

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ  
ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ РОЖДЕНИЯ  
ДЕТЕКТИРУЕМОЙ ЧАСТИЦЫ  
В УПРУГИХ И КВАЗИУПРУГИХ ПРОЦЕССАХ  
НА ГРУППЕ  $SO_{\mu}(2,1)$

*А. Н. Валл\**, *И. А. Первалова\*\**, *О. Н. Солдатенко\*\*\**

Кафедра теоретической физики, Иркутский госуниверситет, Иркутск, Россия

*А. А. Владимиров\*\*\*\**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	169
ОБОБЩЕНИЕ ЭЙКОНАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА СЛУЧАЙ МАЛЫХ ПРИЦЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И БОЛЬШИХ УГЛОВ РАССЕЯНИЯ	173
СВЯЗЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ПО ПОПЕРЕЧНОМУ ИМПУЛЬСУ И ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ПАРАМЕТРУ ВЫЛЕТА ДЕТЕКТИРУЕМОЙ ЧАСТИЦЫ	210
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	221
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	222

---

\*E-mail: vall@irk.ru

\*\*E-mail: IrenAdler1@rambler.ru

\*\*\*E-mail: o\_castor@mail.ru

\*\*\*\*E-mail: avlad@theor.jinr.ru

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ  
ОПИСАНИЕ ОБЛАСТИ РОЖДЕНИЯ  
ДЕТЕКТИРУЕМОЙ ЧАСТИЦЫ  
В УПРУГИХ И КВАЗИУПРУГИХ ПРОЦЕССАХ  
НА ГРУППЕ  $SO_{\mu}(2,1)$

*А. Н. Валл\**, *И. А. Первалова\*\**, *О. Н. Солдатенко\*\*\**

Кафедра теоретической физики, Иркутский госуниверситет, Иркутск, Россия

*А. А. Владимиров\*\*\*\**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается и анализируется теоретико-групповое обобщение прицельного параметра для упругих процессов  $A + B \rightarrow A + B$ . Обобщенный прицельный параметр отождествляется с вектором максимального сближения двух частиц. Показано, что после стандартной процедуры квантования компоненты вектора прицельного параметра вместе с компонентами относительного орбитального момента образуют алгебру  $SO(3,1)$ , из которой мы выделяем подалгебру  $SO(2,1)$ . Спектр оператора Казимира этой подалгебры определяет допустимые значения квадрата прицельного параметра. Коэффициенты разложения упругой амплитуды как функции на группе  $SO(2,1)$  определяют «профильную функцию» — аналог парциальной волны на группе  $O(3)$ . Само разложение представляет собой обобщение эйконального представления амплитуды и справедливо во всей области изменения значений углов рассеяния. Оно также корректно описывает область малых значений прицельного параметра. Получено решение уравнения унитарности для амплитуды и, как следствие, алгебраическое уравнение на профильную функцию, локальное по прицельному параметру. В рамках полученных решений анализируются простейшие феноменологические модели для сечений (полных, упругих и неупругих).

Следующий шаг в развитии предложенного в работе теоретико-группового подхода связан с построением полного ортонормированного базиса в одночастичном пространстве Фока, в котором частица характеризуется определенным значением энергии и определенным значением «параметра вылета» ее из области рождения относительно некоторой точки « $O$ ». Эта точка связывается с положением частицы-мишени (л. с. к.) или с точкой столкновения пучков (с. п. м.). В этом формализме удастся получить связь функции распределения по параметру вылета частицы  $C$  в процессе  $A + B \rightarrow C + D$  с соответствующей амплитудой рождения этой частицы в интервале углов. Полученная функция распределения несет важную физическую информацию о пространственной структуре области рождения частицы  $C$ .

---

\*E-mail: vall@irk.ru

\*\*E-mail: IrenAdler1@rambler.ru

\*\*\*E-mail: o\_castor@mail.ru

\*\*\*\*E-mail: avlad@theor.jinr.ru

We consider and analyze the group-theoretic generalization of impact parameter for elastic processes  $A + B \rightarrow A + B$ . The generalized impact parameter is identified with the vector of the maximal approach of two particles. We show that operators of components of the impact parameter vector together with operators of orbital momentum form algebra of  $SO(3,1)$  group. Transverse components of impact parameter form subalgebra  $SO(2,1)$ . The spectrum of Casimir operator for that subalgebra defines legitimate value of the impact parameter squared. Expansion coefficients of the elastic amplitude on the  $SO(2,1)$  group define «profile function» — the analog of partial wave on the  $O(3)$  group. The expansion represents the generalization of the eikonal representation of amplitude and is valid in the whole range of the scattering angle. It also describes correctly the range of small impact parameter. We obtain the solution of the unitarity equation for the amplitude, as a consequence we obtain the algebraic equation, local over the impact parameter, on the «profile function». In the context of obtained solution we analyze the simplest models for cross-sections (total, elastic and inelastic).

The next step of the considered group-theoretic method is connected with procedure of building of full-orthonormal basis in the one-particle Fock space, where the particle is characterized by its energy and its «impact parameter» relative to some point « $O$ ». This point is the point of location of the target particle (in laboratory frame) or the location the center mass (in the c. m. s.). In this formalism we obtain the connection of the distribution function on the impact parameter of particle  $C$  in the process  $A + B \rightarrow C + D$  with corresponding amplitude in the momentum representation.

PACS: 11.55.Bq; 11.80.Fv; 11.80.Et; 13.85.Hd; 03.65.Nk

## ВВЕДЕНИЕ

Проблемы физики высоких энергий представляют собой важную часть современного естествознания и порождаются быстрым развитием экспериментальной базы.

Работа посвящена важным проблемам, связанным с исследованием энергетической зависимости сечений (упругих, неупругих и полных) при высоких энергиях, характеристик множественности рождения, а также с описанием пространственной структуры области рождения частиц.

Одним из основных методов изучения структуры и взаимодействия частиц высоких энергий является описание упругих процессов рассеяния адронов на языке «эйкональной фазы» [1, 2]. Основой для понимания физики явлений в этой области энергий и передач является тот экспериментальный факт, что дифференциальное сечение имеет явно выраженный пик «вперед», т. е.  $d\sigma/dt \sim \exp(R^2 t)$ , где  $R^2 \sim 10-17 \text{ (ГэВ}/\hbar c)^{-2}$ . Это означает, что характерные размеры пространственной области, где происходит взаимодействие, имеют порядок  $R \sim 1 \text{ Ф}$ . В то же время длина волны де Бройля сталкивающихся адронов  $\lambda \simeq (0,4\pi/pc) \text{ Ф}$  при  $pc > 1 \text{ ГэВ}$  становится малой по сравнению с размерами области взаимодействия. Поэтому можно ожидать, что в этой области передач и энергий могут быть эффективно использованы оптические методы, развитые в применении к проблемам ядерной физики [3].

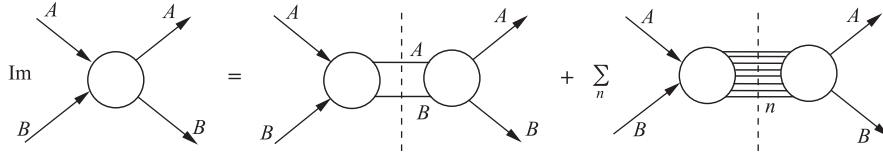


Рис. 1. Условие унитарности

Успешное применение эйконального подхода к упругим процессам основано на конструктивном использовании условия унитарности  $S$ -матрицы [4–6]. На рис. 1 схематически изображено условие унитарности для упругого процесса. Пунктирные вертикальные линии на рисунке означают «сечение» диаграммы, после чего промежуточные состояния соответствуют реальным частицам на массовой поверхности. Соотношение, соответствующее диаграмме (рис. 1), обладает одним замечательным свойством — оно диагонализуется по относительному орбитальному моменту  $l$  сталкивающихся адронов и превращается в алгебраическое соотношение. После этого для упругой амплитуды  $F(q, \theta)$ , где  $q$  — импульс в с. ц. м., будем иметь

$$F(q, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(q) P_l(\cos \theta), \quad (1)$$

где  $a_l(q)$  — парциальная амплитуда, удовлетворяющая условию унитарности

$$\text{Im } a_l(q) = q |a_l(q)|^2 + \frac{1 - \eta_l^2(q)}{4q}. \quad (2)$$

Решение этого уравнения дает выражение для  $a_l(q)$ :

$$a_l(q) = \frac{e^{2i\delta_l(q)} - 1}{2iq}, \quad (3)$$

где фаза рассеяния  $\delta_l(q) = \delta_l + i\chi_l(q)/2$ , здесь  $\delta_l$  — действительная часть фазы рассеяния, а  $\chi_l(q) = 2 \text{Im } \delta_l(q)$  связана с коэффициентом неупругости  $\eta_l(q)$  соотношением

$$\eta_l(q) = e^{-\chi_l(q)}, \quad 0 \leq \eta_l(q) \leq 1.$$

Область изменения  $\eta_l(q)$  —  $0 \leq \eta_l(q) \leq 1$ , при этом  $\eta_l(q) = 1$  соответствует абсолютно упругому рассеянию, а  $\eta_l(q) = 0$  — абсолютному поглощению. Вообще говоря, случай  $\eta_l(q) = 1$  соответствует пренебрежению неупругими

вкладами в мнимую часть амплитуды упругого процесса. Окончательно для  $a_l(q)$  имеем

$$a_l(q) = \frac{\eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2iq}.$$

Такое представление парциальной амплитуды  $a_l(q)$  автоматически приводит к тому, что  $F(q, \theta)$  удовлетворяет условию унитарности.

Учитывая упругое сечение

$$\sigma_{el}(q) = \int |F(q, \theta)|^2 d\Omega = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l(q)|^2,$$

а также соотношение унитарности (2), получим оптическую теорему

$$\text{Im } F(q, \theta = 0) = \frac{q}{4\pi} \sigma_{tot}, \quad \sigma_{tot} = \sigma_{el}(q) + \sigma_{inel}(q),$$

где

$$\sigma_{inel}(q) = \frac{4\pi}{q^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1 - \eta_l^2(q)}{4}. \quad (4)$$

Это хорошо известная [7] квантово-механическая феноменология учета неупругих вкладов в амплитуду упругого процесса. Важным для нас является переход от представления (1)–(4) к эйкональному представлению, т. е. переход от парциальной фазы  $\delta_l(q)$  к фазе  $\delta(q, b)$ , где  $b$  — прицельный параметр.

Эйкональная фаза  $\chi(q, b) = 2i \text{Im } \delta(q, b)$  однозначно связана с неупругой функцией перекрытия  $G_{inel}(q, b)$ :

$$G_{inel}(q, b) = \frac{1}{4} (1 - e^{-2\chi(q, b)}) = q \{ \text{Im } a_l(q, b) - q |a_l(q, b)|^2 \}.$$

Именно эта функция определяет пространственную структуру области столкновения. Она равна нулю в области энергий, меньших пороговой энергии открытия неупругих каналов. Изучению функции  $G_{inel}(q, b)$  посвящено много обзорных и оригинальных работ [8–16]. Одним из основных результатов является утверждение, что среднее число частиц, рожденных при прицельном параметре  $b$ , пропорционально неупругой функции перекрытия

$$\langle n(q, b) \rangle = \text{const}(q) \cdot G_{inel}(q, b).$$

Все вышеизложенное относительно эйконального представления основано на квазиклассическом приближении  $\hbar l \simeq qb$  и асимптотическом соотношении

$$P_l(\cos \theta) \simeq J_0(bq_{\perp}), \quad q_{\perp} = q \sin \theta \quad \text{при } \theta \sim 0, \quad bq \gg 1.$$

При этом представление амплитуды (1) переходит в эйкональное представление [1]

$$F(q, \theta) = 2q^2 \int_0^\infty a(q, b) J_0(bq_\perp) b db. \quad (5)$$

Считается, что профильная функция  $a(q, b)$  удовлетворяет соотношению унитарности (2) и, следовательно, имеет представление (3). Однако проблема, возникающая при этом, заключается в том, что эйкональная амплитуда (5) с профильной функцией  $a(q, b)$  перестает удовлетворять уравнению унитарности. Причиной является то, что на физическом интервале значений поперечного импульса функции Бесселя  $J_0(bk_\perp)$  не образуют ортогональной системы, т. е.

$$\int_0^q J_0(b_1 k_\perp) J_0(b_2 k_\perp) k_\perp dk_\perp \neq \delta(b_1 - b_2).$$

Кроме того, как следует из (5), профильная функция  $a(q, b)$  определяется через амплитуду  $F(q, \theta)$  обратным преобразованием

$$a(q, b) = \frac{1}{2q^2} \int_0^\infty F(q, \theta) J_0(bq_\perp) q_\perp dq_\perp. \quad (6)$$

При этом интегрирование происходит как по физической области углов, так и по нефизической ( $-\infty < \cos \theta < 1$ ) [17]. Если предположить полиномиальную ограниченность  $F(q, \theta)$  при  $\cos \theta \rightarrow -\infty$ , например,  $F(q, \theta) \sim t^{\alpha_R(s)}$  (редже-поведение), то это автоматически приведет к сингулярности амплитуды  $a(q, b)$  при  $b \rightarrow 0$ , а именно

$$a(q, b) \sim \frac{1}{b^{\alpha_R(s)+1}} \quad \text{при } b \rightarrow 0,$$

что противоречит условию унитарности. Эта сингулярность отмечалась многими авторами (например, в [18–22]), хотя последовательного решения этой проблемы в этих работах не проводится.

Эта проблема решается в рамках теоретико-группового обобщения прицельного параметра. В нашей работе предложен формализм описания амплитуды упругого процесса в терминах профильной функции на группе  $SO(2,1)$ , являющейся аналогом парциальной амплитуды  $a_l(q)$  [23]. При этом формализм не предполагает перехода к квазиклассическому пределу больших прицельных параметров и малых углов рассеяния. Это позволяет корректно описать область малых прицельных параметров, определяющих в основном рассеяние в заднюю полусферу [24].

Другой важной проблемой физики высоких энергий является изучение пространственной структуры области столкновения частиц (пучков). Например, в RHIC (коллайдер тяжелых релятивистских ионов, Брукхейвен) при энергиях сталкивающихся ядер золота  $\sqrt{s} \sim 200$  ГэВ на 1 протон рождается порядка  $10^3$  частиц [25]. Эволюция рождения этих частиц до асимптотически свободного состояния предположительно проходит от стадии кварк-глюонной плазмы (если реализуется механизм деконфайнмента) до стадии адронизации. Детектируемая частица, вылетающая из этой области, несет определенную информацию о физическом состоянии области ее рождения. С другой стороны, экспериментально измеряются лишь энергетические и угловые распределения этой частицы, и необходим определенный способ (метод) извлечения информации о пространственной структуре области рождения частиц по данным эксперимента.

В работе в рамках теоретико-группового подхода удается построить одно-частичное пространство Фока, в котором в роли динамической переменной, характеризующей частицу, выступает параметр «вылета». Он характеризует радиус рождения этой частицы, а функция распределения по этому параметру является естественной физической характеристикой пространственной структуры области столкновения [24, 26].

В работе получена точная связь между функцией распределения по параметру вылета и амплитудой рождения частицы  $C$  в интервале углов в процессе  $A + B \rightarrow C + D$ .

## 1. ОБОБЩЕНИЕ ЭЙКОНАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА СЛУЧАЙ МАЛЫХ ПРИЦЕЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И БОЛЬШИХ УГЛОВ РАССЕЯНИЯ

Как уже указывалось во введении, интерес к представлению прицельного параметра связан с физикой частиц высоких энергий и рассеяния ядер. На строящемся в настоящий момент ускорителе LHC будут получены экспериментальные данные по упругим, неупругим и полным сечениям  $pp$ -рассеяния до энергий  $\sqrt{s} \sim 14$  ТэВ. Эти данные должны прояснить природу провала в дифференциальном сечении, т.е. появление структуры в дифференциальном сечении упругого  $pp$ -рассеяния при малых углах рассеяния. Кроме того, одним из самых интересных вопросов является асимптотическое поведение сечений при больших энергиях, выход полного сечения на фруассаровский предел, а также поведение отношения  $\sigma_{el}/\sigma_{tot}$  при  $s \rightarrow \infty$ . Большой интерес представляет механизм возможного превышения этого отношения от значения  $\sigma_{el}/\sigma_{tot} = 1/2$  (модель черного диска). Ответы на эти вопросы тесно связаны с унитаризацией амплитуды упругого рассеяния. Как правило, при унитаризации этой амплитуды используют эйкональное приближение.

Выход за рамки эйконального приближения связан в первую очередь с геометрической интерпретацией параметра  $b$  в представлении (5) в области его малых значений. В этой области фазовый объем двухчастичной системы порядка  $\hbar^3$  и классические представления перестают быть справедливыми. Последовательному рассмотрению и решению этой проблемы посвящена эта глава.

В работе мы получаем решение уравнения унитарности в терминах коэффициентов разложения упругой амплитуды на группе  $SO_\mu(2,1)$ . Такое разложение позволяет обобщить эйкональный формализм прицельного параметра на область больших углов и малых фазовых объемов системы сталкивающихся частиц. Мы исходим из классического определения вектора максимального сближения между двумя свободными бесспиновыми частицами. Этот вектор выражается через относительный орбитальный момент и относительный импульс в с. ц. м. этих частиц и при определенной ориентации интерпретируется как классический прицельный параметр. Далее мы переходим к квантовому описанию и строим волновую функцию двухчастичного состояния с определенным прицельным параметром. Оказывается, что необходимым условием существования однозначных, непрерывных и интегрируемых в  $L_2$  решений является условие

$$b^2 \geq \hbar^2/4q^2,$$

где  $q$  — импульс в с. ц. м.;  $b$  — прицельный параметр;  $\hbar$  — постоянная Планка, т. е. при фиксированной энергии существует минимальный прицельный параметр  $b^2 = \hbar^2/4q^2$ . Это условие естественно рассматривать как соотношение неопределенности в  $b$ -плоскости.

В результате для волновой функции двухчастичного состояния в импульсном представлении получается регулярное решение в виде

$$\Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp) = \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} \right),$$

где  $P_\nu(z)$  — функция Лежандра;  $\mu = (q^2 b^2 - 1/4)^{1/2}$ ;  $q_\perp = q \sin \theta$  — поперечная компонента импульса;  $\theta$  — угол рассеяния. Разложение по этим функциям известно как разложение Фока–Меллера [27]. В пределе малых углов это разложение переходит в представление Фурье–Бесселя для упругой амплитуды (эйкональное представление).

**1.1. Классическое описание прицельного параметра.** Рассмотрим две свободные бесспиновые частицы, которые движутся с произвольными начальными условиями. Их координаты в любой момент времени  $t$  определяются



векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \frac{\mathbf{p}_1}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2}}(t - t_0) + \mathbf{x}_1(t_0), \\ \mathbf{x}_2(t) &= \frac{\mathbf{p}_2}{\sqrt{p_2^2 + m_2^2}}(t - t_0) + \mathbf{x}_2(t_0), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $p_{1,2}$  — импульсы частиц;  $m_{1,2}$  — массы частиц. Расстояние между частицами  $D(t)$  определяется компонентами вектора  $\Delta \mathbf{r}(t)$ :

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{u}(t - t_0) + \boldsymbol{\xi}, \quad (8)$$

и равно  $D(t) = (\Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{r})^{1/2}$ . Здесь  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_1(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0)$  — относительная координата,  $\mathbf{u} = (\mathbf{p}_1/E_1 - \mathbf{p}_2/E_2)$  — относительная скорость,  $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m_1^2}$ ,  $E_2 = \sqrt{p_2^2 + m_2^2}$  — энергии частиц.

