях собственное действие может быть весьма значительным, но с ростом скорости оно падает и при $V > (W\Delta r)/h$ неизбежно становится *подпороговым*. Это происходит потому, что при сужении W во времени (с ростом скорости) спектр энергии расширяется, но его плотность амплитуды падает.

Для центрально-симметричного поля вида $W = B/r$, заменяя на пороговом уровне r на Δr , получим

$$H = B/V. \quad (37б)$$

Например, для электрического поля единичного заряда, взяв $H_{\min} = h$, будем иметь $V_{\max} = e^2/(\varepsilon h) = \alpha_e c$, где $\alpha_e = 1/137$ — постоянная «тонкой структуры». Действительно, скорость электрона, наибольшая на первой орбите атома водорода, составляет $c/137$. Вообще говоря, если спектр не является плоским, то W уходит под порог постепенно, начиная с высших гармоник.

В отличие от потенциальной кинетическая энергия является не обобщением, а введенной физиками абстракцией. Сама она не участвует во взаимодействии, но по ее изменению можно судить о том, как работают силы инерции в том или ином взаимодействии.

Как говорилось выше, порог по действию у макроприемника связан с фильтрацией высокочастотной части энергии сигнала; воспринимается им только низкочастотная составляющая энергии. Независимо от конкретной реализации фильтрация производится путем рассеивания энергии «веществом приемника», обладающим инерцией из-за наличия массы. В микромире взаимодействие частиц таким способом приводило бы к исключению подпороговой части потенциала W из взаимодействия и к нарушению законов сохранения энергии и импульса; поэтому порог по действию должен иметь и имеет в своей основе другой физический механизм.

В классической динамике уравнение $F = m(d^2r/dt^2)$ есть следствие точного баланса внешней силы $F = dW/dr$ и силы инерции (второй закон Ньютона) *в каждом моменте времени*. При наличии порога точный классический баланс, выражаемый соотношением $W + E_k = \text{const}$, может не соблюдаться

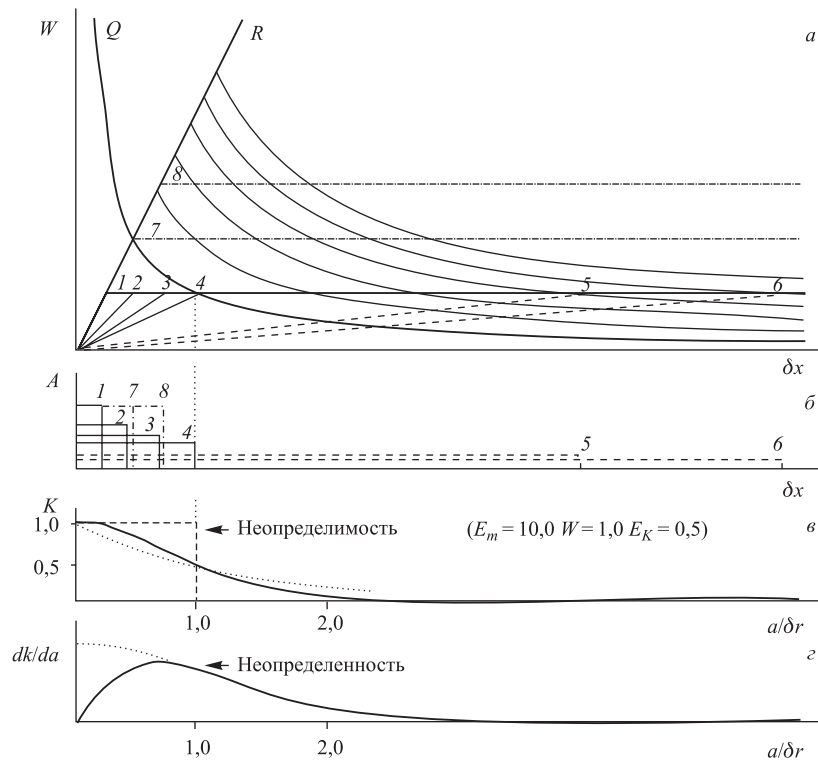


Рис. 10. а) Потенциальный барьер, заключенный в рамки предельного (R) и порогового (Q) ограничений (линии двойной ширины): 1 — при предельно коротком фронте потенциала W (линия тройной ширины) сигнал «торможения» (δx) является подпороговым и эволюционирует в направлении 1–4, пока действие не достигнет порогового значения; 5, 6 — чем ближе фронт потенциала (штриховые линии), тем меньшую часть в нем занимает подпороговая составляющая и тем ближе он по своим свойствам к классическому сигналу; 7, 8 — при росте энергии сигнала 1 его амплитуда не может нарастать в силу предельного ограничения, это соответствует росту фронта потенциала на рис. а по предельной прямой R (и далее — штрихпунктир); линиями единичной ширины показаны 5 первых состояний над пороговой гиперболой; б) сигнал «торможения» для вариантов формы потенциала б–8 близок к производной от потенциала, подпороговые сигналы 1–3 изображены условно (они не имеют формы). Зависимость коэффициента прозрачности барьера от его ширины: в) соотношение неопределенности в форме (34) задает точку по оси абсцисс (пунктирная линия), где барьер должен переходить из непрозрачного состояния в прозрачное; реальная зависимость $K(a/\delta r)$, показанная сплошной линией, достаточно сильно размыва микрощумом; г) дифференциальное распределение микрощума; отчетливо видно, что он имеет постоянную составляющую. Для сравнения пунктирными кривыми показаны соответствующие результаты для классического (гауссова) шума