В какой-то момент времени  $t = \tau$  расстояние  $D(\tau)$  будет иметь минимальное значение. Время  $\tau$  определяется экстремальным условием

$$\left. \frac{d}{dt} D(t) \right|_{t=\tau} = \frac{1}{D(\tau)} \left( \Delta r_i \frac{d}{dt} \Delta r_i \right) \Big|_{t=\tau} = 0.$$

Используя соотношение (8), получим

$$\tau = t_0 - \frac{(\mathbf{u} \boldsymbol{\xi})}{u^2}.$$

Подставляя это выражение в (8), мы получаем выражение компонент вектора максимального сближения  $d_i$ :

$$d_i = \Delta r_i(\tau) = -\frac{u_i}{u^2}(\mathbf{u} \boldsymbol{\xi}) + \xi_i. \quad (9)$$

Введем относительный орбитальный момент в с. ц. м.,  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}$ ,

$$L_i = \varepsilon_{ijk} \xi_j q_k. \quad (10)$$

Тогда выражение (9) можно преобразовать к другому виду [28]:

$$d_i = \frac{1}{q^2} \varepsilon_{ijk} q_j L_k. \quad (11)$$

Компоненты  $d_i$  могут служить определением прицельного параметра столкновения двух частиц в с. ц. м. Выражение (11) мы примем за основу при построении квантового аналога прицельного параметра. Переход к квантовому описанию заключается в стандартной процедуре замены  $C$ -чисел в соотношении (11) соответствующими операторами и выделении в операторе  $d_i$  эрмитовой части.

**1.2. Квантование компонент вектора максимального сближения  $d_j$ .** Стандартная процедура квантования, основанная на каноническом коммутаторе между относительной координатой и относительным импульсом,

$$[\xi_i, q_j] = i\hbar\delta_{ij},$$

приводит к следующей системе коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [d_i, d_j] &= \frac{-i\hbar}{q^2}\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, d_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}d_k, \quad [L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [d_i, q^2] = 0, \\ [d_i, q_j] &= i\hbar\delta_{ij} - \frac{i\hbar}{q^2}q_iq_j, \quad [d_i, q_jq_k] = i\hbar\delta_{ij}q_k + i\hbar\delta_{ik}q_j - \frac{2i\hbar}{q^2}q_iq_jq_k \dots \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (12)$$

(далее везде  $\hbar = 1$ ). Здесь  $d_i = \frac{1}{q^2}(\varepsilon_{ijk}q_jL_k - iq_i)$ , появление дополнительного слагаемого связано с требованием эрмитовости этого оператора  $d_i = (d_i)^+$ . Отсюда следует, что операторы  $d_i$  и  $L_j$  на сфере  $q^2 = \text{const}$  образуют алгебру  $SO(3,1)$ . При этом оператор Казимира этой алгебры вырождается в число

$$\hat{C} = d^2 - \frac{1}{q^2}L^2 \equiv \frac{1}{q^2}.$$

Нетривиальную подалгебру образуют операторы  $d_1, d_2, L_3$ :

$$[d_1, d_2] = -\frac{i}{q^2}L_3, \quad [d_1, L_3] = -id_2, \quad [d_2, L_3] = id_1. \quad (13)$$

Это алгебра группы  $SO(2,1)$ . Ее свойства подробно исследованы и представлены в монографии И. Я. Виленкина [29], а также в работе [30]. Показано, что эта группа является некомпактной и обладает основной непрерывной серией унитарных представлений и дискретной конечномерной серией неунитарных представлений в пространстве квадратично-интегрируемых функций. Оператор Казимира этой алгебры равен

$$\hat{K} = d_{\perp}^2 - \frac{1}{q^2}L_3^2, \quad d_{\perp}^2 = d_1^2 + d_2^2, \quad [d_{1,2}, \hat{K}] = 0, \quad [d_3, \hat{K}] \neq 0. \quad (14)$$

**1.3. Реализация алгебры  $SO(2,1)$  в пространстве перпендикулярного импульса  $\mathbf{q}_{\perp}$ .** Построим базисные функции на группе, реализующие состояния с определенным значением оператора Казимира  $\hat{K}$  и определенным значением третьей проекции момента импульса  $L_3$ . С этой целью введем в импульсном (групповом) пространстве сферические координаты

$$q_1 = q \sin \theta \cos \varphi, \quad q_2 = q \sin \theta \sin \varphi, \quad q_3 = q \cos \theta. \quad (15)$$

Используя определение операторов  $d_i$ ,  $L_3$  (12), нетрудно получить их явный вид

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{i}{q} \left( \cos \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \theta \cos \varphi \right), \\ d_2 &= \frac{i}{q} \left( \sin \varphi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \theta \sin \varphi \right), \\ L_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Оператор Казимира равен

$$\hat{K} = \frac{-1}{q^2} \left( \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 3 \cos \theta \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2 \cos^2 \theta \right).$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\hat{K}\Psi = b^2\Psi, \quad L_3\Psi = m\Psi. \quad (16)$$

Исходя из способа введения оператора Казимира (14) мы будем интерпретировать  $b^2$  как квантово-механический аналог квадрата прицельного параметра.

Для анализа решений возьмем частный случай  $m = 0$ . Тогда будем иметь одно обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(1 - x^2)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{(1 - x^2)^2}{x} \frac{df}{dx} + 4q^2 b^2 f = 0, \quad (17)$$

где

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} f(\theta), \quad x = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Это уравнение легко приводится к уравнению Римана и последующей заменой переменных к уравнению для сферических функций. Точка  $\theta = \pi/2$  является особой точкой уравнения (17). Регулярным и непрерывным решением в области  $0 \leq \theta < \pi/2$  является функция конуса

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{1}{\cos \theta} \right), \quad (18)$$

где  $P_\nu(z)$  — функция Лежандра,  $\mu = (q^2 b^2 - 1/4)^{1/2}$ . Параметр  $\mu$  характеризует непрерывное унитарное представление группы  $SO(2,1)$ , унитарность представления требует действительности этого параметра. Поэтому мы получаем ограничение на спектр прицельного параметра  $b^2 q^2 \geq 1/4$ .

Чтобы найти решение в задней полусфере, заметим, что уравнение (17) инвариантно относительно преобразования  $x \rightarrow 1/x$ , что соответствует преобразованию  $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$ . Поэтому регулярное и непрерывное решение в области  $\pi/2 < \theta \leq \pi$  есть

$$\Psi(\theta) = -\frac{1}{\cos \theta} P_{-1/2+i\mu} \left( -\frac{1}{\cos \theta} \right). \quad (19)$$

Объединяя (18) и (19), получим окончательно во всей области значения  $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned} \Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp) &= \frac{1}{|\cos \theta|} P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{1}{|\cos \theta|} \right) = \\ &= \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Это есть волновая функция в импульсном представлении, описывающая двухчастичное состояние с определенным параметром максимального сближения  $b$  (прицельный параметр) и проекцией относительного момента количества движения на ось  $z$ , равной нулю ( $m = 0$ ). Как уже отмечалось, из полученного решения следует важное физическое ограничение на спектр оператора  $\hat{K}$

$$b^2 \geq \frac{\hbar^2}{4q^2}. \quad (21)$$

Это предельное ограничение на фазовый объем состояния с определенным значением  $b$  и  $q$ , порождаемое квантово-механической природой координат  $d_i$ .

Обобщение на случай  $m \neq 0$  не вызывает затруднений, и аналогичный анализ приводит к следующему выражению для решения уравнения (16):

$$\Psi_\mu^m(\mathbf{q}_\perp) = \frac{1}{|\cos \theta|} P_{-1/2+i\mu}^{|m|} \left( \frac{1}{|\cos \theta|} \right) e^{im\varphi}, \quad (22)$$

где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  — азимутальный угол в плоскости поперечного импульса (15),  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Совокупность функций (22) образует полный ортонормированный базис. Разложение по этому базису известно как разложение Фока–Меллера, и для случая  $m = 0$  подробно исследовано Фоком [27]. В этой работе получены соотношения полноты и ортогональности. Их можно представить в следующем

виде:

$$\int_0^{\pi/2} \Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp) \Psi_\nu(\mathbf{q}_\perp) \sin \theta d\theta = \frac{1}{\mu \operatorname{th}(\pi\mu)} \delta(\mu - \nu), \quad (23)$$

$$\int_0^\infty d\mu \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp) \Psi_\mu(\mathbf{q}'_\perp) = \delta(|\cos \theta| - |\cos \theta'|). \quad (24)$$

Последнее равенство отображает известное соотношение между функциями конуса

$$\int_0^\infty d\mu \mu \operatorname{th}(\pi\mu) P_{-1/2+i\mu}(x) P_{-1/2+i\mu}(y) = \delta(x - y). \quad (25)$$

Таким образом, система функций  $\Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp)$  образует полную ортогональную систему. Эта система полна в каждом из двух подпространств  $q_3 > 0$  и  $q_3 < 0$  импульсного пространства независимо.

Как будет показано в разд. 2, это является следствием инвариантности этих подпространств при унитарных преобразованиях с генераторами алгебры (13)

$$q'_i = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}} q_i e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}}.$$

Рассмотрим амплитуду упругого двухчастичного процесса  $F(\mathbf{q})$ , где  $\mathbf{q}$  — импульс рассеянной частицы в с. ц. м. Будем рассматривать ее как функцию на группе  $SO(2,1)$  (13). В соответствии с этим введем амплитуды рассеяния в переднюю и заднюю полусферы  $F^{(\pm)}(\mathbf{q})$

$$F^{(\pm)}(\mathbf{q}_\perp) = F(\mathbf{q}_\perp, q_3 = \pm\sqrt{q^2 - q_\perp^2}). \quad (26)$$

Считая, что  $F^{(\pm)}(\mathbf{q})$  не зависит от полярного угла  $\varphi$ , разложим эти амплитуды как функции на группе по полной системе  $\Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp)$ :

$$F^{(\pm)}(\mathbf{q}_\perp) = \int_0^\infty \Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp) u_q^{(\pm)}(\mu) \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu. \quad (27)$$

Коэффициенты разложения  $u_q^\pm(\mu)$  будем называть профильной функцией на группе  $SO(2,1)$ . Обратное преобразование следует из соотношений (23), (24) и имеет вид

$$u_q^{(\pm)}(\mu) = \int_0^{\pi/2} F^{(\pm)}(\mathbf{q}_\perp) \Psi_\mu(\mathbf{q}_\perp) \sin \theta d\theta. \quad (28)$$

Связь  $u_q^\pm(\mu)$  с эйкональной профильной функцией  $a(q, b)$  (5) следует из асимптотического разложения функции конуса [27]

$$P_{-1/2+i\mu}(\operatorname{ch} \alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}} \left\{ J_0(\mu\alpha) + \frac{1}{8\mu} \left( \operatorname{cth} \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) J_1(\mu\alpha) + \dots \right\}.$$

Отсюда

$$P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} \right) = J_0(bq_\perp) + O\left(\frac{q_\perp}{q}\right) + O\left(\frac{1}{bq}\right).$$

Тогда, сравнивая (5) и (27), получим

$$u_q^{(+)}(\mu) = 2a(q, b) + O\left(\frac{1}{bq}\right).$$

**1.4. Простейшие модели профильной функции  $u_q^\pm(\mu)$ .** Рассмотрим простую модель профильной функции (28), соответствующую  $t$ -канальному обмену частицей с массой  $M$ . С точностью до нормировки амплитуда упругого рассеяния равна

$$F(\mathbf{q}) = \frac{g}{t - M^2}, \quad (29)$$

где  $M$  — масса обменной частицы;  $g$  — эффективная константа взаимодействия, а  $t = -2q^2(1 - \cos \theta)$  — передача импульса в с. ц. м. Это выражение можно представить в виде

$$F(\mathbf{q}) = \frac{g}{q_3/q - z_0},$$

где  $z_0 = 1 + M^2/2q^2$  — граница эллипса Лемана.

Разложим конечный импульс  $\mathbf{q}$  на поперечную и продольную части по отношению к начальному импульсу, тогда из определения (26) получим

$$F^\pm(\mathbf{q}) = \frac{-g}{z_0 \mp |\cos \theta|}.$$

Подставляя это выражение в (28), получим для профильной функции  $u_q^\pm(\mu)$  выражение

$$u_q^\pm(\mu) = -\frac{g}{z_0} \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\mu)} P_{-1/2+i\mu} \left( \mp \frac{1}{z_0} \right). \quad (30)$$

Здесь был использован аналог формулы Неймана для функции конуса [31,32]

$$P_{-1/2+i\mu}(-x) = \frac{\operatorname{ch}(\pi\mu)}{\pi} \int_1^\infty \frac{P_{-1/2+i\mu}(u_0)}{u_0 - x} du_0, \quad x < 1.$$

Из (30) следует, что профильная функция имеет структуру

$$u_q^\pm(\mu) = \frac{\tilde{u}_q^\pm(\mu)}{\operatorname{ch}(\pi\mu)},$$

где  $\tilde{u}_q^\pm(\mu)$  — достаточно хорошая функция  $\mu$ . Этот результат (выделение экспоненциального падения) не является следствием борновского приближения, а носит общий характер, так как переход к полной амплитуде сводится к интегрированию по  $z_0$  с учетом эллипса Лемана в плоскости косинуса угла рассеяния. Таким образом, профильная функция обладает кинематическими полюсами. Это играет важную роль при описании рассеяния в области больших поперечных импульсов.

Рассмотрим асимптотическое поведение  $u_q^\pm(\mu)$  при  $\mu \rightarrow \infty$ . При больших  $\mu$  и области изменения аргумента  $-1 < x < 1$  функция конуса ведет себя как

$$P_{i\mu-1/2}(x) \sim \exp(\mu \arccos x).$$

В нашем случае  $x = \pm 1/z_0$ . При больших энергиях  $z_0 \sim 1$ , поэтому используем разложения

$$\arccos\left(-\frac{1}{z_0}\right) = \pi - \frac{M}{q} + O\left(\frac{M^2}{q^2}\right), \quad \arccos\left(+\frac{1}{z_0}\right) = \frac{M}{q} + O\left(\frac{M^2}{q^2}\right).$$

Таким образом, получаем при  $\mu \rightarrow \infty$

$$u_q^+(\mu) \sim \exp\left(-\mu \frac{M}{q}\right), \quad u_q^-(\mu) \sim \exp\left[-\mu \left(\pi - \frac{M}{q}\right)\right].$$

При больших энергиях  $\mu \sim bq$ . Поэтому окончательно асимптотическое поведение профильных функций  $u_q^\pm(\mu)$  определяется массой  $M$  и энергией рассеиваемой частицы

$$u_q^+(\mu) \sim e^{-Mb}, \quad u_q^-(\mu) \sim e^{-\pi qb} e^{Mb}, \quad bq \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Асимптотическое поведение профильных функций  $u_q^+(\mu)$ , полученное выше, носит общий характер и справедливо для любого упругого процесса, а также при рассеянии во внешнем стационарном поле. Это есть следствие дисперсионных соотношений по углу рассеяния, представления Грибова–Фруассара [33] и существования эллипса Лемана, большая полуось которого определяется параметром  $z_0$ . Величина  $M$  имеет смысл низшей промежуточной массы обменной частицы. В асимптотическом поведении профильных функций  $u_q^-(\mu)$  в (31) массу  $M$  нужно заменить на массу доминирующей частицы в  $t$ -канале.

На рис. 2 приведен характерный вид  $u_q^\pm(\mu)$  (30).

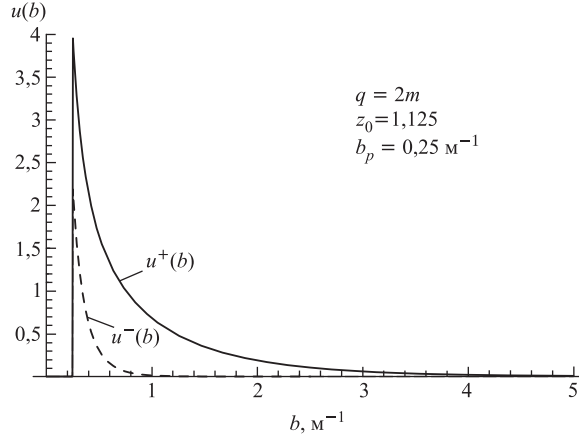


Рис. 2. Профильная функция одночастичного обмена в переднюю и заднюю полусферы

**1.5. Унитарность амплитуды упругого рассеяния.** Как следует из изложенного выше, разложение амплитуды на группе  $SO(2,1)$  приводит к появлению сигнатуры, соответствующей рассеянию в переднюю и заднюю полусферы. При этом нетрудно получить, что для произвольной функции  $\Phi(\mathbf{q})$  справедливо интегральное соотношение

$$\int \Phi(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int q^2 dq d\Omega \Phi(\mathbf{q}) = \sum_{\epsilon=\pm 1} \int q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}_{\perp}, \epsilon\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}). \quad (32)$$

Здесь и далее

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad d\Omega_{\mathbf{q}} = \frac{1}{q\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}} d\mathbf{q}_{\perp}.$$

Для получения следствий унитарности  $S$ -матрицы нам необходимо иметь разложение единичного оператора в полном пространстве Фока в импульсном представлении

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \sum_s \int \left( \prod_{i=1}^s d\mathbf{q}_i \right) d\mathbf{q} |\{q_s\}; \mathbf{q}\rangle \langle \{q_s\}; \mathbf{q}| = \\ &= \sum_s \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \left( \prod_{i=1}^s d\mathbf{q}_i \right) q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} \times \\ &\quad \times \left| \{q_s\}; \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right\rangle \left\langle \{q_s\}; \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon\sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right|, \quad (33) \end{aligned}$$



где

$$\left| \{q_s\}; \mathbf{q}_\perp, q_3 = \epsilon \sqrt{q^2 - q_\perp^2} \right\rangle \equiv \left| \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_s; \mathbf{q}_\perp, q_3 = \epsilon \sqrt{q^2 - q_\perp^2} \right\rangle,$$

$(s + 1)$ -частичное состояние:

$$\left| \{q_s\}; \mathbf{q} \right\rangle = a^+(\mathbf{q}_1) a^+(\mathbf{q}_2) \cdots a^+(\mathbf{q}_s) a^+(\mathbf{q}) |0\rangle,$$

где  $a^+$  и  $a^-$  — операторы рождения и уничтожения соответственно, удовлетворяющие соотношению  $[a(\mathbf{q}), a^+(\mathbf{p})] = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p})$ .