в пределах пороговых интервалов, *ибо он необнаружим*. Из сказанного следует, что в динамике микромира пороговые явления должны определяться достаточно короткими отклонениями суммарной энергии $E_t = W + E_k$ от постоянной величины. Из (32а) следует, что

$$E_t = W + E_k = E - E_m. \quad (38)$$

«Затягивание» микросигнала. Нарушение баланса $W + E_k = \text{const}$ происходит при пересечении частицей фронта (нарастающей части) потенциального барьера. Когда $E_k < W$ и перепад потенциала весьма короткий, то собственного действия «сигнала торможения», каким является фронт барьера (рис. 10, б), становится недостаточно для остановки частицы, поскольку сигнал слишком быстрый (37). Хотя из-за инертности не происходит классической остановки на фронте барьера при $W(r) = E_k$, тем не менее барьер «обречен» на обнаружение движущейся частицей, и рано или поздно она остановится, как только будет накоплена пороговая величина действия.

Этот процесс накопления *последствия* дополнительно к собственно действию (37) можно представить как эволюцию микросигнала. Можно считать, что микросигнал, сохраняя величину энергии, расширяется с уменьшением амплитуды, за счет чего его действие (37) возрастает до пороговой величины (см. рис. 10, б — форма сигнала показана условно, поскольку он подпороговый). Этот процесс сходен с уширением («размазыванием») дельта-функции Дирака, только здесь дельта-функцию следует считать *квадратичной*, поскольку сохраняется постоянной не ее площадь, а энергия (работает квадрат амплитуды). На графике рис. 4, а процесс уширения или замедления микросигнала выглядит как движение от оси энергии (ниже E_M) горизонтально до пороговой гиперболы.

Если же барьер не очень широкий и действие еще не выросло до пороговой величины, то появляющийся срез барьера служит «сигналом ускорения», который восстанавливает первоначальные параметры движения частицы. В результате частица проходит барьер, так и не успев заметить его.

2.3. Размытие порога шумом неопределенности. Пороговое соотношение неопределенности (34) является точным; это означает, что при увеличении ширины барьера до пороговой величины он должен резко становиться непроницаемым для частиц. Это показано ступенчатой штриховой линией на рис. 10, в, где по оси ординат представлен коэффициент прозрачности барьера, а ось абсцисс задает отношение ширины барьера a к пороговому пространственному интервалу δr .

В реальности *ступенчатых* переходов не должно быть и переход от прозрачного состояния к непрозрачному *должен происходить* и происходит достаточно *плавно*, как показано сплошной линией $K(a/\delta r)$, вычисленной по формуле (5.67) из [22]. Эта кривая является кривой вероятности прохожде-

ния барьера [32], поскольку размытие перепада, случайное по своей природе, *создается шумом*. Классический шум обычно имеет гауссово дифференциальное распределение, правая часть которого показана на рис. 10, *г* пунктирной линией. Построив дифференциальное распределение dK/da (сплошная линия на рис. 10, *г*), нетрудно заметить, что у микрошума кривая распределения сдвинута относительно нуля; это значит, что он имеет достаточно точно определенную *постоянную составляющую*, которая и является порогом.

Если сам порог задается соотношением *неопределенности* (34), то размывающий его шум описывается статистическим соотношением *неопределенности* [22]:

$$\langle(\Delta E_k)^2\rangle\langle(\Delta t)^2\rangle \geq h^2/4 \text{ и } \langle(\Delta E_p)^2\rangle\langle(\Delta r)^2\rangle \geq b^2/4. \quad (39a,б)$$

Здесь в угловых скобках записаны среднеквадратичные отклонения величин. В силу существования (39a,б) появляются понятия относительности к средствам наблюдения и потенциальной возможности, приводящие к вероятностному толкованию квантовой механики [32].

Одна из особенностей микромира как раз и состоит в сочетании статистической *неопределенности* (размытости) с *квантованием*, т. е. с точной заданностью величин. Очевидно, что порог в этом сочетании отвечает за условия квантования.

2.4. Движение тела при наличии пороговых ограничений. Попробуем теперь получить простейшие количественные соотношения для пороговых интервалов в динамике микромира [10].

2.4.1. Пороговые интервалы при движении. Известная формула классической и релятивистской динамики для приращения импульса $F dt = dp$ может быть записана так, чтобы иметь произведения с размерностью действия

$$-dW dt = dp dr \quad \text{или} \quad dE_k dt = dp dr. \quad (40a,б)$$

Уравнение (40б) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dE_k}{dp} = \frac{dr}{dt} = V. \quad (41a)$$

Скорость, так же как и сила, определяется через дифференциалы, поэтому в (41a) она считается практически постоянной, хотя и имеется бесконечно малое изменение потенциала. Для того чтобы получить из обеих частей (40б) пороговые соотношения, надо перейти от дифференциалов к конечным приращениям. Тогда уравнение (41a) уже не является справедливым, поскольку V заметно меняется. Действительно, для конечных отклонений, где скорость

изменяется от V_1 до V_2 , получаем

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta p} = \frac{m(V_1^2 - V_2^2)}{2m(V_1 - V_2)} = \frac{V_1 + V_2}{2} = v, \quad (416)$$

где v (в нерелятивистском приближении) равно средней величине скорости. На пороговом уровне, где одна из скоростей нулевая и $\delta E_k = E_k$, а $\delta p = p$, получаем $v_{II} = E_k/p = V/2$ (фазовую скорость Ψ -волны частицы, см. ниже).