Унитарность  $S$ -матрицы означает, что  $S^+ S = I$ . Это условие в терминах оператора  $F$ , где  $S = I + iF$ , имеет вид

$$i(F^+ - F) = F^+ F. \quad (34)$$

Представим разложение (33) единичного оператора  $I$  в виде

$$I = I_{AB} + I_{\text{inel}},$$

где

$$I_{AB} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{k}_1 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} \left| \mathbf{k}_\perp, \epsilon \sqrt{k^2 - k_\perp^2}; \mathbf{k}_1 \right\rangle \left\langle \mathbf{k}_\perp, \epsilon \sqrt{k^2 - k_\perp^2}; \mathbf{k}_1 \right|$$

описывает вклад двухчастичных состояний  $|A, B\rangle$ , а

$$I_{\text{inel}} = \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i |\{\mathbf{k}_i\}\rangle \langle \{\mathbf{k}_i\}|.$$

В интеграле  $I_{AB}$  импульсы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$  — это импульсы частиц  $A$  и  $B$  соответственно. В интеграле  $I_{\text{inel}}$  в промежуточных состояниях нет двухчастичного состояния  $|A, B\rangle$ . Представленную таким образом единицу  $I$  вставим в соотношение для  $F$  (34):

$$i(F^+ - F) = F^+ I F.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} i(F^+ - F) &= F^+ I_{\text{inel}} F + \\ &+ \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{k}_1 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} F^+ \left| \mathbf{k}_\perp, \epsilon \sqrt{k^2 - k_\perp^2}; \mathbf{k}_1 \right\rangle \left\langle \mathbf{k}_\perp, \epsilon \sqrt{k^2 - k_\perp^2}; \mathbf{k}_1 \right| F. \end{aligned}$$

От этого операторного соотношения возьмем матричный элемент между двух-частичными состояниями  $|\text{in}\rangle$  и  $\langle f|$ , соответствующими начальному и конечному состоянию частиц  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} i(\langle f|F^+|\text{in}\rangle - \langle f|F|\text{in}\rangle) &= \\ &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{k}_1 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} \langle f|F^+|\mathbf{k}_{\perp}, \epsilon\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 \rangle \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}_{\perp}, \epsilon\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 | F|\text{in}\rangle + \langle f|F^+ I_{\text{inel}} F|\text{in}\rangle. \end{aligned}$$

Перейдем от амплитуды  $\langle f|F|\text{in}\rangle$  к амплитуде  $\langle f|A|\text{in}\rangle$ :

$$\langle f|F|\text{in}\rangle = \delta^4(P_{\text{in}} - P_f) \langle f|A|\text{in}\rangle,$$

где  $P_{\text{in}}$  и  $P_f$  есть полный импульс частиц  $A$  и  $B$  в начальном и конечном состоянии соответственно,

$$\begin{aligned} i\delta^4(P_{\text{in}} - P_f)(\langle f|A^+|\text{in}\rangle - \langle f|A|\text{in}\rangle) &= \\ &= \delta^4(P_{\text{in}} - P_f) \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{k}_1 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} \delta^4(P_{\text{in}} - k - k_1) \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}_{\perp}, \epsilon\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 | A|f \rangle^* \langle \mathbf{k}_{\perp}, \epsilon\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 | A|\text{in}\rangle + \\ &\quad + \delta^4(P_{\text{in}} - P_f) \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4\left(P_{\text{in}} - \sum_i k_i\right) \langle \{\mathbf{k}_i\} | A|f \rangle^* \langle \{\mathbf{k}_i\} | A|\text{in}\rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим это соотношение в с. ц. м. частиц  $A$  и  $B$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = 0, \quad \mathbf{p}_A = -\mathbf{p}_B = \mathbf{p}, \\ \mathbf{P}_f = \mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B = 0, \quad \mathbf{q}_A = -\mathbf{q}_B = \mathbf{q}. \end{aligned}$$

На поверхности  $P_{\text{in}} = P_f$  имеем  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = q$ ;  $E(p_A) = E(q_A)$ ,  $E(p_B) = E(q_B)$ . Проинтегрируем левую и правую части по  $\mathbf{q}_B$  и  $E(q_A)$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} i(\langle \text{in}|A|\mathbf{q}; -\mathbf{q}\rangle^* - \langle \mathbf{q}; -\mathbf{q}|A|\text{in}\rangle) &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{k}_1 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} \delta^4(P_{\text{in}} - k - k_1) \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{k}_{\perp}, \epsilon\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 | A|\mathbf{q}; -\mathbf{q}\rangle^* \langle \mathbf{k}_{\perp}, \epsilon\sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 | A|\text{in}\rangle + \\ &\quad + \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4\left(P_{\text{in}} - \sum_i k_i\right) \langle \{\mathbf{k}_i\} | A|\mathbf{q}; -\mathbf{q}\rangle^* \langle \{\mathbf{k}_i\} | A|\text{in}\rangle. \quad (35) \end{aligned}$$

Как отмечалось выше, в последнем слагаемом нет промежуточных двухчастичных состояний  $|A, B\rangle$ . Положим в (35)  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ . Поскольку нормировка состояния  $|\text{in}\rangle$  входит линейным образом в левую и правую части уравнения, то на нее можно сократить, и тогда получим

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Im} \langle \mathbf{p}; -\mathbf{p} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle = \\ & = \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{k}_1 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} \delta^4(P_{\text{in}} - k - k_1) \left| \langle \mathbf{k}_{\perp}, \epsilon \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle \right|^2 + \\ & \quad + \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4 \left( P_{\text{in}} - \sum_i k_i \right) |\langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle|^2, \quad (36) \end{aligned}$$

4-мерную  $\delta$ -функцию в интеграле (36) представим в виде

$$\delta^4(P_{\text{in}} - k - k_1) = \delta(P_{\text{in}}^0 - k^0 - k_1^0) \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$$

и проинтегрируем первое слагаемое по  $\mathbf{k}_1$

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Im} A^{(+)}(\mathbf{q}_{\perp} = 0, q_3 = p) = \\ & = \sum_{\epsilon=\pm 1} \int k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} \delta \left( E_k + \sqrt{k^2 + m_B^2} - P_{\text{in}}^0 \right) |A^{(\epsilon)}(\mathbf{k})|^2 + \\ & \quad + \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4 \left( P_{\text{in}} - \sum_i k_i \right) |\langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle|^2, \quad (37) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} A^{(\epsilon)}(\mathbf{k}) & = \langle \mathbf{k}_{\perp}, \epsilon \sqrt{k^2 - k_{\perp}^2}; \mathbf{k}_1 = -\mathbf{k} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle, \\ A^{(+)}(\mathbf{q}_{\perp} = 0, q_3 = p) & = \langle \mathbf{p}; -\mathbf{p} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle. \end{aligned}$$

В разд. 2 будут (соотношение (99)) получены выражения для  $\sigma_{\text{el}} \equiv \sigma_{AB \rightarrow AB}$  и  $\sigma_{\text{inel}} \equiv \sigma_{AB \rightarrow \text{all}}$  (состояния  $|\text{all}\rangle$  не включают двухчастичных состояний  $|AB\rangle$ ) через матричные элементы оператора  $\hat{A}$ :

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{(2\pi)^2}{|\mathbf{u}|} \sum_{\epsilon=\pm 1} \int k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} \delta \left( E_k + \sqrt{k^2 + m_B^2} - P_{\text{in}}^0 \right) |A^{(\epsilon)}(\mathbf{k})|^2, \quad (38)$$

$$\sigma_{\text{inel}} = \frac{(2\pi)^2}{|\mathbf{u}|} \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4 \left( P_{\text{in}} - \sum_i k_i \right) |\langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle|^2, \quad (39)$$

где  $|\mathbf{u}|$  — относительная скорость налетающих частиц:

$$|\mathbf{u}| = \left| \frac{\mathbf{p}_A}{E_A} - \frac{\mathbf{p}_B}{E_B} \right|. \quad (40)$$

Тогда соотношение (37) можно записать в виде

$$\text{Im } A^{(+)}(\mathbf{q}_\perp = 0, q_3 = p) = \frac{|\mathbf{u}|}{8\pi^2}(\sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}}). \quad (41)$$

Это соотношение известно как оптическая теорема.

В первом слагаемом равенства (37)  $\delta$ -функция определяет энергетическую поверхность реакции для частицы  $A$  в конечном состоянии

$$E_A + E_B - P_{\text{in}}^0|_{k=\tilde{k}} = 0. \quad (42)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (42) выполняется при  $k = \tilde{k} = p$ . Введем обозначение

$$\lambda(p) = \frac{E_A E_B}{p(E_A + E_B)}. \quad (43)$$

Тогда справедливо соотношение

$$\delta\left(E_k + \sqrt{k^2 + m_B^2} - P_{\text{in}}^0\right) = \lambda(p)\delta(k - p). \quad (44)$$

В соотношении (35) проинтегрируем упругий двухчастичный вклад в мнимую часть амплитуды по  $d\mathbf{k}_1$  и по  $dk$  с учетом (42), (43) и (44). Тогда получим

$$\begin{aligned} 2 \text{Im} \langle \mathbf{q}; -\mathbf{q} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle = & \\ = p^2 \lambda(p) \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \langle \mathbf{k}_\perp, \epsilon \sqrt{p^2 - k_\perp^2}; -\mathbf{k} | A | \mathbf{q}; -\mathbf{q} \rangle^* \times & \\ \times \langle \mathbf{k}_\perp, \epsilon \sqrt{p^2 - k_\perp^2}; -\mathbf{k} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle + & \\ + \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4 \left( P_{\text{in}} - \sum_i k_i \right) \langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{q}; -\mathbf{q} \rangle^* \langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle. & \end{aligned} \quad (45)$$

Отметим, что в с.ц.м.  $\lambda(p)$  (43) связана с относительной скоростью (40) соотношением

$$|\mathbf{u}| = \frac{p(E_A + E_B)}{E_A \cdot E_B} = \frac{1}{\lambda(p)}. \quad (46)$$

Выражение (45) в точке  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$  приводит к оптической теореме. С учетом соотношений (44) и (46) выражение (38) для сечения  $\sigma_{\text{el}}$  можно представить в виде

$$\sigma_{\text{el}}^{(\pm)}(p) = (2\pi)^2 p^2 \lambda^2(p) \int_1^\infty |A^{(\pm)}(\mathbf{k})|^2 d\Omega_{\mathbf{k}}.$$

Разложим в этом выражении амплитуды  $A^{(\pm)}(\mathbf{k})$  как функции на группе  $SO_\mu(2,1)$  (соотношения (27), (28)) и воспользуемся свойством ортогональности (23). Тогда получим

$$\sigma_{\text{el}}^{(\pm)}(p) = (2\pi)^3 p^2 \lambda^2(p) \int_0^\infty \left| u_p^{(\pm)}(\mu) \right|^2 \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu. \quad (47)$$

Из этого соотношения видно, что  $\left| u_p^{(\pm)}(\mu) \right|^2$  можно интерпретировать как функцию распределения по прицельному параметру  $\mu$ .

Чтобы получить следствие уравнения (45) при всех значениях импульса  $\mathbf{q}$ , необходимо перейти в нем от амплитуды рассеяния к профильной функции  $u_p^{(\pm)}(\mu)$ , определенной в (28). Мы покажем, что для этой функции это уравнение превращается в локальное по  $\mu$  алгебраическое соотношение, аналогичное соотношению для парциальной амплитуды  $a_l(q)$ .

Чтобы реализовать эту программу, отметим следующее. Пусть  $f(\mathbf{q}_f; \mathbf{q}_{\text{in}})$  есть амплитуда упругого рассеяния  $A + B \rightarrow A + B$ , где  $\mathbf{q}_{\text{in}}$  — начальный импульс частицы  $A$  в с. ц. м., а  $\mathbf{q}_f$  — конечный импульс этой частицы после рассеяния. Процесс упругий, поэтому  $\mathbf{q}_{\text{in}}^2 = \mathbf{q}_f^2 = q^2$ . При таком обозначении амплитуды видно, что в уравнение (45) входят два объекта:  $f(\mathbf{k}; \mathbf{p})$  и  $f(\mathbf{k}; \mathbf{q})$ , и возникает естественный вопрос, в чем отличия разложения этих амплитуд по базисным функциям  $\Psi_\mu(\mathbf{k}_\perp)$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо перейти в импульсном пространстве от декартовых переменных к переменным на 3-мерном единичном конусе. Рассмотрим три импульса

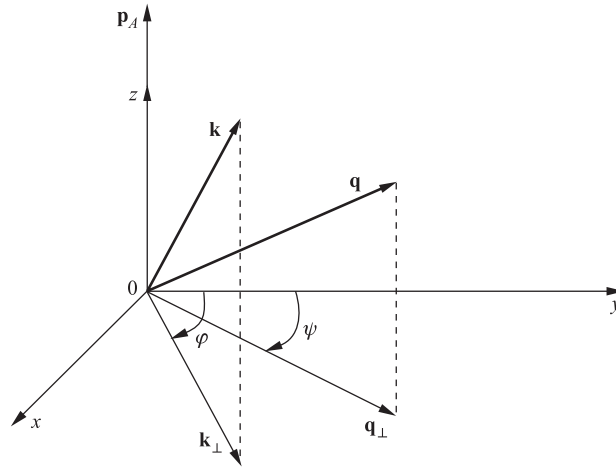
$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_\perp, q_3), \quad \mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_3), \quad \mathbf{p} = (\mathbf{p}_\perp = 0, p_3 = p).$$

В переменных конуса эти импульсы запишутся так:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \rightarrow u &= (u_0, \mathbf{u}) = \left( \frac{q}{|q_3|}, \frac{\mathbf{q}_\perp}{|q_3|} \right), & u^2 &= u_0^2 - \mathbf{u}^2 = 1, \\ \mathbf{p} \rightarrow n &= \left( \frac{p}{|p_3|}, \frac{\mathbf{p}_\perp}{|p_3|} \right) = (1, 0, 0), & n^2 &= n_0^2 - \mathbf{n}^2 = 1, \\ \mathbf{k} \rightarrow u' &= (u'_0, \mathbf{u}') = \left( \frac{k}{|k_3|}, \frac{\mathbf{k}_\perp}{|k_3|} \right), & u'^2 &= u'_0{}^2 - \mathbf{u}'^2 = 1. \end{aligned} \quad (48)$$

Пусть  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = |\mathbf{k}| = p$ . Разложения импульсов  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$  на продольные и поперечные компоненты соответствуют схеме, показанной на рис. 3. Скалярное произведение двух произвольных векторов  $V$  и  $U$  на конусе определяется в соответствии с метрикой  $SO(2,1)$ -преобразований как

$$U \cdot V = U_0 V_0 - (\mathbf{UV}).$$

Рис. 3. Определение углов  $\varphi$  и  $\psi$ 

Таким образом, для введенных выше векторов  $u$  и  $u'$  будем иметь

$$u \cdot u' = u_0 u'_0 - \sqrt{u_0^2 - 1} \sqrt{u'^2_0 - 1} \cos(\varphi - \psi),$$

где углы  $\varphi$  и  $\psi$  определены на рис. 3. Чтобы выяснить различия в разложении амплитуд  $f(\mathbf{k}; \mathbf{p})$  и  $f(\mathbf{k}; \mathbf{q})$  на группе  $SO(2,1)$ , заметим, что, как следует из (27),

$$\begin{aligned} f(\mathbf{k}; \mathbf{p}) &= \int_0^\infty u'_0 P_{-1/2+i\mu}(u'_0) u_p(\mu) \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu = \\ &= \int_0^\infty (n_0 u'_0) P_{-1/2+i\mu}(n \cdot u') u_p(\mu) \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu. \quad (49) \end{aligned}$$

Эта форма разложения является основой для обобщения на амплитуду  $f(\mathbf{k}; \varkappa)$ , где  $\varkappa$  — произвольный начальный импульс на полусфере  $\varkappa_3 > 0$ .

Введем обозначения

$$\langle \mathbf{k}_\perp, \epsilon \sqrt{p^2 - k_\perp^2}; -\mathbf{k}|A|\varkappa; -\varkappa \rangle \equiv f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}; \varkappa).$$

В этих обозначениях уравнение (45) имеет вид

$$2 \operatorname{Im} f^{(+)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{p}) = p^2 \lambda(p) \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \bar{f}^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{q}) f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{p}) + \\ + \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4 \left( P_{\text{in}} - \sum_i k_i \right) \langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{q}; -\mathbf{q} \rangle^* \langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle. \quad (50)$$

В соответствии с замечанием (49) будем искать решение этого уравнения в виде

$$f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_{\perp}; \varkappa) = \int_0^{\infty} (v_0 u'_0) P_{-1/2+i\mu} (v \cdot u') u_p^{(\epsilon)}(\mu) \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu, \quad (51)$$

где  $\varkappa$  — произвольный начальный импульс с  $\varkappa_3 > 0$ , а  $v$  — соответствующий импульс в конусных переменных

$$v = (v_0, \mathbf{v}) = \left( \frac{\varkappa}{\varkappa_3}, \frac{\varkappa_{\perp}}{\varkappa_3} \right), \quad v^2 = v_0^2 - \mathbf{v}^2 = 1.$$

Мы покажем, что выражение (51) будет удовлетворять уравнению (50) при выполнении определенных условий на профильную функцию  $u_p^{(\epsilon)}(\mu)$ . Это условие представляет собой нелинейное, локальное по  $\mu$  соотношение, аналогичное соотношению для парциальной волны  $a_l(p)$  (формула (2) во введении).

Рассмотрим двухчастичный интеграл в уравнении (50):

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int d\Omega_{\mathbf{k}} \bar{f}^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{q}) f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{p}). \quad (52)$$

Подстановка выражений  $f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}; \mathbf{q})$  и  $f^{(\epsilon)}(\mathbf{k}; \mathbf{p})$  в интеграл (52) приводит к интегралу вида

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \sim \int_0^{2\pi} d\varphi P_{-1/2+i\mu}(u \cdot u').$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся теоремой сложения для сферических функций Лежандра [34, 35]

$$P_{-1/2+i\mu}(zz' - (z^2 - 1)^{1/2}(z'^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi) = P_{-1/2+i\mu}(z)P_{-1/2+i\mu}(z') + \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(-1/2 + i\mu - m + 1)}{\Gamma(-1/2 + i\mu + m + 1)} P_{-1/2+i\mu}^m(z) P_{-1/2+i\mu}^m(z') \cos m\varphi.$$

Интегрируя левую и правую части этого выражения по  $\varphi$ , получим

$$\int_0^{2\pi} d\varphi P_{-1/2+i\mu}(u \cdot u') = 2\pi P_{-1/2+i\mu}(u_0) P_{-1/2+i\mu}(u'_0).$$

Отсюда, используя условие ортогональности (23), получим важное соотношение

$$\int d\varphi du'_0 P_{-1/2+i\nu}(u'_0) P_{-1/2+i\mu}(u \cdot u') = \frac{2\pi}{\mu \operatorname{th}(\pi\mu)} \delta(\mu - \nu) P_{-1/2+i\mu}(u_0). \quad (53)$$

С учетом вышеизложенного уравнение (50) в терминах профильной функции  $u_p^{(\pm)}(\mu)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Im} u_p^{(+)}(\mu) \Psi_\mu(q_\perp) \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu = \\ = \frac{\pi p^2}{|\mathbf{u}|} \sum_{\epsilon=\pm 1} \int |u_p^{(\epsilon)}(\mu)|^2 \Psi_\mu(q_\perp) \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu + \frac{1}{2} A_{\text{inel}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (54)$$

а  $A_{\text{inel}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  — неупругий вклад в спектральную плотность:

$$A_{\text{inel}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_s \int \prod_{i=1}^s d\mathbf{k}_i \delta^4 \left( P_{\text{in}} - \sum_i k_i \right) \langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{q}; -\mathbf{q} \rangle^* \langle \{\mathbf{k}_i\} | A | \mathbf{p}; -\mathbf{p} \rangle.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на  $\Psi_\nu(q_\perp)$  и проинтегрируем по  $d\Omega_{\mathbf{q}}$ . Тогда с учетом ортогональности (23) получим

$$\operatorname{Im} u_p^{(+)}(\mu) = \frac{\pi p^2}{|\mathbf{u}|} \sum_{\epsilon=\pm 1} |u_p^{(\epsilon)}(\mu)|^2 + G_{\text{inel}}^{(+)}(\mu), \quad (55)$$

где

$$G_{\text{inel}}^{(+)}(\mu) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{q}} \Psi_\mu(q_\perp) A_{\text{inel}} \left( \left\{ \mathbf{q}_\perp, q_3 = +\sqrt{q^2 - q_\perp^2} \right\}, \mathbf{p} \right).$$

Выражение (55) есть условие унитарности для профильных функций  $u_p^{(\pm)}(\mu)$  на группе  $SO(2,1)$ . Оно отличается от условия унитарности для парциальных волн  $a_l(p)$ , реализующих представление группы  $O(3)$ .