Формула (41a) не переходит в (41б), потому что зависимость $E_k(V)$ является квадратичной, в силу чего производная dE_k/dV пропорциональна скоро-

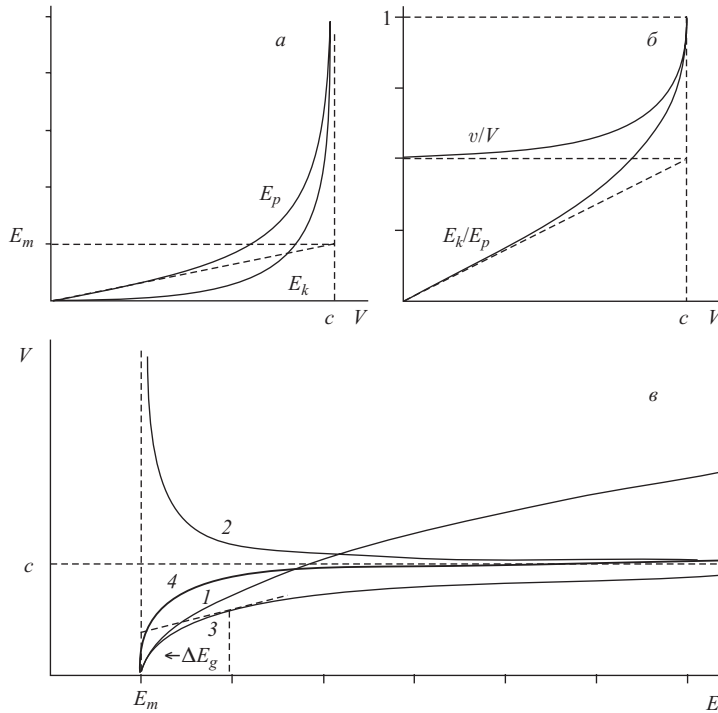


Рис. 11. а) Зависимость E_k и E_p от скорости частицы; б) зависимость от скорости частицы отношения E_k/E_p и отношения фазовой скорости к групповой скорости; в) зависимость фазовой скорости Ψ -волны от энергии частицы: 1 — уравнение Шредингера (погрешность в δr , убывающем при увеличении энергии слишком медленно по сравнению с δt); 2 — уравнение Клейна–Гордона (волна де Бройля имеет ненулевое начальное значение δt); 3 — обобщенное пороговое волновое уравнение (50в), где $v = cE_k/E_p$, штриховыми линиями (для энергии $E_m + \Delta E_g$) показаны фазовые скорости гармоник широкополосного волнового пакета без дисперсии [11]; 4 — зависимость групповой скорости в уравнении (50в), т. е. скорости частицы от ее энергии, здесь $V = c(\partial E_k/\partial E_p)$

сти. В отличие от этого производная $dp/dV = \text{const}$, поскольку зависимость $p(V)$ практически линейна до $V \approx 0,4c$ (рис. 11, *a*). Заметим, что это уже область релятивистских атомных эффектов. Это значит, что пороговое соотношение для импульса может быть записано следующим образом:

$$\delta p \delta r = h \quad \text{или} \quad E_p \delta r = b, \quad (42a, б)$$

где $b = hc$, а $E_p \approx \text{const}$. Величины $E_p \delta r$, превышающие порог, должны интегрально (т. е. по площади) соответствовать надпороговым гиперболам, показанным на рис. 4, *a*.

Если в пределах порогового интервала по r значение $E_p(r)$ существенно изменяется (32б) за счет изменения потенциала $W(r)$, то вместо (42б) следует использовать интегральное уравнение для нахождения δr :

$$b = hc = \int_r^{r+\delta r} E_p(r) dr. \quad (43)$$

Интегральное уравнение (43) есть не что иное, как условие квантования Бора–Зоммерфельда [33]. Смысл его достаточно простой: *в опорных точках*, идущих с шагом $\delta r = h/p$ (при $p = \text{const}$), параметры движения *точно* соответствуют классическим уравнениям.

Во всех промежуточных точках, а число их бесконечно, сказать что-либо определенное о движущемся теле *невозможно в принципе*, в них траектория движения может носить только случайный характер. Таким образом, классическая траектория при детальном наблюдении оказывается как бы пунктирной — определенной лишь в опорных точках (как трек в камере Вильсона). Сказанное относится к *любому типу* движения: оно *локально* неопределимо, но эта неопределимость *не должна выходить за рамки порогового соотношения*. Могут возразить, что при свободном движении частицы, или при ее движении по орбите, неопределенность «глобально» и равномерно распределена по всему пути. Это действительно так, но причина заключается в незнании *начальных условий* движения. Без задания начальных условий решение *классических* уравнений движения будет также полностью неопределенным.

Далее, как это обычно принято, используются «круговые» пороговые постоянные: пространственная $\hbar = b/2\pi$ и временная $\hbar = h/2\pi$ (\hbar представляет « b с чертой») так же, как \hbar есть « h с чертой»); частота также круговая: $\omega = 2\pi\nu$.

2.4.2. Дискретизация энергии в опорных точках. Когда движение ограничено жесткими рамками и последние точно согласованы с положением опорных точек, то и энергия E_k будет задана точно, причем ее можно найти на основе уравнений классической динамики. Если имеются жесткие

«стенки» (бесконечно высокие потенциалы) и расстояние между ними равно L , то условие согласования прямо следует из (43):

$$E_p L = n 2\pi \hbar. \quad (44a)$$

Заменяя в нерелятивистском случае согласно (32в) E_p на $\sqrt{2E_m E_k}$, получим

$$E_k \cong n^2 (2\pi \hbar)^2 / 2E_m L^2. \quad (44б)$$

При движении по орбите (радиусом r заряда e) в атоме водорода классическое соотношение между центробежной и центростремительной силами, как известно, имеет вид

$$\frac{2E_k}{r} = \frac{e^2}{\varepsilon r^2}, \quad (45a)$$

где e — заряд электрона; ε — электрическая проницаемость вакуума. Заменяя L в (44б) на $2\pi r$, будем иметь

$$E_k = E_m (e^2 / \varepsilon n \hbar)^2 / 2. \quad (45б)$$

Соотношение (45a) применимо и для колебательного движения под действием упругой силы $F = \zeta r$ (ζ — модуль упругости). Поскольку два гармонических колебания во взаимно перпендикулярных направлениях образуют круговое движение, то по аналогии с (45a) можно записать

$$\frac{2E_k}{r} = \zeta r, \quad (46a)$$

что при подстановке в (44a) дает

$$E_k = n \hbar \sqrt{\zeta / E_m} / 2; \quad (46б)$$

где n должно пробегать значения с удвоенным шагом: $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ (так как описываются два ортогональных колебания и энергия удваивается).

Формулы (44б), (45б) и (46б), как нетрудно видеть, совпадают с формулами квантовой механики для соответствующих случаев. Приведенные примеры наглядно показывают, как действует пороговое правило нахождения «опорного пункта» движения из бесконечного набора классически возможных решений. Они также подтверждают, что для импульса переход от дифференциалов $dp dr$ к конечным приращениям $\delta p \delta r = h$ действительно возможен.

2.4.3. Порог как условие пространственной дискретности. Поместим в потенциальный «ящик», взяв его для общности трехмерным (полость), не одну, а достаточно большое число частиц: $n_q \gg 1$. Объем полости можно выразить как $n_q \langle \Delta L \rangle^3$, где $\langle \Delta L \rangle$ есть среднее расстояние между частицами.

В силу существования интервала неопределенности (44) частицы могут быть *реально определены* только когда величина ΔL больше, чем это следует из (44б) для $n = 1$.

Действительно, условие теплового «вырождения» газа (см., например, [34]) имеет вид

$$\left(\frac{\pi\hbar^2}{2m}\langle E_k \rangle\right)^{3/2} \geq \langle \Delta L \rangle^3, \quad (47)$$

что является слегка измененной формой записи (44б). Сходным условием $\Delta L \leq (b/kT)$ определяется и разбиравшееся выше «вымерзание излучения» в одномерной полости (33в). Выход за пороговое расстояние соответствует переходу к пространственно разделенным *различимым* сигналам.

Ограничение на плотность появляется тогда, когда полость «сплошь заполняется» частицами, находящимися на пороговом расстоянии друг от друга. Потенциалы взаимодействия частиц представляют собой однокомпонентные сигналы, что и обеспечивает эффект соударения.

Подчеркнем еще раз, что этот пороговый эффект хотя и проявляется в тепловых (неупорядоченных) процессах, сам по себе не носит статистического, шумового характера. Для *упорядоченной* последовательности частиц, движущихся на равном расстоянии ΔL друг от друга, условие минимума интервалов (максимальной пространственной плотности) будет таким же, как и среднее при их случайном распределении по L .

2.4.4. Порог при взаимодействии с потенциальным барьером. Как уже говорилось, в классической динамике ньютоновское уравнение движения вытекает из условия точного баланса изменений потенциальной и кинетической энергии в каждой точке: $dW + dE_k = 0$ (или $W + E_k = \text{const}$). При наличии порога этот баланс в пределах соотношения неопределенности может не соблюдаться, и лишь по достижении границы δr движение приходит в классические рамки. Из сказанного следует, что в динамике микромира пороговые явления должны определяться достаточно короткими отклонениями суммарной энергии $E_t = E_k + W$ (38) от постоянной величины. Эти отклонения могут быть в обе стороны, т. е. δE_t может быть как положительна, так и отрицательна, в силу чего для расчетов следует брать абсолютную величину — $|E_k \pm W|$. Заметим, что в классической динамике случай $[E_k - W(r)] < 0$ — прохождение частицы сквозь фронт потенциального барьера — является недопустимым.

Положим, что имеется нарастающий потенциальный барьер высотой W , на который движется тело с кинетической энергией E_k ; нас будет интересовать случай, когда $E_k < W$. Основываясь на (43), вычислим пороговое

действие барьера на тело:

$$b = hc = \int_0^{\delta r} \sqrt{[E_m + |E_k - W(r)|]^2 - E_m^2} dr. \quad (48a)$$

Здесь $(E_m + E_k)$ — полная энергия тела до барьера, которая численно сохраняется и после барьера.