Рассмотрим приближение, при котором в (55) можно пренебречь неупругими вкладами. Тогда получим условие упругой унитарности

$$\operatorname{Im} u_p^{(+)}(\mu) = \frac{\pi p^2}{|\mathbf{u}|} \left( |u_p^{(+)}(\mu)|^2 + |u_p^{(-)}(\mu)|^2 \right). \quad (56)$$



Из оптической теоремы (41) и полученного соотношения (56) следует выражение для упругого сечения

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{el}} &= \sigma_{\text{el}}^{(+)} + \sigma_{\text{el}}^{(-)}, \\ \sigma_{\text{el}}^{(\pm)} &= \frac{(2\pi)^3(p^2 + m_A^2)(p^2 + m_B^2)}{s} \int_0^\infty |u_p^{(\pm)}(\mu)|^2 \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu, \\ \sigma_{\text{inel}} &= \frac{2\pi}{p^2} \int_0^\infty (1 - \eta_{\text{inel}}^2(\mu)) d\Omega_\mu,\end{aligned}\quad (57)$$

где  $s = (E_A + E_B)^2$ .

Если в интеграле (57) перейти к интегрированию по прицельному параметру  $b$  в соответствии с соотношением  $\mu = (b^2 p^2 - 1/4)^{1/2}$ , то функцию  $\rho^{(\pm)}(b)$ , где

$$\rho^{(\pm)}(b) = \frac{1}{\sigma_{\text{el}}^{(\pm)}} \frac{(2\pi)^3(p^2 + m_A^2)(p^2 + m_B^2)}{s} p^2 b \operatorname{th}\left(\pi\sqrt{b^2 p^2 - \frac{1}{4}}\right) |u_p^{(\pm)}(\mu)|^2,$$

можно интерпретировать как функцию распределения по параметру  $b$ . При этом автоматически выполняется условие нормировки

$$\int_{1/2p}^\infty \rho^{(\pm)}(b) db = 1.$$

Выражение (57) согласуется с полученным ранее результатом (47).

Важным фактором является появление сигнатуры  $(\pm)$  у профильной функции, соответствующей рассеянию в заднюю и переднюю полусферы, и, как следствие, трансформация условия упругой унитарности к виду (56).

**1.6. Простейшая феноменологическая модель профильной функции  $u_p^{(\pm)}(\mu)$ , согласованная с условием унитарности.** Рассмотрим предельные случаи: случай полного поглощения, полного отражения и промежуточный случай с полным поглощением на краях диска и полным отражением на внутренней части диска. На рис. 4 изображена область изменения параметра  $b$  в соответствии с тремя рассматриваемыми случаями. Радиус  $R_0(p) = 1/2p$  определяет область запрещенных значений  $b$  в соответствии с условием (21). Область  $R_0(p) \leq b \leq R_{\text{refl}}(p)$  определяет интервал по  $b$ , на котором происходит полное отражение. Область  $R_{\text{refl}}(p) \leq b \leq R(p)$  определяет интервал по  $b$ , на котором происходит полное поглощение.

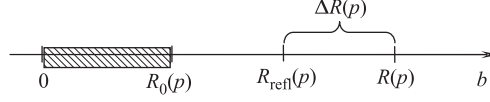


Рис. 4. Структура области столкновения

1.6.1. *Полное поглощение.* Пусть  $R_{\text{ref}}(p) = R_0(p)$ . В этом случае на всей области диска  $R_0(p) \leq b \leq R(p)$  будем иметь

$$|u_p^{(-)}(\mu)|^2 = 0, \quad \eta_{\text{inel}} = 0.$$

Тогда условие унитарности (55) примет вид

$$\text{Im } u_p^{(+)}(\mu) = K |u_p^{(+)}(\mu)|^2 + \frac{1}{4K}. \quad (58)$$

Отсюда получим

$$u_p^{(+)}(\mu) = \frac{i}{2K}, \quad R_0(p) \leq b \leq R(p).$$

Таким образом, для сечений  $\sigma_{\text{el}}$  и  $\sigma_{\text{inel}}$  получим

$$\sigma_{\text{el}} = \sigma_{\text{el}}^{(+)} = \sigma_{\text{inel}} = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{R^2 p^2 - 1/4}} \mu \text{th}(\pi\mu) d\mu.$$

Считая, что  $p^2 R^2 \gg 1/4$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}} = \sigma_{\text{el}}^{(+)} = \sigma_{\text{inel}} &\simeq \pi R^2, \\ \sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{inel}} &\simeq 2\pi R^2, \quad \sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} = 1/2. \end{aligned}$$

Это известный результат модели черного диска.

1.6.2. *Полное отражение.* Пусть  $R_{\text{ref}}(p) = R(p)$  и при этом  $G_{\text{inel}} = 0$ . Тогда условие унитарности (55) примет вид

$$\text{Im } u_p^{(+)}(\mu) = K \left( |u_p^{(+)}(\mu)|^2 + |u_p^{(-)}(\mu)|^2 \right). \quad (59)$$

Для интерпретации этого соотношения перепишем его в следующем виде:

$$\text{Im } u_p^{(+)}(\mu) = K |u_p^{(+)}(\mu)|^2 + \frac{1 - \eta_p^2(\mu)}{4K}, \quad (60)$$

где  $\eta_p(\mu) = \sqrt{1 - |2K u_p^{(-)}(\mu)|^2}$ ,  $0 \leq \eta_p(\mu) \leq 1$ . Решением уравнения (60) является

$$u_p^{(+)}(\mu) = \frac{\eta_p(\mu) e^{2i\delta(\mu,p)} - 1}{2iK},$$

где  $\delta(\mu, p)$  — произвольная действительная фаза. Таким образом, амплитуда рассеяния в заднюю полусферу  $u_p^{(-)}(\mu)$  играет роль эффективного коэффициента поглощения по отношению к рассеянию в переднюю полусферу.

Определим абсолютно упругое рассеяние на диске радиусом  $R$  как рассеяние, при котором

$$\begin{aligned} \eta_p(\mu) &= 0, \quad \text{если } R_0(p) \leq b \leq R(p) \quad (\text{полное отражение}), \\ \eta_p(\mu) &= 1, \quad \delta(\mu, p) = 0, \quad \text{если } b \geq R(p). \end{aligned}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} |u_p^{(-)}(\mu)|^2 &= \frac{1}{4K^2}, \quad u_p^{(+)}(\mu) = \frac{i}{2K}, \quad \text{если } R_0(p) \leq b \leq R(p), \\ u_p^{(-)}(\mu) &= u_p^{(+)}(\mu) = 0, \quad \text{если } b \geq R(p). \end{aligned} \quad (61)$$

Тогда для упругого сечения получаем

$$\sigma_{\text{el}} = \sigma_{\text{el}}^{(+)} + \sigma_{\text{el}}^{(-)} = \frac{4\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{R^2 p^2 - 1/4}} \mu \operatorname{th}(\pi\mu) d\mu \simeq 2\pi R^2.$$

А для отношения сечений получим

$$\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} \simeq 1.$$

### 1.6.3. Комбинированная модель абсолютного поглощения и отражения.

В соответствии с рис. 4 область интегрирования по  $\mu$  в сечениях  $\sigma_{\text{el}}$  и  $\sigma_{\text{inel}}$  разбивается на область полного отражения ( $0 \leq \mu \leq \mu_{\text{refl}}$ ) и область полного поглощения ( $\mu_{\text{refl}} \leq \mu \leq \mu_R$ ), где

$$\mu^2 = 0 = p^2 R_0^2(p) - 1/4, \quad \mu_{\text{refl}}^2 = p^2 R_{\text{refl}}^2(p) - 1/4, \quad \mu_R^2 = p^2 R^2(p) - 1/4.$$

Используя выражения для  $u_p^{(+)}(\mu)$ ,  $u_p^{(-)}(\mu)$  и  $\eta_{\text{inel}}$ , полученные выше для полного отражения и полного поглощения, а также выражения для сечений (57), легко получить

$$\sigma_{\text{el}}^{(+)} = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\mu_R} d\Omega_\mu, \quad \sigma_{\text{el}}^{(-)} = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\mu_{\text{refl}}} d\Omega_\mu, \quad \sigma_{\text{inel}} = \frac{2\pi}{p^2} \int_{\mu_{\text{refl}}}^{\mu_R} d\Omega_\mu.$$

Отсюда для отношения сечений получаем

$$\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} = 1 - \Delta, \quad (62)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{\mu_R} d\Omega_\mu}{\int_0^{\mu_{\text{refl}}} d\Omega_\mu}.$$

Таким образом, область значений  $\Delta$  определяется предельными случаями

$$\begin{aligned} \Delta &\rightarrow 0, & \text{при } R_{\text{refl}} &\rightarrow R \quad (\text{предел полного отражения}), \\ \Delta &\rightarrow 1/2, & \text{при } R_{\text{refl}} &\rightarrow R_0 \quad (\text{предел полного поглощения}). \end{aligned}$$

В случае, когда  $R^2 p^2, R_{\text{refl}}^2 p^2 \gg 1/4$ , получим

$$\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} \simeq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R_{\text{refl}}^2}{R^2} \right), \quad R_{\text{refl}} \leq R. \quad (63)$$

На рис. 5 приведены результаты вычисления интегралов в (62) при значениях  $\sqrt{s} = 14$  ТэВ,  $R = 1$  Ф. Из рисунка видно, что отклонение  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$  от значения  $1/2$  начинается в области, в которой  $R_{\text{refl}}$  становится порядка  $R$ . В этой области значение  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$  резко изменяется, стремясь к единице. Таким образом, унитарное насыщение происходит на объекте с очень узкой, абсолютно поглощающей периферией  $\Delta R(p)/R \ll 1$ , т. е. обусловлено процессами рассеяния в заднюю полусферу (Reflective Scattering).

В рамках решеточной модели [36] предсказывается, что при энергии ЛНС, равной  $\sqrt{s} = 14$  ТэВ, отношение сечений выходит на значение

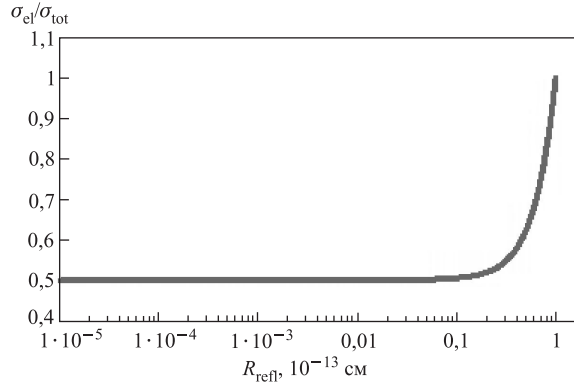


Рис. 5. Зависимость отношения  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$  от  $R_{\text{refl}}$

$\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} \simeq 0,67$ . В этом случае из полученного нами соотношения (62) следует, что  $R_{\text{refl}} \simeq 0,58\Phi$ , т.е. размеры области абсолютного поглощения и абсолютного отражения одного порядка.

*1.6.4. Комбинированная модель с учетом «серости» диска.* Простейшим обобщением рассмотренной модели является учет отклонения параметра неупругости  $\eta_{\text{inel}}$  от нуля. Пусть  $0 < \eta_{\text{inel}} \ll 1$ , где  $\eta_{\text{inel}}$  будем считать малым параметром, не зависящим от  $\mu$ .

Разобьем интервал значений прицельного параметра  $b$  на три области:

- $0 \leq b \leq R_0(p) = 1/2p$  — интервал запрещенных значений  $b$  в соответствии с условием (21);
- $R_0(p) \leq b \leq R_{\text{refl}}(p)$  — интервал, на котором происходит полное отражение;
- $R_{\text{refl}}(p) \leq b \leq R(p)$  — интервал, на котором происходит «серое» поглощение.

В этом случае на интервале  $R_{\text{refl}}(p) \leq b \leq R(p)$  для профильных функций  $u_p^{(\pm)}(\mu)$  справедливы соотношения

$$\text{Im } u_p^{(+)}(\mu) = K|u_p^{(+)}(\mu)|^2 + \frac{1 - \eta_{\text{inel}}^2}{4K}, \quad |u_p^{(-)}(\mu)|^2 = 0.$$

Решением этой системы является

$$u_p^{(+)}(\mu) = \frac{i(1 - \eta_{\text{inel}})}{2K}, \quad |u_p^{(-)}(\mu)|^2 = 0. \quad (64)$$

Используя ранее полученные выражения для  $u_p^{(+)}(\mu)$  и  $u_p^{(-)}(\mu)$  для полного отражения (61) и «серого» поглощения (64), а также выражения для сечений (57), получим

$$\sigma_{\text{el}}^{(+)} = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\mu_{\text{refl}}} d\Omega_\mu + \frac{2\pi(1 - \eta_{\text{inel}})^2}{p^2} \int_{\mu_{\text{refl}}}^{\mu_R} d\Omega_\mu, \quad \sigma_{\text{el}}^{(-)} = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\mu_{\text{refl}}} d\Omega_\mu,$$

$$\sigma_{\text{inel}} = \frac{2\pi(1 - \eta_{\text{inel}}^2)}{p^2} \int_{\mu_{\text{refl}}}^{\mu_R} d\Omega_\mu.$$

Отсюда для отношения сечений получаем

$$\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} = 1 - \Delta(\eta_{\text{inel}}), \quad (65)$$

где

$$\Delta = \frac{1 - \eta_{\text{inel}}^2}{2} \frac{\int_{\mu_{\text{refl}}}^{\mu_R} d\Omega_\mu}{\int_0^{\mu_R} d\Omega_\mu - \eta_{\text{inel}} \int_{\mu_{\text{refl}}}^{\mu_R} d\Omega_\mu}.$$

В случае, когда  $R^2 p^2, R_{\text{refl}}^2 p^2 \gg 1/4$ , получим

$$\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} \simeq 1 - \frac{1 - \eta_{\text{inel}}^2}{2} \frac{1 - R_{\text{refl}}^2/R^2}{1 - \eta_{\text{inel}}(1 - R_{\text{refl}}^2/R^2)}, \quad R_{\text{refl}} \leq R.$$

Это совпадает с полученным ранее соотношением при  $\eta_{\text{inel}} = 0$  (63). На рис. 6 приведена зависимость отношения  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$  от  $R_{\text{refl}}$  при разных значениях  $\eta_{\text{inel}}$ . Из рисунка видно, что увеличение значения параметра неупругости  $\eta_{\text{inel}}$  («серость» диска) эффективно уменьшает отношение сечений  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$ .

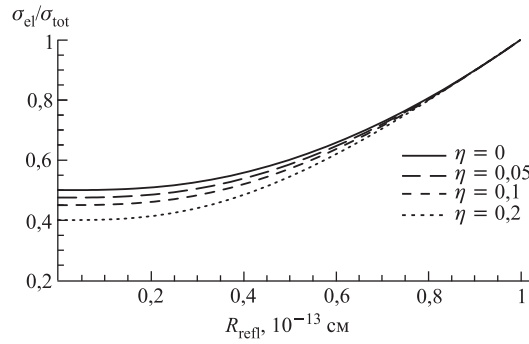


Рис. 6. Зависимость отношения  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$  от  $R_{\text{refl}}$  при разных значениях  $\eta_{\text{inel}}$

Таким образом, в данном разделе получено последовательное обобщение эйконоального разложения амплитуды упругого процесса на основе теоретико-группового определения прицельного параметра двух сталкивающихся частиц.

После стандартной процедуры квантования удалось построить волновую функцию квантово-механического состояния с определенным значением прицельного параметра. Эта система функций оказывается функциями конуса, полнота которых исследована ранее в работах Фока. Это позволяет получить разложение упругой амплитуды как функции на группе прицельного параметра  $SO_\mu(2,1)$  и таким образом выразить амплитуду упругого процесса через профильную функцию  $u_p^{(\pm)}(\mu)$  — аналог парциальной волны  $a_l(p)$ .

Важной особенностью этого разложения является диагонализация условия унитарности по прицельному параметру  $b$ . Другой особенностью такого разложения является проявление сигнатуры, соответствующей рассеянию в переднюю или заднюю полусферы.

В рамках простейшей модели на профильную функцию  $u_p^{(\pm)}(\mu)$  дан анализ зависимости отношения сечений  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$  от соотношений радиуса области полного отражения  $R_{\text{refl}}(p)$  и дифракционного радиуса  $R(p)$ .

Показано, что отношение сечений  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$  эффективно определяется параметрами  $\eta_{\text{inel}}$  и  $R_{\text{refl}}$ . Изменение этих параметров позволяет получить всю

область изменения значений  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$ . Показано также, что предел унитарного насыщения,  $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} \rightarrow 1$ , для данной модели наступает при  $R_{\text{ref}}(p) \rightarrow R(p)$ .

## 2. СОСТОЯНИЯ С ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПАРАМЕТРОМ ВЫЛЕТА В ФОРМАЛИЗМЕ АЛГЕБРЫ $SO_{\mu}(2,1)$

В этом разделе мы получим полный набор одночастичных состояний, в которых роль квантовых динамических характеристик играют пространственные координаты области рождения детектируемой частицы. Как уже отмечалось, функция распределения по этим координатам является важной физической характеристикой среды, где рождается частица. Основой нашего рассмотрения будет классификация состояний по группе движения импульсного пространства на поверхности  $q^2 = \text{const}$ , где  $\mathbf{q}$  — импульс детектируемой частицы. Кроме хорошо известных трех генераторов таких движений — компонент орбитального момента импульса  $\hat{L}_i$ , существуют еще три, представляющие собой билинейную комбинацию генераторов группы Пуанкаре. В совокупности эти шесть генераторов образуют алгебру  $SO(3,1)$ . Как будет показано ниже, оператор Казимира этой алгебры является вырожденным и равен просто числу. Эта алгебра имеет нетривиальную подалгебру  $SO(2,1)$ , имеющую простую физическую интерпретацию на языке состояний с определенным значением некоторого пространственного параметра  $b$ . Он характеризует траекторию свободной частицы и равен минимальному расстоянию от частицы на траектории до начала координат. Этот параметр мы называем пространственным параметром вылета частицы и исследуем функцию распределения рождаемых в процессе частиц по этому параметру. В развитом формализме во всех соотношениях  $b$  входит через безразмерный параметр  $\mu = \sqrt{b^2 q^2 - 1}/4$ , поэтому для обозначения полученной алгебры мы используем по тексту работы символ  $SO_{\mu}(2,1)$ .

Хорошо известно, что одночастичные состояния свободной релятивистской частицы определяются 10-параметрической группой движения пространства Минковского, задаваемой генераторами  $M_{\mu\nu}$  и  $P_{\nu}$ . Эти состояния конкретизируются выбором той или иной подгруппы.

В качестве примера можно привести «систему бесконечного импульса», использование которой оказалось очень плодотворным при описании глубоководных процессов. Этому посвящено много работ [37–43], мы отметим лишь существенный для нас момент. Если выделить из алгебры группы Пуанкаре три генератора

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1 + J_2), \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_2 - J_1), \quad J_3,$$

где

$$K_i = M_{i0}, \quad \epsilon_{ijk} J_k = M_{ij},$$

то придем к совокупности следующих коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] = 0, \quad [J_3, B_1] = iB_2, \quad [J_3, B_2] = -iB_1, \\ [B_1^2 + B_2^2, J_3] = 0, \quad [q_i, B_j] = i\delta_{ij}q^+, \quad [q^+, B_i] = 0, \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$q^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_3).$$

Отсюда следует, что генераторы  $B_1$ ,  $B_2$  и  $J_3$  образуют алгебру  $E(2)$  с оператором Казимира, равным  $B^2 = B_1^2 + B_2^2$ . В силу последнего коммутационного соотношения эта алгебра реализуется в трехмерном импульсном пространстве на поверхности  $q^+ = \text{const}$  на состояниях  $|\boldsymbol{\lambda}, q^+\rangle$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} B^2|\boldsymbol{\lambda}, q^+\rangle &= \lambda^2|\boldsymbol{\lambda}, q^+\rangle, \\ B_1|\boldsymbol{\lambda}, q^+\rangle &= \lambda_1|\boldsymbol{\lambda}, q^+\rangle, \\ B_2|\boldsymbol{\lambda}, q^+\rangle &= \lambda_2|\boldsymbol{\lambda}, q^+\rangle, \\ \lambda^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2. \end{aligned} \quad (67)$$

Операторы  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B^2$  на поверхности  $q^+ = \text{const}$  имеют достаточно сложный вид. Однако в области  $q_\perp/q \ll 1$  происходит существенное упрощение операторов и уравнений (67). В этом пределе получим

$$B_1 = -iq^+ \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad B_2 = -iq^+ \frac{\partial}{\partial q_2}.$$

Подставляя эти операторы в уравнения (67), получим для волновой функции в импульсном представлении следующее выражение:

$$\langle \mathbf{q}_\perp, q^+ | \boldsymbol{\lambda}, q^+ \rangle = \exp\left(i \frac{\mathbf{q}_\perp \cdot \boldsymbol{\lambda}}{q^+}\right). \quad (68)$$

Если ввести размерный параметр  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}/q^+$ , то волновая функция (68) примет вид ядра эйконального представления в плоскости прицельного параметра  $\mathbf{b}$ . Это позволяет дать пространственную интерпретацию алгебры (66) в системе с бесконечным импульсом [42–44].

Теперь рассмотрим другую подалгебру группы Пуанкаре, в которой оператор Казимира имеет точную (во всей области импульсов) геометрическую интерпретацию. Эта подалгебра операторов

$$d_i = \frac{1}{q^2} M_{ij} q_j,$$

и реализуется она на поверхности  $q^2 = \text{const}$ . Ниже мы подробно анализируем эту алгебру и используем ее для описания и построения одночастичных состояний с определенными квантовыми числами.



**2.1. Алгебра  $SO_\mu(2,1)$ .** В п. 1.1 было введено определение вектора максимального сближения между двумя частицами. По аналогии с этим введем параметр вылета детектируемой частицы из области ее рождения. Для этого необходимо рассмотреть классическую траекторию свободной бесспиновой частицы, которая движется с произвольными начальными условиями (рис. 7). Такое рассмотрение практически полностью аналогично задаче построения вектора максимального сближения двух частиц, приведенной в разд. 1 (7)–(11). Компоненты вектора  $\mathbf{d}$  имеют вид

$$d_i = \frac{1}{q^2} \varepsilon_{ijk} q_j L_k = \frac{1}{q^2} M_{ij} q_j, \quad (69)$$

где  $L_k = \varepsilon_{klm} \xi_l q_m$  — орбитальный момент частицы.

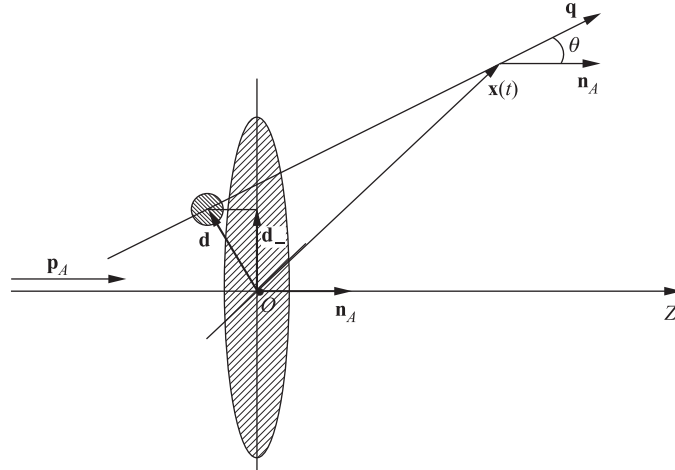


Рис. 7. Классическая траектория  $\mathbf{x}(t)$  асимптотически свободной частицы с импульсом  $\mathbf{q}$ , продолженная в область реакции, характеризуется минимальным расстоянием  $\mathbf{d}$  от выбранной точки « $O$ »

Таким образом, каждой классической траектории  $\mathbf{x}(t)$  асимптотически свободной частицы, вылетающей из области реакции с импульсом  $\mathbf{q}$ , можно сопоставить вектор  $\mathbf{d}$  — вектор максимального сближения траектории с точкой « $O$ ». Мы будем интерпретировать его как эффективную координату области рождения частицы. Эти координаты эффективные, поскольку они получены продолжением свободной траектории в область реакции по прямой линии, где она естественно искажается или вообще исчезает.

Выражение (69) совпадает с выражением (11) для компонент вектора максимального сближения между двумя частицами, с той лишь разницей, что

в (11)  $q_i$  и  $L_j$  — компоненты относительного импульса и относительного момента. Этот факт является существенным при построении одночастичного пространства Фока.

С учетом этих замечаний процедура квантования компонент  $d_i$  аналогична процедуре, изложенной в разд. 1, и полученные там результаты мы будем использовать дальше.

Реализация алгебры (13) тесно связана с геометрическими свойствами пространства перпендикулярного импульса — пространства, на котором реализуется эта алгебра. Рассмотрим унитарные преобразования импульсного пространства с генераторами движения  $d_1$  и  $d_2$  [50]

$$q'_i = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}} q_i e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}}, \quad (70)$$

где  $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$  — параметр преобразования;  $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  — единичный вектор. Дифференцируя это соотношение по  $p$ , получим для  $q'_i$  уравнение Ли

$$\frac{dq'_i}{dp} = n_i - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}'_{\perp}}{q^2} q'_i, \quad i = 1, 2,$$

с граничным условием

$$q'_i(p = 0) = q_i.$$

Это уравнение легко интегрируется

$$q'_i = \frac{q_i + (q \operatorname{sh}(p/q) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_{\perp} \operatorname{ch}(p/q) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_{\perp}) n_i}{\operatorname{ch}(p/q) + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_{\perp}) \operatorname{sh}(p/q)/q}, \quad i = 1, 2. \quad (71)$$

Удобно перейти от параметра  $\mathbf{p}$  к параметру  $\varkappa = q\mathbf{n} \operatorname{th}(p/q)$ . Тогда

$$q'_i = \left( \left( 1 + \frac{(\varkappa \mathbf{q})(1 - B)}{\varkappa^2} \right) \varkappa_i + B q_i \right) \left( 1 + \frac{(\varkappa \mathbf{q})}{q^2} \right)^{-1} \equiv \mathbf{q} \oplus \varkappa, \quad (72)$$

где

$$B = \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{q^2}}.$$

Из (72) видно, что движение пространства перпендикулярного импульса представляет собой нелинейное преобразование. Операция  $\oplus$  не является групповой операцией, поскольку произведение двух таких операций содержит кроме результирующей операции  $\oplus$  еще и поворот (следствие алгебры). Несмотря на это, операция  $\oplus$  обладает рядом групповых свойств. В частности, преобразования (72) допускают инвариантный элемент длины  $ds^2 = G^{ik} dq_i dq_k$ :

$$G^{ik} = \frac{q^2}{q_3^2} \left( \delta_{ik} + \frac{q_i q_k}{q_3^2} \right), \quad i, k = 1, 2.$$

Тензор Риччи, соответствующий метрическому тензору  $G^{ik}$ , имеет вид

$$R^{ik} = -\frac{1}{q_3^2} \left( \delta_{ik} + \frac{q_i q_k}{q_3^2} \right).$$

Отсюда для скалярной кривизны  $R$  будем иметь

$$R = -\frac{2}{q^2}.$$

Таким образом, плоскость перпендикулярного импульса, получаемая преобразованиями (72) из фиксированного  $\mathbf{q}_\perp$  при изменении параметра  $\varkappa$  во всей области  $|\varkappa|^2 \leq q^2$ , оказывается пространством постоянной отрицательной кривизны с метрикой  $G^{ik}$ .

Покажем, что преобразования (70) сохраняют знак  $q_3$ , т.е. передняя ( $q_3 > 0$ ) и задняя ( $q_3 < 0$ ) полусферы являются инвариантными подпространствами. Действительно, выполняя преобразование (70) над  $q_3$ , получим следующее уравнение Ли:

$$\frac{dq'_3}{dp} = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}'_\perp}{q^2} q'_3,$$

с граничным условием  $q'_3(p=0) = q_3$ . Интегрируя его, получим

$$q'_3 = q_3 \exp \left( -\int \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}'_\perp}{q^2} dp \right). \quad (73)$$

С другой стороны, из (71) следует

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}'_\perp = \frac{q \operatorname{sh}(p/q) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\perp \operatorname{ch}(p/q)}{\operatorname{ch}(p/q) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\perp \operatorname{sh}(p/q)/q}.$$

Подставляя это выражение в (73) и выполняя квадратуру, получим

$$q'_3 = q_3 \left( 1 - \frac{\varkappa^2}{q^2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{\varkappa \cdot \mathbf{q}_\perp}{q^2} \right)^{-1}. \quad (74)$$

Объединяя это соотношение и соотношение (72), получим окончательно

$$\frac{q'_3}{\sqrt{q^2 - q'^2_\perp}} = \frac{q_3}{\sqrt{q^2 - q^2_\perp}} = \frac{q_3}{|q_3|} = \operatorname{inv}. \quad (75)$$

Следствием этой инвариантности является появление в амплитуде (сечении) сигнатуры, соответствующей рождению частицы  $C$  в переднюю и заднюю полусферу.

В заключение этого пункта отметим, что нелинейные преобразования (72) линеаризуются в 3-мерном пространстве на гиперboloиде в переменных  $u = (u_0, u_1, u_2)$  (48), где

$$u_0 = \frac{q}{q_3}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}_\perp}{q_3}. \quad (76)$$

Скалярное произведение в таких переменных определяется с метрикой  $(+, -, -)$ , поэтому  $u^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = 1$ . В этих переменных преобразования (72) имеют вид

$$u' = \Lambda(\varkappa)u,$$

где матрица преобразования  $\Lambda(\varkappa)$  унимодулярна и равна

$$\Lambda(\varkappa) = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varkappa_1}{q} & \frac{\varkappa_2}{q} \\ \frac{\varkappa_1}{q} & B + \frac{1-B}{\varkappa^2} \varkappa_1^2 & \frac{1-B}{\varkappa^2} \varkappa_1 \varkappa_2 \\ \frac{\varkappa_2}{q} & \frac{1-B}{\varkappa^2} \varkappa_1 \varkappa_2 & B + \frac{1-B}{\varkappa^2} \varkappa_2^2 \end{pmatrix}.$$

Полученные геометрические свойства пространства перпендикулярного импульса могут быть эффективно использованы при построении амплитуды рассеяния в рамках  $SO_\mu(2,1)$  инвариантного взаимодействия.

**2.2. Плоские волны на группе  $SO_\mu(2,1)$ .** Для наших целей необходимо построить базисные функции в виде плоских волн на группе  $SO(2,1)$ . Они реализуют главную серию неприводимых представлений в пространстве функций на группе, генерируемую операцией  $\oplus$ , определенной в (72). Ситуация здесь аналогична задаче о построении релятивистского конфигурационного пространства на группе Лоренца  $SO(3,1)$ . В этом случае роль операторов координаты играют генераторы движения импульсного пространства, реализованного на верхнем поле двухполостного гиперboloида  $E^2 - q^2 = m^2$ . Эта задача последовательно решена в работах В. Г. Кадышевского и др. [30,51]. Показано, что релятивистское конфигурационное пространство сопряжено импульсному пространству в смысле фурье-трансформации. При этом роль ядра унитарного преобразования от  $x$ - к  $q$ -пространству играют плоские волны на гиперboloиде — функции Шапиро [52]. Эти функции реализуют главную серию унитарных представлений группы  $SO(3,1)$ .

Мы не будем приводить подробных вычислений, а остановимся лишь на основных моментах. Пусть состояния  $\psi(\mathbf{q}_\perp)$  диагонализуют оператор  $\mathbf{nd}_\perp$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор, перпендикулярный импульсу  $\mathbf{p}_A$ :

$$(\mathbf{nd}_\perp)\psi(\mathbf{q}_\perp) = \text{const } \psi(\mathbf{q}_\perp). \quad (77)$$

Тогда, используя преобразования (72), нетрудно получить, что функция

$$f(\mathbf{q}_\perp) = \left(1 - \frac{q_\perp^2}{q^2}\right)^{1/2} \psi(\mathbf{q}_\perp) \quad (78)$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(\mathbf{q}_\perp \oplus \varkappa) = f(\mathbf{q}_\perp) \cdot f(\varkappa). \quad (79)$$

Такая форма функционального уравнения носит «абсолютный» характер в смысле геометрии импульсного пространства. Обычные плоские волны  $\exp(i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b})$  соответствуют трансляциям в евклидовой плоскости, когда операция  $\oplus$  есть просто операция сложения.

Очевидно, соотношение (79) выполняется не для произвольных  $\varkappa$ , а только на линиях координатной сетки импульсного пространства. Пусть  $\varkappa_i = \varkappa_i(t)$  есть параметрическое представление этих линий. Без ограничения общности можно принять, что

$$\varkappa_i(t=0) = 0, \quad \left(\frac{d\varkappa_i}{dt}\right)_{t=0} = n_i, \quad n^2 = 1, \quad i = 1, 2.$$

Разлагая уравнение (79) в окрестности  $\varkappa_i = 0$  и учитывая, что

$$\left(\frac{dq'_i}{d\varkappa_k}\right)_{\varkappa=0} = \delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{q^2},$$

получим следующее уравнение на  $f(\mathbf{q}_\perp)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} (\delta_{ik} - x_i x_k) n_k = 2i\beta f, \quad (80)$$

где

$$x_i = \frac{q_i}{q}, \quad -\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_{\mathbf{x}=0} = i\alpha_k, \quad \beta = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}), \quad i, k = 1, 2.$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Его решение определяется с точностью до произвольной функции от скалярного аргумента  $\zeta = (1 - x^2)/(1 - z^2)$ , здесь  $z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\perp / q$ . Произвольной является также постоянная  $\beta$ . Указанный произвол фиксируется требованием, чтобы функция  $\psi(\mathbf{q}_\perp)$  кроме условия (77) была также собственной функцией оператора Казимира  $\hat{K}$ :

$$\hat{K} \psi(\mathbf{q}_\perp) = b^2 \psi(\mathbf{q}_\perp). \quad (81)$$

Это приводит к соответствующему уравнению на функцию  $f$ :

$$(x_i x_k - \delta_{ik}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + 2\mathbf{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{b^2 q^2}{1 - x^2} f = 0. \quad (82)$$

Система уравнений (80) и (82) эквивалентна системе уравнений (77) и (81). Ее решение приводит к базисным функциям типа плоских волн.

Приведем окончательный результат. Введем обозначение

$$\psi(\mathbf{q}_\perp) \equiv \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}).$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — двумерный единичный вектор, введенный в уравнении (77),  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{n}\mu$ , а  $\mu$  было определено в (22). Тогда

$$\xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) = \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} \left( \frac{q - \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_\perp}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} \right)^{-\frac{1}{2} + i\mu} = u_0 (u \cdot n)^{-\frac{1}{2} + i\mu}, \quad (83)$$

$n = (1, \mathbf{n})$  — трехмерный изотропный вектор на гиперboloиде, метрика скалярного произведения определена  $(+, -, -)$ . Из соотношения (78) между  $f$  и  $\psi$  следует, что

$$f(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) = (u \cdot n)^{-\frac{1}{2} + i\mu}.$$

Это есть двумерная функция Шапиро [52]. Ее форма имеет универсальный вид, так как неприводимые представления группы  $SO(m, 1)$  реализуются этой же функцией, только размерность гиперболических векторов  $n$  и  $u$  равна  $m + 1$ .

В области  $(q_\perp/q) \ll 1$ ,  $(1/q^2 b^2) \ll 1$  имеем простое асимптотическое разложение

$$f(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) = e^{i\mathbf{b} \cdot \mathbf{q}_\perp} \left( 1 + O\left(\frac{q_\perp}{q}\right) + O\left(\frac{1}{q^2 b^2}\right) \right). \quad (84)$$

Оно устанавливает связь между плоской волной на группе  $SO_\mu(2, 1)$  и ее аналогом на группе  $E(2)$ , реализуемой алгеброй (66), и позволяет сохранить интерпретацию параметра  $\mathbf{b}$  как «прицельного» параметра [42–44]. Но в таком обобщении мы можем работать в любой системе отсчета и во всей области изменения импульсов. Практически переход к обобщенному параметру  $\mathbf{b}$  сводится к замене трансформационного ядра

$$\exp(i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b}) \rightarrow \xi(\mathbf{q}_\perp, \mathbf{b})$$

и введению состояний  $|\boldsymbol{\mu}, q\rangle_{SO_\mu(2, 1)}$  вместо  $|\mathbf{b}, q^+\rangle_{E(2)}$ . Также такое рассмотрение решает проблему прямого и обратного преобразования  $(\mathbf{q}_\perp) \Leftrightarrow (\mathbf{b})$ , связанную с конечностью интервала значений  $q_\perp$  при фиксированной энергии  $E_q$  или  $p^+$ .

Приведем еще одно соотношение, характерное для плоских волн на евклидовой плоскости и на поверхности, определяемой движениями (72). Как

показано в [31], справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} d\varphi f(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) = 2\pi P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} \right), \quad (85)$$

где  $\varphi$  — направляющий угол вектора  $\mathbf{n}$ . Теперь воспользуемся разложением Фока [27]

$$P_{-1/2+i\mu}(\operatorname{ch} \alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}} \left\{ J_0(\mu\alpha) + \frac{1}{8\mu} \left( \operatorname{cth} \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) J_1(\mu\alpha) + \dots \right\}. \quad (86)$$

Подставляя (84) и (86) в равенство (85) и переходя к пределу  $q_\perp/q \ll 1$ ,  $1/q^2 b^2 \ll 1$ , получим известное из эйконоального формализма соотношение

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\mathbf{b} \cdot \mathbf{q}_\perp} = 2\pi J_0(bq_\perp).$$

Совокупность функций  $\xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu})$  образует полную ортонормируемую систему в передней ( $q_3 = +\sqrt{q^2 - q_\perp^2}$ ) и в задней ( $q_3 = -\sqrt{q^2 - q_\perp^2}$ ) полусфере независимо:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) \bar{\xi}(\mathbf{q}'_\perp, \boldsymbol{\mu}') d\Omega_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\operatorname{th}(\pi\mu)} \delta^{(2)}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}') \text{ — ортогональность,} \quad (87)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) \bar{\xi}(\mathbf{q}'_\perp, \boldsymbol{\mu}') d\Omega_{\boldsymbol{\mu}} = q(q^2 - q_\perp^2)^{1/2} \delta^{(2)}(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{q}'_\perp) \text{ — полнота,} \quad (88)$$

где  $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{n} = (\mu \cos \varphi, \mu \sin \varphi)$ ,  $\delta^2(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}') = \delta(\mu - \mu')\delta(\varphi - \varphi')/\mu$ . Здесь и далее для обозначения дифференциальных объемов будем использовать

$$d\Omega_{\mathbf{q}} = \frac{1}{q\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} d\mathbf{q}_\perp, \quad d\Omega_{\boldsymbol{\mu}} = \operatorname{th}(\pi\mu) d\boldsymbol{\mu}.$$

Таким образом, любую функцию  $F(\mathbf{q})$  как функцию на группе  $SO_\mu(2,1)$  можно однозначно разложить по базису  $\xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu})$  в области  $q_3 > 0$  (или  $q_3 < 0$  — независимо):

$$F(\mathbf{q}) = \int \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) C(\boldsymbol{\mu}) d\Omega_{\boldsymbol{\mu}},$$

$$C(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\xi}(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) F(\mathbf{q}) d\Omega_{\mathbf{q}}.$$

Эти соотношения позволяют построить  $N$ -частичное пространство Фока, в котором одна из частиц находится в состоянии с определенным пространственным параметром  $\boldsymbol{\mu}$ .