Если фронт барьера весьма крутой, то тело проходит его практически без торможения и его импульс (т. е. E_p) «гасится» в зоне установившегося значения потенциала $W(r) = W = \text{const}$ (за фронтом барьера). Тогда из (48a) для нерелятивистских скоростей получаем пороговый интервал

$$\delta r = \sqrt{2Em|E_k - W(r)|}. \quad (48б)$$

Если этот интервал намного больше, чем протяженность барьера, то частица проходит барьер насквозь. Если барьер широкий, то пороговый интервал (48б) есть расстояние, на котором движение «приходит в классические рамки», т. е. отрабатывается резко возникший дисбаланс энергии $(W - E_k)$.

2.5. Характер шума в микромире. Внутри пороговых интервалов движение принципиально не определено и траектория движения может носить только случайный характер, т. е. представляет из себя шумовую линию.

Закон Кулона опытно проверен до расстояний в $\sim 10\,000$ раз меньших комптоновского радиуса электрона [35]. Это означает, что энергия электрического заряда как минимум в 100 раз больше энергии $W_e = m_e c^2$, соответствующей массе электрона. Однако она почти целиком (за исключением W_e) поглощается виртуальными электрон-позитронными парами, хаотически возникающими вокруг заряда. Следовательно, шум виртуальных частиц обладает энергией, обратно пропорциональной радиусу, т. е. его энергия прямо пропорциональна ширине спектра волновых чисел или (в движении) ширине спектра частот $\Delta\nu$.

Из сказанного ясно, что для микрошума характеристической константой является величина действия $H_N = \text{const}$, а не величина единичной энергии E_N . Тогда формула, аналогичная (29а,б), для микрошума должна иметь вид

$$\frac{\langle P_N \rangle}{(2\Delta\nu_N)^2} = H_N = \frac{\langle E_N \rangle}{2\Delta\nu_N}. \quad (49a,б)$$

Из (49а) следует, что в отличие от (29) средняя мощность $\langle P_N \rangle$ возрастает существенно круче при уменьшении временных масштабов. Именно поэтому (в отличие от классического шума) микрошум виртуальных частиц неуничтожим. Поскольку соотношение (49б) $\langle \delta E_N \rangle \langle \delta t_N \rangle = H_N$ есть не что

иное, как *соотношение неопределенности* Гейзенберга (здесь $\delta E_N = E_N$, а $\langle \delta t_N \rangle = 1/2\Delta\nu_N$), то можно определенно утверждать, что микрошум является подпороговым и для него $H_N \approx h/2$. Вследствие этого виртуальные частицы принципиально являются необнаружимыми.

Шум в микромире совершенно необходим (его пришлось бы «выдумать» при отсутствии). Поскольку микродвижение информационно определено *только в опорных точках*, то для того чтобы заполнить паузы между ними (не внося информации!), как раз и необходим микрошум, т. е. квантово-механические закономерности *должны* носить статистический характер. Современное знание не дает границы для микрошума в сторону уменьшения пространственно-временных интервалов, и его энергия фактически полагается бесконечной; поиск механизмов ее ограничения требует дополнительных исследований.

2.5.1. Извлечение информации из шума. Предположим, что имеется S возможных состояний (S степеней свободы), а среднеквадратичный уровень шума соответствует Z состояниям. При отсутствии шума каждое измерение может приносить до $\log(S)$ бит информации, а при его наличии всего $\log(S) - \log(Z) = \log(S/Z)$ бит. Если суммировать результаты N измерений, то шумовое распределение будет сужаться обратно пропорционально корню квадратному из N ; т. е. необходимо сделать $N \approx Z^2$ измерений, чтобы получить те же $\log_2(S)$ информации, но путем не «разовой», а длительной, повторяющейся процедуры.

Так называемый набор статистики в процессе проведения экспериментов в физике микромира как раз и необходим для извлечения информации (средних величин) о тех или иных явлениях из микрошума. Из этого следует, что использование микроявлений с шумом для *переработки* информации вряд ли целесообразно (например, «микросумматор» будет давать $2 + 2 = 4$ *только в среднем*). Быстрая переработка информации в микромире возможна только на основе использования *опорных*, «бесшумных» состояний.

2.5.2. Пороговое уравнение для шумовых отклонений. Шумовые отклонения периодичны из-за периодичности опорных точек, в которых шум отсутствует (см. серую зону на рис. 5, *e*). Периодически появляющаяся неопределенность в процессе движения можно описать с помощью волнового уравнения для плотности вероятности шумовых отклонений $\Psi(r, t)$. Рассмотрим для начала более простой, стационарный случай, когда потенциал W не зависит от времени. Тогда переменные в функции плотности вероятности разделяются и $\Psi(r, t) = \Psi_r \Psi_t$ [22]; разделяются также и сами волновые уравнения для Ψ_r и Ψ_t .

Один «горб» колебаний $\Psi(r, t)$ должен соответствовать пространственному или временному пороговому интервалам. С учетом (42б) уравнение для

периодического изменения Ψ по r будет иметь вид

$$\left(\frac{\hbar}{E_p}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \Psi = 0. \quad (50a)$$

Уравнение (50a) для Ψ получено из волнового уравнения для Ψ_r домножением его частей на Ψ_t . Имея в виду, что во времени пороговые явления количественно должны зависеть от изменений суммарной энергии E_t (38), периодические колебания Ψ по t опишем в том же виде:

$$\left(\frac{\hbar}{E_t}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \Psi = 0. \quad (50б)$$

Вычтя (50б) из (50a), получим каноническое волновое уравнение

$$\left(\frac{\hbar}{E_p}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \left(\frac{\hbar}{E_t}\right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (50в)$$

Оно описывает движение лишь *старшей гармоники* волнового пакета $\Psi(r, t)$, движущейся с фазовой скоростью $v = cE_k/E_p$ (41б). Это происходит потому, что параметр \hbar/E_t работает для конечных приращений $\Delta E_k/\Delta E_p$ (41б), а не для дифференциалов (41a). При $V < 0,4c$ отношение фазовой скорости старшей гармоники (Ψ -волны) к групповой скорости пакета (к скорости частицы) есть константа: $v \cong V/2$ (рис. 11, б).