**2.3. Пространство Фока на группе  $SO_\mu(2,1)$ .** Рассмотрим теперь процесс, когда одна из частиц рождается в состоянии с определенным пространственным параметром  $\boldsymbol{\mu}$ , с определенной энергией  $E_q$  и с определенным знаком проекции импульса на выбранную ось  $z$ . Обозначим это состояние как  $|\boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle$ , где  $\epsilon = \pm 1$  — знак проекции.

Аналогично этому введем состояние с определенным значением перпендикулярного импульса  $\mathbf{q}_\perp$ , с определенной энергией  $E_q$  и с определенным знаком проекции импульса на выбранную ось  $z$ . Обозначим его как  $|\mathbf{q}_\perp, q_3 = \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2}\rangle$ .

Между такими состояниями на сфере  $q^2 = \text{const}$  существует взаимно-однозначное соответствие

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2} | &= \int \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) \langle \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon | d\Omega_\mu, \\ \langle \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon | &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \bar{\xi}(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) \langle \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2} | d\Omega_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (89)$$

основанное на соотношениях полноты и ортогональности функций  $\xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu})$ .

Используя соотношения (32) и (89), получим для единичного оператора в фоковском одночастичном пространстве следующее представление:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \int |\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}| d\mathbf{q} = \sum_{\epsilon=\pm 1} \int q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} |\mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2}\rangle \langle \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2}| = \\ &= (2\pi)^2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \int q^2 dq d\Omega_\mu |\boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle \langle \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon|. \end{aligned}$$

Последнее равенство однозначно определяет матричный элемент  $\langle \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon | \boldsymbol{\nu}, k, \eta \rangle$ . Действительно, имеем

$$|\boldsymbol{\nu}, k, \eta\rangle = \hat{I} |\boldsymbol{\nu}, k, \eta\rangle = (2\pi)^2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \int q^2 dq d\Omega_\mu |\boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle \langle \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon | \boldsymbol{\nu}, k, \eta\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$(2\pi)^2 q^2 \text{th}(\pi\mu) \langle \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon | \boldsymbol{\nu}, k, \eta \rangle = \delta^{(2)}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\nu}) \delta(q - k) \delta_{\epsilon\eta},$$

а также выражение для матричного элемента перехода

$$\langle \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2} | \boldsymbol{\nu}, k, \eta \rangle = \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\nu}) \frac{1}{(2\pi)^2} \delta_{\epsilon\eta} \frac{1}{q^2} \delta(k - q).$$

Здесь использовано разложение (89). Из условия  $\langle \mathbf{q} | \mathbf{k} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k})$  следует

$$\langle \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2} | \mathbf{k}_\perp, \eta\sqrt{k^2 - k_\perp^2} \rangle = \delta_{\epsilon\eta} \delta^{(2)}(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{k}_\perp) \delta(q - k) \frac{\sqrt{k^2 - k_\perp^2}}{k}.$$



Рассмотрим теперь процесс, в котором в конечном состоянии находится  $s$  различных частиц с импульсами  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_s$  и одна частица в состоянии  $|\boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle$ . Базисные векторы в  $(s+1)$ -частичном фоковском пространстве определим как прямое произведение одночастичных базисных векторов. Введем обозначения

$$|\{q_s\}; \mathbf{q}\rangle \equiv |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_s; \mathbf{q}\rangle, \quad (90)$$

$$|\{q_s\}; \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2}\rangle \equiv |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_s; \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2}\rangle, \quad (91)$$

$$|\{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle \equiv |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_s; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle. \quad (92)$$

Это эквивалентные полные наборы базисных векторов в  $(s+1)$ -частичном пространстве Фока, где  $s = 0, 1, \dots$ . В соответствии с этим имеем три представления единичного оператора в полном пространстве Фока

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \sum_s \int \left( \prod_{i=1}^s dq_i \right) d\mathbf{q} |\{q_s\}; \mathbf{q}\rangle \langle \{q_s\}; \mathbf{q}| = \\ &= \sum_s \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \left( \prod_{i=1}^s dq_i \right) q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} |\{q_s\}; \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2}\rangle \times \\ &\times \langle \{q_s\}; \mathbf{q}_\perp, \epsilon\sqrt{q^2 - q_\perp^2}| = (2\pi)^2 \sum_s \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \left( \prod_{i=1}^s dq_i \right) q^2 dq d\Omega_{\boldsymbol{\mu}} \times \\ &\times |\{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle \langle \{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon|. \quad (93) \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует выражение для матричного элемента  $\langle \{k_s\}; \boldsymbol{\nu}, k, \eta | \{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon \rangle$ :

$$\langle \{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon | \{k_s\}; \boldsymbol{\nu}, k, \eta \rangle = \frac{\delta_{\epsilon\eta} \delta(q-k) \delta^{(2)}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\nu})}{(2\pi)^2 q^2 \text{th}(\pi\mu)} \prod_{i=1}^s \delta^{(3)}(\mathbf{q}_i - \mathbf{k}_i). \quad (94)$$

Этот матричный элемент возникает при вычислении сечения и будет использован ниже.

Полученные разложения единичного оператора  $\hat{I}$  позволяют получить связь между дифференциальными сечениями и матричными элементами  $S$ -матрицы.

#### 2.4. Сечения процессов с рождением частицы в состоянии из $SO_\mu(2,1)$ .

В этом разделе мы получим выражение сечения через матричные элементы  $S$ -матрицы, когда конечное состояние определяется вектором фоковского пространства  $\langle \{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon |$ , т. е. рождается  $s+1$  частиц, причем одна из них в состоянии из  $SO_\mu(2,1)$ . Формализм такой процедуры подробно описан в [53].

Перечислим некоторые важные моменты. В основе лежит квантово-механическая интерпретация нормы одночастичного состояния  $|\psi\rangle$ . Такое состояние может быть представлено в виде волнового пакета

$$|\Psi\rangle = \int f(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) d\mathbf{k} |0\rangle, \quad (95)$$

где  $f(\mathbf{k})$  — волновая функция, дающая квантово-механическое описание состояния  $|\Psi\rangle$ ;  $a^+(\mathbf{k})$  — оператор рождения частицы с импульсом  $\mathbf{k}$ . При этом, если норма этого состояния

$$\|\Psi\|^2 = \langle\Psi|\Psi\rangle = \int |f(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k}$$

равна единице, то  $|f(\mathbf{k})|^2$  интерпретируется как плотность соответствующей вероятности (борновская интерпретация). Если эта норма равна  $N > 1$ , то  $f(\mathbf{k})$  интерпретируется как одночастичная функция распределения частиц в статистическом ансамбле с полным числом частиц, равным  $N$ .

Состояние из частиц нескольких сортов строится как прямое произведение состояний соответствующих ансамблей, а норма такого состояния равна произведению числа частиц в ансамблях:

$$\|\Psi\|^2 = N_1 \cdot N_2 \cdots N_s.$$

В качестве примера рассмотрим ансамбль частиц со строго фиксированным импульсом  $\mathbf{k}$ :

$$|1\rangle = (2\pi)^{3/2} n^{1/2} a^+(\mathbf{k}) |0\rangle.$$

Смысл параметра  $n$  следует из определения нормы

$$\|1\rangle\|^2 = (2\pi)^3 n \delta(0) = n \cdot V = N.$$

Отсюда видно, что  $n = N/V$ , т. е. является плотностью частиц в ансамбле (в потоке).

Волновая функция  $f(\mathbf{k})$ , определенная в (95), для такого потока есть

$$f(\mathbf{k}) = (2\pi)^{3/2} n^{1/2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0).$$

Таким образом, состояние  $|1\rangle$  является состоянием с неограниченной нормой и описывает поток частиц с фиксированным импульсом  $\mathbf{k}$  и плотностью частиц в этом потоке, равной  $n$ . Если имеется  $s$  потоков с различными импульсами  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_s$ , то соответствующее состояние определяется как прямое произведение состояний для каждого потока

$$|s\rangle = \prod_{i=1}^s \left( (2\pi)^{3/2} n_i^{1/2} a^+(\mathbf{q}_i) \right) |0\rangle. \quad (96)$$

Норма такого состояния равна

$$||s\rangle|^2 = N_1 \cdot N_2 \cdots N_s, \quad (97)$$

где  $N_i = n_i V$  — число частиц  $i$ -го сорта.

При рассмотрении столкновения двух пучков с определенными импульсами и плотностями будем строить начальное состояние  $|\text{in}\rangle$  как состояние (96) при  $s = 2$ . Норма этого состояния согласно (97) равна  $||s\rangle|^2 = N_1 \cdot N_2$ .

Можно ли придать смысл произведению числа частиц  $N_1 \cdot N_2$ ?

Эту норму можно интерпретировать в рамках гипотезы о динамическом хаосе как среднее число столкновений частиц из разных пучков. При каждом таком столкновении рождается «звезда» из частиц конечного состояния. В силу унитарности  $S$ -матрицы  $SS^+ = I$ , поэтому

$$|\text{out}\rangle|^2 = |\text{in}\rangle|^2,$$

где  $|\text{out}\rangle = \hat{S}|\text{in}\rangle$ . Таким образом, норма  $|\text{out}\rangle$ -состояния определяет число «звезд», родившихся за бесконечное время  $T$  в бесконечном объеме  $V$ .

Рассмотрим эксклюзивный процесс  $2 \rightarrow s+1$  и разложим состояние  $|\text{out}\rangle$  по базису (90), (91), выделяя в единичном операторе (93) соответствующее слагаемое. Тогда получим

$$\begin{aligned} |\text{out}\rangle &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \left( \prod_{i=0}^s d\mathbf{q}_i \right) q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} \times \\ &\quad \times \left| \{q_s\}; \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right\rangle \left\langle \{q_s\}; \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right| \hat{S} |\text{in}\rangle = \\ &= (2\pi)^2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \left( \prod_{i=0}^s d\mathbf{q}_i \right) q^2 dq d\Omega_{\mu} \left| \{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon \right\rangle \left\langle \{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon \right| \hat{S} |\text{in}\rangle. \end{aligned}$$

Полное число событий рождения  $(s+1)$ -частичного состояния за бесконечное время и во всем пространстве определяется нормой состояния  $|\text{out}\rangle$  и равно

$$\begin{aligned} N &= |\hat{S} - \hat{I}|\text{in}\rangle|^2 = \\ &= \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \left( \prod_{i=1}^s d\mathbf{q}_i \right) q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} \left| \left\langle \{q_s\}; \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right| (\hat{S} - \hat{I}) |\text{in}\rangle \right|^2 = \\ &= (2\pi)^2 \sum_{\epsilon=\pm 1} \int \left( \prod_{i=1}^s d\mathbf{q}_i \right) q^2 dq d\Omega_{\mu} \left| \left\langle \{q_s\}; \boldsymbol{\mu}, q, \epsilon \right| (\hat{S} - \hat{I}) |\text{in}\rangle \right|^2. \quad (98) \end{aligned}$$

Здесь преимущественно использовалось предположение о том, что все  $s+1$  частиц разные, поэтому их операторы рождения и уничтожения не коррелируют

между собой. В противном случае необходимо учесть принцип тождественности. Также было использовано выражение для матричного элемента (94).

Соотношения (98) являются исходными для получения дифференциальных сечений по соответствующим кинематическим переменным. Они также задают общую нормировку на полное число событий  $A + B \rightarrow C + \{s\}$ , безотносительно к их конечным состояниям.

Наконец, сечения процесса  $\sigma(1 \rightarrow f)$  (стационарное внешнее поле) и процесса  $\sigma(2 \rightarrow f)$  следуют из (98) после выделения соответствующих кинематических множителей

$$\begin{aligned} \sigma(1 \rightarrow f) &= \frac{E_p}{pnT} |(S - I)|_{\text{in}}|^2, & |\text{in}\rangle &= (2\pi)^{3/2} n^{1/2} a^+(\mathbf{p})|0\rangle, \\ \sigma(2 \rightarrow f) &= \frac{1}{n_1 n_2 T V |\mathbf{u}|} |(S - I)|_{\text{in}}|^2, & |\text{in}\rangle &= (2\pi)^3 n_1^{1/2} n_2^{1/2} a_A^+(\mathbf{p}_1) a_B^+(\mathbf{p}_2) |0\rangle, \end{aligned} \quad (99)$$

где  $\mathbf{u}$  — относительная скорость начальных частиц.

Таким образом, показано, что алгебра генераторов группы Пуанкаре содержит подалгебру, которая при реализации ее на поверхности  $q^2 = \text{const}$  представляет собой алгебру  $SO(2,1)$ . Генераторы этой алгебры  $d_1, d_2, L_3$  имеют точную физическую интерпретацию. Квантовые числа состояний, построенных на этой алгебре, определяют координаты эффективной области рождения частицы. Они образуют полную систему состояний в одночастичном пространстве Фока. Это позволяет однозначно связать полное сечение процесса с соответствующим матричным элементом  $S$ -матрицы. В следующем разделе мы получим точное соотношение между распределениями частиц по импульсу и по пространственному параметру вылета частицы, что позволяет проанализировать структуру области рождения частиц на основе экспериментальных данных по дифференциальным сечениям процесса.

### 3. СВЯЗЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ПО ПОПЕРЕЧНОМУ ИМПУЛЬСУ И ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ПАРАМЕТРУ ВЫЛЕТА ДЕТЕКТИРУЕМОЙ ЧАСТИЦЫ

В этом разделе в рамках изложенного выше формализма алгебры  $SO_\mu(2,1)$  получена и проанализирована связь между дифференциальным сечением рождения частицы  $C$  по поперечному импульсу и дифференциальным сечением по пространственному параметру  $\mathbf{b}$ , характеризующему координаты области рождения частицы  $C$ . Это распределение тесно связано с пространственной структурой взаимодействующих частиц и допускает наглядную физическую интерпретацию.

### 3.1. Дифференциальное сечение по поперечному импульсу частицы $C$ .

Мы подробно воспроизведем вывод связи дифференциального сечения по импульсу частицы  $C$  с матричным элементом  $S$ -матрицы [53], поскольку аналогичное вычисление для сечения по пространственному параметру  $\boldsymbol{\mu}$  [24] будет сделано в рамках той же схемы.

Рассмотрим процесс  $A + B \rightarrow C + D$  для двух физических случаев. В первом частица  $C$  рождается с определенным импульсом  $\mathbf{q}$ , а во втором — в состоянии  $|\boldsymbol{\mu}, q, \epsilon\rangle$ . Дифференциальное сечение по поперечному импульсу частицы  $C$  равно

$$\frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\Omega_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{n_1 n_2 TV |\mathbf{u}|} \frac{dN^{(\epsilon)}}{d\Omega_{\mathbf{q}}}. \quad (100)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — относительная скорость начальных частиц;  $n_1, n_2$  — плотности частиц  $A$  и  $B$  соответственно, ось  $z$  направлена вдоль импульса частицы  $A$ , а  $N$  — полное число событий рождения частиц  $C$  и  $D$  за бесконечное время  $T$  во всем пространстве объема  $V$ . Оно равно

$$N = \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{q}_1 q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} \left| \langle \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}; \mathbf{q}_1 | \hat{F} | \text{in} \rangle \right|^2, \quad (101)$$

где  $\mathbf{q}_C = (\mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2})$ ,  $\mathbf{q}_D = \mathbf{q}_1$ .

Операторы рождения относятся к частицам  $A$  и  $B$ , а оператор  $\hat{F}$  связан с  $S$ -матрицей соотношением  $S = I + i\hat{F}$ . Трансляционная инвариантность позволяет представить матричный элемент от  $\hat{F}$  в виде

$$\langle f | \hat{F} | \text{in} \rangle = \delta^{(4)}(q_{\text{in}} - q_f) \langle f | \hat{A} | \text{in} \rangle$$

при условии, что состояния  $|\text{in}\rangle$ ,  $|f\rangle$  обладают определенным 4-импульсом  $q_{\text{in}}$ ,  $q_f$ . Тогда

$$\begin{aligned} N &= \frac{TV}{(2\pi)^4} \sum_{\epsilon=\pm 1} \int d\mathbf{q}_1 q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} \delta^{(4)}(q + q_1 - P) \times \\ &\quad \times \left| \langle \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}; \mathbf{q}_1 | \hat{A} | \text{in} \rangle \right|^2 = \\ &= \frac{TV}{(2\pi)^4} \sum_{\epsilon=\pm 1} \int q^2 dq d\Omega_{\mathbf{q}} \delta(E_q + \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{P})^2 + m_D^2} - P^0) \times \\ &\quad \times \left| \langle \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2}; \mathbf{q}_1 = \mathbf{P} - \mathbf{q} | \hat{A} | \text{in} \rangle \right|^2. \end{aligned}$$

Здесь 4-импульс  $P = P_1 + P_2$  — сумма импульсов начальных частиц. В последнем равенстве  $\delta$ -функция определяет энергетическую поверхность реакции для частицы  $C$

$$E_q + \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{P})^2 + m_D^2} - P^0 \Big|_{q=\bar{q}} = 0.$$

Справедливо соотношение

$$\delta\left(E_q + \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{P})^2 + m_D^2} - P^0\right) = \lambda(\mathbf{q}) \delta(q - \tilde{q}), \quad (102)$$

где

$$\lambda(\mathbf{q}) = \frac{q E_q E_D}{q^2 P^0 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{P}) E_q} \Big|_{q=\tilde{q}}.$$

В с. ц. м.  $\mathbf{P} = 0$ , поэтому  $\tilde{q}$  зависит только от инвариантной массы  $s = (E_A + E_B)^2$ ,  $m_C$  и  $m_D$ . Таким образом,  $E_C^* = \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_C^2 - m_D^2)$ ,  $\tilde{q} = p_C^* = \sqrt{(E_C^*)^2 - m_C^2}$ . Символ (\*) означает с. ц. м. (далее везде  $\mathbf{P} = 0$ ).

Переходя от полного числа событий  $N^{(\epsilon)}$  (101) к полному сечению  $\sigma^{(\epsilon)}$  в соответствии с (100) и интегрируя по  $q$ , получим

$$\sigma^{(\epsilon)} = \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \int d\Omega_{\mathbf{q}} \left| A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp}) \right|^2, \quad (103)$$

где введены следующие обозначения:

$$A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp}) \equiv \left\langle \mathbf{q}_C = \left( \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right); -\mathbf{q}_D = \left( \mathbf{q}_{\perp}, \epsilon \sqrt{q^2 - q_{\perp}^2} \right) \Big| \hat{A} \text{ in} \right\rangle.$$

Матричный элемент  $A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp})$  (рис. 8) описывает процесс  $A + B \rightarrow C + D$ , в котором входящие и выходящие частицы лежат на энергетической поверхности реакции (выполняются законы сохранения энергии-импульса). Таким образом, для дифференциального сечения  $d\sigma^{(\epsilon)}/d\Omega_{\mathbf{q}}$  из (103) следует

$$\frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\Omega_{\mathbf{q}}} = \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \left| A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp}) \right|^2. \quad (104)$$

Теперь рассмотрим случай, когда частица  $C$  рождается в состоянии  $|\mu, q, \epsilon\rangle$ .