Посмотрим, каким образом из (50) получаются известные уравнения для Ψ -волны. Используя (32в), найдем нерелятивистскую форму (50a):

$$\frac{\hbar^2}{2E_m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + E_k \Psi = 0 \quad (51a)$$

или

$$\frac{\hbar^2}{2E_m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + (E_k + W)\Psi - W\Psi = 0. \quad (51б)$$

Уравнение колебаний (50б) эквивалентно следующему комплексному уравнению в первых производных:

$$\left(\frac{\hbar}{E_t}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\Psi = 0, \quad (52)$$

где i — мнимая единица. В среднем члене (51б) в скобках находится E_t ; взяв $E_t\Psi$ из (52), получим

$$\frac{\hbar^2}{2E_m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - W\Psi = 0, \quad (53)$$

т. е. уравнение Шредингера [22].

Приведем теперь (50) к уравнению Клейна–Гордона (для простоты положим $W = 0$). Раскроем E_p^2 в (50а) как $(E^2 - E_m^2)$:

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + (E^2 - E_m^2) \Psi = 0; \quad (54a)$$

заметим, что в (50б) E_t^2 описывается сходным с E_p^2 образом — как $(E - E_m)^2$. Поскольку для волны де Бройля [27] производные по t связаны с *полной* релятивистской энергией, то в (50б) следует заменить E_t на E , что дает

$$E^2 \Psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad (54b)$$

тогда при подстановке $E^2 \Psi$ в (54а) получаем уравнение Клейна–Гордона

$$(\hbar^2) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \right) - (\hbar^2) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) - E_m^2 \Psi = 0. \quad (55a)$$

Зависимости фазовой скорости Ψ -волны v от энергии «свободной» частицы для уравнений Шредингера, Клейна–Гордона и для уравнения (50) показаны на рис. 11, в. Толстой линией 4 показана та же зависимость для скорости частицы V (групповой скорости пакета гармоник). Как видим, уравнение (50) в нерелятивистской области *совпадает с уравнением Шредингера*; в существенно релятивистской области оно *совпадает с уравнением Клейна–Гордона* (кроме того, (50а) *тождественно* последнему в стационарном случае [11]). В области малого релятивизма уравнения Шредингера и Клейна–Гордона сильно расходятся по частоте колебаний Ψ -волны (в первом уравнении она стремится к нулю, а во втором — к частоте $\omega_m = E_m/\hbar$; именно в силу этого фазовая скорость волны де Бройля стремится к бесконечности при $V \rightarrow 0$, рис. 11, в). Уравнение (50) дает в этой области промежуточное *релятивистское* решение, следовательно, оно *должно обобщать* оба известных уравнения.

Разница между (50) и уравнением Клейна–Гордона, как уже было замечено, в том, что в нем используется $E_t = E - E_m$ (38), а не E [11]. Как известно [22], полное уравнение Клейна–Гордона

$$\left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r} - W \right)^2 - \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - E_m^2 \right] \Psi = 0 \quad (55b)$$

получается из $(E - W)^2 = E_m^2 + E_p^2$ (32б) заменой E_p и E на операторы

$$E_p \Rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (56a)$$

$$E \Rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (56b)$$

Если же вместо (56б) использовать

$$(E - E_m) = \hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (56в)$$

то получим обобщенное пороговое волновое уравнение

$$\left[\left(\hbar \frac{\partial}{\partial r} + E_m - W \right)^2 - \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - E_m^2 \right] \Psi = 0; \quad (57)$$

для этого (32б) должно быть представлено в виде $[(E - E_m) + E_m - W]^2 = E_m^2 + E_p^2$.

2.6. Предельные постоянные центрально-симметричного поля. Рассмотрим теперь кратко предельное соотношение в микромире. Как следует из (21б), произведение пороговой и предельной постоянных равно квадрату энергии в точке пересечения их асимптот на рис. 4. Энергию E_M на рис. 4 можно связать с (полевой) массой $M = E_M c^2$. Запишем формулу для энергии центрально-симметричного поля, используя массу M :

$$W_c = \frac{\gamma \alpha M_2}{r}, \quad (58)$$

где γ — для гравитационного поля есть постоянная тяготения γ_g , а для электрического поля $\gamma_e = e^2 / (\epsilon m_e^2)$, где m_e — масса электрона; α — безразмерный коэффициент, меньший 1, отражающий численное значение конкретной массы, меньшей чем M .

Предельные постоянные. Для гравитационного поля за M логично взять массу Планка

$$M_g = \sqrt{\hbar / \gamma_g}, \quad (59а)$$

так как она объединяет пространственную пороговую постоянную \hbar и показатель крутизны поля γ_g (21б). Тогда для электрического поля по аналогии

$$M_e = \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma_e}} = m_e \sqrt{\frac{\hbar \epsilon}{e^2}} = \frac{m_e}{\sqrt{\alpha_e}}, \quad (59б)$$

где $\alpha_e = 1/137$ — постоянная «тонкой структуры».