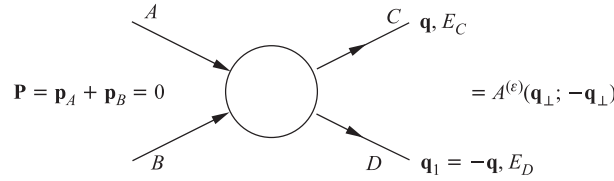


Рис. 8. Пояснение к определению кинематики матричного элемента

**3.2. Дифференциальное сечение по пространственному параметру  $\mu$  в с.ц.м. частиц  $A$  и  $B$ .** Основная трудность построения сечения  $d\sigma/d\mu$  заключается в том, что матричный элемент  $\langle \mu, q, \epsilon | \hat{F} | \text{in} \rangle$  трансляционно не инвариантен, так как имеется выделенная точка в поперечной плоскости. Это приводит к невозможности выделить бесконечный множитель  $TV$ . Этих и других проблем можно избежать, начав построение распределения по  $\mu$  сразу с рассмотрения полного сечения в импульсном пространстве.

Используя разложение (89), представим двухчастичное состояние в пространстве Фока в виде

$$\langle \mathbf{q}_\perp, \epsilon \sqrt{q^2 - q_\perp^2}; \mathbf{q}_\perp | = \int d\Omega_\mu \xi(\mathbf{q}_\perp, \mu) \langle \mu, q, \epsilon; \mathbf{q}_\perp | d\Omega_\mu. \quad (105)$$

Подставляя это разложение в матричный элемент  $A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp)$  из (103), получим для полного сечения следующее выражение:

$$\sigma^{(\epsilon)} = \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \int d\Omega_\mathbf{q} d\Omega_\mu \xi(\mathbf{q}_\perp, \mu) A^{(\epsilon)}(\mu; -\mathbf{q}_\perp) \bar{A}^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp),$$

где

$$A^{(\epsilon)}(\mu; -\mathbf{q}_\perp) \equiv \langle \mu, q, \epsilon; -\mathbf{q}_D = (\mathbf{q}_\perp, \epsilon \sqrt{q^2 - q_\perp^2}) | A | \text{in} \rangle, \quad q = \tilde{q}.$$

Отсюда для дифференциального сечения рождения частицы  $C$  в состоянии  $\langle \mu, q, \epsilon |$  получим выражение

$$\frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\Omega_\mu} = \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \int d\Omega_\mathbf{q} \xi(\mathbf{q}_\perp, \mu) A^{(\epsilon)}(\mu; -\mathbf{q}_\perp) \bar{A}^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp). \quad (106)$$

Используя обратное к (105) соотношение (89) и подставляя его в (106), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\Omega_\mu} = & \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \int d\Omega_\mathbf{q} d\Omega_\mathbf{k} \xi(\mathbf{q}_\perp, \mu) \bar{\xi}(\mathbf{k}_\perp, \mu) \times \\ & \times A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{\Delta}; -\mathbf{q}_\perp) \bar{A}^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp), \end{aligned} \quad (107)$$

где  $\mathbf{\Delta} = \mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp$ . Возникший здесь матричный элемент  $A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp + \mathbf{\Delta}; -\mathbf{q}_\perp)$  описывает процесс  $A + B \rightarrow C + D$  вне энергетической поверхности. Параметр  $\mathbf{\Delta}$  характеризует величину отклонения поперечного импульса частицы  $C$  от его значения на энергетической поверхности. Это приводит к тому, что вычисление сечения  $d\sigma^{(\epsilon)}/d\Omega_\mu$  содержит процедуру аналитического продолжения амплитуды  $A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp)$  в нефизическую область по поперечному

импульсу частицы  $C$  и приводит к распределению, зависящему от выбора конкретной модели соответствующей амплитуды. Из выражения (107) с учетом выражения (103) нетрудно получить условие нормировки

$$\sigma^{(\epsilon)} = \int \left( \frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\Omega_{\mu}} \right) d\Omega_{\mu} = \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \int d\Omega_{\mathbf{q}} \left| A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp}) \right|^2. \quad (108)$$

В соотношении (107) разложим амплитуду  $A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{\Delta}; -\mathbf{q}_{\perp})$  в ряд Тейлора по степеням виртуальности  $\Delta_i$ :

$$A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp} + \mathbf{\Delta}; -\mathbf{q}_{\perp}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( A^{(n)}(\mathbf{q}) \cdot \Delta^n \right),$$

где

$$\begin{aligned} A^{(0)}(\mathbf{q}) &= A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp}) \text{ — амплитуда на энергетической поверхности,} \\ A^{(1)}(\mathbf{q}) \cdot \Delta &= \left. \frac{\partial A^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp})}{\partial k_{\perp i}} \right|_{\mathbf{k}_{\perp}=\mathbf{q}_{\perp}} \Delta_i, \\ A^{(2)}(\mathbf{q}) \cdot \Delta^2 &= \left. \frac{\partial^2}{\partial k_{\perp i} \partial k_{\perp j}} A^{(\epsilon)}(\mathbf{k}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp}) \right|_{\mathbf{k}_{\perp}=\mathbf{q}_{\perp}} \Delta_i \Delta_j, \\ &\dots \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Пусть  $\rho^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu}, s)$  — функция распределения по параметру вылета  $\boldsymbol{\mu}$  детектируемой частицы  $C$  в квазиупругом процессе  $A + B \rightarrow C + D$ :

$$\rho^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu}, s) = \frac{1}{\sigma^{(\epsilon)}} \frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\Omega_{\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{(\epsilon, n)}(\boldsymbol{\mu}, s), \quad (109)$$

где

$$\begin{aligned} \rho^{(\epsilon, n)}(\boldsymbol{\mu}, s) &= \frac{1}{\sigma^{(\epsilon)}} \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \int d\Omega_{\mathbf{q}} d\Omega_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{q}_{\perp}, \boldsymbol{\mu}) \bar{\xi}(\mathbf{k}_{\perp}, \boldsymbol{\mu}) \times \\ &\quad \times \frac{1}{n!} \left( A^{(\epsilon, n)}(\mathbf{q}) \cdot \Delta^n \right) \bar{A}^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_{\perp}; -\mathbf{q}_{\perp}). \end{aligned} \quad (110)$$

Из соотношения (108) следует условие нормировки

$$\int \rho^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu}, s) d\Omega_{\mu} = 1. \quad (111)$$

Нетрудно получить, что

$$\int \rho^{(\epsilon, n)}(\boldsymbol{\mu}, s) d\Omega_{\mu} = 0, \quad (112)$$



это следствие того, что  $\Delta_i \cdot \delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{q}_\perp) = 0$ . Таким образом, в полное сечение дает вклад только

$$\rho^{(\epsilon,0)}(\boldsymbol{\mu}, s) = \frac{1}{\sigma^{(\epsilon)}} \frac{\bar{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \times \\ \times \int d\Omega_{\mathbf{q}} d\Omega_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) \bar{\xi}(\mathbf{k}_\perp, \boldsymbol{\mu}) |A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp)|^2. \quad (113)$$

Если в выражении (109) ограничиться слагаемым  $n = 0$ , то из (113) после интегрирования по  $\mathbf{k}$  получим для распределения следующее соотношение:

$$\frac{1}{\sigma^{(\epsilon)}} \frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\boldsymbol{\mu}} \approx \rho^{(\epsilon,0)}(\boldsymbol{\mu}, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma^{(\epsilon)}} \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \varkappa(\mu) \times \\ \times \int d\Omega_{\mathbf{q}} \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} P_{-\frac{1}{2}+i\mu} \left( \frac{q}{\sqrt{q^2 - q_\perp^2}} \right) \frac{d\sigma^{(\epsilon)}}{d\Omega_{\mathbf{q}}}, \quad (114)$$

где

$$\varkappa(\mu) = \int \xi(\mathbf{k}_\perp, \boldsymbol{\mu}) d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi^2}{\operatorname{ch}(\pi\mu)} \frac{\sqrt{\pi}}{\left| \Gamma\left(\frac{i\mu}{2} + \frac{3}{4}\right) \right|^2}. \quad (115)$$

При вычислении (114) было использовано интегральное соотношение (85).

Как видно, в этом приближении распределение по  $\mu$  определяется дифференциальным сечением  $d\sigma^{(\epsilon)}/d\Omega_{\mathbf{q}}$ , следовательно, является экспериментально наблюдаемой величиной. Все поправки, связанные с разложением амплитуды в окрестности энергетической поверхности, не меняют значения полного сечения рождения частицы  $C$  с параметром вылета  $\mu$ , но изменяют структуру распределения  $\rho^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu}, s)$ . Вычисление этих поправок связано с выбором конкретной модели амплитуды.

Вычислим  $\rho^{(\epsilon,1)}(\boldsymbol{\mu}, s)$ , используя представление (110). При этих вычислениях возникает интеграл

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} (A^{(1)}(\mathbf{q}) \cdot \Delta) \xi(\mathbf{k}_\perp, \boldsymbol{\mu}) = \\ = \int d\Omega_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k}_\perp, \boldsymbol{\mu}) \left( -q_{\perp i} \frac{\partial A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp)}{\partial q_{\perp i}} + k_i \frac{\partial A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp)}{\partial q_{\perp i}} \right).$$

Выполним в этом соотношении интегрирование по  $\mathbf{k}$ , получим

$$\int d\Omega_{\mathbf{k}} (A^{(1)}(\mathbf{q}) \cdot \Delta) \xi(\mathbf{k}_\perp, \boldsymbol{\mu}) = \left[ \varkappa^{(1)}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{n} - \varkappa(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{q}_\perp \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\perp} A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp),$$

где

$$\varkappa^{(1)}(\boldsymbol{\mu}) = \int (\mathbf{n}\mathbf{k}_\perp) \xi(\mathbf{k}_\perp, \boldsymbol{\mu}) d\Omega_{\mathbf{k}} = -4\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(i\mu + 1/2)}{\Gamma(i\mu + 3/2)} \left| \Gamma\left(\frac{i\mu + 5/2}{2}\right) \right|^2,$$

а  $\varkappa(\boldsymbol{\mu})$  определена в (115). Таким образом, для распределения  $\rho^{(\epsilon,1)}(\boldsymbol{\mu}, s)$  получим

$$\begin{aligned} \rho^{(\epsilon,1)}(\boldsymbol{\mu}, s) &= \frac{1}{\sigma^{(\epsilon)}} \frac{\tilde{q}^2 \lambda(s)}{(2\pi)^4 n_1 n_2 |\mathbf{u}|} \int d\Omega_{\mathbf{q}} \xi(\mathbf{q}_\perp, \boldsymbol{\mu}) \bar{A}^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp) \times \\ &\times \left[ \varkappa^{(1)}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{n} - \varkappa(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{q}_\perp \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_\perp} A^{(\epsilon)}(\mathbf{q}_\perp; -\mathbf{q}_\perp). \end{aligned} \quad (116)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int \rho^{(\epsilon,1)}(\boldsymbol{\mu}, s) d\Omega_{\boldsymbol{\mu}} = 0$$

в соответствии с общим соотношением (112). Хотя  $\rho^{(\epsilon,1)}(\boldsymbol{\mu}, s)$  явно комплексно, полное распределение (109) действительно по построению. Поэтому в практических целях имеет смысл только действительная часть от поправок  $\rho^{(\epsilon,n)}(\boldsymbol{\mu}, s)$ .

Рассмотрим подробнее приближение  $\rho^{(\epsilon)}(\boldsymbol{\mu}, s) = \rho^{(\epsilon,0)}(\boldsymbol{\mu}, s)$  (соотношение (114)). В этом соотношении перейдем в импульсном пространстве к гиперболическим переменным (76). В этих переменных дифференциальный объем имеет вид  $d\Omega_{\mathbf{q}} = d\mathbf{u}/u_0^3 = du_0 d\varphi/u_0^2$ , где  $\varphi$  — полярный угол вектора  $\mathbf{q}_\perp$ . С учетом этого и при условии, что дифференциальное сечение  $d\sigma^\pm/d\Omega_{\mathbf{q}}$  не зависит от полярного угла  $\varphi$ , получим

$$\frac{d\sigma^\pm}{d\mu} = \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \varkappa(\mu) \int_1^\infty \frac{du_0}{u_0} P_{-1/2+i\mu}(u_0) \left( \frac{d\sigma^\pm}{d\Omega_{\mathbf{q}}} \right), \quad (117)$$

где угловая часть сечения в правой части интеграла выражена через переменную  $u_0$ .

Наконец, выразим дифференциальное сечение по  $\mu$  через дифференциальное сечение по углу рассеяния. Пусть  $\theta$  и  $\varphi$  — аксиальный и полярный углы импульса  $\mathbf{q}$ ,  $z = \cos \theta$ . Перейдем в (117) к интегрированию по этим углам, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^+}{d\mu} &= \frac{1}{2\pi} \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \varkappa(\mu) \int_0^1 \frac{dz}{z} P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{1}{z} \right) \frac{d\sigma}{dz}, \\ \frac{d\sigma^-}{d\mu} &= \frac{1}{2\pi} \mu \operatorname{th}(\pi\mu) \varkappa(\mu) \int_{-1}^0 \frac{dz}{|z|} P_{-1/2+i\mu} \left( \frac{1}{|z|} \right) \frac{d\sigma}{dz}, \end{aligned} \quad (118)$$

где  $d\sigma/dz$  есть дифференциальное сечение по косинусу угла рассеяния частицы  $C$  в процессе  $A + B \rightarrow C + D$ . Здесь учтено, что  $d\sigma^\pm/d\Omega_{\mathbf{q}}$  не зависит от  $\varphi$ , поэтому

$$\frac{d\sigma^\pm}{d\Omega_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{dz}.$$

Как следует из (118), в отличие от  $d\sigma^\pm/d\Omega_{\mathbf{q}}$  дифференциальное сечение  $d\sigma^\pm/d\Omega_{\boldsymbol{\mu}}$  не является положительно определенным на всем интервале  $\mu$ . При этом полное число асимптотических состояний с данным  $\mu$  регулируется соотношением (111). Положительно определенное распределение  $d\sigma/d\mu$  восстанавливается учетом поправок  $\rho^{(\epsilon, n)}(\boldsymbol{\mu}, s)$  (110). Размер этих поправок можно приближенно оценить из вкладов отрицательных областей  $\rho^{(\epsilon, 0)}(\boldsymbol{\mu}, s)$ . Обработка многих моделей показывает, что обычно поправка к  $\rho^{(\epsilon, 0)}(\boldsymbol{\mu}, s)$  мала,  $\sim 0,1\%$ .

**3.3. Вычисление  $\rho^{(\epsilon, 0)}(\boldsymbol{\mu}, s)$  в рамках простейших моделей  $d\sigma/d\Omega$ .** В качестве примера простейшей модели рассмотрим одночастичный обмен в  $t$ -канале для упругого рассеяния  $A + B \rightarrow A + B$  (29). Соответствующее сечение как функция  $u_0$  имеет полюсный вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= N_0 \frac{\alpha^2}{(t - M^2)^2} = \frac{\alpha^2 N_0}{(2q^2)^2} \frac{1}{(z_0 - z)^2} = \frac{\alpha^2 N_0}{(2z_0 q^2)^2} \frac{u_0^2}{(u_0 - \varepsilon/z_0)^2}, \\ z_0 &= 1 + \frac{2M^2 s}{\lambda(s, m_A^2, m_B^2)} = 1 + \frac{M^2}{2q^2}, \end{aligned} \quad (119)$$

где  $M$  — масса обменной частицы;  $\lambda(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz)$  — известная функция треугольника;  $\alpha$  — константа связи,

$$N_0 = (2\pi)^2 \frac{q^2 \tilde{\lambda}(\mathbf{q}_\perp)}{|\mathbf{u}|} = (2\pi)^2 \frac{(s^2 - (m_1^2 - m_2^2)^2)^2}{16s^3}.$$

В этом случае для сечения  $\sigma^\pm$  получаем

$$\sigma^\pm = \frac{\alpha^2 N_0}{(2q^2)^2} \frac{2\pi}{z_0(z_0 \mp 1)},$$

где

$$\sigma^{(\varepsilon)} = \int_0^\infty \left( \frac{d\sigma^{(\varepsilon)}}{d\mu} \right) d\mu = \begin{cases} \int_0^1 \left( \frac{d\sigma}{dz} \right) dz, & \varepsilon = 1, \\ \int_{-1}^0 \left( \frac{d\sigma}{dz} \right) dz, & \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Интеграл в (117) с таким сечением вычисляется аналитически. Нормированное распределение по пространственному параметру принимает вид

$$\frac{1}{\sigma^\varepsilon} \frac{d\sigma^\varepsilon}{db} = \frac{q^2 b \operatorname{th}(\pi\mu) \varkappa(\mu)}{2 \operatorname{ch}(\mu\pi)} \frac{z_0 - \varepsilon}{z_0} \left[ P_{i\mu-1/2} \left( \frac{-\varepsilon}{z_0} \right) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{z_0^2 - 1}} P_{i\mu-1/2}^1 \left( \frac{-\varepsilon}{z_0} \right) \right], \quad (120)$$

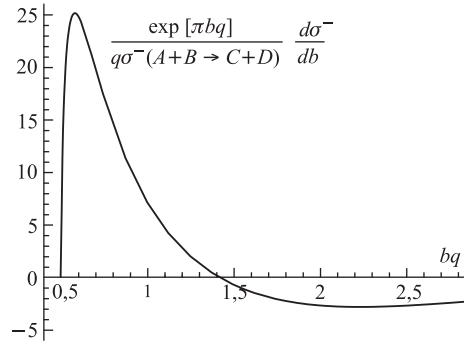


Рис. 9. Функция распределения по  $b$  в модели одночастичного обмена.  $bq < 1/2$  — область, запрещенная соотношением неопределенности,  $z_0 = 1,02$

$\sim 10^{-5}$ . Это обусловлено тем, что экспоненциальное падение  $I(b)$  в задней полусфере определяется радиусом  $R \sim q^{-1}$ , т.е.  $I(b) \sim \exp(-\pi bq)$  при  $bq \gg 1$ .