Согласно (21б) для статической предельной постоянной D получаем

$$D = (M c^2)^2 / \hbar = c^4 / \gamma. \quad (60а)$$

В динамике предельная мощность

$$P = (M c^2)^2 / \hbar = c^5 / \gamma. \quad (60б)$$

Предельные постоянные не зависят от \hbar , поскольку они не определяются эффектами квантовой механики. Наличие же скорости света в (60) определенно указывает на связь предельных соотношений с релятивизмом.

Отметим еще раз, что предельная постоянная D дает в сочетании с \hbar пороговую электромагнитную единицу длины (δx_M на рис. 4), на несколько порядков большую, чем расстояние, на котором справедлив закон Кулона при столкновениях частиц. Это неудивительно, потому что δx_M соответствует пространственным интервалам, на которых микрошум становится пренебрежимо малым.

Достижимая плотность информации. Зная пороговую и предельную динамические постоянные, легко найти максимально возможную плотность информации [10]

$$\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)_{\max} = \log(2)\sqrt{P/\hbar} = \frac{E_M}{\hbar} \quad (61a)$$

и энергозатраты на 1 бит:

$$\frac{\Delta E}{\Delta I} = \sqrt{P\hbar} = E_M \quad (E_M = Mc^2). \quad (61b)$$

Формулы (61) соответствуют передаче двухуровневого сигнала [0/1] в точке пересечения пороговой и предельной линий. Например, для электромагнитного взаимодействия получаем $9,1 \cdot 10^{21}$ бит/с и $9,6 \cdot 10^{-13}$ Дж/бит. Что касается гравитационного взаимодействия, то цифры, естественно, выше на много порядков: $1,8 \cdot 10^{43}$ бит/с и $1,9 \cdot 10^9$ Дж/бит.

Для сравнения приведем те же величины для макромасштабов [9]. Если $P = 10$ мкВт и $H = 10^{-28}$ Дж · с = $1,5 \cdot 10^5 \hbar$ (выбран диапазон частот $3,2 \cdot 10^{11}$ Гц), то плотность составляет $3,2 \cdot 10^{11}$ бит/с, а энергозатраты $3,2 \cdot 10^{-17}$ Дж/бит. Как видим, в микромире энергозатраты на 1 бит выше, хотя постоянная действия существенно ниже; это является платой за высокую возможную плотность информации, достижимую только при увеличении энергии сигнала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В мире макромасштабов объекты и явления реализуются на носителях, чьи характеристические размеры, величина собственной и шумовой энергии пренебрежимо малы по сравнению с масштабом самих явлений. Это порождает иллюзию того, что описание реальности может быть «точным», и в свое время породило математическую абстракцию непрерывной функции непрерывных переменных, состоящей из бесконечной совокупности точек.

Наличие пороговых и предельных ограничений говорит о том, что мир реальных *упорядоченных* процессов является ограниченным. Наибольшей информационной емкостью (количеством состояний и интенсивностью переходов) обладают процессы, идущие в микромире, но и в них достаточно четко просматриваются информационные ограничения.

Если предельные ограничения легко могут быть представлены в обычной теории сигналов, то пороговые выходят за рамки существующей классической теории. Пороговые ограничения существуют независимо от наличия шумов в силу того, что полоса частот приемника не может быть бесконечно большой, а энергия, подводимая к его входу, не может быть бесконечно малой. Несмотря на наличие определенного порога, достаточно медленный, но очень чувствительный прибор в состоянии регистрировать очень короткие, но надпороговые для него сигналы. Темп регистрации при этом, конечно, будет достаточно низким.

Для обеспечения максимального темпа приема произведение полосы частот прибора на потребляемую им от сигнала «единичную» энергию должно соответствовать мощности принимаемого сигнала. Максимальный темп приема достигается не при кодировании амплитуды, а при двоичном кодировании сигнала во времени — вблизи точки 4 — пересечения пороговой и предельной линий на плоскости параметров $[E, \delta t]$.

Для существенного повышения быстродействия необходимо понижать пространственные размеры элементов и передатчика, и приемника, а значит далеко уходить в область субмикронных размеров. Физические механизмы восприятия микро- и макросигналов несколько различны. Если для макроприемника существует понятие ширины спектра входного сигнала, высокочастотная часть энергии которого фильтруется инертным приемником, то в микромире энергия всегда *воспринимается целиком*, по мере достижения порога по действию. Любая стабильная частица в динамике «обречена на восприятие потенциала», но происходит это не мгновенно, а с некоторой задержкой.

Из наличия порога следует, что при микродвижении имеются периодически повторяющиеся опорные точки различимости классического упорядоченного движения. Между опорными точками существует значительная неопределенность (шум), не несущая информации о движении. Это объясняет парадоксальное (для классики) сочетание вероятностного — «размытого», характера законов квантовой механики с наличием точно заданных уровней энергии и кванта действия.

Известное статистическое *соотношение неопределенности* близко понятию порога и часто используется именно в этом смысле (при этом производится произвольная замена $h/2$ на h). Микрошум действительно порождает размытость, но он не может иметь *постоянной* составляющей. Поэтому следует четко различать статистическое, описывающее игру случая соотношение

неопределенности и точное соотношение неопределимости, порождающее неустраняемый информационный порог.

Существующие между опорными точками шумовые отклонения могут быть описаны в динамике с помощью волнового уравнения с пороговыми интервалами δr и δt в качестве масштабных величин. Микрошум, *так же как и в классике*, может породить случайные исходы событий.

В целом, имеются определенные основания для предположения, что основные эффекты квантовой механики порождаются ограниченностью быстроты «второго рода» при восприятии потенциала как сигнала. Наличие этих эффектов *предсказуемо* (до эксперимента) и достаточно легко *объяснимо* в рамках пороговых соотношений.

Описание физических явлений в микромире не будет полным без учета предельных информационных соотношений. Попытки введения тех или иных предельных соотношений в физике предпринимались неоднократно («фундаментальные» длина и время), однако в них игнорировался частотный, т. е. линейный, характер этих ограничений и в силу этого их зависимость от энергии (21). Если пороговой величиной является спектральная плотность энергии сигнала (во времени — действие), то предельной служит «антисимметричная» ей величина — линейная плотность энергии (во времени — мощность). Важно, что с информационных позиций предельной является не огромная сила, которая весьма кратковременно действует при взаимодействии частиц сверхвысоких энергий, а *регулярная* кулоновская сила (масштаба $\sqrt{137}$ силы для классического радиуса электрона), которая создает *состояния*, стабильные во времени.

Наибольшая плотность информации соответствует переходам между *опорными* состояниями с наибольшей энергией, они не имеют шумовой размытости, поскольку информационно точно определены. Плотность энергии на один бит информации в предельных переходах довольно велика — намного выше, чем в классическом макромире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линдли Д. В. О мере информации, даваемой экспериментом // Математика: Сб. пер. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. № 3.
2. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Физматгиз, 1960.
3. Feinman R. Quantum Mechanical Computers. Plenary Talk Presented to IQEC-CLEO Meeting, Anaheim, June 16, 1984.
4. Кадомцев Б. Б. Динамика и информация // УФН. 1994. Т. 164, № 5. С. 449.
5. Валиев К. А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // УФН. 2005. Т. 175, № 1. С. 4.

6. *Басиладзе С. Г.* Сигнал, данные и информация в физических измерениях // ЭЧАЯ. 2000. Т. 31, вып. 3.
7. *Басиладзе С. Г.* Пороговые и предельные информационные соотношения для сигналов. Препринт НИИЯФ МГУ-2004-20/759. М., 2004.
8. *Басиладзе С. Г.* Физические особенности сложения и разложения сигналов и их информационные следствия. Препринт НИИЯФ МГУ-2006-2/801. М., 2006.
9. *Басиладзе С. Г.* Пороговые ограничения, вносимые приемником в тракт передачи сигналов. Препринт НИИЯФ МГУ-2006-4/801. М., 2006.
10. *Басиладзе С. Г.* Пороговое и предельное информационные ограничения в динамике микромира. Препринт НИИЯФ МГУ-2007-13/834. М., 2007.
11. *Басиладзе С. Г.* Пороговое волновое уравнение динамики микромира. Препринт НИИЯФ МГУ-2007-14/835. М., 2007.
12. *Винер Н.* Кибернетика. М.: Наука, 1983.
13. *Степанов Б. И.* Введение в современную оптику. Минск: Наука и техника, 1989.
14. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М.: ГИТТЛ, 1952.
15. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
16. *Whittaker E. T.* // Proc. Roy. Soc. (Edinburg). 1915. V. 35. P. 181–184.
17. *Hartley R. V. L.* // Bell Syst. Tech. J. 1928. V. 7, No. 3. P. 535–563.
18. *Котельников В. А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Материалы 1-го Всесоюз. съезда по вопросам реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. М.: Ред. связи РККА, 1933.
19. *Shannon C. E.* A Mathematical Theory of Communications // Bell Syst. Tech. J. 1948. V. 27. P. 379–423.
20. *Сиберт У. М.* Цепи, сигналы, системы. М.: Мир, 1988.
21. *Bell T., Witten I. H., Cleary J. G.* // ACM Comp. Surveys. 1989. V. 21, No. 4. P. 557.
22. *Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч.* Квантовая механика. М.: Наука, 1979.
23. *Басиладзе С. Г.* Наносекундная ядерная электроника. М.: Энергоиздат, 1982.
24. *Nyquist H.* Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors // Phys. Rev. 1928. V. 32, No. 1. P. 110–113.
25. *Qilespi A.* Signal, Noise and Resolution in Nuclear Counter Amplifiers. Pergamon Press, 1953.
26. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 8. М., 1966. С. 49.
27. *Бейзер А.* Основные представления современной физики. М.: Атомиздат, 1973.
28. *Де Бройль Л.* Соотношения неопределенностей Гейзенберга. М.: Мир, 1986.
29. *Мешков И. Н., Чирков Б. В.* Электромагнитное поле. Новосибирск, 1987. Т. 1. С. 218; Т. 2. С. 66.

30. *Пейн Г.* Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979.
31. *Макс Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М., 1983. Т. 2. С. 199.
32. *Фок В. А.* Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976.
33. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектры. М., 1956.
34. *Руммер Ю. Б., Рывкин М. Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М., 1977. С. 180.
35. Физика микромира: Маленькая энцикл. / Под ред. Д. В. Ширкова. М.: Сов. энцикл., 1980.