В области  $M^2/s \ll 1$  сечение имеет вид

$$\frac{1}{\sigma^-} \frac{d\sigma^-}{db} = q^2 b \frac{\operatorname{th}(\pi\mu) \varkappa(\mu)}{\operatorname{ch}(\mu\pi)} \left[ \frac{7 - 4\mu^2}{8} + O\left(\frac{M^2}{s}\right) \right],$$

$$\frac{1}{\sigma^+} \frac{d\sigma^+}{db} = q^2 b \frac{\operatorname{th}(\pi\mu) \varkappa(\mu)}{\operatorname{ch}(\mu\pi)} \left[ \frac{\operatorname{ch}(\mu\pi)}{\pi} + O\left(\frac{M^2}{s}\right) \right].$$

**3.4. Соотношение между  $\langle b^2 \rangle$  и дифференциальным сечением по поперечному импульсу частицы  $C$  в с.ц.м. частиц  $A$  и  $B$ .** Вычислим среднее значение квадрата пространственного параметра  $\langle b_\pm^2 \rangle$ . По определению среднего имеем

$$\langle \mu_\pm^2 \rangle = \frac{1}{\sigma^\pm} \int_0^\infty \mu^2 \frac{d\sigma^\pm}{d\mu} d\mu. \quad (121)$$

$P_{i\mu-1/2}^1(x)$  — присоединенная функция конуса. График распределения (120) изображен на рис. 9. Так как  $z_0 \geq 1$ , то аргумент функции конуса принадлежит отрезку  $[-1, 1]$ . При таком значении аргумента функция конуса положительна (а также присоединенные функции конуса при  $m > 0$ ). Поэтому сечение положительно определено при  $\varepsilon = 1$ . При  $\varepsilon = -1$  сечение знакопеременно. При этом, если считать условно, что в положительной области интенсивность распределения  $I(b) \sim 1$ , то в отрицательной области интенсивность

Возьмем в качестве распределения  $\sigma^\pm$  приближение (118) с использованием только  $\rho^{(\varepsilon,0)}(\mu, s)$ . Подставляя в (121) представление для  $d\sigma^\pm/d\mu$  из соотношения (117) и учитывая, что (115)

$$\varkappa(\mu) = 2\pi \int_1^\infty P_{i\mu-1/2}(x) \frac{dx}{x},$$

получим

$$\langle b_\pm^2 \rangle = \frac{2\pi}{\tilde{q}^2 \sigma^\pm} \int \left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) P_{i\mu-1/2}(x) P_{i\mu-1/2}(u_0) \frac{d\sigma^\pm}{d\Omega} \frac{dx}{x} \frac{du_0}{u_0} d\Omega_\mu. \quad (122)$$

Дифференциальное уравнение для функции конуса  $P_{i\mu-1/2}(u_0)$  по аргументу  $u_0$  можно представить в следующем виде [32]:

$$\left( \mu^2 + \frac{1}{4} \right) P_{i\mu-1/2}(u_0) = \left( -(u_0^2 - 1) \frac{d^2}{du_0^2} - 2u_0 \frac{d}{du_0} \right) P_{i\mu-1/2}(u_0).$$

Левая часть этого выражения входит подынтегральным множителем в соотношение (122), и ее подстановка позволяет провести интегрирование по  $\mu$  с использованием условия полноты функции конуса (25). Далее можно выполнить интегрирование и по переменной  $x$ . После несложных преобразований получим

$$\langle b_\pm^2 \rangle = \frac{2\pi}{\tilde{q}^2 \sigma^\pm} \int \frac{2}{u_0^3} \frac{d\sigma^\pm}{d\Omega} \frac{du_0}{u_0}.$$

Переходя в этом выражении от переменной  $u_0$  к углу рассеяния  $\theta$ , получим

$$\langle b_\varepsilon^2 \rangle = \begin{cases} \frac{2}{q^2 \sigma^+} \int_0^1 \cos^2 \theta \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta, & \varepsilon = 1, \\ \frac{2}{q^2 \sigma^-} \int_{-1}^0 \cos^2 \theta \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta, & \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Таким образом, окончательно получим

$$\langle b_\pm^2 \rangle = \frac{8s}{\lambda(s, m_C^2, m_D^2)} \langle \cos^2 \theta_\pm \rangle, \quad (123)$$

где

$$\langle \cos^2 \theta_\varepsilon \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^+} \int_0^1 z^2 \frac{d\sigma}{dz} dz, & \varepsilon = 1, \\ \frac{1}{\sigma^-} \int_{-1}^0 z^2 \frac{d\sigma}{dz} dz, & \varepsilon = -1, \end{cases}$$

где  $z = \cos \theta$ , а  $\langle b_{\pm}^2 \rangle$  определено соотношением (121). Отсюда следует

$$\langle \mu_{\pm}^2 \rangle = 2\langle \cos^2 \theta_{\pm} \rangle - \frac{1}{4}. \quad (124)$$

Параметр  $\mu$  является действительным, поэтому  $\mu^2 > 0$ . Отсюда из (124) следует важное физическое неравенство

$$\langle \cos^2 \theta_{\pm} \rangle \geq \frac{1}{8}. \quad (125)$$

Обсудим природу этого неравенства. Оно следует из действительности параметра  $\mu = \sqrt{b^2 q^2 / \hbar^2 - 1/4}$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка. Здесь  $b^2$  есть собственное значение оператора Казимира на группе  $SO(2,1)$  [24]. Спектр этого оператора в гильбертовом пространстве состояний удовлетворяет условию  $b^2 q^2 \geq \hbar^2/4$ , что и обеспечивает действительность параметра  $\mu$ . Само это неравенство имеет квантовую природу и отображает тот факт, что частица  $C$  не может родиться в фазовом объеме меньшем, чем допускается соотношением неопределенности Гейзенберга. Тот факт, что в качестве распределения  $d\sigma/d\mu$  мы использовали  $\rho^{(\epsilon,0)}(\mu, s)$ , только усиливает это неравенство. Использование полного выражения для распределения (109) должно привести к увеличению  $\langle b^2 \rangle$  в силу положительной определенности (109).

Обратим внимание на тот факт, что соотношение (123) между  $\langle b_{\pm}^2 \rangle$  и  $\langle \cos^2 \theta_{\pm} \rangle$  справедливо для любого процесса  $A + B \rightarrow C + D$  в с.ц.м. частиц  $A$  и  $B$ .

В модели с одночастичным обменом (119) нетрудно получить

$$\langle \cos^2 \theta_{\pm} \rangle = \pm 2z_0^2(z_0 \mp 1) \ln \left( \frac{z_0 \mp 1}{z_0} \right) \mp z_0 + 2z_0^2.$$

Отсюда следует, что

$$\langle b_{\pm}^2 \rangle = \frac{1}{q^2} \left( \pm 4z_0^2(z_0 \mp 1) \ln \left( \frac{z_0 \mp 1}{z_0} \right) \mp 2z_0 + 4z_0^2 \right).$$

Проанализируем эти выражения как функции параметра  $z_0$ . Анализ показывает, что  $\langle \cos^2 \theta_{\pm} \rangle$  меняется в пределах

$$\frac{1}{3} < \langle \cos^2 \theta_{+} \rangle \leq 1, \quad 0,23 \lesssim \langle \cos^2 \theta_{-} \rangle < \frac{1}{3}$$

при изменении  $z_0$  в интервале от 1 до  $\infty$ .

Таким образом, в этом разделе получено точное соотношение между амплитудой рассеяния частицы  $C$  в импульсном представлении и функцией распределения по пространственному параметру вылета этой частицы из области

взаимодействия. Эта функция описывает распределение вещества в мишени и позволяет понять природу ее составных частей на адронных масштабах. Вид функции распределения позволяет выделить существенный вклад, зависящий только от сечения рассеяния, т. е. от наблюдаемой величины. Причем вклад поправок выглядит малым ( $\sim 10^{-3} - 10^{-5}$  в рассмотренных моделях).

Получено соотношение между  $\langle b_{\pm}^2 \rangle$  и  $\langle \cos^2 \theta_{\pm} \rangle$  в с. п. м., где усреднение ведется по соответствующим дифференциальным сечениям. Это соотношение справедливо для любого процесса  $A + B \rightarrow C + D$ . Из него следует ограничение снизу на  $\langle \cos^2 \theta_{\pm} \rangle \geq 1/8$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсуждаемая в данном обзоре проблема связана с попыткой получить пространственную картину области рождения при столкновении частиц высоких энергий. Этот процесс сопровождается рождением большого числа частиц, эволюция которых до асимптотически свободных состояний проходит через ряд фаз. Описание этих состояний на языке пространственных характеристик области рождения впервые возникло при изучении упругих процессов. Эффективное использование условия унитарности позволило ввести важную физическую характеристику — неупругую функцию перекрытия  $G_{\text{inel}}(q, b)$ . Она определяется неупругими вкладами в упругий процесс и характеризует число частиц, рожденных на данном расстоянии  $b$  от точки столкновения. Введение функции  $G_{\text{inel}}(q, b)$  основано на эйкональном представлении амплитуды упругого процесса и по своему существу реализует квазиклассический переход от орбитального момента к прицельному параметру. Проблема такого перехода связана с областью его применимости. Он несправедлив в области малых прицельных параметров и больших углов рассеяния. Однако именно эта область определяет структуру функции  $G_{\text{inel}}(q, b)$  по  $b$ . Этот факт был положен в основу при исследованиях, изложенных в данном обзоре. Исходным для нас было теоретико-групповое описание прицельного параметра  $\mathbf{b}$  как вектора максимального сближения двух частиц. Его квантование позволило построить волновую функцию двухчастичного состояния с определенным  $b$  и получить разложение упругой амплитуды как функции на группе прицельного параметра. Коэффициенты разложения (профильная функция) удовлетворяют условию унитарности локально в каждой точке по  $b$  и обеспечивают унитарность амплитуды. Это свойство отсутствовало в эйкональном подходе, но именно оно позволяет построить неупругую функцию перекрытия во всей физической области изменения  $b$ .

Другой аспект проблемы описания пространственной структуры области взаимодействия связан с получением функции распределения по параметру

вылета детектируемой частицы  $C$  из области взаимодействия. Этот параметр определяется как вектор максимального сближения траектории асимптотически свободной частицы с точкой « $O$ », которая связывается с положением частицы-мишени или с точкой столкновения частиц. Мы ожидаем, что неоднородность в структуре функции распределения должна отражать неоднородность распределения адронной материи в области рождения частицы  $C$ . Нами получена связь функции распределения с амплитудой процесса  $A+B \rightarrow C+D$  во всей области углов рассеяния частиц  $C$ . Является ли построенный формализм эффективным методом изучения динамики процессов на языке пространственных характеристик, станет ясным после детального изучения и обработки всей совокупности экспериментальных данных по сечениям и известных моделей амплитуд процессов.

В настоящее время в рамках теорем факторизации известна геометрическая интерпретация обобщенных партонных функций распределения (GPD) в системе бесконечного импульса адрона. С помощью развитого метода мы надеемся обобщить такую интерпретацию на произвольные системы. По всей видимости, это будет интегральное соотношение типа функции Вигнера, в пределе системы бесконечного импульса переходящее в известные соотношения для распределений частиц в поперечной плоскости [44].

Авторы благодарят профессоров С. Э. Коренблита и М. В. Полякова за плодотворные дискуссии и критические замечания. А также Н. Бобровскую за помощь в работе над разд. 3 и 4.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для ведущих научных школ (НШ-1027.2008.2), а также при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» (проект РНП.2.2.1.1/1483).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glauber R. J.* Lectures in Theoretical Physics. N. Y., 1959. V. 1. P. 345.
2. *Zachariasen F.* Theoretical Models of Diffraction Scattering // Phys. Rep. C. 1971. V. 2. P. 1.
3. *Barone V., Predazzi E.* High-Energy Particle Diffraction // Phys. Rep. 2002. V. 1. P. 359.
4. *Selyugin O. V., Cudell J. R., Predazzi E.* Analytic Properties of Different Unitarization Schemes. hep-ph/0712.0621v1. 2007.
5. *Selyugin O. V., Cudell J. R., Predazzi E.* Analytic Properties of Different Unitarization Schemes. hep-ph/0712.0621v2. 2008.
6. *Troshin S. M.* Comment on the «Extended Eikonal» Unitarization. hep-ph/0712.3359v1. 2007.



7. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
8. *Chou T. T., Yang C. N.* Elastic Scattering at CERN Collider Energy and the Geometrical Picture // *Phys. Lett. B.* 1983. V. 128. P. 457;  
*Chou T. T., Yang C. N.* A Unified Physical Picture of Multiparticle Emission: Wide Multiplicity Distribution for  $\bar{p}p$  and Narrow Multiplicity Distribution for  $e^+e^-$  Collisions // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1987. V. 2. P. 1727;  
*Chou T. T., Yang C. N.* A Unified Physical Picture of Multiparticle Emission in Anti- $\bar{p}p$  and  $e^+e^-$  Collisions // *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* 1988. V. 2. P. 510;  
*Chou T. T., Yang C. N.* Charge Transfer in High-Energy Fragmentation // *Phys. Rev. D.* 1973. V. 7. P. 1425.
9. *Cheng T. P., Li L. F.* Experimental Study of Electroweak Parameters at PETRA Energies ( $12 < E(\text{cms}) < 36.7$  GeV) // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 46. P. 1663.
10. *Van Hove L.* Multiplicity Dependence of  $p(T)$  Spectrum as a Possible Signal for a Phase Transition in Hadronic Collisions // *Phys. Lett. B.* 1982. V. 118. P. 138;  
*Van Hove L.* High-Energy Collisions of Strongly Interacting Particles // *Rev. Mod. Phys.* 1964. V. 36. P. 655;  
*Van Hove L.* Symplectic Symmetry of Hadrons // *Nuovo Cim.* 1965. V. 35. P. 510.
11. *Harsen P. H., Krisch A. D.* // *Phys. Rev. D.* 1977. V. 15. P. 3287.
12. *Alcoch J. W. et al.* // *Nucl. Phys. B.* 1973. V. 67. P. 445.
13. *Pamplin T. et al.* // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 10. P. 2918.
14. *Capella A., Chen M. S.* Increasing Cross-Sections, Diffractive Excitation, and the Triple-Pomeron Coupling // *Phys. Rev. D.* 1973. V. 8. P. 2097.
15. *Кайдалов А. Б.* Дифференциальное сечение  $\pi\pi$ -рассеяния в состоянии с  $I = 2$  // *ЯФ.* 1974. Т. 19. С. 1032.
16. *Amaldi U.* Introductory Remarks to a Discussion on Rising Cross-Sections // *Proc. of Intern. Conf. on Elementary Particles, Aix-en-Provence, 1973.*
17. *Carruthers P., Zachariasen F.* Quantum Collision Theory with Phase Space Distribution Functions // *Rev. Mod. Phys.* 1983. V. 55, No. 1. P. 245.
18. *Höhler G., Jakob H. P.* // *Z. Phys.* 1973. V. 261. P. 371.
19. *Adachi T., Kotani T.* An Impact Parameter Representation of the Scattering Problem // *Progr. Theor. Phys. (Kyoto).* 1968. V. 39. P. 785.
20. *Islam M. M.* The Optical Model at High Energies // *Phys. Today.* 1972. V. 25, No. 5. P. 25.
21. *Elvekjaer F., Petersen J. L.* Geometrical Description of Binary Reactions and Large  $p(T)$  Phenomena. Preprint CERN-TH-1971. 1975. P. 25.
22. *Yenkovsky L. L., Soldatenko O. N., Vall A. N.* An Off-Mass-Shell Regge-Pole Amplitude for Deeply Virtual Compton Scattering and Nucleon Structure // *Non-Euclidean Geometry in Modern Physics: Proc. of the 5th Intern. Conf. Bolyai–Gauss–Lobachevsky (BGL-5), Minsk, Oct. 10–13, 2006.* P. 340–348.
23. *Soldatenko O. N., Vall A. N., Vladimirov A. A.* Unitarization of Elastic Amplitude on  $SO_\mu(2,1)$  Group. hep-ph/0805.2296v1. 2008.

24. Валл А. Н., Солдатенко О. Н., Владимиров А. А. Теоретико-групповое описание пространственной области столкновения частиц // Изв. вузов. Физика. 2008. Т. 51, № 3. С. 92–96;  
*Polyakov M. V. et al. Spatial Image of Hadrons from Scattering I:  $SO_{\mu}(2,1)$  Algebra Formalism. hep-ph/0708.2857. v1. 2007.*
25. *Sorensen P. R. Kaon and Lambda Production at Intermediate  $p_T$ : Insights into the Hadronization of the Bulk Partonic Matter Created in Au + Au Collisions at RHIC. Univ. of California, Los Angeles. nucl-ex/0309003. v2. 2003.*
26. Валл А. Н., Солдатенко О. Н., Владимиров А. А. Пространственная структура области столкновения частиц и ее связь с угловым распределением детектируемой частицы // Изв. вузов. Физика. 2008. Т. 51, № 6. С. 33–37;  
*Бобровская Н. и др. О связи дифференциальных сечений по поперечному импульсу и пространственному параметру вылета детектируемой частицы // Материалы X конф. молодых ученых «Современные проблемы в астрофизике и физике космической плазмы», Иркутск, 17–22 сент. 2007 г. Иркутск, 2007. С. 282–284;*  
*Bobrovskaya N. et al. Distribution Function on Coordinates of Effective Area Generation of a Particle II: On Connection between the Differential Cross-Sections in the Transverse Momentum and Spatial Parameter of the Detecting Out-Going Particle. hep-ph/0709.3398. v1. 2007.*
27. Фок В. А. // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 7. С. 279–283.
28. Валл А. Н., Макеев Н. А. Группа прицельного параметра и ее реализация // ЯФ. 1978. Т. 27, вып. 2. С. 558–564.
29. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.
30. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А. // ЖЭТФ. 1964. Т. 46, вып. 5.
31. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 1.
32. *Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. N. Y.: McGraw-Hill, 1953. V. 2.*
33. *Collins P. D. B. An Introduction to Regge Theory and High-Energy Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977.*
34. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
35. *Hobson E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge Univ. Press, 1931.*
36. *Petrov V. A. et al. Novel Features of Diffraction at the LHC // J. Phys. G. 2001. V. 27. P. 2225.*
37. *Kogut J. B., Soper D. E. Quantum Electrodynamics in the Infinite Momentum Frame // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 2901.*
38. *Bjorken J. D., Kogut J. B., Soper D. E. Quantum Electrodynamics at Infinite Momentum: Scattering from an External Field // Phys. Rev. D. 1972. V. 3. P. 1382.*

39. Hofstadter R., McAllister R. W. Electron Scattering from the Proton // Phys. Rev. 1955. V. 98. P. 217–218.
40. Goeke K., Polyakov M. V., Vanderhaeghen M. Hard Exclusive Reactions and the Structure of Hadrons // Prog. Part. Nucl. Phys. 2001. V. 47. P. 401; hep-ph/0106012.
41. Diehl M. Generalized Parton Distributions // Phys. Rep. 2003. V. 388. P. 41; hep-ph/0307382.
42. Diehl M. Generalized Parton Distributions in Impact Parameter Space // Eur. Phys. J. C. 2002. V. 25. P. 223.
43. Belitsky A. V., Radyushkin A. V. Unraveling Hadron Structure with Generalized Parton Distributions // Phys. Rep. 2005. V. 418. P. 1; hep-ph/0504030.
44. Burkardt M. Impact Parameter Dependent Parton Distributions and Off Forward Parton Distributions for  $\zeta \rightarrow 0$  // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 071503; hep-ph/0005108.
45. Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.
46. Андрианов А. А. Представление прицельного параметра с точки зрения группы Пуанкаре // ТМФ. 1973. Т. 17. С. 407–421.
47. Huszar M. Impact Parameter States and Infinite Momentum Frame Kinematics // Nuovo Cim. A. 1976. V. 31. P. 297.
48. Radyushkin A. V. Nonforward Parton Densities and Soft Mechanism for Form-Factors and Wide Angle Compton Scattering in QCD // Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 114008.
49. Diehl M. et al. Linking Parton Distributions to Form-Factors and Compton Scattering // Eur. Phys. J. C. 1999. V. 8. P. 409.
50. Валл А. Н. Плоские волны на группе прицельного параметра // ЯФ. 1978. Т. 28, вып. 4(10). С. 1091–1097.
51. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. Представление для релятивистской амплитуды при высоких энергиях // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, 3.
52. Шапиро И. С. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106. С. 647.
53. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд. М.: Наука, 1984.
54. Гольданский В. И., Никитин Ю. П., Розенталь И. Л. Кинематические методы в физике высоких энергий. М., 1987. С. 199.
55. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Tables of Integrals, Series and Functions. N. Y.: Pergamon, 1964.
56. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1988. Т. II. С. 509.